

Laboratorio I: Misura di g con una molla

Analisi della dipendenza del periodo e l'allungamento dalla massa

Dipartimento di Fisica E.Fermi - Università di Pisa

Di Ubaldo Gabriele

1 Introduzione

1.1 Teoria

Obiettivo: Misura dell'accelerazione di gravità g a Pisa praticamente al livello del suolo a partire dagli allungamenti di una molla.

La legge di Hooke dice che:

$$F_h = k(x - x_0) \quad (1)$$

che in equilibrio diventa:

$$g(m_p + m_i + m_m/3) = k(l_i - l_0) \quad (2)$$

Dove m_p è la massa del piattello; m_i è la massa posta sul piattello; m_m è la massa della molla; l_i la lunghezza della molla sotto carico; l_0 la lunghezza della molla a riposo.

Il periodo di oscillazione della molla è invece dato da:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m_i + m_p + m_m/3) \quad (3)$$

1.2 Apparato sperimentale

- Molla $m_m = 7.944g$ piattello $m_p = 7.771g$
- Cronometro di risoluzione $0.01s$
- Bilancia di precisione di risoluzione $0.001g$
- Metro a nastro di risoluzione $1mm$
- Pesetti di masse $5g; 10g; 20g; 50g$

2 Esperimento

2.1 Acquisizione misure

Abbiamo controllato che il valore dichiarato dei pesetti fosse corretto con la bilancia di precisione, osservando che il disaccordo con il valore nominale poteva essere trascurato rispetto all'incertezza

maggiore sulle lunghezze. Per semplicità abbiamo utilizzato il valore nominale dei pesi. La lunghezza a riposo della molla è $l_0 = 12.4 \pm 0.1 \text{ cm}$. Abbiamo attaccato il piattelo, posto le diverse masse su di esso e per ognuna di queste è stata misurata la lunghezza complessiva. Per ciascuna massa sono state effettuate 5 misure di 10 oscillazioni ognuna. $\tau = 10T$ si riferisce a 10 oscillazioni

I risultati ottenuti sono descritti dalle seguenti tabelle:

Tabella 1: Allungamenti acquisiti

$m(g)$	$l(cm)$	$l - l_0(cm)$
5	17.6	5.2
10	19.7	7.3
15	21.5	9.1
20	23.6	11.2
25	25.6	13.2
30	27.6	15.2
35	29.5	17.1
40	31.5	19.1
45	33.6	21.2
50	35.5	23.1

Tabella 2: Periodi acquisiti

$m(g)$	$\tau_i(s)$				
5	5.13	4.89	4.96	4.87	4.89
10	5.75	5.67	5.74	5.83	5.73
15	6.41	6.43	6.31	6.35	6.37
20	6.97	6.91	7.01	6.99	7.04
25	7.65	7.49	7.50	7.47	7.61
30	8.00	8.02	8.07	7.96	8.03
35	8.52	8.54	8.50	8.40	8.59
40	8.95	8.92	9.02	8.97	8.91
45	9.24	9.35	9.34	9.22	9.47
50	9.80	10.01	9.82	9.92	9.85

2.2 Analisi dei dati

Intuitivamente vediamo che per un aumento di $5g$ vi è circa un aumento di $2cm$ il che conferma in prima analisi la legge di Hooke. Partendo dai risultati delle misurazioni è stata calcolata la media m_τ del periodo di 10 oscillazioni. Dopodiché è stata ricavata la misura di k .

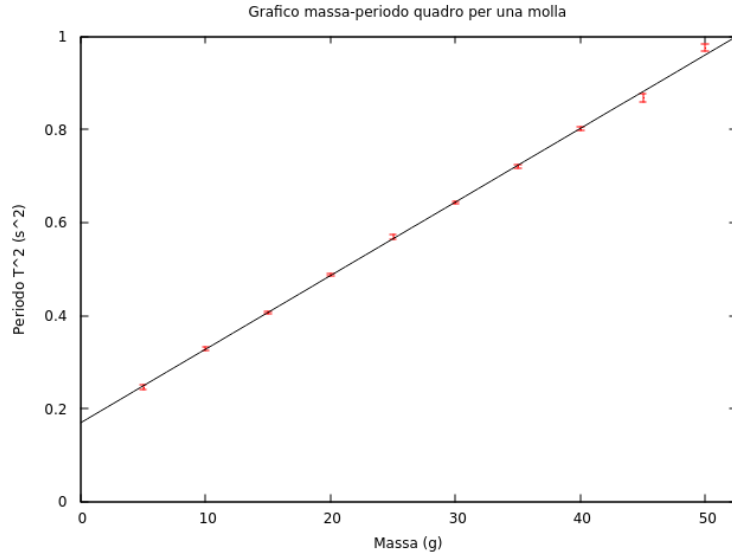
Tabella 3: Analisi dei periodi

$m(g)$	$\tau_i(s)$	$T_i(s)$	$T_i^2(s)$
5	4.95 ± 0.05	0.495 ± 0.005	0.245 ± 0.005
10	5.74 ± 0.02	0.574 ± 0.002	0.329 ± 0.003
15	6.37 ± 0.02	0.637 ± 0.002	0.406 ± 0.003
20	6.98 ± 0.05	0.698 ± 0.005	0.487 ± 0.003
25	7.55 ± 0.03	0.755 ± 0.003	0.570 ± 0.005
30	8.02 ± 0.04	0.802 ± 0.004	0.643 ± 0.003
35	8.49 ± 0.02	0.849 ± 0.002	0.721 ± 0.003
40	8.95 ± 0.02	0.895 ± 0.002	0.801 ± 0.004
45	9.32 ± 0.05	0.932 ± 0.005	0.869 ± 0.009
50	9.88 ± 0.04	0.988 ± 0.004	0.976 ± 0.008

Per l'errore su T_i^2 abbiamo usato l'espansione in serie di Taylor per più variabili.

2.2.1 Stima di k

Il seguente grafico descrive la proporzionalità tra la massa e il periodo quadro:



Abbiamo fatto un fit lineare attraverso gnuplot (il programma usa l'algoritmo di Marquardt-Levenberg) e calcolato il χ^2 . L'intercetta del fit $f(x) = ax + b$ è $-b/a \approx -10.5g$ che è compatibile con $(m_p + m_m/3)$. Per determinare la costante della molla usiamo $a = 4\pi^2/k$ e otteniamo:

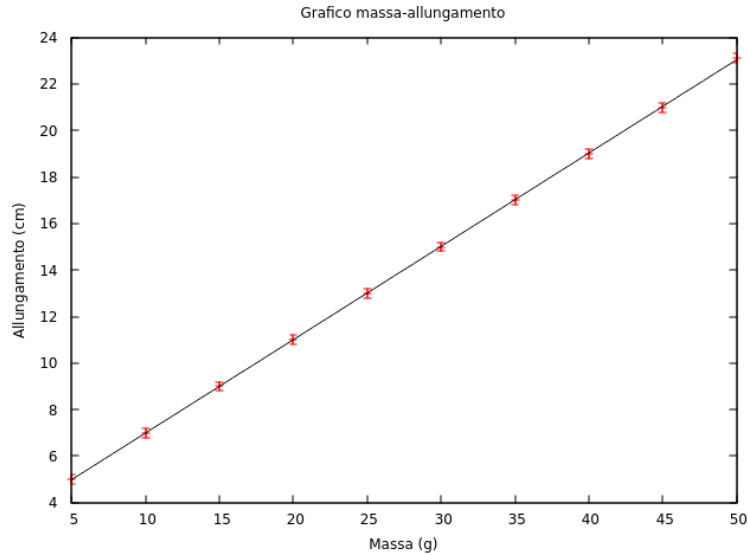
$$k = 2.46 \pm 0.02 N/m \quad (4)$$

I risultati del fit sono:

$$\chi^2 = 8.32 \quad \chi_r^2 = 1.04 \quad a = 0.0158 \pm 0.66\% \quad b = 0.169 \pm 1.62 \quad (5)$$

2.2.2 Stima di g

Il seguente grafico mostra la dipendenza tra la massa e l'allungamento. La retta di fit interseca



l'asse delle ascisse in $-b/a \approx 7.45$ che è compatibile con la massa del piattello non considerata nel grafico. I risultati del fit sono:

$$\chi^2 = 0.16 \quad \chi_r^2 = 0.02 \quad a = 0.4 \pm 0.16\% \quad b = 0.02 \pm 0.66\% \quad (6)$$

Il coefficiente angolare della retta è g/k Quindi

$$g = 9.84 \pm 0.09 \text{ m/s}^2 \quad (7)$$

3 Conclusione

Il valore del χ^2 per le due rette di fit conferma la validità del modello fisico utilizzato per il comportamento della molla. La stima di g è in ottimo accordo con il valore dichiarato per Pisa di $g = 9.807$ che rientra nell'errore della nostra misura. Il fatto che il χ^2 sia così basso nel secondo fit può voler dire che abbiamo sovrastimato l'errore e in realtà i nostri strumenti hanno una precisione maggiore di quella attribuita.