3.3 条件概率及全概率公式

教学要求

本节要求学生正确理解条件概率的概念及其运算公式， 学会运用概率的乘法定理. 对于全概率公式不但要求能深刻理解其内在含义，而且要求学生会熟练运用此公式去解决实际问题. 要求学生掌握两个事件独立的概念，了解多个事件相互独立的条件.

知识点

1. 条件概率
2. 概率的乘法定理
3. 全概率公式
4. 两个事件的独立性
5. 多个事件的独立性

*6.贝叶斯(*Bayes*)公式

*7.贝努里(*Bernoulli*)概型

3.3.1 条件概率

在实际问题中，除了要知道事件 A 的概率 $P(A)$外，有时还需要知道在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的概率，这就是我们所要讲的条件概率，将它记为 $P(A|B)$.

我们先通过一个例子来引入条件概率的概念. 掷一颗骰子，观察其出现点数，令事件 A 表示“出现点数小于 4”，则 $P(A)$=1/2，如果已知事件 B 表示“出现偶数点”，且 B 已发生，这时只剩下三种可能，即“2 点”，“4 点”或“6 点”. 从而在 B 已发生的条件下，A 发生的概率为 $P(A|B)$=1/3，注意 $P(B)$=1/2，$P(AB)$=1/6，此时有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\neq P(A).$$

定义. 设 *A*、*B* 是随机试验 *E* 的二个事件，且 *P*(*B*)>0，则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 *B* 发生条件下事件 *A* 发生的条件概率.

不难验证，条件概率 $P(A|B)$也是一种概率，它符合概率的三个条件.

由前面的条件概率的定义，我们可以知道，计算条件 $P(A|B)$有两种方法:

(1)在样本空间Ω的缩减后的样本空间Ω_B(事件 B 发生时的样本空间)上计算 A 发生的（无条件）概率，就可以得到 $P(A|B)$.

(2)样本空间Ω中，先计算 $P(AB)$ 、$P(B)$，然后由定义公式求得 $P(A|B)$.

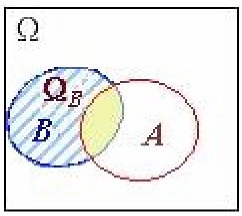

图 3.18

例 3.3.1 全年级 100 名学生中，有男生(以事件 A 表示)80 人，女生 20 人；来自北京的(以事件 B 表示)有 20 人，其中男生 12 人，女生 8 人；免修英语的(用事件 C 表示)40 人中有 32 名男生，8 名女生．试写出 $P(A)$、$P(B)$、$P(B|A)$、$P(A|B)$、$P(AB)$、$P(C)$、$P(C|A)$、$P(\overline{A}\,|\,\overline{B})$、$P(AC)$．

解. 根据题意有

$P(A)$=80/100=0.8；　　$P(B)$=20/100=0.2；

$P(B/A)$=$P(AB)/P(A)$=12/80=0.15；

$P(A/B)$=$P(AB)/P(B)$=12/20=0.6；

$P(AB)$=12/100=0.12；　　$P(C)$=40/100=0.4；

$P(C/A)$=$P(AC)/P(A)$=32/80=0.4；

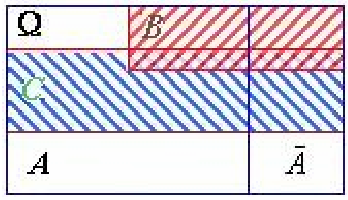

图 3.19

$$P(\overline{A}\,|\,\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{12}{80}=0.15\text{；}$$

$P(AC)$=32/100=0.32.

例 3.3.2 8 个乒乓球中有 5 个新的，3 个旧的．第一次比赛时，同时取出 2 个，用完后放回去；第二次比赛时又取出 2 个球，求第一次取到 1 个新球的条件下，第二次取到 2 个新球的概率.

解. 设事件 A=“第一次取到 1 个新球”；

事件 B=“第二次取到 2 个新球”.

由于第一次比赛后，球被放回去，因此在 A 已发生的条件下，再取 2 个球时，总球数仍为 8． 但是，因第一次比赛所用的一个新球已变成旧球，其新旧比例已变化为：新球 4 个，旧球 4 个，所以所求的概率为：

$$P(B|A)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{3}{14}.$$

由条件概率, 我们可以得到概率的乘法定理及两个事件的独立性.

3.3.2 概率的乘法定理

由前面的条件概率的定义公式, 可得到下面的定理.

概率的乘法定理．设 A、B 为随机试验 E 中的两个事件, 且 $P(B)>0$, 则有

$$P(AB)=P(A|B)P(B).$$

这个公式称为概率的乘法公式. 同样地, 概率的乘法公式还有另一种形式: 若 $P(A)>0$,

$$\boldsymbol{P(AB)=P(B|A)P(A)}.$$

例 3.3.3. 设在一盒子中装有 4 个蓝色球和 6 个红色球, 取球两次, 一次取 1 个, 取后不放回, 问两次都取到红球的概率是多少?

解. 设事件 A=“第一次取到红球”,

事件 B=“第二次取到红球”

∵ $P(A)=6/10$,

$P(B|A)=5/9$,

因此 $P(AB)=P(B|A)P(A)=1/3$.

我们还可以将概率的乘法公式推广到 3 个事件的情形:

$$\boldsymbol{P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)}.$$

我们已经学习了条件概率和概率的乘法定理, 由此我们可以得到下面的全概率公式.

3.3.3 全概率公式

前面我们学习了条件概率和概率乘法定理，下面我们介绍一个重要的公式--全概率公式.

定理（全概率定理）. 如果事件 A_1, A_2, …, A_n 构成一个完备事件组, 且 $P(A_i)>0$, $(i=1, 2, \cdots, n)$. 则对任一事件 B, 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

这个公式称为全概率公式.

证明. A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组, 从而 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是两两互斥的, 且 $P(A_i)>0$, 由于 B 被分成 n 个部分 $A_iB(i=1, 2, \cdots, n)$ 之和, 且 $A_iB(i=1, 2, \cdots, n)$ 也是两两互斥的, 于是

$$B=B\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}A_iB.$$

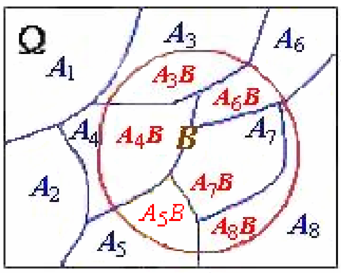

图 3.20

由概率的可加性及概率乘法定理得到:

$$P(B)=P(\sum_{i=1}^{n}A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i).$$

全概率公式应用较广, 它的基本思路是将一个比较复杂的事件分解成若干个较简单且

两两互斥事件的和，即要找一个完备事件组，然后利用概率的可加性及概率乘法定理来计算.

例 3.3.4 设袋中装有 5 件同样的产品，其中 3 件正品，2 件次品，每次从袋中取 1 件，无放回地连续取 2 次，求第 2 次取到正品的概率.

解. 设事件 A 表示“第 1 次取到正品”，则 $\overline{A}$ 表示“第 1 次取到次品”；事件 B 表示“第 2 次取到正品”.

事件 $A,\overline{A}$ 构成一个完备事件组，$B = BA + B\overline{A}$（即第 2 次取正品的可能性是与第 1 次取到正品或次品有关）.

因 $BA, B\overline{A}$ 互不相容，则有

$$P(B) = P(BA + B\overline{A}) = P(BA) + P(B\overline{A})$$

$$= P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$$

$$=(3/5)\times(2/4)+(2/5)\times(3/4)=3/5.$$

例 3.3.5 某厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，其产量分别占总产量的 25%、35%、40%. 各自的废品率为 5%、4%、2%，今从总产品中任取一件，求所取出的产品为废品的概率.

解. 设 A_1=“所取产品为甲车间生产的”；

A_2=“所取产品为乙车间生产的”；

A_3=“所取产品为丙车间生产的”；

B=“所取产品为废品”.

则 $A_i\,(i=1, 2, 3)$ 构成一个完备事件组，且

$P(A_1)=0.25$，　$P(A_2)=0.35$，　$P(A_3)=0.4$，

$P(B|A_1)=0.05$，　$P(B|A_2)=0.04$，　$P(B|A_3)=0.02$，

由全概率公式有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02=0.0345.$$

由全概率公式我们可以求出，从总产品中任取一件，其为废品的概率是 0.0345；反之，若已知从总产品取出一件，其为废品，反过来求它是甲车间（或乙车间、丙车间）生产的可能有多大，即为我们后面要讲的贝叶斯公式.

3.3.4 两个事件的独立性

前面我们讨论了条件概率 $P(A|B)$，一般说来 $P(A|B)\neq P(A)$ 即事件 B 的发生对事件 A 发生的概率是有影响．但当 $P(A|B)=P(A)$，即 B 的发生对 A 发生的概率没有影响,此时即说事件 A 独立于事件 B，此时由概率乘法定理得到 $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$．由此我们可给出两个事件独立的定义.

定义．设 A、B 是试验 E 的两个事件，若有

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B)}$$

则称事件 A、B 为相互独立的事件.

由概率乘法定理，容易得出：当事件 A 独立于事件 B 时，事件 B 也独立于事件 A，即独立是一个对称性概念.

例如，从具有次品的一批产品中，有放回的连抽取二次，每次抽取一件．这样,事件 A(第一次抽得正品)的出现并不影响事件 B(第二次抽得正品)的概率，即事件 A 与事件 B 是相互独立的两个事件.

定理．设 A、B 是试验 E 的两个事件，且有 $P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件为：

$$\boldsymbol{P(A|B)=P(A)}.$$

证明．必要性．若 A、B 相互独立,则当 $P(B)>0$ 时,由概率乘法公式有：

$$P(B)P(A|B)=P(AB)=P(A)P(B)$$

从而 $P(A|B)=P(A)$.

充分性．若 $P(A|B)=P(A)$,由概率乘法公式有：

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(B)P(A)$$

即 A、B 相互独立.

在实际问题中，往往是通过对问题性质的分析来判断事件间是否独立.

例 3.3.6 甲、乙两人同时射击某一目标．设甲击中目标的概率为 0.8，乙击中目标的概率为 0.5，求目标被击中的概率.

解．设事件 A=“甲击中目标”，

事件 B=“乙击中目标”，

事件 C=“目标被击中”．

从题意可知： $C=A+B$, 且

$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

由于甲、乙射击是相互独立的，因此可以认为甲、乙互不干扰，从而 A 与 B 是相互独立的.

$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times 0.5=0.4$,

所以 $P(C)=0.8+0.5-0.4=0.9$.

例 3.3.7 试证 A、B 相互独立与以下每一条件等价:

(1) 事件 A 与 $\overline{B}$ 独立；(2) 事件 $\overline{A}$ 与 B 独立；(3) 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

证明. 我们在这里只证由 A 和 B 相互独立, 推出 A 与 $\overline{B}$ 独立, 对于其它情形, 由两个事件独立的对称性, 同样可以推出.

若 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B)$. 由概率的性质, 得到:

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A-AB)=P(A)-P(AB)\\&=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))\\&=P(A)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

故 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

此例的结论, 我们可用下表来表示:

表 3.3.1

	A	$\overline{A}$
B	A, B 相互独立	$\overline{A}, B$ 相互独立
$\overline{B}$	$A, \overline{B}$ 相互独立	$\overline{A}, \overline{B}$ 相互独立

表中任意一种情形成立，都可以推出其它情形成立.

由两个事件的独立性的概念，我们可以推出多个事件的独立性.

3.3.5 多个事件的独立性

前面我们学习了两个事件的独立性的概念、定理，由此我们可以给出三个事件的独立性的概念.

定义. 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是随机试验 $\boldsymbol{E}$ 中的三个事件，满足下列条件:

(1) $\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B)}$； **(2)** $\boldsymbol{P(BC)=P(B)P(C)}$；

(3) $P(AC)=P(A)P(C)$；　　(4) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

则称 A、B、C 为三个相互独立的事件.

若 A、B、C 只满足上述(1)、(2)、(3)，则称它们为两两相互独立的事件.

例 3.3.8 袋中装有四个大小相同的球，其中红球、蓝球、黄球各一个，另一个是涂有红、蓝、黄三种颜色的球.

设 A=“任取一球其上涂有红色”；

B=“任取一球其上涂有蓝色”；

C=“任取一球其上涂有黄色”.

则 $P(A)=1/2$，$P(B)=1/2$，$P(C)=1/2$

$P(AB)=1/4$，$P(AC)=1/4$，$P(BC)=1/4$，

$P(ABC)=1/4$.

显然

$$P(AB)=P(A)P(B)，P(AC)=P(A)P(C)，P(BC)=P(B)P(C)，$$

但是 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$.

因此上述例子说明：A、B、C 是两两相互独立的，但三个事件不是相互独立的. 即定义中的 4 个条件缺一不可，由满足(1)、(2)、(3)不能推出(4).

把两个事件的独立性中的例 3.3.7 的结论，推广可以得到：设是随机试验的三个相互独立的事件，把其中任一个事件换为其对立事件，亦相互独立，见下图.

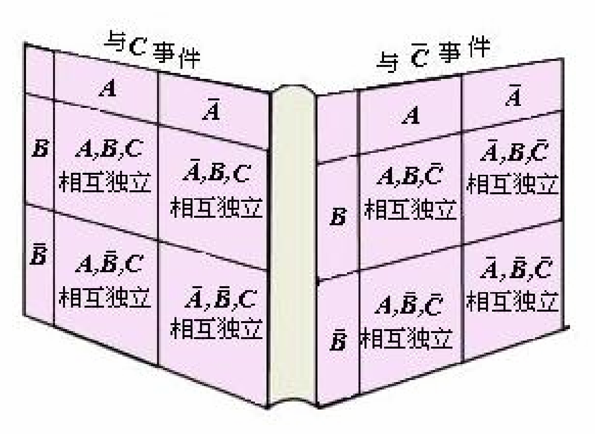

图 3.21

在上述 8 重情形中，任意一种情形成立都可以推出其它 7 种情形成立.

例 3.3.9 一个人看管三台机床，设在任一时刻这三台机床正常工作(即不需人照看)的概率分别为 0.9、0.8、0.85，求在任一时刻，(1)三台机床都正常工作的概率；(2)三台机床中

至少有一台正常工作的概率.

解. 显然，三台机床工作正常与否是相互独立的.

设 A_i 表示“第 i 台机床工作正常”, i=1, 2, 3.

则 $P(A_1)=0.9$， $P(A_2)=0.8$， $P(A_3)=0.85$.

（1）三台机床都正常工作即 A_1、A_2、A_3 同时发生的概率为 $P(A_1A_2A_3)$，而 A_1、A_2、A_3 是三个相互独立的事件.

$\therefore P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.9\times0.8\times0.85=0.612$；

(2) 三台机床中至少有一台正常工作即 A_1、A_2、A_3 至少有一个发生的概率为：$P(A_1+A_2+A_3)$，利用对立事件的概率及摩根律可知,

$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3})$$

$$=1-P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$=1-0.1\times0.2\times0.15=0.997.$$

用数学归纳法可以定义：对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$（$n>3$），如果其任意 $n-1$ 个事件都是相互独立的，且满足 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件是相互独立的.

我们有了独立的概念后，就可以学习一类特殊的试验：贝努里概型.

*3.3.6 贝叶斯公式

前面我们已经介绍了条件概率及全概率公式，由此我们可导出一个重要公式--贝叶斯公式(*Bayes* 公式).

定理(贝叶斯定理). 若 A_1，$A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组，且 $P(A_i)>0$, ($i=1, 2, \cdots, n$)， 则对任一事件 B ($P(B)>0$)有:

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad k=1, 2, \cdots, n$$

上式称为贝叶斯公式.

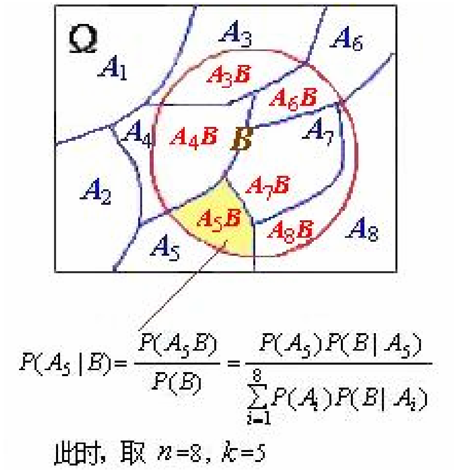

图 3.22

证明. 因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组,

由概率乘法公式可得:

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k B)}{P(B)}$$

且 $$P(A_k B)=P(A_k)P(B \mid A_k)$$

而由全概率公式可知:

$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$, 由此我们可以得到:

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k B)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

贝叶斯公式通常用在下列问题中: 已知事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为事件 B 发生的原因, 即 $P(B|A_k)$, 现在 B 已经发生了, 反过来要讨论 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中哪一个是导致 B 发生的真正"原因" 即求 $P(A_k|B)$.

例 3.3.10 若发报机以 0.6 和 0.4 的概率发出信号". "和"–". 由于通信系统受到干扰, 当发出信号 ". " 时, 收报机以概率为 0.8 和 0.2 收到信号 ". " 和 "–"; 同样, 当发报机发出信号"–"时, 收报机以概率为 0.1 和 0.9 收到信号". "和"–". 求收报机收到信号 ". " 时, 它是由发报机发出的 ". " 概率为多少?

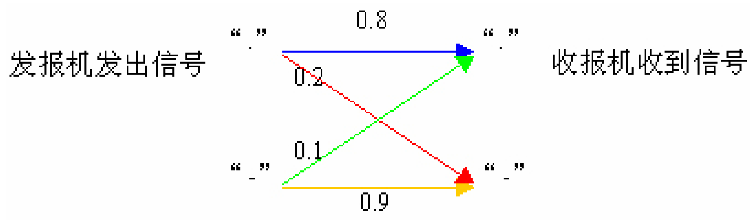

图 3.23

解. 设发报机发出信号 ". " 的事件为 A_1;

发报机发出信号 "–" 的事件为 A_2;

收报机收到信号 ". " 的事件为 B.

显然 A_1, A_2 构成一个完备事件组, B 与 A_1, A_2 有关.

由已知 $P(A_1)$=0. 6；$P(A_2)$=0. 4；

$P(B|A_1)$=0. 8；$P(B|A_2)$=0. 1.

由贝叶斯公式有：

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.8\times 0.6}{0.8\times 0.6+0.1\times 0.4}=0.923\,.$$

即收报机收到“. ”时,它是由发报机发出的“. ”的概率为 0. 923.

例 3.3.11 某人从甲地至乙地开会．他乘火车去的概率是 3/10，乘船、汽车或飞机去的概率分别为 1/5、1/10、2/5．如果他乘火车去，迟到的概率是 1/4;如果乘船或汽车，那幺迟到的概率分别为 1/3, 1/12； 如果乘飞机便不会迟到．结果他迟到了，试问：在此条件下，他是乘火车去的概率为多少?

解．设事件 A 表示“开会迟到”， B_1、B_2、B_3、B_4 分别表示“乘火车”、“乘船”、“乘汽车”、“乘飞机”这四个事件.

显然 B_1、B_2、B_3、B_4 构成一个完备事件组，A 与 B_1、B_2、B_3、B_4 有关,

由已知

$P(B_1)$=3/10, $P(B_2)$=1/5,

$P(B_3)$=1/10, $P(B_4)$=2/5,

$P(A|B_1)$=1/4, $P(A|B_2)$=1/3,

$P(A|B_3)$=1/12, $P(A|B_4)$=0.

于是所求概率即为 $P(B_1|A)$, 由贝叶斯公式：

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0}=\frac{1}{2}\,.$$

*3.3.7 贝努里概型

前面我们学习了多个事件的独立性，在本知识点中我们要介绍一类特殊的试验--贝努里试验.

定义．只有两种结果 A 与 $\overline{A}$ 的试验，称为贝努里(*Bernoulli*)试验.

定义．如果在相同的条件下独立地作 n 次贝努里试验(即各次试验的结果互不影响)，事件 A 在每次试验中发生的概率保持不变，这时称这种试验为 n 重贝努里试验.

n 重贝努里试验是一种非常重要的概率模型，许多实际问题都可归结为这种模型,通常称它为**贝努里概型**．它与古典概型的重要区别在于，它的样本点不一定是等概率的，它常用来讨论 n 次重复试验中事件 A 发生的次数及其概率.

定理(贝努里定理)．设贝努里试验中事件 A 发生的概率为 p($0<p<1$)，则在 n 重贝努里试验中事件 A 恰发生 m 次的概率为:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \qquad (m=0, 1, 2, \dots, n)$$

例如在 7 次试验中，由于各次试验都是相互独立的，事件 A 在某 3 次发生而在其余 4 次不发生这个事件的概率为 $p^3(1-p)^4$，事件 A 可以在 7 次试验中的任何 3 次发生，因此共有 C_7^3 种不同的方式，而在每种方式下的事件是互不兼容的，由概率的可加性可以知道, 在 7 重贝努里试验中事件 A 恰发生 3 次的概率为

$$P_7(3) = C_7^3 p^3 (1-p)^{7-3}$$

例 3.3.12　一批产品的废品率为 0. 1．现作三次有放回抽样，每次一件．求三次中恰有两次取到废品的概率.

解. 对于每一件产品来说，　它只有两种可能：废品或正品，现作三次有放回抽样，每次一件，显然这是一个三重贝努里试验问题，此时 p=0. 1, q=1−p=0. 9，因此三次中恰有两次取到废品的概率是:

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^{3-2} = 3 \times 0.1^2 \times 0.9 = 0.027 .$$

例 3.3.13 一条自动生产线上产品的一级品率为 0. 6，现在检查了 10 件，求至少有 2 件一级品的概率.

解. 设事件 B=“10 件中至少有 2 件一级品”，

对每一件产品来讲，它只有两种结果：一级品或非一级品，而且每个产品是否为一级品相互独立的．A 发生的概率 p=0. 6．因此，10 件产品中有 k 件一级品的概率为:

$$P_{10}(k) = C_{10}^k p^k (1-p)^{10-k} = C_{10}^k 0.6^3 0.4^{10-k} ,$$

因此　$$P(B) = \sum_{k=2}^{10} P_{10}(k) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1)$$

$$= 1 - C_{10}^0 0.6^0 \times 0.4^{10} - C_{10}^1 0.6^1 0.4^9 = 0.998 .$$

习　题

3.3.1 袋中装有7只球, 其中5只红球, 2只白球, 每次从中任取一球, 不放回地连续取两次, 则第一次取得白球, 第二次取得红球的概率是多少?

3.3.2 袋中装有7只球, 其中5只红球, 2只白球, 每次从中任取一球, 不放回地连续取两次, 则取得的两个球的颜色相同的概率是多少?

3.3.3 设 A、B 为二个随机事件, 已知 $P(A)=P(B)=1/3$, $P(A|B)=1/6$, 求 $P(\overline{A}|\overline{B})$.

3.3.4 已知 $P(A)=1/4$, $P(B|A)=1/3$, $P(A|B)=1/2$, 求 $P(A+B)$.

3.3.5 从 1, 2, 3,⋯, 15 中, 甲、乙两人各任取一数(不重复), 已知甲取到的数是 5 的倍数,求甲数大于乙数的概率.

3.3.6 掷三颗骰子, 已知所得三个数都不一样, 求含有 1 点的概率.

3.3.7 甲袋中有5只白球, 7 只红球; 乙袋中有4只白球, 2只红球. 从两个袋子中任取一袋, 然后从所取到的袋子中任取一球, 求取到的球是白球的概率.

3.3.8 有甲、乙两袋, 甲袋中有 3 只白球, 2 只黑球; 乙袋中有 4 只白球, 4 只黑球. 现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋, 然后再从乙袋中任取一球, 求此球为白球的概率.

3.3.9 袋中装有8只红球 ,2只黑球,每次从中任取一球,不放回地连续取两次, 求下列事件的概率.

(1)取出的两只球都是红球; (2)取出的两只球都是黑球;

(3)取出的两只球一只是红球,一只是黑球; (4)第二次取出的是红球.

3.3.10 有甲、乙两台机床. 已知甲机床出故障的概率为 0.06, 乙机床出故障的概率为 0.07, 求(1)甲、乙两台机床至少有一台发生故障的概率; (2) 甲、乙两台机床都正常工作的概率.

3.3.11 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 现随机地取一个地区的报名表, 再从中取一份,求取到的是女生的概率.

3.3.12 在一批电子元件中, 甲类占 80%, 乙类占 12%, 丙类占 8%. 这三类元件的使用寿命能达到指定要求的概率依次为 0.9, 0.8, 0.7. 现任取一个元件, 则使用寿命能达到指定要求的概率是多少?

3.3.13 设事件 A、B 相互独立. 已知只有 A 发生和只有 B 发生的概率都是 1/4, 求 $P(A)$, $P(B)$.

3.3.14 两个相互独立的事件 A_1 和 A_2 发生的概率分别为 p_1 和 p_2, 则 A_1 与 A_2 恰有一个发生的

概率为多少?
3.3.15 已知 A、B、C 两两独立, 其概率分别为 0.2、0.4、0.6, $P(A+B+C)=0.76$, 求概率 $P(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$.

3.3.16 已知 $P(A)=P(B)=0.4$, $P(A+B)=0.5$, 求

(1)$P(A|B)$; (2)$P(A-B)$; (3) $P(A\mid\overline{B})$.

3.3.17 已知事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(A)=P(\overline{B})=a-1$, $P(A+B)=7/9$, 试确定 a 的值.

3.3.18 事件 A 与 B 相互独立, 已知 $P(A)=0.4$, $P(A+B)=0.7$, 求 $P(AB)$及 $P(\overline{B}\mid A)$.

3.3.19 一射手对同一目标射击 4 次. 假设每次是否命中目标是相互独立的. 已知至少命中一次的概率为 80/81, 则该射手的命中率为多少?
3.3.20 甲、乙、丙三人向同一飞机射击. 假设他们的命中率都是 0.4. 又若只有一人命中时, 飞机坠毁的概率为 0.2; 恰有两人命中时, 飞机坠毁的概率为 0.6; 若三人同时命中, 飞机必坠毁. 求飞机坠毁的概率.
3.3.21 加工某一零件共需要 4 道工序, 设第一、第二、第三、第四道工序的次品率分别为 2%、3%、5%、3%, 假定各道工序的加工互不影响, 求加工出零件的次品率是多少
3.3.22 三人独立译某一密码, 他们能译出的概率分别为 1/3, 1/4, 1/5, 求能将密码译出的概率.
3.3.23 轰炸机轰炸某目标, 它能飞到距目标 400、200、100(米)的概率分别是 0.5、0.3、0.2, 又设它在距目标 400、200、100(米)时的命中率分别是 0.01、0.02、0.1 . 求目标被命中的概率为多少?
3.3.24 用一门大炮对某目标进行三次独立射击, 第一、二、三次的命中率分别为 0.4、0.5、0.7, 若命中此目标一、二、三弹, 该目标被摧毁的概率分别为 0.2、0.6 和 0.8, 试求此目标被摧毁的概率.
*3.3.25 袋中有一个白球和一个黑球, 一次次地从袋中摸球, 如果取出白球, 则除把白球放回外再加进一个白球, 直至取出黑球为止, 求取了 N 次都没有取到黑球的概率.
*3.3.26 袋中装有编号为 $1, 2,\cdots, N$ 的 N 个球, 先从袋中任取一球, 如该球不是 1 号球就放回袋中, 是 1 号球就不放回, 然后再摸一次, 求取到 2 号球的概率.
*3.3.27 某人过去射击的成绩是每射 5 次总有 4 次命中目标, 根据这一成绩, 求
(1)射击三次皆中目标的概率; (2)射击三次有且只有 2 次命中目标的概率;
(3)射击三次至少有二次命中目标的概率.
*3.3.28 一大楼有 5 个同类型的供水设备, 调查表明在任一时刻每个设备被使用的概率是 0.1, 问在任一时刻:
(1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少? (2)至少有 3 个设备被使用的概率是多少?
(3)至多有 3 个设备被使用的概率是多少? (4)至少有 1 个设备被使用的概率是多少?
*3.3.29 10 个考签中有 4 个是难签, 三人参加抽签(无放回地), 每人抽一签, 甲先, 乙次, 丙最后抽取, 证明三人抽到难签的概率相同.
*3.3.30 12 个乒乓球中有 9 个是新的, 3 个旧的, 第一次比赛时取出 3 个, 用完后放回; 第二次比赛时又取出 3 个, 求第二次取到的 3 个球中有 2 个新球的概率.
*3.3.31 H_1, H_2, H_3 都是研究股票理论的. 在某一群人当中, 相信这三种理论的概率分别为 $P(H_1)=1/2$, $P(H_2)=1/3$, $P(H_3)=1/6$. 现在 H_1, H_2, H_3 这三种理论分别对股票市场作如下预测:

理　论	股　票　行　情		
	A: 上涨	B: 不变	C: 下跌
H_1	1/5	3/5	1/5
H_2	1/5	1/5	3/5
H_3	4/5	1/10	1/10

如果股票行情实际上是上涨了, 问按上涨而得利者中, 相信这三种理论的人的比例情况如何?

思　考　题

1. 对任意两个事件 A、B, 是否恒有 $P(A)\geqslant P(A|B)$.

2. 事件$(A|B)$表示 B 发生的前提下 A 发生. 既然有 B 发生为前提, 即 B 已经发生, 现 A 又发生, 因此 A、B 同时发生, 故$(A|B)=(AB)$, 所以 $P(A|B)=P(AB)$, 这种说法是否正确?

3. 在 3 个事件的乘法公式

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

中, 涉及到好几个条件概率, 为什么在给出上述乘法公式时只提及 $P(A_1A_2)>0$ 呢?

4. 若 $A=\varnothing$, 是否可以推出 A 与任意事件既互斥又相互独立.

5. 事件 A、B 的"对立"与"互斥"有什么区别和联系? 事件 A、B"独立"与"互斥"又有什么区别和联系?

6. 事件的独立是否具有传递性,即: 如果 A 与 B 独立, 又 B 与 C 独立, 则 A 与 C 独立.

7. 重复试验一定是独立试验吗?