UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTA
CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD
TALLER 1: CARTAS DE CONTROL

Cesar Augusto Prieto Sarmiento
Cristian Camilo Prieto Zambrano
Daniel Santiago Guzman Villanueva

22 de marzo de 2024

Ejercicio 1

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ una característica de calidad. Mediante simulaciones, establezca el comportamiento del ARL (en control y fuera de él) de las Cartas R y S para observaciones normales con límites 3σ y muestras de tamaño (a) $n = 3$ y (b) $n = 10$. ¿Qué regularidades observa?

SOLUCION:

Para entender el comportamiento del Average Run Length (ARL) de las Cartas R y S, primero necesitamos definir algunos conceptos estadísticos clave.

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ una característica de calidad que sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. El objetivo de las Cartas de Control es detectar cambios en el proceso, lo que podría manifestarse como un cambio en la media del proceso (μ).

El ARL es una medida de la eficacia de una carta de control. Representa el número esperado de observaciones antes de que se detecte un cambio en el proceso.

Para las Cartas R y S, se calcula el estadístico de control (rango o desviación estándar, respectivamente) para cada muestra y se compara con los límites de control establecidos. Si el estadístico de control está fuera de los límites de control, se considera que el proceso está fuera de control.

Para una muestra de tamaño n, los límites de control para las Cartas R y S se calculan como:

$$B5 = \sigma_0 \times (c_4 - 3 \times \sqrt{1 - c_4^2})$$

$$B6 = \sigma_0 \times (c_4 + 3 \times \sqrt{1 - c_4^2})$$

Donde σ_0 es la desviación estándar del proceso en control y c_4 es una constante dependiente del tamaño de la muestra.

Para simular el ARL, se generan muestras aleatorias de la distribución normal y se calcula el ARL tanto en condiciones de control como fuera de control.

Resultados de la Simulación

Los resultados de la simulación se muestran en la figura adjunta. Se realizaron 1000 simulaciones para cada combinación de tamaño de muestra y tipo de carta de control. Cada línea representa la evolución del ARL a lo largo de las simulaciones, distinguiendo entre estar en control y fuera de control.

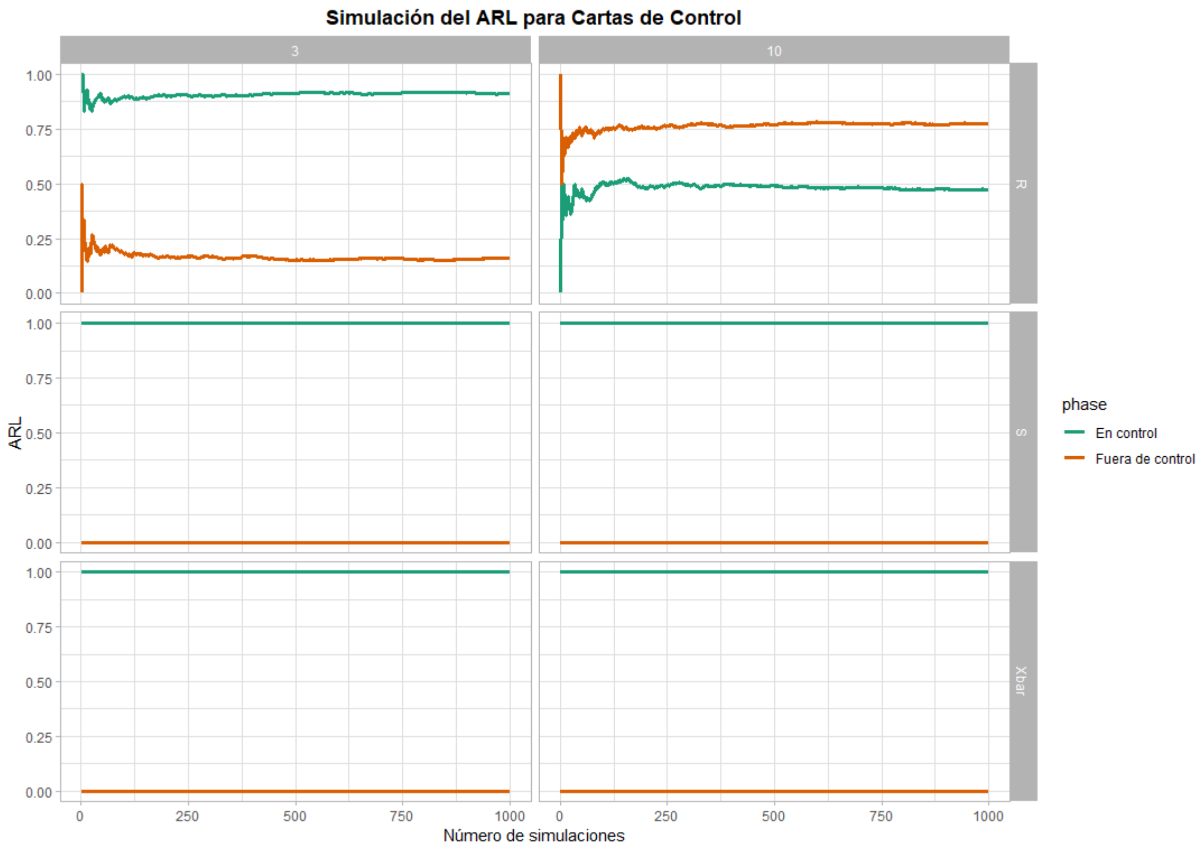


Figura 1: Simulación del ARL para Cartas de Control

Observamos que el ARL en control tiende a estabilizarse alrededor de un valor particular para cada combinación de tamaño de muestra y tipo de carta. Fuera de control, el ARL disminuye significativamente, lo que indica una detección eficaz de cambios en el proceso.

Ejercicio 2

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ una característica de calidad. Se sabe que los valores objetivo de los parámetros del proceso son $\mu = \mu_0$ y $\sigma = \sigma_0$. Construir las curvas OC de la Carta S^2 con límites de probabilidad. Interpretar los resultados.

SOLUCION:

Para construir las curvas OC de la Carta S^2 con límites de probabilidad, utilizamos el enfoque de control de proceso estadístico. La Carta S^2 se utiliza para monitorear la variabilidad del proceso y es particularmente útil cuando el objetivo es mantener la varianza del proceso dentro de ciertos límites.

El objetivo principal de las curvas OC es evaluar la capacidad de la Carta S^2 para detectar desviaciones en la varianza del proceso. Las curvas OC muestran la probabilidad de rechazar la hipótesis nula (H_0) de que la varianza del proceso es igual a la varianza objetivo σ_0^2, para diferentes valores de la estadística de control S^2.

Las curvas OC de la Carta S^2 se presentan en la figura adjunta. Se calcularon utilizando los parámetros del proceso: media objetivo $\mu_0 = 5$, desviación estándar objetivo $\sigma_0 = 2$, tamaño de la muestra $n = 20$, y un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$.

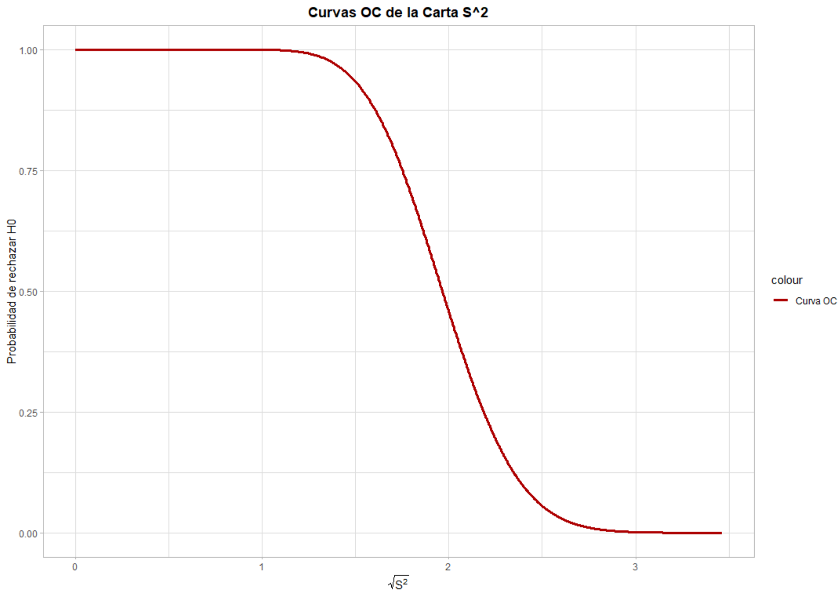


Figura 2: Curvas OC de la Carta S^2

Interpretando los resultados, observamos que a medida que el valor de la estadística de control S^2 aumenta, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula también aumenta. Esto indica que la Carta S^2 es capaz de detectar desviaciones en la varianza del proceso cuando esta se aleja de la varianza objetivo. La zona sombreada en la gráfica representa el nivel de significancia α, lo que nos permite tomar decisiones basadas en un umbral predefinido de probabilidad de error tipo I.

En resumen, las curvas OC nos proporcionan una herramienta visual para evaluar la capacidad de la Carta S^2 para detectar cambios en la variabilidad del proceso, lo que nos permite mantener el proceso bajo control y realizar ajustes cuando sea necesario.

Ejercicio 4

Sea $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ una característica de calidad. Se pide:

a) Mediante simulaciones, establezca el comportamiento del ARL de la Carta $\bar{X}$ con límites tres sigma para observaciones normales.

   Parámetros : $\mu = 0, \sigma = 1, m = 1000000, n = 30$

```
# Establecer parámetros de una normal estándar y evaluamos para diferentes tamaños de m
mu <- 0
sigma <- 1

# Parámetros de simulación
```

```
m <- 1000000
n  <- 30
L <- 3
UCL <- mu + L * (sigma/sqrt(n))
LCL <- mu - L * (sigma/sqrt(n))

means <- numeric(m)
all <- numeric(m * n)
for (i in 1:m) {
  # Generar muestras
  muestras <- rnorm(n, mean = mu, sd = sigma)
  means[i] <- mean(muestras)
  all[((i - 1) * n + 1):(i * n)] <- muestras
}
f <- numeric(m)
for (i in 1:m) {
  f[i] <- as.integer(means[i] > UCL | means[i] < LCL)
}
Pf <- sum(f)/m;
1/Pf
```

Simulamos un total de 1000000 (Un millón) de muestras normales estándar de diferente tamaño y vemos como se comporta el ARL para estás, el cual varia siempre. Algo por resaltar es que los valores de n no son muy grandes, buscando simular la toma de subgrupos racionales que teoricamente nos habland de la ventaja de tomar muestras pequeñas para evitar variabilidad dentro de las mismas

Para muestras de tamaño $n = 5$ estos fueron algunos de los resultados: 366.9725, 368.053, 368.8676, 372.0238, 370.0962

Para muestras de tamaño $n = 15$: 359.0664, 359.0664, 361.4022, 358.038, 369.8225

Para muestras de tamaño $n = 30$: 395.2569, 384.6154, 374.6722, 358.6801, 369.1399

Podemos ver que los valores se encuentras cercanos a 370.4, que es el valor ARL_0 para procesos estables.

b) Genere 20 subgrupos racionales de tamaño $n = 3$ provenientes de X. Asúmase que el proceso es estable en cuanto a dispersión y con los subgrupos iniciales, construya la carta $\bar{X}$ como es habitual hasta verificar la estabilidad del proceso. Establezca el comportamiento del ARL para la carta que se obtiene del análisis de Fase I realizado.

Fijamos los parámetros $\mu = 20$ y $\sigma = 4$, luego de esto, generamos las 20 muestras aleatorias de tamaño $n = 3$.

Una vez tenemos la muestra con la que vamos a trabajar, empezamos el monitoreo de la media del proceso en Fase I. Asumimos estabilidad en la dispersión del proceso, por lo que estimamos el parámetro de la dispersión con $\bar{R}$ y el para la media usamos a $\bar{\bar{X}}$.

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{X}_j$$

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{R}_j$$

	V1	V2	V3
1	17.75810	15.72871	17.22117
2	19.07929	19.12810	19.16833
3	26.23483	15.89598	14.93841
4	20.28203	17.08444	28.67582
5	20.51715	17.49984	24.83185
6	26.86026	13.25323	15.50757
7	21.84366	23.35115	18.38846
8	14.93976	20.61349	18.13338
9	17.25259	15.44745	23.11986
10	18.21735	25.01526	19.66652
11	24.89633	21.70586	21.01327
12	21.43926	18.81971	19.88581
13	21.60309	23.58050	19.82852
14	20.44273	23.51253	25.47441
15	17.77664	23.28632	19.09692
16	27.14765	22.75456	26.06588
17	21.99140	22.21567	13.80499
18	12.13353	19.75235	22.33845
19	22.80542	18.77615	20.49542
20	18.10883	18.47812	20.86377

Figura 3: Datos

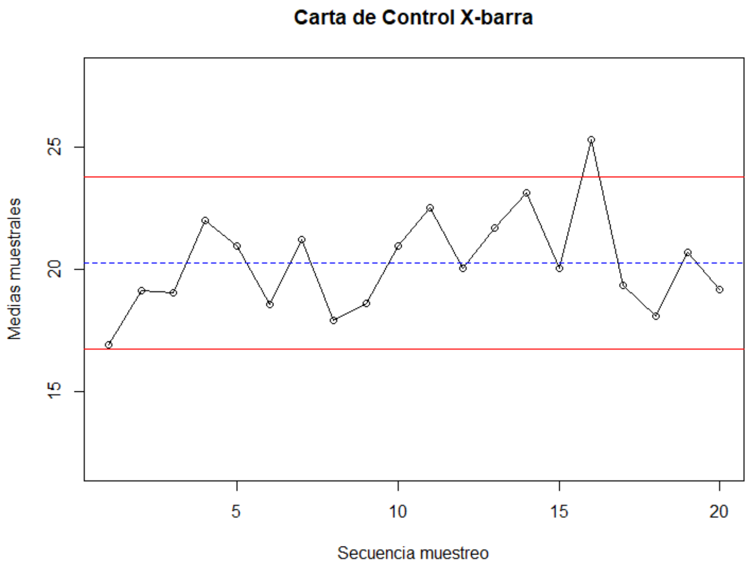
Ahora, construimos la carta $\bar{X}$ tomando como CL a la estimación para la media de proceso, y construyendo los límites de control de la siguiente manera:

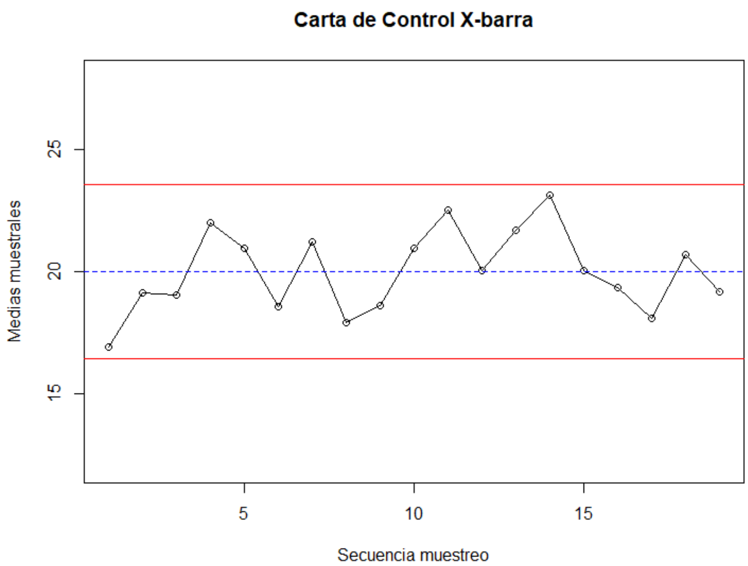
$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$
$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$

Después de esto, contruimos la gráfica para la carta y gráficamos las medias muestrales de las 20 muestras, verificamos que el monitoreo se encuentre en control y luego de retirar las muestras que se encuentren fuera de los limites, repetimos los calculos para así encontrar un estimador estable de la media del preoceso y poder continuar con el monitoreo en Fase II

Para Fase II construimos la $\bar{X}$ con unos nuevos limites de control dados por:

$$UCL = \mu_0 + L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$
$$LCL = \mu_0 - L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$





Ahora, analizamos el comportamiento del ARL para la carta construida en Fase I. Veamos que la longitud media de corrida para procesos que se han salido de control está dada por la expresión:

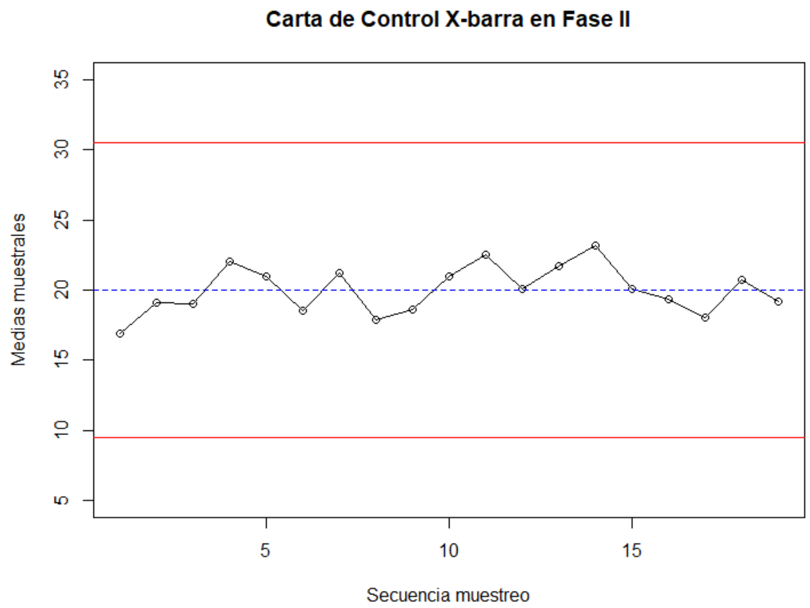
$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$$

donde β = P(error tipo II), que se define como:

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{N}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

Tomamos k = 1,2,...,10 y verificamos los ARL para cada valor de k, identificando que este conforme el K aumenta es mas cercano a 1:

c) Repetir lo indicado en el literal (b) con 50 subgrupos racionales de tamaño $n = 3$. Comente los resultados.



!

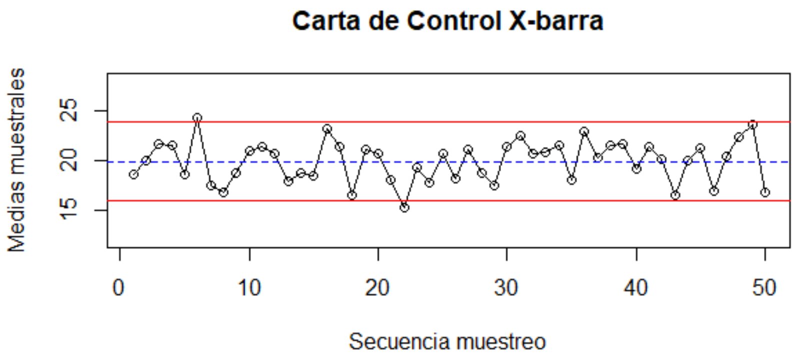
```
> Beta_1 <- pnorm(3 - 1 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 1 * sqrt(5))
> Beta_2 <- pnorm(3 - 2 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 2 * sqrt(5))
> Beta_3 <- pnorm(3 - 3 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 3 * sqrt(5))
> Beta_4 <- pnorm(3 - 4 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 4 * sqrt(5))
> Beta_5 <- pnorm(3 - 5 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 5 * sqrt(5))
> Beta_6 <- pnorm(3 - 6 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 6 * sqrt(5))
> Beta_7 <- pnorm(3 - 7 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 7 * sqrt(5))
> Beta_8 <- pnorm(3 - 8 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 8 * sqrt(5))
> Beta_9 <- pnorm(3 - 9 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 9 * sqrt(5))
> Beta_10 <- pnorm(3 - 10 * sqrt(5)) - pnorm(-3 - 10 * sqrt(5))
> Betas <- c(Beta_1,Beta_2,Beta_3,Beta_4,Beta_5,Beta_6,Beta_7,Beta_8,Beta_9,Beta_10)
> ARL_1 <- 1 / 1 - Betas
> ARL_1
 [1] 0.2224540 0.9295079 0.9998956 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
 [9] 1.0000000 1.0000000
```

!

Figura 4: ARL_1 para K $1:10$

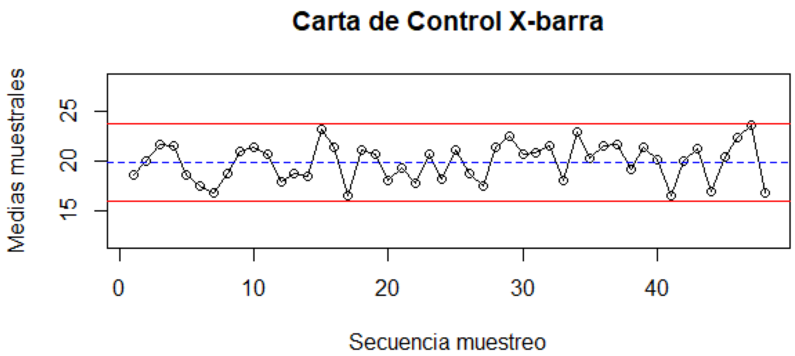
Repetimos el proceso de B) para una muestra de tamaño $m = 50$ con $n = 3$ se tiene lo siguiente

Carta del proceso en Fase I:



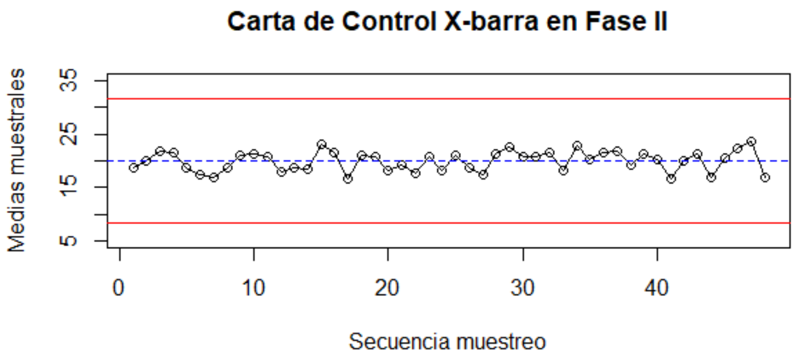
!

La carta del proceso en Fase I con las muestras fuera de control retiradas:



!

Para la carta en Fase II:



!

Como los valores n siguen siendo los mismo y se construyen con metodología seisσ, los ARL_1 serán los mismos.

Para el momento en que el proceso se encuentra bajo control, decimos que tienen un ARL_0 igual a:

$$ARL_0 = \frac{1}{0{,}0027} \cong 370{,}4$$

Ejercicio 5

Calcular el ARL de la Carta $\bar{X}$ mediante cadenas de Markov. Diseñar la carta con límites de control ubicados a tres desviaciones estándar de la media y dividiendo la región de control estadístico en franjas de ancho igual a una desviación estándar.

SOLUCION:

El Average Run Length (ARL) es una medida de la eficacia de una carta de control, y representa el número esperado de observaciones antes de que se detecte una señal fuera de control. En este ejercicio, calcularemos el ARL de la Carta $\bar{X}$ utilizando cadenas de Markov.

Para diseñar la carta, ubicamos los límites de control a tres desviaciones estándar de la media y dividimos la región de control estadístico en franjas de ancho igual a una desviación estándar.

Dado que las cadenas de Markov son un modelo probabilístico para sistemas que evolucionan en el tiempo, podemos modelar el proceso de la Carta $\bar{X}$ como una cadena de Markov con estados correspondientes a las franjas de control.

Calculamos las probabilidades de transición entre las franjas utilizando la función de distribución acumulativa de una distribución normal. Estas probabilidades de transición se representan en la matriz de transición.

```
# Parámetros del proceso
mu <- 0  # Media del proceso
sigma <- 1  # Desviación estándar del proceso

# Definir franjas de control
lower_bound <- mu - sigma
upper_bound <- mu + 3 * sigma
num_intervals <- 4
interval_width <- sigma
interval_bounds <- seq(lower_bound, upper_bound, by = interval_width)

# Probabilidades de transición
transition_prob <- matrix(0, nrow = num_intervals, ncol = num_intervals)
for (i in 1:num_intervals) {
  for (j in 1:num_intervals) {
    if (i == j) {
      # Probabilidad de permanecer en la misma franja
      transition_prob[i, j] <- pnorm(interval_bounds[j + 1], mean = mu, sd = sigma) -
        pnorm(interval_bounds[j], mean = mu, sd = sigma)
    } else if (j == i + 1) {
      # Probabilidad de moverse a la franja adyacente a la derecha
      transition_prob[i, j] <- pnorm(interval_bounds[j + 1], mean = mu, sd = sigma) -
        pnorm(interval_bounds[j], mean = mu, sd = sigma)
    }
  }
}

# Matriz de transición
```

```
transition_prob
```

```
 transition_prob
          [,1]      [,2]      [,3]       [,4]
[1,] 0.3413447 0.3413447 0.0000000 0.00000000
[2,] 0.0000000 0.3413447 0.1359051 0.00000000
[3,] 0.0000000 0.0000000 0.1359051 0.02140023
[4,] 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.02140023
```

A continuación, utilizamos la matriz fundamental para calcular el ARL de la cadena de Markov. La matriz fundamental es una matriz que nos permite calcular la esperanza del tiempo de primera llegada a los estados absorbentes. En este caso, los estados absorbentes son aquellos en los límites de control.

```
# Función para calcular ARL utilizando cadenas de Markov
calculate_arl_markov_chain <- function(transition_prob) {
  num_intervals <- nrow(transition_prob)
  absorbing_states <- num_intervals

  # Calcular matriz fundamental
  fundamental_matrix <- solve(diag(num_intervals) - transition_prob[1:num_intervals, 1:num_i

  # Calcular ARL
  arl <- sum(fundamental_matrix[1,]) - sum(fundamental_matrix[absorbing_states,])
  return(arl)
}

# Calcular ARL
arl_xbar <- calculate_arl_markov_chain(transition_prob)
arl_xbar
```

```
[1] 1.409657
```

El ARL de la Carta $\bar{X}$ calculado mediante cadenas de Markov es 1,409657.