层与etale空间

就目前所学而言，核心是将层作用到开集上的群的元，可以解释成相伴空间的截面函数。这个观点得以让我们自由的把群的元看做函数，仅需研究其上的函数。

常预层（constant presheaf）

设 A 是一个集合或者abel群，则下构造常预层，也记为 A:

$$A(U) = A$$

将包含映射全映为A上的单位映射，知A 是预层但一般不是层。唯一性条件可以满足，但粘结条件不满足。比如考虑两个不交的开集，不妨设 $A = \mathbb{Z}$,设 $a_1 = 1 \in A(U_1), a_2 = 2 \in A(U_2)$, 显然不存在 $a \in A(U_1 \cup U_2)$ 两者的扩充。

构造相伴空间-etale空间：

由茎的余极限定义，茎为 A. 则相伴空间为 $E=\cup_{x\in X}A$.

拓扑基为 $<\sigma,U>=\{[\sigma]_x|x\in U\}$, 其中 U 是 X 中的开集。观察一下此时的et空间 首先空间为 $X\times A$ ，拓扑可看成$U\times\{a\}$，则我们发现这个etale-空间成为在 A 处的常etale空间，群 A 赋予了离散拓扑。

层化——构造截面层：$\Gamma(\quad,E)$.

$\Gamma(U,E)=\{f:U\to E\text{ 连续, 满足 }f\pi=1_U\}$，此时 设 $f\in\Gamma(U,E)$, 则 对于 $X\in U$, $f(x)=[\sigma]_x$, 此时的 $\sigma\in P(U)$, $x\in U$, 依赖于x .之能做到在 x 的一个小邻域上保持"不动"，这可由连续性保证。故层化之后相当于是

$$A^*(U)=\{f:U\to A\text{为局部平凡的函数}\}.$$

常函数预层

这是另一个经典的预层，但不是层，同样是由于粘结条件不满足。下面给出它的相伴空间的构造，还有层化过程剖析。

常函数预层，这里的定义是

$$P(U)=\{f:U\to\mathbb{R}\text{ 为常函数}\}$$

并将包含映射映为**限制映射**。

茎为 $P_x = \lim_{\rightarrow x\in U} P(U)$, 其中的元素——芽为 $[f]_x$, 标识为在 x 局部的邻域上为常数，直观上可以用一个实数做标识。

相伴空间为 $E = \cup_{x\in X} P_x$.

拓扑基为 $< \sigma, U >= \{[\sigma]_x | x \in U\}$, 其中 U 是 X 中的开集。它的拓扑直观想象一些开集上每个开集内都体现为一个常函数，绘制在坐标系中表现为若干段曲线，做为拓扑中的元素。（如 $\langle 1, (0, 1)\rangle$ 想象为 $(0, 1)$ 区间上纵坐标为 1 的线段。

构造**层投影** $\pi : E \rightarrow X, [\sigma]_x \rightarrow x$. 因此相伴层的纤维（**fibre**）和之前层的茎相同。

同样，对比之下，此时的相伴空间和常层诱导的et空间一样 只要取 A 是 $\mathbb{R}$，则我们得到了拓扑一样的etale空间。即两种预层得到了一样的etale空间，这是否说明这两种预层同构呢? (至少一般情形下不对)。易证同构。

层化——构造截面层：$\Gamma(\quad , E)$.

$\Gamma(U, E) = \{f : U \rightarrow E \text{ 连续, 满足 } f\pi = 1_U\}$ ，此时 设 $f \in \Gamma(U, E)$, 则 对于 $X \in U, f(x) = [\sigma]_x$, 此时的 $\sigma \in P(U), x \in U$, 依赖于x .之能做到在 x 的一个小邻域上保持"不动"，这可由连续性保证。但是真是由于粘结条件不满足，故而无法由每个小邻域上的相容表示获得整体解。由于此时我们知道 σ 标识了一个常数，故设函数 $\nu : \sigma \mapsto c$,其中 c 为σ 的像。

因此，我们凡是 $x \xrightarrow{f} \sigma \xrightarrow{\nu} c$ 这个复合映射是一个函数，如上分析，此函数局部为常数，故我们得到了一个在 U 上局部平凡的函数记做 ν_f。考察映射 $f \mapsto \nu_f$，发现它是单射，并且反之给定一个局部平凡的函数σ,我们对于任意一个 $x \in U$,找到依赖于这个 x 的 $\sigma \in P(U)$ （它和上一个的 σ 这里不区分），则是否能说明这个 $f : x \to [\sigma]_x$ 是连续映射。回到这个局部常函数的性质上来，则我们知道存在 x 的一个邻域 V_x 使得 在 V_x 上 f 恒定，因此必然有邻域的原像是邻域，进而 f 连续。这样我们就证明了该截面层函数本质上是开集上的局部常函数。

这里，我们不妨再进一步，考察层化之后再次构造etale空间。我们发现拓扑是局部常函数×一个开集，这个可以用局部的开集为常数的小开集拼起来，因此两个拓扑是一样的。即两者的etale空间一样，虽然两个层不同构。

这是我们近距离接触**层化**的第一个例子。并且我们常常只考虑局部常函数层，如果都打到群 G ，称为 G 处的**常层(constant sheaf at G)**。与之相关的，有一个高频使用的正合列，用于说明局部解整体不存在，$\Gamma(X, \square)$ 函子作用不再右正合等等很多事情。

层的正合列

取 $X=\mathbb{C}-\{0\}$, 下面的层分别是 $\mathbb{Z}$ 处的常层，X 上的全纯函数层，还有不过零点的层（群为乘法群）。正合列为

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^{\times} \to 0$$

其中 φ：$f \to \exp(i2\pi\varphi)$.

下面验证其正合性。设 U 为 X 的非空开集，

$$(ker\, i)(U) = ker\, i(U) = 0$$

所以$\ker\ i$ 是零层，进而 $\mathbb{Z}$ 处正合。

由于 $\exp(2\pi i f) \equiv 1$ 当且仅当 f 恒为整数，则

$$im\, i = \ker \varphi$$

又

$$im\, \varphi := (\mathcal{O}/im\, i)^{*}$$

为了说明 φ 为满射，可以等价地用茎上的正合性来验证。而由于对数函数在原点外的小圆盘内总是有定义的，因此 $\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x^{\times}$ 是满的。

因此

这个列可以帮我们说明局部解存在不一定整体解存在，并且一般地,我们可以定义出这样的层为 Flabby 层：如果任何 $\sigma \in F(U)$，$\exists s \in F(X)$ s.t

$$s\big|_U = \sigma$$

则称 F 为 X 上的 Flabby 层。Flabby层会有很多便利之处。

全纯函数芽层

设 $O(U)=\{f:U\to\mathbb{C}\text{ 为全纯函数}\}$, 并将包含映射映为限制映射。

茎为 $O_x=\coprod_{x\in U}O(U)/\sim$ 这里用了余极限的另一定义，此时表示根据等价关系分类：设 $f_v\in O(V),f_u\in O(U),x\in U\cap V$, 则 $f_v\sim f_u$ 如果存在开集 $W:x\in W\subset U\cap V$.

相伴空间为 $E=\cup_{x\in X}O_x$

层化——构造截面层：$\Gamma(\quad,E)$.

$\Gamma(U,E)=\{\sigma:U\to E\text{ 连续, 满足 }\sigma\pi=1_U\}$，此时 设 $\sigma\in\Gamma(U,E)$, 则 对于 $x\in U,\sigma(x)=[f]_x$,此 f 依赖于 x, 同样由 σ 连续性保持在小邻域上可以"不动". 但是这里好在原来的O 为层，有粘结条件，因此可以找到一个共同的 $f\in O(U)$ 使得 $\sigma(x)=[f]_x,\forall x\in U$. 即

$$\begin{array}{ccccc} U & \overset{\sigma}{\to} E & x & \overset{\sigma}{\to} \sigma(x)\equiv[f]_x \\ \searrow & \pi\downarrow & & \pi\downarrow \\ & U & & x \end{array}$$

知此时的截面层函数不过是原层的对应的函数,在常函数层的例子中我们看到了如果只是预层，则原来的函数只是截面函数的一部分，我们发现这样的函数会趋近于“局部化”，局部性质更加明显，以此保证粘结条件。

摩天大厦层

定义 设 A 为一个阿贝尔群, $S(U) := x_* A(U) := \begin{cases} A, x \in U \\ 0, x \notin U \end{cases}$,可验证其为层。

找到对应的etale空间，当然此时为 $X - \{x\} \cup X \times A$ （将 y 和 $y \times 0$ 视为一样的）。即只有 x 处的纤维不平凡。 其中，若 $x \in U$, 则开集为 $U \times \{a\}$, 若 $x \notin U$ 则开集为 U. 以这样的开集为基则可生成一个拓扑。并且我们发现这个拓扑相对常函数层的拓扑区别是只有一点的拓扑不平凡，其他点都被“摊平了”。

附录

命题 常层同构于常函数层。

从常层到常函数层，只需要定义 $c \mapsto c$,指的是 $c \in \mathbb{R} \mapsto$ 值为 c 的常函数，验证交换图成立。并且这个映射显然为双射，因此两层同构。

命题 $\mathbb{C}$ 的区域 D 上的全纯函数芽层对应空间的纤维同构于单位圆盘内的幂级数构成的加法群。

证明：定义 $[f]_{z_0} \in \mathcal{F}_{z_0} \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, 其中 $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$. 定义是良好的，设 $[g]_{z_0} = [f]_{z_0}$ ，则存在更小的 z_0 的邻域 W 使得 $g|_W = f|_W$,因此在 z_0 处的幂级数展开式相同。

定义显然也是单和满的群同态。因此可知纤维是同构于单位圆盘上的幂级数构成的加法群。

□