

T.C.  
Osmangazi Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri  
Matematik, Doğa ve Sanat  
Lisans Bitirme Tezi

KAOS TEORİSİ VE MATEMATİK

CANSU UYSAL

121620181026

Danışman: Prof Dr. Şerife Nevin Gürbüz

ESKİŞEHİR, 2022

## İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	2
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	2
1.KAOS TARİHÇESİ.....	3
2.KAOS TANIMI .....	5
3. KAOS TEORİSİNİN PRENSİPLERİ.....	7
3.1.KELEBEK ETKİSİ .....	7
3.2. ÖNGÖRÜLEMEZLİK .....	8
3.3. KARIŞIM/ÇALKANTI.....	8
3.4. GERİ BESLEME.....	8
3.5. FRAKTALLAR.....	9
4. KAOSUN MATEMATİKTEKİ TERİMLERE ETKİSİ.....	9
4.1. İYİ TANIMLILIK .....	9
4.2. MATEMATİK AÇISINDAN ASIL SORUN NEDİR? .....	10
5. ÇEKİCİ TİPLERİ.....	11
5.1. LORENZ ÇEKİCİSİ.....	11
5.2. HENON ÇEKİCİSİ .....	12
5.3. CHUA ÇEKİCİSİ.....	12
5.4. VAN DER POL ÇEKİCİSİ .....	13
5.5. LABİRENT KAOSU.....	14
KAYNAKÇA .....	15

## ŞEKİLLER LİSTESİ

(Şekil1).....	4
(Şekil2, Lorenz Çekicisi).....	4
(Şekil3, Lorenz Çekicisi).....	4
(Şekil4).....	5
(Şekil5, Kelebek Etkisi).....	8
(Şekil6, Fraktal).....	9
(Şekil7, Fraktal).....	9
(Şekil8, Lorenz Çekicisi).....	11
(Şekil9, Henon Çekicisi).....	12
(Şekil10, Chua Çekicisi).....	13
(Şekil11, Van Der Pol Çekicisi).....	13
(Şekil12, Labirent kaos yörüngesi).....	14

## 1.KAOS TARİHÇESİ

Kaos kavramı ve teorisi ile ilgili her şey ilk olarak 19.yüzyılın sonlarında Fransız matematikçi Jules Henri Poincare'nin çalışmaları ile başlamış olsa da Aristoteles'in şu anda hassas bağımlılık dediğimiz şeye benzer bir şeyin zaten farkında olduğu söylenebilir. Metodoloji ve epistemoloji hakkında yazarken, “gerçekten başlangıçtaki en küçük sapmanın daha sonra bin kat arttığını” gözlemledi. [8] Bununla birlikte, fiziksel bir sistemin davranışı üzerinde önemli etkiler üretmek için bu küçük bozuklukların ne tür büyük olaylara yol açacağını düşünmek, Edward Lorenz'in çığır açan makalesinin yayınlanmasından sonra giderek yoğunlaşan bir araştırma fenomeni haline geldi.

Fransız matematikçi Jacques Hadamard, 1922'ye kadar başlangıç koşullarına hem sürekli hem de süreksiz bağımlılık sergileyen kısmi diferansiyel denklemler için bir çerçeve geliştirmişti. Duyarlı ancak sürekli bağımlılık sergileyen herhangi bir denklem, onun çerçevesinde iyi hazırlanmış problemlerdir; bununla birlikte, böylesine hassas bir bağımlılık sergileyen bir fiziksel sistem için denklemlere yönelik herhangi bir çözümün, hedef sistemin hiçbir yasaya uymadığını gösterebileceği olasılığını gündeme getirdi.

Dinamik sistemler üzerinde çalışmış olan tüm klasik matematikçi ve fizikçiler arasında kaos kavramını en iyi anlayan bilim adamı Poincare olmuştur. Poincare “Bilim ve “Yöntemler” adlı eserinde, çok değişkenli sistemlerin kalıcı çözümlerinin olmadığını, çözümlerin sonsuz bir şekilde sürebilen oynak bir durum alacağını ve bunun da sistemlerde geleceğin tahminine izin vermeyeceğini ifade eder. Poincare şöyle devam eder: “Dikkatlerimizden kaçan küçücük noktalardan biri, öylesine büyük ve önemli sonuçlara neden olur ki, bizde kalkıp bu sonucun rastlantı sonucu ortaya çıktığını söyleriz”. Aslında sonuç rastlantıdan çok daha farklıdır. Poincare tarafından tartışılan bir örnekte, işine giderken yolda yürüyen adamdır. Belirli bir zamanda başlar. Bu sırada bilmediği, aynı sokakta bir binanın çatısında çalışan bir kiremitçi vardır. Kiremitçi yanlışlıkla bir kiremit düşürür ve iş adamını öldürür. İş adamı işe biraz daha erken ya da geç başlasaydı, gidişatın sonucu çok daha farklı olurdu.

Her ne kadar kaos kavram ve teorisinin babası Jules Henri Poincare kabul edilse de teoriye en önemli katkıyı 1960 yılında M.I.T.'de meteoroloji profesörü olan Edward Lorenz yapmıştır. Deterministik bir sistemi doğru parametreler ve doğru dinamik ile modeller ve bu modeli çözersek ne zaman ne olacağını bilebiliriz. Edward Lorenz havanın bir sistem olduğunu dolayısıyla doğru bir model ile birkaç günlük ve istatistiksel hava tahminleri yerine, uzun dönemli ve kesin hava tahminleri yapılabileceğini düşünüyordu. Bunu gerçekleştirebilmek için hava olaylarını modellemeye çalıştı, ancak o kadar çok değişken vardı ki kurduğu modeli incelemek için sadeleştirdi ve neticede üç ana değişkenden oluşan bir model elde etti (şekil: 1) [11]. Ancak bu model de lineer olmayan bir yapıya sahipti ve analitik çözümü o an için ulaşılmaması mümkün görünmüyordu. Geliştirdiği modeli, havanın birkaç dakika sonrasını doğru bir şekilde tahmin etmesine imkan veren bir yazılım haline getirmeyi başardı. Bunun üzerine uzun vadeli tahminler üretmeye odaklandı. Bunun için tesadüf eseri seçmiş olduğu sıcaklık değerlerini en hassas termometrenin dahi algılayamayacağı düzeyde ufak oranlarda yükselterek fonksiyonu tekrar çalıştırdığında, fonksiyonların grafiklerde de herhangi bir fark yaratmamasını beklerken sonuçta ortaya

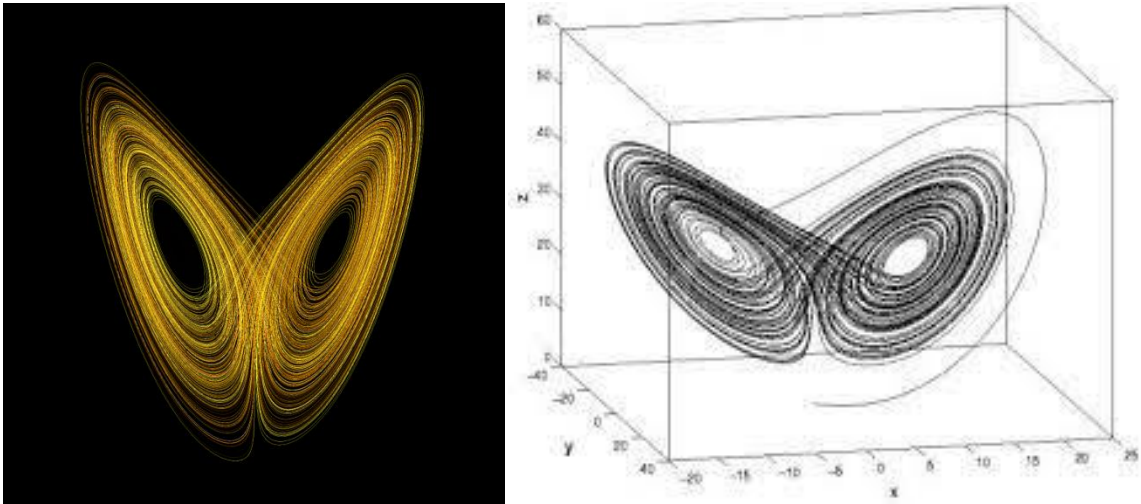
bambaşka fonksiyonların çıktığını görür. Grafikteki iniş ile çıkışların uzun dönemde tıpkı bir kelebeğe benzer desene neden olduğunu gözlemledi.

Lorenz’in bu sonuçtan çıkardığı yorum, “doğru ve güvenilir uzun vadeli hava tahmininin kaotik davranışı nedeniyle belli bir süreyi aşamayacağı, bu nedenle periyodik olmayan davranış özellikleri gösteren hiçbir sistemde öngörü yapmanın mümkün olmadığı şeklinde olmuştur.[16]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -10(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + 28x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - 8z/3\end{aligned}$$

(şekil: 1)

Lorenz sadece kaosu keşfetmekle kalmadı, aynı zamanda onun anahtar mekanizmasını da belirledi. Verileri birkaç eksen boyunca grafiğini çizdiğinde, yakındaki iki noktayı yinelenmenin (yörüngeyi zaman içinde çizerek) ayrılımlarına neden olan garip özelliği kaydetti. İki noktanın matematiksel “yavruları” bilgi bulutunun tamamen farklı bölgelerinde olacak kadar geniş bir şekilde ayrılıncaya kadar, boşluk her yinelemede daha da büyüyecekti. Öte yandan, yinelenirse buluta hızlı bir şekilde yaklaşıcağına işaret eder. Böylece Lorenz denklemlerinin dinamikleri iki çelişkili amaca hizmet etti: veri kümesi içindeki yörüngelerin itilmesi ve bunun ötesindeki çekim. Böyle karmaşık bir sisteme “garip çekici” denir ve Lorenz tarafından keşfedilen özel dinamiklere “Lorenz çekicisi(şekil: 2,şekil: 3)” denir.



(şekil: 2, şekil3: Lorenz çekicisi)

Garip çekiciler, Fransız-Polonyalı matematikçi Benoit Mandelbrot tarafından “fraktallar” olarak adlandırılan bu yapılar kendine benzer bir yapıya sahiptir. Garip bir çekicinin haritasını çıkarırsanız ve herhangi bir bölgesini yakınlştırırsanız, bu küçük bölge yapı olarak her şeye benzer görünür. Benzer şekilde, bölgenin herhangi bir küçük bölümünü büyütme, bölgenin kendisine benzer bir örüntü ortaya çıkarır ve bu böyle devam eder.

## 2.KAOS TANIMI

Kaos Teorisi, “doğal olarak öngörülemeyen” sistemlerin davranışını tahmin etme bilimi olarak tanımlanır ve tanımı gereği bile içinde derin bir çelişki barındırır. Kaos Teorisi, türbülans, hava durumu, borsa, beyin durumlarımız vb. gibi tahmin edilmesi veya kontrol edilmesi fiilen imkansız olan doğrusal olmayan şeylerle ilgilenir.

Kaos Teorisi’nin merkezinde, düzen ve kaosun her zaman taban tabana zıt olmadığına dair büyüleyici bir fikir vardır. Aynı gerçekliğin iki farklı görünümü gibi olan düzen ve kaos , aslında birbirleriyle iç içe geçmiş, eş zamanlı olarak iki yönlü var olabilen ve evrenin kusursuzluğunu adeta bizlere göstermeye çalışan bir sistemler bütünü olarak adlandırılabilir. “Damlayan bir banyo musluğunun damlaları arasında düzenli bir uyum vardır. Oysaki musluğu hafifçe çevirdiğinizde, bu düzen yerini başka bir tempoya bırakır. Musluğu biraz daha açarsanız, artık düzenden bahsedemezsiniz; çünkü artık suyun akışına kaos hakimdir.”

Günümüzde “kaos”, sadece “karmaşa” anlamında kullanılmaz. Bilimsel anlamda en genel şekliyle “düzensizliğin içindeki düzen (order of disorder)” olarak ifade edilen kaos, “rastgele gibi gözüken nonlinear(doğrusal olmayan) deterministik bir süreçtir.”

Kaos Teorisi’ne göre kaotik sistemler kendine has bir düzene sahiptir ve bazı durumlarda dış etkilere karşı kararlı bir tutum sergilediği görülür. Buna en güzel örnek: Jüpiter’in üzerindeki büyük kırmızı leke görünümlü dev fırtınadır (şekil: 4), leke kaotik-fraktal yapıdadır ve gözlem yaptığımız üç yüz seneyi aşkın bir zamandır gözlerimizin önünde kendince kararlı yapısını korumaktadır.[14]



(şekil: 4)

Kaos, bilimin geldiği nokta olarak da görülebilir ve bize evrendeki birçok durumun lineer mantık bağlamında olamayacağını, bilimin klasik yapısının bu konuda yetersiz olduğunu ve çok kesin neden-sonuç ilişkilerine gidilemeyeceğini göstermektedir. Kaos’un bakış açısıyla diyebiliriz ki; evrende, “yer çekiminin cisimleri yerin merkezine çekeceği, sıcak havanın terleteceği gibi kendini tekrarlayan ve adeta alışkanlık olarak gördüğümüz birçok olgu

bulunmaktadır. Ancak yeryüzündeki birçok olay bu kadar kesin neden-sonuç ilişkileriyle veya doğrusal modellerle açıklanamamaktadır.”

Bilim tarihi içinde pek çok matematikçi, fizikçi, vb.lerinin olduğu bilim adamları tarafından çok sayıda kaos tanımlaması yapılmıştır. Aşağıda bununla ilgili örnekler mevcuttur:

- Aşırı derece karışıklık ve düzensizlik durumu
- Kozmos oluşmadan önce maddenin şekilsiz ve düzensiz olduğu hal
- Yunan mitolojisinde tanrının gözüktüğü ilk hali

Bunlara ek olarak termodinamiğin ikinci kanunu da kaosu işaret etmektedir. Bu yasa evrende bırakılan sistemlerin zamanla düzensizleşeceğini ve bozulacağını belirtir ve bu ifade entropi kavramıyla açıklanır. Buna göre bozukluğun çoğu “sürekli”dir ve nereye gittiği bilinmez ve önceden kestirilemez.

Kaos Teorisi, ortaya çıkışıyla birlikte bilimsel anlamda köklü ve radikal değişikliklere yol açmıştır. Teorinin ortaya çıkışına kadar, doğanın bütününe şekillendirecek ve genel olarak deterministik modellerle belirli bir düşünce modeline kesinlik kazandıracak, neredeyse yeni hiçbir şeyin keşfedilemeyeceği düşünülen bir sistem egemendi. Görelilik, kuantum ve ardından kaos teorilerinin bulunmasıyla bilimdeki, bu evreni sorunsuz işleyen bir “makine” gibi görme süreci yerine doğayı-canlıları oldukları gibi ve onları oluşturan en küçük birimleri de önemseyerek ele alan fikir yapısı oluşmaya başladı.

Bazı fizikçilere göre, kaos bir durumun bilimi değil bir sürecin bilimidir; bir var oluşun bilimi değil bir oluşumun bilimidir.

Sürekli bir kararsızlık durumu olarak da görülen kaos; “uzay araçlarında kullanılan sıvı aktarım sistemlerinde sıvının basınç değişimlerinin hesaplanmasında, deniz altında yaşayan kabuklu hayvanların kabuk şekilleri ve renk düzenlerinin hesaplanması, olası canlı yapılarının öngörüsünün bulunmasında, kalp ve damar sistemlerinin incelenmesinde, iklim modellerinde, yıldız ve galaksilerin dağılımının belirlenmesinde, biyolojik araştırmalarda, her türlü kitle hareketlerinin çözümlenmesinde vb. sayısız alana uygulanan ve kişisel olarak da değişik alanlara uygulanarak sonuçları gözlenebilecek bir bilgidir.”

Kaos yaklaşımı, özellikle öngörülemeyen determinizm bağlamında önemli bir değişiklik getirmiştir. Sistemin yapısı ne kadar iyi tasarlanmış olursa olsun mutlaka gözden kaçan veya hesaplanmayan bir nokta olacak ve bu durum, gözden kaçan noktanın sistem sonuçlarında çok büyük bir değişikliğe yol açmasına ve sistemin başlangıç noktasından çok farklı yerde olmasına sebep olacak. Bu duruma kaos teorisi içinde “Başlangıç Koşullarına Hassas Bağlılık” adı verilir. Bu özelliğin bir sonucu da sistemde uzun vadeli öngörü yapma imkânını ortadan kaldırmasıdır. En basit ve bilinen haliyle “Pekin üzerinde kanat çırpın bir kelebeğin New York’ta fırtınaya yol açacağı” şeklinde modellenen bu özelliğin diğer bir adı da “Kelebek Etkisi” olarak geçmektedir.

“Sistemin davranışı hakkında uzun vadeli doğru tahminlerde bulunmanın mümkün olup olmadığı konusu ile ilgilenen” kaos, evrenin tamamıyla kaotik olduğunu göstermiştir. Teorinin fikir babası sayılan Poincare, XIX.yy. sonlarında basit dinamik sistemlerin davranışlarında oluşturdukları tahmin edilemeyen değişimler ve başlangıç durumuna hassas bağıllık ile matematiğe yeni bir bakış açısı getirmiştir.

Para piyasalarının uzun süreli “davranış” kayıtlarının kaotik yöntemlerle incelenerek matematiksel olarak modellenmesinin, kısa vadeli de olsa, sağlıklı borsa hareketi tahminleri yapılmasına imkan verdiği görülünce, kaos daha da ünlendi, canlı sistemlerde, adeta tam bir karmaşa halinde hareket eden beyin dalgaları, kan basıncı dalgalanmaları, epilepsi, ve benzeri sinirsel hastalıkların ortaya çıkış düzenleri gibi bir çok rastgele olayın, aslında belli kurallar ve döngüler içinde gerçekleştiğini yine kaos biliminin matematiksel formülleri ortaya koydu”.

### **3. KAOS TEORİSİNİN PRENSİPLERİ**

Kaos teorisi, pek çok alt bileşeni olan bir teoridir.

#### **3.1.KELEBEK ETKİSİ**

Kelebek etkisi; kaos teoreminin birincil ilkesi olup başlangıçta sistemde yapılan çok ufak bir hatanın tahmin edilemeyecek düzeyde büyük sonuçlar yaratmasıdır. Bu kavrama kelebek etkisi denilmesinin sebebi; kelebeğin kanat çırpması küçük de olsa, gösterdiği etkiyle her şeye yön verebilmesidir.[19]

Kelebek etkisiyle domino taşı gibi her şey zincirleme olarak birbirini etkilemekte dolayısıyla hayat bu döngüden ibaret bir şekilde devam etmektedir. Kelebek etkisinde; hayat boyunca alınan kararlar geleceğe yön vermektedir. Hayat o kadar hassas bir dengeye sahiptir ki; küçük bir kar tanesi bir kartopuna ve hemen ardından çığa dönüşebilmektedir. Bu sonuç, hayatta önemsiz görünen olayların aslında hayatın akışını doğrudan etkilediğini göstermektedir.

Bu ilkeyi, Edward Lorenz hava durumu deneyi yaparken geliştirmiş ve 1972’de “ Afrika’da Amazon Ormanları’nda bir kelebeğin kanat çırpması ABD’de fırtınaya neden olabilmektedir” ifadesini kullanmıştır.

Bu teoriye dünyadan örnekler verilebilir;

- 1.Dünya Savaşı’nın başlama sebebi olarak bir Sırp milliyetçinin Avusturya-Macaristan prensini öldürmesi,

-ABD’de polis memurunun siyahi bir genci acımasızca öldürmesi sonucu çıkan anarşi,

- Tunuslu gencin kendini yakmasıyla ortaya çıkan Arap Baharı,

gibi küçük görünen olaylar kelebek etkisi yaratarak devrim niteliği oluşturmuştur.

Mevcut dönemde yaşanan küresel salgın Covid-19, bir kişinin ihmalinden dolayı dünyada milyonlarca insana yayılmıştır. Vuhan’daki virüs tüm dünyada fırtına yaratmıştır.[19]

Kelebek etkisi, hava durumu sonucu geliştirilse de tüm insanlığı etkisi altına alarak ekonomi, eğitim, psikoloji, finans ve felsefe gibi birçok bilim dalında kullanılmaktadır.

Finansal piyasalar açısından bakıldığında; kelebeğin kanat çırpmasıyla oluşan rüzgarın dünyanın tüm finansal piyasalarında durgunluğa yol açması, altın ve döviz fiyatlarını yükseltmesi, bankacılık sektörü ve borsalarda fırtına yaratması teorinin eseridir. Çünkü finansal piyasaları etkileyen faktör sayısının çokluğu nedeniyle uzun vadeli tahminleme yapabilmek o kadar güç ve yanılma payı da bir o kadar yüksektir. Bu faktörlerden birinin önemsiz gibi düşünerek atlanması, kelebek etkisiyle çok büyük değişimlere yol açabilir. Bu nedenle konu finansal piyasalar olunca, kelebek etkisinden kurtulabilmek neredeyse imkansız gibi görünmektedir.



(şekil: 5)

### 3.2. ÖNGÖRÜLEMEZLİK

Karmaşık bir sistemin tüm başlangıç koşulları yeterli (mükemmel) ayrıntıda asla bilinmez ve karmaşık bir sistemin nihai kaderi tahmin edilemez. Bir sistemin durumunun ölçülmesindeki en ufak hatalar bile dramatik bir şekilde büyüyecek ve herhangi bir tahmini yararsız hale getirecektir. Dünyadaki tüm kelebeklerin ve benzerlerinin etkilerini ölçmek imkansız olduğundan, doğru uzun menzilli hava tahmini her zaman imkansız kalacaktır. [20]

### 3.3. KARIŞIM/ÇALKANTI

Türbülans, karmaşık bir sistemdeki iki bitişik noktanın, bir süre sonra çok farklı konumlara gelmesini sağlar. Örneğin, iki komşu su molekülü bir süre sonra okyanusun farklı bölgelerine ve hatta farklı okyanuslara sürüklenebilir. Birlikte fırlatılan bir grup helyum balonu, sonunda birbirinden çok uzak noktalara varabilir.[20]

### 3.4. GERİ BESLEME

Geri bildirim mevcut olduğunda, sistemler genellikle kaotik hale gelir. Buna iyi bir örnek, borsa hareketleri olabilir. Bir hisse senedinin değeri yükseldiğinde veya düştüğünde, insanlar bu hisseyi alma veya satma eğilimi gösterir. Bu durum, söz konusu hisselerin fiyatını daha da fazla etkiler ve değerinin kaotik bir şekilde yükselmesine ya da düşmesine neden olur.

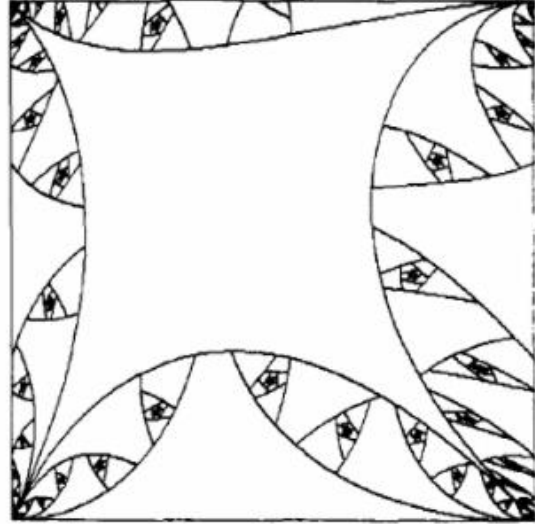


### 3.5. FRAKTALLAR

Sonsuza dek devam eden, kendine benzeyen, karmaşık desenlerdir. Tekrarlama örüntüsüyle devam eden fraktallar, kaosu görüntüye bürünmüş halidir. Fraktallar, doğada her yerde insanın karşısına çıkmaktadır. Örneğin ağaç dalları, kar taneleri, dolaşım sistemi, elektrik ve bulutlarda fraktal örneklerine rahatlıkla rastlanır.



(şekil:6)



(şekil: 7)

### 4. KAOSUN MATEMATİKTEKİ TERİMLERE ETKİSİ

Yinelemeyle yaratılan ve kaotik olarak kabul edilen belirli fenomenler matematik için yeni ufuklar açıyor mu? Buna “evet” demek zaten zor. Ama kendi kendini tekrarlayan geometrik şekillerden çıkan fraktal geometri ve fraktal boyut kavramları geleneksel matematiğe yeni giren kavramlardır.

Geçen yüzyılın başlarında ortaya çıkan L-sistem adlı iterasyon yöntemi önceleri ilgi görmedi. 1950 li yıllarda Noam Chomsky doğal dilleri söz dizimine uyguladı. 1968 yılında biyolog Aristid Lindenmayer tarafından bitkilerin büyümesini temsil etmek üzere kullanıldı. Harflerin kısa bir dizimiyle temsil edilen basit bir nesneden başlayarak çok karmaşık nesneler yaratabilen bir iterasyon yöntemidir.

Bu kavramların matematikte yeni ufuklar açıp açmayacağını zamanla göreceğiz.

#### 4.1. İYİ TANIMLILIK

Bilgisayarın olmadığı dönemlerde, iterasyon sonucu oluşan yörüngeleri elle çizmek olanaksızdı. Dolayısıyla bunların öngörülemez dinamik sistemler; kaotik sistemler olduğu sonucuna varmak doğaldı. Ama, artık bu tür iterasyon yöntemleriyle elde edilenlerin özelliklerini epeyce biliyoruz ve bilgisayar grafiklerini çizebiliyoruz.

Belki, kaosu sistemin öngörülemezliği olarak tanımlamak yetersizdir. Çünkü bu tanıma dayanarak, geriye dönüp Kepler zamanına kadar güneş sisteminin kaotik bir yapı oluşturduğunu ama Keplerden sonra kaotik yapıdan kurtulduğunu mu söyleyeceğiz? Tanımın yetersizliğinden dolayı, bazı sistemlere “deterministik kaos” gibi garip bir sıfat takılmıştır. Bir

dinamik sistemin davranışını öngörememek başka şeydir, o sistemin davranışının öngörülemeyeceğini kanıtlamak başka bir şeydir.

#### 4.2. MATEMATİK AÇISINDAN ASIL SORUN NEDİR?

Julia kümeleri, Mandelbrot kümeleri, Sierpinski üçgeni, Cantor tozu, eğrelti otu, brokoli gibi örnekler ister kaotik sistem sayalım, ister saymayalım, asıl sorunumuz başkadır. İterasyonlar ile istediğimiz kadar kaotik sistemler yaratabiliriz. Hatta kendi kendisini tekrar etmesi gerekmeyen sınırsız sayıda ardışık işlemler yaparak sistemi tamamen içinden çıkılmaz duruma getirebiliriz. Bunu şöyle bir örnekle açıklayabiliriz. Elimizde bir  $y=f(x)$  fonksiyonu olsun. Bunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerini almayı da içeren sonlu sayıda cebirsel işleminden oluşan bir operatöre, iterasyonun bir adımı gözüyle bakalım. Bu adımları ardışık olarak uygulayarak çok karmaşık bir diferansiyel denklem üretmek kolaydır. İşlemlerden sonra ürettiğimiz denklem şöyle olsun:

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

Şimdi yaptığımız işlemleri unuttuğumuzu varsayalım ve başladığımız fonksiyonu yeniden bulmak isteyelim. Daha iyisi, yaptığımız işlemlerden habersiz olan birisinden bu diferansiyel denklemi çözüp yeniden  $y=f(x)$  fonksiyonunu bulmasını isteyelim. Eğer denklemimiz çözüm yöntemi bilinen bir sınıfa girmiyorsa, hiç kimse fonksiyonu bulamayacaktır.

Söz gelimi, Sierpinski üçgeni sonunda düzlemde bir toz halini alacaktır. Olayın geçmişini hiç bilmeyen birisi, bu tozun bir üçgenden Sierpinski iterasyon kuralı ile elde edildiğini ispatlayabilir mi?

Bu gün belli iterasyonlarla “kaotik grafikler” çizen bilgisayarlarımız, günün birinde başkasının çizdiği “kaotik grafiklere” bakarak iterasyon kuralını ve kuralın başlangıcını çıkarmaya başlarsa matematikçileri çok mutlu edeceklerdir.

Dinamik sistemlerde istenen şey, dinamik kural dediğimiz diferansiyel denklemin çözümünü bulmaktır. Buna matematikte tersinme problemi diyoruz. Cebir, analiz ve diferansiyel denklem kuramlarımız çoğunlukla tersinme problemiyle uğraşır. Çünkü, determinizmin istediği şeyleri veren odur. Öte yandan, bütün problemleri çözen bir tersinme kuralı yoktur. Bu nedenle problemler kendi içlerinde birbirine benzer sınıflara ayrılıp, her sınıf için ayrı ayrı çözüm yöntemleri geliştirilir. Örneğin, bütün diferansiyel denklemleri çözen bir tek yöntem yoktur. Bunun yerine, her diferansiyel denklem sınıfı için ayrı ayrı çözüm yöntemleri aranır. Kaotik sistemler için de benzer şeyin olması gerekir. “Böl ve yönet” ilkesi yalnız politikada değil, bilimsel bilgi üretiminde de geçerliliği olan bir altın kuraldır.

#### Sonuç

Matematikçiler, Çin’de kanat çırpın kelebeğin nasıl olup da Teksas’ta kasırga yaratacağını açıklayan matematiksel modelden çok, Teksas’ta olan kasırgayı Çin’de hangi kelebeğin hangi kanat çırpışıyla yarattığını bilmek isterler. Günün birinde kaos bir bilim olacaksa, matematikçiler o kelebeği bulmak zorundadır.

## 5. ÇEKİCİ TİPLERİ

### 5.1. LORENZ ÇEKİCİSİ

Poincare'nin 1900 yılında ortaya koyduğu kaos kavramı, meteorolojist Edward Lorenz'in 1963 yılında meteorolojik değişimlerin başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı diye ifade edilen gözlemlerine kadar kimsenin ilgisini çekmedi. Çünkü fizikçiler, 20.yy ın ilk yarısında daha çekici bir konu olan Kuantum Fiziği ile ilgilenmeye başladılar ve Poincare'nin önemli buluşunu ihmal ettiler. Lorenz, Poincare'nin 63 yıl önceki bulgusunu ondan habersiz olarak yeniden buldu. Ele aldığı dinamik sistem için başlangıç koşullarında oluşacak küçük değişimlerin sonuca çok büyük etkiler yaptığını gözlemledi. Böylece, uzun süreli hava tahminleri yapmanın olanaksız olduğunu ortaya koydu.

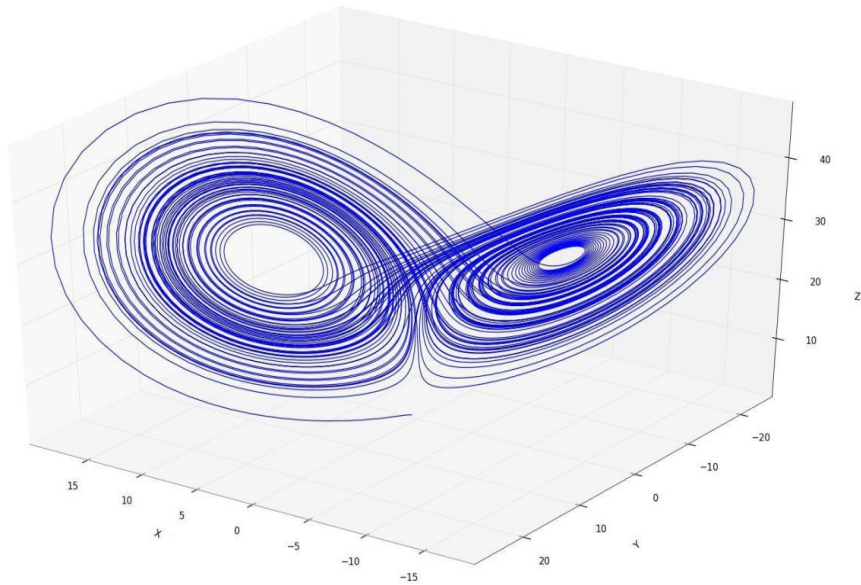
Lorenz havanın ısı değişimini belirlemek için, birinci basamaktan üç tane diferansiyel denklemden bulmuştur. Bu denklemler;

$$\dot{X} = (-a * x) + (a * y)$$

$$\dot{Y} = (b * x) - y - (x * z)$$

$$\dot{Z} = (-c * z) + (x * y)$$

Şeklindedir. a,b ve c sistem parametreleri X,Y,Z ise durum değişkenleridir. Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri; a = 10, b =28, c = 2,6 için bulunan Lorenz çekicisi şekil 8'de gösterilmiştir.



(şekil: 8)

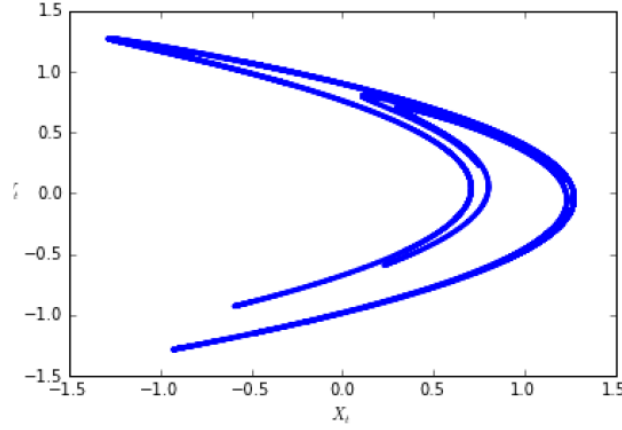
## 5.2. HENON ÇEKİCİSİ

İki boyutlu kesikli zamanlı dinamik sistemlerden biri olarak, Fransız astronom Henon tarafından ortaya konmuştur. Sistemin dinamik denklemi;

$$x_{t+1} = 1 + y_t - ax_t^2$$

$$y_{t+1} = bx_t$$

biçiminde ifade edilir.



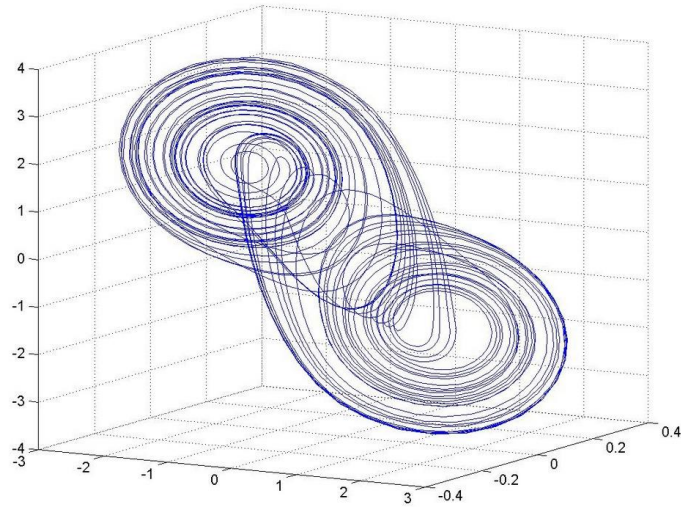
(şekil: 9 , Henon çekicisi)

## 5.3. CHUA ÇEKİCİSİ

Chua 1983 yılında kendi adı ile anılan ve kaotik işaret üreten bir osilatör devresi geliştirmiştir. Chua devresi en karmaşık kaosun varlığının deneysel olarak kurulabildiği, sayısal olarak doğrulanabildiği ve matematiksel olarak kanıtlanabildiği en basit devrelerden biridir. Sistemin dinamik denklemi;

$$g(v_1) = \begin{cases} G_b V_R + (G_b - G_a) B_p & ; V_R < -B_p \\ G_a V_R & ; -B_p < V_R < B_p \\ G_b V_R + (G_a - G_b) B_p & ; V_R > B_p \end{cases}$$

Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri sırasıyla ;  $B_p = 1.56$ ,  $G_a = -8/7$ , ve  $G_b = -5/7$  dir. Bu değerler için bulunan chua çekicisi şekil 10’da gösterilmiştir.



(şekil: 10, Chua Çekicisi)

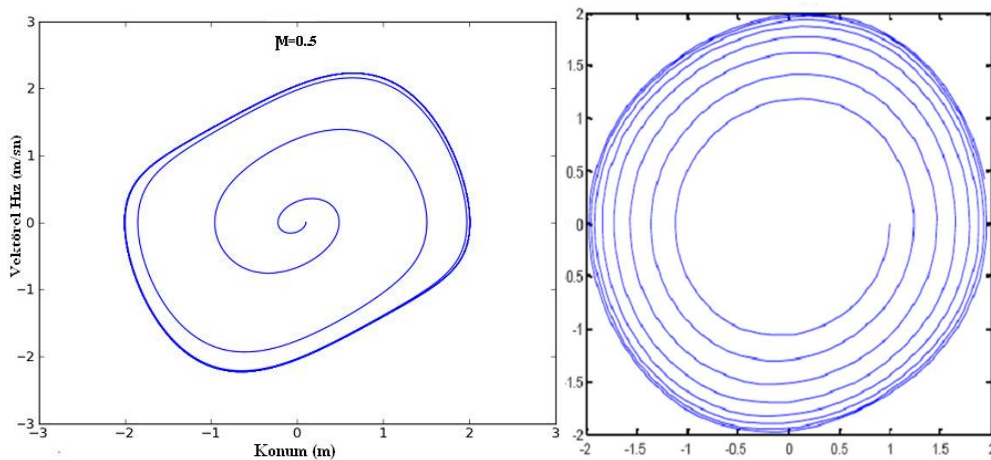
#### 5.4. VAN DER POL ÇEKİCİSİ

Hollandalı elektrik mühendisi ve fizikçi Van Der 1927 yılında Nature Magazine adlı dergide yayınlanan makalesinde, sinüzoidal kaynakla sürülen bir neon lamba osilatörü üzerinde yapılan deneysel çalışmada farkında olmadan kaotik sinyalleri telefon ahizesindeki kulaklık ile dinlemiştir. Kondansatör kapasite değerinin değişimi sırasında, frekanstaki değişimleri bir değerden sonra düzensiz bir gürültü meydana getirdiğini görmüş ve makalesine “Frequency demultiplication” adını vermiştir. 1986 yılında M.Peter Kennedy, Van der Pol’un düzensiz gürültü olarak tanımladığı bu olayın kaos olduğunu belirtmiştir. Sistemin sinamik denklemleri;

$$\dot{x} = y + \sigma(x - x^3) ; (\sigma > 0)$$

$$\dot{y} = -x$$

biçiminde ifade edilir. Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri  $\dot{x}=1$ ,  $\dot{y} = -0.97$ , ve  $\sigma=0.5$  tir. Bu değerler için bulunan Van der Pol çekicisi şekil 11’de gösterilmiştir.



(şekil 11, Van der Pol çekicisine ait alt limit görüntüsü)

### 5.5. LABİRENT KAOSU

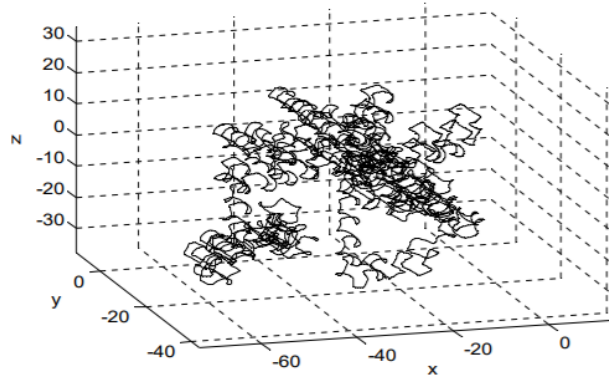
Thomas tarafından 1999 yılında bulunan doğrusal olmayan denklem sistemi

$$\dot{x} = \sin y$$

$$\dot{y} = \sin z$$

$$\dot{z} = \sin x$$

Biçiminde ifade edilir.  $x_0= 0.1$ ,  $y_0= -0.1$ ,  $z_0= 0.1$  değerleri için elde edilen üç boyutlu x-y-z kaotik yörüngesi şekil 12’de gösterilmiştir.



(şekil 12, labirent kaos sisteminin üç boyutlu kaotik yörüngesi)

## KAYNAKÇA

1. <https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2018/02/13/chaos-theory-the-butterfly-effect-and-the-computer-glitch-that-started-it-all/?sh=13e84f4769f6>
2. [https://tr.wikipedia.org/wiki/Kaos\\_teorisi](https://tr.wikipedia.org/wiki/Kaos_teorisi)
3. [https://tr.wikipedia.org/wiki/Kelebek\\_ etkisi](https://tr.wikipedia.org/wiki/Kelebek_ etkisi)
4. <https://bilimfili.com/kaos-teorisi-nedir-ve-nasil-kesfedildi>
5. <https://www.muhendisbeyinler.net/kaos-teorisi-ve-matematik-bazlar/>
6. <https://www.crystalinks.com/chaos.html>
7. <http://fractalfoundation.org/resources/what-is-chaos-theory/>
8. <https://plato.stanford.edu/entries/chaos/>
9. <https://web.itu.edu.tr/~kkocak/kaospdf.pdf>
10. <https://www.muhendisbeyinler.net/henri-poincare-ve-kaos-teorisinin-baslangici/>
11. <https://ozguraktekin.blogspot.com/2015/09/edward-norton-lorenz-ve-kelebek-etkisi.html>
12. [https://www.researchgate.net/publication/322508196\\_Kaos\\_Kurami\\_Yonetim\\_ve\\_Egi\\_timdeki\\_yansimalari](https://www.researchgate.net/publication/322508196_Kaos_Kurami_Yonetim_ve_Egi_timdeki_yansimalari)
13. <https://dspace.gazi.edu.tr/bitstream/handle/20.500.12602/147293/?sequence=1&isAllo wed=y>
14. <https://serdara.com/kaos-teorisi-tarihi-ve-felsefesi/>
15. <http://acikkaynak.bilecik.edu.tr/xmlui/bitstream/handle/11552/187/10018004.pdf>
16. <http://nek.istanbul.edu.tr:4444/ekos/TEZ/47641.pdf>
17. <https://acikerisim.sakarya.edu.tr/xmlui/handle/20.500.12619/76843>
18. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/228457>
19. <https://turkishstudies.net/turkishstudies?mod=tammetin&makaleadi=&key=46280>
20. <http://www.olaganustukanitlar.com/kaos-teorisi-nedir/>