

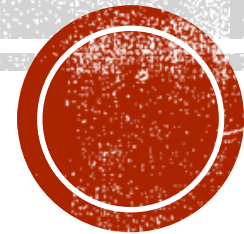
CURSO
CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD
CÓDIGO 2016317

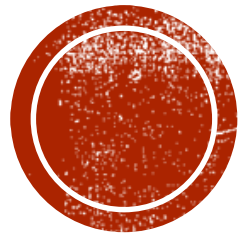
Carlos Panza Ospino

Departamento de Estadística

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia





CARTAS PARA EL CONTROL DE VARIABLES CONTINUAS

CARTAS TIPO SHEWHART

- ☐ Cartas para la desviación estándar
- ☐ Cartas para observaciones individuales
- ☐ Punto de cambio

CARTA S

Sea $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, con media μ y varianza σ^2 desconocidas.

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria proveniente de X .

Se sabe que un estimador insesgado de σ^2 es la **varianza muestral** dada por

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

donde \bar{X} es la media muestral.

Es posible demostrar que **la desviación estándar muestral** dada por

$$S = \sqrt{S^2}$$

es tal que

$$E(S) = c_4 \sigma$$

$$Var(S) = \sigma^2(1 - c_4^2)$$

Donde

$$c_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Para efectos prácticos la constante c_4 se encuentra tabulada.



MONITOREO DE S EN FASE II

En el contexto de SPC,
supóngase que $\sigma = \sigma_0$.

La **Carta S** tres-sigma para
monitorear la dispersión del
proceso en Fase II tiene línea
central $CL = c_4\sigma_0$ y límite inferior
de control dados por

$$\begin{aligned} LCL &= c_4\sigma_0 - 3\sigma_0\sqrt{1 - c_4^2} \\ &= \sigma_0 \left(c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \\ &= B_5 \sigma_0 \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene que
el límite superior es $UCL = B_6 \sigma_0$
donde

$$B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

La carta da señal indicando un
posible decremento en σ
cuando $S_j < LCL$ o un posible
incremento si $S_j > UCL$ para
algún $j = 1, 2, \dots$, donde S_j es la
desviación estándar de la
 j -ésima muestra.



MONITOREO DE S EN FASE I

Como σ casi siempre se desconoce, entonces se realiza un análisis de **Fase I** basado en m muestras históricas de tamaño n .

Sea $S_j, j = 1, \dots, m$, la desviación estándar de la j -ésima muestra.

Un estimador plausible de la desviación estándar σ es

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_j$$

Es claro que \bar{S}/c_4 es un estimador insesgado de σ .

Luego, la carta S en **Fase I** tiene línea central $CL = \bar{S}$ y límites de control dados por

$$LCL = \bar{S} - \frac{3\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_3 \bar{S}$$

$$UCL = \bar{S} + \frac{3\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_4 \bar{S}$$

Nótese que $B_3 = B_5/c_4$ y $B_4 = B_6/c_4$



CARTAS \bar{X} y S

Cuando se usa el estadístico \bar{S}/c_4 para estimar la desviación estándar σ , la **Carta \bar{X}** para monitorear el nivel medio del proceso en **Fase I** tiene línea central $CL = \bar{\bar{X}}$ y límites de control dados por

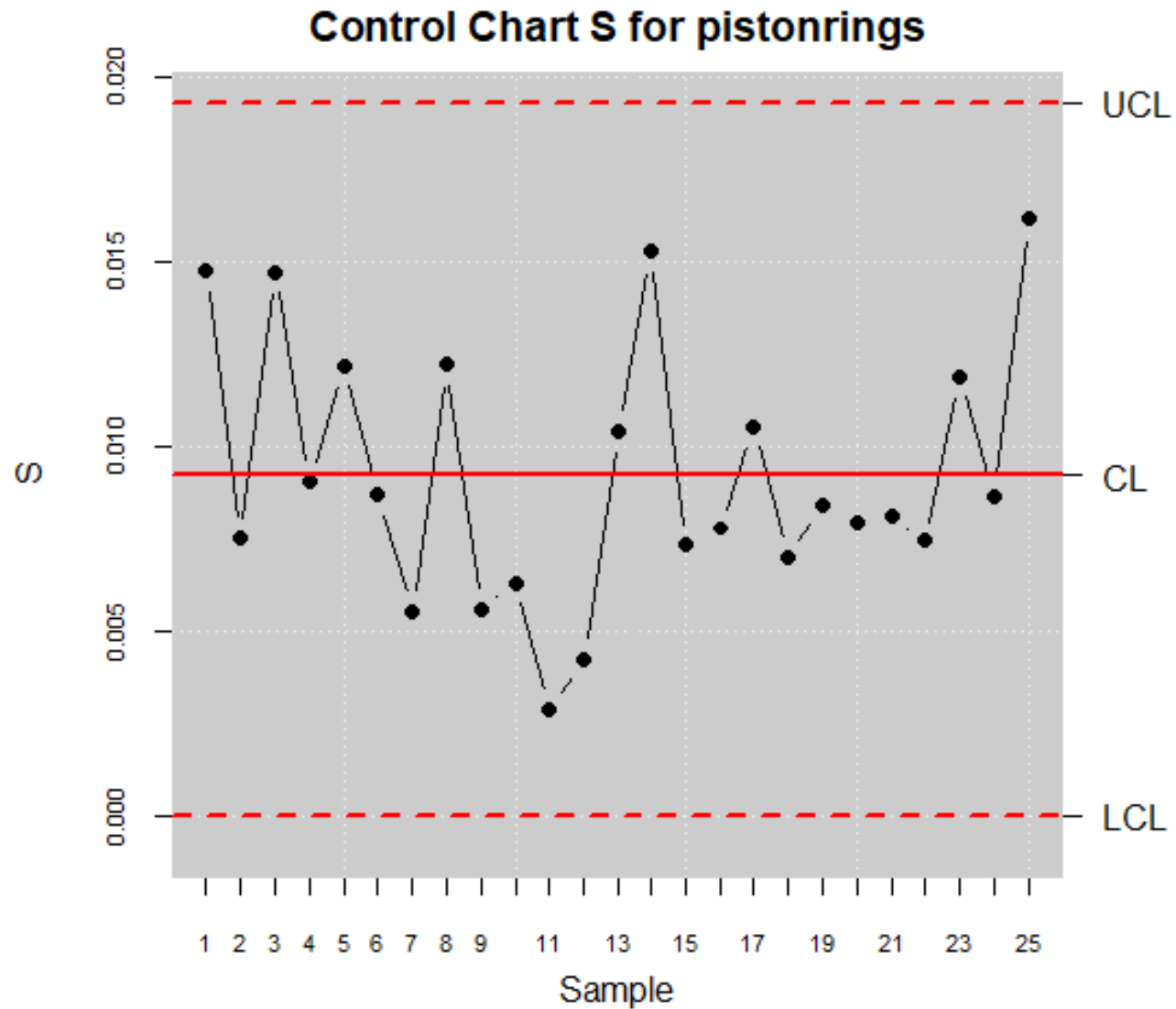
$$\bar{\bar{X}} \pm \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\bar{S}$$
$$\bar{\bar{X}} \pm A_3\bar{S}$$

donde la constante A_3 , al igual que las constantes B_3, B_4, B_5 y B_6 se encuentran tabuladas para un n fijo.

El monitoreo implica:

- 1) Obtener los estimadores $\bar{\bar{X}}$ y \bar{S} a partir de m muestras históricas tomadas del proceso.
- 2) Construir la **Carta S** de **Fase I** y verificar la estabilidad del proceso en cuanto a dispersión.
- 3) A partir de las $k \leq m$ muestras remanentes y del estimador de estado estable de σ obtenido en el paso anterior, diseñar la **Carta \bar{X}** de **Fase I**.
- 4) Una vez alcanzada la estabilidad en cuanto al nivel medio, se procede como en **Fase II**.





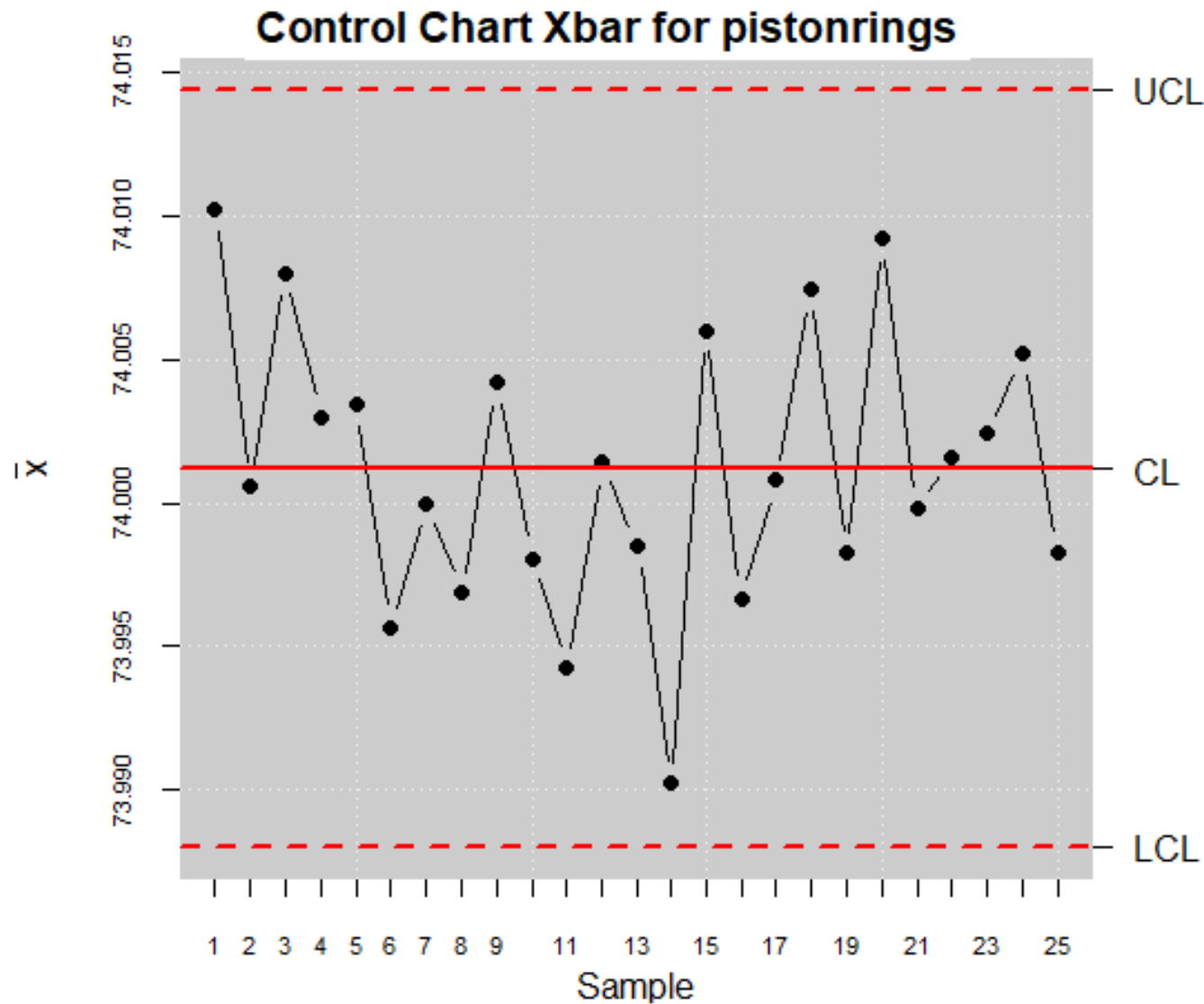
EJEMPLO

Se muestra la **Carta S** tres-sigma para las 25 muestras iniciales del ejemplo de los anillos de piston.



EJEMPLO

Se muestra la **Carta \bar{X}** tres-sigma para las 25 muestras iniciales del ejemplo de los anillos de piston con el estimador S para la dispersión del proceso.



CARTAS CON LÍMITES DE PROBABILIDAD

Sea $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, con media μ y varianza σ^2 desconocidas.

Si X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de X , entonces un estimador insesgado de σ^2 es

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Para un nivel $FAR = \alpha$, se puede diseñar cartas para la dispersión de un proceso normal basadas en:

Además, se puede demostrar que la estadística

$$\chi^2 = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

sigue una distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

$$P \left[\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1\right)} \right] = 1 - \alpha$$



CARTA S CON LÍMITES DE PROBABILIDAD

La **Carta S** con límites de probabilidad tiene límites de control dados por

$$UCL = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1\right)}}{n-1}}$$

$$LCL = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)}}{n-1}}$$

El procedimiento de verificación de estabilidad es el habitual para **Fase I**, usando la desviación estándar de la j –ésima muestra, $j = 1, \dots, m$, como estadística de monitoreo.

Para el monitoreo en línea, se reemplaza la expresión \bar{S}/c_4 por el valor conocido $\sigma = \sigma_0$ de la desviación estándar y se procede como es habitual en **Fase II**.



CARTA S^2 CON LÍMITES DE PROBABILIDAD

La **Carta S^2** con límites de probabilidad tiene límites de control dados por

$$UCL = \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1\right)}$$

$$LCL = \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)}$$

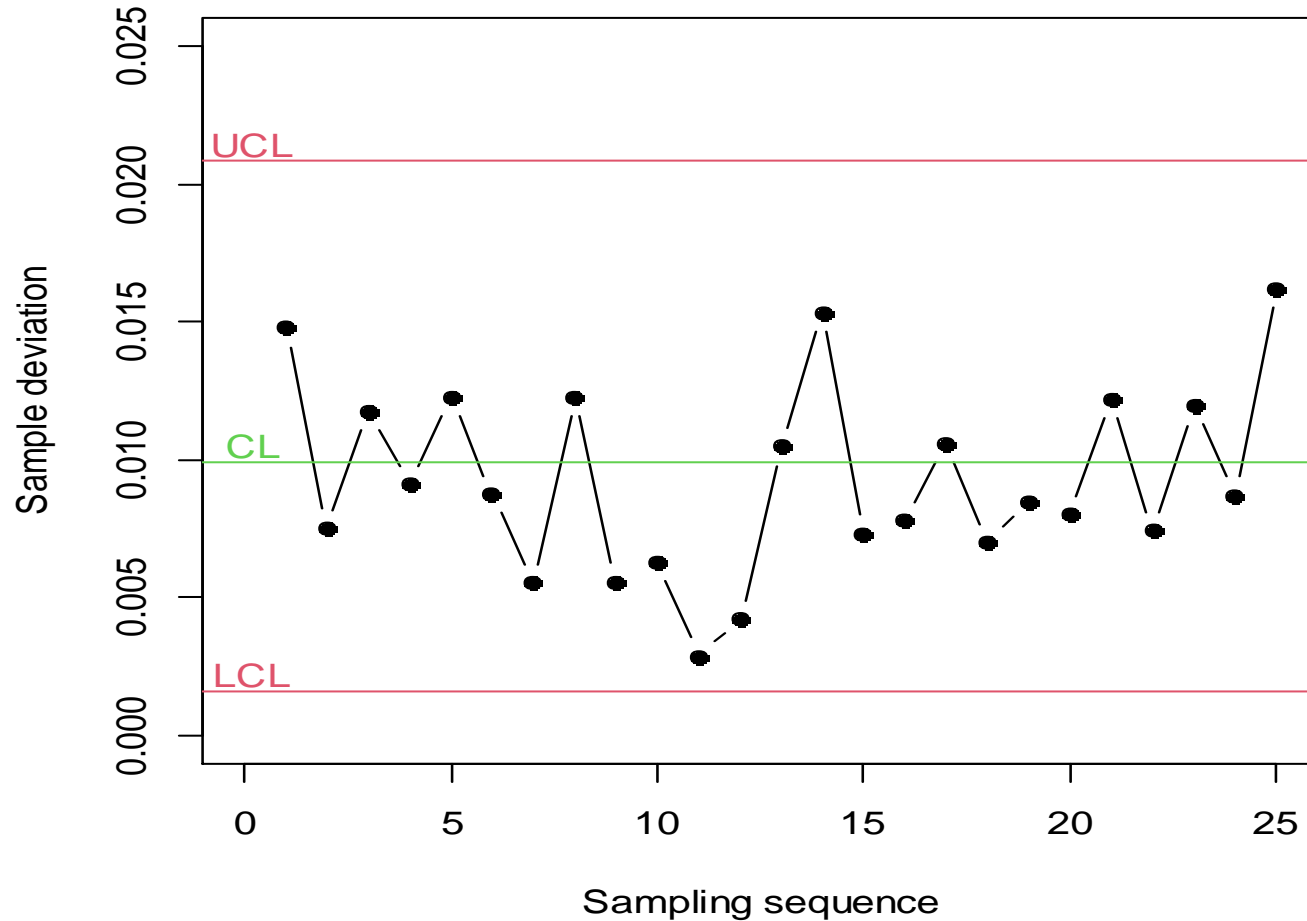
donde $\overline{S^2}$ es la media de las varianzas de m muestras tomadas de un proceso bajo control.

El procedimiento de verificación de estabilidad es el habitual para **Fase I**, usando la varianza insesgada de la j –ésima muestra, $j = 1, \dots, m$, como estadística de monitoreo.

Para el monitoreo en línea, se reemplaza la expresión $\overline{S^2}$ por el valor conocido $\sigma_0 = \sigma_0^2$ de la varianza del proceso y se procede como es habitual en **Fase II**.



Control chart with probability limits
for the standard deviation



EJEMPLO

Se muestra la **Carta S** con límites de probabilidad para las 25 muestras iniciales del ejemplo de los anillos de piston.

El diseño se está basado en un nivel $\alpha = 0,0027$.



CARTAS PARA OBSERVACIONES INDIVIDUALES

Sea un proceso caracterizado por la variable $X \sim N(\mu; \sigma^2)$.

Sean X_1, \dots, X_m observaciones individuales del proceso (muestras de tamaño $n = 1$).

Un estimador insesgado de μ es

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_j$$

Se define, además, el **rango móvil** asociado a la j -ésima observación, $j = 2, \dots, m$, como

$$MR_j = |X_j - X_{j-1}|$$

Un estimador de σ se halla a partir de MR_j como

$$\overline{MR} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} MR_j$$



CARTAS PARA OBSERVACIONES INDIVIDUALES

Carta R

La **Carta R** tres-sigma tiene línea central $CL = \overline{MR}$ y límites de control dados por

$$LCL = D_3 \overline{MR}$$

$$UCL = D_4 \overline{MR}$$

donde las constantes D_3 y D_4 se escogen como en el caso $n = 2$.

Carta X

La **Carta X** tres-sigma tiene línea central $CL = \bar{X}$ y límites de control dados por

$$LCL = \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

$$UCL = \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

donde la constante d_2 se escoge como en el caso $n = 2$.



■ **TABLE**

Costs of Processing Mortgage Loan Applications

Weeks	Cost x	Moving Range MR
1	310	
2	288	22
3	297	9
4	298	1
5	307	9
6	303	4
7	294	9
8	297	3
9	308	11
10	306	2
11	294	12
12	299	5
13	297	2
14	299	2
15	314	15
16	295	19
17	293	2
18	306	13
19	301	5
20	304	3

EJEMPLO

La unidad de procesamiento de préstamos hipotecarios de un banco monitorea el costo que genera el trámite de las solicitudes.

En la tabla de la izquierda, se registran los costos de procesamiento semanales promedio, obtenidos al dividir los costos semanales totales por el número de préstamos procesados en cada una de las últimas 20 semanas.



CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO

El promedio de rangos móviles de dos observaciones vecinas es

$$\overline{RM} = \frac{1}{19} \sum_{i=2}^{19} RM_i = 7,79$$

Para $n = 2$, se tiene que $D_3 = 0$ y $D_4 = 3,267$.

Luego, la **Carta R** tres-sigma de rangos móviles tiene límites de control dados por

$$UCL = D_4 \overline{RM} = 25,45$$

$$LCL = D_3 \overline{RM} = 0$$

La media de las observaciones individuales es

$$\bar{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i = 300,5$$

Para $n = 2$, se tiene $d_2 = 1,128$.

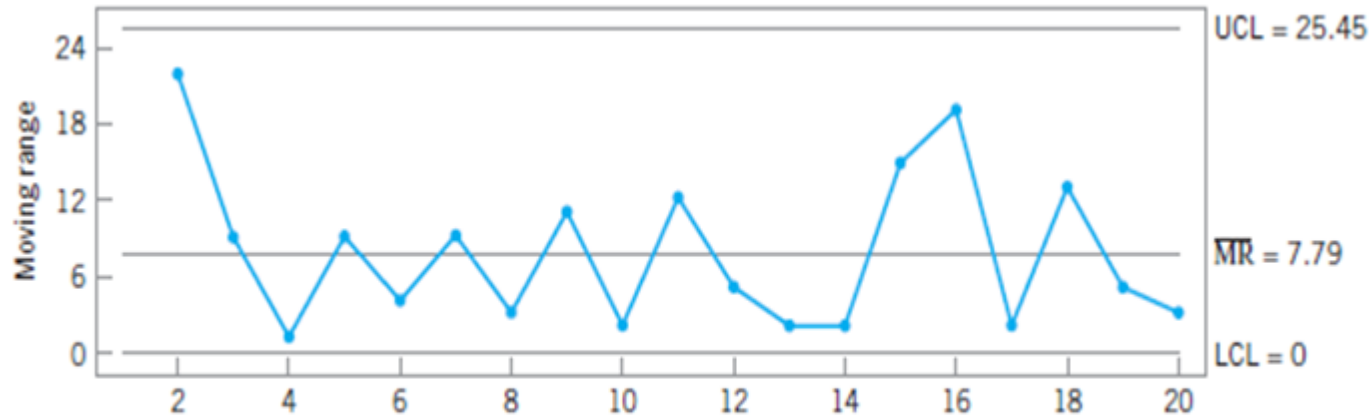
Luego, la **Carta X** tiene límites

$$UCL = \bar{X} + 3 \frac{\overline{RM}}{d_2} = 321,22$$

$$LCL = \bar{X} - 3 \frac{\overline{RM}}{d_2} = 279,78$$



CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO



(a)



(b)

Se muestra en

(a) la *Carta R* de rangos móviles y

(b) la *Carta X* para observaciones individuales en el ejemplo de los costos de procesamiento de solicitudes de préstamos hipotecarios.



ESTIMACIÓN DEL PUNTO DE CAMBIO DE LA MEDIA DE UN PROCESO

Cuando una carta de control da una señal, no indica cuál es la causa ni en qué instante ocurrió el cambio.

Considérese la **Carta** \bar{X} para el nivel medio de un proceso.

El proceso inicia en estado estable y se toman subgrupos racionales de tamaño n a intervalos regulares.

Las observaciones provienen de $X \sim N(\mu_0; \sigma_0^2)$.

En cierto instante desconocido τ , la media del proceso cambia a $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$, para cierto δ .

Una vez ocurre el cambio en la media, el proceso permanece en el nuevo nivel μ_1 hasta que la causa que originó el cambio haya sido completamente identificada y eliminada.

La carta de control emite señal de alarma indicando el cambio del nivel medio en el subgrupo $T \geq \tau$ y que la señal no es una falsa alarma.



ESTIMACIÓN DEL PUNTO DE CAMBIO DE LA MEDIA DE UN PROCESO

Si en el instante τ se toma el último subgrupo bajo control, entonces $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_\tau$ representan las medias de las muestras tomadas en condiciones de estabilidad.

Se assume que as medias restantes $\bar{X}_{\tau+1}, \dots, \bar{X}_T$ provienen del proceso normal con nivel medio μ_1 y desviación estándar σ_0 .

La función de soporte tiene la forma

$$\begin{aligned} \ell(\tau | \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_T) &= \sum_{i=1}^T f_{\bar{X}_i}(\bar{x}_i) \\ &= A \left[\sum_{i=1}^{\tau} (\bar{X}_i - \mu_0)^2 + \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{X}_i - \mu_1)^2 \right] \end{aligned}$$

donde $A = -\frac{n}{2\sigma_0^2}$ y $f_{\bar{X}_i}(\bar{x}_i)$ es la *fdp* de la i -ésima media muestral.



ESTIMACIÓN DEL PUNTO DE CAMBIO DE LA MEDIA DE UN PROCESO

El estimador máximo-verosímil del instante τ (momento en el cual se produjo el cambio en la media más probablemente) es el valor \hat{t}_{MV} que maximiza la función de soporte $\ell(\tau|\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_T)$.

Es decir

$$\hat{t}_{MV} = \operatorname{argmax}_{0 \leq t < T} \left[(T - t) (\bar{\bar{X}}_{T,t} - \mu_0)^2 \right]$$

Donde

$$\bar{\bar{X}}_{T,t} = \frac{1}{T - t} \sum_{i=t+1}^T \bar{X}_i$$

es el estimador máximo-verosímil de la nueva media μ_1 del proceso.

La expresión anterior representa el promedio de las medias de las muestras fuera de control.



Preparado de acuerdo con:

- **MONTGOMERY, D. C.** *Introduction to Statistical Quality Control*. 7th Edition (en inglés). John Wiley & Sons, Inc. 2013.
- **VARGAS, J. A.** Control Estadístico de Calidad. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2017.



GRACIAS

