

# *Control Estadístico de Calidad*

# *Control Estadístico de Calidad*

*José Alberto Vargas N.*

Departamento de Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

Universidad Nacional de Colombia  
Sede Bogotá  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Estadística  
Bogotá 2017

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Construcción de Cartas de Control</b>	<b>1</b>
1.1. Qué es una Carta de Control . . . . .	1
1.2. Riesgos del Muestreo . . . . .	3
1.3. Tamaño de Muestra y Frecuencia de Muestreo . . . . .	4
<b>2. Cartas de Control para Variables Continuas</b>	<b>7</b>
2.1. Construcción de Límites de Control . . . . .	7
2.2. Carta $\bar{X}$ . . . . .	9
2.3. Longitud Promedio de Corrida (ARL) . . . . .	12
2.3.1. ARL para una Carta $\bar{X}$ . . . . .	13
2.3.2. Cálculo del ARL Mediante Cadenas de Markov . . . . .	14
2.4. Carta $R$ . . . . .	18
2.5. Cartas $\bar{X}$ y $R$ . . . . .	18
2.6. Carta $S$ . . . . .	22
2.7. Carta $S^2$ . . . . .	23
2.8. Estimación del Tiempo de Cambio de un Parámetro . . . . .	24
2.8.1. Cambio en la Media . . . . .	24

---

2.8.2. Cambio en la Variabilidad del Proceso . . . . .	27
2.9. Cartas Shewhart para Observaciones Individuales . . . . .	27
<b>3. Capacidad de un Proceso</b>	<b>33</b>
3.1. Indices de Capacidad para Distribuciones Normales . . . . .	34
3.2. Estimación de los Indices de Capacidad . . . . .	38
3.3. Indices de Capacidad para Distribuciones no Normales . . . . .	41
3.4. Indices de Capacidad para Distribuciones Discretas . . . . .	43
3.5. Capacidades Bajas de Procesos . . . . .	43
<b>4. Cartas de Control para Atributos</b>	<b>47</b>
4.1. Carta $p$ . . . . .	47
4.1.1. Carta $p$ con $n$ constante . . . . .	48
4.1.2. Carta $p$ con $n$ variable . . . . .	51
4.2. Carta $c$ . . . . .	51
4.3. Carta $u$ . . . . .	53
4.4. Carta de Control Basada en una Distribución Geométrica . . . . .	54
4.5. Carta de Control por Demeritos . . . . .	56
<b>5. Cartas CUSUM</b>	<b>59</b>
5.1. Cartas CUSUM para la Media . . . . .	59
5.2. ARL para un Procedimiento CUSUM . . . . .	61
5.3. Gráfico-V CUSUM . . . . .	64
5.4. Carta CUSUM para la Dispersión del Proceso . . . . .	66
5.4.1. CUSUM R y S . . . . .	66
5.4.2. Carta CUSUM V . . . . .	67
5.4.3. Carta CUSUM CP . . . . .	67
5.4.4. Carta CUSUM para Observaciones Individuales . . . . .	70
5.5. Carta CUSUM Poisson . . . . .	70

---

<b>6. Cartas de Control EWMA.</b>	<b>73</b>
6.1. Carta EWMA para la Media . . . . .	73
6.2. Cálculo ARL para un Esquema EWMA con Cadenas de Markov.	78
6.3. Carta EWMA para la Dispersión . . . . .	81
6.4. Carta EWMA Poisson . . . . .	83
6.5. Uso del EWMA como Predictor . . . . .	84
<b>7. Cartas de Control Robustas.</b>	<b>85</b>
7.1. Cartas Robustas $\bar{X}$ Y R. . . . .	85
7.2. Cartas CUSUM Robustas . . . . .	88
7.3. Cartas EWMA Robustas . . . . .	89
<b>8. Cartas de Control Multivariadas</b>	<b>91</b>
8.1. Cartas Shewhart Multivariadas . . . . .	91
8.1.1. Carta de Control para el Vector de Medias . . . . .	92
8.1.2. Cartas de Control para la Dispersion del Proceso . . .	101
8.1.3. Cartas multivariadas para el modelo de punto de cambio	105
8.1.4. Carta $T^2$ con Estimadores Alternativos de Media y Varianza . . . . .	106
8.1.5. Procedimientos cuando hay Señales Fuera de Control .	107
8.2. Cartas CUSUM Multivariadas . . . . .	112
8.3. Carta EWMA Multivariada . . . . .	116
8.4. Capacidad de Procesos Multivariados . . . . .	118
<b>9. Cartas de Control Especiales</b>	<b>121</b>
9.1. Cartas de Control BOOTSTRAP . . . . .	121
9.2. Cartas de Control No Paramétricas . . . . .	123
9.3. Cartas de Control con Datos Autocorrelacionados . . . . .	124
9.4. Cartas de Control Adaptativas . . . . .	127
9.4.1. Cartas de Control con Intervalos de Muestreo Variable	128

9.4.2. Cartas de Control con Tamaños de Muestra Variable .	132
--	-----

<b>10.Monitoreo de Perfiles</b>	<b>135</b>
---------------------------------	------------

10.1. Perfiles lineales . . . . .	136
10.2. Perfiles no Lineales . . . . .	140
10.3. Perfiles con Respuesta Discreta . . . . .	144
10.4. Capacidad de Procesos caracterizados por Perfiles . . . . .	146

# Prefacio

El uso de métodos estadísticos en el mejoramiento de la calidad y la productividad es cada vez más frecuente. Hace varios años el concepto de calidad se asociaba a procesos de manufactura. Esta concepción ha cambiado substancialmente hoy en día. Los métodos de mejoramiento de calidad y por tanto los métodos estadísticos utilizados allí, se aplican a procesos y productos no solo de manufactura sino también de servicios. El objeto de este libro es presentar las herramientas estadísticas básicas y avanzadas, que se emplean en los procesos de mejoramiento de la calidad tanto en la industria como en las organizaciones que ofrecen servicios a la comunidad.

Este libro es el resultado de varios años de docencia e investigación en el área de control de calidad. La componente docente, desarrollada en los cursos de pregrado y posgrado que el Departamento de Estadística ofrece en la carrera de Estadística y la Maestría. La actividad investigativa, a través de proyectos de investigación aprobados y financiados por la División de Investigación de la Universidad Nacional de Colombia. Este libro puede ser utilizado como texto guía o de consulta en los cursos de control estadístico de calidad que se ofrecen a nivel de pregrado y posgrado, mediante una adecuada selección del material presentado. Se asume sí, que el estudiante tiene como prerequisite un curso de inferencia estadística.

El libro contiene 10 capítulos. En el capítulo 1 se presentan los fundamentos de una carta de control. El capítulo 2 presenta la construcción y aplicación de cartas de control para variables continuas. En el capítulo 3 se presentan y comparan los principales índices de capacidad de un proceso. Los capítulos 5 y 6 presentan los esquemas *CUSUM* y *EWMA*, la forma de construir estas cartas y las ventajas que ofrecen frente a las cartas Shewhart. En el capítulo 7 se definen esquemas de control que utilizan estimadores robustos. El capítulo 8 está dedicado a presentar métodos multivariados aplicados en control estadístico de procesos. Estos métodos son cada vez más importantes

en razón a que el avance tecnológico permite la recolección de información en un número cada vez mayor de variables. En el capítulo 9 se estudian algunos temas avanzados en control de procesos: cómo utilizar métodos bootstrap para monitorear un proceso. Qué sucede si los datos tomados están correlacionados. Cómo se mejora la eficiencia de una carta al permitir variar los tiempos entre la toma de muestra o el tamaño de las mismas. Finalmente el capítulo 10 presenta una introducción a los métodos Taguchi, también conocidos como diseños robustos.

Quiero expresar mis agradecimientos a la Universidad Nacional de Colombia y el Departamento de Estadística por el constante apoyo al desarrollo y publicación de textos. A mis estudiantes, algunos de los cuales mostraron gran interés en el área y desarrollaron trabajos interesantes en control estadístico de procesos. Varios de estos trabajos forman parte del material publicado en este libro. Al profesor Humberto Mayorga por la cuidadosa lectura que hizo al primer manuscrito de este libro. Finalmente quiero agradecerle al profesor Edgar Malagón su cooperación en la edición del texto.

**Jose Alberto Vargas N.**

### **Cambios en la Segunda Edición**

El control estadístico de procesos ha tenido un gran desarrollo durante los últimos años. El avance tecnológico no solo ha permitido una mejora sistemática en la calidad de los productos sino también una amplia oferta de productos al consumidor final. De igual forma, las técnicas de recolección de información permiten ahora obtener grandes volúmenes de datos, que requieren de novedosos métodos de análisis. En esta edición se presentan algunas de estas nuevas metodologías propuestas durante los últimos años, que permiten monitorear procesos especiales en manufactura, salud pública y servicios. Una técnica que ha permitido analizar grandes volúmenes de datos es la que se conoce como monitoreo de perfiles, que ha sido de amplio interés investigativo durante la última década. Por esta razón, se ha dedicado un capítulo completo a explicar los fundamentos básicos de esta metodología y presentar líneas de investigación en este campo. Este es el capítulo 10 de esta nueva edición. El capítulo 10 de la primera edición que estaba dedicado a métodos Taguchi ha sido omitido, en razón a que difícil-



mente se alcanza a estudiar en un curso regular de un semestre. Considero que este tema podría incluirse en un curso de diseño de experimentos.



# Introducción

El éxito de una compañía depende en la actualidad de la productividad y la calidad de los bienes o servicios que produce. Una compañía debe estar en capacidad de colocar nuevos productos en el mercado y mantenerlos allí. El rápido desarrollo tecnológico ha hecho que las empresas estén en capacidad de producir más productos de los que puede vender. Es decir, estamos presenciando una etapa del mercado en el que la oferta excede la demanda. Ante una situación como esta, la lucha por mantenerse en el mercado se hace cada vez más difícil y por tanto la competencia entre precio y calidad se intensifica. Producir bienes de calidad cada vez mejor, es uno de los parámetros con los cuales una compañía puede fortalecer su posición en el mercado y enfrentar la competencia en condiciones favorables.

Actualmente las compañías son conscientes de que el mejoramiento de la calidad conduce a un aumento en la productividad, obteniendo así una reducción en el costo por unidad.

Pero, ¿Qué se entiende por calidad? Aunque este concepto y la demanda por productos de calidad ha sido parte de la naturaleza humana por mucho tiempo, la cuantificación de la calidad y el establecimiento de estándares de calidad es un fenómeno del siglo XX. Varias definiciones de calidad se encuentran en la literatura. Textos como Duncan (1986), Ryan (2011), Montgomery (2001) y Qiu (2014) presentan una amplia discusión al respecto. Hoyer & Hoyer (2001) comparan las concepciones que sobre calidad han sido dadas por varios gurus. De acá extractamos algunas de ellos. W. Edwards Deming expresa que la calidad se debe definir en términos de satisfacción del consumidor. Plantea además que la calidad de un producto o servicio se debe establecer de una forma multidimensional.

Para Joseph M. Juran, la calidad consiste de aquellas características del producto que satisfacen las necesidades del consumidor. Insiste además que hablar de calidad equivale a hablar de un producto libre de defectos. En

este último punto concuerda con Philip B. Crosby, quien a través de sus conferencias y publicaciones siempre habla de la teoría “cero defectos”.

Kaoru Ishikawa concuerda también en la definición de calidad como satisfacción del consumidor, pero insiste que el concepto de calidad debe abarcar todos los eslabones de la organización.

Genichi Taguchi define calidad como la pérdida que un producto le causa a la sociedad desde el momento en que este es embarcado. Esta definición, aunque un poco extraña, condiciona la calidad de un producto a la satisfacción del consumidor. Entre menor sea la pérdida monetaria, mayor es la satisfacción del consumidor

Como se anotó arriba, el control estadístico de calidad es algo realmente nuevo, pues fue a partir de los años veinte que se empezó a utilizar métodos estadísticos como herramientas para el mejoramiento de la calidad.

En mayo de 1924, Walter A. Shewhart de la Bell Telephone Laboratories hizo el primer bosquejo de una carta de control, y en 1931 Shewhart publicó el libro “Economic control of quality of manufactured product”, en el cual se sentaron las bases del control estadístico de calidad. Harold F. Dodge y H. Romig también de la Bell System, desarrollaron las aplicaciones de la teoría estadística en inspección por muestreo. En 1944 publicaron el trabajo “Tablas de inspección por muestreo – muestreo simple y doble”. El trabajo de estas tres personas es la base de lo que hoy es el control estadístico de calidad.

Durante la segunda guerra mundial se dio un avance importante en las técnicas de control de calidad, tanto en Inglaterra como en Estados Unidos. Sin embargo, al finalizar la guerra su aplicación en la industria disminuyó considerablemente.

A comienzos de los años 50's, W. Edwards Deming viajó a Japón invitado por la Unión Japonesa de Científicos e Ingenieros, para dar una serie de seminarios y cursos. Deming desarrolló el concepto de calidad como un objetivo estratégico económico y mostró la forma de lograr tal objetivo. El impacto de Deming en Japón fue de tal magnitud, que la industria japonesa comenzó a florecer a partir de los años 60's, logrando penetrar amplios espacios del mercado mundial. Este hecho hace que los países occidentales vuelvan a darle importancia a los métodos de control de calidad.

En los años 70's y comienzos de los 80's se aprecia un resurgimiento en la aplicación de métodos estadísticos en la industria. En un mercado abierto, los consumidores empiezan a exigir productos de buena calidad a un precio

razonable. La industria Americana, Europea y Oriental comprueban que la colocación de artículos de buena calidad en el mercado atrae compradores y paralelamente constituye a la larga un ahorro de dinero. La industria, ante la necesidad de colocar en el mercado artículos de buena calidad y reducir costos de producción, se embarca entonces en la formulación y ejecución de procesos que la condujeran al mejoramiento de la calidad y la productividad. Este esfuerzo condujo a la estructuración de un sistema global que hoy en día se conoce como “Calidad Total”. “Control Total de la Calidad” (TQC) fue el sistema desarrollado por Japón, mientras que la contraparte Americana se conoce como “Manejo de la Calidad Total” (TQM).

Tanto el TQC como el TQM tienen como uno de sus grandes objetivos la satisfacción final del consumidor e incluye todas las personas, procesos y actividades de la compañía. Algunos autores consideran el TQM (TQC) como una verdadera filosofía empresarial. Otros, por ejemplo Caulcutt (1995) describe el TQM simplemente como una cultura.

A finales de los años 1980’s aparece una nueva iniciativa de calidad denominada “Seis Sigma”. Seis sigma es un programa de mejoramiento de la calidad desarrollado en Motorola, y en términos generales es conocido como una iniciativa que busca producir solamente 3.4 defectos por millón de oportunidades, es decir, procesos con producciones de artículos defectuosos cercanas a cero. Este programa trabaja proyecto a proyecto, los cuales son de corta duración, usualmente entre tres y ocho meses, desarrollados bajo una guía que está definida por las siglas DMAIC, que se refieren en inglés a las palabras Define, Measure, Analyze, Improve and Control. En razón al éxito obtenido en Motorola, este programa fue posteriormente adoptado por varias organizaciones, no sólo pertenecientes al sector manufacturero, sino también al de servicios. Todos estos programas utilizan una serie de herramientas estadísticas, que en conjunto se conocen como **“Control Estadístico de Procesos”(SPC)**.

Para entender el alcance del SPC debemos inicialmente tener claridad sobre lo que se entiende por Proceso. Bissell (1994) describe un proceso como la actividad de producir entradas en salidas (inputs into outputs). El Dr. Deming había explicado mejor este concepto, definiéndolo como una red de componentes interdependientes que trabajan juntas, con el propósito de lograr los objetivos propuestos por el sistema. Stoumbos, Reynolds, Ryan & Woodall (2000) anotan que el control estadístico de procesos (SPC) se “refiere a métodos estadísticos usados extensivamente para monitorear y mejorar la calidad y productividad de procesos de manufactura y operaciones

de servicio”. Es la presentación de estos métodos el objetivo central del texto. Por tal razón, temas como por ejemplo el de muestreo de aceptación no se abordan en el libro. Recientemente, algunos autores recomiendan utilizar las letras SPM en lugar de SPC. SPM se refiere a **“Monitoreo Estadístico de Procesos”**. Ver por ejemplo Woodall (2017), en el que argumenta que la palabra “monitoreo” refleja mejor la aplicación de los métodos estadísticos de lo que lo hace la palabra “control”, que puede ser confusa en algunos casos.

Dos áreas generales se destacan en el control estadístico de procesos:

- *Planeamiento de la calidad (métodos off-line).*
- *Inspección de la calidad (métodos on-line).*

En el *Planeamiento de la Calidad* podemos distinguir dos grandes etapas, el *Diseño del Producto* y el *Diseño del Proceso*. En el *Diseño del Producto* se establecen las especificaciones de las características de calidad del producto y las regiones de tolerancia. La segunda etapa, *Diseño del Proceso*, esta relacionada con el diseño del proceso de manufacturación y la identificación de causas potenciales de variabilidad. El diseño de experimentos, y más específicamente los diseños factoriales son muy usados en esta etapa pues permiten identificar las variables más importantes que afectan la calidad de un producto o un proceso.

La *Inspección de la Calidad* tiene por objeto determinar si un producto satisface los requerimientos de calidad deseados. Se inspeccionan características de calidad y se las compara con valores nominales preestablecidos. Entre las herramientas utilizadas en esta parte están los índices de capacidad y principalmente las cartas de control. Las cartas de control se han constituido en la herramienta más utilizada en los programas de mejoramiento de la calidad. Su uso ya no es exclusivo en manufactura sino que se ha ampliado a otras áreas tales como finanzas, salud y educación. Su relativa simplicidad de manejo combinado con su potencia para identificar problemas las convierte en una poderosa herramienta del control estadístico de procesos. Esta es la razón para que una gran parte de este libro esté dedicado a su estudio.

# Capítulo 1

## Construcción de Cartas de Control

### 1.1. Qué es una Carta de Control

Una carta (ó gráfico) de control es una herramienta estadística, usada principalmente para el estudio y control de procesos repetitivos. Fueron definidas, como ya se dijo en la introducción, por el Dr. Walter A. Shewhart.

La base de la teoría de las cartas de control es que la variabilidad en la calidad de un producto es de dos clases: en la primera categoría estarían involucradas variaciones originadas en causas aleatorias y sobre las cuales poco se puede hacer. En la segunda categoría establecemos variaciones producidas por “causas especiales” ó “causas asignables”. Sobre estas últimas podemos tener algún grado de control. Por ejemplo diferente calidad de material, diferencias entre operarios, etc.

Si los datos de un proceso satisfacen ciertas propiedades deseables, como por ejemplo que su media se mantenga dentro de un rango preestablecido, se dice que el proceso está bajo control. Si, por otra parte, se presenta variación debida a una o varias causas especiales, el proceso se dice que está fuera de control. Una carta de control Shewhart es una herramienta que nos permite definir este estado de control estadístico de una manera más precisa. La Gráfica 1.1 presenta un esquema general del objetivo de una carta de control.

Una carta de control se puede explicar de la siguiente manera: Suponga que

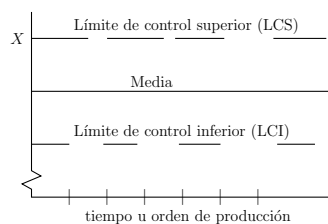
El proceso está:	Objetivo de la carta Shewhart
Bajo control	→ Mantenerlo bajo control
Fuera de control	→ Traerlo a control

Gráfica 1.1. Objetivo de una carta de control.

muestras de un tamaño dado se seleccionan de un proceso a intervalos más o menos regulares y que para cada muestra se calcula alguna estadística  $X$ . Por ejemplo la media muestral o el rango muestral.  $X$  está sujeta a variaciones muestrales. Si no hay causas asignables, estas fluctuaciones muestrales en  $X$  se distribuyen de acuerdo a un patrón estadístico, por ejemplo la distribución normal. Si se toman varias muestras, es posible estimar la media y ciertos puntos extremos de esta distribución.

Supongamos que la distribución muestral de  $X$  tiene la forma normal. Entonces, de las medias de las muestras es posible estimar la media de la distribución de  $X$ . A partir de la variabilidad dentro de muestras, la desviación estándar de  $X$ , y de estas dos, se pueden determinar puntos de probabilidad.

Si la escala vertical de un gráfico se calibra en unidades de  $X$ , la escala horizontal se establece con respecto al tiempo o algún otro criterio de ordenamiento de  $X$ , y trazamos líneas horizontales a través de la media estimada de  $X$  y a través de los valores extremos en las colas superiores e inferiores de la distribución de  $X$ , los cuales pueden ser por ejemplo cuantiles predeterminados de la distribución de  $X$ , el resultado es una carta de control para  $X$ . Las rectas trazadas en los extremos son los límites de control superior e inferior y se denotarán por LCS y LCI respectivamente, tal como aparece en la Gráfica 1.2.

Gráfica 1.2. Carta de Control para  $X$ 

Si valores muestrales de  $X$  se grafican para un número significativo de salidas y tiempos, y si estos valores caen dentro de los límites de control y no



muestran ciclos o patrones sospechosos, se dice que el proceso está en estado de control estadístico. En caso contrario, el proceso está fuera de control, y debe entonces buscarse las causas que lo produjeron, a fin de tomar medidas correctivas. Los límites de control se calculan usualmente de la forma (media de  $X$ )  $\pm L\sigma_x$  donde  $L$  es alguna constante. Desde que se inició la aplicación de las cartas de control, es frecuente tomar  $L = 3$ , de donde se deriva el nombre de cartas con límites  $3\sigma$ . Si se asume que la distribución de  $X$  es normal, la probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites  $3\sigma$  es 0.0027.

El uso de una carta de control requiere usualmente de dos fases (ver Ryan (2011)). En la primera se analiza un conjunto histórico de datos con el objeto de conocer el proceso, analizar la variabilidad del mismo y eliminar datos atípicos. Con base en estos datos se hace una primera estimación de los parámetros desconocidos del proceso y se establecen unos límites de control iniciales. Se grafican los puntos en la carta y si uno o más puntos quedan ubicados por fuera de los límites, se buscan las posibles causas que los produjeron. Aquellos puntos para los que se determinen dichas causas se eliminan y con los restantes puntos se recalculan los límites. Este proceso se continua hasta que se tenga certeza de que los datos finalmente obtenidos corresponden a un proceso bajo control. Esta fase es conocida como Fase I. Jones-Farmer, Woodall, Steiner & Champ (2014) presentan un estudio general de la forma como se debe analizar el conjunto de datos disponible, y dan recomendaciones generales a tener en cuenta en esta fase.

Después de que el proceso se considere en control se pasa a la siguiente fase, conocida como Fase II, en el cual se realiza monitoreo en línea. En esta segunda fase los límites de control establecidos antes se aplican a los datos que se vayan obteniendo actualmente, con el objeto de mantener el proceso bajo control. Si un punto se sale de los límites de control, el proceso debe detenerse para investigar las causas raíces del problema y solucionar el mismo, antes de reanudar el proceso de monitoreo.

## 1.2. Riesgos del Muestreo

Considere el caso en que se toman muestras pequeñas de un proceso a intervalos regulares de tiempo, con el objeto de construir cartas de control para la media y el rango. Luego de ubicar las respectivas estadísticas en los gráficos y compararlas con los límites de control se concluye que el proceso está bajo control ó fuera de control. Si el proceso está fuera de control, podría ser

debido a un cambio en el nivel promedio o en la variabilidad del proceso. En razón a la variación inherente del muestreo, los promedios y rangos varían de muestra a muestra, aunque la media y el rango reales del proceso sean constantes. Esto da lugar a dos tipos de riesgos:

**Riesgo de tipo I:** El riesgo de que una muestra extrema conduzca a tomar una acción, cuando no ha ocurrido cambio en el proceso.

**Riesgo de tipo II:** El riesgo de que una muestra caiga dentro de los límites de control, aunque un cambio real haya ocurrido en el proceso.

Obsérvese el paralelo que hay entre estos dos riesgos y los que aparecen cuando se prueba una hipótesis sobre algún parámetro poblacional. En el caso de una prueba de hipótesis, el error de tipo I ocurre cuando por razones puramente aleatorias, debidas al proceso de selección de la muestra, se rechaza una hipótesis nula que es correcta. El error de tipo II ocurre cuando la muestra no ofrece evidencias para rechazar la hipótesis nula, a pesar de que esta en la realidad debería ser rechazada. En el diseño de una carta de control se debe establecer un compromiso que tenga en cuenta estos dos tipos de riesgos. Cuando un punto cae por fuera de los límites de control debido solamente a causas aleatorias se dice que se ha presentado una “falsa alarma”. Es deseable diseñar cartas que produzcan ratas bajas de falsas alarmas debido a los costos económicos que estos casos puedan tener para una industria.

### 1.3. Tamaño de Muestra y Frecuencia de Muestreo

Cuando se toma más de una observación en cada tiempo, el tamaño de muestra está determinado por la rata de producción, y variará de período a período. El tamaño de la muestra y la frecuencia del muestreo deben ser determinados de manera conjunta con los directivos de la empresa.

Una muestra grande producirá límites que quedarán más cercanos a la línea media de la carta, pues las desviaciones estándar de estadísticas como  $p$  ó  $\bar{X}$  varían inversamente con  $\sqrt{n}$ ; es decir, entre más grande es  $n$ , más pequeña es la desviación estándar y tanto más cercanos los límites  $3\sigma$  a la línea central de la carta. En este caso se reduce el riesgo de tipo II.

---

Muestras grandes tomadas a intervalos cortos darían la mejor protección contra desvíos en el proceso, pero es costoso. El problema práctico es entonces, cuando tomar muestras grandes a intervalos menos frecuentes o muestras pequeñas a intervalos más frecuentes.

En la práctica, tanto el tamaño de muestra como la frecuencia se toman por conveniencia, aunque por mucho tiempo se ha acostumbrado a relacionar tamaño de muestra pequeños, usualmente entre 3 y 6 unidades. La razón para esta selección radica en lo que se denomina subgrupos racionales. El concepto de subgrupos racionales fue expuesto inicialmente por Shewhart y se refiere al hecho de seleccionar grupos de tal forma que si existen causas asignables en el proceso, el chance de que ocurran sea maximizado entre muestras y minimizado dentro de muestras.



## Capítulo 2

# Cartas de Control para Variables Continuas

En este capítulo presentamos algunas cartas básicas tipo Shewhart, cuando la característica de calidad es una variable numerica continua, la cual asumiremos que sigue una distribución normal. Como se estableció en el capítulo anterior, la carta se define calculando la línea central y los límites de control, ubicados a cierta distancia en términos de desviaciones estándar, de la línea central, por ejemplo a tres desviaciones estándar. En la sección 2.1 se presenta un desarrollo teórico para la construcción de estos límites, propuesta por Iglewicz & Hoaglin (1987), basado en propiedades de estadísticas de orden. El lector que no esté interesado en estos detalles puede obviar esta sección y pasar a la siguiente sección.

### 2.1. Construcción de Límites de Control

En esta sección se desarrolla teóricamente la construcción de una carta de control para una medida de localización y de dispersion, cuando la característica de calidad o de proceso, es continua y sigue una distribución normal. Este método fue presentado por Iglewicz & Hoaglin (1987). La metodología, cuando las variables no siguen una distribución normal, será comentada en secciones posteriores.

Dadas las observaciones  $X_1, X_2, \dots, X_n$  las estadísticas de orden son las

observaciones ordenadas,

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \cdots \leq X_{(n)}.$$

Funciones lineales de las estadísticas de orden, denominadas usualmente estimadores  $L$ , son de la forma,

$$T = \sum_{j=1}^n a_j X_{(j)}.$$

Si  $a_j = \frac{1}{n}$  para todo  $j$ , se obtiene la media. Si  $a_1 = -1$ ,  $a_n = 1$  y los otros  $a_{(j)} = 0$ , se obtiene el rango  $R$ .

Para construir límites  $3\sigma$ , se asume que los datos consisten de grupos de  $n$  observaciones normales independientes con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Los límites se calculan a partir de los valores esperados y varianzas de las funciones usadas

$$E(T) = \sum_{j=1}^n a_j E(X_{(j)}).$$

La varianza de  $T$  es:

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_{(i)}, X_{(j)}).$$

Para construir límites de control, es suficiente encontrar  $\sigma_T^2$  para datos normales estándar, pues  $\sigma^2$  contribuye solamente como un factor en  $\sigma_T^2$ . Para un estimador de localización  $T$ ,

$$\sigma_T^2 = \text{Var}(T \mid N(\mu, \sigma)) = \sigma^2 \text{Var}(T \mid N(0, 1)). \quad (2.1)$$

Por ejemplo, si  $T = \bar{X}$  es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño  $n$  entonces,

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2 \frac{1}{n} = \sigma^2 \text{Var}(\bar{X} \mid N(0, 1)).$$

Si  $\bar{T}$  representa la línea central de una carta de control para la medida de localización  $T$ , los límites  $3\sigma$  son:

$$\bar{T} \pm 3\sigma_T, \quad (2.2)$$

$\sigma^2$  se estima de la dispersión de los datos.

Para una medida de dispersión  $W$  de la forma,

$$W = \sum_{j=1}^n b_j X_{(j)}$$

tenemos,

$$E(W | N(\mu, \sigma^2)) = \sigma E(W | N(0, 1))$$

luego

$$\sigma = \frac{E(W | N(\mu, \sigma^2))}{E(W | N(0, 1))} \approx \frac{\bar{W}}{E(W | N(0, 1))}$$

entonces,

$$\sigma_T \approx \frac{\sqrt{\text{Var}(T | N(0, 1))}}{E(W | N(0, 1))} \bar{W}. \quad (2.3)$$

Los límites de control para una medida de dispersión  $W$ , toman una forma ligeramente diferente.

Como antes,

$$\sigma_W^2 = \text{Var}(W | N(\mu, \sigma^2)) = \sigma^2 \text{Var}(W | N(0, 1)),$$

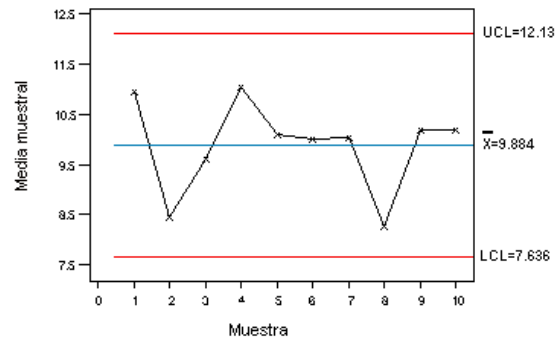
y los límites de control  $3\sigma$  son entonces:

$$\bar{W} \pm 3 \frac{\sqrt{\text{Var}(W | N(0, 1))}}{E(W | N(0, 1))} \bar{W} = \left( 1 \pm 3 \frac{\sqrt{\text{Var}(W | N(0, 1))}}{E(W | N(0, 1))} \right) \bar{W}. \quad (2.4)$$

El lector interesado en aspectos teóricos adicionales de este método, puede consultar Iglewicz & Hoaglin (1987).

## 2.2. Carta $\bar{X}$

Una carta  $\bar{X}$  muestra variaciones en los promedios de las muestras. Se asume que la característica de calidad sigue una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Si los parámetros de esta distribución son conocidos, la línea central de la carta es  $\mu$  y los límites de control son  $\mu \pm z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ , donde  $\alpha$  es la probabilidad de una falsa alarma y  $n$  es el tamaño del subgrupo que

Gráfica 2.1. Carta típica  $\bar{X}$ 

se toma en cada tiempo. Usualmente  $z_{\alpha/2}$  se reemplaza por 3, obteniéndose una carta de límites tres sigma con una probabilidad de error tipo I igual a 0.0027. Aunque es frecuente construir los límites de control como múltiplos de la desviación estándar, por ejemplo tres, también se pueden definir especificando inicialmente un error de tipo I, y calculando el múltiplo de la desviación estándar de acuerdo al nivel preestablecido. Estos límites se conocen como límites de probabilidad. Una vez definida la carta, el proceso empieza a ser controlado tomando muestras de tamaño  $n$ , calculando la media muestral de las observaciones y colocando este punto en la gráfica. Si el punto cae entre los límites de control, se considera que la media del proceso está bajo control. En caso contrario, el proceso se considera fuera de control y debe investigarse la causa o causas que lo produjeron.

En la práctica sin embargo, los parámetros de la distribución normal son desconocidos y deben ser estimados. Se procede entonces a tomar un conjunto histórico de datos, estimar los parámetros y realizar un trabajo de depuración de la información, hasta que el proceso se considere que está estable. Consideramos que un proceso es estable, o se encuentra bajo control, cuando la variabilidad exhibida por la carta es debida solo a causas aleatorias. Este proceso es lo que constituye la Fase I de la construcción de la carta de control. En la Fase II, el proceso se monitorea en línea. El conjunto histórico de datos seleccionado para la Fase I, está conformado usualmente por un número  $m$  de subgrupos que oscila entre 20 y 50, aunque Quesenberry (1993) sugiere seleccionar al menos 100 subgrupos de tamaño  $n = 5$ ,



con el objeto de construir de una manera mas precisa los límites de control. Con base en las observaciones de los  $m$  subgrupos se estiman los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , y se construyen a partir de estos estimadores los límites de control retrospectivos de la carta. La línea central  $\bar{\bar{X}}$  es el promedio de las medias de los  $m$  subgrupos. Asumiendo que los tamaños de los grupos son iguales, los límites de control son:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{R}}{\sqrt{n}E(R | N(0,1))} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$

y,

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{R}}{\sqrt{n}E(R | N(0,1))} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$

donde  $\sigma$  se estima usualmente a partir de los rangos muestrales de la forma  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ , y  $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ . Las constantes  $A_2$  y  $d_2$  se encuentran tabuladas en varios libros de control de calidad, por ejemplo Duncan (1986).

Otra manera de construir los límites de control consiste en estimar  $\sigma$  mediante las desviaciones estándar muestrales calculadas para cada grupo. Como

$$E(S) = C_4\sigma,$$

donde

$$C_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}}$$

entonces

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_4},$$

$\bar{S}$  es el promedio de las desviaciones estándares para los  $m$  grupos. De esta manera los límites de control quedan definidos así:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{S}}{C_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{S}}{C_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}.$$

Si un punto cae fuera de los límites de control, o si se observan variaciones no aleatorias dentro de los límites, el proceso se considera fuera de control con respecto a su tendencia central, y se debe iniciar una búsqueda de las

causas asignables de esta variación. La Gráfica 2.1 muestra una salida de Minitab con un gráfico típico  $\bar{X}$ . En razón a que esta carta no es sensitiva a cambios pequeños en la media del proceso, se ha sugerido utilizar lo que se denominan reglas suplementarias, publicadas originalmente por la Western-Electric (1956), con el fin de tomar decisiones sobre patrones no aleatorios que ocurran dentro de los límites tres sigma. Por ejemplo, en algunas ocasiones a la carta  $\bar{X}$  se le adicionan dos rectas paralelas a la línea central usualmente localizadas a una distancia  $2\sigma$  denominados límites de aviso. Si 2 de 3 puntos consecutivos aparecen entre los límites de aviso y los límites de control, el proceso debe supervisarse con mayor cuidado o detenerse. Una generalización de esta última regla (2 de 3) considera una señal si  $k$  de los últimos  $m$  valores de la estadística caen en el intervalo  $(\bar{\bar{X}} + aS_{\bar{X}}, \bar{\bar{X}} + bS_{\bar{X}})$  donde  $1 \leq k \leq m$  y  $a < b$ . Champ & Woodall (1987) usaron la notación  $T(k, m, a)$  para definir esta regla. La carta básica Shewhart  $\bar{X}$  es simplemente  $\{T(1, 1, -\infty, -3), T(1, 1, 3, \infty)\}$ .

### 2.3. Longitud Promedio de Corrida (ARL)

Cuando el proceso está siendo monitoreado en línea, es decir se encuentra en la Fase II, al número de puntos graficados en la carta hasta que aparezca una señal fuera de control se le conoce por longitud de corrida y se denota por RL (siglas correspondientes a “Run Length”).

El valor de RL cambia de ensayo a ensayo en razón a una variabilidad aleatoria. Por ejemplo, suponga que se esta monitoreando el valor medio de un proceso mediante una carta  $\bar{X}$ , y que a partir de cierto momento se empiezan a graficar las medias muestrales en la carta. Si el primer punto que aparece fuera de los límites de control ocurre en la muestra 50, se tiene que  $RL=50$ . Si se repite este experimento bajo las mismas condiciones, el nuevo valor de RL puede ser menor o mayor que 50. El valor esperado de la variable aleatoria RL, calculado con base en un número grande de ensayos se denota por ARL. Puede ser calculado teóricamente para varias cartas y graficadas en una curva, denominada curva ARL. Cuando el proceso se encuentra bajo control este se acostumbra a denotar por  $ARL_0$ . El ARL en procesos fuera de control es usualmente denotado por  $ARL_1$ . La situación ideal para una carta de control dada, es que el valor  $ARL_0$  sea grande, mientras que el valor de  $ARL_1$  sea pequeño, pero tal como ocurre en el contexto de pruebas de hipótesis, esto no es fácil lograrlo. Por tanto, lo que se acostumbra hacer, es fijar un valor para  $ARL_0$ , y tratar de obtener valores

de  $ARL_1$  tan pequeños como sea posible. En varios casos es difícil calcular teóricamente el ARL. Se utilizan entonces procedimientos de simulación para hacer su cálculo. Es importante tener claro el concepto del “ARL” pues es un criterio muy importante cuando se desea comparar la eficiencia de varias cartas de control.

### 2.3.1. ARL para una Carta $\bar{X}$

Consideremos una carta  $\bar{X}$  con límites de control LCS y LCI. Supongamos que se toman grupos de  $n$  observaciones en cada tiempo y que se grafica  $\bar{X}_i$  en la carta. Las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas como una  $N(\mu_0, \sigma^2)$ .

Sea

$$p = P[\bar{X}_i > LCS] + P[\bar{X}_i < LCI]$$

la probabilidad de que un punto este “fuera de control”, y sea  $RL$  la variable aleatoria definida por :

$RL$ : número de puntos graficados en la carta hasta obtener el primero fuera de control.

Claramente  $RL$  sigue una distribución geométrica con parámetro  $p$ .

Es decir

$$P[RL = x] = p(1 - p)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \dots$$

luego

$$E[RL] = \frac{1}{p} \text{ y } Var[RL] = \frac{[1 - p]}{p^2}.$$

Por tanto,

$$ARL = E[RL] = \frac{1}{p}.$$

En el caso de una carta  $\bar{X}$  con límites  $3\sigma$  ,  $p = 0,0027$ . Así que,

$$ARL = E[RL] \approx 370.$$

Este valor aproximado de 370 corresponde a  $ARL_0$ . Para calcular  $ARL_1$ , supongamos que la media de la característica de calidad cambia de  $\mu_0$  a  $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$  en cierto momento. Entonces, la probabilidad de que la media

muestral  $\bar{X}$ , de la muestra tomada luego de ocurrido el cambio este dentro de los límites de control es

$$\begin{aligned}\beta &= P(LCI \leq \bar{X} \leq LCS / \mu = \mu_1) \\ &= P\left(\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} / \mu = \mu_1\right) \\ &= P(-3 - k\sqrt{n} \leq Z \leq 3 - k\sqrt{n}) \\ &= \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})\end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar. La distribución de la longitud de corrida fuera de control es una distribución geométrica con parámetro  $1 - \beta$ . Por tanto,

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

### 2.3.2. Cálculo del ARL Mediante Cadenas de Markov

Suponga que se tiene una carta Shewhart con límites de aviso LAS y LAI. Se presentará un método basado en Cadenas de Markov para el cálculo del ARL en esta situación. El método se puede extender a otros casos.

Una carta Shewhart con límites de aviso puede ser representada como una cadena de Markov con 4 estados tal como se aprecia en la Gráfica 2.2

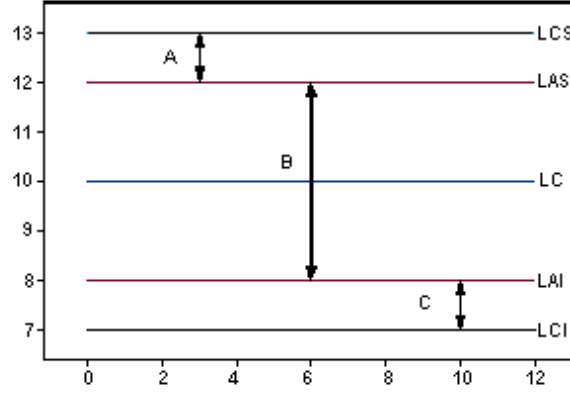
Los estados se definen de la siguiente manera:

**Estado 0:** El punto actual está en la región B

**Estado 1:** El punto actual está en la región C y el punto anterior no estaba allí.

**Estado 2:** El punto actual está en la región A y el punto anterior no estaba allí.

**Estado 3:** El punto actual da “señal” en uno de los siguientes dos casos:  
Un punto está fuera de los límites de control o dos puntos sucesivos están en la región A o en la región C.



Gráfica 2.2. Esquema de una carta Shewhart con límites de aviso

El estado 3 se dice que es un estado absorbente ya que en este punto el procedimiento para y se debe buscar la causa de la señal de fuera de control.

La matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado inicial} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Estado final} \\ \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Nota:  $p_{11} = 0 = p_{22}$ )

Como el último estado es absorbente, la matriz  $P$  se puede particionar de la forma,

$$P = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & Q_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{bmatrix}$$

Las filas de  $P$  suman 1, así que:  $Q = (I - R)\mathbf{1}$

Pues

$$(I - R)\mathbf{1} = \mathbf{1} - R\mathbf{1}$$

entonces

$$P = \begin{bmatrix} R & (I - R)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de probabilidades de transición en  $i$ -etapas contiene las probabilidades de que se pase de un estado a otro en  $i$ -pasos y está dada por:

$$P^i = \begin{bmatrix} R^i & (I - R^i)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{bmatrix}$$

Esto significa, que por ejemplo el primer elemento de  $(I - R^i)\mathbf{1}$  es la probabilidad de una RL de longitud  $i$  empezando en el estado 0.

**2.1 Proposición.**  $ARL(t) = p'(I - R)^{-1}\mathbf{1}$ , donde  $p$  es el vector que representa las probabilidades de que el proceso empiece en el estado  $j$  y  $t$  es el número de estados.

*Demostración.* Sea  $\mu_i = ARL_i$ , la longitud promedio de corrida empezando en el estado  $i$ .

$$\begin{aligned} ARL_i = \mu_i &= \sum_{r=1}^{\infty} r P[RL_i = r] \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} r \left( \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} P[RL_i = r - 1] \right) \end{aligned}$$

$p_{ij}$  es la probabilidad de transición de ir del estado  $i$  al estado  $j$  en un paso. Se ha expresado la longitud de la corrida de  $r$ , como un paso seguido por una longitud de corrida  $RL$  de  $r - 1$ .

Así,

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} \left( \sum_{r=1}^{\infty} r P[RL_i = r - 1] \right) \\
&= \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} \left( \sum_{r=1}^{\infty} (r - 1) P[RL_i = r - 1] + \sum_{r=1}^{\infty} P[RL_i = r - 1] \right) \\
&= \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} (\mu_i) + \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} \sum_{r=1}^{\infty} P[RL_i = r - 1] \\
&= \mu_i \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} P[RL_i = r - 1] \right) \\
&= \mu_i \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} P[RL_i = r] \\
&= \mu_i \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij} + 1.
\end{aligned}$$

Luego

$$[1 - \sum_{j=0}^{t-1} p_{ij}] \mu_i = 1$$

que en términos matriciales se puede escribir de la forma,

$$[I - R]\mu = \mathbf{1}$$

luego

$$\mu = [I - R]^{-1} \mathbf{1}.$$

Si  $\mathbf{p}$  es el vector que representa las probabilidades de que el proceso inicie en el estado  $j$ , el *ARL* basado en  $t$  estados bajo control está dado por:

$$ARL(t) = \mathbf{p}'(I - R)^{-1} \mathbf{1}.$$

□

## 2.4. Carta $R$

La carta  $R$  ha sido propuesta para monitorear la variabilidad de un proceso. Una carta  $R$  muestra variaciones en los rangos de las muestras. La línea central es el promedio de los rangos muestrales  $\bar{R}$ , calculado a partir de los  $m$  subgrupos seleccionados en la Fase I. Los límites de control son usualmente límites  $3\hat{\sigma}_R$  donde  $\hat{\sigma}_R = d_3\hat{\sigma} = d_3\frac{\bar{R}}{d_2}$  se calcula a partir del conjunto histórico de datos. De (2.4) se tiene que:

$$LCS = \left(1 + \frac{3\sqrt{\text{Var}(R | N(0, 1))}}{E(R | N(0, 1))}\right) \bar{R} = D_4 \bar{R}$$

$$LCI = \left(1 - \frac{3\sqrt{\text{Var}(R | N(0, 1))}}{E(R | N(0, 1))}\right) \bar{R} = D_3 \bar{R}.$$

Las constantes  $D_3$  y  $D_4$  aparecen tabuladas en varios libros, ver por ejemplo Montgomery (2001). Estos límites son utilizados durante la Fase I, para establecer si la variabilidad del proceso esta bajo control. Los  $m$  rangos muestrales correspondientes a los  $m$  subgrupos son graficados en esta carta y se procede a depurar la información. Una vez la variabilidad del proceso se considere que esta bajo control, se procede a monitorear el proceso en línea, es decir se pasa a la Fase II.

## 2.5. Cartas $\bar{X}$ y $R$

En la practica es común utilizar el conjunto histórico de datos para construir simultáneamente cartas  $\bar{X}$  y  $R$ . Los módulos de control de calidad en la mayoría de los paquetes estadísticos permiten esta construcción simultánea, de tal forma que el usuario pueda monitorear variabilidad y media al mismo tiempo. Sin embargo es conveniente empezar con la construcción de un gráfico  $R$ , pues los límites de un gráfico  $\bar{X}$  dependen de un estimativo de la desviación estándar del proceso, el cual se obtiene a partir de un gráfico  $R$ .

Si la carta  $R$  muestra que la variabilidad del proceso está fuera de control, lo mejor es controlar la variabilidad antes de construir la carta  $\bar{X}$ .

**Ejemplo:** Chen, Cheng & Xie (2001) presentan un conjunto de medidas, correspondientes a los diámetros interiores de los cilindros de cierto motor.



El conjunto de datos está constituido por 35 muestras de tamaño  $n = 5$  recolectadas cada media hora. Estos datos aparecen en la tabla 2.1. Las medidas reales de los diámetros son de la forma 3,5205, 3,5202, 3,5204, etc., pero en las entradas de la tabla 2.1 aparecen los tres últimos dígitos de las medidas, es decir 205, 202 y 204. Interesa establecer un control estadístico de este proceso mediante cartas  $\bar{X}$  y  $R$ .

El primer paso consiste en realizar un análisis retrospectivo del proceso a partir de las 35 muestras. Para cada muestra se calcula la media y el rango muestrales. Luego se promedian estos valores, para obtener

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} \bar{X}_i = 200,25$$

y

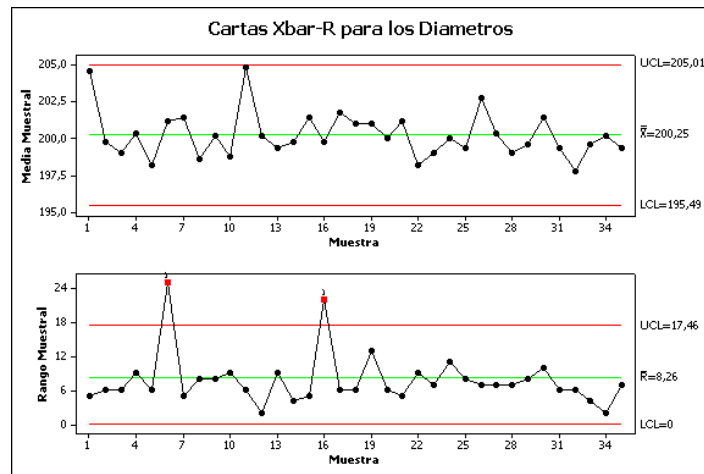
$$\bar{R} = \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} R_i = 8,26.$$

Estos valores corresponden a las líneas centrales de las cartas  $\bar{X}$  y  $R$  respectivamente. Los límites de control se construyen siguiendo el procedimiento descrito en las dos secciones anteriores. La gráfica 2.3 presenta las dos cartas de control. La carta  $\bar{X}$  muestra la estabilidad en la media del proceso. Sin embargo en la carta  $R$  los puntos 6 y 16 exceden el límite de control superior. Una investigación de esta situación mostró que estos dos puntos correspondían a tiempos en que el operador regular se ausentaba y dejaba un reemplazo, con menos experiencia, a cargo de la producción. Se eliminan entonces estos dos puntos y se recalculan de nuevo los límites de control para las dos cartas.

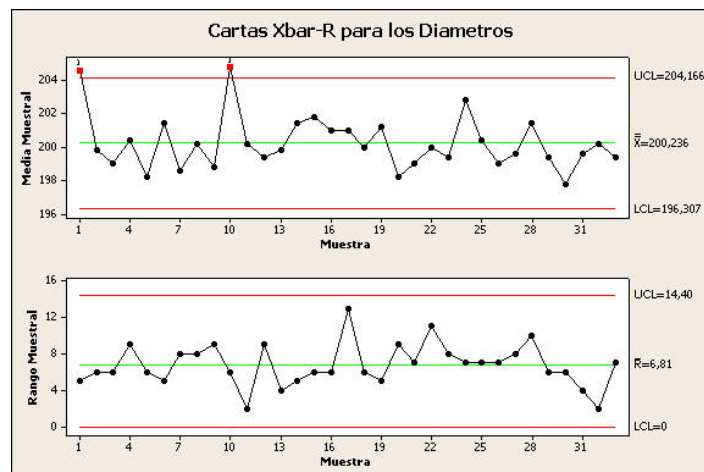
La gráfica 2.4 presenta las cartas  $\bar{X}$  y  $R$  luego de eliminar los puntos 6 y 16. Se observa que la variabilidad ha sido controlada, así que se pasa ahora a controlar la media del proceso. La carta  $\bar{X}$  muestra dos puntos fuera de los límites de control, correspondientes a la muestra 1 y 10. El punto 10 en esta carta corresponde a la muestra 11 en el conjunto original de datos. El análisis de estos puntos produjo los siguientes resultados: La muestra 1 ocurre a las 8:00 a.m. y corresponde al arranque de la producción en la mañana, cuando las máquinas están frías. La muestra 10 (11 en el conjunto original) ocurre a la 1:00 p.m. y corresponde al arranque de la línea de producción inmediatamente después del descanso para el almuerzo, y cuando las máquinas han sido apagadas por cambio de herramienta. En razón a que se encontraron causas asignables, estos puntos se eliminan y las

Muestra $i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	205	202	204	207	205
2	202	196	201	198	202
3	201	202	199	197	196
4	205	203	196	201	197
5	199	196	201	200	195
6	203	198	192	217	196
7	202	202	198	203	202
8	197	196	196	200	204
9	199	200	204	196	202
10	202	196	204	195	197
11	205	204	202	208	205
12	200	201	199	200	201
13	205	196	201	197	198
14	202	199	200	198	200
15	200	200	201	205	201
16	201	187	209	202	200
17	202	202	204	198	203
18	201	198	204	201	201
19	207	206	194	197	201
20	200	204	198	199	199
21	203	200	204	199	200
22	196	203	197	201	194
23	197	199	203	200	196
24	201	197	196	199	207
25	204	196	201	199	197
26	206	206	199	200	203
27	204	203	199	199	197
28	199	201	201	194	200
29	201	196	197	204	200
30	203	206	201	196	201
31	203	197	199	197	201
32	197	194	199	200	199
33	200	201	200	197	200
34	199	199	201	201	201
35	200	204	197	197	199

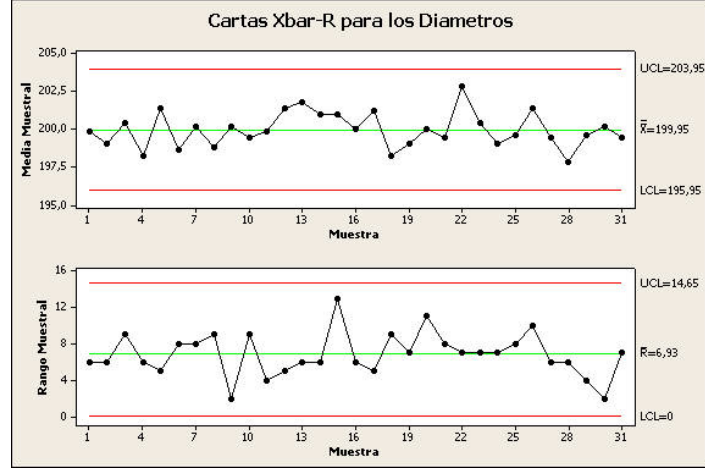
Tabla 2.1. Diámetros interiores de cilindros. Últimos 3 dígitos.

Gráfica 2.3. Cartas  $\bar{X}$  y  $R$  para las 35 muestras

cartas vuelven a ser construidas. Estas últimas cartas aparecen en la gráfica 2.5.

Gráfica 2.4. Cartas  $\bar{X}$  y  $R$  después de eliminar las muestras 6 y 16

Se observa en la gráfica 2.5 que ambas cartas exhiben control estadístico. Se puede por tanto concluir que el proceso está bajo control respecto de su variabilidad y valor medio, finalizando el análisis de la Fase I. Se retienen entonces estos últimos límites de control para utilizarlos en el control del proceso en línea.

Gráfica 2.5. Cartas  $\bar{X}$  y  $R$  resultantes al finalizar la fase I

## 2.6. Carta $S$

Son similares a las cartas  $R$ , excepto que en este caso se calculan y grafican las desviaciones estándar para cada grupo. La línea central será la media de las desviaciones estándar  $\bar{S}$  de los  $m$  subgrupos.

Si  $X$  se distribuye normalmente,

$$\sigma_S = \sigma \sqrt{1 - C_4^2}$$

donde,

$$C_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}}.$$

Como  $E(S) = C_4\sigma$ ,  $\frac{\bar{S}}{C_4}$  es un estimador insesgado de  $\sigma$ .

Por tanto, los límites de control estarán dados por:

$$LCS = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} = \left(1 + \frac{3}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2}\right) \bar{S} = B_4 \bar{S}$$

$$LCI = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} = \left(1 - \frac{3}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2}\right) \bar{S} = B_3 \bar{S}.$$

En muestras pequeñas, el rango y la desviación estándar tienen un comportamiento similar. En muestras grandes sin embargo, la ocurrencia de un

valor extremo produce un rango grande, pero tiene un efecto menor sobre la desviación estándar.

Como la distribución de  $S$  no es simétrica, se puede construir una carta  $S$  con límites de probabilidad en lugar de los límites tres sigma. Asumiendo que  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$ , a partir de

$$P[\chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2] = 1 - \alpha$$

se pueden construir dichos límites de la siguiente forma:

$$P \left[ \sigma \sqrt{\frac{\chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}{n-1}} < S < \sigma \sqrt{\frac{\chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}{n-1}} \right] = 1 - \alpha$$

y los límites se definen por,

$$LCI = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}{n-1}} \text{ y } LCS = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}{n-1}}.$$

Usando

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_4}$$

la carta  $S$  con límites de probabilidad queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} LCS &= \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{\frac{\chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}{n-1}} \\ LC &= \bar{S} \\ LCI &= \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{\frac{\chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}{n-1}}. \end{aligned}$$

La carta  $S$  tambien puede usarse con reglas suplementarias si hay interés en sensibilizar la carta a cambios pequeños en la variabilidad del proceso, ver por ejemplo Antzoulakos & Rakitzis (2010).

## 2.7. Carta $S^2$

En lugar de usar la carta  $R$  o la carta  $S$  para monitorear la variabilidad de una característica de calidad, se puede usar la varianza muestral de cada

subgrupo y graficarla en una carta  $S^2$ . Asumiendo, que la característica de calidad  $X$  sigue una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , se tiene que  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  sigue una distribución chi-cuadrado con  $n-1$  grados de libertad.

A partir de la proposición de probabilidad,

$$P[\chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2] = 1 - \alpha$$

donde  $\chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2$  y  $\chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2$  denotan los percentiles  $\frac{\alpha}{2}$  y  $1 - \frac{\alpha}{2}$  respectivamente de una distribución chi-cuadrado con  $n-1$  grados de libertad, se encuentra que la carta  $S^2$  queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} LCS &= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2 \\ LC &= \overline{S^2} \\ LCI &= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2. \end{aligned}$$

## 2.8. Estimación del Tiempo de Cambio de un Parámetro

Cuando una carta de control indica que hay presente una causa especial, ésta no indica cuál es la causa ni en que tiempo ocurrió el cambio. El conocimiento del punto donde cambia el parámetro que se está monitoreando, será de gran utilidad en la búsqueda de la causa que produjo el cambio. Samuel, Pignatiello & Calvin (1998a) y Samuel, Pignatiello & Calvin (1998b) presentan un método que permite estimar dicho punto, cuando se está usando una carta  $\overline{X}$  y cuando hay un cambio en la variabilidad del proceso. Se presenta a continuación esta metodología.

### 2.8.1. Cambio en la Media

Considere que se esta usando una carta Shewhart  $\overline{X}$  para monitorear la media de un proceso. Se asume que el proceso inicia en un estado de control y que se toman subgrupos de tamaño  $n$  cada cierto tiempo. Las observaciones provienen de una distribución normal con media  $\mu_0$  y varianza  $\sigma_0^2$ . Luego de cierto tiempo  $\tau$ , desconocido, la media del proceso cambia de  $\mu_0$  a  $\mu_1 =$

$\mu_0 + \delta\sigma_0$  para cierto  $\delta$ . Se asume que una vez este cambio ocurre, el proceso permanece en el nuevo nivel  $\mu_1$  hasta que la causa que la originó haya sido identificada y eliminada. Se asumirá además que la carta muestra señal de alarma en el subgrupo  $T$  y que esta no es una falsa alarma. Samuel et al. (1998a) estiman el valor  $\tau$  usando el método de máxima verosimilitud de la siguiente forma:

Si  $\tau$  es el último subgrupo bajo control, entonces  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_\tau$  son los promedios de los subgrupos provenientes del proceso bajo control, mientras que  $\bar{X}_{\tau+1}, \bar{X}_{\tau+2}, \dots, \bar{X}_T$  son los promedios calculados del proceso con media  $\mu_1$ .

La función de verosimilitud está dada por:

$$L = L(\tau, \mu_1 | \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_T)$$

$$L = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left( \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)} \right]^\tau \exp \left[ -\frac{n}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{\tau} (\bar{X}_i - \mu_0)^2 \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left( \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)} \right]^{T-\tau} \exp \left[ -\frac{n}{2\sigma_0^2} \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \mu_1)^2 \right].$$

La función log-verosímil, sin tener en cuenta algunas constantes, es:

$$\ln L = -\frac{n}{2\sigma_0^2} \left[ \sum_{i=1}^{\tau} (\bar{X}_i - \mu_0)^2 + \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \mu_1)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Los términos que aparecen en (2.5) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{\tau} (\bar{X}_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^T (\bar{X}_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \mu_0)^2 \quad (2.6)$$

y,

$$\sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \mu_1)^2 = \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau})^2 + (T - \tau)(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_1)^2 \quad (2.7)$$

donde

$$\bar{\bar{X}}_{T,\tau} = \sum_{i=\tau+1}^T \frac{\bar{X}_i}{T - \tau}.$$

El segundo término de la derecha de (2.6) es

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \mu_0)^2 &= \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau} + \bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_0)^2 \\
&= \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau})^2 + 2(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_0) \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau}) \\
&\quad + (T - \tau)(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_0)^2 \\
&= \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau})^2 + (T - \tau)(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_0)^2. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Si  $\tau$  fuera conocido, el estimador máximo verosímil de  $\mu_1$  sería,

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}_{T,\tau}.$$

Usando este estimador y las ecuaciones (2.5)-(2.8), se tiene que

$$\begin{aligned}
\ln L &= -\frac{n}{2\sigma_0^2} \left[ \sum_{i=1}^T (\bar{X}_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau})^2 - (T - \tau)(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{T,\tau})^2 + (T - \tau)(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \bar{\bar{X}}_{T,\tau})^2 \right] \\
&= -\frac{n}{2\sigma_0^2} \left[ \sum_{i=1}^T (\bar{X}_i - \mu_0)^2 - (T - \tau)(\bar{\bar{X}}_{T,\tau} - \mu_0)^2 \right].
\end{aligned}$$

El estimador máximo verosímil de  $\tau$ , denotado por  $\hat{\tau}_{MLE}$ , es el valor de  $\tau$  que maximiza la función log-verosímil. Es decir,

$$\hat{\tau}_{MLE} = \arg \max_{0 \leq t < T} \left\{ (T - t)(\bar{\bar{X}}_{T,t} - \mu_0)^2 \right\}$$

donde

$$\bar{\bar{X}}_{T,t} = \frac{1}{T - t} \sum_{i=t+1}^T \bar{X}_i$$

es el estimador de la media del proceso  $\mu_1$ , calculada con base en los últimos  $T - t$  subgrupos.



### 2.8.2. Cambio en la Variabilidad del Proceso

La metodología propuesta por Samuel et al. (1998b) para identificar el punto donde cambia la variabilidad del proceso, puede aplicarse según los autores, tanto para la carta  $S$  como para la carta  $R$ . Los autores la explican solo para la carta  $S$ , y se observa que no puede aplicarse directamente con la carta  $R$ . El método propuesto es similar al utilizado en la sección anterior para el caso de la media. Se asume que el proceso está inicialmente bajo control y que las observaciones provienen de una distribución normal con media  $\mu_0$  y varianza conocida  $\sigma_0^2$ . Después de cierto tiempo  $\tau$ , desconocido, la varianza del proceso cambia de  $\sigma_0^2$  a  $\sigma_1^2 = \delta\sigma_0^2$  para cierto  $\delta$ . Se asume que una vez este cambio ocurre, la varianza del proceso se mantiene en ese nivel hasta que la o las causas que lo originaron sean identificadas y eliminadas.

Si  $\tau$  es el último subgrupo bajo control, entonces  $S_1, S_2, \dots, S_\tau$  son las desviaciones estándar de los subgrupos bajo control, mientras que  $S_{\tau+1}, S_{\tau+2}, \dots, S_T$  son las desviaciones estándar calculadas del proceso con varianza  $\sigma_1^2$ . Samuel et al. (1998b) deducen que el estimador máximo verosímil de  $\tau$  es,

$$\hat{\tau}_{MLE} = \arg \max_{0 < t < T} \left\{ \frac{\sum_{i=t+1}^T \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{n(T-t)}{2} \log \left[ \frac{\sum_{i=t+1}^T \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_0)^2}{n(T-t)\sigma_0^2} \right] - \frac{n(T-t)}{2} \right\}. \quad (2.9)$$

## 2.9. Cartas Shewhart para Observaciones Individuales

Si en un proceso los datos no se pueden agrupar de una manera natural, es decir, no se pueden formar sub-grupos de tamaño  $n > 1$ , debe construirse una carta de control para el caso  $n = 1$ , es decir una observación en cada tiempo. Esta situación se presenta con mucha frecuencia. Por ejemplo, hay situaciones en que la inspección y medición de una unidad es muy costosa o demanda mucho tiempo. En tales casos la selección de más de una unidad

puede no ser posible. También se utiliza en control de procesos continuos, como en la fabricación de un producto químico, fluidos etc.

Aunque se puede construir una carta Shewhart  $\bar{X}$  para grupos de tamaño  $n = 1$  siguiendo las mismas reglas, los límites serán muy anchos,  $(\bar{X} \pm 3S)$  y la carta tendría una potencia baja. Para la variabilidad del proceso no se puede construir directamente una carta  $R$  o una carta  $S$ . Cuando se monitorea la media de un proceso mediante observaciones individuales, es usual hablar de la carta  $X$  en lugar de la carta  $\bar{X}$ .

Algunos autores construyen la carta  $X$  de la forma  $X \pm 3S$  donde  $S$  es el estimador de  $\sigma$  obtenido a partir del conjunto de datos históricos. Sin embargo, como se dijo arriba este estimador puede resultar inflado obteniéndose límites muy anchos.

Una solución a este problema consiste en estimar  $\sigma$  usando rangos móviles, solución que permite además construir una carta de rangos móviles para controlar la variabilidad del proceso.

El método consiste en considerar la diferencia de dos observaciones sucesivas como rangos de dos.

Por ejemplo:

$X_i$	Rango Móvil de 2
	—
30	5
25	3
28	3
31	2
29	4
25	.
.	.
.	.
.	.

Sea  $\overline{MR}$  el promedio de los rangos móviles. Entonces la carta  $MR$  queda definida así:

$$LCS = D_4 \overline{MR}$$

$$LC = \overline{MR}$$

$$LCI = D_3 \overline{MR}.$$

Para la carta  $X$  los límites se construyen así:

$$\overline{X} \pm 3\hat{\sigma} = \overline{X} \pm \frac{3\overline{X}}{E(R \mid N(0, 1))} = \overline{X} \pm \frac{3\overline{MR}}{d_2}$$

donde  $\overline{X}$  es el promedio de las observaciones tomadas en la fase I y  $d_2$  es una constante que depende de  $n$ . Por ejemplo, si  $n = 2$ , entonces  $d_2 = 1,128$ .

Luego la carta  $X$  queda definida de la siguiente manera:

$$LCS = \overline{X} + \frac{3\overline{MR}}{d_2}$$

$$LC = \overline{X}$$

$$LCI = \overline{X} - \frac{3\overline{MR}}{d_2}.$$

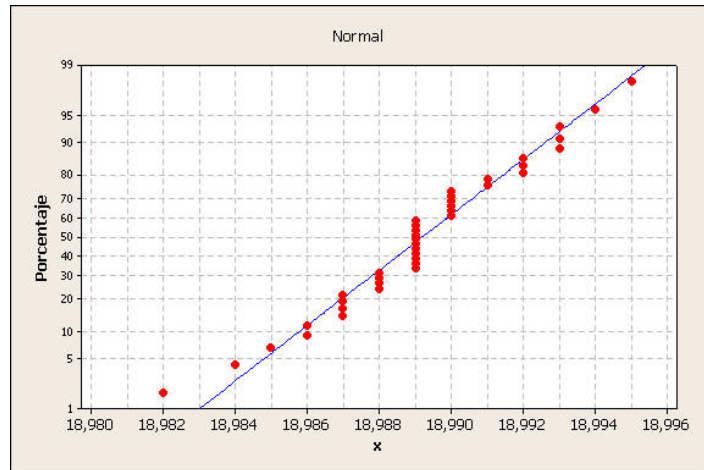
Para la construcción de ambas cartas, carta  $X$  y carta  $MR$ , se hacen los mismos supuestos que para las cartas construidas con base en datos agrupados, es decir que las observaciones son independientes y siguen una distribución normal. El supuesto de normalidad es sin embargo de mayor cuidado para datos individuales que para datos agrupados. En la carta  $\overline{X}$  el teorema del límite central garantiza la normalidad de la media muestral a pesar de que la distribución original se aparte un poco de la normal. Para datos individuales, la situación es diferente pues se está colocando en la gráfica directamente la observación. Este hecho hace que se deba tener especial cuidado cuando se está trabajando con datos individuales. Es importante desarrollar al comienzo algún tipo de prueba estadística, que permita garantizar algún grado razonable de normalidad. Si los datos se apartan mucho de esta distribución no es correcto aplicar directamente las expresiones dadas arriba para construir los límites de control de la carta  $X$  y la carta  $MR$ . Una alternativa

es usar alguna transformación que logre normalizar la distribución original. Lagos & Vargas (2003) presentan una metodología en esta dirección usando la familia de distribuciones de Johnson.

**Ejemplo:** En un proceso industrial de trituración, explicado en Gijo (2005), se toma una muestra de 40 componentes y se miden sus diámetros en *mm*. Los datos aparecen en la tabla 2.2. Se quiere aplicar una carta de control para observaciones individuales a este proceso. La gráfica 2.6 muestra un gráfico de probabilidad normal para estas medidas e indica que la aproximación por la distribución normal es adecuada y que por lo tanto se puede aplicar la carta  $\bar{X}$  a estos datos. El promedio de los rangos móviles para estos datos es  $\overline{MR} = 0,002538$  y la media muestral  $\bar{X} = 18,9893$ . Los límites de control de la carta  $\bar{X}$  se calculan de la forma,

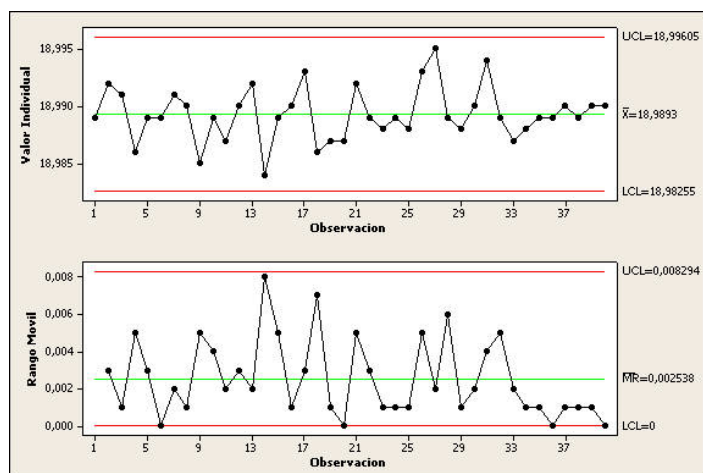
$$18,9893 \pm \frac{3(0,002538)}{1,128}.$$

La gráfica 2.7 muestra las cartas  $\bar{X}$  y  $MR$ , observándose un proceso bajo control.



Gráfica 2.6. Gráfico de probabilidad normal de los diámetros

Comp. No.	$x$	Comp. No.	$x$
1	18,989	21	18,992
2	18,992	22	18,989
3	18,991	23	18,988
4	18,986	24	18,989
5	18,989	25	18,988
6	18,989	26	18,993
7	18,991	27	18,995
8	18,990	28	18,989
9	18,985	29	18,988
10	18,989	30	18,990
11	18,987	31	18,994
12	18,990	32	18,989
13	18,992	33	18,987
14	18,984	34	18,988
15	18,989	35	18,989
16	18,990	36	18,989
17	18,993	37	18,990
18	18,986	38	18,989
19	18,987	39	18,990
20	18,987	40	18,990

Tabla 2.2. Diámetro en  $mm.$  de 40 componentesGráfica 2.7. Cartas  $\bar{X}$  y  $R$  resultantes al finalizar la fase I



## Capítulo 3

# Capacidad de un Proceso

Un análisis de capacidad evalúa la habilidad que tiene un proceso para producir artículos que se ajusten a especificaciones preestablecidas, y que por tanto satisfagan los requerimientos de los consumidores. Cuando se hace un estudio de capacidad, el productor debe responderse la siguiente pregunta: ¿Le podemos ofrecer al consumidor lo que él pide?. Para dar respuesta a esta pregunta, el productor básicamente compara la variabilidad del proceso con los requerimientos del consumidor.

Una herramienta que ha sido muy usada en la industria para medir la capacidad de un proceso, la constituyen los Índices de Capacidad del Proceso (ICP). Estos índices expresan de una forma numérica la “capacidad” que tiene el proceso de satisfacer las especificaciones establecidas por el fabricante. Un extenso desarrollo ha tenido el estudio de los índices de capacidad durante los últimos años. Kotz & Johnson (2002) en una revisión del tema citan 170 referencias aparecidas entre 1993 y el 2000, mientras que Yum & Kim (2011) presentan aproximadamente 530 referencias bibliográficas para el período 2000-2009. de Felipe & Benedito (2017) presentan una revisión de índices de capacidad univariados y multivariados. A continuación describiremos los índices mas utilizados en los procesos industriales.

### 3.1. Índices de Capacidad para Distribuciones Normales

Basados en el criterio de que la curva normal tiene una amplitud de aproximadamente 6 desviaciones estándar, se define el índice  $C_p$  así :

$$C_p = \frac{LES - LEI}{6\sigma},$$

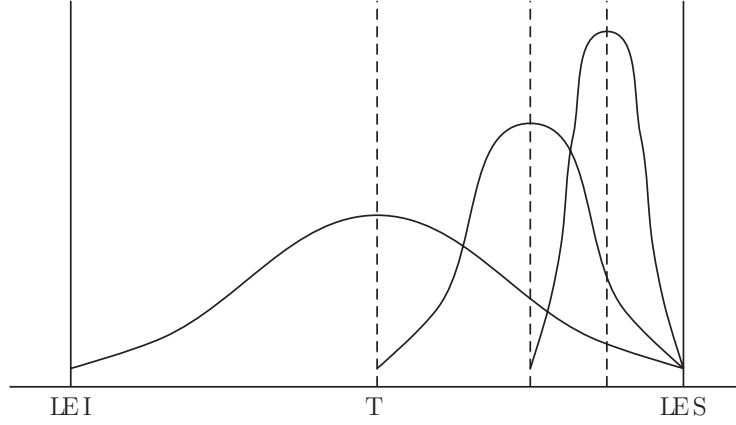
donde  $LES$  y  $LEI$  denotan los límites de especificación superior e inferior y  $\sigma$  es la desviación estándar del proceso. Los límites de especificación son “límites que definen los requerimientos de aceptabilidad para una unidad individual de una operación de manufactura o servicio” (ANSI/ASQC). Entre mayor sea el valor del índice, mayor es la capacidad que tiene el proceso para alcanzar los requerimientos, pues lo que mide este índice es la habilidad que tiene el proceso de acomodar  $6\sigma$  dentro de los límites de especificación. Si el valor de  $\sigma$  no se conoce, debe estimarse y usar el estimador en el denominador de  $C_p$ . Se considera que un valor mayor o igual a 1 es señal de una buena capacidad. La pregunta natural que surge es ¿qué valor cercano a 1 puede ser considerado satisfactorio? Montgomery (2001) da algunas recomendaciones en este sentido. Mientras que para muchos ingenieros un valor de 1.0 es suficientemente bueno, en el programa Seis-Sigma de Motorola se espera un valor cercano a 2.0 para el índice de capacidad del proceso. La Gráfica 3.1 muestra tres esquemas correspondientes a diferentes valores de  $C_p$ .

En varias ocasiones es posible tener límites de especificación de solo un lado. Por ejemplo el porcentaje de impurezas en un proceso químico. En tal caso no es correcto usar cero o algún otro límite artificial. Simplemente se puede definir el índice por

$$C_{ps} = \frac{LES - \mu}{3\sigma}$$

para un límite de especificación superior. De manera similar se obtiene un índice para un  $LEI$ . A medida que la media del proceso se acerca al límite superior (ó inferior), la varianza del proceso necesita disminuirse para mantener la capacidad del proceso deseado. Sin embargo, tal como lo anotan Kim, Cho & Phillips (2000), la reducción de la varianza de un proceso puede causar un incremento en los costos de manufactura pues usualmen-





Gráfica 3.1. Comparación de  $C_p$  para tres esquemas diferentes

te requiere procedimientos operacionales más precisos, mejoramiento de los instrumentos y/o mejor entrenamiento de los técnicos.

$C_p$  es útil cuando el promedio del proceso está en el valor objetivo  $T$ , el cual se asume o se espera usualmente que sea el punto medio de los límites de especificación. Como protección ante un posible desplazamiento del promedio respecto del valor objetivo, se definen las siguientes dos cantidades:

$$C_{ps} = \frac{LES - \mu}{3\sigma}, \quad y \quad C_{pi} = \frac{\mu - LEI}{3\sigma},$$

donde  $\mu$  es la media del proceso. Con base en estos dos valores se define el siguiente índice:

$$C_{pk} = \min\{C_{ps}, C_{pi}\}.$$

Denotando por  $d = (LES - LEI)/2$  y  $M = (LES + LEI)/2$ , se puede probar que :

$$C_{pk} = C_p \left\{ 1 - \frac{|\mu - M|}{d} \right\}.$$

Otro índice de capacidad, el cual involucra en la variabilidad del proceso el desvío de la media respecto del valor objetivo, es el siguiente:

$$C_{pm} = \frac{LES - LEI}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

Dividiendo numerador y denominador por  $\sigma$  se obtiene la siguiente expresión para  $C_{pm}$ ,

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left[\frac{\mu - T}{\sigma}\right]^2}}$$

El índice  $C_{pm}$  también se conoce como el índice de Taguchi. Es superior a  $C_p$  en razón a que tiene en cuenta la diferencia entre la media y el valor objetivo. Sin embargo, puede que no proporcione buenos resultados cuando las tolerancias no son simétricas respecto al valor objetivo, es decir cuando  $T \neq M$ .

Pearn, Kotz & Johnson (1992) introducen un índice, que combina las mejores propiedades de los tres índices anteriores  $C_p$ ,  $C_{pk}$  y  $C_{pm}$ . Este índice, denotado por  $C_{pmk}$  está definido de la siguiente forma:

$$C_{pmk} = \frac{\min(LES - \mu, \mu - LEI)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

Si  $\mu = M$  entonces  $C_{pm} = C_{pmk}$  sin importar el valor de  $|\mu - T|$ . Pero si la media no es equidistante de los límites de especificación entonces  $C_{pmk} < C_{pm}$ .

Se satisfacen las siguientes relaciones:

$$C_{pmk} \leq C_{pk} \leq C_p$$

y

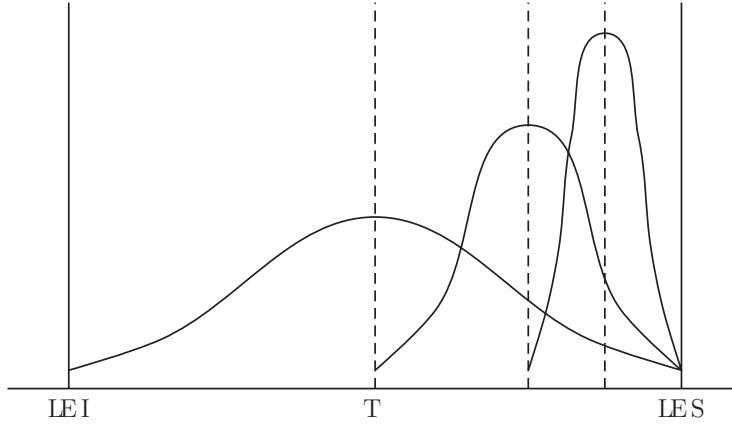
$$C_{pmk} \leq C_{pm} \leq C_p$$

La relación entre  $C_{pk}$  y  $C_{pm}$  no es totalmente clara.

**Ejemplo:** A continuación se utilizará un conjunto artificial de datos para hacer una comparación de los índices vistos hasta aquí. Considere tres procesos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  cuyos parámetros aparecen en la segunda y tercera columnas de la Tabla 3.1.

Asuma que  $LES = 62mm$ .  $LEI = 38mm$ . y  $T = 50mm$ . En la Gráfica 3.2 se presentan estos procesos.

Proceso	$\mu$	$\sigma$	$C_p$	$C_{pk}$	$C_{pm}$	$C_{pmk}$
A	50	4	1	1	1	1
B	56	2	2	1	0.632	0.316
C	59	1	4	1	0.442	0.11

Tabla 3.1. Indices de capacidad para tres procesos diferentes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .Gráfica 3.2. Procesos  $A$ ,  $B$  y  $C$ 

Los valores de cada índice para el proceso  $B$  se calculan de la siguiente manera:

$$C_p = \frac{62 - 38}{6(2)} = \frac{24}{12} = 2$$

$$C_{ps} = \frac{62 - 56}{3(2)} = \frac{6}{6} = 1 \quad C_{pi} = \frac{56 - 38}{3(2)} = \frac{18}{6} = 3$$

entonces,

$$C_{pk} = \min\{1, 3\} = 1$$

$$C_{pm} = \frac{62 - 38}{6\sqrt{4 + (56 - 50)^2}} = \frac{24}{6\sqrt{4 + 36}} = \frac{24}{37,947} = 0,632$$

y,

$$C_{pmk} = \frac{\min\{6, 18\}}{3\sqrt{4 + 36}} = \frac{6}{18,974} = 0,316$$

En el proceso  $A$ , la media del proceso está centrada entre los límites de especificación. Los 4 índices coinciden. Para los procesos  $B$  y  $C$  cuyas medidas se desvían del objetivo en diferentes cantidades, los valores de  $C_{pk}$  son el mismo. Esto es debido a que  $C_{pk}$  está influenciado tanto por la media como la desviación estándar del proceso. Como se puede observar el índice  $C_{pmk}$  es el que mejor identifica el desvío que se produce en el proceso  $C$  respecto del valor objetivo.

Vannman (1995) define una familia de índices de capacidad que constituye una generalización de los índices anteriores. Esta clase de índices depende de dos parámetros no negativos,  $u$  y  $v$ , y se define de la siguiente forma :

$$C_p(u, v) = \frac{d - u |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}.$$

Se puede ver que  $C_p(0, 0) = C_p$ ,  $C_p(1, 0) = C_{pk}$ ,  $C_p(0, 1) = C_{pm}$  y  $C_p(1, 1) = C_{pmk}$ .

Todos los índices presentados aquí coinciden si  $\mu = T = M$ , pero difieren cuando  $\mu \neq T$  para  $\sigma$  fija. Mientras que  $C_p$  no tiene en cuenta desvíos de  $\mu$  respecto de  $T$ ,  $C_{pmk}$  es el índice que cambia más rápidamente cuando  $\mu$  se aleja de  $T$ .

### 3.2. Estimación de los Índices de Capacidad

En los cálculos de los índices de capacidad es usual que los parámetros involucrados sean desconocidos y por tanto deban ser estimados. Por ejemplo, si el valor de  $\sigma$  es desconocido en  $C_p$ , se puede reemplazar por la desviación estándar muestral  $S$ , o inclusive por  $\frac{\bar{R}}{d_2}$ , si este último valor ya ha sido calculado. Así que un estimador de  $C_p$  se obtiene de la siguiente manera:

$$\hat{C}_p = \frac{LES - LEI}{6\hat{\sigma}}.$$

Usando el hecho que  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$  se puede construir un intervalo de confianza para  $C_p$  como sigue,

$$P \left[ \chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2 \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right] = 1 - \alpha$$

de donde,

$$P \left[ \frac{LES - LEI}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \leq \frac{LES - LEI}{6\sigma} \leq \frac{LES - LEI}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right] = 1 - \alpha$$

así que

$$\left\{ \widehat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}}, \widehat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right\}$$

constituye un intervalo  $(1 - \alpha)100\%$  de confianza para  $C_p$ .

**Ejemplo:** Suponga que para un proceso estable, los límites de especificación son 10 y 20 respectivamente. Una muestra de 20 unidades de este proceso revela que la media del proceso está centrada aproximadamente en el punto medio del intervalo de especificaciones con una desviación estándar muestral de 1,2.

Construya un intervalo del 95 % de confianza para  $C_p$ .

**Solución:**

$$\widehat{C}_p = \frac{20 - 10}{6(1,2)} = 1,39$$

Los percentiles de la distribución chi-cuadrado con 19 grados de libertad son  $\chi_{19,0,025}^2 = 8,91$  y  $\chi_{19,0,975}^2 = 32,85$ . Así que  $\{0,952, 1,83\}$  es un intervalo del 95 % de confianza para  $C_p$ .

Para el índice  $C_{pk}$ , usando la relación

$$C_{pk} = C_p \left\{ 1 - \frac{|\mu - M|}{d} \right\}$$

se puede obtener el siguiente estimador,

$$\widehat{C}_{pk} = \widehat{C}_p \left\{ 1 - \frac{|\bar{X} - M|}{d} \right\}$$

donde  $\bar{X}$  es la media muestral.

Bissell (1990) propone el siguiente intervalo de confianza para  $C_{pk}$ ,

$$\left\{ \widehat{C}_{pk} \left[ 1 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{9n\widehat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right], \widehat{C}_{pk} \left[ 1 + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{9n\widehat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right] \right\}.$$

Para el índice  $C_{pm}$ , Chan, Cheng & Spiring (1988) propusieron el siguiente estimador,

$$\widehat{C_{pm}} = \frac{LES - LEI}{6\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - T)^2}{n-1}}}.$$

Observando que  $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}|a - b|$ , el índice  $C_{pmk}$  se puede reescribir de la forma,

$$C_{pmk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

sugiriéndose el siguiente estimador:

$$\widehat{C_{pmk}} = \frac{d - |\bar{X} - T|}{3\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + (\bar{X} - T)^2}}.$$

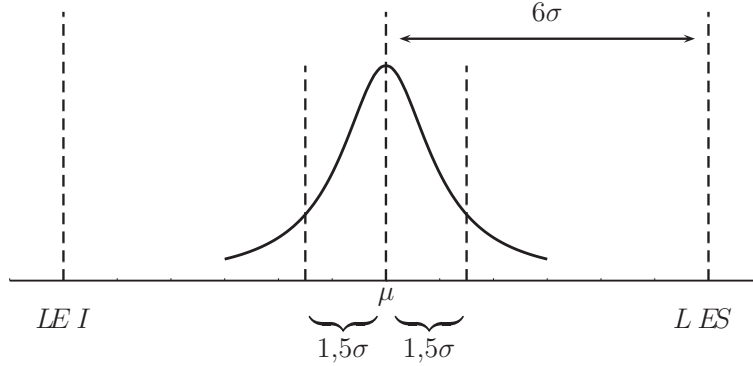
Intervalos de confianza para  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$  no son de fácil construcción. Las distribuciones del  $\widehat{C_{pm}}$  y  $\widehat{C_{pmk}}$  aparecen en Wright (1998) y Wright (2000). Una manera de construir intervalos de confianza para estos índices consiste en usar métodos bootstrap, ver por ejemplo Nam, Kim & Park (2002).

En la industria el índice  $C_p$  se asocia con la proporción de los productos no conformes que resulta del proceso, cuando se cumplen ciertos supuestos. Denotando por  $X$  la característica de calidad que se mide y asumiendo que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , la probabilidad  $p$  de que un artículo sea no conforme, es decir que su medida esté por fuera de los límites de especificación, se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p &= P[X < LEI, \text{ ó }, X > LES] \\ &= P\left[Z < \frac{LEI - \mu}{\sigma}\right] + P\left[Z > \frac{LES - \mu}{\sigma}\right] \\ &= 1 - \left\{ \Phi\left(\frac{LEI - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LES - \mu}{\sigma}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se asume también que  $\mu = M = \frac{LES + LEI}{2}$ . Si por ejemplo,  $C_p = 1$ , esto indica que  $LES - \mu = -(LEI - \mu) = 3\sigma$ . Reemplazando en (3.1) se obtiene  $p = 0,0027$ . Es decir, 0,27% de la producción es no conforme, o equivalentemente, se tiene una producción no conforme de 2,700p.p.m (partes por millón).

Se considera ahora el caso ideal en el que, bajo los mismos supuestos anteriores, se tiene un índice de capacidad  $C_p = 2$ . La Gráfica 3.3 ilustra este caso.



Gráfica 3.3. Proceso de capacidad  $C_p = 2$

Si se tolera un desplazamiento de la media hasta en 1.5 desviaciones estándar, el cálculo de la proporción de artículos no conformes es,

$$\begin{aligned} p &= P[X > LES] + P[X < LEI] \\ &\approx P[Z > 4.5] = 0.0000034 \end{aligned}$$

equivalente a decir que la producción de artículos no conformes del proceso es de 3.4 *p.p.m.*, valor que es muy conocido por los lectores que están familiarizados con la iniciativa “Seis Sigma”.

### 3.3. Índices de Capacidad para Distribuciones no Normales

Todos los índices definidos anteriormente, han sido diseñados para medir la capacidad de un proceso cuando la característica de calidad sigue una distribución normal. Sin embargo, cuando la distribución no es normal, estos índices pueden dar información falsa. Por ejemplo, un índice podría indicar que un proceso tiene una capacidad alta, cuando en realidad sucede lo contrario. Por lo tanto, antes de emplear cualquiera de estos índices, debe realizarse un análisis de la información a fin de tener algún grado de certeza sobre la distribución de la característica bajo estudio.

Si se decide que los datos se desvían significativamente del modelo normal, se pueden seguir varios caminos. A continuación se describen brevemente algunos de ellos:

- I) Usar una transformación. Buscar una transformación que permita normalizar los datos, para luego calcular los índices con base en los datos transformados. Chou, Polansky & Mason (1998) y Lagos & Vargas (2003) proponen usar el sistema de distribución de Johnson para normalizar los datos. Esta metodología permite ajustar distribuciones que se encuentran en un rango amplio de formas y tiene gran aceptación entre los usuarios y profesionales de Control de Calidad. Pal (2004) ajusta una distribución lambda generalizada a los datos no-normales y calcula los índices de capacidad usando los percentiles 0,135 y 99,865 de los datos ajustados.
- II) Seleccionar un modelo adecuado no normal. En la industria es común encontrar características que siguen distribuciones específicas no-normales como la Weibull, lognormal o gamma. Una vez se estimen los parámetros del modelo, se pueden usar índices análogos a los utilizados con modelos normales. Así, puede usarse el siguiente índice:

$$C_p'' = \frac{LES - LEI}{x_{0,99865} - x_{0,00135}},$$

donde  $x_{0,00135}$  es el percentil 0,135 de la distribución bajo consideración.

- III) Usar un índice que tenga cierto grado de robustez contra desviaciones respecto a la normalidad. Dos de ellos son los siguientes:

$$C_s = \frac{d - |\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + \left|\frac{\mu_3}{\sigma}\right|}},$$

donde  $\mu_3$  es el tercer momento central, Pearn & Chang (1997). Este índice, definido inicialmente por Wright (1995), incorpora un factor de ajuste por asimetría.

Yeh & Bhattacharya (1998) proponen el siguiente índice,

$$C_f = \min\left(\frac{\alpha_0^L}{\alpha_L}, \frac{\alpha_0^U}{\alpha_U}\right),$$



donde  $\alpha_0^L$  y  $\alpha_0^U$  son los porcentajes superior e inferior de artículos no conformes que el productor está dispuesto a tolerar. Es decir,  $\alpha_L = P(X < LEI)$  y  $\alpha_U = P(X > LES)$ . Por ejemplo, ambos podrían ser iguales a 0,00135. Este índice nos indica entonces que un proceso tiene buena capacidad ( $C_f \geq 1$ ) si produce una proporción de productos no-conformes igual o más pequeñas que la esperada.

### 3.4. Índices de Capacidad para Distribuciones Discretas

La mayoría de índices de capacidad han sido propuestos para los casos en que la característica de interés es continua y, en particular, sigue una distribución normal. Sin embargo, es común tener procesos caracterizados por variables discretas, por ejemplo número de no conformidades por unidad. Medir la capacidad de este tipo de procesos no ha obtenido tanta atención como en el caso de procesos continuos.

Perakis & Xekalaki (2005) proponen un índice que puede ser usado tanto para procesos continuos como discretos. Este índice está definido como,

$$C_{pc} = \frac{1 - p_0}{1 - p},$$

donde  $p$  y  $p_0$  denotan la proporción de conformidad (rendimiento) y la mínima proporción de conformidad permitida en el proceso respectivamente. El término proporción de conformidad se refiere a la probabilidad de producir dentro del área de especificación, es decir, en el intervalo determinado por los límites de especificación. Si las tolerancias son unilaterales, entonces el valor de  $p$  está dado por  $P(X > LEI)$  o por  $P(X < LES)$ .

### 3.5. Capacidades Bajas de Procesos

Cuando se lleva a cabo el estudio de capacidad de un proceso y se encuentran valores de índices muy pequeños, se recomienda llevar a cabo las siguientes acciones:

1. Examinar si hay errores de medida en los aparatos. La descalibración de un instrumento puede resultar en valores de  $\sigma$  muy grandes.

2. Estudiar con el grupo de Ingenieros la posibilidad de ampliar los límites de especificación
3. Buscar maneras de mejorar el proceso, de tal forma que se pueda reducir la variabilidad del mismo.

La segunda recomendación está a cargo básicamente de los ingenieros encargados del diseño del producto. La tercera posibilidad es un tema que se aborda en varios capítulos del libro. A continuación se presenta un enfoque general relacionado con la primera opción.

La variabilidad en las medidas es una función de los instrumentos de medida que se usen. Un valor del proceso  $X_m$  es la suma del valor “real”  $X$  más un error de medida,

$$X_m = X + \varepsilon.$$

En la práctica se observa  $X_m$ , no  $X$ . Sin embargo, si el error de medida  $\varepsilon$  se puede estimar, entonces se puede obtener un estimativo de la verdadera varianza del proceso. Asumiendo que el error de medida es independiente del valor medido,

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 + \sigma_e^2 \tag{3.2}$$

$\sigma_m^2$  es la varianza de las observaciones medidas,  $\sigma^2$  es la verdadera varianza del proceso y  $\sigma_e^2$  es la varianza de los errores de medición.

Cuando se calculan los índices de capacidad, se está usando  $\sigma_m$  en lugar de la verdadera desviación estándar del proceso  $\sigma$ .

Cada instrumento de medida viene con un nivel de precisión dado por el fabricante. Un estimativo del error de medida se obtiene a través de un índice conocido como **razón de precisión o tolerancia**,  $\gamma$ , el cual está definido de la siguiente manera:

$$\gamma = \frac{6\sigma_e}{LES - LEI}. \tag{3.3}$$

La ecuación (3.3) representa el porcentaje del rango de tolerancia usado por el error de medida. Los fabricantes proveen información para estimar  $\gamma$ .  $\sigma_e$  se puede estimar a través de un estudio de repetibilidad

$$\hat{\sigma}_e = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

donde  $\bar{R}$  es el promedio de los rangos de las replicaciones.

Reemplazando (3.3) en (3.2) se obtiene

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 + \left[ \frac{\gamma(LES - LEI)}{6} \right]^2.$$

Sea  $C_p^*$  el índice de capacidad observado basado en las observaciones y sea  $C_p$  el índice de capacidad “verdadero”.

$$\begin{aligned} C_p^* &= \frac{LES - LEI}{6\sigma_m} = \frac{LES - LEI}{6\sqrt{\sigma^2 + \left[ \gamma \left( \frac{LES - LEI}{6} \right) \right]^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{1}{C_p^*} \right)^2 + \gamma^2}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$C_p = \frac{1}{\left( \frac{1}{C_p^*} \right)^2 - \gamma^2}.$$

Cuando no hay errores de medida,  $\gamma = 0$  y  $C_p = C_p^*$ .



## Capítulo 4

# Cartas de Control para Atributos

En el capítulo 2 se estudiaron cartas de control para datos continuos. Sin embargo no siempre es fácil o económico registrar la medida de una característica de calidad. En algunas circunstancias es mejor clasificar las unidades, por ejemplo en dos categorías: conformes y no-conformes. Intencionalmente se evitará el uso de la palabra “defectuoso” para estar de acuerdo con los estándares internacionales (ANSI/ASQC). En otras ocasiones puede ser conveniente contar el número de no-conformidades en una muestra dada. En este caso, la unidad de referencia puede ser una unidad producto, como el número de impurezas en un vaso de vidrio, o una unidad o cantidad física, como el número de impurezas por  $dm^2$ .

Cuando se monitorean procesos que producen este tipo de datos, se utilizan cartas de control para atributos. A continuación se hará una breve descripción de las cartas para atributos más conocidas. Métodos de control para atributos adicionales aparecen reseñados en Woodall (1997).

### 4.1. Carta $p$

Una carta  $p$  muestra las variaciones en la proporción de unidades no conformes de una producción. Este caso surge cuando en cada tiempo se selecciona una muestra de  $n$  artículos y se cuenta el número de ellos no conformes. Se asume independencia en la ocurrencia de estos artículos, con el objeto de

poder usar la distribución binomial, o como ocurre frecuentemente, su aproximación por la distribución normal. Si el valor  $p$  fuera conocido, los límites  $3\sigma$  de una carta  $p$  se obtienen de la forma:

$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Como usualmente no se conoce  $p$ , se utiliza un conjunto histórico de datos para estimarlo. Supongamos que este conjunto histórico está conformado por  $m$  muestras, cada una de ellas de tamaño  $n$ . Es decir, en cada tiempo se seleccionan  $n$  artículos para inspección. Sea  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , el número de artículos no conformes en cada muestra. El estimador usual de  $p$  es,

$$\bar{p} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m X_i.$$

Los límites de control retrospectivos para la carta  $p$  se calculan entonces de la forma,

$$\bar{p} \pm k\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}},$$

donde generalmente  $k = 3$ . Los valores de  $X_i/n$ ,  $i = 1, \dots, m$  se grafican en esta carta. Si uno o varios puntos quedan por fuera de los límites de control, se inicia una búsqueda de las causas que los originaron. Cuando se encuentran causas asignables, los puntos son eliminados y los límites recalculados con las observaciones restantes. Una vez el proceso esté bajo control, los límites de control se aplican prospectivamente a muestras futuras.

En varias ocasiones no se puede garantizar el mismo valor de  $n$  en cada tiempo. Por ejemplo, una muestra a seleccionar podría ser la producción diaria de una fábrica, la cual puede variar día a día debido a varios factores como cambio de operarios, limpieza de máquinas, problemas de voltaje, etc. La construcción de una carta  $p$  con  $n$  variable tiene ciertas modificaciones con respecto al caso en que es constante. Ambos casos se consideran a continuación:

#### 4.1.1. Carta $p$ con $n$ constante

Considere la situación en que se tiene un registro histórico de información sobre la fracción de artículos no-conformes cuando el valor de  $n$  es constante.

Asuma que durante 25 días se inspeccionan 200 artículos y se cuenta el número de no-conformes tal como se presenta en la Tabla 4.1.

Día	Número de artículos no-conformes
1	12
2	10
3	7
4	4
5	4
6	10
7	6
8	9
9	8
10	13
11	9
12	7
13	7
14	11
15	10
16	8
17	11
18	10
19	11
20	14
21	8
22	15
23	8
24	10
25	4

Tabla 4.1. Número de artículos no-conformes de 200 inspeccionados durante 25 días

La línea central de la carta  $p$  es la fracción promedio de artículos no conformes estimada a partir del conjunto de datos,

$$\bar{p} = \frac{\text{Número total de artículos no conformes}}{\text{Número total de artículos inspeccionados}}$$

Para los datos de la Tabla 4.1,

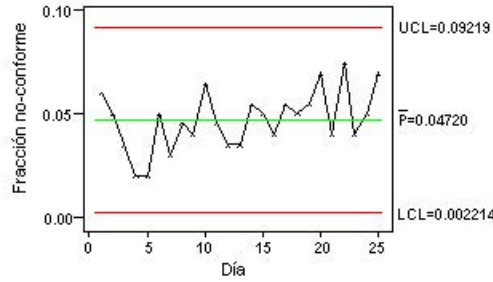
$$\bar{p} = \frac{12 + 10 + \dots + 4}{(200)(25)} = 0,047$$

y los límites  $3\sigma$  son:

$$\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0,047 \pm 3\sqrt{\frac{(0,047)(0,953)}{200}} = 0,047 \pm 0,045$$

es decir  $LCS = 0,092$  y  $LCI = 0,002$

La Gráfica 4.1 muestra la carta  $p$  y las fracciones correspondientes a los 25 días.



Gráfica 4.1. Carta  $p$  para los datos de la Tabla 4.1

En la Gráfica 4.1 se observa que todos los puntos están bajo control. Por tanto los límites así contruidos se usarán hacia el futuro para controlar la fracción de artículos no-conformes siempre que se mantengan las mismas condiciones bajo las cuales se tomaron los datos de los 25 días. En el caso que aparezcan puntos fuera de control se debe iniciar una investigación para buscar las causas que los produjeron. Si se encuentran causas asignables se omiten los puntos y se recalculan  $\bar{p}$ ,  $LCS$  y  $LCI$ .

Si en lugar de graficar  $p$  se prefiere graficar el número de artículos no conformes, es decir  $np$ , los límites de esta carta, conocida como carta  $np$  son:

$$LCS = n\bar{p} + k\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

$$LCI = n\bar{p} - k\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

donde usualmente  $k = 3$ .



### 4.1.2. Carta $p$ con $n$ variable

Como se dijo atrás, en varias ocasiones el valor de  $n$  no es constante. En tal caso hay varias propuestas. Una opción consiste en calcular los límites de control de acuerdo al valor de  $n$ . Es decir

$$\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}},$$

donde  $n_i$  es el tamaño de la  $i$ -ésima muestra. Esto significa que para valores diferentes de  $n_i$  la carta mostrará límites de control diferentes. La línea central  $\bar{p}$  no cambia.

Un segundo procedimiento consiste en tomar un promedio de las  $n_i$  y calcular los límites de control con base en este valor. Esta opción permite construir una carta  $p$  con límites constantes, lo cual facilita la interpretación de la carta.

Finalmente, otro método es el de construir una carta  $p$  estandarizada. En esta carta se grafica la estadística

$$z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}},$$

en una carta cuyos límites de control son  $+3$  y  $-3$ .

## 4.2. Carta $c$

En muchos casos es más conveniente trabajar con el número de no-conformidades por unidad, en lugar del porcentaje de unidades no-conformes. Por ejemplo, el número de no-conformidades por 50  $mts^2$  de cierta tela. Una carta apropiada para controlar variables de este tipo es la carta  $c$ . Sea  $c_i$  el número de no-conformidades en la  $i$ -ésima muestra de  $n$  unidades, para  $i = 1, \dots, m$ . Asumiendo que estos valores siguen una distribución Poisson, los límites de control para la carta  $c$  son entonces,

$$\bar{c} \pm k\sqrt{\bar{c}},$$

donde

$$\bar{c} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i$$

y usualmente  $k = 3$ .

**Ejemplo:** Los datos de la Tabla 4.2 representan el número de no-conformidades encontradas en lotes de 20 artículos. La unidad muestral es el lote completo y se asume que todos los lotes tienen 20 artículos

Lote	Número de no-conformidades ( $c$ )
1	10
2	5
3	9
4	17
5	7
6	10
7	9
8	7
9	10
10	11
11	5
12	8
13	9
14	7
15	10

Tabla 4.2. Información obtenida a partir de 15 lotes

$$\bar{c} = \frac{10 + 5 + \cdots + 10}{15} = 8,93$$

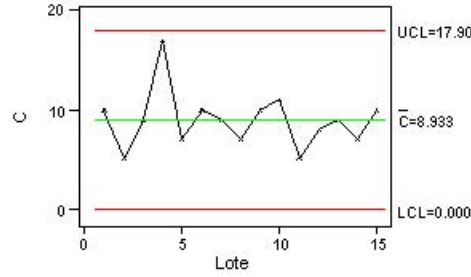
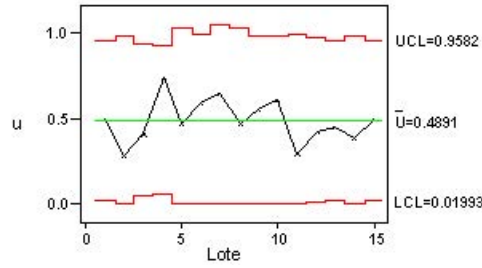
Luego la carta queda definida por :

$$LCS = 8,93 + 3\sqrt{8,93} = 17,9$$

$$LC = 8,93$$

$$LCI = 8,93 - 3\sqrt{8,93} = -0,03.$$

Como el  $LCI$  es negativo y la variable de interés no puede tomar valores negativos, la carta se construye con el  $LCI$  igual a cero, tal como se observa en la Gráfica 4.2.

Gráfica 4.2. Carta  $c$  para los datos de la tabla 4.2Gráfica 4.3. Carta  $u$  para los datos de la Tabla 4.2 con lotes de tamaño diferente

### 4.3. Carta $u$

Cuando el número de artículos inspeccionados en una unidad muestral  $n$  varía de unidad a unidad, es mejor graficar la estadística  $u = \frac{c}{n}$  que representa el número de no-conformidades por artículo o unidad material.

Para la carta  $u$ , la línea central es  $\bar{u}$ , el número promedio de no-conformidades por artículo, y como,

$$\text{Var}(u) = \text{Var}\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(c),$$

la varianza de  $u$  se estima por  $\frac{1}{n^2} \bar{c} = \frac{\bar{c}/n}{n} = \frac{\bar{u}}{n}$ ,

y los límites de control quedan definidos así:

$$\bar{u} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}.$$

Como estamos asumiendo que el valor de  $n$  varia de unidad a unidad, los límites de control también cambiarán.

Por ejemplo la Gráfica 4.3 muestra una carta  $u$  construida con los datos de la Tabla 4.2 pero variando el número de artículos por lote.

Si se quiere construir una carta  $u$  con límites fijos se puede tomar el promedio de los  $n_i$  y calcular los límites de control teniendo en cuenta dicho valor.

#### 4.4. Carta de Control Basada en una Distribución Geométrica

Cuando el valor de  $p$  es muy pequeño, la carta  $p$  no es la más apropiada para monitorear fracciones no conformes de una producción. Este caso es muy frecuente actualmente, en razón al avance tecnológico de los procesos así como a la automatización de los mismos, lo cual produce fracciones muy pequeñas de artículos no-conformes. Bourke (1991) propuso la carta de control para longitudes de corrida de artículos conformes (CRL) cuando se lleva a cabo una inspección de 100 %. Una longitud de corrida de conformes es el número de artículos inspeccionados entre dos artículos consecutivos no conformes, incluyendo el artículo no-conforme final. Supongamos que el proceso inicia en el tiempo  $t = 0$ , y el primer artículo no-conforme es el quinto, entonces  $CRL_1 = 5$ . El siguiente artículo no-conforme es el cuarto, entonces  $CRL_2 = 4$ . Así se continua sucesivamente. El conteo de esas longitudes de corrida nos permite monitorear la fracción  $p$  de artículos no-conformes de un proceso. Cuando  $p$  aumenta, el valor de  $CRL$  disminuirá, y cuando  $p$  disminuya el valor de  $CRL$  aumentará.

La variable aleatoria  $CRL$  sigue una distribución geométrica con media

$$\mu = E[CRL] = \frac{1}{p}.$$

La función de distribución acumulada está definida de la forma

$$F_{CRL}(x) = P[CRL \leq x] = 1 - (1 - p)^x \quad x = 1, 2, \dots$$

Si el interés principal en el proceso es el de no permitir un aumento en  $p$ , entonces la carta  $CRL$  puede construirse solamente con el límite de control inferior  $L$ . Si  $p_0$  es el valor de  $p$  bajo control y  $\alpha$  es la probabilidad de que la carta señale una falsa alarma, el valor  $L$  se puede establecer a partir de

la ecuación:

$$P[CRL \leq L | p = p_0] = \alpha$$

es decir,

$$1 - (1 - p_0)^L = \alpha$$

y por lo tanto,

$$L = \frac{\ln(1 - \alpha)}{\ln(1 - p_0)}.$$

Un valor  $CRL$  menor que  $L$  es una señal fuera de control de la carta  $CRL$ , indicando que debe realizarse una búsqueda de causas especiales. Si el valor de  $p_0$  es desconocido, se inspecciona un conjunto de  $m$  artículos y se estima la fracción de no-conformes. Supongamos que de los  $m$  artículos inspeccionados, se encuentran  $N$  no-conformes. El estimador usual de  $p_0$  es,

$$\hat{p}_o = \frac{N}{m}.$$

La longitud promedio de corrida para esta carta está dada por

$$ARL = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1 - (1 - p)^L}$$

e indica el número promedio de muestras  $CRL$  que se toman hasta que la carta muestra una señal fuera de control.

El número promedio de unidades inspeccionadas ( $ANS$ ) hasta que se presente la señal se calcula de la forma,

$$\begin{aligned} ANS &= \mu \times ARL \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{1 - (1 - p)^L}. \end{aligned}$$

La carta  $CRL$  también se denomina carta  $CCC$ , que significa carta de conteo acumulado de artículos conformes. Ver por ejemplo Kuralmani, Xie, Goh & Gan (2002) y Lai & Govindaraju (2008). A partir de esta carta surgió la carta de control de tiempo entre eventos, conocida como carta  $TBE$ . Si el proceso de producción es continuo, el tiempo se mide como el número de unidades producidas mientras que una unidad no conforme es lo que se considera un evento, así que para este caso  $TBE$  es el número de unidades producidas entre dos unidades no conformes observadas consecutivamente, lo cual significa que para procesos continuos estas dos cartas coinciden. Pero

la carta TBE puede ser utilizada en otras situaciones. Por ejemplo, en el área de confiabilidad, TBE puede indicar el tiempo entre dos fallas ocurridas en un sistema. Ver Ali, Mahmood, Nazir, Sana, Akhtar, Qamar & Iqbal (2016) para una revisión de estas cartas.

## 4.5. Carta de Control por Demeritos

En el proceso de manufactura de muchos productos es usual encontrar no conformidades de diferentes clases. Las cartas de control para atributos,  $p$ ,  $np$ ,  $c$  y  $u$  no hacen diferencia en el tipo de no conformidad. En otras palabras, estos procedimientos le asignan el mismo peso a las no conformidades que puede presentar un producto. Sin embargo, si las no conformidades difieren ampliamente, debería designarse un método que permitiera algún tipo de clasificación para estos casos. El sistema por demeritos realiza precisamente esta clasificación y le asigna ponderaciones a cada no conformidad de acuerdo a la severidad de ésta. En la industria este sistema es usual y por tanto varias clasificaciones han sido propuestas. La siguiente agrupación de no conformidades ha sido tomada de Nembhard & Nembhard (2000):

**Clase A-Crítica:** una no conformidad que puede resultar en una condición peligrosa o insegura cuando se usa el producto.

**Clase B-Mayor:** una no conformidad que posiblemente resulte en una falla o retarde el uso del producto.

**Clase C-Menor:** una no conformidad diferente a la crítica o mayor y que posiblemente no afectará el uso del producto.

Se asume que las no conformidades en una categoría son independientes de las no conformidades en las otras categorías. Se asignan entonces ponderaciones a cada categoría, dando un mayor peso a las no conformidades más severas. Por ejemplo, es típico darle un peso de 9 a las no conformidades críticas y 1 a las no conformidades menores.

Denotemos por  $c_{iA}$ ,  $c_{iB}$  y  $c_{iC}$  el número de no conformidades de cada clase en la  $i$ -ésima unidad inspeccionada. El número de demeritos en la unidad inspeccionada se define como

$$d_i = w_A c_{iA} + w_B c_{iB} + w_C c_{iC}$$

donde  $w_A$ ,  $w_B$  y  $w_C$  son los pesos asignados a cada una de las clases  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente.

Suponga que se inspecciona una muestra de  $n_i$  unidades. Entonces el número de demeritos por unidad es

$$U_i = \frac{D}{n_i},$$

donde  $D = \sum_{i=1}^{n_i} d_i$  es el número total de demeritos en las  $n_i$  unidades inspeccionadas. Asumiendo que  $U$  es una combinación lineal de variables aleatorias independientes con distribución Poisson, la línea central de la carta de control por demeritos es,

$$\bar{U} = w_A \bar{U}_A + w_B \bar{U}_B + w_C \bar{U}_C$$

donde  $\bar{U}_A$ ,  $\bar{U}_B$  y  $\bar{U}_C$  representan los promedios de no conformidades por unidad en cada clase. Es decir,

$$\begin{aligned}\bar{U}_A &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_{iA} \\ \bar{U}_B &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_{iB} \\ \bar{U}_C &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_{iC},\end{aligned}$$

donde  $N$  es el número total de unidades inspeccionadas en la fase I.

Los límites de control se calculan de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}LCS &= \bar{U} + 3\hat{\sigma}_U \\ LCI &= \bar{U} - 3\hat{\sigma}_U,\end{aligned}$$

donde,

$$\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{w_A^2 \bar{U}_A + w_B^2 \bar{U}_B + w_C^2 \bar{U}_C}{n_i}}.$$





## Capítulo 5

# Cartas CUSUM

Hasta el momento, las cartas de control vistas han sido cartas Shewhart. Las cartas CUSUM (Sumas Acumuladas), fueron propuestas por Page (1954) y desarrolladas por él y otros estadísticos británicos. La principal ventaja de este método es que puede detectar un cambio pequeño o persistente en el promedio del proceso, más rápidamente que una carta Shewhart.

### 5.1. Cartas CUSUM para la Media

Suponga que se quiere monitorear el nivel  $\mu$  de una característica de calidad  $X$ , distribuida  $N(\mu, \sigma^2)$ . Se asume además que la varianza del proceso  $\sigma^2$  es constante. Se tiene un valor objetivo dado  $\mu_0$  para  $\mu$ , del cual se quieren detectar desviaciones significantes. Si se define por  $Z_i$  el valor estandarizado de  $X$ , es decir,  $\frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar de  $X_i$  o de  $\bar{X}_i$ , una carta de sumas acumuladas consiste básicamente en graficar las sumas acumuladas de estos valores contra el número total de muestras recolectadas. Para este procedimiento, se calculan las siguientes dos sumas:

$$S_{H,t} = \sum_{j=1}^t (Z_j - k)$$

y

$$S_{L,t} = \sum_{j=1}^t (Z_j + k),$$

donde la constante  $k$  se conoce como *valor de referencia*.

Usualmente se procede de la siguiente manera:

Comenzando con  $Z_j - k > 0$  se empieza a formar la suma  $S_{H,t}$ . Esta suma aumenta o disminuye, dependiendo de la magnitud de cada nuevo término. Tan pronto como la suma acumulada cae por debajo de cero, se empieza una nueva serie. El procedimiento también para cuando la suma alcanza o excede un valor  $h$  conocido como *intervalo de decisión*. Si se empieza con  $Z_j + k < 0$  se forma la suma  $S_{L,t}$ . Esta suma también aumenta o disminuye dependiendo de la magnitud de cada nuevo término. Tan pronto como la suma acumulada excede cero, se empieza una nueva serie. El procedimiento también para cuando la suma alcanza o cae por debajo del valor  $-h$ .

Cada vez que la suma para, se reinicia  $S_{H,t}$  siempre que  $Z_j - k > 0$  y se reinicia  $S_{L,t}$  si  $Z_j + k < 0$ .

Durante todo el proceso, mientras los valores CUSUM estén en el intervalo  $(-h, h)$  se asume que al tiempo  $t$  el nivel del proceso no se ha desviado significativamente del valor objetivo  $\mu_o$ . Cuando  $S_{H,t}$  alcance el límite superior  $h$  ó  $S_{L,t}$  el límite inferior  $-h$ , se asume que al tiempo  $j$  ( $j \leq t$ ), el nivel del proceso se ha desviado del valor objetivo en tal grado, que es necesario tomar acciones correctivas. En resumen, un esquema CUSUM se basa en las siguientes sumas:

$$S_{H,n} = \text{máx}[0, S_{H,n-1} + Z_n - k],$$

y,

$$S_{L,n} = \text{mín}[0, S_{L,n-1} + Z_n + k],$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

El esquema indica que la media se ha incrementado si  $S_{H,n} > h$  y que ha disminuido si  $S_{L,n} < -h$ . Los valores iniciales  $S_{H,0}$  y  $S_{L,0}$  son usualmente cero. Sin embargo, Lucas & Crosier (1982) propusieron iniciar las sumas con un valor distinto de cero con el objeto de identificar mas rápidamente una señal fuera de control, cuando el estado inicial del proceso está realmente fuera de control. Lucas and Crosier recomiendan como valor de arranque uno cercano a  $\frac{h}{2}$ .

El gráfico de esta carta tiene una estructura similar a las cartas de control Shewhart. Los límites de control son dos líneas paralelas, situadas a una distancia  $h$  de la línea central, que en este caso es cero.

Crosier (1986) propone un esquema CUSUM similar al expuesto arriba, pero definido de una manera diferente. Crosier actualiza el valor CUSUM con una nueva observación y luego contrae este nuevo valor CUSUM hacia cero a través de  $k$ . El procedimiento propuesto es el siguiente:

Sea

$$C_n = |S_{n-1} + Z_n|,$$

y

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } C_n \leq k \\ (S_{n-1} + Z_n) \left(1 - \frac{k}{C_n}\right) & \text{si } C_n > k \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $S_0 = 0$  y  $k > 0$ . Este esquema da una señal de incremento en la media si  $S_n > h$ , o una reducción en la media si  $S_n < -h$ . Se puede observar que este esquema es equivalente al presentado arriba, donde se definían las sumas  $S_{H,n}$  y  $S_{L,n}$ .

## 5.2. ARL para un Procedimiento CUSUM

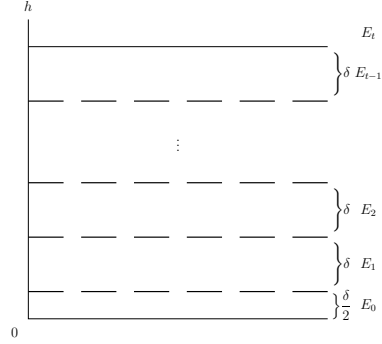
Como en las cartas estudiadas antes, el ARL para una carta CUSUM es una herramienta muy importante para determinar su efectividad.

Las propiedades de un procedimiento CUSUM se determinan por los valores de  $h$ ,  $k$  y  $S_0$ . Usualmente  $S_0 = 0$ . El parámetro  $k$  está determinado por el cambio en el nivel medio, el cual se quiere detectar mediante la carta CUSUM. Por ejemplo, si se desea detectar un cambio  $M$  en la media del proceso,  $k$  podría tomar el valor  $M/4$  ó  $M/2$ . El valor de  $h$  se selecciona de tal forma que se obtenga un ARL bajo control grande, con un ARL fuera de control adecuadamente pequeño.

Brook & Evans (1972) usaron cadenas de Markov para obtener una aproximación del ARL para una carta CUSUM de un lado. En el método expuesto a continuación se utilizará sólo el esquema superior. El método se aplica de forma similar para el esquema inferior.

El intervalo de decision  $(0, h)$  se subdivide en un conjunto finito  $t$  de subintervalos de longitud  $\delta$ , tal como se observa en la Gráfica 5.1.

$E_0$  corresponde al estado 0 y  $E_t$  es el estado absorbente.

Gráfica 5.1. División del intervalo de decisión en  $t$  subintervalos

Se tiene que

$$(t-1)\delta + \frac{\delta}{2} = h$$

$$\delta \left[ t - 1 + \frac{1}{2} \right] = h$$

luego

$$\delta = \frac{h}{t - 0,5}$$

La matriz de probabilidades de transición  $P = [p_{ij}]$  contiene las probabilidades de moverse de un estado  $i$  a un estado  $j$ . Estas probabilidades se calculan así:

a) para  $j > 0$

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P[S_n \in E_j | S_{n-1} \in E_i] \\ &= P[S_n \in E_j | S_{n-1} = i\delta], \quad i\delta \text{ es el punto medio de } E_i \\ &= P\left[j\delta - \frac{1}{2}\delta \leq S_n \leq j\delta + \frac{1}{2}\delta | S_{n-1} = i\delta\right] \\ &= P\left[j\delta - \frac{1}{2}\delta \leq i\delta + X_n - k \leq j\delta + \frac{1}{2}\delta\right] \\ &= P\left[j\delta - i\delta - \frac{1}{2}\delta + k \leq X_n \leq j\delta - i\delta + \frac{1}{2}\delta + k\right] \\ &= F[k + (j - i + 0,5)\delta] - F[k + (j - i - 0,5)\delta]. \end{aligned}$$

b) para  $j = 0$

$$\begin{aligned}
 p_{ij} &= P \left[ S_n \leq \frac{\delta}{2} \mid S_{n-1} = i\delta \right] \\
 &= P \left[ i\delta + X_n - k \leq \frac{\delta}{2} \right] \\
 &= P \left[ X_n \leq k - i\delta + \frac{\delta}{2} \right] \\
 &= F \left[ k + (-i + 0,5)\delta \right].
 \end{aligned}$$

La matriz de probabilidades de transición  $P = [p_{ij}]$  contiene las probabilidades de moverse de un estado  $i$  a un estado  $j$ .

Como se vió atrás,

$$P = \begin{bmatrix} R & (I - R)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{bmatrix}$$

y  $u = [I - R]^{-1}\mathbf{1}$  es el vector de ARL's para cada uno de los estados discretos que representan los diferentes valores de arranque, que se consideran son los puntos medios de los estados (o para el estado 0). ARL's razonablemente buenos se obtuvieron para valores de  $t$  entre 5 y 10. Extrapolación a  $t = \infty$ , es decir el esquema continuo, se basa en el ajuste de la siguiente ecuación mediante mínimos cuadrados,

$$ARL(t) = ARL(\text{Asimptótico}) + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^4}.$$

Una vez se haya ajustado este modelo, se puede hacer extrapolación a valores grandes de  $t$ . De manera similar se puede analizar un esquema hacia el lado inferior y calcular el respectivo ARL, denotemoslo por  $ARL_L$ .

El ARL para el esquema a dos lados  $ARL_C$ , se puede entonces aproximar mediante la expresión:

$$\frac{1}{ARL_C} = \frac{1}{ARL_H} + \frac{1}{ARL_L}.$$

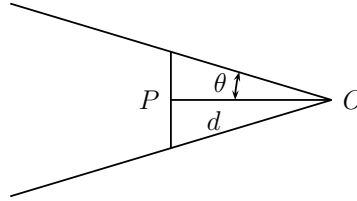
Lucas & Crosier (1982) extienden el método de Brook & Evans (1972) para calcular el ARL para el esquema CUSUM de dos lados mediante cadenas de Markov.

La Tabla 5.1, cuyos valores fueron tomados de Hawkins (1993), presenta algunos valores de  $h$  que dan un ARL de 500 para varios valores del valor de referencia  $k$ .

$k$	$h$
0.25	7.2673
0.50	4.3891
0.75	3.0800
1.00	2.3200

Tabla 5.1. Valores de  $k$  y  $h$  que producen ARL=500 para datos de una distribución normal no-contaminada.

### 5.3. Gráfico-V CUSUM



Las cartas CUSUM son a menudo acompañadas por un gráfico en forma de V rotado hacia el lado izquierdo.

Sus propiedades dependen de la distancia  $d$  y el ángulo  $\theta$ . Si una carta CUSUM se debe evaluar en el tiempo  $t$  mediante un gráfico V, se procede de la siguiente manera:

Se coloca el punto  $P$  sobre el último punto CUSUM  $(t, x_t)$ , tal que la recta  $PO$  sea horizontal. Mientras la línea que une las sumas acumuladas esté dentro del ángulo de la V, el proceso se considera bajo control. Si la línea CUSUM intercepta una de las rectas de la V, se considera como evidencia que en el punto  $j$  ( $1 \leq j \leq t$ ), el nivel del proceso se ha desviado significativamente del valor objetivo, y que es necesario tomar medidas correctivas.

Los dos procedimientos vistos aquí para evaluar una carta CUSUM son equivalentes. Suponga que  $w$  unidades ( $w > 0$ ) en el eje vertical, corresponden a una unidad sobre el eje horizontal  $t$ , entonces se puede demostrar que

$$k = w \tan \theta$$

y,

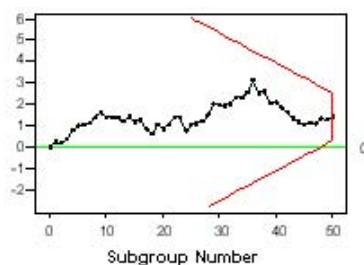
$$h = dw \tan \theta.$$

**Ejemplo:** El conjunto de datos de la Tabla 5.2 fue tomado de Wetherill & Brown (1991).

5.22	5.02	5.23	4.93	4.75
4.95	4.97	5.30	5.12	4.83
5.20	4.85	5.05	5.27	4.65
5.41	5.20	4.34	5.03	4.86
5.20	4.73	5.28	5.21	4.82
5.02	5.08	5.09	5.61	5.14
5.11	4.61	5.11	4.38	4.94
5.26	4.78	5.27	5.06	5.23
5.27	5.45	5.54	4.46	4.97
4.73	4.75	4.95	5.04	5.14

Tabla 5.2. Pesos (en grs.) de cápsulas tomadas cada 30 segundos de un proceso de manufacturación continuo.

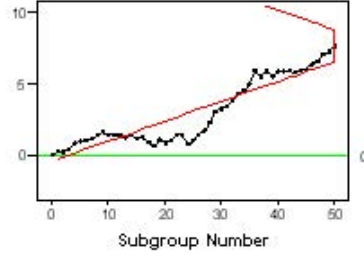
El valor objetivo para estos datos era 5.0. Es decir  $\mu_0 = 5$ . Se seleccionaron  $k = 0,5$  y  $h = 4$  de acuerdo a la Tabla 5.1.



Gráfica 5.2. Gráfico-V para los datos de la tabla 5.2.

En el Gráfico 5.2 se observa que todos los puntos quedan dentro de la V. En este caso se tomaron las observaciones individuales. Si añadimos ahora 0.25 a los últimos 25 valores, se obtiene el Gráfico 5.3

Puede observarse cómo este gráfico detecta rápidamente el cambio en la media del proceso. Aunque el valor de la estadística se sale del brazo de la V a partir del valor 13 o 14, es a partir del dato 25 que se observa un cambio notorio en la pendiente de la gráfica. De hecho, en una carta CUSUM es importante identificar los cambios en la pendiente. Una pendiente cercana a cero en el gráfico CUSUM implica que los datos están en el valor objetivo. Cambios en la pendiente indican cambios en el nivel medio del proceso.



Gráfica 5.3. Gráfico-V para los datos de la tabla 5.2, añadiendo 0.25 a los últimos 25 datos.

## 5.4. Carta CUSUM para la Dispersión del Proceso

Aunque el esquema CUSUM ha sido utilizado principalmente para detectar cambios en la medida de un proceso, varios esquemas han sido propuestos para monitorear la dispersión del proceso. Ver Hawkins (1981), Acosta-Mejía, Pignatiello & Rao (1999), Acosta-Mejía & Pignatiello (2000). Se describen a continuación algunos de estos esquemas. En todos los casos se asume que las observaciones siguen una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , y que  $\sigma_0^2$  es un valor objetivo para  $\sigma^2$ .

### 5.4.1. CUSUM R y S

La estadística CUSUM R que permite detectar incrementos en la varianza está definida por

$$S_{H,n} = \max \left\{ 0, \frac{R_n}{\sigma_0} + S_{H,n-1} - k \right\}$$

donde  $R_n$  es el rango del  $n$ -ésimo grupo y  $k = \frac{d_2 \left( 1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_0} \right)}{2}$ .

Similarmente la estadística CUSUM S para incrementos en la varianza es

$$S_{H,n} = \max \left\{ 0, \frac{S_n}{\sigma_0} + S_{H,n-1} - k \right\}$$

donde  $S_n$  es la varianza muestral del  $n$ -ésimo grupo y  $k = \frac{c_4 \left( 1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_0} \right)}{2}$ .



Por ejemplo, para subgrupos de tamaño  $n = 5$ , si hay interes en detectar un incremento del 20 % en la desviación estándar del proceso, el valor de referencia para la carta CUSUM R es:

$$k = \frac{(2,326)}{2} \left( 1 + \frac{1,2\sigma_0}{\sigma_0} \right) = 2,56$$

mientras que para la carta CUSUM S es:

$$k = \frac{(1,064)}{2} \left( 1 + \frac{1,2\sigma_0}{\sigma_0} \right) = 1,1$$

Los valores de  $h$  se calculan de acuerdo a un ARL bajo control deseados. Para los casos anteriores son 4,88 y 1,9 respectivamente cuando ARL= 200.

#### 5.4.2. Carta CUSUM V

Sea  $S_i^2$  la varianza del  $i$ -ésimo grupo. Definimos

$$V_i = \phi^{-1} \left\{ H \left( \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2} \right) \right\}$$

donde  $\phi^{-1}(\cdot)$  es la función inversa de la distribución normal estándar y  $H(\cdot)$  es la función de distribución acumulada de una distribución chi-cuadrado con  $n - 1$  grados de libertad.

Se conoce que  $V_i \sim N(0, 1)$ , por tanto un incremento (decremento) en  $\sigma$  producirá un incremento (decremento) en la media de  $V_i$ . Los estadísticos CUSUM usando  $V_i$  son entonces

$$\begin{aligned} S_{H,i} &= \text{máx}\{0, S_{H,i-1} + V_i - k\} \\ S_{L,i} &= \text{mín}\{0, S_{L,i-1} + V_i + k\}. \end{aligned}$$

#### 5.4.3. Carta CUSUM CP

Esta carta CUSUM se deriva de la prueba de la razón de verosimilitud para el punto de cambio de la varianza de un proceso. La notación CP hace referencia a las iniciales –change point–.

Sea  $Y_{t,j}$  la  $j$ -ésima observación en el subgrupo  $t$ , donde  $j = 1, \dots, n$  y  $t = 1, \dots, T$ .  $T$  representa el subgrupo actual.

Suponga que para los subgrupos  $0 < t \leq \psi$ ,  $Y_{t,j} \sim iidN(\mu_0, \sigma_0^2)$ , y para los subgrupos  $\psi < t \leq T$ ,  $Y_{t,j} \sim iidN(\mu_0, \sigma_a^2)$ .

Este modelo indica que  $\psi$  representa el último subgrupo antes de que ocurra el cambio en la varianza. El caso  $\psi \geq T$  indica la situación en que no ocurre cambio alguno.

Las hipótesis de interés son:

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \dots = \sigma_T^2 = \sigma_0^2 \\ H_a : \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \dots = \sigma_\psi^2 = \sigma_0^2 \\ &\sigma_{\psi+1}^2 = \dots = \sigma_T^2 = \sigma_a^2 \end{aligned}$$

donde  $0 < \psi \leq T$  es desconocido.

Sean  $L_0$  y  $L_\psi$  las funciones de verosimilitud basados en los subgrupos formados bajo  $H_0$  y  $H_a$ ,

$$\begin{aligned} L_0(y_1, y_2, \dots, y_T) &= \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ -\frac{(y_{t,j} - \mu)^2}{2\sigma_0^2} \right] \\ L_\psi(y_1, y_2, \dots, y_T) &= \prod_{t=1}^\psi \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ -\frac{(y_{t,j} - \mu)^2}{2\sigma_0^2} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=\psi+1}^T \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp \left[ -\frac{(y_{t,j} - \mu)^2}{2\sigma_a^2} \right]. \end{aligned}$$

La razón de verosimilitud está dada por,

$$LR_\psi = \frac{L_\psi(y_1, y_2, \dots, y_T)}{L_0(y_1, y_2, \dots, y_T)}$$

es decir,

$$LR_\psi = \left( \frac{\sigma_0^2}{\sigma_a^2} \right)^{\frac{n(T-\psi)}{2}} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_a^2} \right) \sum_{t=\psi+1}^T \sum_{j=1}^n (y_{t,j} - \mu)^2 \right].$$

Sea

$$LR_{\psi^*} = \max_{0 \leq \psi < T} LR_\psi.$$

Si  $LR_{\psi^*} > A$  para alguna constante  $A \geq 1$ , se favorece la hipótesis alternativa  $H_a$ . En caso contrario, se acepta  $H_0$ .

Sea  $\delta = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_0^2}$ , entonces

$$y_t = \max_{0 \leq \psi < T} \ln(LR_\psi) = \max_{0 \leq \psi < T} \left[ \frac{n}{2}(\psi - T)(\ln \delta) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) \sum_{t=\psi+1}^T z_t^2 \right]$$

donde

$$z_t^2 = \sum_{j=1}^n z_{t,j}^2 = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{y_{t,j} - \mu_0}{\sigma_0} \right]^2.$$

Si  $\delta^+ = \frac{\sigma_{a+}^2}{\sigma_0^2}$  y  $\delta^- = \frac{\sigma_{a-}^2}{\sigma_0^2}$  representan un incremento y decremento estandarizado respectivamente, en la varianza del proceso, que uno desea detectar, la carta CUSUM CP señala un cambio en la varianza del proceso en el subgrupo  $T$ , si:

$$\max_{0 < \psi \leq T} \left\{ \sum_{t=\psi+1}^T \left[ \sum_{j=1}^n z_{t,j}^2 - n \left( \frac{\ln \delta^+}{1 - (1/\delta^+)} \right) \right] \right\} \geq h_u$$

para  $\delta^+ > 1$ , ó

$$\max_{0 < \psi \leq T} \left\{ \sum_{t=\psi+1}^T \left[ \sum_{j=1}^n (-z_{t,j}^2) + n \left( \frac{\ln \delta^-}{1 - (1/\delta^-)} \right) \right] \right\} \geq h_l$$

para  $\delta^- \leq 1$ , donde  $h_u$  y  $h_l$  son los límites de control para las cartas que monitorean incrementos y decrementos respectivamente.

Definiendo los valores de referencia,  $k^\pm$ , como

$$k^\pm = \frac{\ln \delta^\pm}{1 - \frac{1}{\delta^\pm}}$$

se puede probar que este procedimiento de dos lados para detectar cambios en la variabilidad del proceso se puede expresar mediante las estadísticas,

$$\begin{aligned} S_{H,t} &= \max[0, S_{H,t-1} + z_t^2 - nk^+] \\ S_{L,t} &= \min[0, S_{L,t-1} + z_t^2 + nk^-]. \end{aligned}$$

#### 5.4.4. Carta CUSUM para Observaciones Individuales

Para observaciones individuales, Hawkins (1981) prueba que la variable

$$z_t = \frac{\left| \frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0} \right|^{1/2} - 0,8222}{0,349}$$

sigue aproximadamente una distribución normal estándar. Así que las estadísticas CUSUM propuestas son

$$\begin{aligned} S_{H,t} &= \max[0, S_{H,t-1} + z_t - k] \\ S_{L,t} &= \min[0, S_{L,t-1} + z_t + k]. \end{aligned}$$

$S_{H,t}$  se usa para detectar incrementos y  $S_{L,t}$  para detectar decrementos en la dispersión del proceso. Se propone usar los mismos valores de  $h$  y  $k$  que se utilizan en la carta CUSUM para monitorear la media del proceso.

### 5.5. Carta CUSUM Poisson

Los esquemas CUSUM presentados en las secciones anteriores asumen que la característica de calidad es una variable continua. Sin embargo, tal como se vió en el capítulo 4, en muchos procesos la variable de interés es discreta. Por ejemplo cuando se cuenta el número de no conformidades de un artículo, el número de accidentes de trabajo en un mes, etc. Cuando la variable de interés,  $X$ , es el número de no conformidades en una unidad en cierto proceso de producción, la distribución Poisson se toma usualmente como modelo. En este caso se registran  $X_1, X_2, \dots$  las cuales son variables aleatorias Poisson independientes e idénticamente distribuídas con media  $\mu$ . El proceso se considera bajo control cuando  $\mu = \mu_0$  y fuera de control cuando  $\mu = \mu_1$ .

Las estadísticas CUSUM utilizadas para detectar incrementos ( $\mu_1 > \mu_0$ ) o decrementos ( $\mu_1 < \mu_0$ ) en la media, están definidas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} S_{H,n} &= \max[0, S_{H,n-1} + X_n - k^+] \\ S_{L,n} &= \min[0, S_{L,n-1} + X_n + k^-]. \end{aligned}$$

donde,

$$k^+ = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0}, \quad y \quad k^- = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\ln \mu_0 - \ln \mu_1}.$$

La carta produce una señal fuera de control cuando  $S_{H,n} > h^+$ , o  $S_{L,n} < h^-$ , para los intervalos de decisión  $h^+$  y  $h^-$ , calculados de acuerdo a una ARL bajo control especificada.

Estas expresiones son válidas cuando las muestras que se toman son de igual tamaño. En varias ocasiones sin embargo, el tamaño de las muestras puede variar. Por ejemplo, si las muestras se toman diariamente, un día es posible que se cuente el número de no conformidades de una muestra de 40 artículos, mientras que al siguiente día la muestra pudiera ser de 50 artículos. Si el número de no conformidades por artículo sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$ , entonces el número total en la muestra de tamaño 50 sigue una distribución Poisson con parámetro  $\mu = 50\lambda$ . En estos casos, en lugar de monitorear  $\mu$ , nos enfocamos mejor en el parámetro  $\lambda$ . Entonces, supongamos que el tamaño de la  $n$ -ésima muestra es  $W_n$ , y que el proceso es Poisson con parámetro  $\lambda$ . La estadística CUSUM para monitorear cambios de la media bajo control  $\lambda_0$  a  $\lambda_1 > \lambda_0$ , está dada por,

$$S_{H,n} = \max[0, S_{H,n-1} + X_n - W_n k^+]$$

donde,

$$k^+ = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\ln \lambda_1 - \ln \lambda_0}.$$

De forma similar se puede definir la estadística CUSUM que detecte cambios de  $\lambda_0$  a  $\lambda_1 < \lambda_0$ . Aspectos teóricos adicionales de esta carta, así como como los cálculos de ARLs e intervalos de decisión pueden ser consultados en Lucas (1985) y Hawkins & Olwell (1988).



## Capítulo 6

# Cartas de Control EWMA.

El proceso **EWMA** (Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente) en control de calidad, fue expuesto inicialmente por Roberts (1959). Sin embargo, solamente durante los últimos años el proceso EWMA ha empezado a ser utilizado por los ingenieros de control de calidad.

Una clave para entender las diferencias entre las cartas de control Shewhart, CUSUM y EWMA es el conocimiento de como cada técnica usa los datos generados por el proceso de producción. En la carta clásica de Shewhart, la señal de que el proceso pueda estar fuera de control, es la aparición de un punto fuera de los límites  $3\sigma$ . En términos de una función de ponderación, la señal depende del último punto graficado. Esto es, el peso dado al último punto es  $w_t = 1$ , y el peso dado a los valores previos es  $w_{t-k} = 0$  para  $k \geq 1$ . Para el gráfico CUSUM usual, la señal de fuera de control depende de la suma  $S_t = \sum_{j=1}^t (x_j - k)$ . Al calcular una suma, cada término tiene igual peso. Por tanto, el último punto tiene igual influencia que los anteriores y  $w_t = \frac{1}{n}$  para todo  $t$ . El EWMA es una estadística con la característica que da menos y menos peso a los datos, a medida que ellos se hacen más viejos.

### 6.1. Carta EWMA para la Media

Un esquema de control EWMA se basa en la siguiente estadística:

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} , \quad t = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

donde  $0 < \lambda \leq 1$  es una constante de suavizamiento. El valor de partida  $Z_0$  es usualmente el valor objetivo.  $X_t$  puede ser el valor observado individualmente del proceso al tiempo  $t$ , o también puede ser la media muestral de una muestra tomada al tiempo  $t$ . Para  $\lambda = 1$ , el EWMA coloca todo su peso en la observación más reciente, como lo hace la carta  $\bar{X}$  de Shewhart. Para  $\lambda$  cercano a cero, la observación más reciente recibe poco peso, y el EWMA se parece al CUSUM. Así,  $\lambda$  caracteriza la profundidad de la memoria del EWMA, es decir la rata de decaimiento de los pesos.

**Ejemplo.** Sea  $\lambda = 0,5$  y supongamos que en  $t = 0$  un proceso que está bajo control tiene un valor objetivo de 50. Es decir, se asume que  $Z_0 = 50$ . La Tabla 6.1 muestra los valores EWMA para los primeros cinco datos.

T	observaciones	EWMA
1	52	51
2	47	49
3	53	51
4	49.3	50.15
5	50.1	50.13

Tabla 6.1. Valores EWMA con  $\lambda = 0,5$  y  $Z_0 = 50$

Los primeros dos valores se calculan de la siguiente manera:

$$Z_1 = (0,5)(52) + (1 - 0,5)(50) = 51$$

$$Z_2 = (0,5)(47) + (1 - 0,5)(51) = 23,50 + 0255,5 = 49$$

Los otros valores EWMA se calculan en forma similar.

De (6.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda X_t + (1 - \lambda) [\lambda X_{t-1} + (1 - \lambda) Z_{t-2}] \\ &= \lambda X_t + \lambda (1 - \lambda) X_{t-1} + (1 - \lambda)^2 Z_{t-2} \\ &= \lambda X_t + \lambda (1 - \lambda) X_{t-1} + \lambda (1 - \lambda)^2 X_{t-2} + (1 - \lambda)^3 Z_{t-3} \end{aligned}$$

continuando de esta manera, encontramos que el EWMA es una combinación lineal de las observaciones de la forma:

$$Z_t = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j X_{t-j} + (1 - \lambda)^t Z_0$$



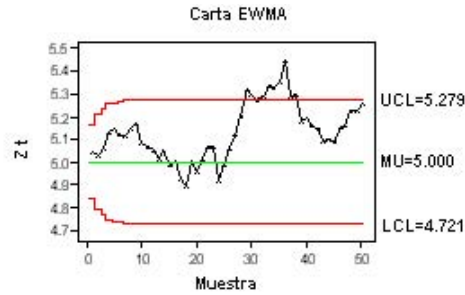
donde los pesos de las observaciones pasadas decaen exponencialmente como en una serie geométrica.

La selección de  $\lambda$  se le puede dejar al analista de control de calidad. Por ejemplo, con datos econométricos algunos autores acostumbran usar  $\lambda = 0,2 \pm 0,1$ . Otra forma de calcular  $\lambda$  usa un proceso iterativo de mínimos cuadrados. Si se define  $e_t = X_t - Z_t$ , para diferentes valores de  $\lambda$  se calcula  $\sum_{i=1}^t e_i^2$  y se escoge el valor de  $\lambda$  que produzca el menor valor de esta suma de cuadrados. Cuando las  $X_i$  son iid con varianza común  $\sigma^2$  se tiene que,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= \lambda^2 [1 + (1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)^4 + \dots + (1 - \lambda)^{2(t-1)}] \sigma^2 \\ &= \frac{\lambda^2 [1 - (1 - \lambda)^{2t}]}{1 - (1 - \lambda)^2} \sigma^2 \\ &= \frac{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2t}]}{2 - \lambda} \sigma^2. \end{aligned}$$

Esta varianza converge rápidamente a su valor asimptótico. Es decir, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\sigma_Z^2 = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \sigma^2.$$



Gráfica 6.1. Carta EWMA para los datos de la Tabla 5.2, añadiendo 0.25 a los últimos 25 datos.

Un estimativo de  $\sigma^2$  se puede obtener de la suma de cuadrados de los  $e$ 's, así:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t - 1} \sum_{i=1}^t e_i^2.$$

Cuando las cartas Shewhart y EWMA se construyen y grafican simultáneamente, se puede también usar:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_{Shewhart}^2 .$$

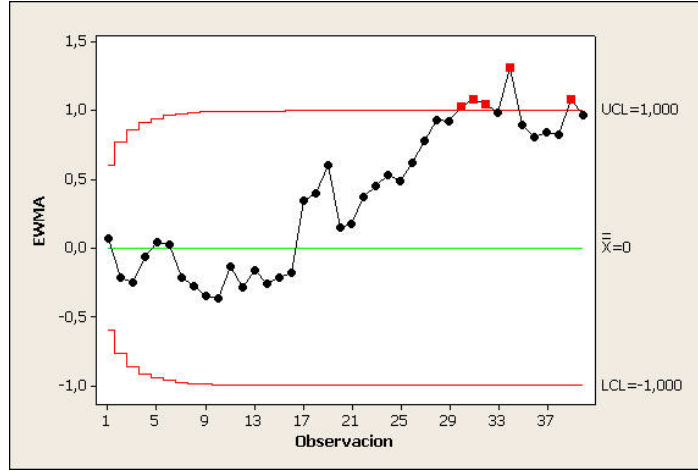
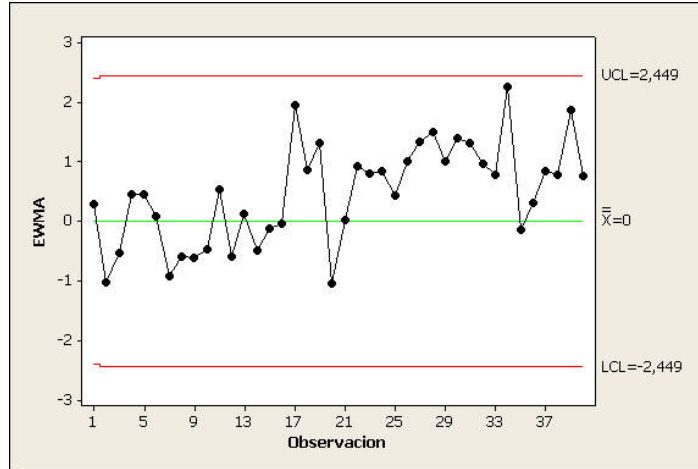
Una vez se tiene  $\hat{\sigma}_Z^2$ , se pueden construir los límites de control superior e inferior para la carta EWMA:

$$Z_0 \pm L\hat{\sigma}_Z .$$

$L$  es una constante que en algunos casos se iguala a 3. El proceso es considerado fuera de control, y por lo tanto se deben tomar acciones correctivas, cuando  $Z_i$  caiga fuera de los límites de control. La Gráfica 6.1 presenta el esquema EWMA para los datos de la Tabla 5.2 añadiendo 0.25 a los últimos datos.

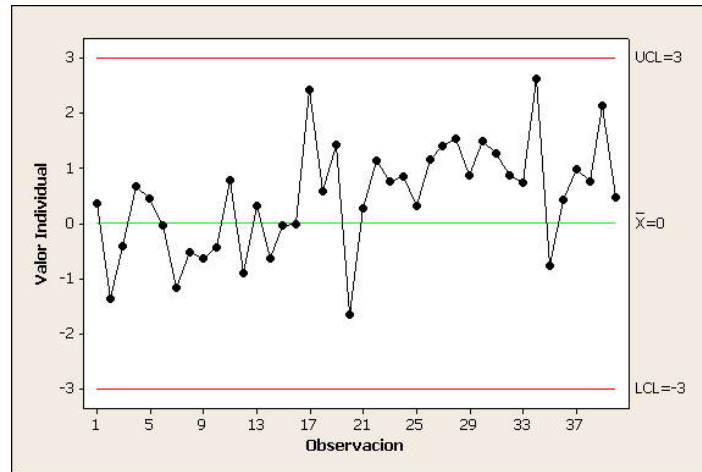
**Ejemplo:** Se generan aleatoriamente 40 observaciones de una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2 = 1$ . Las primeras 20 observaciones se generan con media  $\mu = 0$ , la cual se considera acá como la distribución bajo control. Las últimas 20 observaciones son generadas con media  $\mu = 1$  y simulan el proceso fuera de control. La gráfica 6.2 presenta la carta EWMA para estas observaciones con parámetro  $\lambda = 0,2$  y  $L = 3$ . La gráfica 6.3 presenta la carta EWMA para las mismas observaciones pero con parámetro  $\lambda = 0,8$  y con  $L = 3$ . La gráfica 6.4 muestra la carta  $X$  para las 40 observaciones. Se observa que la carta EWMA con  $\lambda = 0,2$  es la única que señala observaciones fuera de control. Aunque el primer punto fuera de control corresponde a la observación 30, la pendiente de la curva cambia significativamente a partir de la observación 21, identificando claramente el cambio que ha sufrido la media del proceso. La carta EWMA con  $\lambda = 0,8$  es similar a la carta  $X$ , y no señala cambio en el proceso. Se aclara con este ejemplo que cuando  $\lambda$  se acerca a 1,0, la carta EWMA se asemeja a la carta  $X$  de Shewhart. En conclusión, la carta EWMA con valores pequeños del parámetro  $\lambda$ , detecta más fácilmente cambios en la media que la carta Shewhart.

Con el objeto de comparar una carta EWMA con otro esquema de control, ó, para diseñar una carta EWMA, es importante tener conocimiento del ARL. Roberts (1959) mediante simulación, desarrolló nomogramas de ARL's para el caso de observaciones distribuidas normalmente. Crowder (1987) tabuló el ARL resolviendo un sistema de ecuaciones integrales. Lucas & Saccucci (1990) evaluaron las propiedades de una carta EWMA mediante su repre-

Gráfica 6.2. Carta EWMA con parámetro  $\lambda = 0,2$ Gráfica 6.3. Carta EWMA con parámetro  $\lambda = 0,8$ 

sentación como una cadena de Markov. Las ARL fueron evaluadas para observaciones distribuidas normalmente. En todos los casos, las ARL fueron evaluadas para valores fijos de  $\lambda$  y  $L$ , donde  $L$  es el coeficiente de  $\hat{\sigma}_Z$  en el cálculo de los límites de control.

Para finalizar esta sección describimos de manera general el problema inercial que sufre la carta EWMA. En cartas de control que tienen en cuenta información de períodos anteriores, como la carta CUSUM o la carta EW-

Gráfica 6.4. Carta  $X$  para las 40 observaciones simuladas

MA, es posible que la estadística que se grafica esté en una posición algo desventajosa inmediatamente antes de que el parámetro del proceso cambie. Por ejemplo, la estadística EWMA basada en las medias muestrales puede estar cercana al límite de control inferior cuando ocurra un incremento en la media del proceso. Al estar cerca del límite de control inferior, el tiempo requerido para alcanzar el límite de control superior y producir una señal fuera de control, será superior al que tomaría la carta si la estadística EWMA estuviera cercana a la línea central o al límite de control superior cuando ocurrió el cambio. Este retraso en dar la señal se conoce como un problema de inercia. Woodall & Mahmoud (2005) proponen una medida de inercia que denominan resistencia a la señal, y comparan varias cartas de control para monitorear la media de un proceso, entre ellas las cartas CUSUM y EWMA. Concluyen que la carta EWMA con valores pequeños del parámetro de suavizamiento es la que más se ve afectada por este problema.

## 6.2. Cálculo ARL para un Esquema EWMA con Cadenas de Markov.

Lucas & Saccucci (1990) utilizan un procedimiento similar al descrito por Brook & Evans (1972) en el cálculo del ARL.

El procedimiento consiste en dividir el intervalo definido por los límites de

control en  $t = 2m + 1$  subintervalos, cada uno de longitud  $2\delta$ .

La estadística EWMA  $Z_i$  está en el estado  $j$  al tiempo  $i$  si

$$S_j - \delta < Z_i \leq S_j + \delta \quad \text{para } j = -m, -m + 1, \dots, m$$

$S_j$  representa el punto medio del  $j$ -ésimo intervalo. Así tenemos  $2m$  estados de longitud  $2\delta$  y el estado 0,  $S_0$ , que representa en sí mismo un estado.  $Z_i$  está en el estado absorbente si cae fuera de los límites de control.

La distribución de la longitud de corrida (RL) de un EWMA queda determinada por el vector de probabilidades iniciales y por la matriz de probabilidades de transición.

El vector de probabilidades iniciales se representa por

$$\mathbf{p}' = (p_{1-m}, \dots, p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_m)$$

donde  $p_j$  es la probabilidad de que  $Z$  empiece en el estado  $j$ ,

$$p_j = P[z_1 \in [S_j - \delta, S_j + \delta] \mid \mu_0 = Z_0].$$

La matriz de probabilidades de transición está dada por

$$P = \begin{pmatrix} R & (I - R)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $p_{jk}$  la probabilidad de que la estadística  $Z_t$  vaya del estado ( $j$ ) al estado ( $k$ ) en un paso. Para aproximar esta probabilidad se asume que la estadística  $Z_t$  es igual a  $S_j$ . Es decir,

$$\begin{aligned} p_{jk} &= P\left[\text{ir a } S_k \mid \text{está en } S_j\right], j = -m, -m + 1, \dots, m \\ &= P\left[Z_k \in (S_k - \delta, S_k + \delta) \mid Z_{k-1} = S_j\right] \\ &= P\left[S_k - \delta \leq \lambda X_k + (1 - \lambda)S_j \leq S_k + \delta\right] \\ &= P\left[S_k - \delta - (1 - \lambda)S_j \leq \lambda X_k \leq S_k + \delta - (1 - \lambda)S_j\right] \\ &= P\left[\lambda^{-1}\{(S_k - \delta) - (1 - \lambda)S_j\} \leq X_k \leq \lambda^{-1}\{(S_k + \delta) - (1 - \lambda)S_j\}\right]. \end{aligned}$$

La probabilidad de paso de un estado bajo control al estado fuera de control se calcula por diferencia, pues las filas de la matriz de probabilidades de transición suman 1.

Si

$$X_i \sim iid N(\mu_X, \sigma_X^2),$$

$$p_{jk} = P\left[\frac{\lambda^{-1}\{(S_k - \delta) - (1 - \lambda)S_j\} - \mu_X}{\sigma_X} < Z \leq \frac{\lambda^{-1}\{(S_k + \delta) - (1 - \lambda)S_j\} - \mu_X}{\sigma_X}\right]$$

$$= \Phi\left\{(\lambda\sigma_X)^{-1}\{(S_k + \delta) - (1 - \lambda)S_j - \lambda\mu_X\}\right\} - \Phi\left\{(\lambda\sigma_X)^{-1}\{(S_k - \delta) - (1 - \lambda)S_j - \lambda\mu_X\}\right\}.$$

Las probabilidades de que la estadística EWMA vaya de un estado a otro en  $i$  pasos están dadas por la matriz,

$$P^i = \begin{pmatrix} R^i & (I - R^i)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$P[RL \leq i] = \mathbf{p}'(I - R^i)\mathbf{1}$$

y

$$\begin{aligned} P[RL = i] &= P[RL \leq i] - P[RL \leq i - 1] \\ &= \mathbf{p}'(I - R^i)\mathbf{1} - \mathbf{p}'(I - R^{i-1})\mathbf{1} \\ &= \mathbf{p}'(R^{i-1} - R^i)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} ARL(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} iP[RL = i] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{p}'(R^{i-1} - R^i)\mathbf{1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}' R^{i-1}\mathbf{1} \\ &= \mathbf{p}'(I - R)^{-1}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Lucas & Saccucci (1990) evaluaron el ARL para  $t = 51, 59, 67, 75$  y  $83$ . El ARL para el estado continuo fue aproximado como el intercepto mínimos cuadrados de la ecuación cuadrática (en el recíproco de  $t$ )

$$ARL(t) = ARL(\text{asimptótico}) + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2}.$$

### 6.3. Carta EWMA para la Dispersión

Para datos agrupados Crowder & Hamilton (1992) proponen calcular la estadística EWMA con los valores de  $\log(S_i^2)$  donde  $S_i^2$  es la varianza muestral del  $i$ -ésimo subgrupo. Con base en las aproximaciones derivadas para la media y la varianza de  $\log(S_i^2)$ ,

$$c = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4}$$

y

$$d = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}$$

respectivamente, la carta se define de la siguiente forma:

$$LCS = c + L \left[ d \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right]^{1/2}$$

$$LC = c$$

$$LCI = c - L \left[ d \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right]^{1/2}$$

La estadística que se calcula es

$$EWMA_i = \lambda \log(S_i^2) + (1 - \lambda)EWMA_{i-1}$$

para  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots$  y  $EWMA_0 = c$ .

La motivación de esta propuesta es que la distribución de  $\log(S_i^2)$  tiende a ser más normal que la distribución de la varianza muestral  $S_i^2$ . Castagliola (2005) propone usar la siguiente transformación de  $S_i^2$ ,

$$T_i = a + b \ln(S_i^2 + c)$$

con  $c > 0$ , y construir entonces la siguiente estadística EWMA:

$$Z_i = \lambda T_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}.$$

Si  $a, b$  y  $c$  se seleccionan apropiadamente, esta transformación produce una aproximación normal de  $T_i$  mejor que la aproximación obtenida por Crowder & Hamilton (1992). Castagliola (2005) presenta la metodología para la selección de estas constantes.

Una propuesta para datos individuales consiste en calcular la siguiente estadística,

$$S_t^2 = \lambda(X_t - \mu)^2 + (1 - \lambda)S_{t-1}^2$$

para  $t \geq 2$ ,  $0 < \lambda \leq 1$  y  $S_1^2 = (X_1 - \mu)^2$ .

Los límites de control para esta carta están dados por,

$$LCS = \sigma_0^2 \left[ 1 + L \sqrt{\frac{2\lambda}{2 - \lambda}} \right]$$

y

$$LCI = \max \left[ 0, \sigma_0^2 \left[ 1 - L \sqrt{\frac{2\lambda}{2 - \lambda}} \right] \right].$$

Valores de  $L$  para un  $ARL$  bajo control dado, son calculados en Acosta-Mejia & Pignatiello (2000), usando cadenas de Markov.

Chen et al. (2001) proponen una carta que permite monitorear simultáneamente media y dispersión. El esquema es el siguiente:

Sean

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n_i}}$$

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left( \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2} \right) \right\}$$

donde  $\bar{X}_i$  y  $S_i$  son la media y la varianza muestral del  $i$ -ésimo subgrupo el cual es de tamaño  $n_i$ .  $\Phi^{-1}$  es la función inversa de la distribución normal estándar y  $H(\cdot)$  es la función de distribución acumulada de una chi-cuadrado con  $n_i - 1$  grados de libertad.

Como  $\bar{X}_i$  y  $S_i$  son independientes, también lo son  $U_i$  y  $V_i$ . Si asumimos que bajo control cada observación  $X_i$  sigue una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces  $U_i \sim N(0, 1)$  y  $V_i \sim N(0, 1)$ .

Se definen

$$Y_i = \lambda U_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$Z_i = \lambda V_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$



y

$$M_i = \max\{|Y_i|, |Z_i|\}$$

La estadística  $M_i$  será grande cuando  $\mu$  y/o  $\sigma$  cambien. Como  $M_i$  toma solamente valores positivos, la carta usa solo el límite de control superior,

$$LCS = E(M_i) + L\sqrt{V(M_i)}$$

donde  $E(M_i)$  y  $V(M_i)$  corresponden a la media y la varianza de  $M_i$  respectivamente.

## 6.4. Carta EWMA Poisson

Supongamos que la característica de calidad,  $X$ , sigue una distribución Poisson, como el caso en que contamos el número de no conformidades en una unidad. Observamos entonces en el tiempo  $X_1, X_2, \dots$  las cuales son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Poisson con media  $\mu$ . Cuando el proceso está bajo control  $\mu = \mu_0$ .

Sea

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

donde  $Z_0 = \mu_0$ . Borror, Champ & Rigdon (1998) proponen una carta EWMA Poisson, definida por los límites de control,

$$h_U = \mu_0 + A_U \sqrt{\frac{\lambda \mu_0}{2 - \lambda}},$$

y

$$h_L = \mu_0 - A_L \sqrt{\frac{\lambda \mu_0}{2 - \lambda}}.$$

La carta da una señal fuera de control cuando  $Z_t < h_L$ , o  $Z_t > h_U$ . Usualmente  $A_L = A_U = A$ . Como las  $X_t$  son variables aleatorias con distribución Poisson, la estadística EWMA  $Z_t$  es no negativa. Por tanto, si al calcular el valor  $h_L$  este resulta negativo, entonces le asignamos el valor cero. En este caso, puede ser útil asignar  $A_L \neq A_U$ , de tal forma que el límite de control inferior sea mayor que cero y posibles decrementos en la media puedan ser detectados, aunque en algunos casos solamente interesan incrementos en la media, ya que estos indican un aumento en el número de no conformidades. Borror et al. (1998) utilizan cadenas de Markov para calcular ARLs y presentan un método para encontrar los valores de  $A$ .

## 6.5. Uso del EWMA como Predictor

En varios procesos industriales el EWMA se utiliza para pronosticar la media del proceso en el siguiente periodo de tiempo. La estadística EWMA se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \\ &= Z_{t-1} + \lambda(X_t - Z_{t-1}) \\ &= Z_{t-1} + \lambda e_t. \end{aligned}$$

Es decir, el EWMA en el periodo  $t$  es igual al EWMA en el periodo  $t - 1$  más una fracción  $\lambda$  del error de pronóstico para la media un paso adelante.

Si a la ecuación anterior se le añade la suma de los errores acumulados hasta el tiempo  $t$ , se obtiene la siguiente expresión,

$$Z_t = Z_{t-1} + \lambda_1 e_t + \lambda_2 \sum_{i=1}^t e_i$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son constantes. Definiendo por  $\nabla e_t = e_t - e_{t-1}$  la primera diferencia de los errores, se obtiene la siguiente expresión para  $Z_t$ ,

$$Z_t = Z_{t-1} + \lambda_1 e_t + \lambda_2 \sum_{i=1}^t e_i + \lambda_3 \nabla e_t$$

donde  $0 < \lambda_i \leq 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Esta última expresión se conoce como ecuación de control *PID* (ajustes proporcional, integral y diferencial).

## Capítulo 7

# Cartas de Control Robustas.

La metodología estadística utilizada en la construcción de cartas de control se basa en ciertos supuestos, uno de los cuales generalmente es la normalidad. Cuando dicho supuesto no se satisface, los métodos estadísticos tradicionales pierden eficiencia y por lo tanto no son óptimos. Los métodos robustos en estadística han sido una alternativa de solución a este problema y su uso cada vez es mayor en todas las áreas de la Estadística. En procesos industriales, donde las características de calidad siguen distribuciones usualmente distintas a la normal, los métodos robustos han probado ser útiles. La estimación usual de parámetros, por ejemplo la media poblacional mediante la media muestral, realizada durante la Fase I de un proceso de construcción de cartas y los límites de control construidos a partir de dichas estimaciones, es muy sensible a desvíos de la normalidad y a la presencia de outliers.

Este hecho motivó el uso de procedimientos robustos en control de procesos. A continuación se presentan algunas propuestas que ilustran aspectos metodológicos en la construcción de cartas de control robustas.

### 7.1. Cartas Robustas $\bar{X}$ Y $R$ .

Langenberg & Iglewicz (1986) propusieron un método para la construcción de los límites de control para gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ . Este procedimiento consiste en remplazar  $\bar{\bar{X}}$  por la media recortada de los promedios de los subgrupos, y  $\bar{R}$  por la media recortada de los rangos de los subgrupos.

La base para proponer este método se basa en una propiedad denominada

resistencia. Un estimador es *resistente* si no está muy influenciado por unas pocas observaciones extremas. El rango y la media muestral son claramente no resistentes. Como la media muestral, basada en un número pequeño de observaciones, es muy sensible a valores extremos, este estimador es una buena escogencia para identificar desvíos en el proceso y observaciones fuera de control. La construcción de los límites de control por otra parte, no debería ser muy influenciada por unos pocos valores inusuales. Por esta razón, es ventajoso usar medidas mas resistentes que los promedios en la construcción de tales límites. Estos métodos se denominan *procedimientos robustos*.

En general, se entiende por robustez la propiedad que tiene un proceso de cumplir sus objetivos, aun cuando las hipótesis bajo las cuales fue desarrollado sean ligeramente incorrectas. En el caso de las cartas de control, el propósito es el de detectar desviaciones del estado de control a fin de descubrir y resolver problemas que puedan estar presentes en el proceso. Uno de tales problemas es la presencia de outliers dentro de los subgrupos.

La media recortada elimina un porcentaje dado de las observaciones ordenadas de cada cola, y calcula la media de las observaciones restantes. Por ejemplo, la media recortada 10 % de 20 observaciones, se obtiene calculando  $\frac{1}{16} \sum_{i=3}^{18} X_{(i)}$ . La media y el rango recortados  $\overline{\overline{X}}(\alpha)$  y  $\overline{R}(\alpha)$  se calculan entonces eliminando un número especificado de extremos  $\overline{X}_{(i)}$  y  $R_i$ .

Supongamos que el proceso está bajo control y que las observaciones son independientes, distribuidas normalmente con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . En razón a la simetría de la distribución normal con respecto de la media,

$$E\left(\overline{\overline{X}}(\alpha)\right) = E\left(\overline{\overline{X}}\right).$$

Por esta razón se puede remplazar  $\overline{\overline{X}}$  por  $\overline{\overline{X}}(\alpha)$  como la línea central en el gráfico  $\overline{\overline{X}}$ .

Además, como la distribución de  $R$  es asimétrica,

$$E\left(\overline{R}\right) = k E\left(\overline{R}(\alpha)\right).$$

Así que  $\overline{R}$  se reemplaza por  $k(\overline{R}(\alpha))$  en la construcción de los límites de control de las cartas  $\overline{R}$  y  $R$ . Los valores de  $k$  fueron calculados usando simulación, y dieron ligeramente superiores a 1,0 cuando el tamaño por grupo  $n$  era muy pequeño, y se aproximan a 1,0 a medida que  $n$  aumenta.

Si  $g$  es el número de subgrupos, Langenberg & Iglewicz (1986) sugieren recortar  $[\alpha g + 0,4]$  subgrupos de cada cola. Por ejemplo, si  $\alpha = 0,10$  y  $g = 21$ , recorte  $[(0,10)(21) + 0,4] = [2,5] = 2$  subgrupos de cada cola.

Métodos de simulación muestran que ambos métodos producen casi los mismos límites cuando el proceso es generado de observaciones normales. Sin embargo, cuando las observaciones no son normales, los límites construidos mediante el proceso robusto son mas estrechos y hay por tanto más posibilidad de señalar un problema.

Rocke (1989) investigó mediante simulación otros procedimientos robustos en la construcción de cartas de control  $\bar{X}$  y  $R$ . Propuso el uso de la media de los rangos intercuartílicos (RIC) de los subgrupos, para la construcción de los límites de control. Para la carta  $\bar{X}$  propuso usar la media usual y la media recortada. Rocke (1992) presentó con más detalles la construcción de cartas  $\bar{X}_Q$  y  $\bar{R}_Q$ , que son cartas cuyos límites de control se construyen usando como estimador de la desviación estándar del proceso, el promedio de los RIC de los subgrupos, en lugar de los rangos de los subgrupos. Rocke muestra que las cartas así construidas son más eficientes que las usuales, para detectar outliers.

Martinez (1993) propuso la construcción de cartas  $\bar{X}$  y  $R$  robustas, usando la media y el rango winsorizados. Como en los casos anteriores, estas cartas resultaron eficientes en la detección de outliers. Tatum (1997) propuso un estimador robusto para estimar la desviación estándar del proceso. El procedimiento centra cada subgrupo con base en la mediana y luego aplica un estimador biweight A modificado a los residuales. Usa este estimador en la construcción de la carta  $R$ . Para otros procedimientos ver Abu-Shawiesh & Abdullah (1999), Bakir (2004), Chakraborti, van der Laan & Bakir (2001), Chakraborti, van der Laan & van de Wiel (2004), Khoo (2004), Mast & Roes (2004), and Davis & Adams (2005).

Schoonhoven, Nazir, Riaz & Does (2011) compararon varios estimadores robustos de localización para la construcción de la carta de control  $\bar{X}$  en Fase I. Adicionalmente examinaron el impacto de estos estimadores en el desempeño de la carta en Fase II. Entre los estimadores estudiados estan: la mediana de las medias muestrales, la media de las medianas muestrales, el estimador Hodges-Lehmann y la media recortada de las medias recortadas muestrales. En todos los casos la desviación estándar fue estimada usando el método de Tatum (1997). Schoonhoven & Does (2012) estudian la robustez de la carta de control para la desviación estándar en Fase I, comparando el estimador biweight A de Tatum (1997) y varios estimadores recortados.

Otros estimadores robustos utilizados en cartas de control para monitorear la dispersión de un proceso se pueden leer en Ali et al. (2016).

Se debe enfatizar aquí, que en todos estos procedimientos, para la construcción de los límites de control, se usa una medida de dispersión resistente a los outliers en los subgrupos. Pero las estadísticas graficadas de cada subgrupo deben ser la media y el rango usuales, y no una medida resistente de localización y dispersión.

En conclusión, las cartas de control robustas  $\bar{X}$ ,  $R$  y  $S$  son casi igualmente efectivas que las estándar, bajo la distribución normal. Pero son mucho más efectivas ante la presencia de outliers.

## 7.2. Cartas CUSUM Robustas

Rocke (1989) propuso un CUSUM robusto usando las medias recortadas por subgrupo, en lugar de las medias muestrales. La varianza de una media recortada puede ser estimada usando la varianza *winsorizada*, Dixon & Tukey (1968). El cálculo de ARL para este caso mostró que bajo la distribución normal, el CUSUM robusto fue menos efectivo que el CUSUM estándar. Esto puede ser debido a que la media recortada es poco eficiente como un estimador de localización, cuando el tamaño de la muestra es muy pequeño. Además, esta propuesta no es aplicable en situaciones donde los datos son observaciones individuales.

Hawkins (1993) propuso un CUSUM *winsorizado*. Los valores CUSUM de esta carta están definidos así:

$$S_n = \max \left[ 0, S_{n+1} + \min\{U_n, W\} - k \right]. \quad (7.1)$$

La carta da una señal si  $S_n > h$ , donde  $k$  es el valor de referencia y  $h$  el intervalo de decisión.  $U_n$  es la observación estandarizada y  $W$  es el valor a partir del cual winsorizamos las observaciones. En el CUSUM estándar,  $W = \infty$ .  $S_0$  es usualmente cero.

El intervalo CUSUM definido en (7.1) está definido para detectar incrementos en la media. Análogamente se puede definir el CUSUM para detectar decrecimientos de la media.

Mediante el cálculo del ARL bajo diferentes casos, Hawkins (1993) muestra que el CUSUM winsorizado provee buena protección contra la presencia

de outliers, sin mucha pérdida de respuesta a desviaciones en la media del proceso.

Nazir, Riaz, Does & Abbas (2013) proponen diferentes cartas CUSUM para monitorear el parámetro de localización de un proceso en Fase II. Estos esquemas se basan en la media, la mediana, el rango medio, el estimador Hodges-Lehman y la estadística TM (trimean). La comparación de los diferentes esquemas mediante la ARL, les permitió concluir que la carta CUSUM TM es la mejor opción ante la presencia de outliers y escenarios de no normalidad. Nazir, Riaz & Does (2015) comparan varias cartas CUSUM, construidas con base en estimadores robustos de la dispersión de un proceso.

### 7.3. Cartas EWMA Robustas

Poca investigación ha sido desarrollada en esta dirección. Lucas & Saccucci (1990) construyen un esquema EWMA robusto de la siguiente manera: Primero se especifican límites outliers para las observaciones que entran al EWMA (es decir,  $X_i$ ). Estos límites fueron definidos  $\pm 4\sigma_X$  alrededor del valor objetivo. Si una observación está por fuera de estos límites, no entra al EWMA. Dos outliers seguidos son considerados como una señal de fuera de control. Esta carta sin embargo, solo es aplicable en situaciones donde se crea que las desviaciones son debidas a la presencia de outliers y no a desvíos de la media del proceso.

Abbasi & Miller (2012) proponen una carta EWMA robusta en Fase II, basada en la desviación media absoluta de la mediana y muestran que es eficiente y robusta contra violaciones del supuesto de normalidad. Zwetsloot, Schoonhoven & Does (2014) comparan dos cartas EWMA en Fase I para monitorear la media de un proceso. Una de ellas utiliza la media general de los grupos mientras que la segunda se basa en la mediana de las medias muestrales. En ambos casos estiman la desviación estándar del proceso por el método de Tatum (1997). Zwetsloot et al. (2014) proponen el monitoreo de la desviación estándar del proceso en Fase I, mediante una carta EWMA que incluye dos estimadores puntuales robustos, el primero basado en los rangos intercuartílicos muestrales y el segundo es el estimador propuesto por Tatum (1997).





## Capítulo 8

# Cartas de Control Multivariadas

Hay varias situaciones en las cuales es necesario controlar simultáneamente dos o más características de un producto o proceso. Este tipo de problemas es conocido como control estadístico de procesos multivariados. Como se verá en este capítulo, el monitoreo independiente de estas características puede conducir a conclusiones erradas, pues es común que en este tipo de problemas las variables de interés estén correlacionadas. Las cartas de control utilizadas en estos casos, son extensiones de los esquemas utilizados en el caso univariado. Por tanto, en este capítulo se estudiarán cartas de control multivariadas tipo Shewhart, cartas de control CUSUM multivariadas y cartas de control EWMA multivariadas. El avance tecnológico en los procesos de manufactura y servicios ha conducido a que el control estadístico de procesos multivariados sea una de las áreas de mayor desarrollo en los últimos años. Bersimis, Psarakis & Panaretos (2007) y Yeh, Lin & McGrath (2006) presentan una revisión de literatura acerca de estas cartas hasta 2006. El lector interesado en este tema podrá revisar muchos artículos publicados en las revistas especializadas desde 2006 hasta este momento.

### 8.1. Cartas Shewhart Multivariadas

En esta sección describimos algunas cartas tipo Shewhart que han sido propuestas para monitorear procesos multivariados.

### 8.1.1. Carta de Control para el Vector de Medias

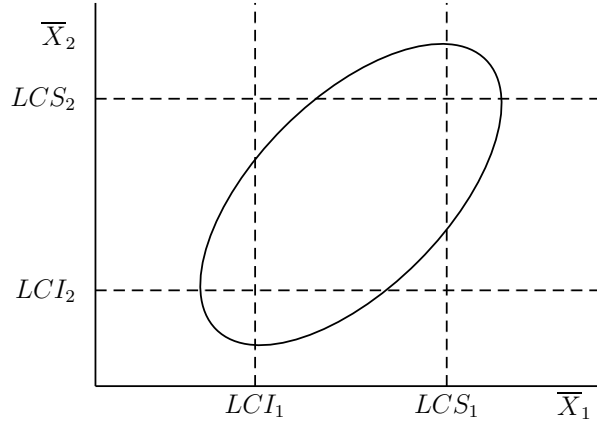
Se denotará por  $p$  el número de características a medir. Interesa conocer como usar las  $p$  medidas simultáneamente, para probar la hipótesis de que el proceso está estadísticamente bajo control. Un método para resolver este problema consiste en aplicar un esquema de control, por ejemplo una carta  $\bar{X}$ , a cada una de las  $p$  características simultáneamente, y rechazar la hipótesis cuando una cualquiera de estas cartas indique una señal de fuera de control. Sin embargo, asumiendo independencia entre las  $p$  variables, la probabilidad total del error de tipo  $I$  sería  $1 - (1 - \alpha)^p$ . Un segundo método consiste en rechazar la hipótesis cuando todas las cartas así lo indiquen. En este caso, la probabilidad total del error tipo  $I$  es  $\alpha^p$ . La debilidad que tiene el esquema de usar cartas separadas, para monitorear individualmente cada media del proceso, es la de ignorar la correlación que pueda existir entre las variables, como usualmente ocurre. Un esquema multivariado aplicado para controlar un proceso, debería tener en cuenta las interrelaciones entre las características de calidad.

Considere el caso en que se miden dos características  $X_1$  y  $X_2$  a un cierto producto. Asuma que estas dos características de calidad están distribuidas conjuntamente como una normal bivariada. Una muestra de  $n$  artículos es seleccionada del proceso a intervalos regulares, y se obtienen medidas en ambas variables. Interesa controlar la media del proceso. Un método puede consistir en construir separadamente cartas  $\bar{X}$  para cada una de las dos variables. El uso de cartas  $\bar{X}$  separadas, es equivalente a graficar  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$  en una sola carta, que se forma superponiendo una de las cartas sobre la otra, tal como se observa en la Gráfica 8.1.

Si el par de medias muestrales queda dentro de la región rectangular, el proceso se considera bajo control. Se verá posteriormente que la región de control real es de naturaleza elíptica y por tanto el proceso se juzga como fuera de control si el par de medias queda por fuera de la elipse. Por tanto, el uso de la región rectangular nos puede conducir a conclusiones erradas.

Inicialmente se enuncia un resultado de análisis multivariado que es soporte para los desarrollos mostrados posteriormente.

Sea  $T^2 = U'S^{-1}U$  donde  $U$  y  $S$  son variables aleatorias distribuidas independientemente con  $U$  distribuida  $N_p(\mu, \Sigma)$  y  $f S$  distribuida  $W_p(f, \Sigma)$ , donde  $f \geq p$ . Entonces,



Gráfica 8.1. Regiones de control elípticas y rectangulares.

$$T^2 \approx \frac{f p}{f - p + 1} F' (p, f - p + 1; \tau^2),$$

donde  $\tau^2 = \mu' \Sigma^{-1} \mu$  es el parámetro de no centralidad.

La prueba de este teorema puede verse por ejemplo en Anderson (1984).

Denotemos por  $X$  un vector  $p$  – dimensional que contiene las observaciones de las características de calidad. Se asume que  $X$  sigue una distribución  $N_p(\mu, \Sigma)$ . Si el valor objetivo de  $X$  es  $\mu_0$ , se necesita establecer un esquema que nos permita conocer si la media del proceso está estable o no.

Alt (1984) y Alt & Smith (1988) han establecido dos fases para el proceso de construcción de una carta de control multivariada para la media. La Fase I se subdivide a su vez en dos etapas. En la Etapa 1 o etapa retrospectiva se prueba si el proceso estaba bajo control cuando se recogieron los primeros subgrupos. En la Etapa 2 o etapa prospectiva se prueba si el proceso permanece bajo control cuando futuros subgrupos sean seleccionados. En la Fase II se usa la carta de control para detectar desvíos del proceso respecto de su valor estándar  $\mu_0$ .

La carta de control se diseña de acuerdo a si se toman observaciones individuales en cada tiempo o por el contrario se tienen grupos de observaciones en cada punto muestral. A continuación se estudian por separado cada uno de estos casos.

### Carta de Control Multivariada para Observaciones Individuales

En las etapas iniciales del proceso,  $\mu_0$  y  $\Sigma$  usualmente se desconocen y deben ser estimados a partir de un conjunto de  $m$  observaciones tomadas cuando el proceso se considera que está bajo control.

Denotamos por  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})$  la  $i$ -ésima observación,  $i = 1, \dots, m$ .

Sea  $\bar{X}$  el vector de medias muestrales y  $S$  la matriz de covarianzas muestrales, calculadas a partir de estas  $m$  observaciones. Esto es,

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$$

y

$$S = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'.$$

La estadística  $T^2$  para la  $i$ -ésima observación está definida por,

$$T_i^2 = (X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X}), \quad i = 1, \dots, m.$$

En la Etapa 1, la distribución de esta estadística es proporcional a una distribución beta,

$$T_i^2 \sim \frac{(m-1)^2}{m} B \left( \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2} \right).$$

Ver Wierda (1994), y Tracy, Young & Mason (1992). La carta  $T^2$  es entonces un gráfico de la estadística  $T^2$  vs el número de observación. El límite de control superior de esta carta está dado por

$$LCS = \frac{(m-1)^2}{m} B \left( \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}, \alpha \right),$$

donde  $B(\delta_1, \delta_2, \alpha)$  es el percentil  $(1-\alpha)$  de la distribución beta con parámetros  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . La desigualdad  $T^2 \leq LCS$  describe el interior y la frontera de una elipsoide de dimensión  $p$  con centro  $\bar{X}$ . Si  $X_i (i = 1, \dots, m)$  cae dentro de esta elipsoide, entonces el proceso se asume que está estadísticamente bajo

control. Si la carta  $T^2$  indica una señal, se debe llevar a cabo una investigación con el objeto de encontrar causas especiales que hubieran producido la señal. Las observaciones multivariadas que correspondan a causas especiales se eliminan. Entonces se calculan nuevos límites de control para un examen retrospectivo basado en las observaciones restantes y el procedimiento se repite de nuevo.

En la Etapa 2, para una observación futura  $X_i$  la estadística  $T^2$  de Hotelling sigue una distribución proporcional a una  $F$ . La carta a usar en esta etapa es una  $T^2$  con límite de control superior,

$$LCS = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{(p, m-p, \alpha)},$$

donde  $F_{(p, m-p, \alpha)}$  es el percentil  $(1 - \alpha)$  de la distribución  $F$  con  $p$  y  $m - p$  grados de libertad y  $m$  es el número de observaciones con las que finalmente se estimaron los parámetros en la Etapa 1.

Jackson (1985) sugiere aproximar este límite de la forma,

$$LCS = \frac{(m-1)p}{m-p} F_{(p, m-p, \alpha)}$$

para un valor grande de  $m$ .

Una vez se ha estabilizado el proceso en la Etapa 2, se asume que los estimadores finales  $\bar{X}$  y  $S$  son los verdaderos valores de los parámetros bajo control. Así que para la Fase II se contruye una carta  $\chi^2$ , pues

$$\chi^2 = (X_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu_0)$$

sigue una distribución  $\chi^2$  con  $p$  grados de libertad. Entonces

$$LCS = \chi_{p, \alpha}^2$$

y la carta indica una señal si para una observación  $X_i$ ,

$$\chi_i^2 > \chi_{(p, \alpha)}^2.$$

Se debe anotar acá que la distribución  $\chi^2$  es exacta cuando se conocen los valores de los parámetros. En la práctica lo que se lleva a cabo es una estimación de los mismos a partir de un determinado número de observaciones.

Por tanto el límite de control basado en la distribución  $\chi^2$  debe ser usado con cuidado. Lowry & Montgomery (1995) hacen mención también a este punto, y prueban que si  $p$  es grande ( $p \geq 10$ ), entonces se deben tomar al menos 250 muestras para que el límite de control superior chi-cuadrado sea una aproximación razonable.

**Ejemplo:** Quesenberry (2001) presenta un conjunto de datos que consiste de 11 variables de calidad medidas en 30 productos, seleccionados en un proceso de producción. Para ilustrar la metodología vista en esta sección, se seleccionarán solamente las medidas correspondientes a las primeras 3 variables. La tabla 8.1 muestra estos valores y representa el conjunto histórico de datos a partir del cual se inicia la construcción de la carta de control  $T^2$ . Inicialmente se calcula el vector de medias muestral y la matriz de varianzas covarianzas muestral. Para las 30 observaciones, estas estimaciones son,

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 0,5415 \\ 59,816 \\ 21,047 \end{bmatrix},$$

y

$$S = \begin{bmatrix} 0,0022 & 0,0039 & -0,0032 \\ 0,0039 & 0,9551 & -0,0043 \\ -0,0032 & -0,0043 & 0,0860 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Las estadísticas  $T^2$  se calculan entonces de la forma,

$$T_i^2 = (x_i - \bar{X})' S^{-1} (x_i - \bar{X}), \quad i = 1, \dots, 30.$$

El límite de control superior para la carta  $T^2$  en esta etapa es,

$$LCS = \frac{(29)^2}{30} B_{\left(\frac{3}{2}, \frac{30-3-1}{2}, \alpha_1\right)}$$

donde  $\alpha_1$  representa la probabilidad de falsa alarma para cada punto. Como en esta etapa se grafica un conjunto fijo  $m$  de puntos en la carta, lo que debe hacerse es fijar una probabilidad total de falsa alarma  $\alpha$  y calcular  $\alpha_1$  de la siguiente manera:

$$\alpha_1 = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}$$

Supongamos que se desea un  $\alpha = 0,05$ , entonces

$$\alpha_1 = 1 - (0,95)^{1/30} = 0,001708$$

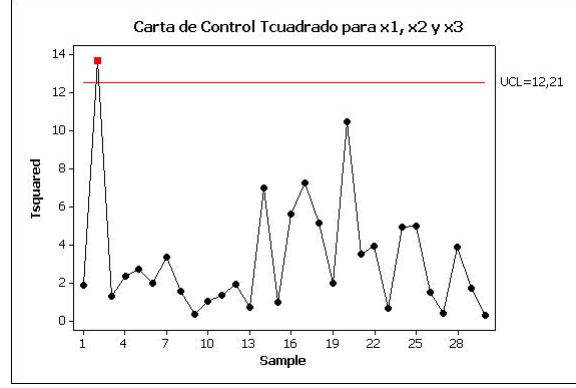
se tiene entonces que para el ejemplo,

$$LCS = 12,20614.$$

Producto	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	0,567	60,558	20,2
2	0,538	56,303	20,8
3	0,530	59,524	21,4
4	0,562	61,102	21,2
5	0,483	59,834	21,0
6	0,525	60,228	20,7
7	0,556	60,756	21,5
8	0,586	59,823	20,8
9	0,547	60,153	20,9
10	0,531	60,640	21,2
11	0,581	59,785	21,1
12	0,585	59,675	20,7
13	0,540	60,489	21,2
14	0,458	61,067	21,3
15	0,554	59,788	21,3
16	0,469	58,640	21,5
17	0,471	59,574	20,6
18	0,457	59,718	21,1
19	0,565	60,901	20,8
20	0,664	60,180	20,9
21	0,600	60,493	21,2
22	0,586	58,370	20,9
23	0,567	60,216	20,9
24	0,496	60,214	20,6
25	0,485	59,500	21,7
26	0,573	60,052	20,7
27	0,520	59,501	21,1
28	0,556	58,476	21,4
29	0,539	58,666	21,2
30	0,554	60,239	21,0

Tabla 8.1. Variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  medidas en 30 productos (Quesenberry (2001))

La gráfica 8.2 presenta la carta  $T^2$  para esta etapa. Se observa que el segundo punto está fuera de control. Se procede entonces a investigar las causas que ocasionaron esta situación. Asuma que los ingenieros encargados del proceso encontraron dichas causas, por ejemplo un cambio en los operarios de las máquinas. Entonces se elimina este punto y se hacen de nuevo todos los



Gráfica 8.2. Carta de control  $T^2$  para los datos del ejemplo en la etapa 1 de la fase I

cálculos con las 29 observaciones restantes. El vector de medias y la matriz de varianzas covarianzas muestrales para las 29 observaciones son:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 0,5416 \\ 59,937 \\ 21,055 \end{bmatrix},$$

y

$$S = \begin{bmatrix} 0,0022 & 0,0037 & -0,0034 \\ 0,0037 & 0,5334 & -0,0365 \\ -0,0034 & -0,0365 & 0,0868 \end{bmatrix}$$

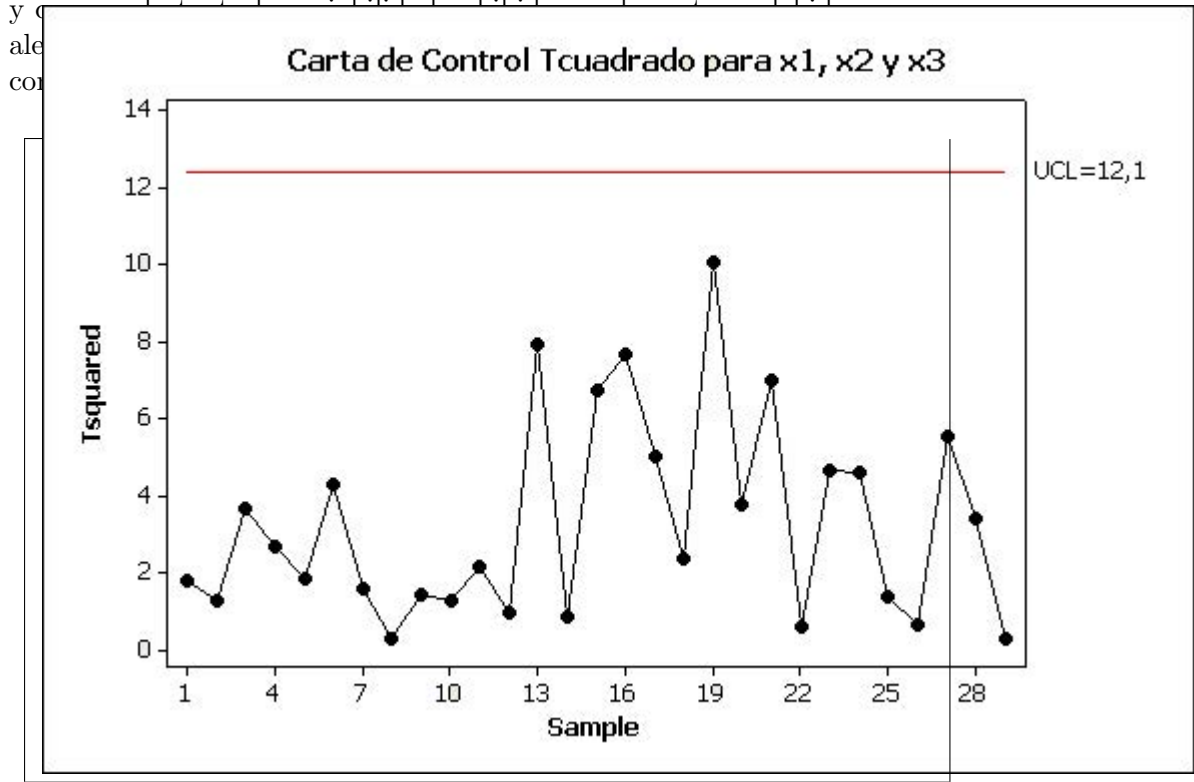
respectivamente. La probabilidad total de falsa alarma se mantiene en  $\alpha = 0,05$ , para obtener el siguiente límite de control superior  $LCS = 12,06792$ . La gráfica 8.3 presenta la carta  $T^2$  para estas 29 observaciones. Como se observa, todos los puntos están por debajo del  $LCS$ , lo que indica que el proceso está bajo control. Se inicia entonces la Etapa 2, en la que observaciones futuras se comparan con los estimadores finales de la Etapa 1, construyendo una carta  $T^2$  cuyo límite de control está dado por

$$LCS = \frac{3(30)(28)}{29(26)} F_{(3,26,\alpha)}.$$

Para un  $\alpha = 0,05$  se tiene  $LCS = 9,94348$ .

Cuando el proceso se considere estable, es decir, en el monitoreo en línea de observaciones se observa que estos proceden de una distribución cuyos parámetros son los utilizados para calcular las estadísticas  $T^2$  de esta etapa,





Gráfica 8.3. Carta de control  $T^2$  para los datos del ejemplo eliminando la segunda observación en la etapa 1 de la fase I

### Carta de Control Multivariada para Observaciones Agrupadas

Supongamos que en la parte inicial del proceso se toman  $k$  muestras aleatorias independientes, cada una de tamaño  $n > p$ . Sean  $\bar{X}_i$  y  $S_i$  la media y matriz de covarianzas muestrales para el  $i$ -ésimo subgrupo. A partir de los  $k$  subgrupos se obtienen los estimadores de  $\mu_0$  y  $\Sigma$  de la siguiente manera:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i$$

y

$$\bar{S} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_i.$$

Para el análisis retrospectivo de los  $k$  subgrupos iniciales se grafican las estadísticas

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})' \bar{S}^{-1} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}), \quad i = 1, \dots, k$$

en una carta  $T^2$  cuyo límite de control superior está definido como,

$$LCS = \frac{p(k-1)(n-1)}{k(n-1)-p+1} F_{(p, k(n-1)-p+1, \alpha)}.$$

Ver por ejemplo Lowry & Montgomery (1995).

Si uno o más valores de  $T_i^2$  es mayor que el límite anterior, se investigan sus causas y se recalculan los límites de control hasta que  $T_i^2 < LCS$  para todo  $i$ , o no se encuentran causas especiales de variabilidad. Supongamos que al final de esta etapa quedan  $m$  de los  $k$  subgrupos. Es decir al finalizar esta etapa,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i.$$

Para la Etapa 2, sea  $\bar{X}_f$  la media muestral de una nueva muestra aleatoria de tamaño  $n$ . Entonces,

$$T^2 = n(\bar{X}_f - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (\bar{X}_f - \hat{\mu})$$

se grafica en una carta cuyo límite de control superior es

$$LCS = \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} F_{(p, m(n-1)-p+1, \alpha)}.$$

Una vez se considere estable el proceso, se asume que los estimadores finales son los verdaderos valores de los parámetros de tal forma que para la Fase II se construye una carta  $\chi^2$ . Para este caso sea  $\bar{X}_n$  la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño  $n$ . La estadística

$$\chi_i^2 = n(\bar{X}_n - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu_0)$$

Se grafica en una carta cuyo  $LCS$  es  $\chi_{(p, \alpha)}^2$ . Lowry & Montgomery (1995) recomiendan tomar al menos 20 muestras preliminares para obtener límites chi-cuadrado razonables.

En el momento que un punto exceda al  $LCS$ , la carta  $\chi^2$  nos indica un cambio en la media del proceso. Así como para el caso de la carta univariada  $\bar{X}$  se propusieron algunas reglas suplementarias, Aparisi, Champ & García (2004) y Khoo & Quah (2003) proponen añadir algunas reglas de corrida suplementarias que hacen la carta  $\chi^2$  un poco más sensible a cambios en la media. También debemos señalar, que patrones no aleatorios que puedan presentar estas cartas multivariadas, son fuente adicional de variabilidad. Mason, Chou, Sullivan, Stoumbos & Young (2003) estudian varias situaciones que conducen a patrones no aleatorios en cartas  $T^2$ , tales como comportamientos cíclicos y tendencias. La identificación de las causas de estos patrones permite reducir la variabilidad que estos producen, y mejorar el proceso.

### 8.1.2. Cartas de Control para la Dispersion del Proceso

Como en el caso univariado, si la media del proceso se mantiene estable, pero la variabilidad se incrementa, el resultado es un incremento en la fracción de productos no conformes. Por esta razón, es importante monitorear tanto la media como la variabilidad de un proceso. En el caso multivariado se quiere saber si la matriz de covarianzas del proceso se mantiene en un valor estándar  $\Sigma_0$ .

Aunque la carta  $R$  es quizás la mas utilizada en el control de la variabilidad de una característica de calidad, su extensión al caso multivariado no se puede hacer de manera directa. Por lo tanto se prefieren las cartas multivariadas, análogas a las cartas  $S$  y  $S^2$ , Alt & Smith (1988).

Consideremos primero el caso bivariado, es decir  $p = 2$ . Supongamos que se toman  $m$  subgrupos de  $n$  observaciones cada uno. Usando la notación de Alt & Smith (1988), sea  $D$  la matriz centrada de datos  $2 \times n$ ,

$$D = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & \dots & x_{1n} - \bar{x}_1 \\ x_{21} - \bar{x}_2 & \dots & x_{2n} - \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

la matriz de varianzas-covarianzas muestral,  $S^2$ , para este caso será:

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} \\ s_{12} & s_2^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1} DD'$$

es decir,  $s_i^2 = \frac{1}{n-1} d_i d_i' \quad i = 1, 2, \quad \text{y} \quad s_{12} = \frac{1}{n-1} d_1' d_2.$

Una medida de dispersión en el caso multivariado es la varianza generalizada muestral, que es el determinante de la matriz  $S$ , denotado por  $|S|$ . Para el caso bivariado,

$$|S| = s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2 = s_1^2 s_2^2 \left( 1 - \frac{s_{12}^2}{s_1^2 s_2^2} \right) = s_1^2 s_2^2 (1 - r_{12}^2),$$

donde

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = \frac{d'_1 d_2}{\sqrt{d'_1 d_1} \sqrt{d'_2 d_2}} = \cos \theta$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre  $d_1$  y  $d_2$ . Por tanto,

$$|S| = s_1^2 s_2^2 \sin^2 \theta.$$

Como el cuadrado del área del paralelogramo formado por  $d_1$  y  $d_2$  es:

$$(area)^2 = (n-1)^2 s_1^2 s_2^2 \sin^2 \theta,$$

entonces,

$$|S| = \frac{1}{(n-1)^2} (area)^2$$

Para  $p$  variables su generalización es :

$$|S| = \frac{1}{(n-1)^p} (volumen)^2.$$

Se puede ver, al menos para el caso bivariado, que el área (volumen) aumenta cuando la longitud de cualquiera de los vectores aumenta.

Cuando las observaciones provienen de una distribución normal multivariada, la distribución asintótica de  $|S|$  es normal univariada. Este hecho se utiliza como base en la construcción de una carta  $|S|$  o un carta  $|S|^{1/2}$ , que son las cartas más conocidas para monitorear la variabilidad de un proceso multivariado. Ver Alt & Smith (1988) y Djauhari (2005).

Sea  $S$  la matriz de varianzas covarianzas calculada a partir de una muestra aleatoria de observaciones, las cuales siguen una distribución  $N_p(\mu, \Sigma_0)$ . Se tienen los siguientes resultados:

$$E(|S|) = |\Sigma_0| b_1 \quad (8.1)$$

$$Var(|S|) = b_2 |\Sigma_0|^2 \quad (8.2)$$

$$E(|S|^{1/2}) = |\Sigma_0|^{1/2} b_3 \quad (8.3)$$

$$Var(|S|^{1/2}) = |\Sigma_0| (b_1 - b_3^2) \quad (8.4)$$

donde,

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k),$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{k=1}^p (n-k) \left( \prod_{k=1}^p (n-k+2) - \prod_{k=1}^p (n-k) \right),$$

y

$$b_3 = \frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)}.$$

Si  $p = 2$ ,  $b_1 = b_3$ .

La carta  $|S|$  se puede construir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} LCS &= |\Sigma_0| (b_1 + 3\sqrt{b_2}) \\ LC &= |\Sigma_0| b_1 \\ LCI &= \max\left(0, |\Sigma_0| (b_1 - 3\sqrt{b_2})\right). \end{aligned}$$

Supongamos que se han tomado  $m$  grupos de observaciones. Sea  $S_i$  la matriz de varianzas covarianzas muestral de la  $i$ -ésima muestra,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Sea  $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$  y  $|\bar{S}|$  su determinante. De (8.1) se tiene que  $\frac{|S_i|}{b_1}$ ,  $i =$

$1, \dots, m$ , es un estimador insesgado de  $|\Sigma_0|$ . Sin embargo, aunque  $\frac{|\bar{S}|}{b_1}$  no es un estimador insesgado de  $|\Sigma_0|$ , se prefiere utilizar este estimador por cuanto contiene información de los  $m$  grupos. Por tanto, cuando se desconoce el valor de  $|\Sigma_0|$ , la carta  $|S|$  queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
LCS &= |\bar{S}| \left( 1 + 3 \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \\
LC &= |\bar{S}| \\
LCI &= \text{máx} \left( 0, |\bar{S}| \left( 1 - 3 \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \right).
\end{aligned}$$

La carta  $|S|^{\frac{1}{2}}$  queda definida de la siguiente manera :

$$\begin{aligned}
LCS &= |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}} \left( b_3 + 3\sqrt{b_1 - b_3^2} \right) \\
LC &= |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}} b_3 \\
LCI &= \text{máx} \left( 0, |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}} \left( b_3 - 3\sqrt{b_1 - b_3^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Si se han tomado  $m$  grupos de observaciones, sea

$$|S^*|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |S_i|^{\frac{1}{2}}$$

el promedio de las raíces cuadradas de las varianzas generalizadas muestrales. Por (8.3) tenemos que  $\frac{|S^*|^{\frac{1}{2}}}{b_3}$  es un estimador insesgado de  $|\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}$ .

Utilizando este estimador, los límites de control de la carta  $|S|^{\frac{1}{2}}$  quedan definidos así :

$$\begin{aligned}
LCS &= |S^*|^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{3}{b_3} \sqrt{b_1 - b_3^2} \right) \\
LC &= |S^*|^{\frac{1}{2}} \\
LCI &= \text{máx} \left( 0, |S^*|^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{3}{b_3} \sqrt{b_1 - b_3^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Otra carta para controlar la dispersión del proceso se basa en la prueba de la razón de verosimilitud de

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad vs \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0,$$

ver Anderson (1984). Esta prueba se basa en la estadística  $W$  definida de la siguiente manera :

$$W = -p(n-1) - (n-1) \ln(|S|) + (n-1) \ln(|\Sigma_0|) + (n-1) \text{tr}(\Sigma_0^{-1}S),$$

donde  $tr$  indica traza de la matriz. Anderson prueba que  $W$  se distribuye asintóticamente como una Chi-cuadrado con  $\frac{p(p+1)}{2}$  grados de libertad. Por lo tanto, la dispersión del proceso se considera fuera de control si  $W > LCS$ , donde el  $LCS$  está determinado por el nivel de significancia especificado.

Como  $\frac{(n-p-2)S_*^{-1}}{n-1}$  es un estimador insesgado de  $\Sigma_0^{-1}$ , donde  $S_*^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^{-1}$ , entonces en la expresión dada arriba para  $W$ , reemplazamos  $\frac{|\bar{S}|}{b_1}$  por  $|\Sigma_0|$  y  $\frac{(n-p-2)S_*^{-1}}{n-1}$  por  $\Sigma_0^{-1}$ .

### 8.1.3. Cartas multivariadas para el modelo de punto de cambio

Zamba & Hawkins (2006) proponen una carta multivariada para cambios en el vector de medias del proceso bajo el siguiente modelo,

$$X_i \sim \begin{cases} N_p(\mu_0, \Sigma) & \text{si } i \leq \tau \\ N_p(\mu_1, \Sigma) & \text{si } i > \tau \end{cases}$$

El parámetro  $\tau$  se denomina punto de cambio y por lo general es desconocido. La estadística  $T^2$  de Hotelling utilizada para probar un posible cambio del vector de medias en la observación  $k$ , está definida de la siguiente forma:

$$T_k^2 = \frac{k(n-k)}{n} (\bar{X}_{o,k} - \bar{X}_{k,n})' W_k^{-1} (\bar{X}_{o,k} - \bar{X}_{k,n})$$

donde,

$$\bar{X}_{j,m} = \frac{1}{m-j} \sum_{i=j+1}^m X_i$$

y

$$W_k = \frac{1}{n-2} \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_{0,k})(X_i - \bar{X}_{0,k})' + \sum_{i=k+1}^n (X_i - \bar{X}_{k,n})(X_i - \bar{X}_{k,n})' \right\}$$

Si el punto de cambio es desconocido,

$$T_{max,n}^2 = \max T_k^2, \quad k = 1, \dots, n-1$$

es la estadística de la prueba de la razón de verosimilitud generalizada para el cambio en la media. Entonces, en Fase II, para cada vector nuevo  $X_n$ , se calcula  $T_{max,n}^2$  para el conjunto de vectores  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Si  $T_{max,n}^2 > h_{n,p,\alpha}$  se concluye que ha ocurrido un cambio en la media del proceso, donde  $h_{n,p,\alpha}$  es un límite de control seleccionado para un valor  $ARL_0$ , especificado de antemano.

En razón a que los procedimientos de monitoreo del vector de medias son afectados por cambios en la matriz de covarianzas, es importante controlar ambos parámetros. Tal como ocurre en el caso univariado, la manera tradicional consiste en utilizar dos cartas, una para la media y otra para monitorear variabilidad. En otras palabras, usar simultáneamente las cartas  $\chi^2$  y  $|S|$ . Sin embargo, hay procedimientos que permiten monitorear simultáneamente ambos parámetros, utilizando una sola carta de control. Zamba & Hawkins (2009) y Dogu & Kocakoc (2013) propusieron una carta de control basada en el modelo de punto de cambio, para monitorear simultáneamente vector de medias y matriz de covarianzas.

#### 8.1.4. Carta $T^2$ con Estimadores Alternativos de Media y Varianza

En la construcción de la carta  $T^2$  durante la Fase I se estiman los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$ . Usualmente se hace mediante el vector de medias muestrales y la matriz de varianza covarianzas muestral, tal como se presentó en las secciones anteriores. Sin embargo es posible usar estimadores alternativos para estos parámetros y mejorar la potencia de la carta.

Por ejemplo, Sullivan & Woodall (1996) recomiendan estimar  $\Sigma$  mediante el vector de diferencias entre observaciones sucesivas, cuando se trabaja con observaciones individuales. El estimador de  $\Sigma$  propuesto es

$$S^* = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} v_i v_i'$$

donde  $v_i = X_{i+1} - X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ .

Este estimador ya había sido sugerido por Holmes & Mergen (1993). Sullivan & Woodall (1996) demostraron que la carta  $T^2$  construida con base



en la media muestral y  $S^*$  detectaba más rápidamente cambios en la media del proceso que la carta  $T^2$  usual, sin embargo no era efectivo cuando habían varios outliers. Ante la presencia de grupos de outliers se ha recomendado utilizar estimadores robustos tanto para el caso univariado como para el multivariado. Vargas (2003) propone construir la carta  $T^2$  utilizando estimadores robustos de  $\mu$  y  $\Sigma$ .

Ante la presencia de grupos de outliers, Vargas (2003) muestra que tanto la carta  $T^2$  usual como la carta  $T^2$  con  $S^*$  son ineficientes en su detección, debido al fenómeno denominado de enmascaramiento. Propone entonces usar una carta  $T^2$  con estimadores robustos, específicamente estimadores MVE (elipsoide de volumen mínimo), estimadores MCD (determinante de covarianza mínimo) y estimadores recortados, de tal forma que este tipo de observaciones pueda ser identificado. Mediante simulaciones, Vargas (2003) muestra que la carta  $T^2$  que utiliza estimadores del elipsoide de volumen mínimo (MVE) es eficiente ante la presencia de datos contaminados. Yanez, Vargas & Gonzalez (2003) construyen cartas  $T^2$  con estimadores MVE y estimadores S y muestran también su potencia ante la presencia de varios outliers. Jensen, Birch & Woodall (2007) extendieron las simulaciones de Vargas (2003) para establecer los escenarios en los que era preferible usar estimadores MVE o MCD. Chenouri, Steiner & Variyath (2009), y Alfaro & Ortega (2009) proponen cartas multivariadas robustas, en las cuales utilizan no solo estimadores MVE y MCD, sino también estimadores RMVE (estimadores MVE reponderados) y estimadores RMCD (estimadores MCD reponderados). Para monitorear la dispersión en un proceso multivariado, es decir la matriz de varianzas covarianzas  $\Sigma_0$ , también se han propuesto esquemas robustos. Levinson, Holmes & Mergen (2002) sugirieron una carta  $G$ , basada en la comparación de la matriz de covarianzas muestral de cada subgrupo con un estimador de  $\Sigma_0$ , siendo este último la matriz de covarianzas usual construida a partir de todas las observaciones. Vargas & Lagos (2007) propusieron una carta  $G$  robusta, usando el estimador MVE de la matriz de varianzas covarianzas basada en el conjunto completo de datos. Variyath & Vattathoor (2014) proponen estimadores RMCD y RMVE para monitorear  $\Sigma_0$ . Zhang, Chen & Zou (2016) proponen una carta multivariada no paramétrica para monitorear simultáneamente media y variabilidad.

#### 8.1.5. Procedimientos cuando hay Señales Fuera de Control

Cuando un esquema de control detecta una señal fuera de control, la pregunta que surge es ¿*Qué hacer?*. ¿Cuál o cuales variables causaron esta señal?

Algunos procedimientos han sido propuestos para responder a esta pregunta.

Uno de estos métodos usa la teoría de componentes principales (**CP**). Ver por ejemplo Jackson (1985) y Sparks (1992). A continuación describimos brevemente este método.

Las componentes principales se definen como transformaciones lineales de las variables originales  $X_1, X_2, \dots, X_p$  en un nuevo conjunto de variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  las cuales son independientes. Estas nuevas variables se obtienen de la siguiente manera:

Sea  $S$  la matriz de covarianzas muestral (también se puede usar la matriz de correlación muestral). La matriz  $S$  se puede descomponer de la siguiente manera:

$$S = ADA'$$

donde  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios ordenados de  $S$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ , y la matriz  $A$  consiste de los correspondientes vectores propios. Se tiene que  $A'A = AA' = I_p$ .

Sea  $W = AD^{-\frac{1}{2}}$ .

Entonces  $Y = W'(X - \bar{X})$ ,

$$y, y_i = w'_i(X - \bar{X}) = \sum_{j=1}^p w_{i,j}(X_j - \bar{X}_j).$$

Las variables transformadas  $Y_1, \dots, Y_p$  se llaman componentes principales y tienen media cero y varianza 1. De tal forma que los límites de control en la construcción de una carta para estas componentes se encuentran fácilmente, utilizando una tabla  $t$  de Student. Las observaciones individuales transformadas  $y_i$  se llaman puntajes- $y$ .

Como  $W'W = D^{-1}$  se prueba fácilmente que  $WW' = S^{-1}$ . Entonces,

$$T^2 = (X - \bar{X})' S^{-1} (X - \bar{X}) = (X - \bar{X})' WW' (X - \bar{X}),$$

obteniendo,

$$T^2 = Y'Y$$

que es la suma de cuadrados de las componentes principales.

El procedimiento para monitorear un proceso multivariado usando componentes principales es entonces el siguiente, Jackson (1991):

- i) Para cada vector de observaciones, obtenga los puntajes  $y$  de las componentes principales y calcule  $T^2$ . Si el proceso está bajo control continúe el proceso.
- ii) Si  $T^2$  es mayor que el LCS, examine las componentes principales. Como estas son no correlacionadas, se espera que den información acerca de las causas de fuera de control y nos puedan conducir a un examen de las variables originales.

Cuando en un proceso hay involucradas muchas variables, no es necesario retener todas las componentes principales. En este caso se escogen aquellas que expliquen una proporción relativamente alta de la variabilidad total. Es decir, si  $\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_q}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}$  es cercano a uno, se retienen las primeras  $q$  componentes principales. Jackson (1991) da un método para la selección de estas  $q$  componentes. Runger & Alt (1996) propone otro método para seleccionar un subconjunto apropiado de componentes.

El problema con el método de componentes principales, es que en varias circunstancias no es útil para conocer qué causó la señal de fuera de control, pues a menudo las componentes principales no tienen un significado físico.

Otro método propuesto cuando la carta multivariada da una señal de alarma, consiste en usar  $p$  cartas Shewhart univariadas individuales con una tasa de error  $\frac{\alpha}{p}$ . Es decir, usar las tasas de error de Bonferroni. Sin embargo, estas tasas ignoran las correlaciones entre las variables.

Hayter & Tsui (1994) proponen construir un conjunto de intervalos de confianza simultáneos para las medias de las variables  $\mu_i$  con una probabilidad simultánea de cobertura  $1 - \alpha$ . Estos intervalos son de la forma  $\{X_i - \sigma_i C_{R, \alpha}, X_i + \sigma_i C_{R, \alpha}\}$  donde el valor crítico  $C_{R, \alpha}$  depende de la matriz de correlación  $R$ . El proceso se considera fuera de control cuando cualquiera de estos intervalos de confianza no contenga su respectivo valor objetivo  $\mu_i^0$ .

Runger, Alt & Montgomery (1996) propusieron la estadística,

$$d_i = T^2 - T_{(i)}^2$$

donde  $T^2$  es el valor de la estadística de Hotelling, y  $T_{(i)}^2$  es el valor de la estadística para todas las variables del proceso excepto la  $i$ -ésima.  $d_i$  es un indicador de la contribución relativa de la  $i$ -ésima variable a la estadística completa. Se recomienda calcular los valores de  $d_i$  para  $i = 1, \dots, p$  y concentrar la atención en las variables para las que los valores de  $d_i$  son

relativamente grandes. Un punto de corte aproximado para  $d_i$  está determinado por un cuantil de la distribución Chi-cuadrado con un grado de libertad. Por tanto, si  $d_i > \chi_{\alpha,1}^2$  se considera que la  $i$ -ésima variable contribuye significativamente a la señal fuera de control.

Mason, Tracy & Young (1995) descomponen el valor  $T^2$  en  $p$  componentes independientes, cada una de las cuales tiene a su vez la forma de una  $T^2$  cuya distribución es una  $F$  multiplicada por una constante. El desarrollo lo hacen para observaciones individuales, pero la técnica se puede aplicar a medias de subgrupos con algunas modificaciones menores en las fórmulas.

Sea  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})'$  el vector de medidas tomado en el tiempo  $i$ .

Se asume que cuando el proceso esté bajo control, los  $X_i$  son independientes y siguen una  $N_p(\bar{\mu}, \Sigma)$ . Si  $\bar{\mu}$  y  $\Sigma$  no se conocen, se estiman a partir de una muestra de referencia compuesta de  $m$  observaciones mediante  $\bar{X}$  y  $S$ .

La estadística a graficar es entonces

$$T^2 = (X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X}). \quad (8.5)$$

Si agrupamos las primeros  $p-1$  variables y aislamos la  $p^{th}$  variable, es decir

$$X_i = \left( X_i^{(p-1)'}, X_{ip} \right)',$$

donde  $X_i^{(p-1)'} = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{i(p-1)})$ , entonces la estadística  $T^2$  se puede particionar en dos componentes independientes,

$$T^2 = T_{p-1}^2 + T_{p,1,\dots,p-1}^2. \quad (8.6)$$

$T_{p-1}^2$  es la estadística de Hotelling usando las primeras  $p-1$  variables y tiene la forma

$$T_{p-1}^2 = \left( X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right)' S_{XX}^{-1} \left( X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right),$$

donde  $\bar{X}^{(p-1)}$  es el vector de medias muestrales de las  $m$  observaciones sobre las primeras  $p-1$  variables y  $S_{XX}$  es la submatriz principal  $(p-1) \times (p-1)$  de  $S$ .

$$T_{p,1,\dots,p-1}^2 = \frac{(X_{ip} - \bar{X}_{p,1,\dots,p-1})^2}{S_{p,1,\dots,p-1}^2}$$

donde

$$\bar{X}_{p-1, \dots, p-1} = \bar{X}_p + b_p' \left( X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right)$$

y

$$S_{p-1, \dots, p-1}^2 = S_x^2 - S_{xX}' S_{XX}^{-1} S_{xX}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{xX} \\ S_{xX} & S_x^2 \end{bmatrix}$$

$S_x^2$  es la varianza de  $X_p$  y  $S_{xX}$  es un vector  $(p-1)$  dimensional que contiene las covarianzas entre  $X_p$  y las restantes  $(p-1)$  variables.

$\bar{X}_p$  es la media muestral de las  $m$  observaciones sobre la  $p^{th}$  variable,  $b_p = S_{XX}^{-1} s_{xX}$  es el vector  $p-1$  de coeficientes de regresión de la  $p^{th}$  variable regresada sobre las primeras  $p-1$  variables.

Como el primer término en (8.6) es una estadística  $T^2$  de Hotelling en  $p-1$  variables, esta se puede escribir como  $T_{p-1}^2 = T_{p-2}^2 + T_{p-1,2, \dots, p-2}^2$  y continuando de esta manera, se llega a la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} T^2 &= T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 + T_{4,1,2,3}^2 + \dots + T_{p-1, \dots, p-1}^2 \\ &= T_1^2 + \sum T_{j+1,1}^2 \end{aligned} \quad (8.7)$$

$T_1^2$  es la estadística  $T^2$  de Hotelling para la primera variable, es decir

$$T_1^2 = \frac{(X_{i1} - \bar{X}_1)^2}{S_1^2}.$$

Hay que notar que el ordenamiento de los términos condicionales individuales no es único. Hay  $p!$  particiones diferentes que conducen a la misma estadística  $T^2$ .

Por ejemplo, suponga  $p = 3$  entonces

$$\begin{aligned} &= T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 \\ &= T_1^2 + T_{3,1}^2 + T_{2,1,3}^2 \\ T^2 &= T_2^2 + T_{3,2}^2 + T_{1,2,3}^2 \\ &= T_2^2 + T_{1,2}^2 + T_{3,1,2}^2 \\ &= T_3^2 + T_{1,3}^2 + T_{2,1,3}^2 \\ &= T_3^2 + T_{2,3}^2 + T_{1,2,3}^2. \end{aligned}$$

Los  $p$  términos dentro de una descomposición particular son independientes.

Además

$$T_j^2 \sim \frac{n+1}{n} F_{(1, n-1)}.$$

Para las variables no condicionadas, y

$$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 \sim \frac{(n+1)(n-1)}{n(n-k-1)} F_{(1, n-k-1)}$$

donde  $k$  es el número de variables condicionadas.

Así que cada término en (8.7) se compara con un valor  $F$  por la constante, para determinar si es significativo y por tanto decidir que término está señalando un problema. Si uno de los términos  $T^2$  condicionados es significativo entonces hay algún problema con la relación entre un grupo de las variables originales respecto a la mostrada o existente en la muestra histórica. Ver Mason & Young (2002).

Kourti & MacGregor (1996) sugieren analizar una combinación de los puntajes con las contribuciones de las variables a estos puntajes. Si el valor de  $T^2$  es mayor que el LCS para una observación  $x_k$  la propuesta es la siguiente : (i) Encuentre los puntajes de la observación  $x_k$  con valores altos. (ii) Calcule las contribuciones de las variables a estos puntajes altos. Recordar que la contribución de cada variable  $X_j$  al puntaje de la  $i$ -ésima componente principal es  $w_{i,j}(X_j - \bar{X}_j)$ . (iii) Investigue las variables con contribuciones altas.

Nedumaran & Pignatiello (1998) suplementan las cartas  $T^2$  y  $\chi^2$  con cartas univariadas para la  $p$  variables y las  $p$  componentes principales. El diagnóstico para identificación de las señales lo hacen entonces construyendo intervalos tipo Scheffé.

## 8.2. Cartas CUSUM Multivariadas

Varios esquemas CUSUM multivariados, como extensión de la carta CUSUM univariada han aparecido en la literatura. Mencionamos a continuación algunos de ellos.

Woodall & Ncube (1985) proponen un procedimiento CUSUM multivariado, que consiste en el uso simultáneo de  $p$  cartas CUSUM univariadas. Este

procedimiento da una señal fuera de control cuando cualquiera de las cartas CUSUM univariadas da una señal fuera de control. Si  $N(i)$  es la longitud de corrida de un procedimiento CUSUM univariado, la longitud de corrida del procedimiento multivariado es  $N = \min\{N(1), \dots, N(p)\}$ . Woodall & Ncube (1985) determinan la distribución de  $N$ , así como la ARL. Con base en la ARL, muestran que la carta CUSUM bivariada detecta pequeños cambios en la media, más rápidamente que la carta  $T^2$ .

Healy (1987) propone un método CUSUM multivariado que se reduce a una técnica CUSUM univariada cuando el propósito es detectar un cambio de  $\vec{\mu}_0$  a  $\vec{\mu}_1$  en la media de una distribución normal multivariada. El problema aquí es que la selección de  $\mu_1$  para la hipótesis alternativa es difícil de hacer en situaciones prácticas, pues lo que en general se desea detectar es un cambio en la media pero sin saber exactamente hacia que valor.

Crosier (1988) generaliza su propuesta univariada al caso multivariado, reemplazando los escalares del CUSUM univariado (5.1) por vectores.

Define

$$C_n = \{[S_{n-1} + X_n - \mu_0]' \Sigma^{-1} [S_{n-1} + X_n - \mu_0]\}^{\frac{1}{2}}$$

con

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } C_n \leq k \\ (S_{n-1} + X_n - \mu_0) \left(1 - \frac{k}{C_n}\right) & \text{si } C_n > k \end{cases}$$

donde  $S_0 = 0$  y  $k > 0$ . El esquema da una señal de alarma si,

$$\sqrt{S_n' \Sigma^{-1} S_n} > h.$$

Una buena escogencia para  $k$  es 0,5.

Si  $\delta$  denota el vector que describe cierto desplazamiento de la media, y se define el cuadrado de su longitud por  $\tau^2 = \delta' \Sigma^{-1} \delta$ , se recomienda el valor de referencia  $k = \frac{\tau^2}{2}$ . El valor de  $h$  se escoge de tal forma que se tenga un ARL aceptable cuando la media permanece estable.

Una segunda propuesta de Crosier (1988) consiste en reducir las observaciones multivariadas a escalares, usando la estadística  $T$  de Hotelling. Si

$$T_n = [(X_n - \mu)' \Sigma^{-1} (X_n - \mu)]^{\frac{1}{2}},$$

la carta CUSUM la define por,

$$S_n = \max(0, S_{n-1} + T_n - k).$$

Crosier denominó este método "esquema COT" (Cusum Of T). El esquema da señal de fuera de control cuando  $S_n > h$ , para un valor de  $h$  preestablecido.

El esquema COT puede ser diseñado para detectar un desplazamiento específico en la media del proceso. La medida que se utiliza aquí para representar un desplazamiento de la media  $\mu$  respecto al valor objetivo  $\mu_0$  es  $\lambda(\mu)$  donde

$$\lambda(\mu) = [(\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)]^{\frac{1}{2}}.$$

Crosier (1988) diseñó cartas COT para  $p = 2, 5, 10$  y  $20$  variables. Los valores  $h$  se encontraron de forma tal que se obtuviera un ARL bajo control de 200 o 500. Para el valor de  $k$ , buscó aquel que permitiera a la carta detectar un desvío de  $\lambda = 1$ . Este valor de  $k$  fue aquel que para  $\lambda = 1$  diera un ARL mínimo, dado que el ARL bajo control era 200 (ó 500). En esta búsqueda encontró un valor de  $k$  muy similar a  $\sqrt{p}$ .

Para un ARL bajo control de 200 las cartas encontradas fueron las siguientes:

p	h	k
2	4.04	1.41
5	4.94	2.24
10	5.86	3.16
20	6.58	4.47

Pignatiello & Runger (1990) propusieron el siguiente esquema:

Sea

$$C_t = \sum_{i=t-n_t+1}^t (X_i - \mu_0)$$

donde  $n_t$  es el número de subgrupos desde el último reinicio (es decir valor 0) del CUSUM.

Escribiendo  $\frac{1}{n_t} C_t$  de la forma,



$$\frac{1}{n_t}C_t = \left( \frac{1}{n_t} \sum_{i=t-n_t+1}^t X_i \right) - \mu_0$$

se observa que el vector  $\frac{1}{n_t}C_t$  representa la diferencia entre el promedio muestral acumulado y el valor objetivo para la media.

La norma de  $C_t$ ,

$$\|C_t\| = \sqrt{C_t' \Sigma^{-1} C_t},$$

se puede interpretar como una medida de la distancia del estimador de la media a la media objetivo del proceso.

Entonces la estadística de Pignatiello & Runger (1990),  $PR$ , se define por:

$$PR_t = \max\{\|C_t\| - kn_t, 0\}$$

donde

$$n_t = \begin{cases} n_{t-1} + 1 & \text{si } PR_{t-1} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El valor de  $k$  fue un medio la distancia de  $\mu_1$  a  $\mu_0$ , donde  $\mu_1$  es un estado fuera de control especificado. Es decir,

$$k = 0,5\lambda(\mu_1)$$

El esquema se ajustó de tal forma que el ARL bajo control fuera aproximadamente igual a 200. Este ajuste se hizo encontrando un límite de control superior,  $h$ , que produjera, vía simulación de un proceso bajo control, intervalos del 95% de confianza para el ARL que contenía el valor 200. Si  $PR_t > h$  el proceso se considera fuera de control. Algunos valores para este esquema fueron los siguientes

p	h	k
2	4.75	0.5
3	5.48	0.5
10	9.55	0.5

Los esquemas anteriores han sido propuestos para detectar cambios en el vector de medias. Para monitorear la matriz de covarianzas se recomienda ver Yeh et al. (2006) y Qiu (2014).

### 8.3. Carta EWMA Multivariada

Sean  $X_1, X_2, \dots$  vectores aleatorios  $p \times 1$ , que representan las  $p$  características de calidad observadas en el tiempo. Estos vectores representan observaciones individuales o vectores de medias muestrales. Asumimos también que  $X$  se distribuye  $N_p(\mu, \Sigma)$ . Sin pérdida de generalidad se puede también asumir que el vector de medias del proceso bajo control es  $\mu_0 = 0$ .

Lowry, Woodall, Champ & Rigdon (1992) proponen una carta EWMA multivariada, denotada MEWMA, que es una extensión natural del proceso EWMA univariado descrito en el capítulo 6. En su propuesta, los escalares son remplazados por vectores de la siguiente manera:

$$Z_i = \Lambda X_i + (I - \Lambda) Z_{i-1},$$

$$\begin{aligned} i = 1, 2, \dots, \quad Z_0 = 0 \quad \text{y} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad 0 < \lambda_j \leq 1, \\ j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

La carta MEWMA da una señal fuera de control tan pronto como

$$T_i^2 = Z_i' \Omega_i^{-1} Z_i > h,$$

donde  $h$  está determinado por la ARL, y  $\Omega_i$  es la matriz de covarianzas de  $Z_i$ .

Si no existe una razón especial para dar pesos diferentes a las observaciones pasadas para las  $p$  características de calidad observadas, entonces  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \lambda$ . En este caso, el vector MEWMA se puede escribir como,

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda) Z_{i-1},$$

para  $i = 1, 2, \dots$ , y se puede probar que,

$$\Omega_i = \frac{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} \Sigma.$$

De manera análoga al caso univariado, la carta MEWMA es equivalente a la carta de Hotelling si  $\lambda = 1$ .

En el cálculo de la estadística MEWMA, puede usarse la matriz de covarianzas asintótica,

$$\Omega_i = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \Sigma,$$

en lugar de la expresión exacta dada arriba. Un valor grande de  $\lambda$  hace que la carta MEWMA detecte cambios grandes en el vector de medias. Cambios pequeños o moderados son detectados mas fácilmente cuando se escoge un valor pequeño de  $\lambda$ .

Basados en comparaciones del ARL, Lowry et al. (1992) concluyen que el procedimiento MEWMA es similar e incluso mejor que los procedimientos multivariados CUSUM. Stoumbos & Sullivan (2002), mediante un estudio de simulación, muestran que la carta MEWMA es mas robusta a desvíos de la distribución normal multivariada que la carta chi-cuadrado de Hotelling. Cuando el esquema MEWMA es utilizado con observaciones individuales, Sullivan & Woodall (1998) proponen estimar la matriz de covarianzas con  $S_d$ , donde esta matriz es un medio la matriz de covarianzas muestrales de las diferencias entre observaciones sucesivas.

El diseño de una carta MEWMA requiere el conocimiento de varios parámetros. Para un ARL bajo control deseado, debemos seleccionar los valores de  $h$  y  $\lambda$ . Pero para el ARL fuera de control se requiere además los valores de  $p$  y  $\lambda(\mu)$ . Para un valor moderado de  $p$  (alrededor de 5), Ryan (2011) establece que  $\lambda = 0,15$  y  $h = 15$  constituyen valores razonables para la carta.

En la Sección 6.1 se vió que la carta EWMA, utilizada para monitorear la media de un proceso sufre del problema de inercia. Para el caso multivariado, Woodall & Mahmoud (2005) tambien mostraron que la carta MEWMA, con valores pequeños del parámetro de suavizamiento, tiene problemas de inercia. Recomiendan entonces considerar en algunos casos el uso simultáneo de un esquema Shewhart y la carta MEWMA.

En ciertos casos el supuesto de la distribución normal multivariada puede no ser válido. En algunos sectores de servicios o ciencias sociales puede ser común registrar datos discretos. Por ejemplo, datos de conteo multivariados pueden aparecer en epidemiología (incidencia de diferentes tipos de enfermedades), o en problemas de investigación de mercados (compras de diferentes productos). Chen, Li & Ou (2015) propusieron una carta MEWMA para

monitorear datos Poisson multivariados.

Los esquemas presentados arriba detectan cambios en el vector de medias. Para monitorear la matriz de covarianzas mediante cartas EWMA multivariadas se recomienda ver Yeh et al. (2006) y Qiu (2014).

## 8.4. Capacidad de Procesos Multivariados

Los índices de capacidad de procesos multivariados describen la capacidad de un proceso multivariado teniendo en cuenta todas las características de calidad del producto o proceso. Estos índices se conocen como índices de capacidad multivariados, aunque como lo anotan Kotz & Johnson (2002) deberían ser nombrados como índices de capacidad de procesos a ser usados cuando se tienen varias variables, ya que muchos de los índices propuestos no son multivariados, pues son de hecho univariados. La literatura reporta muchas propuestas de índices de capacidad multivariados, ver por ejemplo Kotz & Johnson (2002), Yum & Kim (2011) y de Felipe & Benedito (2017). El problema que se presenta en la práctica, es que no hay consenso sobre la metodología a usar para medir capacidad de procesos multivariados. De hecho, en varias compañías se usan índices de capacidad univariados para evaluar la capacidad de un proceso de producción multivariado, calculando un índice de capacidad para cada característica del producto. Sin embargo como lo hemos anotado en este capítulo, esta metodología puede conducir a interpretaciones erradas pues al analizar cada característica de manera independiente, se omite la posible estructura de correlación que pueda existir entre ellas. En esta sección presentaremos de manera general algunos índices propuestos.

Tal como ocurre en el caso univariado, la mayoría de índices propuestos están definidos bajo el supuesto de normalidad. Es decir, sea  $X$  una matriz  $p \times n$ , donde  $p$  es el número de características de calidad medidas sobre cada unidad, y  $n$  es el número de unidades. Estas  $n$  unidades son independientes y representan una muestra seleccionada de una distribución  $N_p(\mu, \Sigma)$ . Sea  $\mu_0$  el vector que contiene los valores objetivos de las  $p$  características. El intervalo de especificación univariado (LEI, LES) es reemplazado por una región de especificación elipsoidal,

$$(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq U.$$

Un índice análogo al índice univariado  $C_p$  es el siguiente,

$$\frac{\text{Volumen}\{(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq U\}}{\text{Volumen}\{(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq R\}},$$

donde  $R = \chi_{p,1-\alpha}^2$ .

Shahriari, Hubele & Lawrence (1995) propusieron un índice multivariado definido por el vector  $[C_{pM}, PV, LI]$ . La primera componente del vector,  $C_{pM}$ , es una razón de áreas o volúmenes, análogo a la razón de longitudes del índice univariado  $C_p$ ,

$$C_{pM} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^p (LES_i - LEI_i)}{\sum_{i=1}^p (LPS_i - LPI_i)} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

El numerador de la ecuación anterior es el volumen de una región de tolerancia, mientras que el denominador es el volumen de una región de proceso modificada.  $LES_i$  y  $LEI_i$  son los límites de especificación superior e inferior para la  $i$ -ésima característica de calidad,  $LPS_i$  y  $LPI_i$  son los límites superior e inferior de una región de proceso modificada para la  $i$ -ésima característica de calidad y  $p$  es el número de características de calidad. La segunda componente  $PV$  del vector de capacidad mide la cercanía de la media del proceso al objetivo,

$$PV = P \left[ T^2 > \frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p} \right],$$

donde  $T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$ ,  $\bar{X}$  es el vector de medias muestrales,  $S$  es la matriz de covarianzas muestrales y  $F_{p,n-p}$  es la distribución  $F$  con  $p$  y  $n-p$  grados de libertad. La tercer componente  $LI$  compara la región de proceso modificada con la región de tolerancia. Cuando toda la región de proceso modificada está dentro de la región de tolerancia,  $LI$  es igual a 1. En otro caso es igual a cero.

Otro grupo de índices utilizan análisis de componentes principales. Estos índices se basan en la descomposición espectral de la matriz de covarianzas,

$$\Sigma = U D U',$$

donde  $U$  es la matriz de vectores propios y  $D$  es la matriz diagonal de los valores propios,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . La  $i$ -ésima componente principal es  $PC_i = u_i' x$ ,

$i = 1, \dots, p$ , donde los  $x$ 's son vectores  $p \times 1$  de observaciones en las variables originales. Los límites de especificación, LES y LEI, y valores objetivos,  $T$ 's, para cada característica de calidad se transforman de la siguiente manera,

$$LEI_{PC_i} = u_i' LEI, \quad LES_{PC_i} = u_i' LES, \quad T_{PC_i} = u_i' T.$$

Wang & Chen (1998) proponen la extensión del índice univariado  $C_p$  de la siguiente manera,

$$MC_p = \left( \prod_{i=1}^v C_{p;PC_i} \right)^{\frac{1}{v}},$$

donde,

$$C_{p;PC_i} = \frac{LES_{PC_i} - LEI_{PC_i}}{6\sigma_{PC_i}},$$

$v$  es el número de componentes principales seleccionadas y  $\sigma_{PC_i} = \sqrt{\lambda_i}$ . De forma similar extiende los índices univariados  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$  a índices multivariados  $MC_{pk}$ ,  $MC_{pm}$  y  $MC_{pmk}$ .

Para conocer otras propuestas o profundizar en este tema se recomienda consultar adicionalmente Taam, Subbaiah & Liddy (1993), Veevers (1998), Wang, Hubele, Lawrence & Miskulin (2000), Chen, Pearn & Lin (2003), Pan & Lee (2010), y Santos (2012).

## Capítulo 9

# Cartas de Control Especiales

En la construcción de las cartas de control usuales, tales como la carta Shewhart, la carta de sumas acumuladas (CUSUM) y la carta de promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA), se asume que las observaciones siguen una distribución normal y son independientes. Sin embargo esto no siempre es cierto en aplicaciones de Control Estadístico de Procesos. Uno o ambos supuestos no son válidos en varias circunstancias.

Entre las diversas aproximaciones a la solución de este problema seleccionamos en este capítulo cuatro métodos diferentes: Cartas bootstrap, Cartas no paramétricas, Cartas de residuales y Cartas adaptativas. A continuación se estudiará por separado cada caso.

### 9.1. Cartas de Control BOOTSTRAP

El método Bootstrap, propuesto por Efron (1979), es una herramienta computacional que ha mostrado ser muy efectiva para estimar la distribución muestral de una estadística dada. Este método opera de la siguiente manera: Sea  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad desconocida  $F$  la cual contiene un parámetro  $\theta$ . Nosotros estamos interesados en estimar este parámetro, que puede ser por ejemplo la media o la varianza poblacionales. Sea  $\hat{F}$  la distribución de probabilidad empírica de los datos que asigna una masa  $\frac{1}{n}$  a cada uno de los valores observados.

Sea  $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\}$  una muestra aleatoria seleccionada con reemplazo de  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .  $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\}$  es una muestra aleatoria de  $\hat{F}$  y se

le denomina muestra bootstrap. Sea  $\hat{\theta}^*$  un estimador de  $\hat{\theta}$  obtenido a partir de la muestra bootstrap. El proceso de remuestreo se repite un número  $B$  de veces obteniendo  $B$  estimadores bootstrap,  $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ . Un histograma de  $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ , es un estimador de la distribución muestral de  $\hat{\theta}$  en la cual nosotros estábamos interesados.

El uso de esta técnica en la construcción de cartas de control es relativamente reciente. Ilustraremos su aplicación describiendo paso a paso la propuesta de Liu & Tang (1996) para monitorear la media de un proceso con datos independientes.

1. Sea  $k$  el número de subgrupos de tamaño  $n$ . Así, el número total de observaciones es  $N = k \cdot n$ .
2. Calcule  $\bar{\bar{X}}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}$ .
3. Seleccione una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , con reemplazo, de las  $N$  observaciones. Denotemos esta muestra bootstrap por  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ .
4. Calcule  $\bar{X}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^*$ . y  $t^* = \sqrt{n} (\bar{X}_n^* - \bar{\bar{X}}_N)$  a partir de la muestra bootstrap tomada en el paso 3.
5. Repita los pasos 3 y 4  $B$  veces.
6. Localice los cuantiles  $\frac{\alpha}{2}$  y  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de  $t_1^*, t_2^*, \dots, t_B^*$  denotados por  $t_{\frac{\alpha}{2}}^*$  y  $t_{(1-\frac{\alpha}{2})}^*$ .
7. Calcule los límites de control para la carta  $\bar{X}$  de la siguiente forma

$$LCI = \bar{\bar{X}}_N + \frac{t_{(\frac{\alpha}{2})}^*}{\sqrt{n}}$$

y

$$LCS = \bar{\bar{X}}_N + \frac{t_{(1-\frac{\alpha}{2})}^*}{\sqrt{n}}.$$

Una propuesta equivalente de Bajgier (1992) (citado por Jones & Woodall (1998)), construye la carta de control  $\bar{X}$  cambiando los pasos 6 y 7 anteriores por los siguientes:



6. Encuentre la media ordenada  $\bar{X}^*$  tal que  $\left(\frac{\alpha}{2}\right) B$  valores estén por debajo de ella. Este valor es el límite de control inferior,  $LCI$ , de la carta de control bootstrap.
7. Encuentre la media ordenada  $\bar{X}^*$  tal que  $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) B$  valores estén por debajo de ella. Este valor es el límite de control superior,  $LCS$ , de la carta de control bootstrap.

En las dos propuestas,  $\alpha$  representa la rata de falsas alarmas, previamente especificada.

Liu & Tang (1996) presentan también una carta bootstrap para datos autocorrelacionados utilizando el método bootstrap de bloques móviles. Jones & Woodall (1998) evalúan la eficiencia de tres cartas bootstrap, incluyendo las descritas arriba, en términos del ARL, y concluyen que estas no son substancialmente superiores al método estándar.

## 9.2. Cartas de Control No Paramétricas

Las cartas tipo Shewhart, CUSUM y EWMA estudiadas en los capítulos anteriores, han sido diseñadas y usadas teniendo en cuenta un supuesto distribucional paramétrico, usualmente el de la distribución normal. Cuando el supuesto de normalidad no es válido, una opción útil consiste en utilizar cartas no paramétricas o de distribución libre. Los esquemas propuestos consideran cartas de control por variables, ya que la mayoría de procedimientos no paramétricos requieren una distribución poblacional continua.

Un problema de interés es el de monitorear la media de un proceso, o en general un parámetro de localización. El parámetro de localización es por ejemplo, la media, la mediana o algún percentil de la distribución. Muchos procesos asumen implícitamente que siguen un modelo de la forma  $F(x - \theta)$ , donde  $\theta$  es el parámetro de localización desconocido y  $F$  es alguna función de distribución acumulada. Por ejemplo, la distribución normal con media desconocida  $\mu$  y varianza 1 corresponde a  $\Phi(x - \mu)$  donde  $F = \Phi$  es la función de distribución normal estándar y  $\theta = \mu$ . Otro modelo es el de escala, el cual tiene la forma  $F(x/\tau)$  donde  $\tau > 0$  es un parámetro de escala desconocido. Por ejemplo, la distribución normal con media 0 y varianza desconocida  $\sigma^2$  corresponde a  $\Phi(x/\sigma)$  donde  $F = \Phi$  y  $\tau = \sigma$ . De forma más general, el modelo de localización escala tiene la forma  $F(x - \theta/\tau)$ , donde ambos

parámetros  $\theta$  y  $\tau$  son desconocidos. En el caso no paramétrico, se asume que  $F$  es una función de distribución continua arbitraria. La mayoría de las cartas propuestas se basan en estadísticas construídas a partir de los rangos de las observaciones. Qiu (2014) dedica un capítulo a métodos no paramétricos en procesos univariados y otro a métodos no paramétricos para procesos multivariados. Chakraborti et al. (2001) presentan una extensa revisión bibliográfica de métodos no paramétricos aplicados en control estadístico de procesos hasta el año 2001.

Las propuestas no paramétricas incluyen cartas tipo Shewhart, CUSUM y EWMA. A continuación se dan algunas referencias para cada uno de estos esquemas. Teniendo en cuenta las referencias incluídas en cada artículo, el lector obtiene un panorama general de los avances investigativos en este campo. Cartas tipo Shewhart para monitorear el parámetro de localización se proponen en Chakraborti et al. (2001), Bakir (2004), Chakraborti & Eryilmaz (2007) y Qiu (2014). Cartas tipo Shewhart para monitorear variabilidad en Das (2008) y Zhou, Zhou & Geng (2016). Esquemas para monitorear conjuntamente localización y escala se presentan en Mukherjee & Chakraborti (2012) y Chowdhury, Mukherjee & Chakraborti (2015). Propuestas CUSUM y EWMA en Chakraborti et al. (2001), Li, Tang & Ng (2010) y Qiu (2014). Finalmente, cartas para monitorear procesos multivariados en Qiu (2014), Holland & Hawkins (2014) y Zhou, Liu, Wei & Jie (2015).

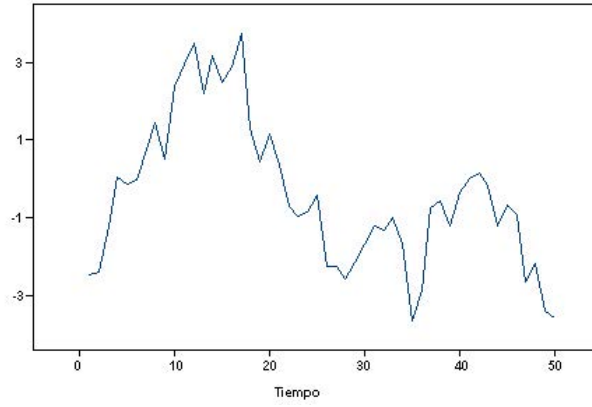
### 9.3. Cartas de Control con Datos Autocorrelacionados

Como las cartas de control se basan en muestras tomadas a través del tiempo, en algunos casos las observaciones resultan ser autocorrelacionadas. Por autocorrelación entendemos la dependencia de los datos en el tiempo. Es decir que en un tiempo dado, el valor de una variable está influenciado por su valor en algún tiempo anterior. Por ejemplo, supongamos que en cierto proceso la variable de interés es temperatura. Si los intervalos de tiempo son muy cortos muy posiblemente los datos estarán autocorrelacionados.

Como lo veremos en esta sección, el uso de los métodos tradicionales en la construcción de cartas de control no es apropiado cuando los datos están autocorrelacionados. Varias metodologías que permiten acomodar datos autocorrelacionados han sido propuestas en Control Estadístico de Procesos. El método que más se ha trabajado consiste en modelar la estructura de

autocorrelación mediante un modelo de series de tiempo y aplicar las cartas de control tradicionales a los residuales. Esta metodología se justifica en razón a que si el modelo planteado es correcto, los residuales obtenidos son no correlacionados.

La Gráfica 9.1 presenta una serie simulada de acuerdo al modelo  $Z_t = 0,85Z_{t-1} + a_t$  realizada en el paquete S-PLUS. La Gráfica 9.2 es la carta  $X$  construída de manera usual para observaciones individuales.



Gráfica 9.1. Datos generados por el modelo  $Z_t = 0,85Z_{t-1} + a_t$ .

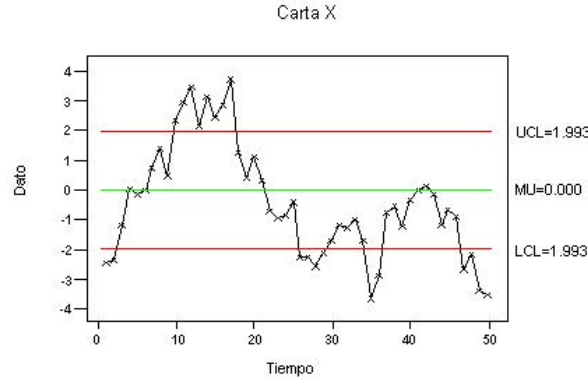
Observamos como la presencia de autocorrelación causa un dramático incremento en la frecuencia de falsas alarmas. En esta situación los puntos que están fuera de los límites de control son falsas alarmas pues el proceso está bajo control siempre que las observaciones sigan el modelo planteado, dado que este es el correcto. El modelo presentado arriba es un modelo autorregresivo de primer orden, AR(1), cuya ecuación general se puede escribir de la siguiente forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t,$$

donde  $a_t$  es una serie de choques aleatorios distribuidos normal e independientemente con media 0 y varianza  $\sigma_a^2$ .

Se sigue entonces que  $\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$

Podemos ver que para una varianza  $\sigma_a^2$  dada, el valor de  $\sigma_Z^2$  aumenta a medida que  $\phi_1$  aumenta. Entre mayor sea la varianza del proceso, es más probable obtener señales fuera de control, cuando los límites de control usados se basan solamente en  $\sigma_a^2$ .

Gráfica 9.2. Carta  $X$  para los datos simulados.

Si  $\hat{Z}_t$  es el valor ajustado entonces los residuales  $e_t = Z_t - \hat{Z}_t$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

La Gráfica 9.3 es una carta de control para observaciones individuales construida con los residuales del ejemplo.

Se observa, que contrario a lo que muestra la Gráfica 9.2, aquí todos los puntos están dentro de los límites de control, indicando un proceso bajo control. Para profundizar en este tema, ver adicionalmente VanBrackle & Reynolds (1997), Zhang (1998b) y Jiang, Tsui & Woodall (2000).

Un segundo método para trabajar con datos autocorrelacionados consiste en pronosticar cada observación a partir de las anteriores y calcular el error de pronóstico. Montgomery & Mastrangelo (1991) usan este método a partir de una estadística *EWMA*,

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

si  $\hat{X}_{t+1}(t)$  es el pronóstico para la observación en el periodo  $t + 1$  hecha al final del periodo  $t$ , entonces

$$\hat{X}_{t+1}(t) = Z_t$$

y los errores de pronóstico un paso adelante, o residuales, son

$$e_t = X_t - \hat{X}_t(t-1).$$

Estos errores son independientes y se distribuyen idénticamente con media cero y desviación estándar  $\sigma_e$  si las observaciones  $X_t$  siguen un proceso

$ARIMA(0, 1, 1) = IMA(1, 1)$ . Así que las cartas de control usuales se pueden aplicar a estos errores. Una carta para observaciones individuales tendría como línea central cero y límites a  $\pm 3\sigma_e$ .

Para cualquier otro proceso  $ARIMA$  si las observaciones están correlacionadas positivamente, este mismo método puede aplicarse para valores apropiados de  $\lambda$ . Por ejemplo  $\lambda$  puede seleccionarse de tal forma que minimice la suma de cuadrados de los errores de pronóstico. Si  $\lambda$  se escoge de esta manera, entonces dividiendo la suma de cuadrados de los errores de pronóstico para el valor  $\lambda$  seleccionado por el número de observaciones obtenemos un estimador de  $\sigma_e^2$ .

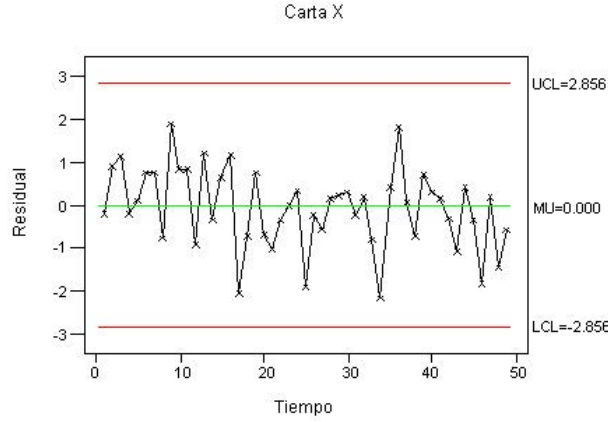
Una tercera aproximación para el caso de datos autocorrelacionados consiste en usar las observaciones originales en las cartas usuales pero ajustando convenientemente los límites de control. Ver Lu & Reynolds (1999), Lu & Reynolds (2001) y Atienza, Tang & Ang (2002).

La existencia de la autocorrelación entre las observaciones afecta también el cálculo de los índices de capacidad. Recordemos que los supuestos básicos en el análisis de capacidad de procesos, es que el proceso este bajo control y que los datos del proceso sean independientes. Zhang (1998a) estudia los índices  $C_p$  y  $C_{pk}$  para datos autocorrelacionados. Guevara & Vargas (2007) extienden el estudio de Zhang (1998a) a los índices  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ , y comparan los cuatro índices  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$  bajo diferentes esquemas de autocorrelación. Guevara & Vargas (2007) muestran mediante simulaciones que a mayor nivel de autocorrelación, menor el valor del índice. Adicionalmente, para procesos autocorrelacionados, los estimadores de los índices son ligeramente sesgados.

La presencia de autocorrelación en las observaciones afecta también el monitoreo de otros parámetros. Prajapati & Singh (2012) presentan una revisión de literatura, en la cual muestran el efecto que tiene la autocorrelación en las cartas utilizadas para monitorear la dispersión de un proceso, el efecto en cartas CUSUM y EWMA y el efecto en algunas cartas multivariadas.

## 9.4. Cartas de Control Adaptativas

El diseño y manejo de una carta de control requiere en general la determinación de tres parámetros: El intervalo de muestreo ( $d$ ), que se refiere a la frecuencia con que se toma cada muestra, el tamaño de la muestra ( $n$ ) y el coeficiente del límite de control ( $k$ ), expresado como el número de desviacio-



Gráfica 9.3. Carta de control para los residuales del ejemplo.

nes estándar que los límites de control están separados de la línea central. Una carta de control se considera adaptativa o dinámica, si al menos uno de estos tres parámetros permite ser cambiado en tiempo real, dependiendo de los valores de la estadística muestral previa. Una revisión bibliográfica de este tema fue desarrollada por Tagaras (1998) y Psarakis (2015).

#### 9.4.1. Cartas de Control con Intervalos de Muestreo Variable

Reynolds, Amin, Arnold & Nachlas (1998) propusieron por primera vez variar la longitud del intervalo entre los tiempos en que se toman las muestras u observaciones durante el monitoreo de un proceso. La idea es que si en este momento se toma una muestra, la próxima muestra se tome rápidamente si se observa algún indicio de cambio en el proceso, o demoremos en tomarla si no hay indicación de cambio.

La carta  $\bar{X}$  con intervalo de muestreo variable (VSI por sus siglas en inglés) usa un intervalo corto si  $\bar{X}$  está cerca pero no fuera de los límites de control y el intervalo será largo si  $\bar{X}$  está cercano al valor objetivo. Es decir, el procedimiento de control propuesto es dejar que el tiempo hasta la siguiente muestra dependa de lo que se observe en la muestra actual.

Se asume que la distribución de las observaciones del proceso es normal con media  $\mu$  y varianza conocida  $\sigma^2$ . Sea  $\mu_0$  el valor objetivo para la media. Muestras aleatorias de tamaño  $n$  se toman en cada punto muestral, y sea  $X'_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ .

En la carta  $\bar{X}$  usual la longitud de tiempo entre muestras es fijo. Denotaremos este esquema por FSI. En la carta VSI, el intervalo entre las muestras  $X_i$  y  $X_{i+1}$  dependerá del valor de  $\bar{X}_i$ .

Consideremos el caso simple en el que el intervalo definido por los límites de control  $\left(\mu_0 - \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$  se particiona en los siguientes dos intervalos:

$$I_1 = \left(\mu_0 - \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 - \gamma' \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \cup \left(\mu_0 + \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + \gamma' \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

e

$$I_2 = \left(\mu_0 - \gamma' \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + \gamma' \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

$$0 < \gamma' < \gamma$$

por ejemplo  $\gamma$  puede ser 3 y  $\gamma' = 1$ . Así, cuando  $\mu = \mu_0$ ,  $P[\bar{X} \in I_1] = 0,3146$  y  $P[\bar{X} \in I_2] = 0,6827$ , así el intervalo largo será usado aproximadamente el doble de veces que el intervalo corto.

Asumimos que si un punto cae en el intervalo  $I_2$  la longitud de intervalo utilizado para la siguiente toma es  $d_2$ . Si el punto cae en  $I_1$  el intervalo será  $d_1$  y si cae más allá de los límites de control el proceso se para y se inicia una búsqueda de las causas especiales que lo ocasionaron.

### Propiedades de la Carta $\bar{X}$ VSI

Las propiedades de esta carta están determinadas por la longitud de tiempo que toma la carta en producir una señal.

En un esquema FSI, el ARL se puede convertir al tiempo esperado para señal multiplicándolo por la longitud del intervalo. De esta forma el ARL también se puede interpretar como el tiempo esperado para señal. Por ejemplo si  $ARL=200$  y las muestras se toman cada hora uno puede decir que el tiempo promedio para señal es de 200 horas.

Sin embargo con el VSI el tiempo para señal no es un múltiplo constante del número de muestras para señal. Por esta razón los autores prefirieron definir nuevas cantidades para este esquema.

Definen el **número de muestras para señal** como el número de muestras que se toman desde el comienzo del proceso hasta el tiempo que la carta indica una señal. Y el **promedio del número de muestras para señal** (ANSS: average number of samples to signal) como el valor esperado del número de muestras para señal.

Además se define el tiempo promedio para señal (ATS: average time to signal) como el valor esperado del tiempo hasta la señal.

La probabilidad de que  $\bar{X}$  caiga fuera de los límites de control continúa siendo la misma.

$$q = P \left[ \bar{X} < \mu_0 - \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ó} \quad \bar{X} > \mu_0 + \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Si  $N$  es el número de muestras para señal,  $N$  tiene distribución geométrica con promedio  $q$  y como en el caso del ARL,

$$ANSS = E(N) = \frac{1}{q}$$

y

$$Var(N) = \frac{1-q}{q^2}$$

Si  $T$  = tiempo para señal y  $R_i$  = intervalo muestral usado antes de tomar la  $i$ -ésima muestra entonces,

$$T = \sum_{i=1}^N R_i.$$

Si la media del proceso es constante, entonces  $R_1, R_2, \dots$  son iid y se tiene que (usando la identidad de Wald)

$$ATS = E[T] = E[N] E[R_i]$$

sea

$$p_j = P[\bar{X} \in I_j]$$

entonces

$$\begin{aligned} E[R_i] &= \sum_{j=1}^{\eta} d_j P[\bar{X} \in I_j \mid \text{no hay señal}] \\ &= \sum_{j=1}^{\eta} d_j \frac{p_j}{1-q} \end{aligned}$$



donde  $d_j$  es la longitud del  $j$ -ésimo intervalo, y  $\eta$  es el número de intervalos (en el ejemplo  $\eta = 2$ ).

Por tanto,

$$E[T] = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{\eta} d_j \frac{p_j}{1-q}.$$

### Comparación entre las Cartas $\bar{X}$ FSI y VSI

Si las dos cartas, FSI y VSI, tienen límites de control  $\mu_0 \pm \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , entonces ambas tienen el mismo valor de  $q$  y la misma función ANSS. Es decir el intervalo usado en la carta VSI no tiene efecto en el número de muestras requeridas para señal.

Es conveniente tomar el intervalo usado por la carta FSI como unidad de tiempo. Así el valor numérico de la función ATS será el mismo valor numérico de la función ANSS para la carta FSI.

Si la carta VSI se diseña de tal forma que  $E(R_i)$ , la longitud de intervalo esperado, sea igual a una unidad de tiempo cuando  $\mu = \mu_0$ , entonces las dos cartas tendrán las mismas funciones ATS cuando  $\mu = \mu_0$ , ya que  $E(N)$  es el mismo para ambas cartas, FSI y VSI, para todo  $\mu$ .

Luego se comparan los valores de las funciones ATS de las dos cartas para varios valores de  $\mu$ , con el objeto de ver cual de las dos cartas es mejor.

Consideremos el caso de 2 intervalos de muestreo. Cuando  $\mu = \mu_0$ , si se quiere que  $E[R_i] = 1$  entonces:

Como

$$E[R_i] = d_1 \frac{p_{01}}{1-q_0} + d_2 \frac{p_{02}}{1-q_0},$$

se tiene igualando a 1 que

$$d_1 p_{01} + d_2 p_{02} = 1 - q_0. \quad (9.1)$$

Si  $\gamma$  es fijo,  $q_0$  es fijo y (9.1) puede satisfacerse especificando  $d_1$  y  $d_2$ .

Estos intervalos de muestreo determinan  $p_{01}$  y  $p_{02}$  y por lo tanto los intervalos  $I_1$  e  $I_2$ .

Como

$$p_{01} + p_{02} + q_0 = 1 \quad (9.2)$$

$$p_{02} = 1 - q_0 - p_{01}$$

y reemplazando en (9.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} d_1 p_{01} + d_2 [1 - q_0 - p_{01}] &= 1 - q_0 \\ p_{01} &= \frac{d_2 - 1}{d_2 - d_1} (1 - q_0) \end{aligned} \quad (9.3)$$

reemplazando este valor de  $p_{01}$  en (9.2) se obtiene

$$p_{02} = \frac{1 - d_1}{d_2 - d_1} (1 - q_0). \quad (9.4)$$

Es decir, para valores dados de  $\gamma$  y  $0 < d_1 < 1 < d_2$ ,  $p_{01}$  y  $p_{02}$  deben satisfacer (9.3) y (9.4). Con estos valores se determina  $\gamma'$ , encontrando a su vez  $I_1$  e  $I_2$ .

Los resultados sugieren que solo dos intervalos ( $\gamma = 2$ ) necesitan ser considerados en la carta VSI. El caso que mejor resultados mostró fue el de  $d_i = (0, 1, 1, 9)$ . Es decir  $d_1 = 0, 1$  y  $d_2 = 1, 9$ .

La comparación entre las cartas  $\bar{X}$ , FSI y VSI mostraron que la carta VSI es más eficiente que la carta tradicional FSI. Estudios posteriores han mostrado resultados similares.

Moreno & Vargas (2000) muestran como el esquema VSI para cartas R es superior al esquema FSI. Reynolds, Amin & Arnold (1990) definen una carta CUSUM VSI y concluyen que es más eficiente que la carta CUSUM estándar. Prybutok, Clayton & Harvey (1997) muestran mediante estudios de simulación que la carta  $\bar{X}$  VSI es superior a la carta  $\bar{X}$  FSI cuando los datos son autocorrelacionados. Epprecht, Simoes & Mendes (2010) proponen una carta EWMA VSI para atributos. Reynolds & Stoumbos (2001) estudian varias combinaciones de cartas VSI Shewhart y EWMA para detectar cambios en la media y/o la varianza, cuando se toman observaciones individuales. Los estudios de simulación realizados muestran como el esquema VSI produce una reducción en el tiempo requerido para detectar cambios en los parámetros.

#### 9.4.2. Cartas de Control con Tamaños de Muestra Variable

Así como en las cartas VSI los intervalos de tiempo entre muestras varían, dependiendo del valor de la estadística que se esté controlando, otro desarrollo en el área de cartas de control adaptativas consiste en variar el tamaño

de la muestra dependiendo del valor de la estadística. Estos esquemas se denominan cartas de control con tamaños de muestra variable (VSS). La idea es que si un punto cae en cierta región de aviso, la siguiente muestra debe incrementarse, pero si el punto cae cerca a la línea de control, la siguiente muestra debe ser más pequeña. Propiedades de la carta  $\bar{X}$  VSS han sido estudiadas por Prabhu, Runger & Keats (1993), Costa (1994) y Park & Reynolds (1994). Epprecht & Costa (2001) estudiaron las propiedades de las cartas  $np$  y  $c$  VSS.

La combinación de las cartas VSI y las cartas VSS han dado lugar a las cartas de control VSSI, que son aquellas cartas en que se permite variar tanto el tamaño de la muestra como el intervalo de tiempo entre muestras. Cartas  $\bar{X}$  VSSI han sido estudiadas por Prabhu, Montgomery & Runger (1994) y Costa (1997). Arnold & Reynolds (2001) proponen una carta CUSUM VSSI. Reynolds & Arnold (2001) realizaron una investigación detallada sobre cartas EWMA VSS y VSSI para monitorear la media de un proceso. Capizzi & Masarotto (2003) proponen cartas EWMA adaptativas. Wu & Luo (2004) presentan cartas  $np$  VSI y VSSI.



## Capítulo 10

# Monitoreo de Perfiles

En las aplicaciones comunes de Control Estadístico de Procesos se asume que se tiene bajo estudio una o varias características de calidad o de proceso, las cuales se monitorean mediante una carta de control univariada o multivariada. En otras circunstancias sin embargo, la calidad de un producto o proceso está caracterizada por una relación (perfil) entre una variable respuesta y una o varias variables explicativas. El monitoreo de perfiles consiste en el uso adecuado de cartas estadísticas de control para los casos en que la calidad de un producto o proceso está caracterizada por este tipo de relaciones funcionales. La metodología paramétrica utilizada ha sido la de definir específicamente la función y monitorear los parámetros de dicha función mediante cartas de control. En algunos casos se utilizan métodos no paramétricos, que consisten en ajustar una curva a las observaciones discretizadas mediante algún método de suavizamiento como por ejemplo B-splines, establecer una curva base y seleccionar alguna métrica que permita medir la distancia entre una curva ajustada en algún tiempo y una curva base. Estas metodologías, se conocen como monitoreo de perfiles, y han mostrado ser muy útiles en la industria, pues debido al avance tecnológico, cada vez se tienen herramientas electrónicas más avanzadas para la toma de grandes cantidades de información en línea sobre los productos o procesos. Para una revisión de literatura en el área y algunas aplicaciones ver Woodall, Spitzner, Montgomery & Gupta (2004) , Woodall (2007) y Noorossana, Saghaei & Amiri (2011).

## 10.1. Perfiles lineales

Inicialmente la investigación en esta área se enfocó en el monitoreo de perfiles lineales, es decir en aquellos casos en los que la relación funcional se puede expresar mediante un modelo de regresión lineal simple o múltiple. Ver Kang & Albin (2000), Kim, Mahmoud & Woodall (2003), Woodall et al. (2004), Mahmoud & Woodall (2004), Zou, Tsung & Wang (2007), Eyvazian, Noorossana, Saghaei & Amiri (2011), y Xu, Wang, Peng, Morgan, Reynolds & Woodall (2012).

En el monitoreo de perfiles también se deben diferenciar dos fases. En la Fase I, un conjunto de datos históricos es obtenido para estudiar la estabilidad del proceso, identificar outliers y remover aquellos que tengan causas asignables, y finalmente estimar los parámetros del modelo bajo control. En la Fase II se realiza el monitoreo en línea, ver Gupta, Montgomery & Woodall (2006).

En la Fase I se asume que  $k$  muestras aleatorias son tomadas. Sea  $\{(x_i, y_{ij}), i = 1, 2, \dots, n\}$  la  $j^{th}$  muestra aleatoria, para  $j = 1, \dots, k$ . Se asume que la función lineal entre la variable respuesta  $Y$  y la variable explicatoria  $X$ , es

$$y_{ij} = A_{0j} + A_{1j}x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k,$$

donde  $X$  tiene  $n$  valores fijos, y las variables aleatorias  $\varepsilon_{ij}$  son independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza  $\sigma_j^2$ . Cuando el proceso está bajo control  $A_{0j} = A_0$ ,  $A_{1j} = A_1$  y  $\sigma_j^2 = \sigma^2$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Cuando una causa asignable modifica el proceso, al menos uno de los tres parámetros será afectado. Los parámetros  $A_0$ ,  $A_1$  y  $\sigma^2$  son usualmente desconocidos, así que ellos deben ser estimados usando los datos históricos. Los estimadores vía mínimos cuadrados para  $A_0$ ,  $A_1$  y  $\sigma^2$  calculados a partir de la muestra  $j$  son:

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j}\bar{x}, \quad a_{1j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}} \quad \text{y} \quad MSE_j = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_{ij}^2,$$

donde  $\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}$ ,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $S_{xy(i)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_{ij}$ ,  $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  y  $e_{ij} = y_{ij} - a_{0j} - a_{1j}x_i$ .

Los estimadores  $a_{0j}$  and  $a_{1j}$  tienen una distribución normal bivariada con un vector de medias  $(A_0, A_1)'$  y matriz de varianzas covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{01}^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix},$$

donde

$\sigma_0^2 = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}})$ ,  $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ , y  $\sigma_{01}^2 = \frac{-\sigma^2\bar{x}}{S_{xx}}$ . Se conoce que  $MSE_j$  es un estimador insesgado de  $\sigma_j^2$ .

Diferentes procedimientos de análisis para la Fase I han sido propuestos. Stover & Brill (1998) usaron la carta de control multivariada  $T^2$  con el intercepto muestral y la pendiente muestral como las dos características a monitorear. La estadística  $T^2$  se define como:

$$T_j^2 = (\mathbf{z}_j - \bar{\mathbf{z}})' \mathbf{S}_1^{-1} (\mathbf{z}_j - \bar{\mathbf{z}}), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (10.1)$$

donde  $\mathbf{z}_j = (a_{0j}, a_{1j})'$ ,  $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1)'$ ,  $\bar{a}_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_{0j}$  y  $\bar{a}_1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_{1j}$ .  $\mathbf{S}_1$  es la matriz de varianza covarianza calculada por la combinación de los vectores de los coeficientes estimados de la regresión.

Kang & Albin (2000) propusieron una carta multivariada  $T^2$  con la estadística  $T^2$  definida como:

$$T_j^2 = \frac{k}{k-1} (\mathbf{z}_j - \bar{\mathbf{z}})' \mathbf{S}_2^{-1} (\mathbf{z}_j - \bar{\mathbf{z}}), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

donde  $\mathbf{z}_j$  y  $\bar{\mathbf{z}}$  son definidas como en (10.1), y  $\mathbf{S}_2$  es el estimador de  $\Sigma$  el cual usa el  $MSE$  como el estimador de  $\sigma^2$ , donde  $MSE = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k MSE_j$ .

Kim et al. (2003) transformaron los valores de  $X$  por  $X - \bar{X}$ ; por consiguiente, el valor promedio de los valores transformados es 0, y los coeficientes de la regresión calculados a partir de los datos transformados son independientes. De esta forma se puede hacer uso de dos cartas Shewhart para monitorear en forma separada el intercepto y la pendiente. La varianza puede ser monitoreada mediante una tercera carta tipo Shewhart.

Mahmoud & Woodall (2004) aplicaron una prueba  $F$  para evaluar la igualdad de diferentes líneas de regresión. Si la prueba  $F$  es significativa, recomendaron el uso de cartas de control 3-sigma para el intercepto y la pendiente, en forma separada, después de transformar los valores de  $X$  por  $X - \bar{X}$ . Mahmoud & Woodall (2004) también recomendaron una carta de control tipo Shewhart para monitorear la varianza. Los autores compararon los cuatro métodos presentados, en términos de la probabilidad de obtener una señal

fuera de control, para diferentes cambios en los parámetros de la regresión. Concluyeron que el método basado en la prueba  $F$  se desempeña mejor que los otros métodos para una gran cantidad de casos, mientras que el método de Stover & Brill (1998) tuvo un pobre desempeño.

Mediante la formulación de un modelo de punto de cambio, Hawkins & Zamba (2005) propusieron una carta de control basada en la prueba de la razón de verosimilitud para detectar cambios en la media y varianza cuando los parámetros de un proceso son desconocidos. Este modelo fue utilizado por Zou, Zhang & Wang (2006) y Mahmoud, Parker, Woodall & Hawkins (2008) para monitorear perfiles lineales.

Cuando no se dispone de un conjunto de muestras suficientemente grande que permita estimar los parámetros, se han desarrollado métodos conocidos como de auto-inicio, los cuales actualizan los estimativos de los parámetros a medida que van llegando nuevas observaciones. Zou, Zhou, Wang & Tsung (2007) proponen una carta de control de auto-inicio, basada en residuales recursivos para monitorear perfiles lineales cuando los parámetros del modelo son desconocidos.

Zou, Tsung & Wang (2007) proponen monitorear un perfil lineal general usando una carta EWMA multivariada. Además, los autores proponen algunas ayudas diagnósticas que permiten identificar el punto donde el perfil cambió, y señala cuál o cuáles de los parámetros cambiaron. Zou, Tsung & Wang (2007) asumen que para la  $j$ -ésima muestra aleatoria en el tiempo, se tienen las observaciones  $(X_j, Y_j)$ , y que el proceso está bajo control estadístico. Entonces el modelo asociado es:

$$Y_j = X_j\beta + \varepsilon_j,$$

donde  $Y_j$  es un vector aleatorio  $(n \times 1)$ ,  $X_j$  es una matriz  $n \times p$  ( $n > p$ ),  $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(p)})$  es el vector de coeficientes  $p$ -dimensional,  $\varepsilon_j$  son vectores aleatorios normal multivariados  $n \times 1$  con media cero y matriz de covarianzas  $\sigma^2 I$ . Se supone que  $X_j$  es de la forma  $(1, X_j^*)$ , donde  $X_j^*$  es ortogonal a 1. La variable explicativa  $X_j$  es fija para los diferentes  $j$ .

Para monitorear un perfil lineal general hay  $p + 1$  parámetros,  $p$  coeficientes y la desviación estándar  $\sigma$ , a ser controlados simultáneamente. Se define

$$Z_j(\beta) = (X^t X)^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_j - \beta)/\sigma$$

$$Z_j(\sigma) = \Phi^{-1}\{F((n - p)\hat{\sigma}_j^2/\sigma^2; n - p)\},$$



donde  $\hat{\beta}_j = (X^t X)^{-1} X^t Y$ ,  $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-p} (Y_j - X \hat{\beta}_j)^t (Y_j - X \hat{\beta}_j)$ ,  $F(\cdot, v)$  es la función de distribución chi-cuadrado con  $v$  grados de libertad

Sea  $Z_j = (Z_j(\beta), Z_j(\sigma))^t$  un  $(p+1)$  vector aleatorio que tiene distribución normal multivariada cuando el proceso está en control. La estadística EWMA es definida como:  $W_j = \lambda Z_j + (1-\lambda)W_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , donde  $W_0$  es un  $(p+1)$  vector inicial y  $\lambda$  es un parámetro de suavizamiento ( $0 < \lambda \leq 1$ ). La carta muestra una señal si  $U_j = W_j^t W_j > L \frac{\lambda}{2-\lambda}$ , donde  $L > 0$  es seleccionado para alcanzar un ARL específico, cuando el proceso está en control. El ARL, para procesos en control y fuera de control, son calculados extendiendo el trabajo de Runger & Prabhu (1996) vía cadenas de Markov.

Noorossana, Eyvazian & Vaghefi (2010) extienden los trabajos de Kang & Albin (2000) y Kim et al. (2003) a una estructura de modelo lineal multivariado en el monitoreo de los parámetros en la Fase II, es decir, asumiendo para la  $k$ -ésima muestra colectada en el tiempo  $n$  valores fijos de variables explicatorias (del mismo tamaño) y para cada valor de la variable explicatoria,  $p$  valores respuestas correspondientes. La primer propuesta extiende el método de Kang & Albin (2000), construyendo una carta MEWMA para el monitoreo del vector de parámetros combinandola con una carta MEWMA/ $\chi^2$  para el monitoreo del vector de promedio de errores de tamaño  $1 \times p$ . La segunda propuesta extiende el método de Kim et al. (2003), codificando los valores de  $x$ , de tal forma que el vector de interceptos y el vector de pendientes de tamaño  $1 \times p$  resultan ser independientes para cada caso.

Las aplicaciones reseñadas arriba asumen que las observaciones  $y_i$  se distribuyen normalmente. Cuando la función de distribución de las observaciones no se conoce, métodos no paramétricos pueden ser apropiados. Por ejemplo Noorossana & Ayoubi (2012) proponen una carta de control bootstrap para monitorear perfiles lineales en estos casos. En otras situaciones se conoce la distribución de las observaciones aún cuando esta no sea normal. Es lo que ocurre por ejemplo en ciertas aplicaciones donde el tiempo transcurrido desde cierto momento hasta que ocurra un evento es de interés. Por ejemplo, el tiempo desde que empieza a funcionar una componente eléctrica hasta que ocurre una falla. En Salud Pública, el tiempo que transcurre entre el diagnóstico de cierta enfermedad y la muerte del paciente es de especial interés. Este tipo de datos se conoce como tiempos de vida.

Modelos de regresión paramétricos y semiparamétricos han sido utilizados para describir tiempos de vida. En Control Estadístico de Procesos interesa monitorear el vector de parámetros que caracterizan este tipo de modelos.

El monitoreo de tiempos de supervivencia de los pacientes ha sido propuesto recientemente en el contexto de Salud Pública, ver por ejemplo Sego, Reynolds & Woodall (2009). Woodall & Montgomery (2014) consideran que el monitoreo de tiempos de vida es un área de investigación muy importante. El modelo paramétrico más utilizado es el modelo de regresión Weibull. El modelo Weibull es flexible y proporciona una buena descripción a muchos tipos de tiempos de supervivencia. En los últimos años se han propuesto cartas de control para monitorear procesos Weibull. Ver por ejemplo Pascual (2010), Pascual & Li (2011) y Dickinson, Olteanu, Driscoll, Woodall & Vining (2014).

Algunas aplicaciones de este tipo de problemas involucra un conjunto de variables que pueden estar correlacionadas con los tiempos de vida. La manera de considerar el efecto de estas variables explicativas sobre los tiempos de vida es mediante un modelo de regresión apropiado. Panza & Vargas (2016) proponen una metodología para monitorear este tipo de perfiles en Fase II.

Otros tipos de relaciones funcionales pueden ser de interés en algunas aplicaciones particulares. Es el caso por ejemplo de datos composicionales, en los cuales la característica de calidad es una mezcla o un vector composicional  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)'$  con elementos no negativos que suman una constante  $c$ . Debido a la suma constante, los datos composicionales pertenecen a un espacio muestral restringido de dimensión  $p-1$ . El espacio muestral de datos composicionales es el simplex  $S^p$ , donde  $p$  representa el número de variables en la composición, y matemáticamente está definido de la siguiente manera,

$$S^p = \{\mathbf{y} \in R^p / y_i > 0, \sum_{i=1}^p y_i = c\}.$$

Vives, Daunis & Martin (2014) proponen una carta de control  $T^2$  para observaciones composicionales individuales. Guevara, Vargas & Linero (2014) presentan una metodología para monitorear perfiles donde el vector respuesta es un vector composicional. Para esto, ajustan un modelo de regresión Dirichlet y utilizan cartas de control  $T^2$  para monitorear el vector de parámetros.

## 10.2. Perfiles no Lineales

En algunos casos se encuentra que los modelos que mejor ajustan un perfil son de tipo no lineal. Un modelo no lineal se puede escribir de la siguiente

forma

$$y_{ij} = f(\mathbf{x}_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i) + \varepsilon_{ij} \quad (10.2)$$

donde  $\mathbf{x}_{ij}$  es un vector de regresoras  $k \times 1$  para la  $j$ -ésima observación del  $i$ -ésimo perfil,  $\boldsymbol{\beta}_i$  es un vector  $p \times 1$  de parámetros para el  $i$ -ésimo perfil,  $f$  es una función no lineal en los parámetros, y  $\varepsilon_{ij}$  es el error aleatorio. Usualmente se asume que los términos de error son variables aleatorias normales, independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma^2$ . El modelo escalar de la ecuación (10.2) se puede escribir en términos matriciales de la siguiente forma,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (10.3)$$

donde  $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})'$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = (f(\mathbf{x}_{i1}, \boldsymbol{\beta}_i), f(\mathbf{x}_{i2}, \boldsymbol{\beta}_i), \dots, f(\mathbf{x}_{in}, \boldsymbol{\beta}_i))'$ , y  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{in})'$ . Para el modelo dado en la ecuación (10.3) se obtienen los estimadores de  $\boldsymbol{\beta}_i$  para cada muestra. Los estimadores máximo verosímiles se obtienen mediante un método iterativo, por ejemplo Gauss-Newton. La matriz de covarianzas de los estimadores  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$  es la matriz de información de Fisher, la cual está dada por,

$$F = \left[ \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_{ij}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right) \right]$$

donde  $j = 1, \dots, n$ , y  $k = 1, \dots, p$ .

Para perfiles no lineales definidos por los anteriores modelos, Williams, Woodall & Birch (2007) proponen utilizar una carta de control  $T^2$  para monitorear los  $p$  parámetros simultáneamente. Cuando  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$  haya sido obtenido a partir de cada muestra de la Fase I, se calcula el vector promedio  $\bar{\boldsymbol{\beta}}$  y algún estimador de la matriz de covarianzas, para obtener

$$T_i^2 = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_i - \bar{\boldsymbol{\beta}})' S^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_i - \bar{\boldsymbol{\beta}}) \quad (10.4)$$

Un valor grande de  $T_i^2$  indica un valor inusual de  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ , lo cual sugiere que el perfil en la muestra  $i$  está fuera de control. Para  $S$  seleccionaron tres estimadores, la matriz de varianzas covarianzas usual, la matriz basada en diferencias sucesivas definida en la sección 8.1.4, y el estimador de elipsoide de volumen mínimo (MVE).

Adicional al estudio de estabilidad de cada perfil en el conjunto histórico de datos, es importante chequear la estabilidad de la variabilidad de cada perfil. Este estudio es análogo a monitorear la varianza del proceso en el caso univariado. Cuando se monitorean perfiles, lo que se pretende es monitorear la variabilidad dentro de perfiles. Williams et al. (2007) proponen usar el cuadrado medio del error (MSE) como medida de la variabilidad dentro de perfiles.  $S_i^2 = MSE_i = \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 / (n - p)$ , donde  $\hat{y}_{ij}$  es el valor pronosticado de  $y_{ij}$  basado en el modelo de regresión no lineal de la ecuación (10.2). Los valores de  $S_i^2$  se grafican contra  $i$ , en una carta cuyos límites de control están definidos por  $L_{\alpha, m, n-p} m \bar{S}^2$  y  $U_{\alpha, m, n-p} m \bar{S}^2$ , donde  $L$  y  $U$  son ciertos valores críticos y  $\bar{S}^2 = \sum_{i=1}^m MSE_i / m$ .

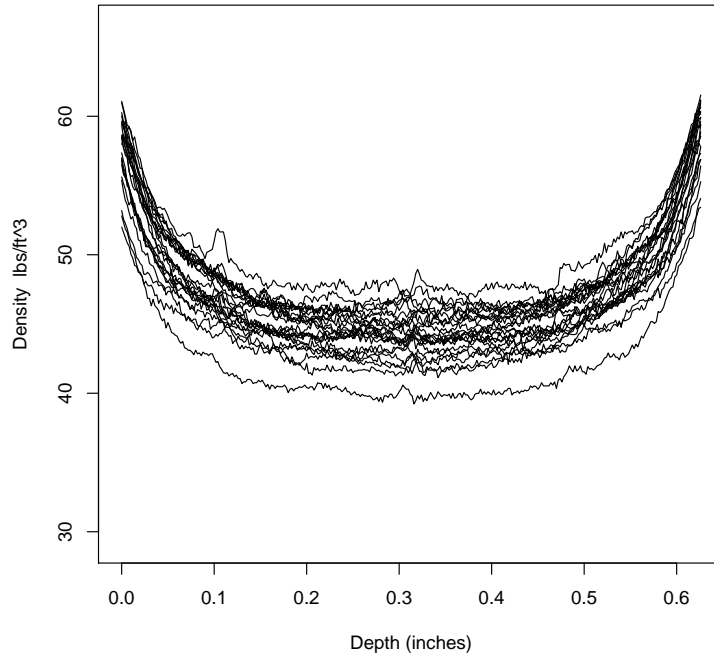
**Ejemplo:** Un ejemplo muy conocido en la literatura de perfiles es el conjunto de datos conocido como perfiles de densidad vertical, propuesto inicialmente por Walker & Wright (2002). Los datos están relacionados con el proceso de manufactura de aglomerados, el cual es simplemente un material comprimido y fuerte con el que se fabrican tablas o paneles de madera. Las propiedades de densidad de las tablas son características de calidad que se monitorean en el tiempo. La densidad, en libras por pie cúbico, cerca al centro del aglomerado, es menor que la densidad en las caras superior e inferior de la tabla. Utilizando un dispositivo laser se registran las densidades de la tabla a profundidades verticales fijas. Las densidades fueron tomadas a profundidades de  $x_j = (0,002)j$  pulgadas,  $j = 0, 1, 2, \dots, 313$ . Por tanto, para la tabla  $i$  se registran las observaciones  $(x_j, y_{ij})$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Este conjunto de pares ordenados constituye un perfil de densidad vertical (VDP) de la tabla. Los perfiles de 24 tablas se muestran en la Gráfica (10.1).

Williams et al. (2007) modelan el  $i$ -ésimo perfil mediante la siguiente función no lineal,

$$f(x_{ij}, \beta) = \begin{cases} a_1(x_{ij} - c)^{b_1} + d, & \text{si } x_j > c \\ a_2(-x_{ij} + c)^{b_2} + d, & \text{si } x_j \leq c \end{cases} \quad (10.5)$$

para  $i = 1, \dots, m$ , y  $j = 1, \dots, n$ , donde  $\beta = (a_1, a_2, b_1, b_2, c, d)$ . Para cada una de las 24 tablas de la muestra se ajusta el modelo no lineal de la ecuación (10.5), y se calcula la estadística  $T^2$ , basada en los valores  $\hat{\beta}$ . Como se dijo anteriormente, Williams et al. (2007) construyeron tres cartas de control  $T^2$ , una para cada estimador de  $S$ , y concluyen que las tablas 15 y 18 son outliers, mientras que las número 4, 9 y 24 deben ser inspeccionadas cuidadosamente.

Otros ejemplos en diferentes áreas han sido publicados. Por ejemplo Jensen,



Gráfica 10.1. Perfiles de densidad vertical (VDP) de 24 aglomerados

Grimshaw & Espen (2016) monitorean la temperatura de un horno, utilizado en un proceso industrial, mediante perfiles no lineales. En la mayoría de estas aplicaciones se asume que las observaciones dentro de cada perfil son independientes. Sin embargo, en la práctica los datos dentro de cada perfil pueden estar correlacionados. Por ejemplo, los datos dentro de perfiles de los VDP's del ejemplo anterior están espacialmente correlacionados ya que las medidas de densidad se toman a intervalos muy cercanos uno del otro a lo largo de la tabla. Jensen, Birch & Woodall (2008) proponen usar modelos mixtos no lineales para monitorear perfiles no lineales, de tal forma que se pueda tener en cuenta autocorrelaciones dentro de perfiles. Qiu, Zou & Wang (2010) proponen utilizar un modelo de efectos mixtos no paramétrico para describir la correlación dentro de perfiles. La carta propuesta está basada en un suavizamiento kernel local y un esquema EWMA.

Colosimo, Pacella & Semeraro (2008) proponen una metodología cuando los datos bajo estudio se refieren a especificaciones geométricas, como por ejem-

plo la textura de una superficie, redondez, esfericidad, etc. En estos casos las medidas usualmente son correlacionadas espacialmente, ya que ellas son obtenidas en condiciones similares del proceso y bajo propiedades similares del material. La autocorrelación espacial es diferente de la autocorrelación temporal, la cual se representa usualmente vía modelos de series de tiempo. Colosimo et al. (2008) combinan un modelo de regresión autorregresivo espacial (SARX), es decir, un modelo de regresión con errores autorregresivos espaciales, con cartas de control, para monitorear la calidad de un producto caracterizada por especificaciones geométricas.

### 10.3. Perfiles con Respuesta Discreta

En todos los trabajos de investigación que se han relacionado en las secciones anteriores, se asume que la variable respuesta es de tipo continuo. Sin embargo, es común encontrar aplicaciones en las que la variable respuesta es cualitativa. Por ejemplo, cuando un artículo producido en cierto proceso de manufactura es inspeccionado y se clasifica como conforme o no conforme a ciertas especificaciones predeterminadas. En general, un perfil con variable respuesta categórica puede representarse adecuadamente como un modelo lineal generalizado. En particular, Yeh, Huwang & Li (2009) presentan una propuesta de monitoreo de perfiles con respuesta binaria que utiliza el modelo de regresión logística. Específicamente, extienden el uso de varios esquemas de control usados para el monitoreo de perfiles con respuesta continua al caso especial de interés. Aspectos generales del trabajo se presentan a continuación.

Supóngase que se tienen  $n$  realizaciones independientes de una situación experimental. Para cada realización particular,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se tiene que  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})'$  denota el vector de las  $p$  variables predictoras y  $z_i$  denota la variable respuesta correspondiente. Se asume que cada respuesta  $z_i$  sigue una distribución Bernoulli con probabilidad de éxito  $\pi_i$ . Es decir,  $E(z_i) = \pi_i$  y  $V(z_i) = \pi_i(1 - \pi_i)$ .

En el contexto de un modelo de regresión logística, se asume que

$$g(\pi_i) = \eta_i = \log \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} = \mathbf{x}_i \beta \quad (10.6)$$

donde  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$  es el vector de parámetros del modelo. Se acostumbra

hacer  $x_{i1} = 1$  de tal modo que  $\beta_1$  es el intercepto del modelo. De (1) es fácil obtener una expresión para  $\pi_i$ .

Se asume también que los datos se agrupan de tal manera que para la  $i$ -ésima realización particular del experimento hay  $m_i$  observaciones. Es claro que  $y_i = \sum_{j=1}^{m_i} z_{ij}$ , donde  $z_{ij}$  representa la  $j$ -ésima observación de la variable respuesta en la  $i$ -ésima realización particular del vector  $\mathbf{x}_i$ , sigue una distribución binomial con  $E(y_i) = m_i\pi_i$  y  $V(y_i) = m_i\pi_i(1 - \pi_i)$ .

Si se define el vector de respuestas  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ , el valor esperado del vector de respuestas  $\mu = E(\mathbf{y}) = (m_1\pi_1, \dots, m_n\pi_n)'$  y la matriz diseño  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)'$  de orden  $n \times p$ , entonces el estimador máximo verosímil de  $\beta$  viene dado por la solución de la función score  $\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mu) = \mathbf{0}$ , donde  $\mathbf{0}$  es el vector de ceros de orden  $p$ . De acuerdo con el procedimiento iterativo de mínimos cuadrados ponderados presentado en McCullagh & Nelder (1989), el estimador máximo verosímil de  $\beta$  se puede aproximar a través de la expresión

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{q} \quad (10.7)$$

donde  $\widehat{\mathbf{W}}$  representa la estimación de la matriz  $\mathbf{W} = \text{diag}\{m_i\pi_i(1 - \pi_i)\}$  de orden  $n \times n$  y  $\mathbf{q}$  es el vector  $(q_1, \dots, q_n)'$  cuyas componentes se definen como

$$q_i = \hat{\eta}_i + \frac{y_i - m_i\hat{\pi}_i}{m_i\hat{\pi}_i(1 - \hat{\pi}_i)} \quad (10.8)$$

De acuerdo con McCullagh & Nelder (1989), bajo ciertas condiciones de regularidad, cuando  $n$  es suficientemente grande, o cuando cada  $m_i$  es suficientemente grande para un  $n$  fijo, el estimador (2) se distribuye asintóticamente como una normal  $p$ -dimensional con vector de medias igual a  $\beta$  y matriz de covarianzas igual a  $(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}$ .

Por ser un modelo de regresión logística, el perfil se caracteriza a través del vector de parámetros  $\beta$ . Se propone entonces extender, para este caso, el uso de las cartas  $T^2$  de Hotelling utilizadas en el monitoreo del vector de medias. Supóngase que cuando el proceso está bajo control el vector de parámetros del modelo es  $\beta_0 = (\beta_{10}, \dots, \beta_{p0})'$ . En la fase I del control, se toman  $k$  muestras independientes cada una de las cuales tiene un tamaño igual a  $\sum_{i=1}^n m_i$ . Se asume también que la matriz de variables predictoras es la misma para cada muestra. Para cada muestra  $t, t = 1, 2, \dots, k$ ,  $\hat{\beta}_t$  es el estimador máximo verosímil del vector de parámetros  $\beta$  hallado como se

muestra en la expresión (2). La estadística de monitoreo se define como

$$T_t^2 = (\hat{\beta}_t - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} \hat{\beta}_t - \beta_0 \quad (10.9)$$

donde  $\Sigma_0$  es la matriz de covarianzas de  $\hat{\beta}_t$  en el momento  $t$  cuando el proceso está bajo control.

Shang, Tsung & Zou (2011) utilizan un modelo de regresión logística para representar la relación funcional entre una respuesta binaria y un conjunto de variables explicativas aleatorias. Proponen una carta de control basada en esquemas EWMA, que permite monitorear simultáneamente cambios en los parámetros de la regresión logística y cambios en las medias de las variables explicativas.

#### 10.4. Capacidad de Procesos caracterizados por Perfiles

La habilidad que posee un proceso para que consistentemente se ajuste a unas especificaciones previamente establecidas se denomina capacidad. Hay un buen número de publicaciones dedicadas al monitoreo de perfiles, pero la investigación dedicada al análisis de la capacidad de procesos caracterizados por alguna relación funcional es limitada. Estudios recientes han propuesto diferentes aproximaciones para medir la capacidad de estos procesos. Hosseini-fard & Abbasi (2012a) y Ebadi & Shahriari (2013) emplearon la proporción de no conformidad para estimar un índice de capacidad en perfiles lineales. Para el caso particular de un modelo de regresión lineal simple definido de la forma

$$y_{ij} = A_{0j} + A_{1j}x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k,$$

la proporción de unidades no conformes, es decir, el porcentaje de unidades fuera de los límites de especificación para cada nivel de la variable independiente, está definido como sigue,

$$p_{Si} = P(y_i > LES_i) = P(Z > \frac{LES_i - \mu_i}{\sigma}), \quad i = 1, \dots, n$$

$$p_{Li} = P(y_i < LEI_i) = P(Z < \frac{LEI_i - \mu_i}{\sigma}), \quad i = 1, \dots, n$$



donde  $LES_i$  y  $LEI_i$  son los límites de especificación superior e inferior de la variable respuesta, para el  $i$ -ésimo nivel de la variable independiente. Calculando los promedios de estas proporciones de la forma,

$$p_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{Si}, \quad p_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{Li}$$

los índices de capacidad quedan definidos mediante las siguientes relaciones,

$$C_p = \frac{1}{6} [\Phi^{-1}(1 - p_S) - \Phi^{-1}(p_L)]$$

y

$$C_{pk} = \frac{1}{3} \min\{\Phi^{-1}(1 - p_S), -\Phi^{-1}(p_L)\}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar.

Hosseinifard & Abbasi (2012b) propusieron varias metodologías para medir la capacidad en procesos lineales simples bajo no normalidad. Una de ellas consiste en transformar la variable respuesta  $Y_i$  mediante la técnica de transformación Box-Cox, calcular entonces la proporción de no conformidad utilizando el método propuesto arriba y usar la relación entre la proporción no conforme y los índices de capacidad de proceso. Otra propuesta consiste en ajustar la función de distribución utilizando la familia de distribuciones Burr XII, y utilizar los percentiles de la distribución ajustada para calcular los índices de capacidad.

Para procesos caracterizados por relaciones funcionales no lineales Guevara & Vargas (2015) propusieron un método basado en el concepto de profundidad funcional. El concepto de profundidad aparece para generalizar la noción de orden, que se entiende fácilmente en la recta real, al caso de datos multivariados. Por datos funcionales entendemos una colección de funciones, usualmente curvas suaves. Por tanto, el propósito de profundidad funcional es medir la centralidad de una curva dada dentro de un conjunto de curvas, es decir, la profundidad para datos funcionales permite ordenar un conjunto de curvas. Lopez-Pintado & Romo (2009) propusieron una noción de profundidad para datos funcionales, basada en la representación gráfica de las funciones, permitiendo definir bandas que contienen una proporción  $\alpha$  de las curvas más profundas en un conjunto de curvas. Esta metodología permite

ordenar las curvas del centro hacia afuera y definir los cuantiles funcionales. Con base en este concepto de profundidad funcional, Guevara & Vargas (2015) propusieron una medida de capacidad para datos funcionales, extendiendo los índices de capacidad definidos en la sección 3.3 al caso de datos funcionales. Guevara & Vargas (2016) extienden este método y evalúan la capacidad de procesos caracterizados por procesos no lineales multivariados.

# Bibliografía

- Abbasi, S. & Miller, A. (2012), ‘On proper choice of variability control chart for normal and non-normal processes’, *Quality and Reliability Engineering International* **28**, 279–296.
- Abu-Shawiesh, M. O. & Abdullah, M. B. (1999), ‘New robust statistical process control chart for location’, *Quality Engineering* **12**(2), 149–159.
- Acosta-Mejia, C. A. & Pignatiello, J. J. (2000), ‘Monitoring process dispersion without subgrouping’, *Journal of Quality Technology* **32**(2), 89–102.
- Acosta-Mejia, C., Pignatiello, J. J. & Rao, B. V. (1999), ‘A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion’, *IIE Transactions* **31**, 569–579.
- Alfaro, J. L. & Ortega, J. (2009), ‘A comparison of robust alternatives to hotelling’s  $t^2$  control chart’, *Journal of Applied Statistics* **36**(12), 1385–1396.
- Ali, A., Mahmood, T., Nazir, H., Sana, I., Akhtar, N., Qamar, S. & Iqbal, M. (2016), ‘Control charts for process dispersion parameter under contaminated normal environments’, *Quality and Reliability Engineering International* **32**(7), 2481–2490.
- Alt, F. B. (1984), Multivariate quality control, in N. Kots & C. R. Read, eds, ‘Encyclopedia of Statistical Sciences’, John Wiley, New York, pp. 110–122.
- Alt, F. B. & Smith, N. D. (1988), Multivariate process control, in P. R. Krishnaiah & C. R. Rao, eds, ‘Handbook of Statistics’, Vol. 7, North-Holland, Amsterdam, pp. 333–351.

- Anderson, T. W. (1984), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2 edn, Wiley, New York.
- Antzoulakos, D. L. & Rakitzis, A. C. (2010), 'Runs rules schemes for monitoring process variability', *Journal of Applied Statistics* **37**(7), 1231–1247.
- Aparisi, F., Champ, C. W. & García, J. (2004), 'A performance analysis of hotelling's  $\chi^2$  control chart with supplementary runs rules', *Quality Engineering* **16**(3), 359–368.
- Arnold, J. C. & Reynolds, M. R. J. (2001), 'Cusum control charts with variable sample sizes and sampling intervals', *Journal of Quality Technology* **33**, 66–81.
- Atienza, O. D., Tang, L. C. & Ang, B. W. (2002), 'A cusum scheme for autocorrelated observations', *Journal of Quality Technology* **34**, 187–199.
- Bajgier, S. M. (1992), 'The use of bootstrapping to construct limits on control charts', *Proceedings of the Decision Science Institute, San Diego, CA* pp. 1611–1613.
- Bakir, S. T. (2004), 'A distribution-free shewhart quality control chart based on signed-ranks', *Quality Engineering* **16**, 613–623.
- Bersimis, S., Psarakis, S. & Panaretos, J. (2007), 'Multivariate statistical process control charts: An overview', *Quality and Reliability Engineering International* **23**, 517–543.
- Bissell, A. F. (1990), 'How reliable is your capability index?', *Applied Statistics* **39**, 331–340.
- Bissell, D. (1994), *Statistical Methods for SPC and TQM*, Chapman and Hall.
- Borrer, C., Champ, C. & Rigdon, S. (1998), 'Poisson ewma control charts', *Journal of Quality Technology* **30**(4), 352–361.
- Bourke, P. D. (1991), 'Detecting a shift in fraction non-conforming using run-length control charts with 100 % inspection', *Journal of Quality Technology* **23**, 225–238.
- Brook, D. & Evans, D. (1972), 'An approach to the probability distribution of cusum run lengths', *Biometrika* **59**, 539–549.

- 
- Capizzi, G. & Masarotto, G. (2003), 'An adaptive exponentially weighted moving average control chart', *Technometrics* **45**, 199–207.
- Castagliola, P. (2005), 'A new  $s^2$ -ewma control chart for monitoring the process variance', *Quality and Reliability Engineering International* **21**(8), 781–794.
- Caulcutt, R. (1995), *Achieving Quality Improvement*, Chapman and Hall.
- Chakraborti, S. & Eryilmaz, S. (2007), 'A nonparametric shewhart type signed rank control chart based on runs', *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **36**(2), 335–356.
- Chakraborti, S., van der Laan, P. & Bakir, S. T. (2001), 'Nonparametric control charts: an overview and some results', *Journal of Quality Technology* **33**, 304–315.
- Chakraborti, S., van der Laan, P. & van de Wiel, M. A. (2004), 'A class of distribution-free control charts', *Applied Statistics* **53**, 443–462.
- Champ, C. W. & Woodall, W. H. (1987), 'Exact results for shewhart control charts with supplementary runs rules', *Technometrics* **29**(4), 393–399.
- Chan, L. K., Cheng, S. W. & Spiring, F. A. (1988), 'A new measure of process capability:  $c_{pm}$ ', *Journal of Quality Technology* **20**(3), 162–175.
- Chen, G., Cheng, S. & Xie, H. (2001), 'Monitoring process mean and variability with one ewma chart', *Journal of Quality Technology* **33**(2), 223–233.
- Chen, K., Pearn, W. & Lin, P. (2003), 'Capability measures for processes with multiple characteristics', *Quality and Reliability Engineering International* **19**, 101–110.
- Chen, N., Li, Z. & Ou, Y. (2015), 'Multivariate exponentially weighted moving average chart for monitoring poisson observations', *Journal of Quality Technology* **47**(3), 252–263.
- Chenouri, S., Steiner, S. & Variyath, A. (2009), 'A multivariate robust control chart for individual observations', *Journal of Quality Technology* **41**(3), 259–271.
- Chou, Y. M., Polansky, A. M. & Mason, R. L. (1998), 'Transforming non-normal data to normality in statistical process control', *Journal of Quality Technology* **30**(2), 133–141.

- Chowdhury, S., Mukherjee, A. & Chakraborti, S. (2015), 'Distribution free phase ii cusum control chart for joint monitoring of location and scale', *Quality and Reliability Engineering International* **31**, 135–151.
- Colosimo, B., Pacella, M. & Semeraro, Q. (2008), 'Statistical process control for geometric specifications: On the monitoring of rounding profiles', *Journal of Quality Technology* **40**, 1–18.
- Costa, A. F. B. (1994), ' $\bar{X}$  charts with variable sample size', *Journal of Quality Technology* **26**, 155–163.
- Costa, A. F. B. (1997), ' $\bar{X}$  chart with variable sample size and sampling intervals', *Journal of Quality Technology* **29**, 197–204.
- Crosier, R. B. (1986), 'A new two-sided cumulative sum quality control scheme', *Technometrics* **28**(3), 187–194.
- Crosier, R. B. (1988), 'Multivariate generalizations of cumulative sum quality - control schemes', *Technometrics* **30**(3), 291–303.
- Crowder, S. V. (1987), 'A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts', *Technometrics* **29**, 401–407.
- Crowder, S. V. & Hamilton, M. D. (1992), 'An ewma for monitoring a process standard deviation', *Journal of Quality Technology* **24**(1), 12–21.
- Das, N. (2008), 'Non-parametric control chart for controlling variability based on rank test', *Economic Quality Control* **23**(2), 227–242.
- Davis, C. M. & Adams, B. M. (2005), 'Robust monitoring of contaminated data', *Journal of Quality Technology* **37**(2), 163–174.
- de Felipe, D. & Benedito, E. (2017), 'A review of univariate and multivariate process capability indices', *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* pp. DOI: 10.1007/s00170-017-0273-6.
- Dickinson, R., Olteanu, D., Driscoll, A., Woodall, W. & Vining, G. (2014), 'Cusum charts for monitoring the characteristic life of censored weibull lifetimes', *Journal of Quality Technology* **46**(4), 340–358.
- Dixon, W. J. & Tukey, J. W. (1968), 'Approximate behavior of the distribution of winsorized t (trimming/winsorization 2)', *Technometrics* **10**, 83–98.

- 
- Djauhari, M. A. (2005), 'Improved monitoring of multivariate process variability', *Journal of Quality Technology* **37**(1), 32–39.
- Dogu, E. & Kocakoc, I. D. (2013), 'A multivariate change point detection procedure for monitoring mean and covariance simultaneously', *Communications in Statistics Simulation and Computation* **42**, 1235–1255.
- Duncan, A. J. (1986), *Quality Control and Industrial Statistics*, 5 edn, Irwin.
- Ebadi, M. & Shahriari, H. (2013), 'A process capability index for simple linear profile', *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* **64**, 857–865.
- Efron, B. (1979), 'Bootstrap methods: Another look at the jackknife', *Annals of Statistics* **7**, 1–26.
- Epprecht, E. & Costa, A. (2001), 'Adaptive sample size control charts for attributes', *Quality Engineering* **13**, 465–473.
- Epprecht, E., Simoes, B. & Mendes, F. (2010), 'A variable sampling interval ewma chart for attributes', *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* **49**(1), 281–292.
- Eyvazian, M., Noorossana, R., Saghaei, A. & Amiri, A. (2011), 'Phase ii monitoring of multivariate multiple linear regression profiles', *Quality and Reliability Engineering International* **27**(3), 281–296.
- Gijo, E. V. (2005), 'Improving process capability of manufacturing process by application of statistical techniques', *Quality Engineering* **17**(2), 309–315.
- Guevara, R. & Vargas, J. (2007), 'Comparison of process capability indices under autocorrelated data', *Revista Colombiana de Estadística* **30**(2), 301–316.
- Guevara, R. & Vargas, J. (2015), 'Process capability analysis for nonlinear profiles using depth functions', *Quality and Reliability Engineering International* **31**(3), 465–487.
- Guevara, R. & Vargas, J. (2016), 'Evaluation of process capability in multivariate nonlinear profiles', *Journal of Statistical Computation and Simulation* **86**(12), 2411–2428.
- Guevara, R., Vargas, J. & Linero, D. (2014), 'Profile monitoring for compositional data', *Revista Colombiana de Estadística* **37**(1), 157–179.

- Gupta, S., Montgomery, D. & Woodall, W. (2006), 'Performance evaluation of two methods for online monitoring of linear calibration profiles', *International Journal of Production Research* **44**(10), 1927–1942.
- Hawkins, D. M. (1981), 'A cusum for a scale parameter', *Journal of Quality Technology* **13**, 228–231.
- Hawkins, D. M. (1993), 'Robustification of cumulative sum charts by winsorization', *Journal of Quality Technology* **25**(4), 248–261.
- Hawkins, D. M. & Olwell, D. (1988), *Cumulative sum charts and charting for quality improvement*, 1 edn, Springer.
- Hawkins, D. & Zamba, K. (2005), 'Statistical process control for shifts in mean or variance using a change-point formulation', *Technometrics* **47**, 164–173.
- Hayter, A. J. & Tsui, K. L. (1994), 'Identification and quantification in multivariate quality control problems', *Journal of Quality Technology* **26**, 197–208.
- Healy, J. D. (1987), 'A note on multivariate cusum procedures', *Technometrics* **29**, 409–412.
- Holland, M. D. & Hawkins, D. (2014), 'A control chart based on a nonparametric multivariate change-point model', *Journal of Quality Technology* **46**(1), 63–77.
- Holmes, D. S. & Mergen, A. E. (1993), 'Improving the performance of the  $t^2$  control chart', *Quality Engineering* **5**, 619–625.
- Hosseinifard, S. & Abbasi, B. (2012a), 'Evaluation of process capability indices of linear profiles', *International Journal of Quality & Reliability Management* **29**(2), 162–176.
- Hosseinifard, S. & Abbasi, B. (2012b), 'Process capability analysis in non normal linear regression profiles', *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **41**(10), 1761–1784.
- Hoyer, R. W. & Hoyer, B. B. (2001), 'What is quality?', *Quality Progress* (7), 53–62.
- Iglewicz, B. & Hoaglin, D. (1987), 'Use of boxplots for process evaluation', *Journal of Quality Technology* **19**(4), 180–190.



- 
- Jackson, J. E. (1985), 'Multivariate quality control', *Commun. Statist. Theory and Meth.* (14), 2657–2688.
- Jackson, J. E. (1991), *A User's Guide To Principal Components*, John Wiley & Sons.
- Jensen, W., Birch, J. & Woodall, W. (2007), 'High breakdown estimation methods for phase i multivariate control charts', *Quality and Reliability Engineering International* **23**(5), 615–629.
- Jensen, W., Birch, J. & Woodall, W. (2008), 'Monitoring correlation within linear profiles using mixed models', *Journal of Quality Technology* **40**(2), 167–183.
- Jensen, W., Grimshaw, S. & Espen, B. (2016), 'Nonlinear profile monitoring for oven temperature data', *Journal of Quality Technology* **48**(1), 84–97.
- Jiang, W., Tsui, K. & Woodall, W. (2000), 'A new spc monitoring method: The arma chart', *Technometrics* (42), 399–410.
- Jones-Farmer, L., Woodall, W., Steiner, S. & Champ, C. (2014), 'An overview of phase i analysis for process improvement and monitoring', *Journal of Quality Technology* **46**(3), 265–280.
- Jones, L. & Woodall, W. (1998), 'The performance of bootstrap control charts', *Journal of Quality Technology* **30**(4), 362–375.
- Kang, L. & Albin, S. L. (2000), 'On-line monitoring when the process yields a linear profile', *Journal of Quality Technology* **32**.
- Khoo, M. B. C. (2004), 'An alternative q chart incorporating a robust estimator of scale', *Journal of Modern Applied Statistical Methods* **3**(1), 72–84.
- Khoo, M. B. C. & Quah, S. H. (2003), 'Incorporating runs rules into hotelling's  $\chi^2$  control charts', *Quality Engineering* **15**(4), 671–675.
- Kim, K., Mahmoud, M. & Woodall, W. (2003), 'On the monitoring of linear profiles', *Journal of Quality Technology* **35**(3), 317–328.
- Kim, Y., Cho, B. & Phillips, M. (2000), 'Determination of the optimal process mean with the consideration of variance reduction and process capability', *Quality Engineering* **13**(2), 251–260.

- Kotz, S. & Johnson, N. L. (2002), 'Process capability indices – a review, 1992-2000', *Journal of Quality Technology* **34**(1), 2–19.
- Kourti, T. & MacGregor, J. F. (1996), 'Multivariate spc methods for process and product monitoring', *Journal of Quality Technology* **28**, 409–428.
- Kuralmani, V., Xie, M., Goh, T. N. & Gan, F. F. (2002), 'A conditional decision procedure for high yield processes', *IIE Transactions* **34**(12), 1021–1030.
- Lagos, I. J. & Vargas, A. (2003), 'Sistema de familias de distribuciones de johnson, una alternativa para el manejo de datos no normales en cartas de control', *Revista Colombiana de Estadística* **26**(1), 25–40.
- Lai, C. & Govindaraju, K. (2008), 'Reduction of control chart signal variability for high quality processes', *Journal of Applied Statistics* **35**(6), 671–679.
- Langenberg, P. & Iglewicz, B. (1986), 'Trimmed mean  $\bar{X}$  and  $r$  charts', *Journal of Quality Technology* **18**(3), 152–161.
- Levinson, W., Holmes, D. & Mergen, E. (2002), 'Variation charts for multivariate processes', *Quality Engineering* **14**(4), 539–545.
- Li, S., Tang, L. & Ng, S. (2010), 'Nonparametric cusum and ewma control charts for detecting mean shifts', *Journal of Quality Technology* **42**(2), 209–226.
- Liu, R. & Tang, J. (1996), 'Control charts for dependent and independent measurements based on bootstrap methods', *Journal of the American Statistical Association* **91**(436), 1694–1700.
- Lopez-Pintado, S. & Romo, J. (2009), 'On the concept of depth for functional data', *Journal of the American Statistical Association* **104**(486), 718–734.
- Lowry, C. A. & Montgomery, D. C. (1995), 'A review of multivariate control charts', *IIE Transactions* **27**, 800–810.
- Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W. & Rigdon, S. E. (1992), 'A multivariate exponentially weighted moving average control chart', *Technometrics* **34**, 46–53.

- 
- Lu, C. W. & Reynolds, M. R. J. (1999), 'Ewma control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes', *Journal of Quality Technology* **31**, 166–188.
- Lu, C. W. & Reynolds, M. R. J. (2001), 'Cusum charts for monitoring an autocorrelated process', *Journal of Quality Technology* **33**, 316–334.
- Lucas, J. M. (1985), 'Counted data cusums', *Technometrics* **27**, 129–144.
- Lucas, J. M. & Crosier, R. B. (1982), 'Fast initial response for cusum quality control schemes : Give your cusum a head start', *Technometrics* **24**(3), 199–205.
- Lucas, J. M. & Saccucci, M. S. (1990), 'Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements', *Technometrics* **32**, 1–12.
- Mahmoud, M., Parker, P., Woodall, W. & Hawkins, D. (2008), 'A change point method for linear profile data', *Quality and Reliability Engineering International* **23**(2).
- Mahmoud, M. & Woodall, W. (2004), 'Phase i analysis of linear profiles with calibration applications', *Technometrics* **46**(4).
- Martinez, R. (1993), Gráficos de control de la media y el rango winsorizados, Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Mason, R. L., Chou, Y., Sullivan, J. H., Stoumbos, Z. G. & Young, J. C. (2003), 'Systematic patterns in  $t^2$  charts', *Journal of Quality Technology* **35**, 47–58.
- Mason, R. L., Tracy, N. D. & Young, J. C. (1995), 'Decomposition of  $t^2$  for multivariate control chart interpretation', *Journal of Quality Technology* **27**, 99–108.
- Mason, R. L. & Young, J. C. (2002), *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*, ASA SIAM.
- Mast, J. & Roes, K. C. B. (2004), 'Robust individuals control chart for exploratory analysis', *Quality Engineering* **16**(3), 407–421.
- McCullagh, P. & Nelder, J. (1989), *Generalized Linear Models*, 2 edn, Chapman & Hall.

- Montgomery, D. (2001), *Introduction to Statistical Quality Control*, 4 edn, John Wiley & Sons.
- Montgomery, D. & Mastrangelo, C. (1991), 'Some statistical process control methods for autocorrelated data', *Journal of Quality Technology* **23**, 179–193.
- Moreno, A. & Vargas, J. (2000), 'Carta de control  $r$  con intervalos de muestreo variables', *Revista Colombiana de Estadística* **23**(1), 15–25.
- Mukherjee, A. & Chakraborti, S. (2012), 'A distribution-free control chart for the joint monitoring of location and scale', *Quality and Reliability Engineering International* **28**, 335–352.
- Nam, K. H., Kim, D. K. & Park, D. H. (2002), 'Large-sample interval estimators for process capability indices', *Quality Engineering* **14**(2), 213–221.
- Nazir, H., Riaz, M. & Does, R. (2015), 'Robust cusum control charting for process dispersion', *Quality and Reliability Engineering International* **31**, 369–379.
- Nazir, H., Riaz, M., Does, R. & Abbas, N. (2013), 'Robust cusum control charting', *Quality Engineering* **25**, 211–224.
- Nedumaran, G. & Pignatiello, J. (1998), 'Diagnosing signals from  $t^2$  and  $\chi^2$  multivariate control charts', *Quality Engineering* **10**(4), 657–667.
- Nembhard, D. A. & Nembhard, H. B. (2000), 'A demerits control chart for autocorrelated data', *Quality Engineering* **13**(2), 179–190.
- Noorossana, R. & Ayoubi, M. (2012), 'Profile monitoring using nonparametric bootstrap  $t^2$  control chart', *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **41**, 302–315.
- Noorossana, R., Eyvazian, M. & Vaghefi, A. (2010), 'Phase ii monitoring of multivariate simple linear profiles', *Computers & Industrial Engineering* .
- Noorossana, R., Saghaei, A. & Amiri, A. (2011), *Statistical Analysis of Profile Monitoring*, 1st edn, John Wiley & Sons.
- Page, E. (1954), 'Continuous inspection schemes', *Biometrika* **41**, 100–115.
- Pal, S. (2004), 'Evaluation of nonnormal process capability indices using generalized lambda distribution', *Quality Engineering* **17**(1), 77–85.

- 
- Pan, J. & Lee, C. (2010), 'New capability indices for evaluating the performance of multivariate manufacturing processes', *Quality and Reliability Engineering International* **26**, 3–15.
- Panza, C. & Vargas, J. (2016), 'Monitoring the shape parameter of a weibull regression model in phase ii processes', *Quality and Reliability Engineering International* **32**, 195–207.
- Park, C. & Reynolds, M. R. J. (1994), 'Economic design of a variable sample size  $\bar{X}$ -chart', *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **23**, 467–483.
- Pascual, F. (2010), 'Ewma charts for the weibull shape parameter', *Journal of Quality Technology* **42**(4), 400–416.
- Pascual, F. & Li, S. (2011), 'Monitoring the weibull shape parameter by control charts for the sample range of type ii censored data', *Quality and Reliability Engineering International* **28**(2), 233–246.
- Pearn, W. L. & Chang, C. S. (1997), 'The performance of process capability index  $c_s$  on skewed distributions', *Commun. Statist. Simula* **26**(4), 1361–1377.
- Pearn, W. L., Kotz, S. & Johnson, N. L. (1992), 'Distributional and inferential properties of process capability indices', *Journal of Quality Technology* **24**(4), 216–231.
- Perakis, M. & Xekalaki, E. (2005), 'A process capability index for discrete processes', *Journal of Statistical Computation and Simulation* **75**(3), 175–187.
- Pignatiello, J. & Runger, G. (1990), 'Comparisons of multivariate cusum charts', *Journal of Quality Technology* **22**(3), 173–185.
- Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. & Runger, G. C. (1994), 'A combined adaptive sample size and sampling interval  $\bar{X}$  control scheme', *Journal of Quality Technology* **26**, 164–176.
- Prabhu, S. S., Runger, E. C. & Keats, J. B. (1993), 'An adaptive sample size  $\bar{X}$  chart', *International Journal of Production Research* **31**, 2895–2909.
- Prajapati, D. & Singh, S. (2012), 'Control charts for monitoring the autocorrelated process parameters: A literature review', *International Journal of Productivity and Quality Management* **10**(2), 207–249.

- Prybutok, V., Clayton, H. & Harvey (1997), 'Comparison of fixed versus variable sampling interval shewhart  $\bar{X}$  control charts in the presence of positively autocorrelated data', *Commun. Statist - Simula.* **26**, 83–106.
- Psarakis, S. (2015), 'Adaptive control charts: Recent developments and extensions', *Quality and Reliability Engineering International* **31**(7), 1265–1280.
- Qiu, P. (2014), *Introduction to Statistical Process Control*, CRC Press.
- Qiu, P., Zou, C. & Wang, Z. (2010), 'Nonparametric profile monitoring by mixed effects modeling', *Technometrics* **52**(3), 265–277.
- Quesenberry, C. (1993), 'The effect of sample size on estimated limits for  $\bar{X}$  and  $x$  control charts', *Journal of Quality Technology* **25**, 237–247.
- Quesenberry, C. (2001), 'The multivariate short-run snapshot  $q$  chart', *Quality Engineering* **13**(4), 679–683.
- Reynolds, M., Amin, R. & Arnold, J. (1990), 'Cusum charts with variable sampling intervals', *Technometrics* **32**, 371–396.
- Reynolds, M., Amin, R., Arnold, J. & Nachlas, J. (1998), ' $\bar{X}$  charts with variable sampling intervals', *Technometrics* **30**, 181–192.
- Reynolds, M. R. & Arnold, J. (2001), 'Ewma control charts with variable sample sizes and variable sample intervals', *IIE Transactions* **33**, 511–530.
- Reynolds, M. R. & Stoumbos, Z. G. (2001), 'Monitoring the process mean and variance using individual observations and variable sampling intervals', *Journal of Quality Technology* **33**, 181–205.
- Roberts, S. W. (1959), 'Control chart tests based on geometrics moving averages', *Technometrics* **1**, 239–250.
- Rocke, D. M. (1989), 'Robust control charts', *Technometrics* **31**, 173–184.
- Rocke, D. M. (1992), ' $\bar{X}_q$  and  $r_q$  charts: Robust control charts', *The Statistician* **41**, 97–104.
- Runger, G. C. & Alt, F. B. (1996), 'Choosing principal components for multivariate statistical process control', *Communications in Statistics Theory and Methods* **25**(5), 909–922.

- Runger, G. C., Alt, F. B. & Montgomery, D. (1996), 'Contributors to a multivariate statistical process control signal', *Communications in Statistics Theory and Methods* **25**(10), 2203–2213.
- Runger, G. & Prabhu, S. (1996), 'A markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart', *Journal of American Statistical Association* **91**, 1701–1706.
- Ryan, T. (2011), *Statistical Methods for Quality Improvement*, 3 edn, John Wiley & Sons.
- Samuel, T. R., Pignatiello, J. J. & Calvin, J. (1998a), 'Identifying the time of a step change with  $\bar{x}$  control charts', *Quality Engineering* **10**(3), 521–527.
- Samuel, T. R., Pignatiello, J. J. & Calvin, J. (1998b), 'Identifying the time of a step change in a normal process variance', *Quality Engineering* **10**(3), 529–538.
- Santos, E. (2012), *Multivariate Statistical Quality Control Using R*, Springer.
- Schoonhoven, M. & Does, R. J. (2012), 'A robust standard deviation control chart', *Technometrics* **54**, 73–82.
- Schoonhoven, M., Nazir, H. Z., Riaz, M. & Does, R. J. (2011), 'Robust location estimators for the  $\bar{X}$  control chart', *Journal of Quality Technology* **43**, 363–379.
- Sego, L., Reynolds, M. & Woodall, W. (2009), 'Risk adjusted monitoring of survival times', *Statistics in Medicine* **28**.
- Shahriari, H., Hubele, N. & Lawrence, F. (1995), 'A multivariate process capability vector', *Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference, Nashville, TN* pp. 303–308.
- Shang, Y., Tsung, F. & Zou, C. (2011), 'Profile monitoring with binary data and random predictors', *Journal of Quality Technology* **43**(3).
- Sparks, R. S. (1992), 'Quality control with multivariate data', *Australian Journal of Statistics* **34**, 375–390.
- Stoumbos, Z. G., Reynolds, M. R., Ryan, T. P. & Woodall, W. H. (2000), 'The state of statistical process control as we proceed into the 21st century', *Journal of the American Statistical Association* **95**, 992–997.

- Stoumbos, Z. G. & Sullivan, J. H. (2002), 'Robustness to non-normality of the multivariate ewma control chart', *Journal of Quality Technology* **34**(3), 260–276.
- Stover, F. & Brill, R. (1998), 'Statistical quality control applied to ion chromatography calibrations', *Journal of Chromatography* **804**(1-2), 37–43.
- Sullivan, J. H. & Woodall, W. H. (1996), 'A comparison of multivariate control charts for individual observations', *Journal of Quality Technology* **28**(4), 398–408.
- Sullivan, J. H. & Woodall, W. H. (1998), 'Adapting control charts for the preliminary analysis of multivariate observations', *Commun. Statist. Simula.* **27**(4), 953–979.
- Taam, W., Subbaiah, P. & Liddy, J. (1993), 'A note on multivariate capability indices', *Journal of Applied Statistics* **20**, 339–351.
- Tagaras, G. (1998), 'A survey of recent developments in the design of adaptive control charts', *Journal of Quality Technology* **30**, 212–231.
- Tatum, L. G. (1997), 'Robust estimation of the process standard deviation for control charts', *Technometrics* **39**, 127–141.
- Tracy, N., Young, J. & Mason, R. (1992), 'Multivariate control charts for individual observations', *Journal of Quality Technology* **24**, 88–95.
- VanBrackle, L. & Reynolds, M. (1997), 'Ewma and cusum control charts in the presence of correlation', *Commun. Statist. Simula* **26**(3), 979–1008.
- Vannman, K. (1995), 'A unified approach to capability indices', *Statistica Sinica* **5**(2), 805–820.
- Vargas, J. (2003), 'Robust estimation in multivariate control charts for individual observations', *Journal of Quality Technology* **35**(4), 367–376.
- Vargas, J. & Lagos, J. (2007), 'Comparison of multivariate control charts for process dispersion', *Quality Engineering* **19**(3), 191–196.
- Variyath, A. & Vattathoor, J. (2014), 'Robust control charts for monitoring process variability in phase i multivariate individual observations', *Quality and Reliability Engineering International* **30**(6), 795–812.
- Veevers, A. (1998), 'Viability and capability indices for multiresponse processes', *Journal of Applied Statistics* **25**, 545–558.



- 
- Vives, M., Daunis, J. & Martin, J. (2014), 'Individual  $t^2$  control chart for compositional data', *Journal of Quality Technology* **46**(2), 127–139.
- Walker, E. & Wright, S. (2002), 'Comparing curves using additive models', *Journal of Quality Technology* **34**, 118–129.
- Wang, F. & Chen, J. (1998), 'Capability index using principal component analysis', *Quality Engineering* **11**, 21–27.
- Wang, F., Hubele, N., Lawrence, F. & Miskulin, J. (2000), 'Comparison of three multivariate process capability indices', *Journal of Quality Technology* **32**(3), 263–275.
- Western-Electric (1956), *Statistical Quality Control handbook*, Western Electric Corporation, Indianapolis.
- Wetherill, G. B. & Brown, D. W. (1991), *Statistical Process Control*, Chapman and Hall.
- Wierda, S. (1994), 'Multivariate statistical process control-recent results and directions for future research', *Statistica Neerlandica* **48**, 147–168.
- Williams, J., Woodall, W. & Birch, J. (2007), 'Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles', *Quality and Reliability Engineering International* **23**, 925–941.
- Woodall, W. (2007), 'Current research in profile monitoring', *Revista Producao* **17**(3), 420–425.
- Woodall, W. (2017), 'Bridging the gap between theory and practice in basic statistical process monitoring', *Quality Engineering* **29**(1), 2–15.
- Woodall, W. H. (1997), 'Control charts based on attribute data: Bibliography and review', *Journal of Quality Technology* **29**(2), 172–183.
- Woodall, W. H. & Ncube, M. M. (1985), 'Multivariate cusum quality control procedures', *Technometrics* **27**(3), 285–292.
- Woodall, W. & Mahmoud, A. (2005), 'The inertial properties of quality control charts', *Technometrics* **47**(4), 425–436.
- Woodall, W. & Montgomery, D. (2014), 'Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring', *Journal of Quality Technology* **46**(1), 78–94.

- Woodall, W., Spitzner, D., Montgomery, D. & Gupta, S. (2004), 'Using control charts to monitor process and product quality profiles', *Journal of Quality Technology* **36**(3), 309–320.
- Wright, P. (1995), 'A process capability index sensitive to skewness', *Journal of Statistical Computation and Simulation* **52**, 195–203.
- Wright, P. (1998), 'The probability density function of process capability index  $c_{pmk}$ ', *Commun. Statist. Theory Meth.* **27**(7), 1781 – 1789.
- Wright, P. (2000), 'The cumulative distribution function of process capability index  $c_{pm}$ ', *Statistics & Probability Letters* **47**(3), 249–251.
- Wu, Z. & Luo, H. (2004), 'Optimal design of the adaptive sample size and sampling interval  $np$  control chart', *Quality and Reliability Engineering International* **20**, 553–570.
- Xu, L., Wang, S., Peng, Y., Morgan, J., Reynolds, M. & Woodall, W. (2012), 'The monitoring of linear profiles with a glr control chart', *Journal of Quality Technology* **44**(4), 348–362.
- Yanez, S., Vargas, J. A. & Gonzalez, N. (2003), 'Carta  $t^2$  con base en estimadores robustos de los parámetros', *Revista Colombiana de Estadística* **26**(2), 159–179.
- Yeh, A. B. & Bhattacharya, S. (1998), 'A robust process capability index', *Statist. Simula* **27**(2), 565–589.
- Yeh, A. B., Lin, D. & McGrath, R. (2006), 'Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: A review', *Quality Technology and Quantitative Management* **3**(4), 415–436.
- Yeh, A., Huwang, L. & Li, Y. (2009), 'Profile monitoring for a binary response', *IIE Transactions* **41**, 931–941.
- Yum, B. J. & Kim, K. (2011), 'A bibliography of the literature on process capability indices: 2000-2009', *Quality and Reliability Engineering International* **27**(3), 251–268.
- Zamba, K. D. & Hawkins, D. (2006), 'A multivariate change-point model for statistical process control', *Technometrics* **48**(4), 539–549.
- Zamba, K. D. & Hawkins, D. (2009), 'A multivariate change-point model for change in mean vector and/or covariance structure', *Journal of Quality Technology* **41**(3), 285–303.

- 
- Zhang, C., Chen, N. & Zou, C. (2016), 'Robust multivariate control chart based on goodness-of-fit test', *Journal of Quality Technology* **48**(2), 139–161.
- Zhang, N. F. (1998*a*), 'Estimating process capability indices for autocorrelated data', *Journal of Applied Statistics* **25**, 559–574.
- Zhang, N. F. (1998*b*), 'A statistical control chart for stationary process data', *Journal of the American Statistical Association* **40**, 24–38.
- Zhou, M., Liu, L., Wei, G. & Jie, Z. (2015), 'Multivariate control chart based on multivariate smirnov test', *Communications in Statistics Simulation and Computation* **44**(6), 1600–1611.
- Zhou, M., Zhou, Q. & Geng, W. (2016), 'A new nonparametric control chart for monitoring variability', *Quality and Reliability Engineering International* **32**(7), 2471–2479.
- Zou, C., Tsung, F. & Wang, Z. (2007), 'Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes', *Technometrics* **49**(4), 395–408.
- Zou, C., Zhang, Y. & Wang, Z. (2006), 'A control chart based on a change-point model for monitoring linear profiles', *IIE Transactions* **38**, 1093–1103.
- Zou, C., Zhou, C., Wang, Z. & Tsung, F. (2007), 'A self-starting control chart for linear profiles', *Journal of Quality Technology* **39**(4), 364–375.
- Zwetsloot, I., Schoonhoven, M. & Does, R. (2014), 'A robust estimator for location in phase i based on an ewma chart', *Journal of Quality Technology* **46**, 302–316.

# Índice alfabético

- $S$ , 28
- ARL, 12, 61
- Autocorrelación, 124
- Autoregresivo, 125
- Bonferroni, 109
- Cadena de Markov, 77
- Cadenas de Markov, 14, 61
- Capacidad
  - Indices, 33
- Carta
  - $R$ , 18
  - $S$ , 22
  - $\bar{X}$ , 9
  - Bootstrap, 121
  - de Control, 1
  - de Rangos móviles, 28
  - de Residuales, 121
  - EWMA
    - Multivariada, 116
  - Multivariada, 109
  - Shewhart, 14
- Cartas
  - Adaptativas, 121
  - Cusum, 59
  - No Paramétricas, 121
- Causas
  - Asignables, 1
  - Especiales, 1
- Componentes principales, 108
- Correlación, 92
- CUSUM
  - winsorizado, 88
  - Esquemas Multivariados, 112
- Datos
  - Autocorrelación, 124
  - Autocorrelacionados, 123
- Datos funcionales, 147
- Desviación estándar, 87
- Esquemas Multivariados
  - CUSUM, 112
- EWMA, 73
- Falsas alarmas, 4
- Indices
  - de Capacidad, 33
- intervalo
  - de decisión, 60
- Límites
  - de Especificación, 34
- Límites de control, 88
- Línea
  - Central, 11
- Longitud corrida, 12, 79
- Métodos robustos, 85
- Media, 86
  - Muestral, 2, 8
  - Recortada, 86

---

Metodo

    Componentes principales, 108

Monitoreo de perfiles, 135

Outliers, 86

Procesos multivariados, 91

Rango

    Muestral, 2

Rangos móviles, 28

Resistente

    Estimador, 86

Valor de referencia, 60

Valor objetivo, 74

Varianza

    del Proceso, 44

Winsorados, 87

winsorizado

    CUSUM, 88