调和函数

曹文哲 2313266

2024 年 12 月 23 日

摘要

在数学分析中，调和函数有很好的性质。由于复变函数的特殊性，使得所有的全纯函数都是调和函数。尽管实函数在复变函数中不是解析的，但可以通过实调和函数构造解析函数，而后通过解析函数的性质得到调和函数的光滑性及其满足 Liouville 定理等性质。本文主要将分别用数学分析和复变函数的办法建立平均值性质，然后以此证明调和函数的极值原理和复函数的最大模原理。

1 平均值定理

在这里我们先给出调和函数的定义，再证明解析函数都是调和函数且实调和函数都可以对应到一个解析函数（也就是调和函数），然后分别用数学分析和复变函数的办法建立平均值性质。

1.1 复变函数的办法

定义 1.1.1. 调和函数：设 D 是开域，$u = u(x, y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数（u 可以是复值的），并约定符号 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 其中，符号 $\Delta = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 被称为 Laplace 算子。若在 D 上 $\Delta u = 0$, 则称 u 是 D 上的调和函数。[1]

命题 1.1.1. *解析函数都是调和函数。*

证明. 设 $f = u(x, y) + iv(x, y) \in H(D)$，则由 C-R 方程：

$$\begin{cases} u_1 = v_2 \\ u_2 = -v_1 \end{cases}$$

从而 $f_1 = u_1 + iv_1 = u_1 - iu_2, f_2 = u_2 + iv_2 = iu_1 + u_2$，且 $u_{11} = v_{21} = v_{12} = -u_{22}$。于是 $f_{11} + f_{22} = u_{11} - iu_{21} + iu_{12} + u_{22} = u_{11} + u_{22} = 0$。于是解析函数都是调和函数。 □

注：这个命题同时也证明了解析函数的实部虚部作为实函数都是调和的。

命题 1.1.2. *每个实调和函数 u 都可以作为一个复调和函数 f 的实部。进一步，如果在解析函数中建立了平均值性质，则将他的实部虚部分别对应，可以得到实调和函数的平均值性质。*

[1]后文中用 u_1 表示对第一个变量求一阶偏导数

证明. 设 u(x,y) 是单连通区域 D 上的实调和函数，u_1, u_2 分别是他对 x，y 的偏导数。由于 u 是调和函数，从而 u_1, u_2 有连续偏导数，且 $u_{11} + u_{22} = 0$。设函数 v(x,y) 对 x,y 的一阶偏导数分别为 $u_2, -u_1$ 即：$dv = u_2 dx - u_1 dy$，由于等号右边为恰当形式，从而满足条件的 v 存在。设 f=u+iv，从而对任意闭路径 Γ，有

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy$$

由于这个积分的实部和虚部可以分别视为实积分，从而由 Green 公式知：f(z) 在任何闭路径上的积分为 0。f 的连续性显然，从而由 Morera 定理知 f 解析，于是他调和。

由于 f 在开域 D 中解析，从而对于 $z_0 \in D$ 且 $B_\delta(z_0) \subseteq D$，若 f 满足平均值性质，即：

$$u(z_0) + iv(z_0) = f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} u(z_0 + \delta\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi} v(z_0 + \delta\theta)d\theta$$

将实部与实部对应，即得 u 的平均值性质。 □

注：值得注意的是：这里构造的 v 也是调和函数。另外也可直接由 C—R 方程直接得到 f 的解析性，详见 [1] ***定理 3.9.2.***

推论 1.1.1. *由于解析函数有无穷多阶导数，且满足 Liouville 定理，从而实调和函数作为解析函数的实部是光滑的且满足 Liouville 定理。*

在这里我们假设已经对解析函数建立了柯西积分公式，下面由柯西积分公式建立平均值性质：
在柯西积分公式

$$f(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}dw$$

中取路径为 $\Gamma = \{w||w - z| = a\}$ 即得。至此，我们用复变函数的办法建立了调和函数的平均值性质。

1.2 数学分析的办法

接下来我们在 $\mathbb{R}^3$ 中，利用数学分析的办法对调和函数建立平均值性质。首先我们给出 $\mathbb{R}^n$ 中调和函数的定义。（详见 [2] 第二十六章）

定义 1.2.1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 **Laplace 算子**定义如下：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的函数 u，若 $\Delta u = 0$，则 u 是调和函数。

定义 1.2.2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 **Hamilton 算子**定义如下：

$$\nabla = \mathbf{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdot\cdot\cdot \mathbf{e_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

其具体含义如下：设 f 是一个可微函数，则

$$\nabla f = \mathbf{e_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{e_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot\cdot\cdot \mathbf{e_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = \mathrm{grad}f$$

设 $F = (f_1, f_2, \cdot\cdot\cdot, f_n)$ 是一个可微向量值函数，则：

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdot\cdot\cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \mathrm{div}F$$

即：∇ 是一个向量，他与多元函数的作用相当于数乘，他与向量值函数可以有点乘或叉乘。通过简单的计算可知:$\Delta = \nabla \cdot \nabla$。（也可以直接将点乘看成形式的乘法）

引理 1.2.1. **（第一 *Green* 恒等式）**设 ∂D 为区域 D 分片光滑的边界曲面，设 u,v 在 $\overline{D}$ 上二阶连续可微，则：

$$\iiint\limits_{D} \Delta u \cdot v dxdydz + \iiint\limits_{D} \nabla u \cdot \nabla v dxdydz = \iint\limits_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \tag{1.1}$$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$

证明. 由 Guass 公式：

$$\iiint\limits_{D} \mathrm{div}\mathbf{a} dxdydz = \iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} dS \tag{1.2}$$

在（1.2）中，令 $\mathbf{a} = v\nabla u$, 从而 $\mathrm{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot(v\nabla u) = \nabla v\cdot\nabla u + v\Delta u$。代入进 (1.2) 知等式成立。 □

注：观察等号两侧的被积函数，发现他们之间有类似于导数与原函数的关系。而这与一般形式的 *stokes* 公式相似：

$$\oint\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{D} d\omega$$

推论 1.2.1. 在等式 *(1.1)* 中取 *v=1*，即得：

$$\iiint\limits_{D} \Delta u \cdot dxdydz = \iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \tag{1.3}$$

引理 1.2.2. 设 u 在 $\overline{B_r(M_0)}$ 上二阶连续可微，若对于任意 $0 < \rho \leqslant r$，u 满足：

$$\iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$$

则 u 在球面上满足平均值性质，即：

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u dS \tag{1.4}$$

证明. 设 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$，令

$$x = x_0 + \rho sin\varphi cos\theta, y = y_0 + \rho sin\varphi sin\theta, z = z_0 + \rho cos\varphi \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

在 $\partial B_\rho(M_0)$ 上，有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \nabla u \cdot \mathbf{n}\\ &= (u_1, u_2, u_3)\cdot(sin\varphi cos\theta, sin\varphi sin\theta, cos\varphi)\\ &= sin\varphi cos\theta u_1(M_0 + \rho\mathbf{n}) + sin\varphi sin\theta u_2(M_0 + \rho\mathbf{n}) + cos\varphi u_3(M_0 + \rho\mathbf{n})\\ &= \frac{du}{d\rho}(M_0 + \rho\mathbf{n})\end{aligned}$$

于是：

$$0 = \iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{du}{d\rho}(M_0 + \rho\mathbf{n}) dS_\rho = \rho^2 \frac{d}{d\rho} \iint\limits_{\partial B_1(M_0)} u(M_0 + \rho\mathbf{n}) dS_1$$

即：

$$\frac{d}{d\rho}\iint\limits_{\partial B_1(M_0)} u(M_0+\rho\mathbf{n})dS_1=\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-2}\iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} u(M_0+\rho\mathbf{n})dS_\rho\big)=0$$

从而对于任意 $0<\rho\leqslant r$，有：

$$\rho^{-2}\iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} u(M_0+\rho\mathbf{n})dS_\rho=r^{-2}\iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u(M_0+\rho\mathbf{n})dS_r$$

而对于左侧，当 ρ 趋于 0 时，有：

$$\rho^{-2}\iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} u(M_0+\rho\mathbf{n})dS_\rho=\iint\limits_{\partial B_1(M_0)} u(M_0+\rho\mathbf{n})dS_1\to 4\pi u(M_0)$$

于是等式得证。 □

注：详见 *[2]* **例题 *26.1.4***。主要的想法是建立对参数 ρ 导数为 *0* 的性质，由于在每个半径为 ρ 的球面上 u 的积分值为 *0*，这个想法还是比较自然。在这个观点下，便想到在单位球面与半径为 r 的球面之间做变换。定理的证明在细节上值得注意。

定理 1.2.1. 若 u 在 D 上调和，则 u 在 D 上满足平均值性质。

证明. 由推论 1.2.1. 及 $\Delta u=0$ 知：对于任意 $B_r(M_0)\subseteq D$,$0<\rho\leqslant r$，有：

$$\iint\limits_{\partial B_\rho(M_0)}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS=\iiint\limits_{B_\rho(M_0)}\Delta u\cdot dxdydz=0$$

再由引理 1.2.2. 即得。 □

至此，我们分别用数学分析和复变函数的办法建立了平均值性质。

2 由平均值性质证明最大模原理的两种办法

引理 2.0.1. 设 D 是开域，$f\in H(D)$。若 $|f(z)|$ 是常数，则 $f(z)$ 是常数。[1]

引理 2.0.2. 一个连通开集不可能表示为两个不相交非空开子集的并。[2]

定理 2.0.1. 设 D 是开域，$f\in H(D)$。若 $|f(z)|$ 在 D 内某点达到最大，则 $f(z)$ 是常数。

证明. 不妨设 |f| 在 D 内达到最大值 M，设：

$$D_1=\{z\in D\big||f(z)|<M\},D_2=\{z\in D\big||f(z)|=M\}$$

易知 D_1 是开集，从而只需证明 D_2 也是开集即可得到矛盾。不妨设 $z_0\in D_2$，由于 D 是开集，从而存在 r>0，使得 $B_r(z_0)\subseteq D$。对于任意 $0<\rho\leqslant r$，由平均值性质：

$$f(z_0)=\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho\theta)d\theta$$

[1]在此处不加证明，主要想法是利用 C-R 方程证明 $f(z)$ 的导数是 0，详见 [1] **引理 3.7.1**

[2]同样也不加证明，可以构造不满足介值定理的连续函数，从而得到矛盾。在 [1] 的**定理 1.6.1** 中采取了另一种证明方式

若在 $B_r(z_0)$ 中存在 z_1，$|f(z_1)| < M$，设 $|z_0 - z_1| = r_0$, 则由于 $\sqrt{u^2+v^2}$ 连续，从而存在 $\varepsilon_0, B_{r_1}(z_1)$，在 $B_{r_1}(z_1)$ 中，$|f(z)| < M - \dfrac{\varepsilon_0}{2}$，于是

$$M = |f(z_0)| = |\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho\theta)d\theta| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho\theta)|d\theta < M$$

矛盾! 从而 D_2 是开集，于是有引理 2.0.2，$D_2 = D$, 于是 $|f(z)|$ 是常数，从而 $f(z)$ 是常数。 □

这个证明基于开集的拓扑性质，实际上也可以用类似于证明引理 2.0.2 的办法构造连续函数，然后用闭集上连续函数的介值性质得到矛盾：

证明. 不妨设 $z_0 \in D, |f|$ 在 z_0 达到最大值 M。若 D 中存在点 $z_1, |f(z_1)| < M$，则在连通开域中取一条连接 z_0, z_1 的路径 $\Gamma = \{z(t)\big|0 \leqslant t \leqslant T, z(0) = z_0, z(T) = z_1\}$。设 $t^* = \{t\big||f(z(t))| = M\}$，由于其有上界，从而有最大上界 t_0。当 $t_0 \neq T$ 时，与上一种证法类似的，由平均值定理即得矛盾。从而得证。 □

推论 2.0.1. 最小模原理: *设 D 是开域，$f \in H(D)$。若 $|f(z)|$ 在 D 内某点达到最小，则或者 $f(z)$ 是常数，或者 $|f(z)|$ 在最小处取到 0。*

证明. 若 f(z) 在 D 上没有零点，则考虑解析函数 $\dfrac{1}{f(z)}$，对其运用最大模原理即可。 □

这里我们只对解析函数进行了证明，但不仅调和函数的证明方法与解析函数的证明方法完全一致，另一方面，由命题 1.1.2 的办法通过调和函数 u 构造解析函数 f，再构造解析函数 e^f, 对 e^f 运用最大、最小模原理便得到了 u 的极值原理。

参考文献

[1] 周性伟，张震球，王险峰. 复变函数. 北京：科学出版社, 2022.

[2] 谢惠民，恽自求，易法槐，钱定边. 数学分析习题课讲义（第二版）（下册）. 北京：高等教育出版社, 2019.