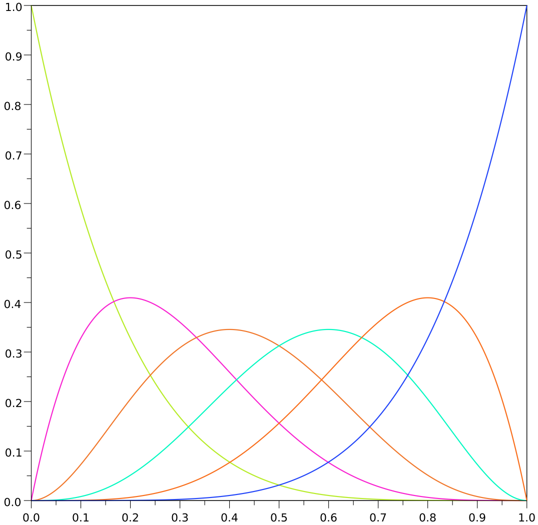
Courbes polynomiales : Bézier / B-splines

Nicolas SZAFRAN

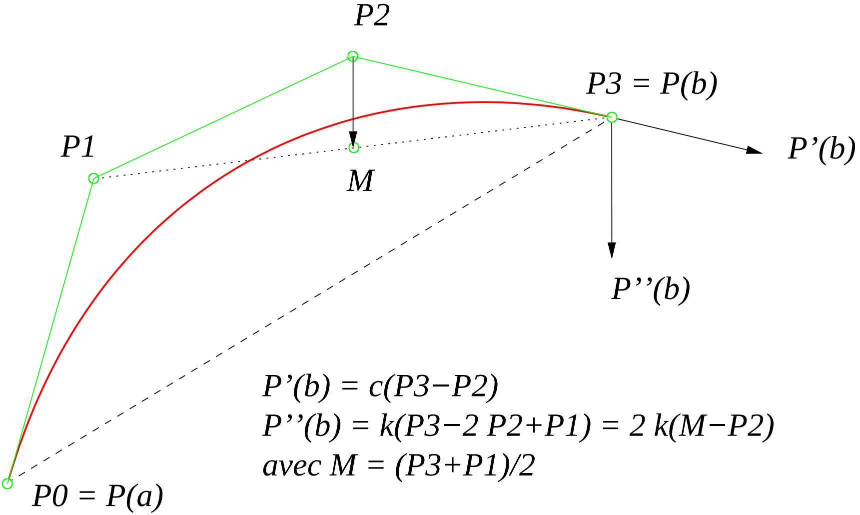
2012-2013

Bézier - base de Bernstein



Base de Bernstein de degré 5

Bézier - quelques propriétés géométriques



$P'(b) = c(P3 - P2)$

$P''(b) = k(P3 - 2\,P2 + P1) = 2\,k(M - P2)$

avec $M = (P3 + P1)/2$

Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$

P_0

P_1

P_2

P_{n-1}

P_n

Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$

$$\begin{array}{l}
P_0 : P_{0,0} \\
P_1 : P_{0,1} \\
P_2 : P_{0,2} \\
\vdots \quad \vdots \\
P_{n-1} : P_{0,n-1} \\
P_n : P_{0,n}
\end{array}$$

Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$

$P_0 \ : P_{0,0}$ $\xrightarrow{1-t}$

$\oplus \ P_{1,0}$

$P_1 \ : P_{0,1}$ $\xrightarrow{t}$

$P_2 \ : P_{0,2}$

$\vdots \qquad \vdots$

$P_{n-1} : P_{0,n-1}$

$P_n \ : P_{0,n}$

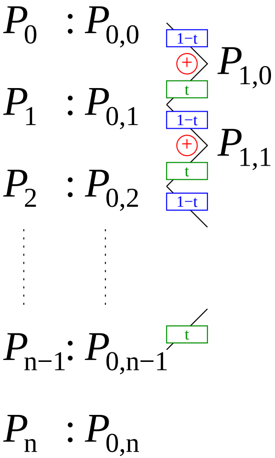
Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$

$$
\begin{array}{llll}
P_0 & : P_{0,0} & \boxed{1-t} & \\
 & & \oplus & P_{1,0} \\
P_1 & : P_{0,1} & \boxed{t} & \\
 & & \boxed{1-t} & \\
 & & \oplus & P_{1,1} \\
P_2 & : P_{0,2} & \boxed{t} & \\
\vdots & \vdots & & \\
P_{n-1} & : P_{0,n-1} & & \\
P_n & : P_{0,n} & &
\end{array}
$$

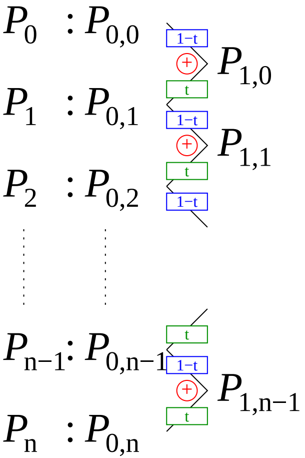
Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$



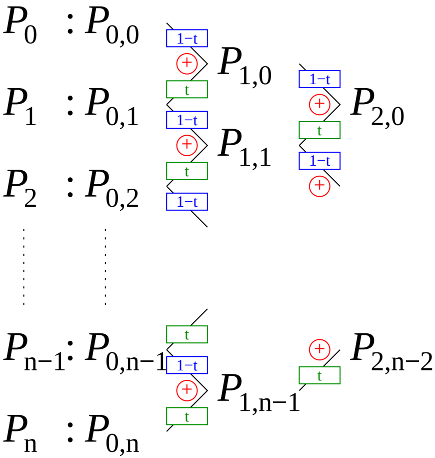
Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$



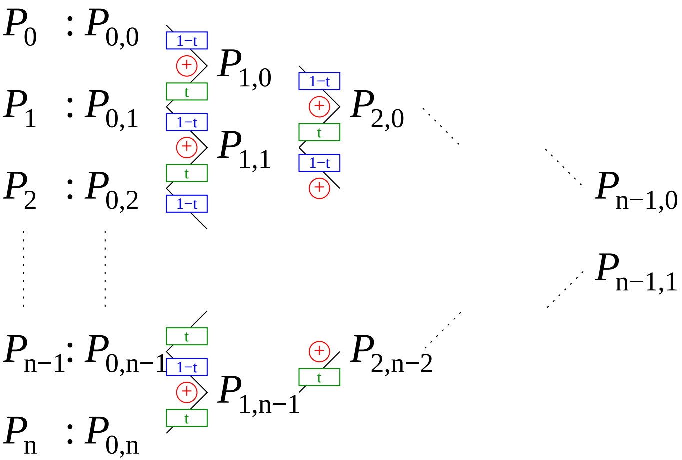
Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$



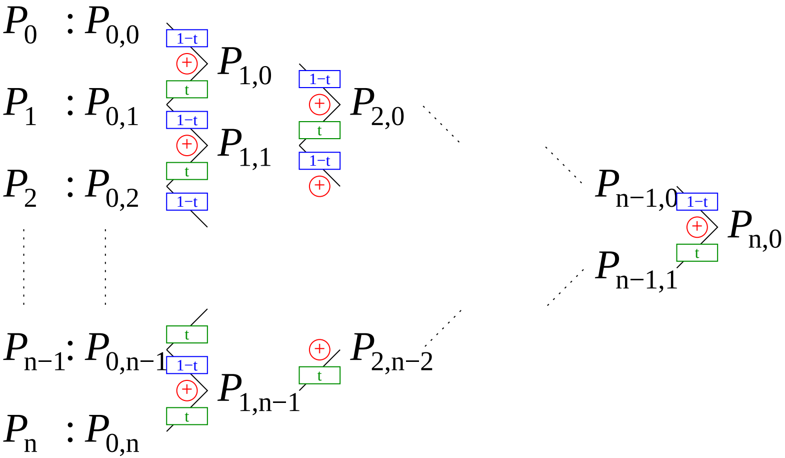
Bézier - algorithme de De Casteljau

Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$

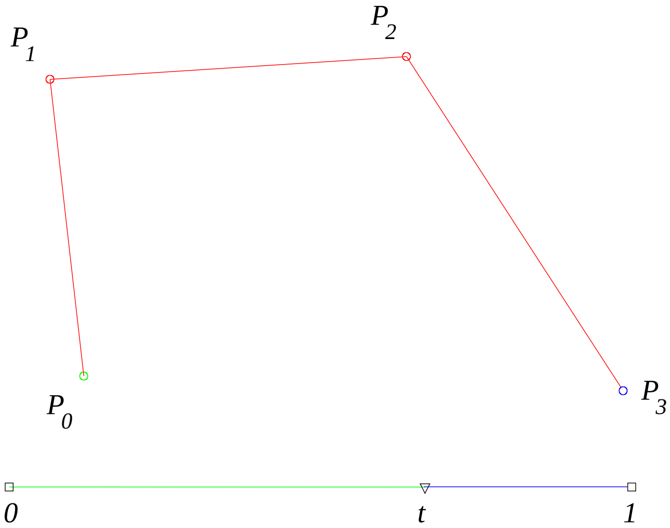


Bézier - algorithme de De Casteljau

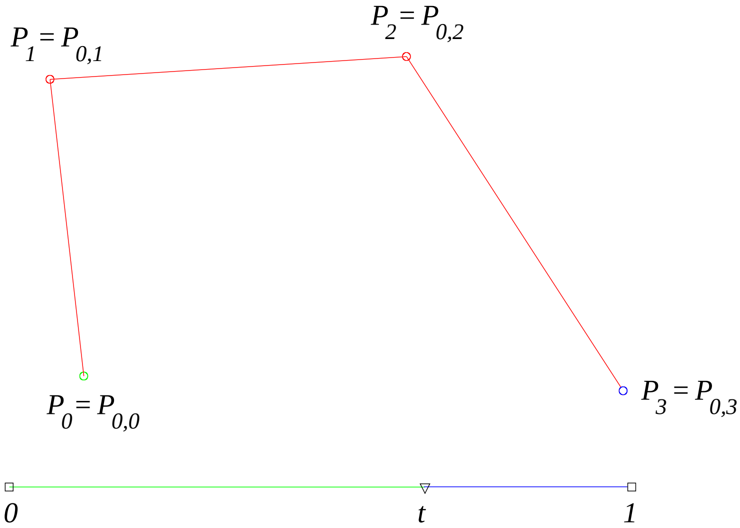
Subdivision d'un polygone de contrôle suivant $t \in [0, 1]$



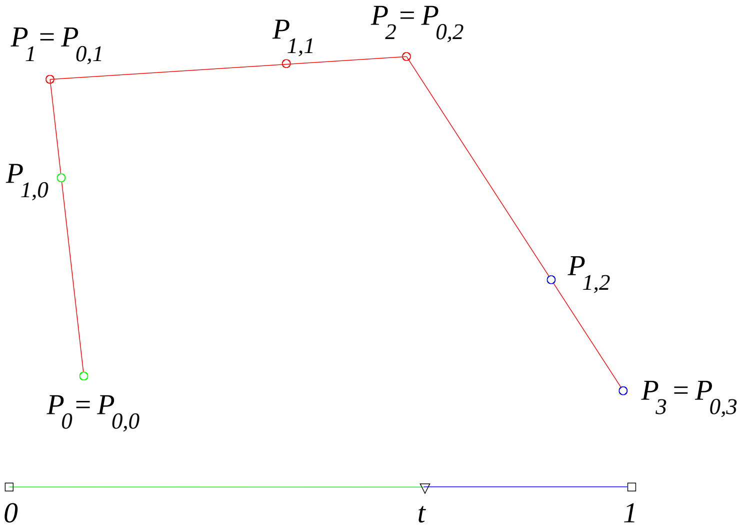
Bézier - algorithme de De Casteljau



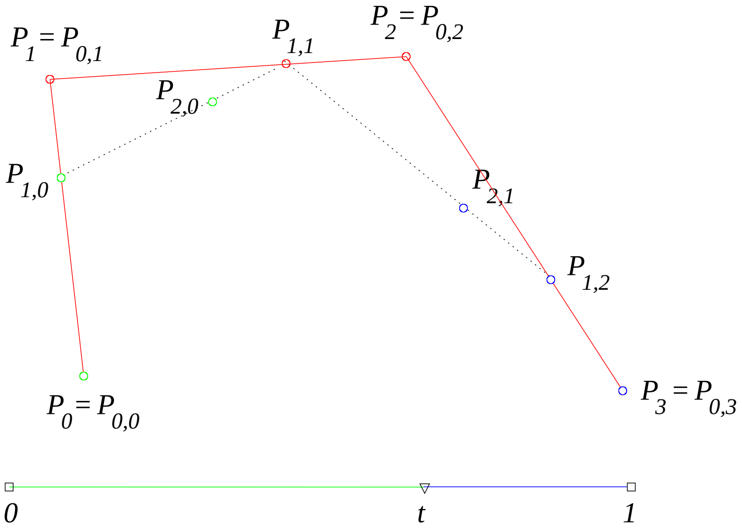
Bézier - algorithme de De Casteljau



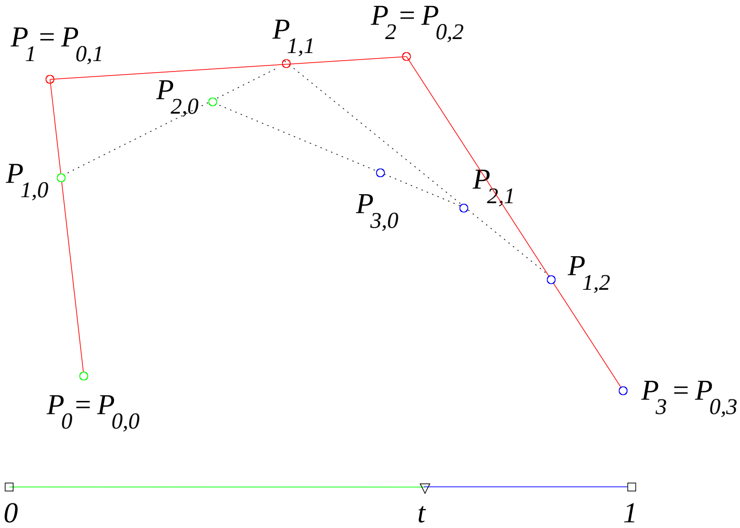
Bézier - algorithme de De Casteljau



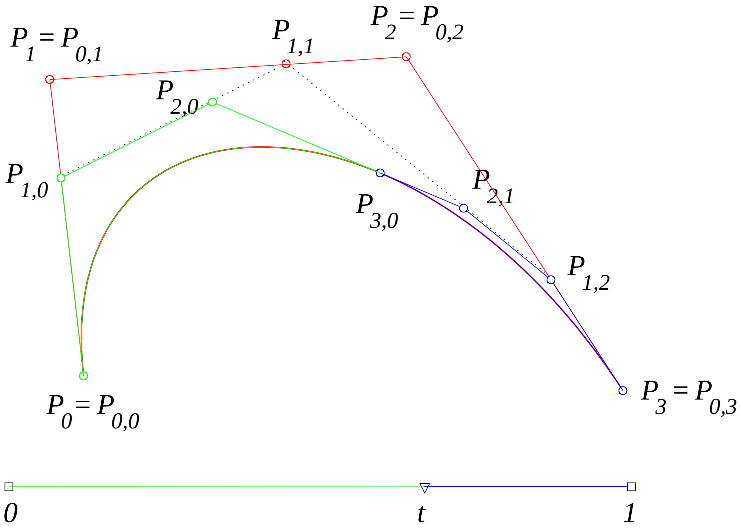
Bézier - algorithme de De Casteljau



Bézier - algorithme de De Casteljau

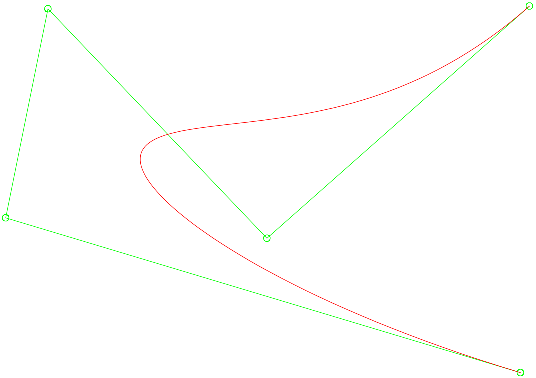


Bézier - algorithme de De Casteljau



Bézier - subdivisions successives

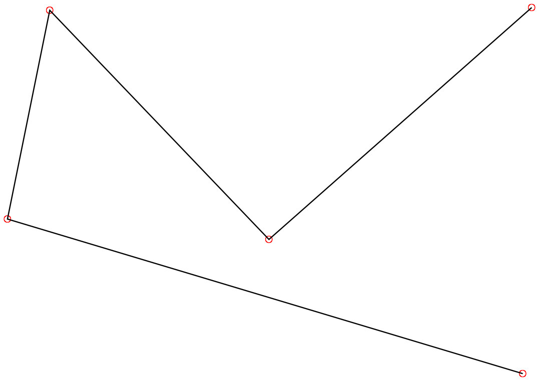
convergence des polygones de contrôle vers la courbe $\mathcal{C}$



Polygone initial et courbe

Bézier - subdivisions successives

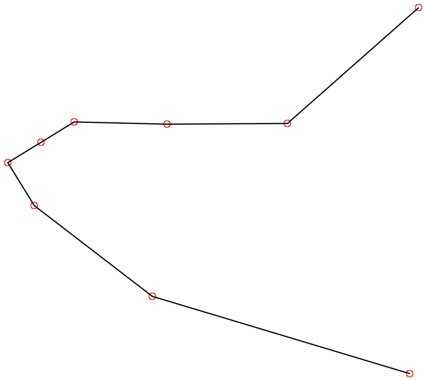
convergence des polygones de contrôle vers la courbe $\mathcal{C}$



Avant subdivision

Bézier - subdivisions successives

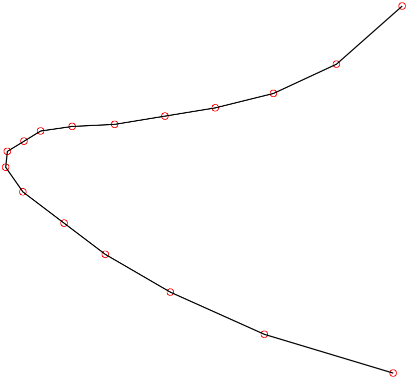
convergence des polygones de contrôle vers la courbe $\mathcal{C}$



Subdivision 1

Bézier - subdivisions successives

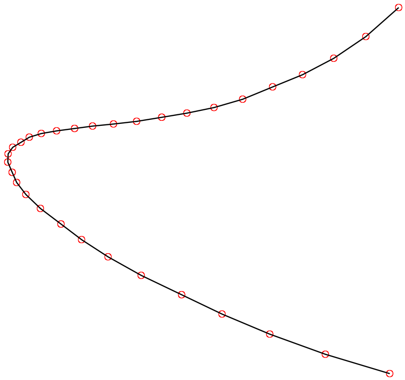
convergence des polygones de contrôle vers la courbe $\mathcal{C}$



Subdivision 2

Bézier - subdivisions successives

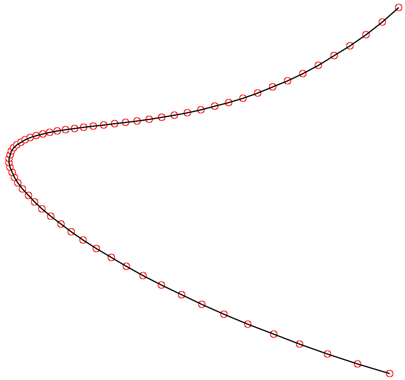
convergence des polygones de contrôle vers la courbe $\mathcal{C}$



Subdivision 3

Bézier - subdivisions successives

convergence des polygones de contrôle vers la courbe $\mathcal{C}$

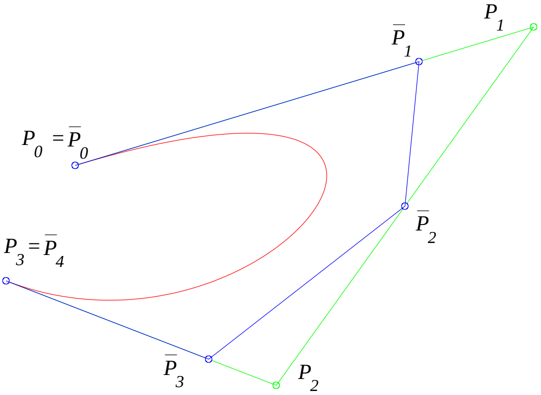


Subdivision 4

Bézier - élévation de degré

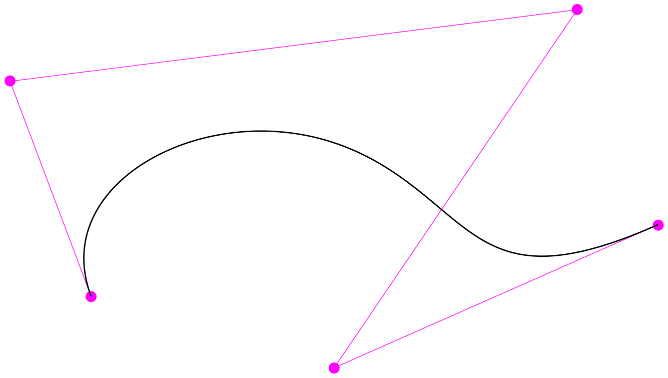
$$\overline{P}_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} P_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n+1$$

Courbe $[P_0, P_1, \ldots, P_n]$ = Courbe $[\overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{n+1}]$



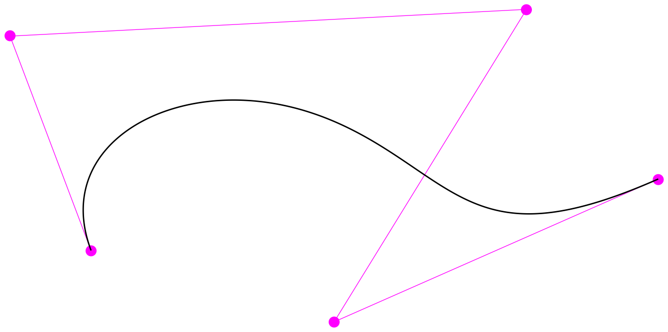
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



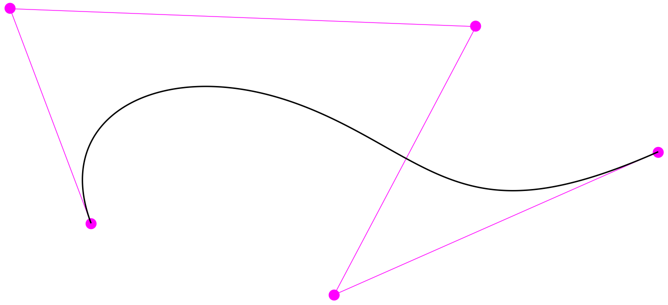
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



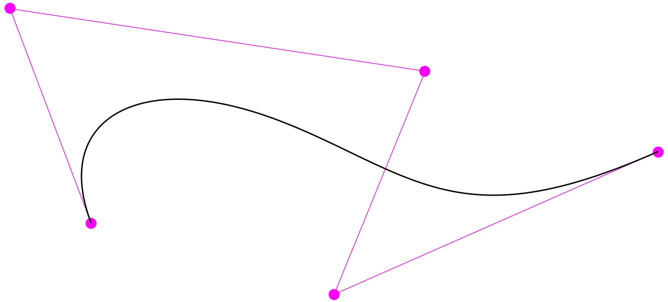
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



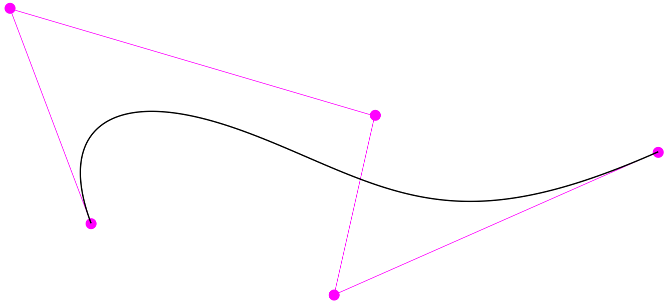
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



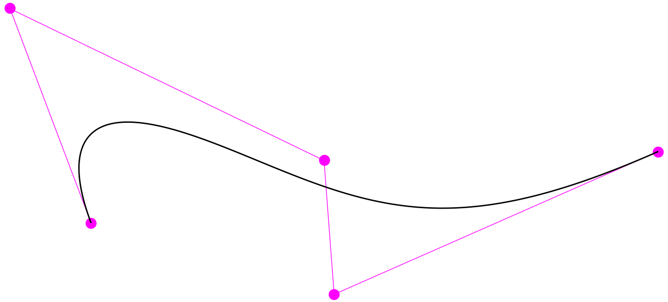
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



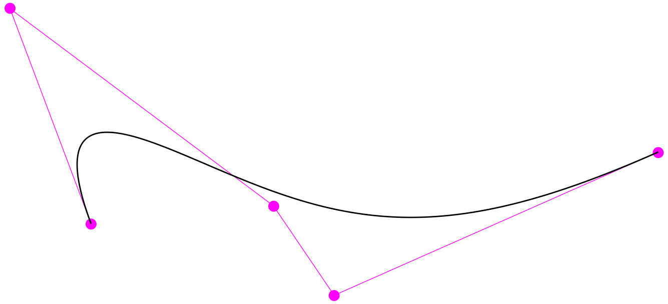
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



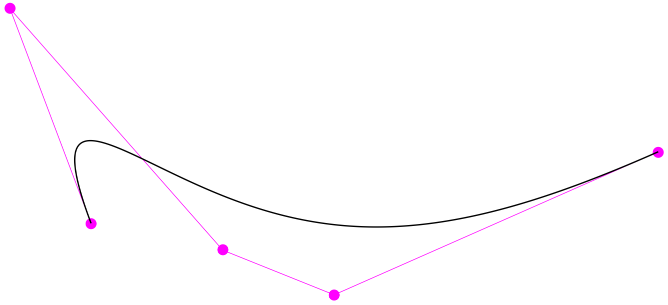
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



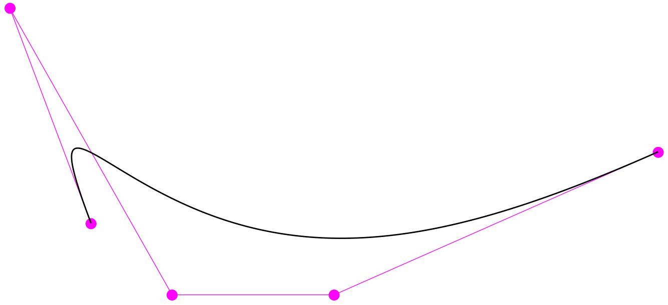
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



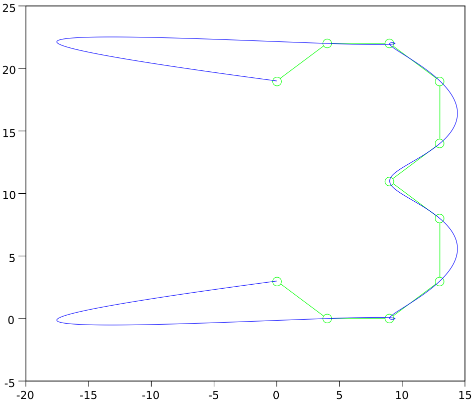
Limites du modèle polynomial

Influence globale d'un point de contrôle



Limites du modèle polynomial

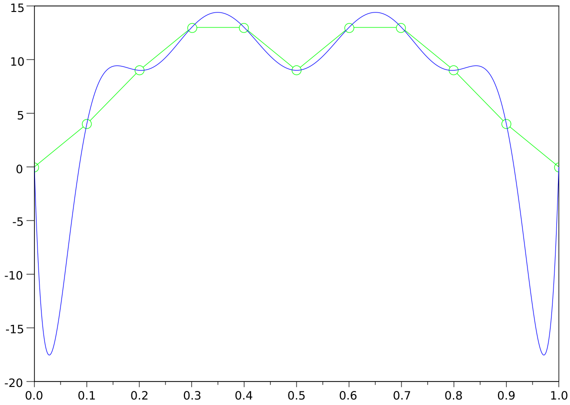
Instabilité des polynômes de degré élevé



Courbe de Bézier de degré 10 interpolant un tracé de 11 points

Limites du modèle polynomial

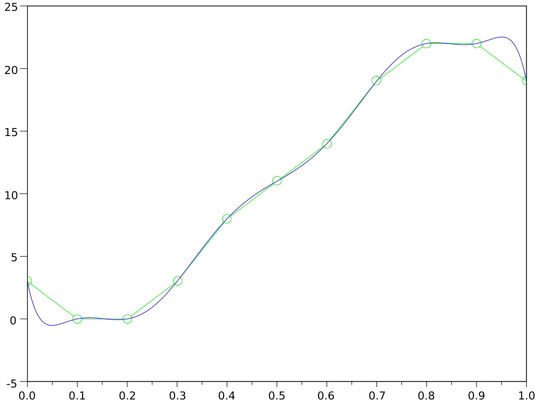
Instabilité des polynômes de degré élevé



Tracé de la fonction $t \mapsto x(t)$

Limites du modèle polynomial

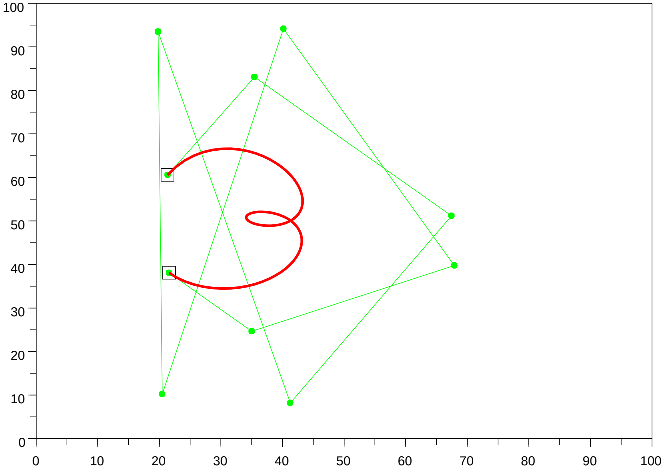
Instabilité des polynômes de degré élevé



Tracé de la fonction $t \mapsto y(t)$

Limites du modèle polynomial

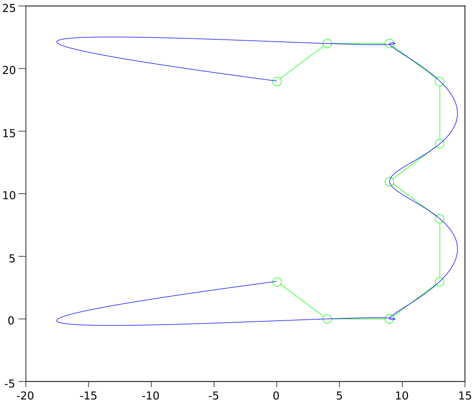
Difficulté de modéliser des formes complexes



Une seule courbe de Bézier (degré 9)

Limites du modèle polynomial

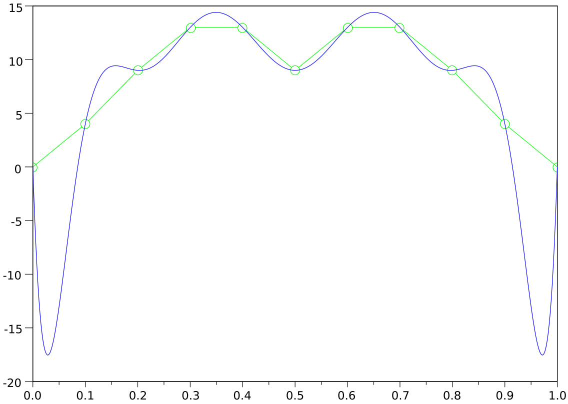
Instabilité des polynômes de degré élevé



Courbe de Bézier de degré 10 interpolant un tracé de 11 points

Limites du modèle polynomial

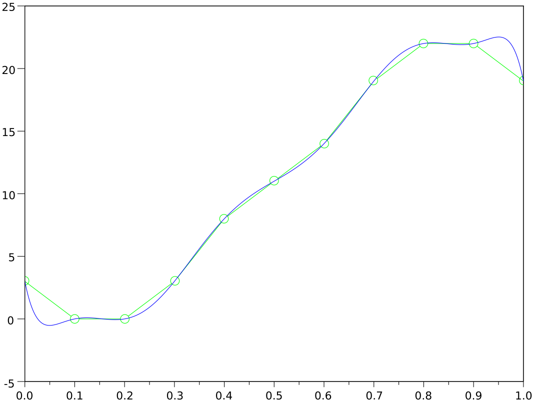
Instabilité des polynômes de degré élevé



Tracé de la fonction $t \mapsto x(t)$

Limites du modèle polynomial

Instabilité des polynômes de degré élevé



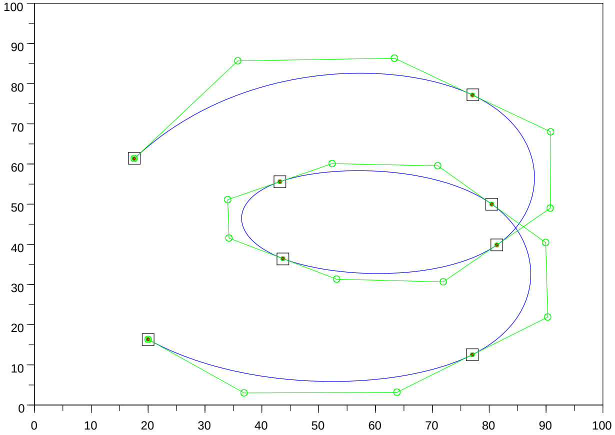
Tracé de la fonction $t \mapsto y(t)$

Limites du modèle polynomial

$\rightarrow$ utilisation de courbes composites
(courbes polynomiales par morceaux)

Limites du modèle polynomial

$\rightarrow$ utilisation de courbes composites
(courbes polynomiales par morceaux)



Courbe composée de plusieurs courbes de Bézier de degré 3

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Utilisation de primitives géométriques

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Utilisation de primitives géométriques

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Utilisation de primitives géométriques

- Segment de droite

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Utilisation de primitives géométriques

- Segment de droite
- Arc de cercle

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Utilisation de primitives géométriques

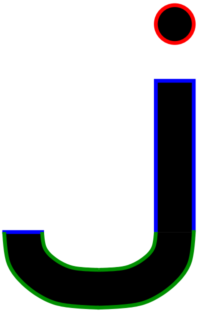
- Segment de droite
- Arc de cercle
- Bézier cubique

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Utilisation de primitives géométriques

- Segment de droite
- Arc de cercle
- Bézier cubique



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

Modélisation de formes complexes

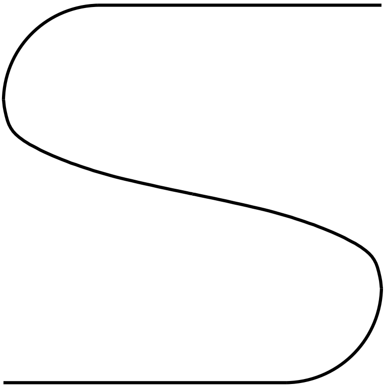
Exemple des polices de caractères PostScript

Décomposition d'une forme complexe en une suite de courbes simples délimitées par des données de type Hermite.

Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

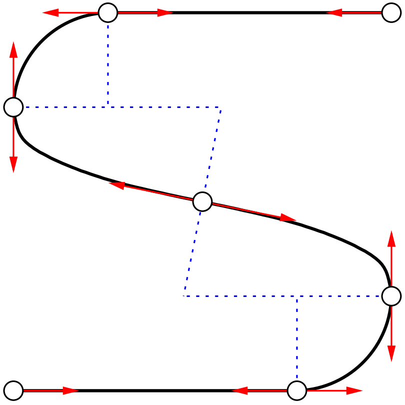
Décomposition d'une forme complexe en une suite de courbes simples délimitées par des données de type Hermite.



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

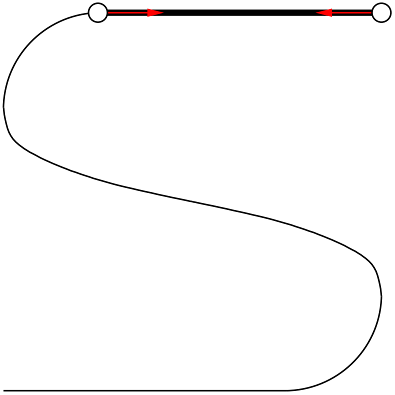
Décomposition d'une forme complexe en une suite de courbes simples délimitées par des données de type Hermite.



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

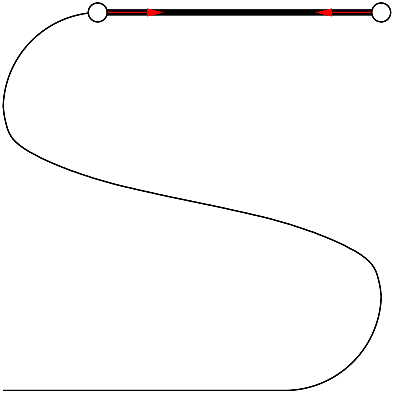
Segment de droite



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

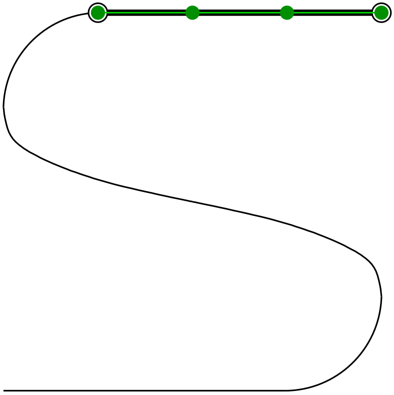
Segment de droite : configuration unique



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

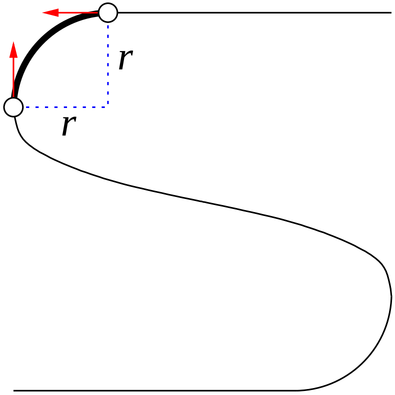
Segment de droite : modèlisation par une Bézier cubique



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

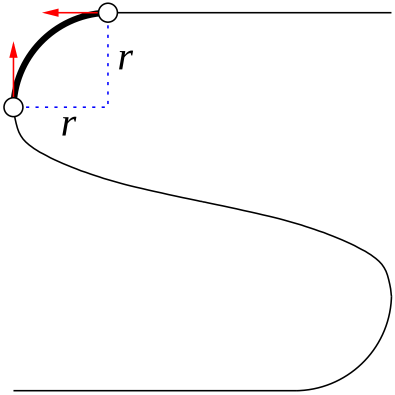
Arc de cercle



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

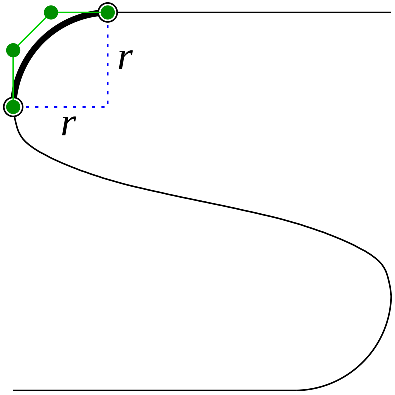
Arc de cercle : configuration unique



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

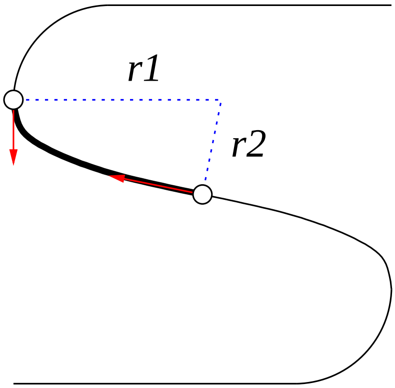
Arc de cercle : modèlisation par une Bézier cubique (rationnelle)



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

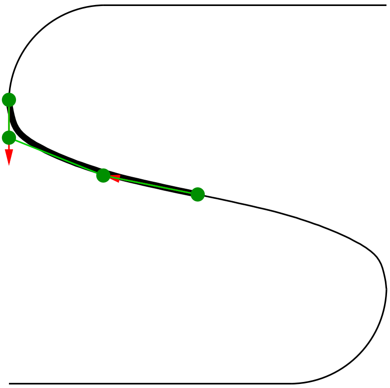
Bézier cubique



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

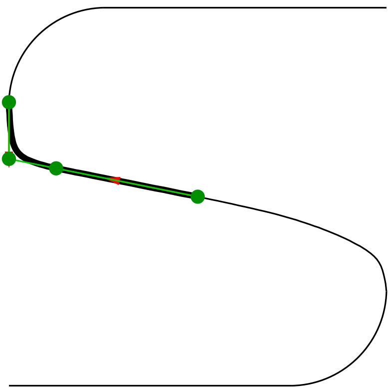
Bézier cubique : configurations multiples



Modélisation de formes complexes

Exemple des polices de caractères PostScript

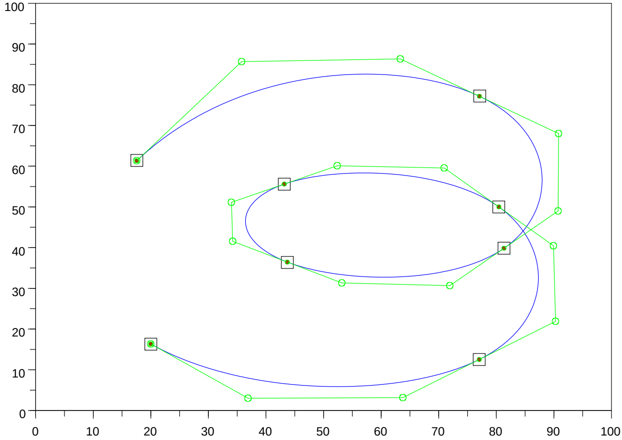
Bézier cubique : configurations multiples



Modélisation de formes complexes

Une autre approche

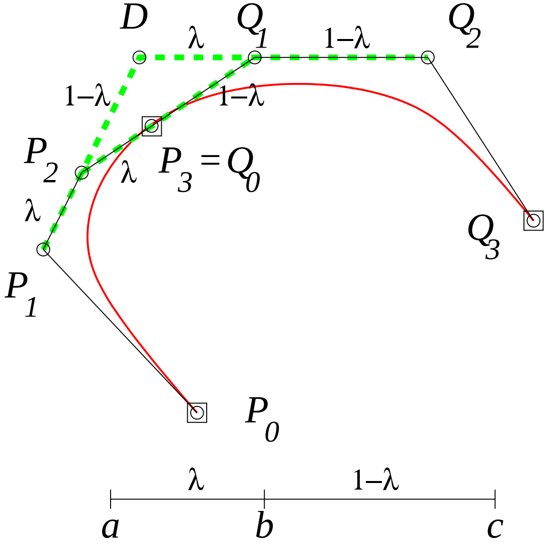
Imposer un raccord spécifique entre les différentes courbes



Plusieurs courbes de Bézier
de degré 3 avec raccord C^2

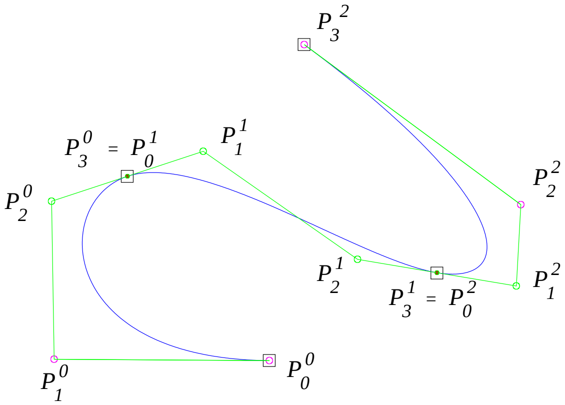
Raccord géométrique de courbes de Bézier (cas C^2)

Exemple de 3 courbes de Bézier cubiques définies sur $[a, b]$ et $[b, c]$



Raccord géométrique de courbes de Bézier

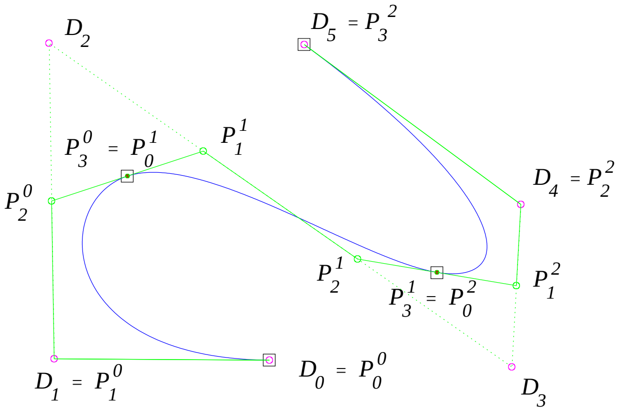
Exemple de 3 courbes de Bézier cubiques définies sur $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,3]$ et avec un raccordement C^2 entre elles



Structure Bézier composite

Raccord géométrique de courbes de Bézier

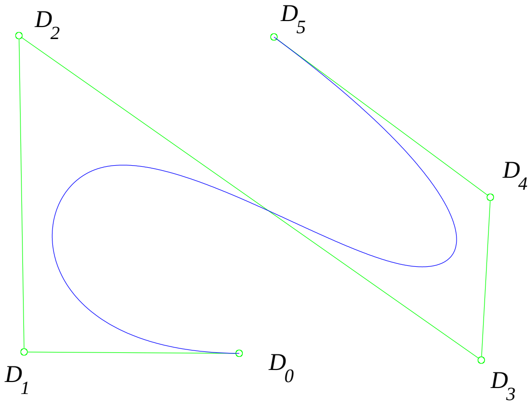
Exemple de 3 courbes de Bézier cubiques définies sur $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,3]$ et avec un raccordement C^2 entre elles



Structure Bézier composite

Raccord géométrique de courbes de Bézier

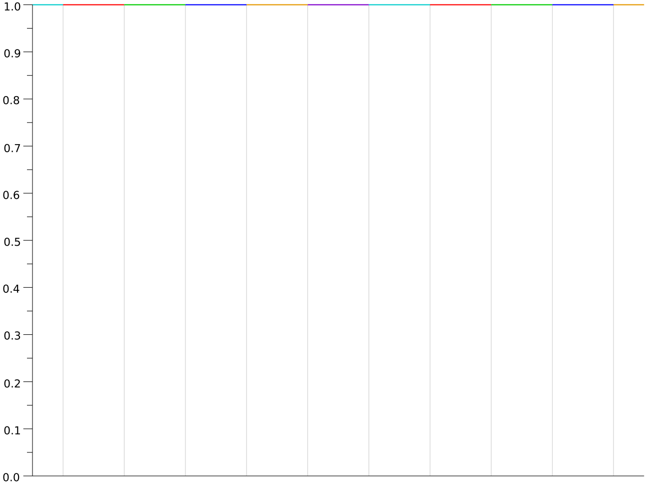
Exemple de 3 courbes de Bézier cubiques définies sur $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,3]$ et avec un raccordement C^2 entre elles



Structure de De Boor (B-spline)

B-Spline - cadre général

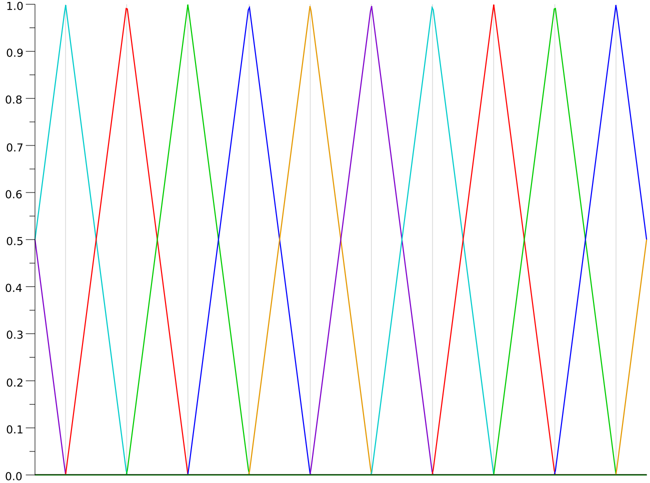
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 1$ - Degré $d = 0$ - Continuité C^{-1}

B-Spline - cadre général

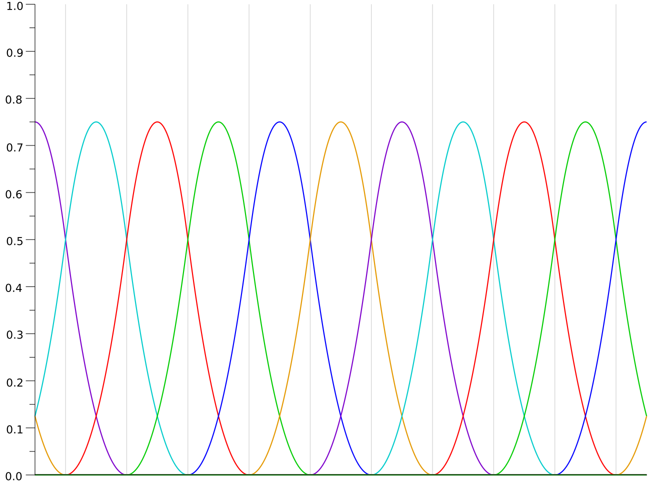
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 2$ - Degré $d = 1$ - Continuité C^0

B-Spline - cadre général

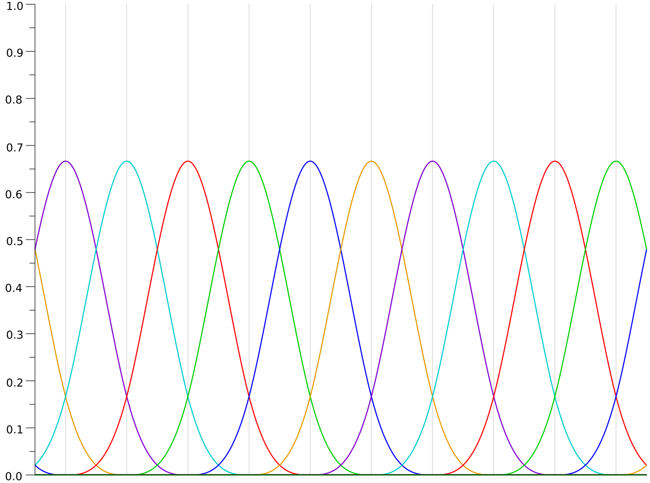
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 3$ - Degré $d = 2$ - Continuité C^1

B-Spline - cadre général

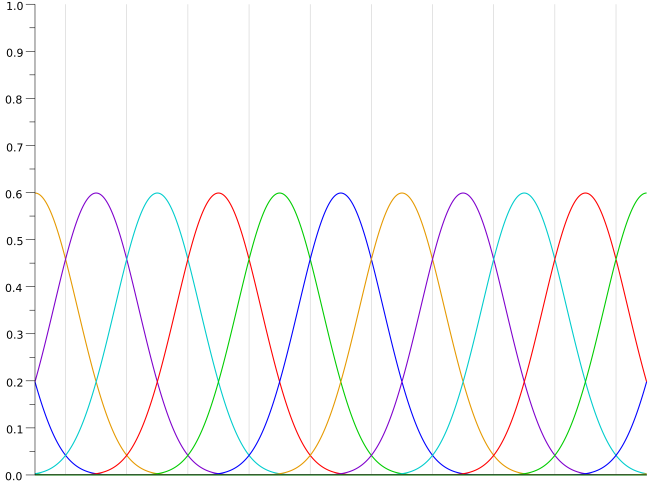
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 4$ - Degré $d = 3$ - Continuité C^2

B-Spline - cadre général

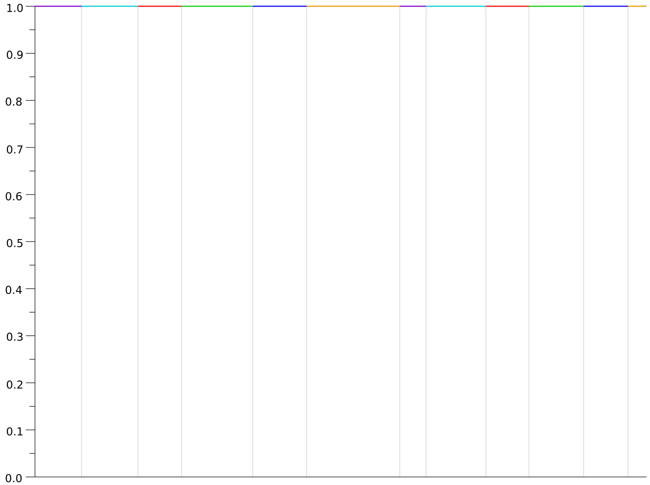
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 5$ - Degré $d = 4$ - Continuité C^3

B-Spline - cadre général

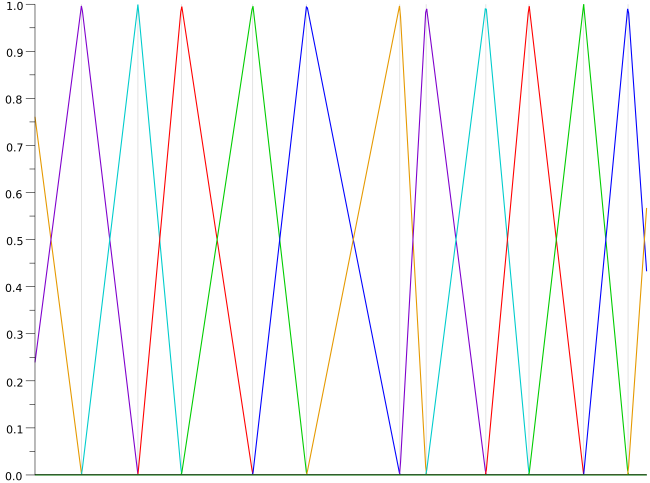
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 1$ - Degré $d = 0$ - Continuité C^{-1}

B-Spline - cadre général

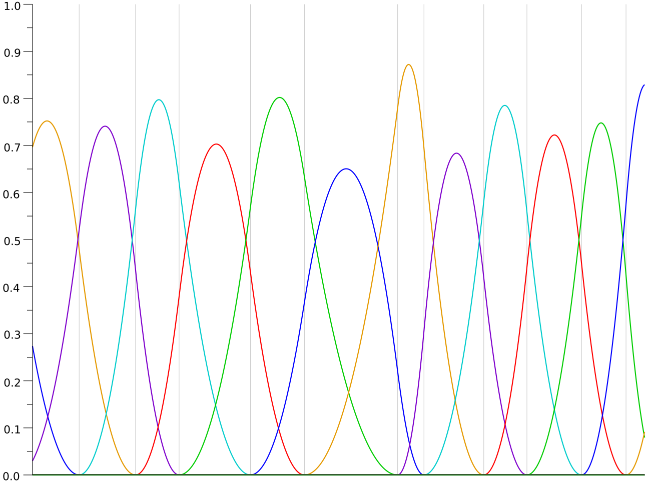
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 2$ - Degré $d = 1$ - Continuité C^0

B-Spline - cadre général

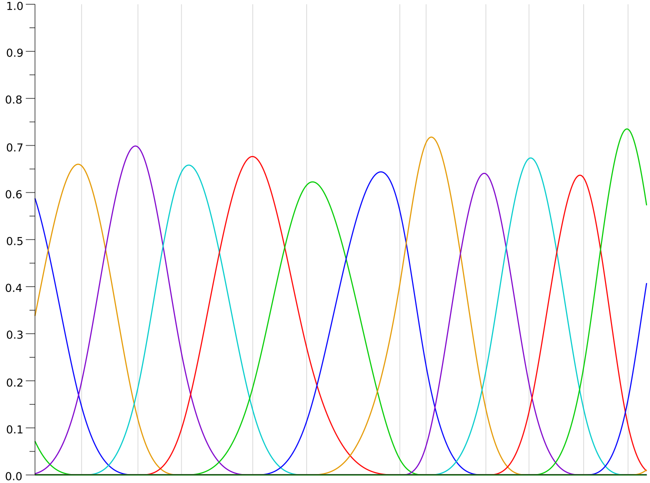
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 3$ - Degré $d = 2$ - Continuité C^1

B-Spline - cadre général

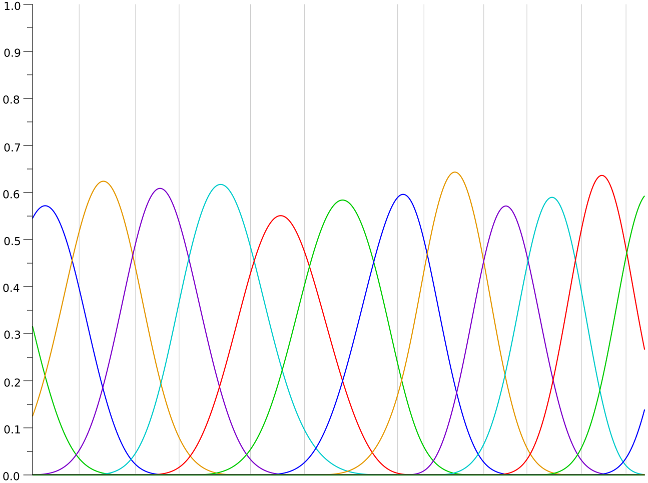
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 4$ - Degré $d = 3$ - Continuité C^2

B-Spline - cadre général

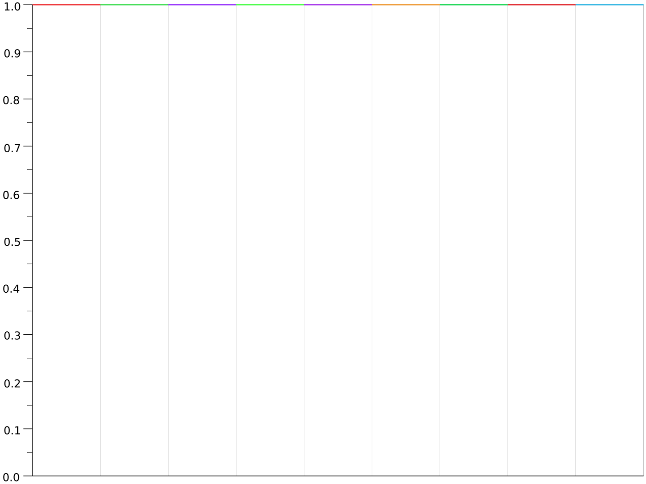
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 5$ - Degré $d = 4$ - Continuité C^3

Cadre pratique

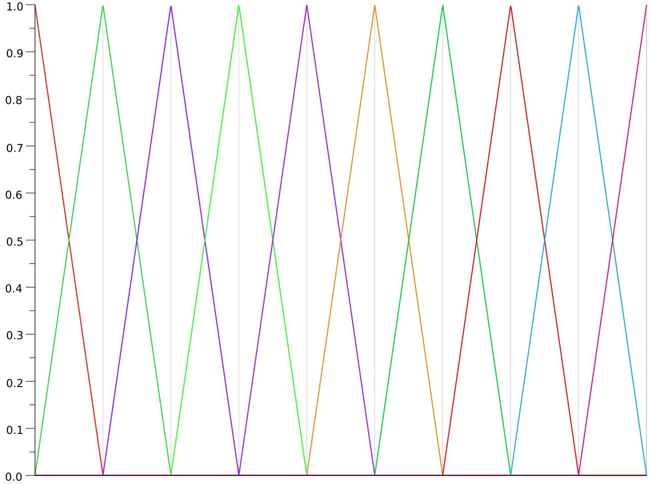
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 1$ - Degré $d = 0$ - Continuité C^{-1}

Cadre pratique

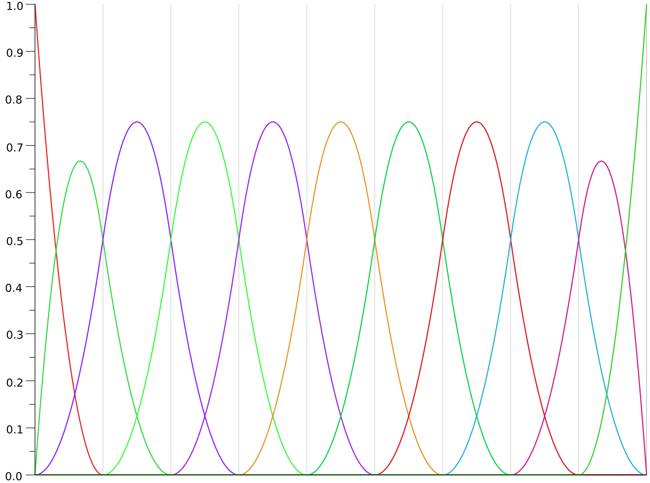
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 2$ - Degré $d = 1$ - Continuité C^0

Cadre pratique

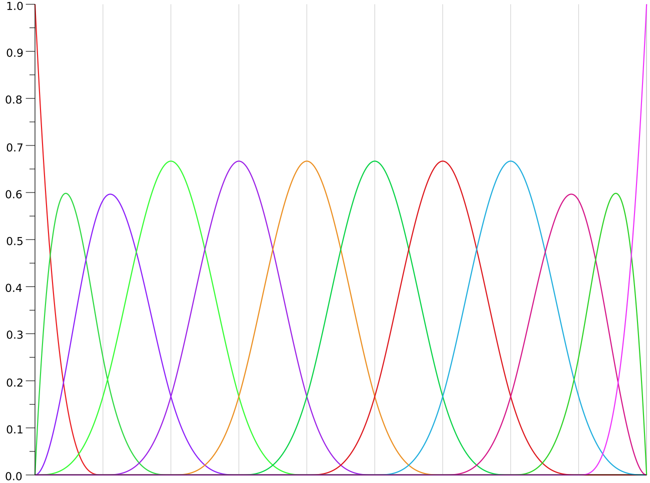
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 3$ - Degré $d = 2$ - Continuité C^1

Cadre pratique

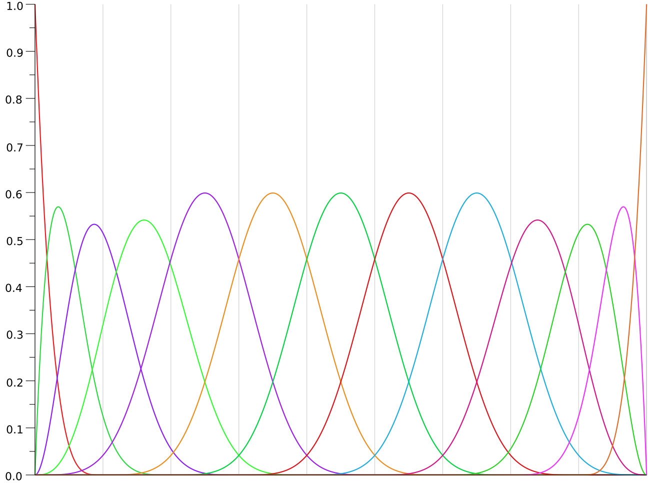
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 4$ - Degré $d = 3$ - Continuité C^2

Cadre pratique

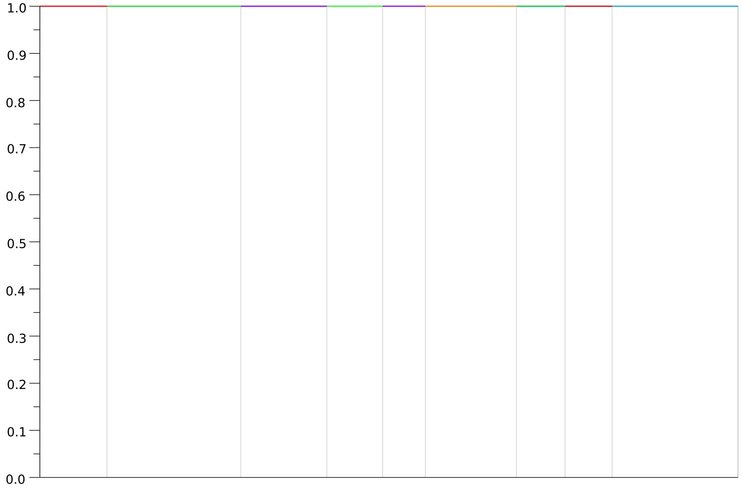
Base B-spline uniforme (noeuds équidistants)



Ordre $k = 5$ - Degré $d = 4$ - Continuité C^3

Cadre pratique

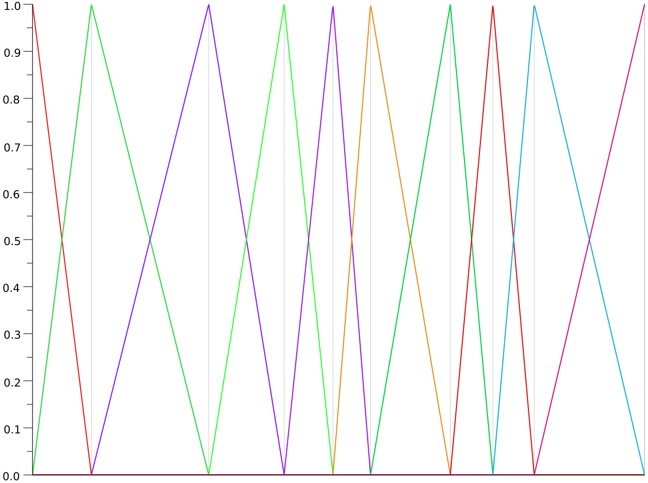
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 1$ - Degré $d = 0$ - Continuité C^{-1}

Cadre pratique

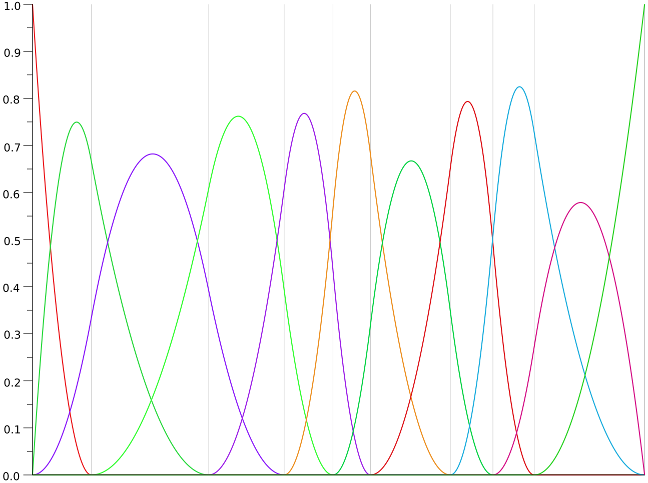
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 2$ - Degré $d = 1$ - Continuité C^0

Cadre pratique

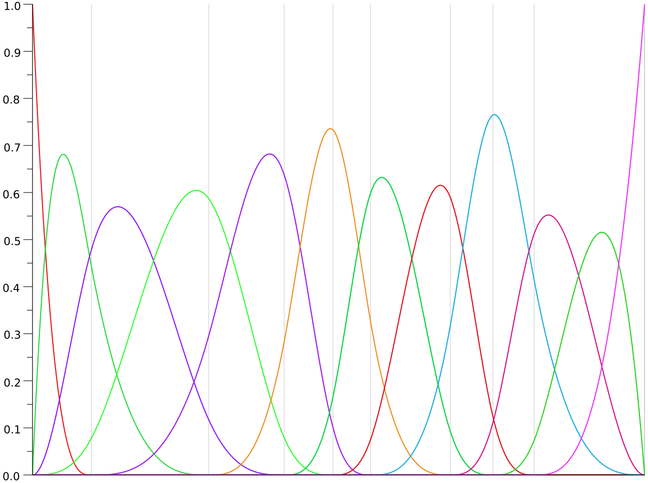
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 3$ - Degré $d = 2$ - Continuité C^1

Cadre pratique

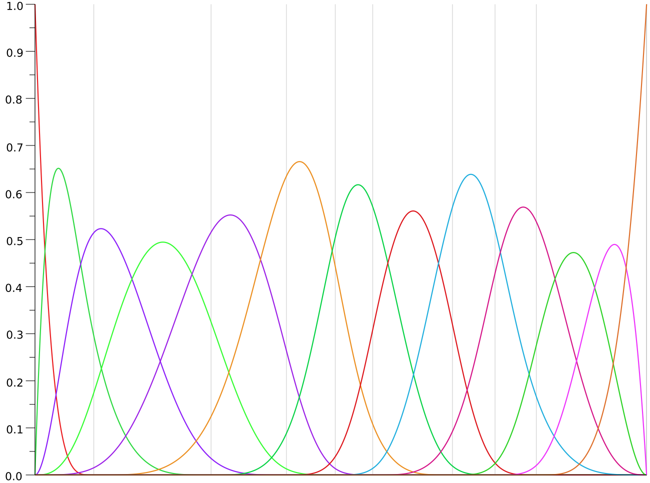
Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)



Ordre $k = 4$ - Degré $d = 3$ - Continuité C^2

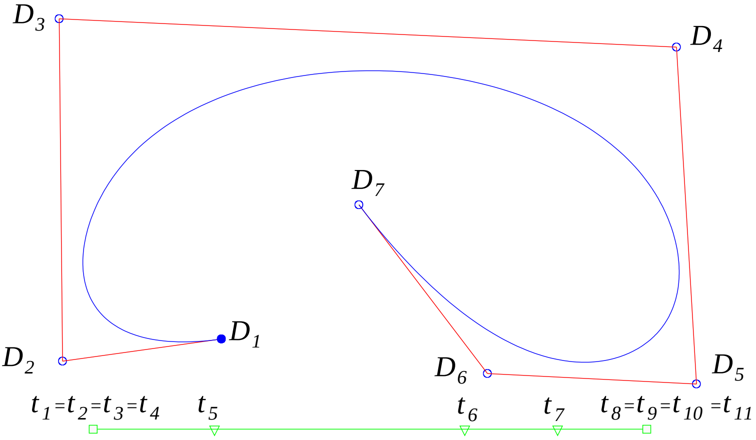
Cadre pratique

Base B-spline non uniforme (noeuds quelconques)

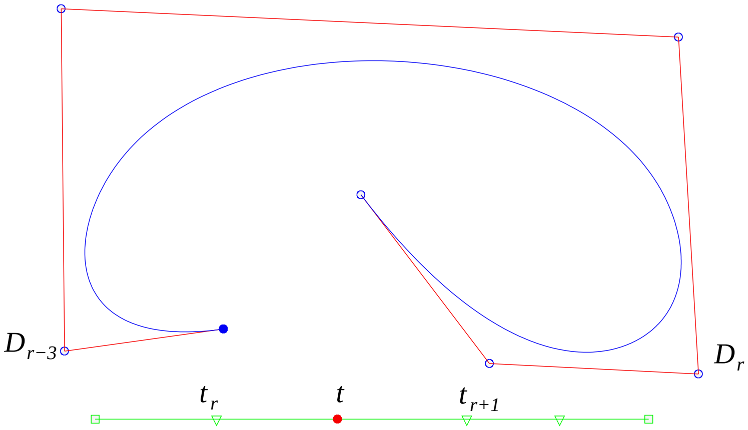


Ordre $k = 5$ - Degré $d = 4$ - Continuité C^3

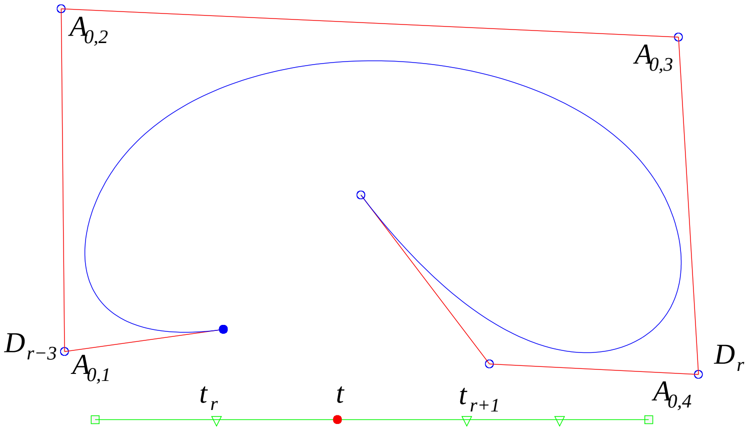
B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox



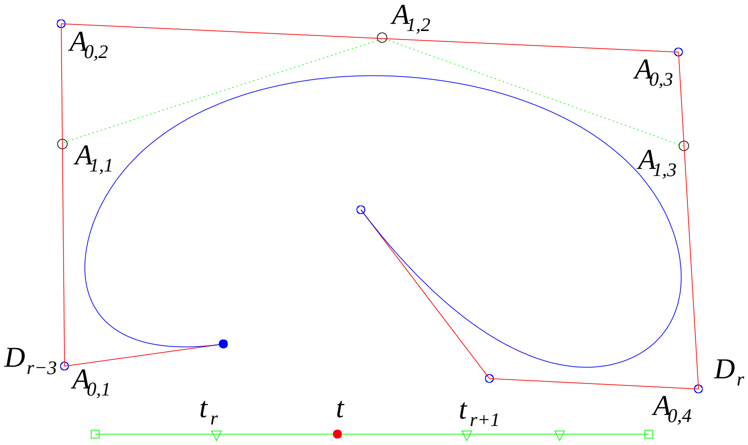
B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox



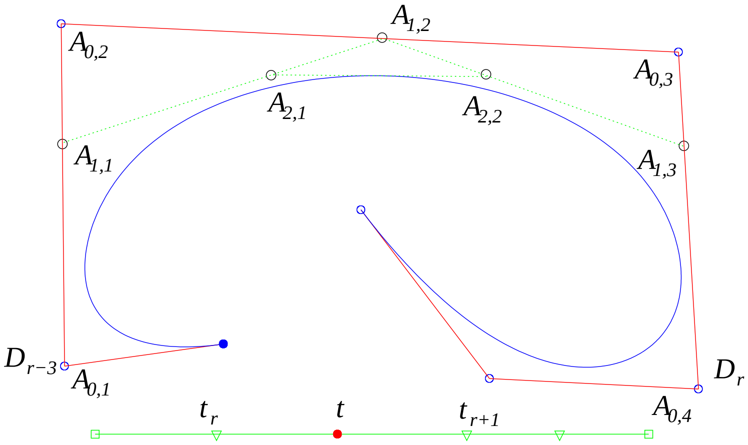
B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox



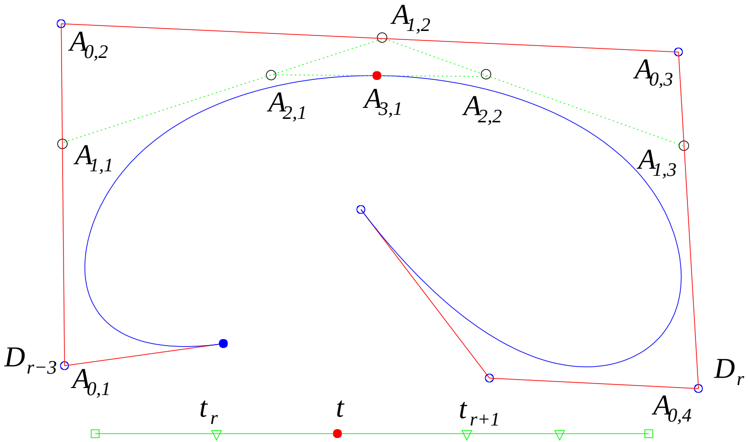
B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox



B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

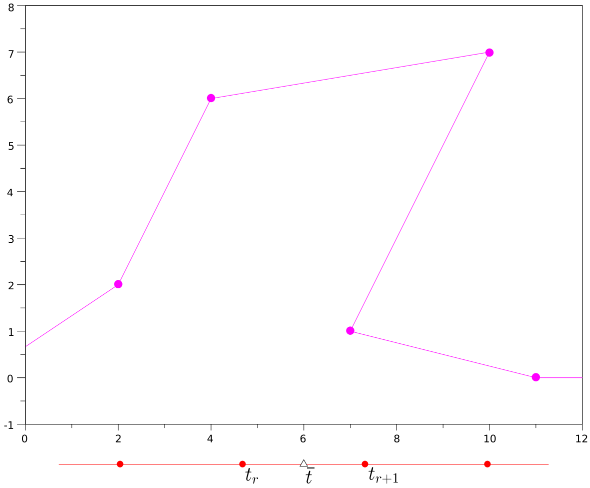


B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox



B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

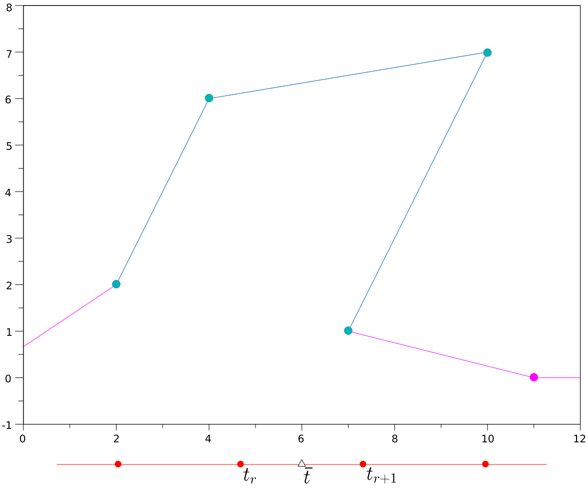
Un autre exemple



Polygone initial

B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

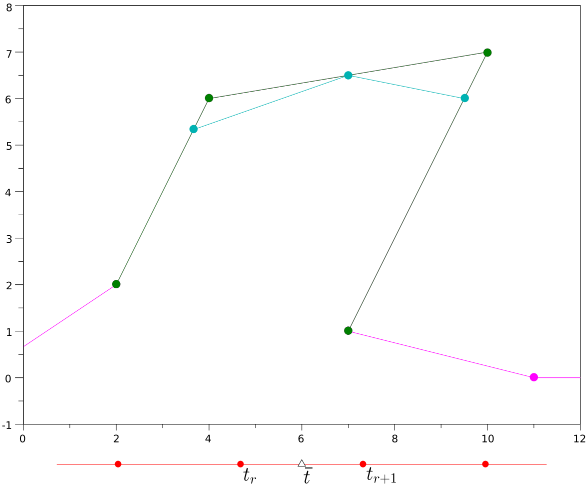
Un autre exemple



Points $A_{1,j}$, $1 \leq j \leq 4$

B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

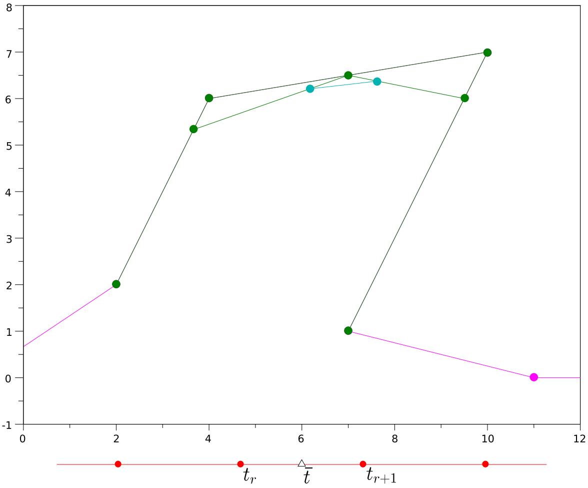
Un autre exemple



Points $A_{2,j}$, $1 \le j \le 3$

B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

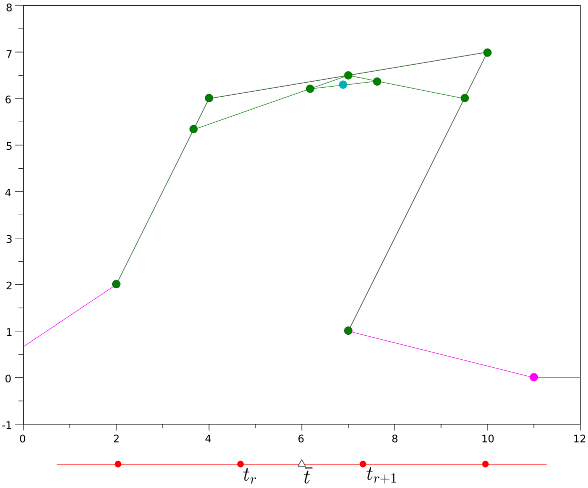
Un autre exemple



Points $A_{3,j}$, $1 \leq j \leq 2$

B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

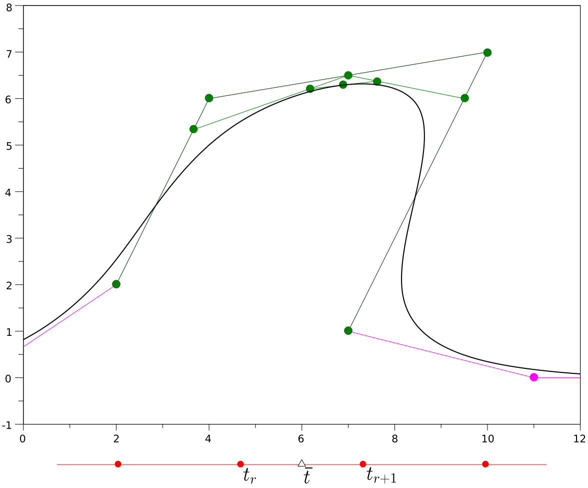
Un autre exemple



Point final $A_{4,1}$

B-Spline - algorithme de DeBoor-Cox

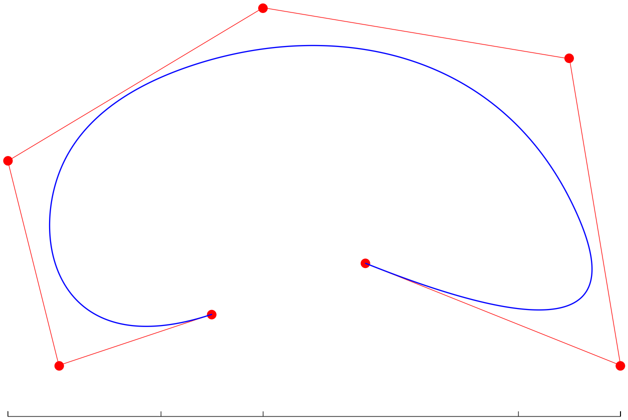
Un autre exemple



Courbe B-spline

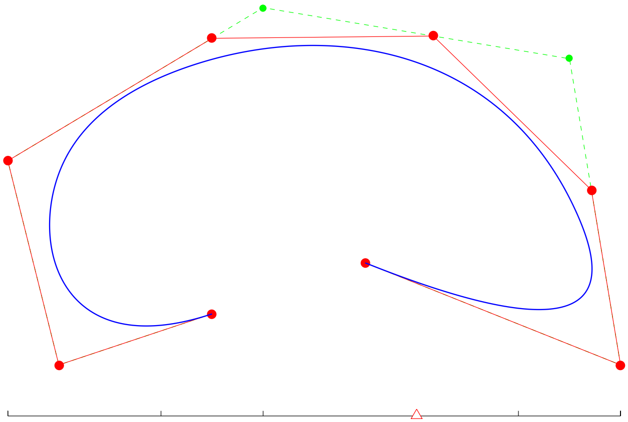
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives



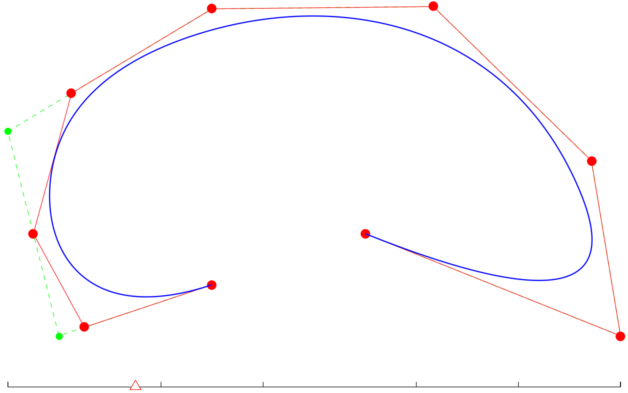
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives



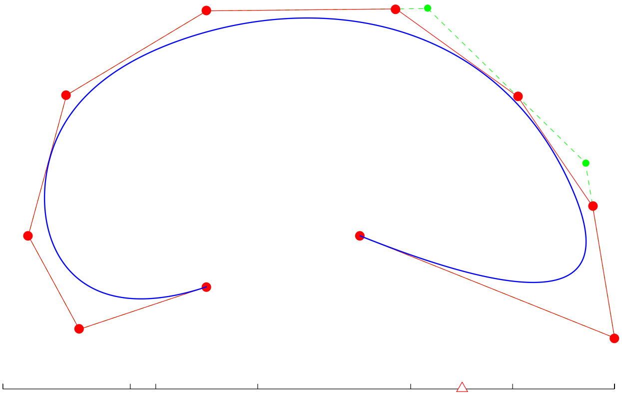
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives



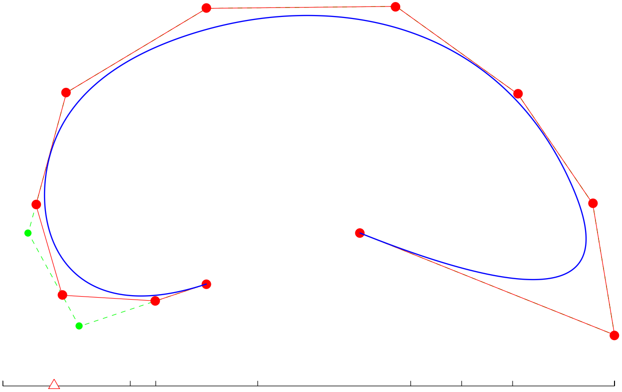
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives



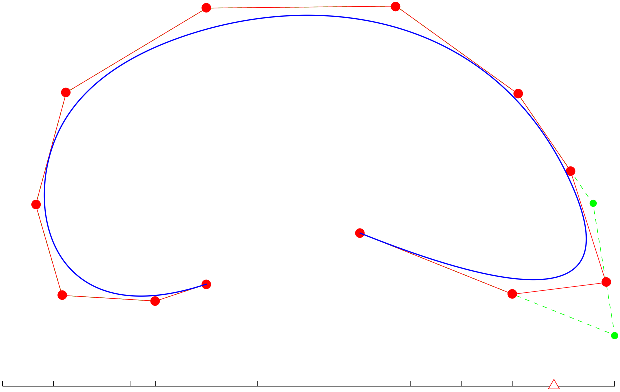
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives



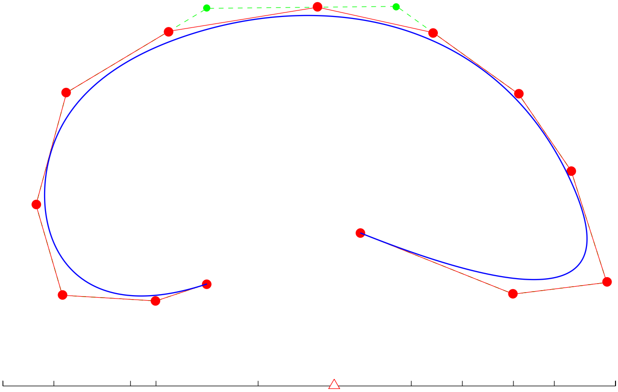
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives



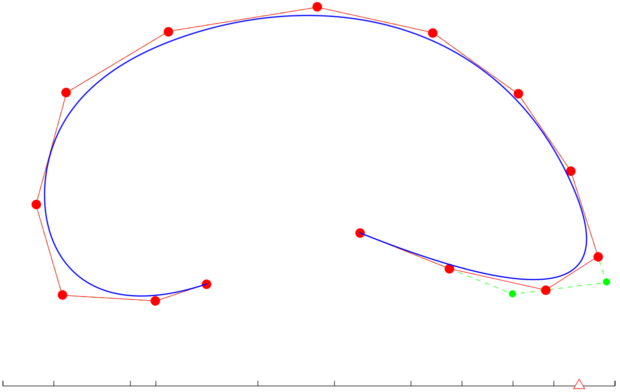
B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives

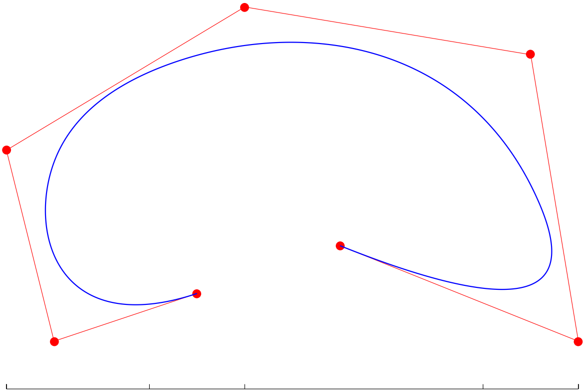


B-Spline - Insertion de noeuds

Exemple de plusieurs insertions successives

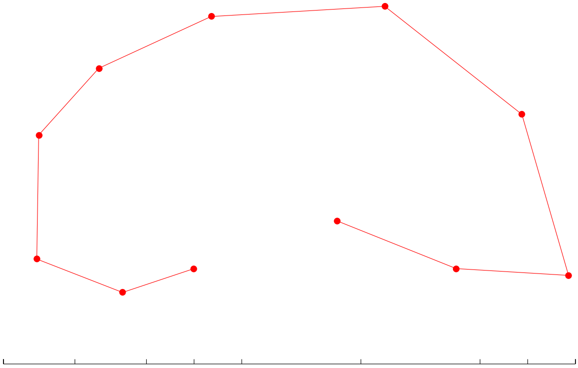


B-Spline - Subdivision



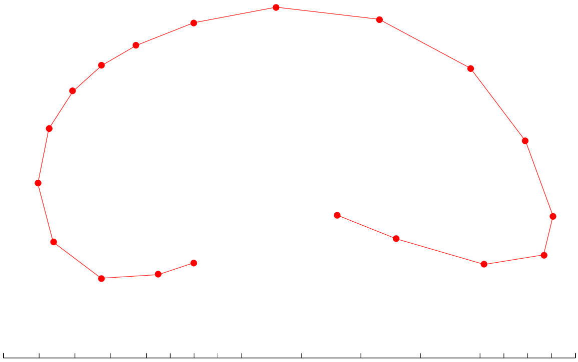
Polygone et noeuds initiaux et courbe correspondante

B-Spline - Subdivision



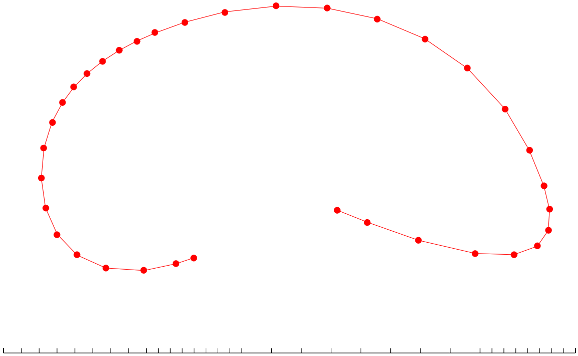
Polygone et noeuds après 1 subdivision

B-Spline - Subdivision



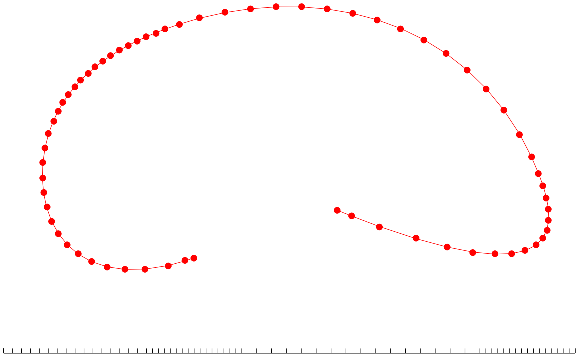
Polygone et noeuds après 2 subdivisions

B-Spline - Subdivision



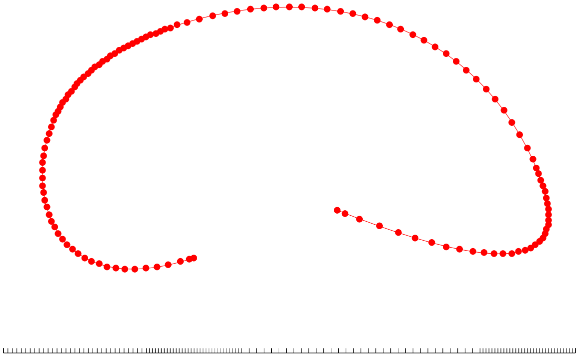
Polygone et noeuds après 3 subdivisions

B-Spline - Subdivision



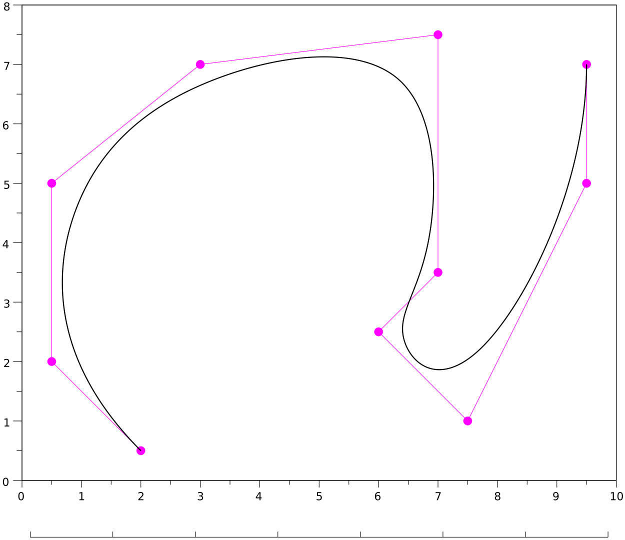
Polygone et noeuds après 4 subdivisions

B-Spline - Subdivision

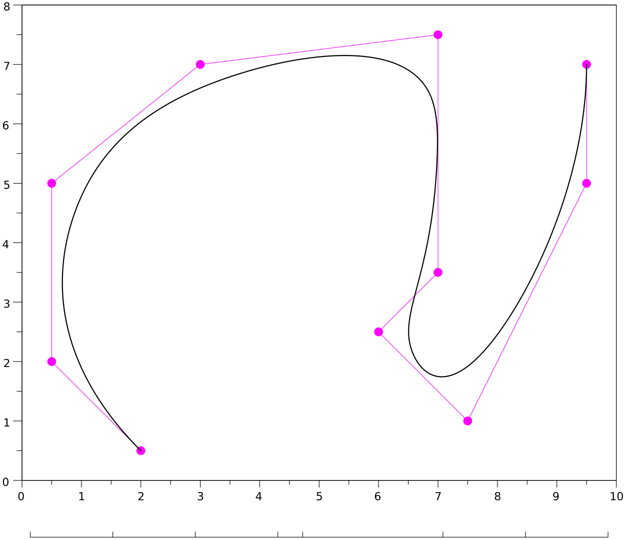


Polygone et noeuds après 5 subdivisions

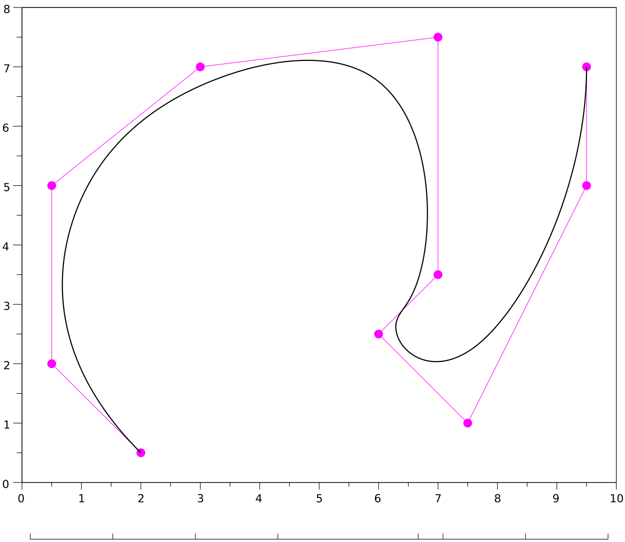
Influence des noeuds



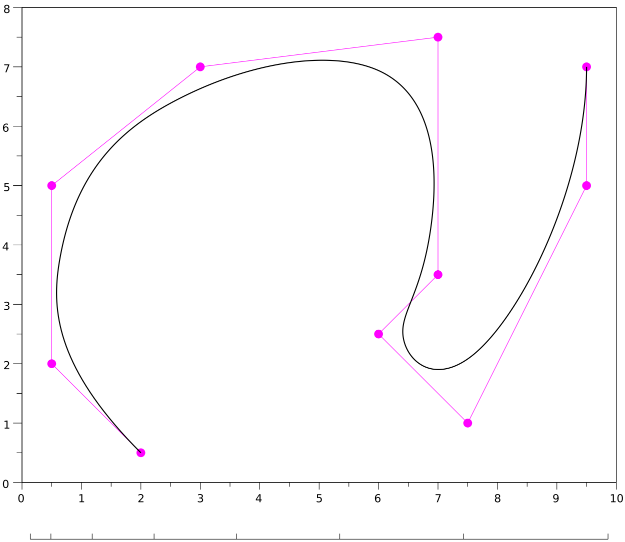
Influence des noeuds



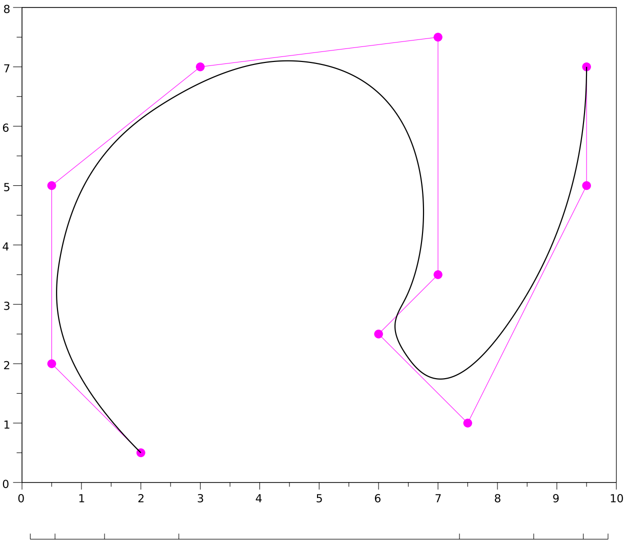
Influence des noeuds



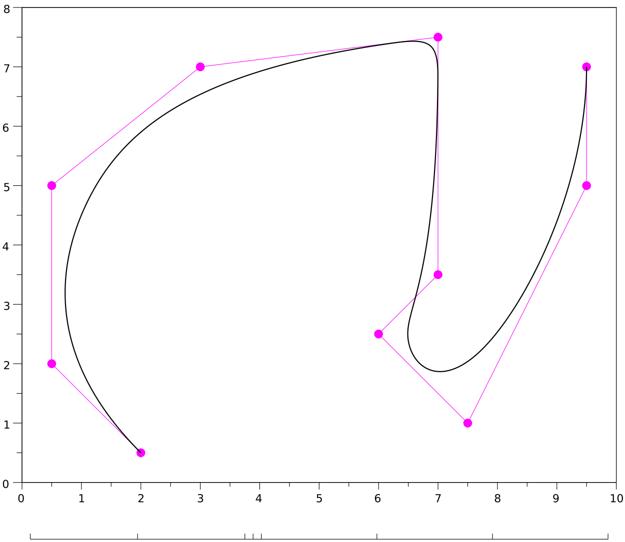
Influence des noeuds



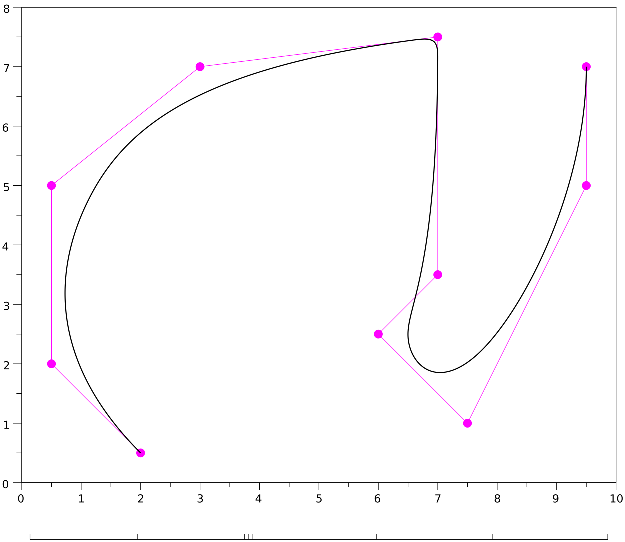
Influence des noeuds



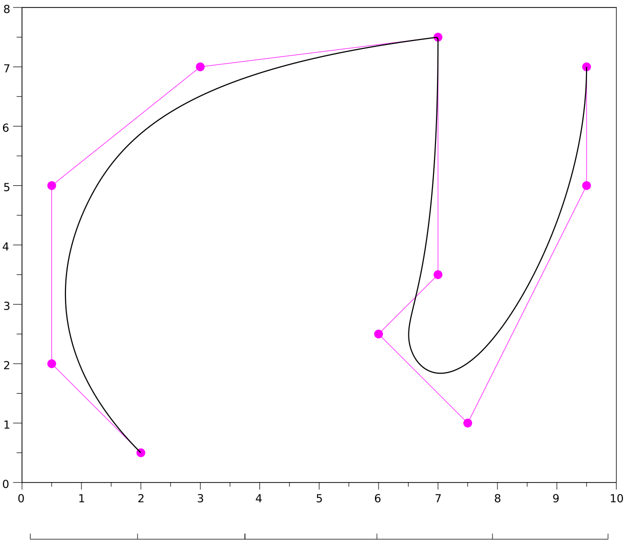
Influence des noeuds



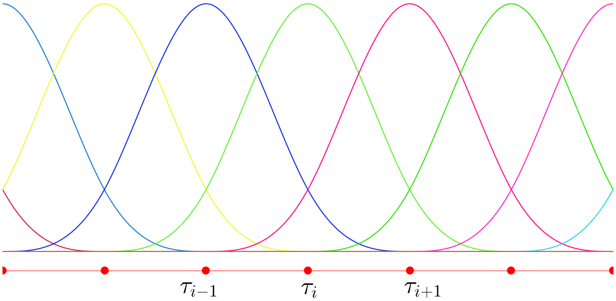
Influence des noeuds



Influence des noeuds



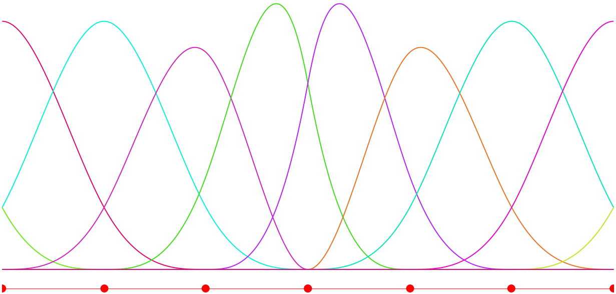
Noeuds confondus



Noeud τ_i de multiplicité 1

$$\cdots < \tau_{i-1} < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots$$

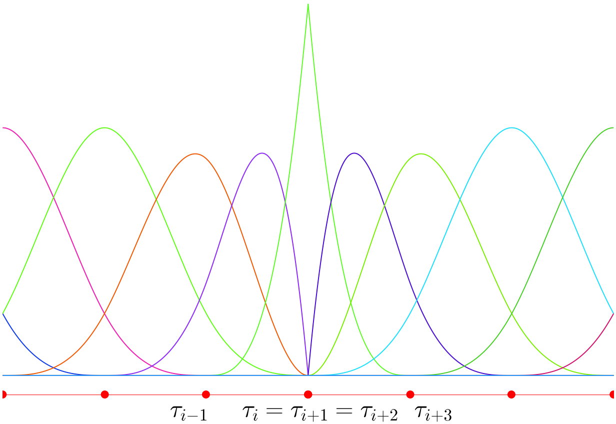
Noeuds confondus



Noeud τ_i de multiplicité 2

$$\cdots < \tau_{i-1} < \tau_i = \tau_{i+1} < \tau_{i+2} < \dots$$

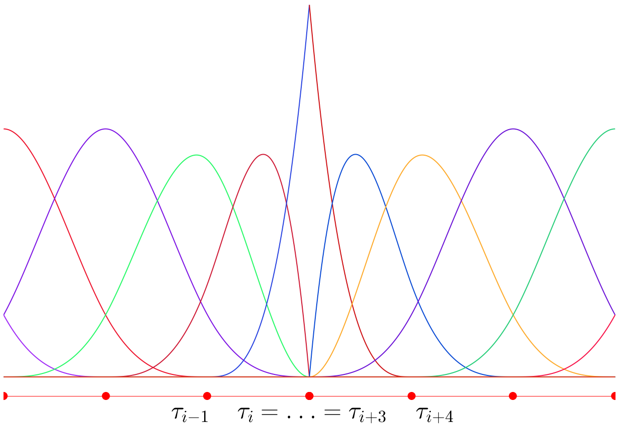
Noeuds confondus



Noeud τ_i de multiplicité 3

$$\cdots < \tau_{i-1} < \tau_i = \tau_{i+1} = \tau_{i+2} < \tau_{i+3} < \ldots$$

Noeuds confondus

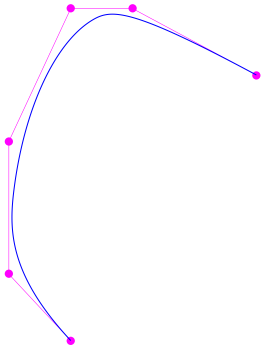


Noeud τ_i de multiplicité 4

$$\cdots < \tau_{i-1} < \tau_i = \tau_{i+1} = \tau_{i+2} = \tau_{i+3} < \tau_{i+4} < \ldots$$

Noeuds confondus

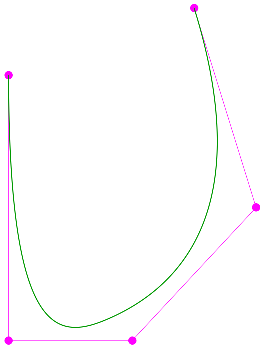
Concaténation de B-splines



Courbe $\mathcal{C}_1$

Noeuds confondus

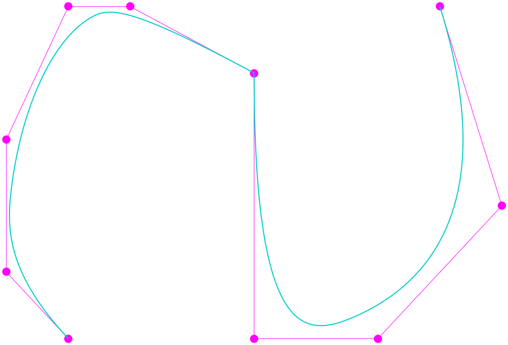
Concaténation de B-splines



Courbe $\mathcal{C}_2$

Noeuds confondus

Concaténation de B-splines



Courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$