Parte II - 50 %

Implementar los siguientes ejercicios en programa de R u otras programas.

Enviar por email de día de miércoles, 13 de marzo antes de 07:00 am .

1. Considera una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y la martiz de probabilidades de transición :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   a) Clasifica los estados a las clases

   b) Estudia la recurrencia o transitoriedad de cada uno de los estados de la cadena.

   c) Calcula periodo de cada uno de clase de recurrente.

   d) Identificar los estados ergodicos.

2. En la oficina de Admisiones de la Universidad Nacional se ha obtenido la información necesaria para las siguientes estadísticas sobre un programa de Magíster que dura tres niveles: el 70 % de los estudiantes que ingresan al primer nivel pasan con éxito al segundo nivel, el 10 % lo tiene que repetir y el 20 % restante se retira por diferentes motivos; de todos los estudiantes que pasan al segundo nivel, el 80 % accede al tercer nivel, el 8 % repite y el 12 % restante sale del programa por bajo nivel académico o por otras razones; de todos los estudiantes que ingresan al tercer nivel el 90 % se ha graduado, el 6 % lo tiene que repetir, y el 4 % restante no puede optar al titulo y los retiran por no cumplir las normas estipuladas.

   (a) Cuántos alumnos lograran el titulo de Magíster de un grupo de 100 aspirantes que se matricularon en el primer nivel?

   (b) *Si cada nivel dura* un semestre, durante cuando años se deberá ofrecer este **Magíster** si el país *necesitan*, aproximadamente 500 especialistas en esta área, sabiendo que esta universidad sólo está en capacidad de recibir, como máximo, 50 alumnos nuevos cada semestre?

3. Considera una caminata aleatoria con los estados $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Si el proceso está en estado $i(i = -1, 0, 1)$, entonces se mueven a cualquier $i - 1$ ó $i + 1$ con igual probabilidad. Si el proceso de se encuentra en estado -2 ó 2 en el tiempo n, entonces se mueve al estado $-1, 0$ ó 1 en el tiempo $n + 1$ con probabilidad igual.

   a) Escriba la matriz de probabilidad de transicíñ para este caminata aleatoria

   b) Calcule la distribución estacionaria.

4. Un jugador llega a un casino con 200 dólares. Decide jugar hasta que su capital sea igual a 700 dólares o hasta que se arruine. En cada ronda de juego el jugador gana o pierde 100 dólares con probabilidades 0,4 y 0,6 respectivamente. ¿A qué es igual la probabilidad de que el jugador logre alcanzar su meta de los 700 dólares?, ¿Cuál es la probabilidad de ruina del jugador?

Universidad Nacional de Colombia **Departamento de Estadística**
Procesos Estocásticos **Parcial 1 - 2024**

Parte I - 50%

Todos los puntos valen lo mismo

1. **a.** Sean Z_1 y Z_2 variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con la distribución normal de media $\mu = 0$ y la varianza $\sigma^2 < \infty$. Verificar que el proceso $X = \{X(t) : t \in R\}$, el proceso $X(t) = Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t)$ es un proceso covarianza estacionaria.

   b. Suponga que una marca de Yogurt produce sólo dos sabores (vanilla y fresa) Dasdo que persona la última vez compó yogurt de sabor vanilla, ay 90% de probabiidades de quesu siguiente compra sea sobre vanilla. Dado que la tíma compra de una persona fue yogurt sabor fresa, hay 80% de probabilidades de que siguiente compra sea sabor fresa. Si una person en la actualidad es comprador de yogur sabor fresa, ¿cuál es la probabilidad de que compre yogurt fresa tres ocasiones a partir de ahora?.

2. Sea $(X_n)_{n \in N}$ una cadena de Markov con conjunto de estados S.

   a. Supóngase que $i, j \in S$ con $i \longleftrightarrow j$. Demostrar que i y j tienen el mismo período, es decir $d(i) = d(j)$.

   b. Demostrar que si j es un estado transitorio, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ para $i \in S$.

3. Supóngase que se tienen dos urnas A y B y que en la urna A hay dos bolas de color blanco y en la urna B hay cuatro bolas de color negro. Se seleccionan aleatoriamente una bola de cada urna y las dos bolas seleccionadas se intercambian.Supóngase que se repite este procedimiento indefinidamente. Sea X_n el número de bolas negras en la urna A luego de $n-$intercambios. Es claro que $(X_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   a. La matriz de transición **P**.

   b. La distribución límite.

   c. A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que haya una bola negra en la urna?

4. Justifica si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

   a. Si los estados i y j pertenecen a la misma clase de comunicación, entonces la cadena es irreducible.

   b. En una cadena de Markov con conjunto de estados finito se tiene que todos los estados son recurrentes

   c. En una cadena de Markov finita con estados absorbentes, las probabilidades de estado estacionario para los estados transitorios siempre son cero.

   d. Una cadena de Markov irreducible, recurrente y aperiódica tiene siempre distribución estacionaria.