1.4

2. 设 A="不是三等品"， B="是一等品"

则 $P(A)=0.95$， $P(B)=0.6$ ， $P(AB)=P(B)=0.6$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.6}{0.95}=\frac{12}{19}$$

9. $$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B\cdot(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB\cup B\bar{B})}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}$$

又 $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$

$=(1-P(\bar{A}))+(1-P(B))-P(A\bar{B})$

$=0.7+0.6-0.5=0.8$

$P(AB)+P(A\bar{B})=P(A)=0.7 \Rightarrow P(AB)=0.7-0.5=0.2$

$\therefore P(B|A\cup\bar{B})=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$

15、记 A_1="掉在宿舍"， A_2="掉在教室"， A_3="掉在路上"，B="找到钥匙"

则 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$

$=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.5\times0.8+0.3\times0.3+0.2\times0.1$

$=0.4+0.09+0.01=0.51$

18. 设 A="确实知道答案"， B="答案答对"

则 $P(B|A)=1$， $P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$

(1) $P(A)=P(\bar{A})=\frac{1}{2}$

则 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{5}$$

(2) $P(A)=0.2$， $P(\bar{A})=0.8$

则 $$P(A|B)=\frac{1\cdot0.2}{0.2\cdot1+0.8\cdot\frac{1}{4}}=\frac{0.2}{0.2+0.2}=\frac{1}{2}$$

19. 设 A="此人为男"， B="此人为色盲"

$P(A)=\frac{22}{43}$， $P(B|A)=5\%$ ， $P(B|\bar{A})=0.25\%$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{5\times\frac{22}{43}}{\frac{22}{43}\times5+\frac{21}{43}\times0.25}=0.9544$$

22、设 A_n = "第n次传球仍由甲传出"

则 $P(A_{n+1} \mid A_n) = 0$， $P(A_{n+1} \mid \overline{A_n}) = \frac{1}{m-1}$

$$\therefore P(A_n) = P(A_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n \mid \overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}})$$
$$= \frac{1}{m-1}P(\overline{A_{n-1}})$$
$$= \frac{1}{m-1}(1-P(A_{n-1}))，且 P(A_1)=1$$

$$\Rightarrow P(A_n) = \frac{1}{m}\left[1-\left(\frac{1}{1-m}\right)^{n-2}\right]，n \geqslant 2$$

26. 对i进行归纳. 设 $P_i(r,b)$ 为初始有r个红球，b个黑球时，第i次取到黑球的概率

(base) 当 $i=1$ 时，对 $\forall r,b$，$P_1(r,b) = \frac{b}{b+r}$，成立

(induction) 当 $i \geqslant 2$ 时，考虑第1次的情况

若第1次摸到黑球，则此后为开局有b+c个黑球，r个红球的情况；

若第1次摸到红球，则此后为开局有b个黑球，r+c个红球的情况；

设 $A_i(r,b)$ = "开局有r个红球，b个黑球，且第i次取到黑球"

则 $P_i(r,b) = P(A_i(r,b)) = P(A_i(r,b) \mid A_1(r,b))P(A_1(r,b)) + P(A_i(r,b) \mid \overline{A_1}(r,b))P(\overline{A_1}(r,b))$

$$= \frac{b}{r+b}A_{i-1}(r,b+c) + \frac{r}{r+b}A_{i-1}(r+c,b)$$
$$= \frac{b}{r+b}\cdot\frac{b+c}{r+b+c} + \frac{r}{r+b}\cdot\frac{b}{r+b+c} \quad // 由归纳假设.$$
$$= \frac{b^2+bc+rb}{(r+b)(r+b+c)} = \frac{b(r+b+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \frac{b}{r+b}$$

∴成立.

27. 设 A_n = "初始有n个红球时，白球比黑球出现早"

且 $P_n = P(A_n)$，对n归纳

设 W = "第一次抽出白球"，B = "第一次抽出黑球"，R = "第一次抽出红球"，

(base) 若 $n=0$，首次抽取便可确定白球是否出现得比黑球早.

$$\therefore P_n = P(A_n) = P(\text{"第一次抽到白球"}) = \frac{a}{a+b}$$

(induction) 若对 0,1…n-1 个红球的情况均成立，考虑有n个红球时：

$$P_n = P(A_n) = P(R)P(A_n \mid R) + P(B)P(A_n \mid B) + P(W)P(A_n \mid W)$$
$$= \frac{n}{a+b+n}P(A_n \mid R) + \frac{a}{a+b+n}P(A_n \mid W)$$

又∵ $P(A_n \mid R)$ 即为初始有a个白球，b个黑球，n-1个红球时，第一个抽到白球的概率，由归纳假设

知 $P(A_n \mid R) = P(A_{n-1}) = P_{n-1} = \frac{a}{a+b}$

而 $P(A_n \mid W) = 1$

$$\therefore P_n = \frac{n}{a+b+n}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+n} = \frac{an+a^2+ab}{(a+b+n)(a+b)} = \frac{a(a+b+n)}{(a+b)(a+b+n)} = \frac{a}{a+b}$$