高阶系统方法
—I. 全驱系统与参数化设计

段广仁 [1]

摘 要 本文首先指出了控制领域中普遍使用的增广一阶系统方法的弊端, 介绍了高阶全驱系统的概念及其在控制器设计方面的优势, 并通过一些基础物理定律、串联系统、严反馈系统和可反馈线性化系统等例子说明了高阶全驱系统的普遍性, 进而指出高阶全驱系统是动态系统的一种描述形式, 是面向控制的模型. 然后介绍了一类高阶全驱系统的一种参数化设计方法. 通过适当选取一类非线性状态反馈控制律, 可获得一个具有希望特征结构的线性定常闭环系统, 并给出了闭环系统特征向量和反馈控制律的完全参数化表示, 讨论了解的存在性条件以及设计参数集合的稠密性等相关问题. 最后对高阶全驱系统方法的后续问题做了说明和展望.

关键词 高阶系统, 全驱系统, 参数化方法, 特征结构, 设计自由度

引用格式 段广仁. 高阶系统方法 —I. 全驱系统与参数化设计. 自动化学报, 2020, **46**(7): 1333−1345

DOI 10.16383/j.aas.c200234

High-order System Approaches: I. Fully-actuated Systems and Parametric Designs

DUAN Guang-Ren[1]

Abstract In this paper, the drawback of the first-order system approaches which are widely used in the field of control systems is firstly pointed out, meanwhile the concept of high-order fully-actuated systems and, in particular, its advantage in controller design are introduced. The type of systems is demonstrated to be of wide existence by examining a number of basic physical laws and a few examples, including the common cascaded systems, the well-known strict-feedback systems, and those which can be linearized through feedback, and thus can be taken as a description of dynamical systems, more precisely, as a model for control. Then, a parametric design approach for the type of high-order fully-actuated systems is presented. With a proper nonlinear state feedback controller, a linear constant closed-loop system with desired eigenstructure can be derived, and complete parametric presentations for the closed-loop eigenvectors and the feedback law are given. Conditions of existence of solutions as well as the density of the set of design parameters are discussed. Finally, some further comments are made about future problems existing in the field of high-order fully-actuated systems.

Key words High-order systems, fully-actuated systems, parametric approaches, eigenstructure, design degrees of freedom

Citation Duan Guang-Ren. High-order system approaches: I. Fully-actuated systems and parametric designs. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(7): 1333−1345

1 引言

动态系统的描述形式是微分方程或/和差分方程. 在常微分方程的早期研究中, 威尼斯学者 J. F. Riccati 引入了 Riccati 方程, 并在 1724 年通过变量替换将一个二阶方程降阶为一个一阶方程进行求解. Riccati 的工作受到了极大重视, 不仅仅因为他处理了二阶微分方程, 而是他将二阶方程化为一阶方程的想法使降阶法成为处理高阶方程的主要方法之一[1−2]. 随后, Euler 在 1727 年通过引进著名的指数代换, 也将一类二阶常微分方程化为一阶方程, 并于 1750 年提出了求解 n 阶非齐次常系数线性微分方程的降阶法[1−2].

由于任何一个高阶系统 (微分方程) 都可以化成一个增广的一阶系统 (方程), 这种增广的一阶系统 (方程) 描述被看成是万能的, 而这种降阶法或变量增广法的思想也为人们广泛接受, 并被自然地引入到控制系统的分析与设计中来.

收稿日期 2020-04-21 录用日期 2020-06-19
Manuscript received April 21, 2020; accepted June 19, 2020
国家自然科学基金重大项目 (61690210, 61690212), 国家自然科学基金 (61333003), 机器人与系统国家重点实验室自主计划任务 (HIT) (SKLRS201716A) 资助
Supported by the Major Program of National Natural Science Foundation of China (61690210, 61690212), National Natural Science Foundation of China (61333003), and the Self-Planned Task of State Key Laboratory of Robotics and System (HIT) (SKLRS201716A)
本文责任编委 贺威
Recommended by Associate Editor HE Wei
1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150001
1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

1.1 一阶系统方法

由于主宰物理规律的牛顿定律、动量 (矩) 定理、欧拉方程、拉格朗日方程、基尔霍夫定律等物理定律的存在, 致使众多系统的原始模型都是二阶的. 而由这些模型复合起来的复杂模型自然是高阶的. 二阶和高阶系统才是物理系统的自然表现形式, 但长期以来人们都将这些模型化成了增广的一阶系统来研究, 这就是所谓的一阶系统方法.

1892 年俄国著名科学家 Lyapunov 完成了他的博士论文: 《运动稳定性的一般问题》[3], 这一工作建立了近乎完备的稳定性理论体系, 奠定了控制系统稳定性的理论基础, 提供了关于控制系统稳定性分析和设计的 Lyapunov 方法. 20 世纪 60 年代初, Lasalle 放宽了对 Lyapunov 稳定性定理的要求, 提出了 Lasalle 不变集原理[4−5] 以及与 Lasalle 不变集原理对应的类不变定理 (Invariance-like Theorem)[6].

二十世纪中叶是控制理论蓬勃发展的时期, 应战争和军事防御上的需求, 科学家们提出了最优化概念和最优控制问题. 1952-1957 年间, 美国学者 Bellman 提出的 Bellman 动态规划方法将离散最优控制问题转化为 HJB (Halmilton-Jacobi-Bellman) 方程的求解问题[7−9]; 1956-1960 年间, 前苏联学者 Pongtriagin 等提出了 Pongtriagin 极大值原理[10−13], 该原理可以把一般的连续非线性控制问题转化为 HJB 方程的两点边值问题进行求解[14−15]. 在这一方向上, 针对不同的系统形式和指标形式, 后期又涌现出了一批新方法, 如 H_∞ 控制[16−17] 和预测控制[18−19] 等.

1959 年, 美籍匈牙利数学家 Kalman 在其发表的论文《控制系统的一般理论》[20] 中, 首次提出了状态空间方法, 在时间域内采用状态和状态空间描述了一阶连续/离散线性时变/定常系统, 并在状态空间中研究了连续/离散线性定常系统的能控、能观性, 为现代控制理论的发展奠定了基础. 1960 年, 针对线性离散随机系统的滤波和预测问题, 他又提出了 Kalman 滤波器[21], 打破了早期滤波器设计的维纳理论关于平稳随机过程假设的限制. 1961 年, 他又和 Bucy 将 Kalman 滤波理论推广到连续系统, 建立了 Kalman-Bucy 滤波理论[22], 至此形成的 Kalman 滤波理论成为另一个控制理论里程碑式的成果. 随后, 为了解决非线性滤波问题, 人们又提出了针对一阶弱非线性系统采用线性化方法的扩展 Kalman 滤波[23], 和无需线性化的无迹 Kalman 滤波[24]. 另外, 值得指出的是, 上述提及的标志性进展无一例外地都是建立在一阶系统框架之上的.

Kalman 是主张控制理论数学化的, 他早在 1969 年称 "控制理论不研究真实世界, 只研究数学模型"[25], 2008 年又发表名言: "一旦获得模型, 剩下的便是数学"[26]. 他的工作和思想得到一大批控制科学家的高度认可, 对一阶系统方法的普及起到了极大的促进作用, 使得一阶系统方法在控制系统科学史上占有绝对的主导地位.

虽然现在也偶见一些研究定常线性系统的多项式方法和二阶系统的直接控制方法, 但与一阶系统方法的广泛程度相比, 只是凤毛麟角、沧海一粟.

1.2 利与弊

一阶系统方法在控制系统科学发展中所起的作用是巨大的. 然而, 动态系统的控制问题和微分方程的求解问题不同. 微分方程的求解关注的是系统状态的解. 系统控制的核心问题是控制量的求取.

状态空间法中的一阶系统模型注重的是状态的整体性, 对于控制系统的状态响应分析、观测器设计、状态滤波与预报等问题而言, 采用增广的一阶系统方法无疑是非常合适的. 但这种方法显然没有把系统的控制变量作为重点, 对于求解动态系统的控制问题实际上没有提供任何方便. 这种现象自然使得基于一阶系统的控制分析与设计存在一系列问题.

一个简单的例子便是系统的解耦问题. 求解一个高阶全驱系统的模型解耦问题是很简单的 (见第 5 节), 可是当把系统转化成一阶系统再来考虑其输入输出解耦就很难了[27], 而且还失去了物理上通道解耦的含义. 关于能控性方面的问题请见文献 [28].

把系统模型化为一阶系统描述的一个更重要的问题是破坏了系统的全驱特性. 物理世界中存在许多全驱系统. 例如, 在机械臂制作中人们往往为每个关节都安装一个驱动电机; 在飞行器设计中要确保俯仰、偏航和滚动三个方向上都有控制力矩;······ 全驱系统的控制是很简单的. 全驱特性允许我们对消掉开环系统的所有动态特性 (无论是线性还是非线性的), 同时建立全新的希望的闭环动态特性. 即使在非线性系统的情况, 也能给出一个希望的定常线性闭环系统. 但由于牛顿定律等一批物理规律的主宰, 这些全驱系统更多是以二阶或高阶系统的形式存在的. 一旦把它们化成一阶系统, 全驱特性就不复存在了. 可人们为了机械地利用一阶系统的控制理论方法处理问题, 仍然几乎千篇一律地把这些高阶系统转化成一阶系统, 其结果是把一些简单的问题复杂化了. 更严重的是, 当系统为非线性时, 还无法保证一定能够求得系统的镇定控制器, 即使能够求得, 也不一定能够保证闭环系统的全局稳定性, 更谈不上给出一个希望的定常线性闭环系统了.

时值 1995 年, 非线性系统理论还被称为 "almost everything is open"、"缺乏更好的理解和设

计方法”[29]. 对非线性控制来说, 下述两方面事实说明一阶系统方法远不完备:

1) 大多数方法, 如反步法、反馈线性化方法等, 都是针对特殊形式或者满足特殊条件的系统提出的, 比较一般性的理论方法较少;

2) 虽然有些方法在理论上具有一般性, 但在实际设计中未必能够实现, 如应用 Lyapunov 方法时在很多情形下不一定能够找到所需要的李亚普诺夫函数; 应用 Pongtriagin 极大值原理时, 未必能够求出 HJB 方程的解.

一阶系统方法把系统的二阶或高阶模型通过状态增广化成一阶系统模型来处理, 本质上就是数学上所谓的降阶法或变量增广法. 这种方法可以把一个全驱的二阶或者高阶系统化为一阶系统, 那么我们可不可以反过来把一个一阶系统还原为一个全驱的二阶或高阶系统呢? 这就是高阶系统方法的根本出发点.

本文揭示了高阶全驱系统在控制器设计方面的突出优势, 同时又充分说明了高阶全驱系统的普遍存在性. 进而指出, 高阶全驱系统远非一部分物理系统而已, 它和系统的状态空间模型一样, 是控制系统的一种描述形式, 是面向控制设计的系统模型. 在基于物理定律的控制系统建模过程中, 采用增元降阶处理便可得到系统的一阶状态空间模型, 采用消元升阶处理便可得到系统的高阶全驱模型. 针对高阶全驱模型, 本文也提出了一种参数化设计方法, 提供了系统设计过程中的所有自由度.

本文中采用了下述一些记号:

$\mathbf{R}^n$	n 维实向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m\times n$ 维实矩阵空间
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
A^{T}	矩阵 A 的转置
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
I_n	n 阶单位矩阵
$f^{(n)}(x)$	函数 $f(x)$ 的 n 阶导数

2 高阶全驱系统

“全驱” 原为一个物理概念. 本文在其原有意义的基础上对其进行了推广.

考虑下述一阶系统

$$E\dot{x}=f(x,t)+B(x,t)u \tag{1}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量, $u\in\mathbf{R}^n$ 为输入向量, $f(\cdot)\in\mathbf{R}^n$ 为一连续向量函数, $E\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为一常数矩阵, 可以是奇异的. 如果对于任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $t\geq 0$, 系数矩阵 $B(x,t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 都可逆, 则称上述系统 (1) 为全驱的. 此时对于任何矩阵 A_0, 都可以通过控制律

$$u=B^{-1}(x,t)\left[A_0x-f(x,t)+v\right] \tag{2}$$

得到下述形式的闭环系统:

$$E\dot{x}=A_0x+v \tag{3}$$

其中 $v\in\mathbf{R}^n$ 为一外部信号. 也就是说, 当系统 (1) 为全驱时, 我们可以获得一个希望的线性定常闭环系统 (因为 A_0 可以任意指定). 但遗憾的是, 这样的一阶全驱系统现实中很少存在.

不同于一阶情形, 下述二阶全驱系统

$$E\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)+B(x,\dot{x},t)u \tag{4}$$

却是广泛存在的, 其中的控制分布矩阵满足下述全驱条件

$$\det B(x,\dot{x},t)\neq 0,\ \forall x,\ \ \dot{x}\in\mathbf{R}^n,\ \ t\geq 0$$

机器人领域和航天器控制领域的许多系统都具有下述二阶全驱伪线性系统的形式[30−32]:

$$M(x,\dot{x},t)\ddot{x}+D(x,\dot{x},t)\dot{x}+K(x,\dot{x},t)x=u \tag{5}$$

其中 $M(\cdot)$, $D(\cdot)$ 和 $K(\cdot)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别为系统的广义质量矩阵, 阻尼矩阵和刚度矩阵. 事实上, 工程中常说的全驱系统多指这种情形, 而上述所谓的一阶全驱系统 (1), 以及下面将介绍的高阶全驱系统 (8), 一般不具有物理意义, 而是抽象的数学定义而已.

当系统 (4) 满足全驱条件时, 对于任何给定的矩阵 A_1, $A_0\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 总可以通过控制律

$$u=-B^{-1}(\cdot)[A_1\dot{x}+A_0x+f(x,\dot{x},t)-v] \tag{6}$$

获得下述线性定常闭环系统

$$E\ddot{x}+A_1\dot{x}+A_0x=v \tag{7}$$

为了求得具有期望性能的闭环系统, 我们只需合适地选择矩阵 A_0 和 A_1 即可.

一般地, 考虑如下的高阶系统

$$\begin{aligned}Ex^{(m)}=&f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)+\\&B(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)u\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 称为基础状态向量.

令 $\Omega_i\subset\mathbf{R}^n, i=0,1,\cdots,m-1$, 为一组紧集, 且记

$$\Omega=\Omega_0\times\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{m-1}$$

定义 1. 给定系统 (8) 和上述集合 Ω, 如果

$$\det B(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)\neq 0, t>0$$

1) 在 Ω 上成立, 则称系统 (8) 在 Ω 上是全驱的;

2) 只在 Ω 上的某个超曲面上不成立, 则称系统 (8) 在 Ω 上是亚全驱的;

3) 只在 Ω 中的有限个点上不成立, 则称系统 (8) 在 Ω 上是几乎全驱的;

4) 对于任何 $x^{(i)} \in \mathbf{R}^n$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$ 均成立, 则称系统 (8) 是大范围全驱的, 简称全驱的; 特别地, 当 $B(\cdot) \equiv I_n$ 时, 则称系统 (8) 是一个标准全驱系统.

类似地, 关于高阶全驱系统的控制问题, 我们有下述结论.

命题 1. 对于任何给定的定常矩阵 A_i, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 都可以选取全驱系统 (8) 的下述控制律

$$u = -B^{-1}(\cdot)\left[\sum_{i=0}^{m-1} A_i x^{(i)} + f(x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, t) - v\right] \tag{9}$$

获得如下的线性定常闭环系统

$$Ex^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + A_1\dot{x} + A_0 x = v \tag{10}$$

鉴于矩阵 A_i, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 的任意性, 我们可以通过合理地选择这些矩阵获得希望的闭环系统特性. 第 4 节将从闭环系统的特征结构配置角度出发对此给出具体的参数化方法.

3 控制的模型 (Model for Control)

上节说明了高阶全驱系统的重要优越性. 这种优越性自然吸引人们对高阶全驱系统方法给予一定关注. 但客观地讲, 高阶全驱系统远没有得到应有的足够重视. 究其原因, 主要是受狭义的物理概念的束缚, 人们认为全驱系统只是自然界中的一小部分, 不足以引起重视.

我们首先指出, 所有能控的线性定常系统都可以表示成高阶全驱系统[28]. 本节将进一步通过几方面例子来说明高阶全驱系统的普遍性, 进而说明它们可以构成控制系统的一种描述形式, 是一种面向控制的系统模型.

3.1 基础物理定律

让我们先来看一下熟知的几个动力学定律.

众所周知, 关于质点平动 (牛顿定律) 和刚体绕定轴转动的规律可以描述如下:

$$m\ddot{x} = u \tag{11}$$

其中 m 为质点的质量或刚体的转动惯量, u 为作用在该质点或刚体上的力 (矩). 显然这是一个二阶全驱系统.

考虑由 n 个质点构成的质点系, 第 i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 个质点 P_i 的质量为 m_i, 其矢径为 r_i. 则该质点系的动量定理和动量矩定理分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i\right) = u \tag{12}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \dot{x}_i\right) = u \tag{13}$$

其中 u 为作用于该质点系上外力系对同一点的主矢 (矩). 容易看出, 由上述两个方程决定的系统均为二阶全驱系统.

如果质点 P_i 在主动力 u_i 作用下运动. 系统的自由度为 s, 位形由广义坐标 q_j ($j = 1, 2, \cdots, s$) 确定, 即

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则有拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = u_k, \quad k = 1, 2, \cdots, s \tag{14}$$

其中的系统动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 \tag{15}$$

不难理解, 由式 (14) 和 (15) 决定的系统也为二阶全驱系统. 另外, 大量事实证明, 许多工业系统都可以基于拉格朗日方程建立下述形式的二阶全驱系统模型:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + T_d = \tau \tag{16}$$

其中,

$$q = [q_1 \quad q_2 \ \cdots \ q_s]^{\mathrm{T}}$$

为广义坐标, $M(q)$ 表示惯量矩阵, $C(q, \dot{q})$ 表示离心和科氏矩阵, $G(q)$ 表示重力力矩向量, $F(\dot{q})$ 表示摩擦力矩向量, T_d 表示未建模动态和外部扰动, u 表示外部力矩.

另外, 关于基本的电压源驱动的 RLC 串联电路, 有下述的基尔霍夫电压定律

$$LC\ddot{x} + RC\dot{x} + x = u \tag{17}$$

关于基本的电流源驱动的 RLC 并联电路, 有下述基尔霍夫电流定律

$$LC\ddot{x} + \frac{L}{R}\dot{x} + x = u \tag{18}$$

在上述两个方程中, x 分别代表电容两端的电压和通过电感的电流, u 分别代表控制电压和控制电流, L, R, C 分别为电路中的电感、电阻和电容.

由上述可见, 牛顿定律、动量 (矩) 定理、拉格朗日方程以及基尔霍夫定律给出的系统均为二阶全驱系统. 因此, 基于上述定律建模时所获得的各个子系统的原始模型均为二阶全驱系统. 在这个层面上, 如果进一步采用增元降阶处理便可得到系统的一阶状态空间模型, 更适合研究系统的响应分析、观测器设计和状态滤波等问题; 如果进一步采用消元升阶处理便可得到系统的高阶 (亚) 全驱模型, 更适合解决系统的控制问题.

3.2 串联系统

考虑如下系统:

$$M(\theta, x, \dot{x})\,\ddot{x} + D(\theta, x, \dot{x})\,\dot{x} + K(\theta, x, \dot{x})\,x + \xi(\theta, x, \dot{x}) = B(\theta, x, \dot{x})\,\tau \tag{19}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\tau \in \mathbf{R}^n$ 是控制向量, 向量 $\xi(\theta, x, \dot{x}) \in \mathbf{R}^n$ 是关于 x, $\dot{x}$ 和 θ 的一个分段连续向量函数, $\theta = \theta(t) \in \mathbf{R}^l$ 是参数向量并满足如下假设:

假设 A1. 参数向量 $\theta = \theta(t) \in \mathbf{R}^l$ 含于某紧集 Ω 中, 即 $\theta(t) \in \Omega \subset \mathbf{R}^l$.

$M(\theta, x, \dot{x})$, $D(\theta, x, \dot{x})$, $K(\theta, x, \dot{x}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $B(\theta, x, \dot{x}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是系统的系数矩阵, 它们关于 x, $\dot{x}$ 和 θ 是分段连续的, 且 $M(\cdot)$ 恒不为零, $B(\cdot)$ 满足如下全驱性假设:

假设 A2. $\det B(\theta, x, \dot{x}) \neq 0$, $\forall x$, $\dot{x}$ 和 $\theta(t) \in \Omega$.

在机电系统中, 控制向量 $\tau(t)$ 一般是广义力向量或者广义力矩向量, 由如下一阶模型

$$\dot{\tau} = f(\tau, t) + u \tag{20}$$

或者如下二阶模型

$$\ddot{\tau} = f(\tau, \dot{\tau}, t) + u \tag{21}$$

决定, 其中 $f(\cdot)$ 是 n 维的向量函数, $u(t)$ 是驱动控制向量, 一般是电信号向量.

由二阶系统 (19) 和系统 (20) 或 (21) 组成的串联系统的常规控制方法是将其化为一阶状态空间形式, 然后采用一阶系统的有关方法实现控制设计. 此时需要处理一个 $3n$ 维的一阶系统, 而且也不一定能够保证求得系统的镇定控制律. 不同于一阶系统方法, 文献 [33] 应用高阶系统方法, 将系统 (19) 和 (20) 组成的串联系统等价转化为全驱的三阶微分系统.

定理 1[33]. 当假设 A1 和 A2 成立时, 由系统 (19)-(20) 构成的串联系统可表述为如下三阶模型

$$A_3(\theta, x, \dot{x})\,\dddot{x} + A_2(\theta, x, \dot{x})\,\ddot{x} + A_1(\theta, x, \dot{x})\,\dot{x} + A_0(\theta, x, \dot{x})\,x + \eta(\theta, x, \dot{x}) = B(\theta, x, \dot{x})\,u \tag{22}$$

式中:

$$\begin{aligned}
A_3(\theta, x, \dot{x}) &= M(\theta, x, \dot{x})\\
A_2(\theta, x, \dot{x}) &= \frac{\mathrm{d}M(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t} + D(\theta, x, \dot{x}) - \\
&\quad \frac{\mathrm{d}B(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t}B^{-1}(\theta, x, \dot{x})\,M(\theta, x, \dot{x})\\
A_1(\theta, x, \dot{x}) &= \frac{\mathrm{d}D(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t} + K(\theta, x, \dot{x}) - \\
&\quad \frac{\mathrm{d}B(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t}B^{-1}(\theta, x, \dot{x})\,D(\theta, x, \dot{x})\\
A_0(\theta, x, \dot{x}) &= \frac{\mathrm{d}K(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t} - \\
&\quad \frac{\mathrm{d}B(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t}B^{-1}(\theta, x, \dot{x})\,K(\theta, x, \dot{x})\\
\eta(\theta, x, \dot{x}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(\theta, x, \dot{x}) - \\
&\quad B(\theta, x, \dot{x})\,f(\theta, x, \dot{x}, \ddot{x}, t) - \\
&\quad \frac{\mathrm{d}B(\theta, x, \dot{x})}{\mathrm{d}t}B^{-1}(\theta, x, \dot{x})\,\xi(\theta, x, \dot{x})
\end{aligned}$$

另外中间变量 τ 可由下述关联方程给出:

$$\tau = B^{-1}(\theta, x, \dot{x})\,[M(\theta, x, \dot{x})\,\ddot{x} + D(\theta, x, \dot{x})\,\dot{x} + K(\theta, x, \dot{x})\,x + \xi(\theta, x, \dot{x})]$$

而上述出现的 $f(\theta, x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ 是通过在 $f(\tau, t)$ 中将上述 τ 代入之后的结果.

3.3 严反馈型系统

考虑如下严格反馈型非线性系统[34]

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = f_1(x_1) + G_1 x_2\\
\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + G_2 x_3\\
\quad\vdots\\
\dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + G_{n-1} x_n\\
\dot{x}_n = f_n(x_1, \cdots, x_n) + G_n u
\end{cases} \tag{23}$$

其中 $x_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 为系统的状态变量, $u \in \mathbf{R}^n$ 为系统的控制输入, $f_i(x_1, \cdots, x_i) \in \mathbf{R}^n$ 为具有 $n-1$ 阶导数的向量函数, $G_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为可逆的常数矩阵.

针对上述系统, 我们有如下结论:

定理 2. 记

$$\tilde{G}_{i\sim j}=\begin{cases}G_iG_{i+1}\cdots G_j, & i\le j\\ I_n, & i>j\end{cases}$$

则严格反馈型系统 (23) 可以转化为如下高阶全驱形式

$$x_1^{(n)}-\sum_{i=1}^{n}\tilde{G}_{1\sim i-1}f_i^{(n-i)}(x_1,h_2(\cdot),\cdots,h_i(\cdot))=\tilde{G}_{1\sim n}u \tag{24}$$

其中 $h_i(\cdot)=h_i(x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_1^{(i-1)})$ 由下述递推公式获得:

$$h_i(\cdot)=-\sum_{k=2}^{i}\tilde{G}_{k-1\sim i-1}^{-1}f_{k-1}^{(i-k)}\Big(h_1(\cdot),h_2(\cdot),\cdots,h_{k-1}(\cdot)\Big)+\tilde{G}_{1\sim i-1}^{-1}x_1^{(i-1)},\\ i=2,3,\cdots,n-1$$

其递推初值为 $h_1(x_1)=x_1$, 且系统 (23) 中的其它变量由下述关联方程给出:

$$x_i=h_i(x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_1^{(i-1)}),\ i=2,3,\cdots,n \tag{25}$$

证明. 为了书写方便, 记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则由式 (23) 的第一个方程可知,

$$x_2=G_1^{-1}\left[Dx_1-f_1(x_1)\right]\triangleq h_2(x_1,Dx_1) \tag{26}$$

对式 (26) 求导, 并结合 $\dot{x}_2$ 表达式可得

$$\dot{x}_2=G_1^{-1}\left[D^2x_1-Df_1(x_1)\right]=G_2x_3+f_2(x_1,x_2) \tag{27}$$

因此由式 (27) 可以直接求得

$$x_3=G_2^{-1}G_1^{-1}\left[D^2x_1-Df_1(x_1)\right]-G_2^{-1}f_2(x_1,h_2(x_1,Dx_1))\triangleq h_3(x_1,Dx_1,D^2x_1) \tag{28}$$

再对式 (28) 两端求导并利用式 (23), 有

$$\dot{x}_3=G_2^{-1}G_1^{-1}\left[D^3x_1-D^2f_1(x_1)\right]-G_2^{-1}Df_2(x_1,h_2(x_1,Dx_1))=G_3x_4+f_3(x_1,x_2,x_3) \tag{29}$$

将式 (26), (28) 代入式 (29), 经整理又得

$$x_4=\tilde{G}_{1\sim3}^{-1}\left[D^3x_1-D^2f_1(x_1)\right]-G_3^{-1}G_2^{-1}Df_2(x_1,h_2(\cdot))-G_3^{-1}f_3(x_1,h_2(\cdot),h_3(\cdot))\triangleq h_4(\cdot) \tag{30}$$

依此类推, 重复上述过程不难得到

$$x_n=\tilde{G}_{1\sim n-1}^{-1}\left[D^{n-1}x_1-D^{n-2}f_1(x_1)\right]-\tilde{G}_{2\sim n-1}^{-1}D^{n-3}f_2(x_1,h_2(\cdot))-\cdots-G_{n-1}^{-1}G_{n-2}^{-1}Df_{n-2}(x_1,h_2(\cdot),\cdots,h_{n-2}(\cdot))-G_{n-1}^{-1}f_{n-1}(x_1,h_2(\cdot),\cdots,h_{n-1}(\cdot))\triangleq h_n(\cdot) \tag{31}$$

其中

$$D^{n-i}f_{i-1}(x_1,\cdots,h_i(\cdot))=\Big[\xi_{i-1,1},\xi_{i-1,2},\cdots,\xi_{i-1,n}\Big]^{\mathrm{T}},\\ i=2,3,\cdots,n-2$$

且右端分量为

$$\xi_{i-1,j}=D^{n-i}f_{i-1,j}(x_1,\cdots,h_i(\cdot)),\\ j=1,2,\cdots,n$$

从而有

$$\dot{x}_n=\tilde{G}_{1\sim n-1}^{-1}\left[D^nx_1-D^{n-1}f_1(x_1)\right]-\tilde{G}_{2\sim n-1}^{-1}D^{n-2}f_2(x_1,h_2(\cdot))-\cdots-G_{n-1}^{-1}G_{n-2}^{-1}D^2f_{n-2}(x_1,h_2(\cdot),\cdots,h_{n-2}(\cdot))-G_{n-1}^{-1}Df_{n-1}(x_1,h_2(\cdot),\cdots,h_{n-1}(\cdot))=f_n(x_1,h_2(\cdot),\cdots,h_n(\cdot))+G_nu \tag{32}$$

其中

$$D^{n-i}f_i(x_1,\cdots,h_i(\cdot))=\left[\xi_{i,1},\xi_{i,2},\cdots,\xi_{i,n}\right]^{\mathrm{T}},\\ i=1,2,\cdots,n-1$$

类似地,

$$\xi_{i,j}=D^{n-i}f_{i,j}(x_1,\cdots,h_i(\cdot)),\ j=1,2,\cdots,n$$

显然, 式 (32) 即等价于式 (24). 再由式 (26)、(28)、(30) 和 (31) 可得式 (25). □

为简单起见, 上述仅考虑了系统 (23) 中控制系数 G_i 为常数矩阵情形. 事实上, 对于 G_i 为矩阵函数, 即 $G_i=G_i(x_1,\cdots,x_i)$ 的严格反馈型系统, 我们依然可以利用上述类似过程将其转化为高阶全驱形式. 特别地, 对于下述常规的积分型系统[35]

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=f(x_1,\cdots,x_n,t)+B(x_1,\cdots,x_n,t)u\end{cases} \tag{33}$$

由其前 $n-1$ 个方程可得

$$x_i = x_1^{(i-1)},\ i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{34}$$

将上述各式代入到系统的最后一个方程可得积分型系统 (33) 的如下高阶全驱形式:

$$\begin{aligned} &x_1^{(n)} - f(x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)}, t) = \\ &\quad B(x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)}, t)u \end{aligned} \tag{35}$$

说明 1. 严格反馈系统的控制方法很多. 反步法和滑模控制的优点是鲁棒性好, 但所获得的闭环系统也多为非线性的. 由定理 2 知严格反馈系统可以化为高阶全驱系统, 因此可以得到线性定常的闭环系统.

3.4 可反馈线性化的系统

考虑下述仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{36}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为适当维数的充分光滑的向量函数和矩阵函数. 该系统的一种常用的状态反馈控制律具有下述形式:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{37}$$

其中 $\alpha(x) \in \mathbf{R}^r$, $\beta(x) \in \mathbf{R}^{r\times r}$; $v \in \mathbf{R}^r$ 为一个外部输入信号.

定理 3. 如果存在控制律 (37), 其中 $\beta(x)$ 恒可逆, 以及微分同胚变换

$$\hat{x} = T(x) \tag{38}$$

可将系统 (36) 化成下述能控线性系统

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bv \tag{39}$$

则亦存在微分同胚变换将系统 (36) 化成高阶全驱系统.

证明. 由于系统 (39) 能控, 根据文献 [28] 中定理 2 可知, 存在微分同胚变换

$$z = T_1(\hat{x}) \tag{40}$$

使得系统 (39) 可以等价地化为下述高阶全驱系统

$$\sum_{i=0}^{\mu} A_i z^{(i)} = \tilde{B}v \tag{41}$$

其中 $A_i \in \mathbf{R}^{r\times r}$, $i = 0, 1, \cdots, \mu$, $\tilde{B} \in \mathbf{R}^{r\times r}$ 为一个可逆矩阵.

另一方面, 由 $\beta(x)$ 的可逆性有

$$v = \beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]$$

以此代入式 (41) 可得

$$\sum_{i=0}^{\mu} A_i z^{(i)} + \tilde{B}\beta^{-1}(x)\alpha(x) = \tilde{B}\beta^{-1}(x)u \tag{42}$$

其中

$$x = T^{-1}(\hat{x}) = T^{-1}(T_1^{-1}(z))$$

记

$$\begin{aligned} B_0(z) &= \tilde{B}\beta^{-1}(x) \\ \xi(z) &= \tilde{B}\beta^{-1}(x)\alpha(x) \end{aligned}$$

则式 (42) 可改写为

$$\sum_{i=0}^{\mu} A_i z^{(i)} + \xi(z) = B_0(z)u \tag{43}$$

此即说明存在同胚变换

$$z = T_2(x)$$

将系统 (36) 化成了高阶全驱系统 (43). □

定理 2 和 3 说明, 严格反馈非线性系统和所有可以反馈线性化的系统都可以通过适当的状态变换化成高阶全驱系统. 我们只是通过这两个事实进一步说明高阶全驱系统的广泛存在性, 并不建议在应用中先获得系统的一阶状态空间模型, 然后再将其化为高阶全驱系统. 因为这是不经济的, 对于控制系统设计而言是个 "画蛇添足"、"费力不讨好" 的过程. 可能的话, 我们提倡在系统建模的过程中直接获得系统的高阶全驱模型.

本节只是展示了几方面的例子. 事实上, 能化为高阶全驱模型的系统还有很多. 如果再考虑到亚全驱的情形, 能化为高阶全驱模型的系统就更多了.

4 参数化设计方法

在全驱系统的控制器设计过程中, 可以通过对消更换掉开环系统特性, 实现闭环系统的定常化和线性化. 在这种设计中, 有关系统中设计自由度的挖掘和利用自然也是一个重要问题. 本节将给出全驱控制系统设计的一种参数化方法, 提供控制系统设计中的所有自由度.

4.1 闭环特征结构

注意到命题 1, 高阶全驱系统 (8) 的控制问题本质上等价于求取一组定常矩阵 A_i, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 使得闭环系统 (10) 具有希望的系统特性. 本节的出发点是使得闭环系统具有希望的特征结构. 为此, 我们需要将闭环系统 (10) 转化为下述一阶系统的形式:

$$E_c\dot{X} = A_cX + B_cv \tag{44}$$

其中

$$X = \left[\begin{array}{cccc} x^{\mathrm{T}} & \dot{x}^{\mathrm{T}} & \cdots & (x^{(m-1)})^{\mathrm{T}} \end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$E_c = \left[\begin{array}{cccc} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right] \tag{45}$$

$$A_c = \left[\begin{array}{cccc} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{m-1} \end{array}\right] \tag{46}$$

$$B_c = \left[\begin{array}{cccc} 0_{n\times n} & \cdots & 0_{n\times n} & I_n \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \tag{47}$$

再引入下述假设:

假设 A3. $\mathrm{rank}E = n_0 \le n$

则由广义系统理论[36] 可知, 闭环系统 (10) 或者 (44) 具有

$$n_c = \mathrm{rank}E_c = (m-1)n + n_0 \tag{48}$$

个有限相对特征值和 $n - n_0$ 个无穷相对特征值. 因此, 闭环系统的若当标准型 $F \in \mathbf{R}^{n_c\times n_c}$ 所对应的有限特征向量矩阵 $V \in \mathbf{R}^{mn\times n_c}$ 由下式决定:

$$A_c V = E_c V F \tag{49}$$

另外, 定义如下两个矩阵 T_∞ 和 $V_\infty \in \mathbf{R}^{n\times(n-n_0)}$:

$$T_\infty^{\mathrm{T}} E = 0, \mathrm{rank}T_\infty = n - n_0 \tag{50}$$

$$EV_\infty = 0, \mathrm{rank}V_\infty = n - n_0 \tag{51}$$

则通过文献 [37] 中的定义, 可以很容易地证明, 对应于 $n - n_0$ 个无穷相对特征值的左右无穷特征向量矩阵分别由下面的公式给出

$$T_\infty^c = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_\infty \end{array}\right], V_\infty^c = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_\infty \end{array}\right] \tag{52}$$

而 $\left[\begin{array}{cc} V & V_\infty^c \end{array}\right]$ 作为闭环系统的整体特征向量矩阵应满足下述条件:

$$\det\left[\begin{array}{cc} V & V_\infty^c \end{array}\right] \ne 0 \tag{53}$$

4.2 标准问题

我们设计的目的是要使闭环系统具有希望的若当标准型和特征向量矩阵. 但为了获得更一般的结果, 我们这里用一个一般的实矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n_c\times n_c}$ 来代替闭环若当矩阵, 从而将高阶全驱系统 (8) 的控制问题归结为下述代数问题:

问题 PD. 对于任意选取的矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n_c\times n_c}$, 求取矩阵 $V \in \mathbf{R}^{mn\times n_c}$ 和一组矩阵 A_i, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 使得式 (49) 和 (53) 成立.

鉴于上述问题的要求, 矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n_c\times n_c}$ 的特征值即为闭环系统的 n_c 个有限特征值, 而矩阵 F 的若当标准型即为闭环系统的对应于有限特征值的若当标准型, 同时矩阵 V 即为闭环系统的广义有限特征向量矩阵, V_∞^c 为闭环系统的广义无限特征向量矩阵[36−37]. 因此, 闭环系统不仅具有明确的特征结构, 而且具有一个 n_c 阶的慢动态定常线性系统, 它完全决定了系统的稳定性和动态响应.

记

$$K = \left[\begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{array}\right]$$

$$A_{c0} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & I_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

则易见

$$A_c = A_{c0} - B_c K$$

由此可知, 问题 PD 等价于系统

$$E_c \dot{X} = A_{c0} X + B_c u$$

的状态反馈特征结构配置问题, 也即下述关于高阶全驱系统参数化设计的标准问题:

问题 ESA. 对于任意选取的矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n_c\times n_c}$, 求取矩阵 $V \in \mathbf{R}^{mn\times n_c}$ 和 $K \in \mathbf{R}^{n\times mn}$ 使得

$$(A_{c0} + B_c K)V = E_c V F$$

且式 (53) 成立.

当 $E = I_n$ 时, 显然有 $n_c = mn$, 此时闭环系统具有 mn 个正常特征值, 矩阵 $V \in \mathbf{R}^{mn\times mn}$ 即为闭环系统的特征向量矩阵. 而此时无穷特征向量矩阵 V_∞^c 不存在.

关于高阶系统的特征结构配置问题已有诸多结果[38−39]. 利用这些结果或其处理思路, 可以很容易地获得上述这一特殊的特征结构配置问题的解. 因此我们下面直接给出问题的参数化解及其相关结果, 不再给出证明过程.

4.3　控制律参数化

引入下述集合

$$\mathbf{F}=\{F|F\in\mathbf{R}^{n_c\times n_c}\text{ 且 }\exists Z\in\mathbf{R}^{n\times n_c}\ \text{s.t.}\ \det V_e(Z,F)\neq 0\}$$

其中

$$V_e(Z,F)=\left[\begin{array}{cc} V(Z,F) & V_\infty^c \end{array}\right] \tag{54}$$

$$V(Z,F)=\left[\begin{array}{c} Z \\ ZF \\ \vdots \\ ZF^{m-1} \end{array}\right] \tag{55}$$

下述定理给出了问题 ESA 的全部解.

定理 4. 如果假设 A3 成立, 则问题 ESA 有解当且仅当 $F\in\mathbf{F}$, 并且在这种情况下, 所有矩阵 $V(Z,F)$ 由式 (55) 给出, 而

$$K=\left[\begin{array}{cc} EZF^m & W_\infty \end{array}\right]V_e^{-1}(Z,F) \tag{56}$$

其中 $V_e(Z,F)$ 由式 (54)-(55) 给出, 而 $W_\infty\in\mathbf{R}^{n\times n_c}$ 为任意的参数矩阵, $Z\in\mathbf{R}^{n\times n_c}$ 为满足

$$\det V_e(Z,F)\neq 0 \tag{57}$$

的参数矩阵.

说明 2. 上述定理的证明可参见文献 [38−39]. 该定理给出的是矩阵 K 的整体形式. 可以进一步证明其分量形式如下:

$$A_i=EG_i+W_\infty H_i,\quad i\in\mathbf{N}_{m-1} \tag{58}$$

其中 $G_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $H_i\in\mathbf{R}^{(n+n_0)\times(n+n_0)}$, $i\in\mathbf{N}_{m-1}$ 分别由下面二式决定:

$$\left[\begin{array}{cccc} H_0 & H_1 & \cdots & H_{m-1} \end{array}\right]=\mathrm{diag}(0,I_n)V_e^{-1}(Z,F) \tag{59}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} G_0 & G_1 & \cdots & G_{m-1} \end{array}\right]= ZF^m\mathrm{diag}(I_{(m-1)n},0)V_e^{-1}(Z,F) \tag{60}$$

当 $E=I_n$ 时, 集合 $\mathbf{F}$ 化为

$$\mathbf{F}_\Delta=\{F|F\in\mathbf{R}^{n_c\times mn}\text{ 且 }\exists Z\in\mathbf{R}^{n\times mn}\ \text{s.t.}\ \det V(Z,F)\neq 0\}$$

此时基于上述定理 4 我们可得下述推论.

推论 1. 当 $E=I_n$ 时, 问题 ESA 有解当且仅当 $F\in\mathbf{F}_\Delta$, 并且在这种情况下, 所有矩阵 $V(Z,F)$ 由式 (55) 给出, 而

$$K=ZF^mV^{-1}(Z,F) \tag{61}$$

其中 $Z\in\mathbf{R}^{n\times mn}$ 为满足

$$\det V(Z,F)\neq 0 \tag{62}$$

的参数矩阵.

4.4　集合 F 的非空条件

定理 4 指出问题 ESA 有解当且仅当 $F\in\mathbf{F}$. 因此, 集合 $\mathbf{F}$ 的非空性是一个重要问题. 不失一般性, 我们考虑这种情况:

$$E=\left[\begin{array}{cc} M & 0 \\ 0 & 0_{(n-n_0)\times(n-n_0)} \end{array}\right],\quad \det M\neq 0 \tag{63}$$

否则, 在假设 A3 下, 系统 (8) 中的矩阵 E 总可以转化为具有上述结构的形式.

定理 5. 设矩阵 E 形如式 (63) 所示, 则 $\mathbf{F}$ 非空当且仅当矩阵 $F\in\mathbf{R}^{n_c\times n_c}$ 具有下述形式的若当标准型:

$$J_F=\mathrm{Blockdiag}(J_0,J_1,\cdots,J_{m-2},J_{m-1}) \tag{64}$$

其中

$$J_i=\left[\begin{array}{cc} J_{i\Delta} & 0 \\ 0 & J_{i+} \end{array}\right]\in\mathbf{C}^{n\times n},\ i\in\mathbf{N}_{m-2} \tag{65}$$

式中 $J_{i+}\in\mathbf{C}^{(n-n_0)\times(n-n_0)}$ 和 $J_{i\Delta}\in\mathbf{C}^{n_0\times n_0}$, 满足下面的条件:

1) 任意两个 J_i, $i\in\mathbf{N}_{m-2}$ 可交换;

2) 任意两个 $J_{i\Delta}$, $i\in\mathbf{N}_{m-2}$ 不具有共同的特征值;

3) 任意两个 J_{i+}, $i\in\mathbf{N}_{m-2}$ 不具有共同的特征值.

上述定理的证明亦可参见文献 [38−39]. 它告诉我们闭环系统的若当标准型应该具有的结构. 当所有的闭环极点都互异且闭环系统非退化时, 定理的条件自然满足. 如果有重闭环特征值的话, 则需要把相同的特征值做适当的分配. 这当然是非常宽松的要求, 况且任何两个同阶若当块本来就是可交换的.

根据定理 5, 我们定义集合

$\mathbf{F}_J=\{F|F\in\mathbf{R}^{n_c\times n_c}$ 的若当标准型满足定理 4 的要求$\}$

再定义 $\mathbf{F}$ 的子集

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F} \cap \mathbf{F}_J = \Big\{F | F \in \mathbf{F}_J \text{ 且 } Z \in \mathbf{R}^{n \times n_c} \ \text{s.t.} \ \det V_e(Z, F) \neq 0\Big\}$$

则由定理 5 可以得出 $\mathbf{F}_0$ 总是非空的, 从而 $\mathbf{F}$ 亦非空.

由定理 5 显然可得下述推论.

推论 2. 当 $E = I_n$ 时, $\mathbf{F}$ 非空当且仅当矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$ 具有形如式 (64) 的若当标准型, 其中任意两个 $J_i \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $i \in \mathbf{N}_{m-2}$ 可交换且不具有共同的特征值.

4.5 参数集的稠密性

定义矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$ 的相关集合

$$\mathbf{Z}_0(F) = \Big\{Z | Z \in \mathbf{R}^{n \times n_c} \text{ 且 } \det V_e(Z, F) \neq 0\Big\}$$

则可以看出, 该集合即为上述参数化设计提供的自由参数矩阵 Z 的集合. 如定理 5 所示, 当 $F \in \mathbf{F}_0$ 时, $\mathbf{Z}_0(F)$ 是非空的. 但是这个集合中有多少元素呢? 对此我们有以下结果.

定理 6. 设矩阵 E 如式 (63) 所示, 则

1) $\mathbf{Z}_0(F)$, $F \in \mathbf{F}_0$, 为 $\mathbf{R}^{n \times n_c}$ 中的一个 Zariski 开集;

2) 当 $Y_i \in \mathbf{R}^{n_0 \times n_0}$, $i \in \mathbf{N}_{m-1}$ 和 $Y_{i+} \in \mathbf{R}^{(n-n_0) \times (n-n_0)}$, $i \in \mathbf{N}_{m-2}$ 均为非奇异时, 对于任意的 $F \in \mathbf{F}_0$,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0^e & Y_1^e & \cdots & Y_{m-2}^e & Y_{m-1}^e \end{bmatrix} \in \mathbf{Z}_0(F)$$

其中

$$Y_i^e = \begin{bmatrix} Y_i & 0 \\ 0 & Y_{i+} \end{bmatrix}, Y_i \in \mathbf{R}^{n_0 \times n_0}, i \in \mathbf{N}_{m-2}$$

上述定理的证明亦可参见文献 [38−39]. 该定理表明集合 $\mathbf{Z}_0(F)$ 不仅是非空的, 而且是在 $\mathbf{R}^{n \times n_c}$ 中稠密的. 因此, 自由参数矩阵 Z 的约束条件 (57) 要求非常宽松, 在 Zariski 意义下几乎对所有的 $Z \in \mathbf{R}^{n \times n_c}$ 都满足. 因此, 在许多应用中该约束可以被忽略.

注意到参数 Z 所包含的自由度多达

$$n_{d1} = n \times n_c = (m-1)n^2 + nn_0$$

另外参数 W_∞ 中还有

$$n_{d2} = n \times (n - n_0)$$

个自由度, 故所有的设计自由度为

$$n_d = n_{d1} + n_{d2} = mn^2$$

通过适当选取这些自由度可以实现闭环系统的其它性能要求.

4.6 闭环系统的正则性

众所周知, 正则性保证了广义系统解的唯一性, 是广义线性系统的一个重要性质. 当 $E = I_n$ 时, 闭环系统 (10) 或者 (44) 为正常系统, 正则性自然满足.

根据文献 [36−37, 40] 中的结果, 可以给出如下的闭环正则性条件:

命题 2. 设 T_∞^c, $V_\infty^c \in \mathbf{R}^{mn \times n_0}$ 由式 (50)-(52) 给出, 则闭环系统是正则的当且仅当下述二式之一成立:

$$\det \begin{bmatrix} (T_\infty^c)^{\mathrm{T}} & A_c V_\infty^c \end{bmatrix} \neq 0 \tag{66}$$

$$\det \left(T_\infty^{\mathrm{T}} A_{m-1} V_\infty - T_\infty^{\mathrm{T}} B W_\infty\right) \neq 0 \tag{67}$$

在具体设计应用中, 为了保证闭环系统的正则性, 可以在求取设计参数矩阵 W_∞ 时, 考虑加上约束 (66) 或 (67).

本节针对高阶全驱系统提出了一种直接参数化设计方法. 对于系统为二阶情形和当假设 A3 中的 $n_0 = n$ 时, 可参见相关的文献 [41−42]. 相关结果也推广到含有输入导数项的高阶全驱系统中[43], 所提出的全驱系统设计方法也应用到实际系统中[44−49]. 更多有关全驱系统的设计和应用可参见文献 [50−51].

5 说明与展望

5.1 非线性控制方法

高阶全驱系统方法之所以没有得到普遍重视的主要原因, 是人们认为全驱系统是现实中的一小部分. 一方面是因为许多全驱系统被化成了一阶系统, 从而丧失了本有的全驱性; 另一方面是物理世界中确实存在着许多欠驱动系统[52]. 但受制于一阶系统方法的局限就不会考虑和认识到许多欠驱动系统都可以通过增阶化为全驱系统. 高阶全驱系统是普遍存在的, 它们是动态系统的一类面向控制的模型. 大多数状态空间模型并不是 "天然" 存在的, 而是从二阶模型化过去的. 相反, 由于动量矩定理和拉格朗日方程等一批物理规律的存在, 我们倒是有很多 "天然" 的二阶全驱系统.

由命题 1 可见, 对于高阶全驱系统 (8) 的模型解耦问题, 简单到只需要选取一组对角矩阵 A_i, $i =$

$0, 1, \cdots, m-1$ 即可, 只不过此时系统设计的自由度少了, 完全由闭环极点来决定. 对于高维数系统而言, 可以通过将该组矩阵选为对角块矩阵实现若干个闭环子系统的解耦, 这样既可以照顾到问题处理的简单性, 又可以充分利用部分设计自由度. 然而, 在一阶系统框架下的输入输出解耦问题虽然已有很多结果, 但无论是处理过程还是结果实现都是非常复杂的.

5.2 能控、能观性

动态系统的全驱特性允许我们换掉开环系统的所有动态特性, 建立全新的闭环系统动态特性. 这本质上就是一种完全能控性. 人们所熟悉的 Kalman 的能控性定义依赖系统的响应, 只有在线性的情形才能给出有效实用的判据, 因为线性系统的解是简单明了的. 而非线性系统的解很复杂, 自然导致非线性系统的能控性分析问题很难入手.

对于定常线性系统, 我们已经证明其能控的充分必要条件是可以将它化为一个高阶全驱系统[28]. 如果从这一点出发, 把系统的能控性和全驱性联系起来, 建立一个新的能控性体系, 自然就克服了原体系中非一阶状态空间系统没有能控性定义的缺陷, 并且也把能控性分析问题与控制系统设计问题完全统一起来.

在高阶系统框架下的能观性问题就是基于给定的系统输出, 确定系统基础状态及其所需的各阶导数的问题. 注意到高阶系统基础状态及其一定阶数的导数本质上就是相应一阶系统的状态向量, 这一问题总体上是可解的, 只不过需要处理系统的代数变换和同胚变换过程中所带来的各种关联关系.

5.3 以线性为主导的设计

线性系统特性是更为人们所熟悉所喜好的, 但许多现有的非线性控制方法都是获得一个非线性闭环系统. 一般说来, 这是不希望的, 而是不得已而为之. 高阶全驱系统方法允许我们更换全部开环系统特性, 获得一个线性定常的闭环系统, 这是一阶系统方法一般不可能提供的优越性. 这一优越性使得线性系统设计的思想和方法能够有效应用到非线性控制系统设计中. 我们可以在设计中考虑闭环特征值灵敏度最小意义下的鲁棒性, 可以考虑 H_∞ 指标和输出调节等, 甚至也可以应用古典频域方法解决干扰解耦和抑制等问题 $\cdots\cdots$

需要说明的是, 控制系统设计也可以根据具体问题灵活处理. 在某些情况下, 系统中的一些扰动非线性也不必非要对消掉, 可以通过所设计的闭环线性部分的稳定鲁棒性来容忍, 从而达到简化控制器的效果. 从理论上说, 这一点对于许多满足 Lipschitz 条件的非线性项是可以实现的.

5.4 多目标综合优化设计

由上节可见, 高阶全驱系统设计中所提供的设计自由度是极其可观的. 我们可以充分利用这些自由度来提高闭环系统的各种性能, 如鲁棒性、响应特性等. 具体设计中可以同时考虑多个方面的综合优化, 如闭环系统特征值关于系统摄动参数的灵敏度、系统外部干扰到系统希望输出传递函数的 H_2 指标、所设计的控制律的控制能量等[53−54].

值得说明的是, 对于线性系统的情形, 为使得控制能量尽量小, 可以通过极小化线性控制律的增益范数来实现. 但对于高阶全驱系统 (8) 的情形, 问题化为优化矩阵 A_i, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 使得非线性控制律 (9) 的某种范数尽量小.

6 结论

基于变量增广的一阶系统方法在两百多年的控制系统发展史上占有绝对的主导地位. 本文指出了一阶系统方法的缺陷, 介绍了高阶全驱系统的概念, 并阐明了其下述多方面重要特点和优势:

1) 在物理世界中广泛存在 (但在以往的研究中都被化成了增广的一阶系统处理);

2) 可以非常简单地实现控制系统设计, 并可以彻底地更换系统的动态特性;

3) 总可以获得一个线性定常的闭环系统 (这是基于一阶系统描述的许多非线性控制方法无法做到的);

4) 系统设计中存在大量的设计自由度, 可以有效加以利用来实现系统的多目标综合优化设计.

另外, 本文指出高阶全驱系统是动态系统的一种描述形式, 是面向控制的模型. 一方面它们可以基于基础物理定律建模获得, 另一方面, 也可以通过对欠驱动系统进行消元升阶获得. 这些重要事实注定高阶全驱系统方法将具有广阔的发展和应用前景.

有关高阶全驱系统的能控能观性问题、鲁棒镇定与跟踪问题、干扰解耦与抑制问题、自适应控制问题等, 将另文讨论.

致谢

作者感谢其学生胡艳梅、章智凯、赵琴、田广泰、张丹丹等协助查找文献、组织材料和检查错误, 同时也感谢学生侯明哲副教授与本人的有益讨论.

References

1 Guo Yu-Cui. *Ordinary Differential Equations: Theory, Modeling and Development*. Beijing: Tsinghua University Press, 2010.
(郭玉翠. 常微分方程: 理论、建模与发展. 北京: 清华大学出版社, 2010.)

2 Klein M [Author], Zhang Li-Jing, Zhang Jin-Yan, Jiang Ze-Han [Translator]. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 2002.
(莫里斯 · 克莱因 [著], 张理京, 张锦炎, 江泽涵 [译]. 古今数学思想. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.)

3 Lyapunov A M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 1992, **55**(3): 531−773

4 LaSalle J P. Some extensions of Liapunov′s second method. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 1960, **7**(4): 520−527

5 LaSalle J P. *The Stability of Dynamical Systems*. Philadelphia: SIAM Press, 1976.

6 Khalil H K. *Nonlinear Systems* (Third Edition). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

7 Bellman R. On the theory of dynamic programming. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1952, **38**(8): 716−719

8 Bellman R. The theory of dynamic programming. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1954, **60**(6): 503−515

9 Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

10 Boltyanskiĭ V G, Gamkrelidze R V, Pontryagin L S. On the theory of optimal processes (in Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1956, **110**: 7−10

11 Pontryagin L S. Optimal control processes (in Russian). *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1959, **14**: 3−20

12 Pontryagin L S. Optimal processes of regulation. In: Proceedings of the 1960 International Congress Mathematical. New York, USA: Cambridge University Press, 1960. 182−202

13 Boltyanskiĭ V G, Gamkrelidze R V, Pontryagin L S. The theory of optimal processes I. The maximum principle (in Russian). *Izvestija Akademii Nauk SSSR Series Mathematics*, 1960, **24**: 3−42

14 Pontryagin L S, Boltyanskiĭ V G, Gamkrelidze R V, Mishchenko E F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley & Sons, 1962.

15 Rozonoer L I. The maximum principle of LS Pontryagin in optimal system theory. *Automation and Remote Control*, 1959, **20**(10): 11

16 Ball J A, Helton J W. Nonlinear H_∞ control theory: A literature survey. *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control. Birkhauser Boston: Springer*, 1990. 1−12

17 Doyle J, Glover K, Khargonekar P, Francis B. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. In: Proceedings of the 1988 American Control Conference. Atlanta, USA: IEEE, 1988. 1691−1696

18 Findeisen R, Imsland L, Allgower F, Foss B A. State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview. *European Journal of Control*, 2003, **9**(2−3): 190−206

19 García C E, Prett D M, Morari M. Model predictive control: Theory and practice − A survey. *Automatica*, 1989, **25**(3): 335−348

20 Kalman R E. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1959, **4**(3): 110

21 Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960, **82**(1): 35−45

22 Kalman R E, Bucy R S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering, Series D*, 1961, **83**(1): 95−108

23 Sunahara Y. An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems. In: Proceedings of the 1969 Joint Automatic Control Conference. Colorado, USA: IEEE, 1969. 161−172

24 Julier S J, Uhlmann J K. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: Proceedings of the 1997 Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI. Orlando, USA: SPIE, 1997. 182−193

25 Kalman R E, Falb P L, Arbib M A. *Topics in Mathematical System Theory*. New York: McGraw-Hill, 1969.

26 Kalman R E. *A Road Map of Real Mathematics for Circuits*. Kailath Lecture, California: Stanford University, 2008.

27 Duan Guang-Ren. *Linear System Theory*. Beijing: Science Press, 1998.
(段广仁. 线性系统理论. 北京: 科学出版社 (上下册), 1998.)

28 Duan Guang-Ren. High-order system approaches — II. Controllability and full-actuation. *Acta Automatica Sinica*, DOI: 10.16383/j.aas.c200369
(段广仁. 高阶系统方法 — II. 能控性与全驱性. 自动化学报, DOI: 10.16383/j.aas.c200369)

29 Blondel V, Gevers M, Lindquist A. Survey on the state of systems and control. *European Journal of Control*, 1995, **1**(1): 5−23

30 Duan Guang-Ren. Quasi-linear system approaches for flight vehicle control − Part 1: An overview and problems. *Journal of Astronautics*, 2020, **41**(6): 633−646
(段广仁. 飞行器控制的伪线性系统方法－第一部分: 综述与问题. 宇航学报, 2020, **41**(6): 633−646)

31 Duan Guang-Ren. Quasi-linear system approaches for flight vehicle control − Part 2: Methods and prospects. *Journal of Astronautics*, 2020, **41**(7)
(段广仁. 飞行器控制的伪线性系统方法－第二部分: 方法与展望. 宇航学报, 2020, **41**(7))

32 Duan G R. Direct parametric control of fully-actuated second-order nonlinear systems − The normal case. In: Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, China: IEEE, 2014. 2406−2413

33 Duan G R. Direct parametric approach for cascaded systems with application in robot control. In: Proceedings of the 14th International Conference on Control, Automation and Systems. Seoul, South Korea: IEEE, 2014. 29−35

34 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley & Sons, 1995.

35 Khalil H K. *Nonlinear Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2015.

36 Duan G R. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. New York: Springer, 2010.

37 Duan G R, Yu H H. *LMIs in Control Systems − Analysis, Design and Applications*. London: CRC Press, 2013.

38 Duan G R. Parametric approaches for eigenstructure assignment in high-order linear systems. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2005, **3**(3): 419−429

39 Duan G R, Yu H H. Complete eigenstructure assignment in high-order descriptor linear systems via proportional plus derivative state feedback. In: Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, China: IEEE, 2006. 500−505

40 Duan G R. Eigenstructure assignment and response analysis in descriptor linear systems with state feedback control. *International Journal of Control*, 1998, **69**(5): 663−694

41 Duan G R. Direct parametric control of fully-actuated second-order nonlinear systems — Descriptor case. In: Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, China: IEEE, 2014. 2108−2114

42 Duan G R. Direct parametric control of fully-actuated high-order nonlinear systems — Normal case. In: Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, China: IEEE, 2014. 3053−3060

43 Duan G R. Direct parametric control of fully-actuated high-order quasi-linear systems via dynamical feedback. In: Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Information and Automation. Hailar, China: IEEE, 2014. 418−424

44 Duan G R. Non-cooperative rendezvous and interception — A direct parametric control approach. In: Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, China: IEEE, 2014. 3497−3504

45 Duan G R. Satellite attitude control — A direct parametric approach. In: Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, China: IEEE, 2014. 3989−3996

46 Duan G R. Missile attitude control — A direct parametric approach. In: Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, China: IEEE, 2014. 2414−2421

47 Duan G R. A direct parametric approach for missile guidance — Case of sea targets. In: Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, China: IEEE, 2014. 1044−1050

48 Duan G R. Cooperative spacecraft rendezvous — A direct parametric control approach. In: Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, China: IEEE, 2014. 4589−4595

49 Duan G R. Quaternion-based satellite attitude control — A direct parametric approach. In: Proceedings of the 14th International Conference on Control, Automation and Systems. Seoul, South Korea: IEEE, 2014. 935−941

50 Duan G R. Parametric solutions to fully-actuated generalized Sylvester equations — The nonhomogeneous case. In: Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, China: IEEE, 2014. 3869−3874

51 Duan G R. Parametric solutions to fully-actuated generalized Sylvester equations — The homogeneous case. In: Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, China: IEEE, 2014. 3863−3868

52 Fantoni I, Lozano R. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. London: Springer-Velag, 2002.

53 Duan Guang-Ren, Wang Jian-Yu, Zhao Tian-Yi, Zhang Liang. Parametric comprehensive optimization design of high accuracy tracking control system for satellite optical communication. *Control Theory & Applications*, 2020, **37**(3): 469−480
(段广仁, 王建宇, 赵天一, 张亮. 卫星光通信精确跟踪控制系统的参数化综合优化设计. 控制理论与应用, 2020, **37**(3): 469−480)

54 Zhang Long, Duan Guang-Ren. Flexible spacecraft robust multi-objective attitude controller design. *Journal of Astronautics*, 2011, **32**(11): 2326−2332
(张龙, 段广仁. 挠性航天器的鲁棒多目标姿态控制器设计. 宇航学报, 2011, **32**(11): 2326−2332)

段广仁 中国科学院院士, 国家杰出青年基金获得者, 长江学者奖励计划特聘教授, 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心主任, CAA Fellow, IEEE Fellow, IET Fellow. 1989 年获得哈尔滨工业大学博士学位. 主要研究方向为控制系统的参数化设计, 鲁棒控制, 广义系统, 航天器制导与控制.
E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn
(**DUAN Guang-Ren** Academician of Chinese Academy of Sciences, winner of the National Science Fund for Distinguished Young Scholars, Distinguished Professor of Chang Jiang Scholars Program, Director of the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, CAA Fellow, IEEE Fellow and IET Fellow. He received his Ph. D. degree from Harbin Institute of Technology in 1989. His research interest covers parametric design of control system, robust control, descriptor system, spacecraft guidance and control.)