

Physics from Symmetry.

1st edition

Copyright © 2016 balabala

PUBLISHED BY NON

[HTTPS://GITHUB.COM/LASERROGER/PHYSICS-FROM-SYMMETRY/](https://github.com/laserroger/physics-from-symmetry/)

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Preface

世界上最无法理解的事情是这个世界竟然是可以理解的。

— Albert Einstein

在物理课上, 我像任何一个物理系学生那样熟悉许多基本方程与它们的解, 但我不是很清楚它们之间的联系。

当我理解它们中的大多数具有共同的起源 — **对称性 (Symmetry)** 时我十分激动。对我而言搞物理最美的经历莫过于原本费解的东西经过深入探究之后豁然开朗。我因此深爱着对称性。

例如, 有一段时间我不能真正理解自旋 — 几乎所有基本粒子都具有的奇特的内禀角动量, 后来我学到了原来自旋一种对称性 (称为 Lorentz 对称性) 的直接结果, 于是有关自旋的内容开始充满意义。

本书的目的就是为读者提供这样的经历, 在某种意义上, 当我开始学物理的时候我就有写这本书的愿望了。¹ 对称性漂亮地解释了其它方面的许多复杂物理现象, 这让我们认为可以从对称导出物理学的基本理论, 本书正是基于这个锐利而光芒耀眼的信念。²

引自 Jon Fripp, Deborah Fripp, and Michael Fripp. *Speaking of Science*. Newnes, 1st edition, 4 2000. ISBN 9781878707512

¹同感! 这就是物理系学生的中二病吗 2333333 — 译者 (SI)

²锐 (するど) くギラつかせた希望 (きぼう), もっと本気 (ほんき) 出 (だ) していいよ, あ~, あ~, あ~, あ~

可以说本书的写作顺序是倒过来的：在我们讨论经典力学与非相对论量子力学之前，我们将利用大自然（据我们所知）精确的对称性导出量子场论的基本方程。不过尽管途径不同，本书的内容仍为标准物理学，我们不涉及仍有争议未经实验验证的内容，而是通过物理学的标准假设导出物理学的标准理论。

根据读者的物理水平，本书可以有两种用途：

- 物理学的初学者³可以把这本书当成入门教材，它包含了经典力学，电动力学，量子力学，狭义相对论和量子场论的基本理论，在阅读之后，读者可再深入学习各部分内容。各部分有许多更加深入的优秀书籍，在各章的末尾列出了一些延伸阅读的推荐表。如果你觉得你属于这一种，我们建议你在阅读正文之前先从附录的数学补充开始。
- 另一种情况，身经百战见得多的学生可以通过本书将松散的各物理领域紧密联系起来。回顾历史的进程我们会发现许多物理思想可能看起来随意甚至乱来，但从对称性的观点看，它们往往就变得必然而直接。

とにかく，不管哪种情况都应该按顺序阅读本书，因为各章之间是递进的。

开始的短章节是关于狭义相对论的，它是之后讨论的所有内容的基础。我们会看到对物理理论最重要的限制之一是它们必须符合狭义相对论。

本书的第二部分引入了描述对称性的数学工具（在物理味道的表述下），大多数工具来自数学的重要分支——群论。之后我们介绍拉格朗日形式（Lagrangian formalism），它使我们能够在物理体系中直接利用对称性。

第五章和第六章利用之前引入的拉格朗日形式和群论导出了现代物理学的基本方程。

在最后一部分，我们把之前的基本方程加以应用：应用于粒子理论我们可以导出量子力学，应用于场理论我们可以导出量子场论。然后我们研究这些理论在非相对论极限与经典极限的变体，这样又导出了经典力学与电动力学。

每章的开始是本章内容的摘要。如果你发现你在思考‘这是在讲些啥’，不妨回到章节开头看看摘要以明白某一部分的目的是什

³这个‘初学者’是‘相对而言的’(relatively)... — 译者注

开始自附录 A。此外，当正文使用一个新的数学概念时，边注中会说明相应的附录目录。

么. 书页留有巨大的页边空白⁴以防止想出 Fermat 大定理的证明
却没地方写 你可以一边阅读一边在页边记下笔记与灵感.

我希望你读这本书能够像我写这本书的时候一样愉悦.

许多页边注的内容是拓展
信息与图景.

Karlsruhe, 2015.01

Jakob Schwichtenberg

DRAFT TRANSLATION

⁴给译文排版造成了小小的麻烦. — 译者

DRAFT TRANSLATION

Acknowledgments

感谢所有帮我编写这本书的人。我特别感激 Fritz Waitz, 他的评论, 想法与纠正让本书质量大大改善。我十分感谢 Arne Becker 和 Daniel Hilpert, 感谢他们无价的建议, 意见与细致的校对。感谢 Robert Sadlier 对我英文的帮助以及 Jakob Karalus 的解释。

我还想感谢与我有许多见解深刻的讨论的 Marcel Köpke, 感谢 Silvia Schwichtenberg 和 Christian Nawroth 的支持。

最后, 我亏欠最多的是我的父母, 他们支持着我, 教导我知识高于一切。

如果发现文中的错误, 我非常希望你能够寄一封短邮件到 errors@jakobschwichtenberg.com。勘误表的地址是 <http://physicsfromsymmetry.com/errata>。

DRAFT TRANSLATION

Contents

I	Foundations 基础	
1	简介	3
1.1	推不出来的事情	3
1.2	全书概览	5
1.3	基本粒子和基本相互作用力	7
II	Symmetry Tools 对称性工具	
2	Lie 群	11
2.1	群	12
3	The Framework (力学) 框架/体系	15
3.1	Lagrangian Formalism 拉格朗日形式	15
3.1.1	Fermat 原理	16
3.1.2	变分法: 基本思想	16
3.2	Restrictions 限制	17



Foundations 基础

1	简介	3
1.1	推不出来的事情	
1.2	全书概览	
1.3	基本粒子和基本相互作用力	

DRAFT TRANSLATION

1. Introduction 简介

1.1 What we Cannot Derive 推不出来的事情

在我们开始讲我们能从对称性里面了解到什么之前，我们首先澄清一下我们需要在我们的理论中人为的加一些什么东西。首先，目前没有任何理论可以得到自然界的常数。这些常数需要从实验中提取出来，比如各种相互作用的耦合常数啊，基本粒子的质量啊这种的。

除了这些，我们还有一些东西解释不了：**数字 3**。这不是术数的那种神秘主义的东西，而是我们不能解释所有的直接与数字 3 相联系的限制。比如：

- 对应三种标准模型描述的基本作用力有三种规范理论¹。这些力是由分别对应于对称群 $U(1)$, $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 的规范理论描述的。为什么没有对应 $SU(4)$ 带来的基本作用力？没人知道！
- 轻子有三代，夸克也有三代。为什么没有第四代？我们只能从实验²中知道没有第四代。
- 我们只在拉格朗日量里面包含 Φ 的最低三阶 (Φ^0, Φ^1, Φ^2)，其中 Φ 指代一些描述我们的物理系统的东西，是个通称，而这个拉格朗日量则是被我们用来得到我们的描述自由 (= 无相互作用) 场/粒子的靠谱的理论的。
- 我们只用三个基本的 Poincare 群双覆盖的表示，分别对应

¹ 如果你不理解这个简介中的某些名词，比如规范理论或者二重覆盖，不需要太过担心。本书将会详尽的解释，在这里提到只是为了完整性。

² 比如，现在宇宙中元素的丰度是依赖于代的数量的。更进一步，对撞机实验中有对此的很强的证据。(见 Phys. Rev. Lett. 109, 241802)

自旋 $0, \frac{1}{2}$ 和 1 。没有基本粒子的自旋是 $\frac{3}{2}$ 。

在现代的理论中，这些是我们必须手动增加的假定。我们从实验上知道这些假定是正确的，但是目前为止我们没有更深刻的原理告诉我们为什么我们需要到 3 就停。

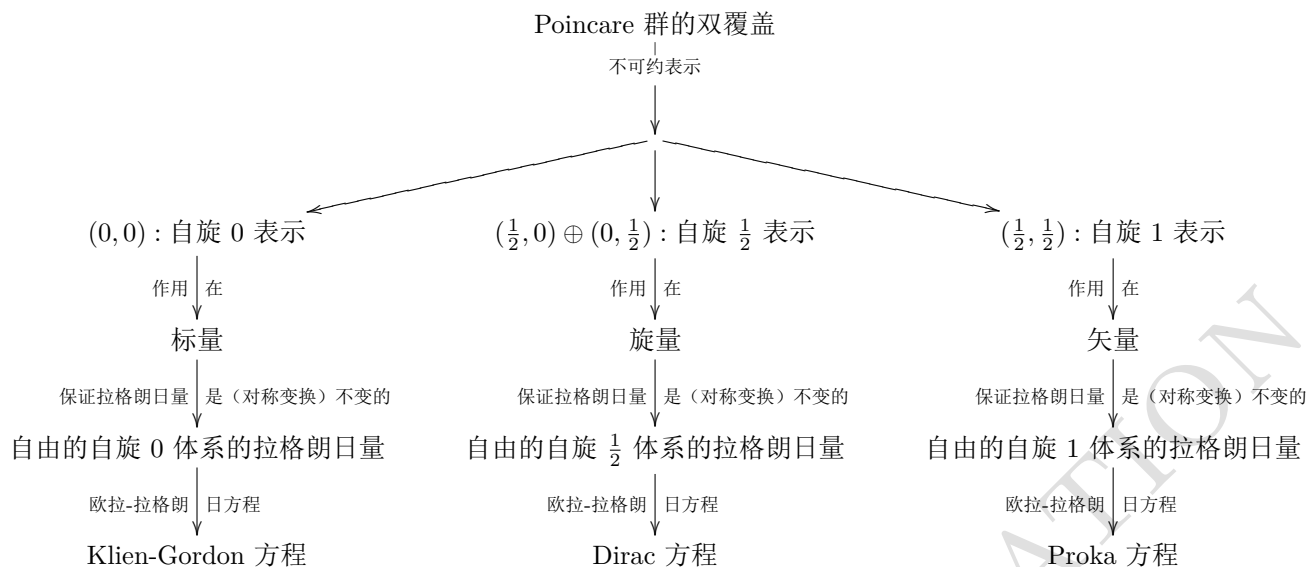
除此之外，还有两件事情我们没法从对称性中得到，但是他们对于一个严谨的理论来说有时必须被考虑到的：

- 我们只允许在拉格朗日量中引入尽可能低阶的非平庸的微分算符 ∂_μ 。对于一些理论，我们使用一阶的微分算符 ∂_μ ，而另一些理论 Lorentz 不变形禁止了一阶导数，从而二阶导数 $\partial_\mu \partial^\mu$ 是最低阶的可能的非平庸阶项。除此之外我们就再也得不到一个合理的理论了。存在高阶导数项的理论没有下界，这导致能量可以是一个任意大小的负值；因此，这些理论中的态总可以变到能量更低的态，从而永远不会稳定。
- 我们处于类似的原因，我们可以说如果半整数自旋的粒子和整数自旋的粒子拥有完全一样的行为的话，宇宙中就不会有稳定的物质。因此，这两者必然有某些东西不一样，而我们没得选，只有一种可能而且合理的选择³是正确的。这引出了半整数自旋粒子的 Fermi-Dirac 统计的概念和整数自旋粒子的 Bose-Einstein 统计的概念。半整数自旋的粒子从而通常被称为 Fermion，它们中永远不存在两个粒子处在完全一样的态上。而与之相反的，这种情况对整数自旋的粒子——通常被称为 Boson——是可能的。

³ 我们在最开始的量子场论里使用反对易子而不是对易子，从而防止我们的理论变成没有下界的理论。

最后呢，我们提一下剩下的一个我们不能从这本书的其他理论中得到的东西：引力。当然，实际上，大名鼎鼎的广义相对论就是优美而准确的描述引力的理论；然而这个理论与其他理论完全不一样，超出了本书的研究范围。而尝试将引力问题划入相同框架下的量子引力理论仍待完善：目前没有人能够成功得出它。除此之外，在最后一章我们会做一些对引力的一些评述。

1.2 Book Overview 全书概览



这本书使用**自然单位制**，也就是说 Planck 常数 $\hbar = 1$ ，光速 $c = 1$ 。这是基本理论中使用的惯例，它免除了很多不必要的笔墨。而对于应用来说呢，这些常数需要被再一次的加上去从而回到标准的 SI 单位制。

狭义相对论的基本假设是我们的起始点；它们是：在所有的惯性参考系 — 一些相互之间的速度保持恒定的参考系 — 中，光的速度不变，为 c ；而且物理规律在所有惯性系中相同。

满足这些对称性的所有的变换构成的集合叫做 **Poincaré 群**。为了能够得到它们，我们接下来介绍一些数学知识从而使得我们能够利用好对称性。数学的这一分支叫群论。我们会得到 Poincaré 群⁴的不可约表示——你可以当成是组其它所有表示的“地基”。这些表示就是我们后面用来描述粒子和场的不同自旋的表示。自旋一方面是对不同种类的粒子和场的标记，而另一方面也可以视为内禀角动量。

在这以后，我们要介绍**拉格朗日形式**，它使得我们可以方便的在物理问题里面使用对称性。这里面的核心对象是**拉格朗日量**，我们可以从对不同的物理系统的对称性的考虑出发来得到¹。而在此之上我们就得到了欧拉-拉格朗日方程，从而我们可以得到给定拉格朗日量的运动方程。利用 Poincaré 群的不可约表示，我们实际上得到了场和粒子的基本运动方程。

这里面的中心思想是在 Poincaré 群中元素的变换下，拉格

¹实际上，拉格朗日量是人为写出来的，而不是能够推导出来的。它是我们对某类体系『唯相』且经验的刻画——译者注

⁴ 技术上正确的讲，我们会得到 Poincaré 群的双覆盖而不是 Poincaré 群本身。“双覆盖”这个词是由于一个群的双覆盖和这个群的关系是前者的两个元素与后者的一个元素相对应。这在后面的节??中会讲到。

朗日量必须是不变的。这使得我们在任意的参考系中得到的运动方程都是一样的，就像我们之前说的那样“物理规律在所有惯性系中相同”。

之后我们就会发现对于自旋 $\frac{1}{2}$ 场的拉格朗日量的另一个对称性：在 $U(1)$ 变换下的对称性。类似的，对于自旋 1 的场的内禀对称性也可以找到。局域的 $U(1)$ 对称性可以使得我们得到自旋 $\frac{1}{2}$ 场和自旋 1 场之间的耦合。带这样的耦合项的拉格朗日量是量子电动力学的拉格朗日量的正确形式。类似的局域 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 变换会得到弱和强相互作用的拉格朗日量的正确形式。

作为补充，我们会讨论对称性自发破缺和 Higgs 机制。这些使得我们能够去描述有质量的粒子⁵。

之后我们得到 Noether 定理，它给我们展示了对称性和守恒量之间深刻的联系。我们会通过鉴别每个物理量和它对应的对称性生成元来展现这种联系。这使得我们看到量子力学中最重要的方程²

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (1.1)$$

和量子场论中

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y) \quad (1.2)$$

我们接下来通过对自旋 0 粒子的运动方程，即 Klein-Gordon 方程，取非相对论性⁶极限，得到了著名的 Schrödinger 方程。这一点，同我们认识到的物理量与对称性生成元之间的联系，一起构成了量子力学的基石。

接下来我们从不同的运动方程⁷的解，和方程(1.2)出发来考察自由场的量子场论。这之后我们通过仔细审视包含不同自旋场之间的耦合的拉格朗日量来考虑相互作用。这使得我们可以讨论散射过程的概率振幅是如何得到的。

通过得到 Ehrenfest 定理，量子 and 经典力学的联系被我们展现出来。更进一步，我们够得了经典电动力学的基本方程，包括 Maxwell 方程组和 Lorentz 力定律。

最后简要的介绍现代引力理论，广义相对论，的基本结构，并点出一些在构建引力的量子理论中的困难。

⁵ 在对称性自发破缺前，拉格朗日量中的描述质量的项会破坏对称性从而被禁止

⁶ 非相对论性指所有物体相比光速来说都运动的十分缓慢，从而狭义相对论的古怪的特性很小不会被观察到。

⁷ Klein-Gordon, Dirac, Proca 和 Maxwell 方程

²原书有 typo

这本书的主要部分是我们需要的处理对称性的数学工具，和被称为**标准模型**的理论的导出。标准模型用量子场论来描述所有已知的基本粒子的行为。直到现在，所有的标准模型的实验预言都是正确的。这里介绍的任何其他的理论都可以看作标准模型下的一个特殊情况，比如宏观物体（经典力学），或者低能的基本粒子（量子力学）。对于那些从来没听说过现今已知的基本粒子和它们之间相互作用的读者，我们在接下来一节会进行一个快速的概述。

1.3 Elementary Particles and Fundamental Forces 基本粒子和基本相互作用力

基本粒子分成两个主要的大类：**bosons** 和 **fermions**。**Pauli 不相容原理**是的是不能有两个 **fermions** 处在完全相同的态上，而 **boson** 则可以有任意多个粒子处在同一个态上。这种自然界奇怪的事实导致了这些粒子截然不同的性质：

- Fermions 构成物质³
- Bosons 构成自然界的力

这说明，比如，原子是由 **fermions**⁸组成的，但是电磁相互作用力是通过被称为光子的 **bosons** 传播的。这带来的一个最令人震惊的结果是能有稳定的物质形成了。如果允许有无限多的 **fermions** 处在相同的状态，根本就不会有稳定的物质，我们会在第??中讨论。

目前我们知道四种基本作用力

- 电磁相互作用力，通过无质量的光子传播
- 弱相互作用力，通过有质量的 W^+ , W^- 和 Z - **bosons** 传播。
- 强相互作用力通过无质量的胶子传播。
- 引力，（或许）通过引力子传播。

这里面，一些相互作用对应的 **bosons** 是无质量的，而另一些不是，这种事情给我们揭露了一些自然界的深刻的事情。我们在做好足够的准备之后会去仔细理解这一点，而现在我们只需要记住每一种相互作用力都与一个对称性相关。弱相互作用力传递的 **bosons** 是有质量的说明其对应的对称性被破坏了。这种**自发对称性破却**是所有基本粒子质量的起源。我们后面会看到这一点通过与另一种基本 **boson**，**Higgs boson** 的耦合来实现。

³这里，『构成』实际上不是很合适的翻译。直译的话应该叫 Fermions 对物质『负责』。不过大体上就是那么个意思吧。---译者注

⁸ 原子有电子，质子和中子组成，它们都是 **fermions**。然而注意质子和中子都不是基本的粒子，它们有夸克组成，而夸克也是 **fermions**。

⁹ 在第??章中我们会讲，所有的荷都有着
一个相同的美丽的起源

¹⁰ 通常弱相互作用力的荷会伴随着“弱”
这个前缀，所以也被称为弱同位旋；而且还
存在一种其它的叫同位旋的概念适用于强
相互作用里面的的复合物。不仅如此，这不
是一个基本的荷，而本书中会省略“弱”这
个前缀。

基本粒子如果携带某种荷⁹的时候它可以通过某种力来相互作用。

- 对于电磁力来说，这种荷就是**电荷**，而相应的只有带电粒子能够通过电磁力相互作用。
- 对于弱相互作用力来说，这种荷称为¹⁰**同位旋**。所有已知的 fermions 都携带同位旋，因此他们之间通过弱作用力来相互作用。
- 强作用力的荷叫**色**没因为它与人对色彩的知觉有某种奇妙的共性。由于这个荷实际上与日常生活中的色彩没有任何关系，所以不要因为这个名字而感到困惑。



Symmetry Tools 对称性工具

2	Lie 群	11
2.1	群	
3	The Framework (力学) 框架/体系	15
3.1	Lagrangian Formalism 拉格朗日形式	
3.2	Restrictions 限制	

DRAFT TRANSLATION

2. Lie Group Theory Lie 群

本章概述

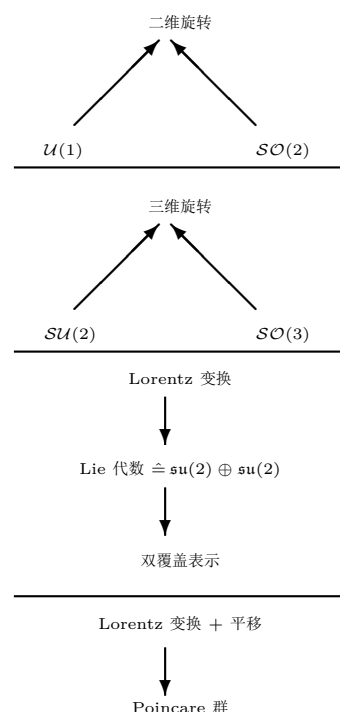
本章的最终目的是导出 **Poincare 群** 双覆盖的基本表示, 物理学现在认为 Poincare 群是时空根本的对称性群. 这些基本表示是描述所有基本粒子的必要工具, 每一种表示对应一种基本粒子, 它们揭示了自然界存在何种基本粒子.

我们从两个简单例子引出群的定义, 然后作为学习 Lie 群理论的第一步, 我们讨论描述二维旋转变换的两种方式:

- 2×2 旋转矩阵.
- 单位复数.

接着我们尝试找出描述三维旋转的第二种方法 (像复数那样, 当然第一种方法是 3×3 矩阵), 第二法与一种超级重要的群 — $SU(2)$.¹¹ 有关. 之后我们研究 **Lie 代数**, 使用简便的 Lie 代数能够深入研究复杂的 Lie 群. 不同的群可以有相同的 Lie 代数, 但只有其中的一部分是基本的. 从上述基础出发就能准确揭示自然的基本对称性群 — Poincare 群的双覆盖. 我们将利用已知的变换操作导出 Lie 代数, 并利用 Lie 代数得出不同的对称变换表示. 这样就能看出我们开始时使用的表示其实只是一种特殊情况. 这样我们又能研究 Poincare 群的重要部分 — **Lorentz 群**, 我们会看到 Lorentz 群双覆盖的 Lie 代数由两份 $SU(2)$ Lie 代数所组成, 因此我们可以直接利用熟悉的 $SU(2)$ 群的结论. 最后我们将平移变换

下面的图表是本章结构的示意图. 当你迷失方向的时候记得回来看看, 初学的时候不需要看它. 反正也看不懂



¹¹ S 表示特殊 (special), 它的含义为 $\det(M) = 1$. U 表示么正: $M^\dagger M = 1$, 数字 2 表示这个群起初是用 2×2 矩阵定义的.

考虑进来, 这就是 Poincare 群, Poincare 群就是 Lorentz 群加上平移. 完成上述所有之后我们终于可以将 Poincare 群双覆盖的基本表示进行分类, 这些在后面的章节中会大用特用, 我们将从中导出物理学的基本定律.

2.1 Groups 群

我们需要合适的数学工具描述对称性以和民科 (贬义的) 区分开. 描述对称的数学分支称为群论. 群论的一个分支 Lie 理论谎言理论描述连续的对称性, 物理中经常遇到这种情况.

我们把对称性定义为变换下的不变性, 而描述对称的群就定义为某些变换的集合. 让我们从两个简单例子开始体会群到底该怎么定义吧.

1. 正方形是一些点的集合 (例如四个顶点是该集合的一部分), 正方形的对称性是在某些变换下 (变换: 将一个点映射到另一个点) 保持不变的性质.

符合条件的变换有绕中心旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ$ 等等. 这些旋转操作将正方形映射到它自身. 我们称这个集合 (正方形点集) 在这样的变换下具有不变性.

注意不是所有旋转变换都对称. 我们关注顶点的变化就能看出来, 比如绕中心顺时针旋转 5° , 这个变换将顶点映射到原来正方形点集之外, 顶点 A 映射到了原来正方形集合之外的点 A' . 因此这个旋转变换对正方形不具有对称性. 当然, 变换后的点集仍然是个正方形, 但却是不同的正方形 (即不同点的集合). 绕中心转 90° 是对称的, 如图 2.3, 顶点 A 变换到点 B , 等等, 原来的正方形点集变换到相同的集合.

Figure 2.1: 正方形

Figure 2.2: 正方形绕中心顺时针旋转 5°

Figure 2.3: 正方形绕中心旋转 90°

假如你看了一眼原来的正方形, 然后闭上眼睛, 这时有人把正方形做了一个变换. 如果你不能分辨这个正方形是否发生变化, 那么这个变换就是个对称变换.

我们把所有使正方形不变的变换构成的集合称为群. 变换参数 (本例中就是旋转角度) 不能任意取值 (而是取分立的数), 这个群称为离散群.

2. 另一个例子是使单位圆不变的变换构成的集合. 类似地, 单位圆还是一些点构成的集合, 对称变换把这个集合映射到它

自身.

单位圆绕圆心旋转任意角度都不变. 换言之, 变换参数 (这里就是旋转角度) 可以取任意值, 因此这个群称为连续群.

数学中除了几何图形之外还有好多别的都有对称性. 例如, 对于向量, 我们可以考虑所有让向量长度不变的变换构成的集合. 看出本节开头对称性定义的普遍性了没? 对称性就是变换下的不变性. 非常幸运, 搞数学的早已建立了群论, 它可以研究所有类型的对称性¹².

为了让精确描述对称性的工具 — 群的定义来的自然一点, 我们把对称性的定义用数学语言精炼一下:

- 对某物什么也不做 (比如转个 0°) 当然也是对称变换 (按照我们的对称性定义), 因此任何群都需要包含一个恒等变换 (恒等元). 在上面的例子里, 恒等元就是旋转 0° .
- 对某物先做变换再做逆变换的结果必须等于啥也不做. 因此对于群中的任意元素 (简称群元), 必须有相应的逆元素. 按定义, 先做变换再做逆变换等于恒等变换. 例如先转 90° 再转 -90° (先逆时针再顺时针转) 与旋转 0° 相同.
- 先做一个对称变换再做一个对称变换, 总体效果必须还是对称变换. 例如先旋转 90° 再转 180° 等于直接转 270° , 后者也是对称变换. 对称变换的这个性质称为封闭性.
- 对称变换之间必须满足结合律. 例如先转 90° 再转 40° 再转 110° 与先转 130° 再转 110° 相同, 先转 90° 再转 150° 也一样. 用符号表示更加清楚:

$$R(110^\circ)R(40^\circ)R(90^\circ) = R(110^\circ)\left(R(40^\circ)R(90^\circ)\right) = R(110^\circ)R(130^\circ) \quad (2.1)$$

$$R(110^\circ)R(40^\circ)R(90^\circ) = \left(R(110^\circ)R(40^\circ)\right)R(90^\circ) = R(150^\circ)R(90^\circ) \quad (2.2)$$

这个性质称为**结合律**.

- 我们要有规定两个群元 (对称变换) 怎样合体的规则, 它是个**二元运算** (两个群元合体成一个), 我们称它为**群乘法**.

Figure 2.4: 单位圆绕圆心旋转任意角度都不变

¹² 历史上数学家们建立群论最初是为了描述方程的对称性

¹³ 旋转矩阵见附录 A.2.

¹⁴ 例如, 二维平面旋转还可以用单位复数描述, 相应的群乘法是复数乘法。稍后就讨论这一点。

在上面的例子里, 旋转变换的标准表示方法是用旋转矩阵¹³, 两个群元 (两个旋转矩阵, 或两个旋转操作) 合体的规则是线性代数里的矩阵乘法。同样的变换经常有不同的表示方法¹⁴, 群论非常系统性地概括了所有形式。群论的分支 — 表示论就是研究相同变换的不同描述方式的, 我们在??节学习表示论。

我们把上述群与对称变换的特征用严谨的数学语言表达, 再将它们提升为公理, 满足这些公理的数学结构就是一个群。数学系的群论书可能更喜欢在开头就从天上掉下来这些公理。必须指出满足群公理的结构可能是超级抽象的, 但我们现在只关注上面例子中的旋转变换那样的群。因为我们是物理系的, 而且这是本物理书

¹⁵ 别担心怎么才能根据这些公理凑出一个群来。搞物理的往往是从某个变换出发, 考察它是否符合群公理, 如果是经常是那么就可以应用群论来解决问题。

(我们通过对称变换的性质导出的) 群公理¹⁵:

一个群就是一个集合 G 加上一个定义在 G 上的二元运算 (群乘法) \circ , 当然 (G, \circ) 还要满足以下公理:

- 封闭性: 对于任意 $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \circ g_2 \in G$
- 单位元: 存在单位元 $e \in G$ 使得对于所有 $g \in G$, $g \circ e = g = e \circ g$
- 逆元: 对于任意 $g \in G$, 存在相应的逆元 $g^{-1} \in G$ 使得 $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$
- 结合律: 对于任意 $g_1, g_2, g_3 \in G$, $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

总结: 某物体在一些变换下保持不变, 这些变换组成¹的集合叫做对称群。对于 Minkowski 时空, Minkowski 度规¹⁶在变换下保持不变, 相应的对称群称为 Poincare 群。

¹⁶ 复习一下, Minkowski 度规就是在 Minkowski 空间中用来计算距离和长度的工具, 见第二章。

要注意群的定义完全与变换的物体是啥没有关系。我们可以脱离特定物体而只研究对称变换本身, 群的定义将变换从物体中‘提取’出来了。这是非常有用的, 许多不同事物具有同样或同类的对称性。群论让我们不用管变换的物体 (圆还是正方形), 只研究变换 (例如旋转) 的普遍性质。

¹我在想这里该用‘构成’还是‘组成’, 后来我觉得无所谓, 因为这不是初中化学...(分子构成物质, 元素组成物质...) — 译者 (SI)

3. The Framework (力学) 框架/体系

这一章的基本思路是, 我们要在尽可能少的使用某些东西的前提下, 得到正确的关于自然的方程。某些东西是什么? 有一件事是确定的: 它不应该在 Lorentz 变换下改变, 否则我们会在不同的参考系下得到不同的自然规律。在数学意义上, 它意味着我们寻找的这个东西是个标量, 依照洛伦兹群的 $(0,0)$ 表示作变换。再考虑到自然总依简单而行, 我们已经足够导出关于自然的方程了。

从这个想法出发, 我们将会引入拉格朗日形式 (Lagrangian formalism)。通过极小化理论的中心对象, 我们可以得到用以描述问题中的物理系统的运动方程。极小化过程的结果被称作 Euler-Lagrange 方程。

通过拉格朗日形式, 我们可以得到物理中最重要的定理: Noether 定理。这个定理揭示了对称性和守恒量¹⁷之间的深刻联系。我们将在下一章中利用它来理解, 理论是如何来描述实验测量量的。

¹⁷ 守恒量指的是不随时间变化的物理量。例如一个给定体系的能量或动量。数学上意味着 $\partial_t Q = 0 \rightarrow Q = \text{常数}$ 。

3.1 Lagrangian Formalism 拉格朗日形式

拉格朗日形式是在基础物理中被广泛运用的一个强有力的框架¹⁸。由于理论的基本对象—拉格朗日量 (Lagrangian) 是一个标量¹⁹, 它相对简单。如果你希望从对称性的观点考虑问题, 这种形式将会是非常有用的。如果我们要求拉格朗日量的积分, 作用量

¹⁸ 物理中当然有其他框架, 例如以哈密顿量 (Hamiltonian) 为中心对象的哈密顿形式 (Hamiltonian formalism)。哈密顿量的问题在于它不是洛伦兹不变的, 因为它所代表的能量, 仅仅是四动量 (co-variant energy-impulse vector) 的一个分量

¹⁹ 标量指依照洛伦兹群的 $(0,0)$ 表示作变换的对象。这意味着它不在洛伦兹变换下改变

(action), 在某些对称变换下不变, 我们即要求体系的动力学遵从该对称性。

3.1.1 Fermat 原理

Whenever any action occurs in nature, the quantity of action employed by this change is the least possible.

- Pierre de Maupertius²⁰

²⁰ Recherche des lois du mouvement (1746)

拉格朗日形式的思想源于 Fermat 原理: 光在两空间点间传播总依耗时最短的路径 $q(t)$ 而行。数学上来讲, 如果我们定义给定路径 $q(t)$ 的作用量为

$$S_{\text{light}}[\mathbf{q}(t)] = \int dt$$

而我们的任务便是找到一条特定的路径 $q(t)$ 使作用量取极小值²¹为了得到一个给定函数的极小值²², 我们可以求得其导函数并令其为零; 而为了找到泛函 $S[q(t)]$ ——函数 $q(t)$ 的函数 S ——的极小值, 就得要一个新的数学工具: 变分法。

²¹ 此处的作用量仅仅是沿给定路径对时间的积分, 但一般而言作用量会更加复杂, 我们待会儿就能见到

²² 一般而言, 我们希望找到最值 (extremums), 即最小值和最大值。

3.1.2 变分法: 基本思想

在思考如何发展一套能够找到泛函极值的新理论之前, 我们需要倒回去想想什么给出一个数学上的极小点。变分法给出的答案是, 极小点由极小点邻域的性质决定。例如, 让我们尝试寻找一个寻常函数 $f(x) = 3x^2 + x$ 的极小点 x_{\min} 。我们从一个特定点 $x = a$ 出发, 仔细考察其邻域。数学上它意味着 $a + \epsilon$, 其中 ϵ 代表无穷小量 (可正可负)。我们将 a 的变分代入函数 $f(x)$:

$$f(a + \epsilon) = 3(a + \epsilon)^2 + (a + \epsilon) = 3(a^2 + 2a\epsilon + \epsilon^2) + a + \epsilon。$$

如果 a 是极小点, ϵ 的一阶变分必需为零, 否则我们可以取 ϵ 为负 $\epsilon < 0$, 这样 $f(a + \epsilon)$ 就会比 $f(a)$ 更小¹。因此, 我们将线性依赖于 ϵ 的项取出并令其为零。

$$3 \cdot 2a\epsilon + \epsilon \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow 6a + 1 \stackrel{!}{=} 0。$$

¹ 译注: 此处讨论有误

由此我们找到极小点

$$x_{\min} = a = -\frac{1}{6},$$

它自然和我们求导 $f(x) = 3x^2 + x \leftarrow f'(x) = 6x + 1$ 并令其为零的办法得到的结果一致。对于寻常函数而言，这只是一个用来干同一件事不同方法而已²，但是变分法却能找到泛函的极值点。我们马上就能看到，应当如何处理一个一般的作用量泛函。

拉格朗日形式的中心思想在于对于有质量的物体，也存在一个与对光的 Fermat 原理相类似的原理。当然，它不可能直接遵从费马原理，但是我们可以从一个更一般的形式出发

$$S[q(t)] = \int \mathcal{L} dt$$

其中 \mathcal{L} 一般是一个非常数的参量，被称为拉格朗日量。对于光而言，这个参量是个常数。一般的，拉格朗日量依赖于物体的坐标和速度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \frac{\partial}{\partial t} q(t))$ 。在下一节中我们将仔细讨论这件事²³。在仔细讨论如何对这样一个泛函使用变分法之前，我们需要先讲讲两个小问题。

3.2 Restrictions 限制

正如我们在1.1节中所提到的，现有理论中有一些限制条件是无法从第一性原理中得到的。我们所能知道是，如果想得到一个有意义的理论，我们必须加上这些限制。

一个重要的限制是，我们仅允许拉格朗日量中出现尽可能低阶的非平凡³导数。这里平凡指的是对于系统的动力学，即运动方程，没有影响。某些理论会包含一阶导数，另外一些带二阶导数。一个给定理论所含的最低阶导数由该条件决定：拉格朗日量在 Lorentz 变换下不变²⁴，否则我们将在不同的参考系下导出不同的运动方程⁴。对于某些理论，我们无法写出一个仅含一阶导数项的不变量，那么此时二阶导数便成了最低阶导数项。

我们并不清楚如何处理包含高阶导数的理论，它们有一些根本的困难²⁵。另外，拉格朗日量中的高阶导数会使得运动方程中也包

²³ 我们的任务是找到对于给定拉格朗日量和初始条件有着最小作用量的路径 $q(t)$ 。在此之前，我们得先找到正确的拉格朗日量，用以描述问题中的物理系统。这是我们在上一章中所讨论的对称性所能发挥作用的地方。通过要求拉格朗日量在洛伦兹群的所有变换下不变，我们就能找到正确的拉格朗日量

²⁴ 实际上，作用量才应该是 Lorentz 不变的。但如果拉格朗日量满足这个条件，那作用量自然也是。

²⁵ 这些困难包括 Ostrogradski 不稳定性，即包含高阶导数的系统的能量没有下界，以至于系统中的所有态总会自发衰变到能量更低的态上去。这类系统中找不到稳定的状态。

²译注：对于受微元法荼毒的物竞生而言，求导才是用来干这件事的不同方法。

³译注：Non-trivial. Trivial 这个词常包含简单、弱智、无意义之义。

⁴译注：此处讨论疑有误，作者此前并没有说明积分中的时间是坐标时还是固有时

含高阶导数，这样我们必须知道更多的初始条件才能决定物体的运动。

有些人会宣称对理论所包含导数阶数的限制源于我们希望得到一个局域²⁶理论，但这个要求仅会排除掉那些无穷阶导数。一个非局域相互作用有如下形式²⁷

$$\Phi(x-h)\Phi(x) \quad (3.1)$$

即，时空中距离为 h 的两个点的场相互作用。利用 Taylor 展开我们有⁵

$$\Phi(x-h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \Phi(x) \Big|_{x=n} \right) \frac{(x-h)^k}{k!} \quad (3.2)$$

即包含无穷阶导数会导致一个非局域的理论。

另外一个限制是，要得到一个自由（无相互作用）场/粒子的理论，我们只能写到二次项。这意味着我们只会考虑²⁸

$$\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2$$

这样的项。例如，形如 $\Phi^2 \partial_\mu \Phi$ 的项是 Φ 的三阶项，因而不会被包含在我们自由理论的拉格朗日量中。

²⁶ 局域性是狭义相对论的基本假定，??已作阐述

²⁷ 我们将会讨论粒子的拉格朗日理论：寻求粒子的路径；也会讨论场的拉格朗日理论：寻求场函数 $\phi(x)$ 。这将是下一节的主题。

²⁸ 从另外一个角度来看，这再次表示我们只引入最低阶的非平凡项。我们随后就会看到，含 Φ^0 和 Φ^1 的项是平凡的，因此我们这次用的是 Φ 的最低阶非平凡项

⁵ 译注：此式有误