

---

# **Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik**

---

Sommersemester 2015

gelesen von

**Priv.-Doz. Dr. Thomas Beier**

*Technische Universität Dresden*

Version 19. April 2015

Lukas Körber

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

Dieses Skript wurde auf Basis der Mitschrift der Vorlesung *Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik* von Priv. Doz. Thomas Beier angefertigt und ist eine Vertiefung zur Vorlesung *Quantentheorie I* von Prof. Dr. Roland Ketzmerick an der Technischen Universität Dresden. Sie fand im April 2015 als Blockveranstaltung statt.

Dies ist also kein offizielles Skript des Vorlesenden.

# Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung der Quantenmechanik . . . . .	3
2	Literaturtipps . . . . .	3
2.1	Klassiker . . . . .	3
2.2	Spezialliteratur . . . . .	4
3	Hilberträume . . . . .	4
3.1	Quadratintegrale Funktionen . . . . .	6
3.2	Bemerkungen zur Norm . . . . .	7
3.3	Vollständigkeit und Orthonormalsysteme . . . . .	7
4	Operatoren . . . . .	11
4.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	12
4.2	Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	12
4.3	Unitäre Operatoren . . . . .	13
4.4	Kommutatoren . . . . .	13
5	Differenzialgleichungen der Physik . . . . .	14

## 1 Zusammenfassung der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik spielt sich in **Hilberträumen** ab. **Zustände** sind **Vektoren** eines solchen Raumes, auf die **Operatoren** wirken.

Physikalische Observablen werden durch **selbstadjungierte** Operatoren dargestellt. Beobachtete Werte dieser Observablen müssen **Eigenwerte** dieser Operatoren sein. Das impliziert, dass Messgrößen, wie Energie, Ort und Impuls **reell** sind.

## 2 Literaturtipps

### 2.1 Klassiker

1. George B. Arfken , Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Academic Press, 7. Ausgabe (31. Januar 2012)

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

2. Sadri Hassani. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer (2013)
3. K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Academic Press (März 2006)
4. Frederick W. Byron , Robert W. Fuller. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Publ Inc, revidierte Auflage (7. Dezember 1992)
5. Richard Courant , David Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik*. Springer, 4. Auflage (4. Oktober 1993)

### 2.2 Spezialliteratur

1. Siegfried Grossmann. *Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendung in der Physik*. AULA-Verlag, 4. Auflage (1988)
2. Arno Bohm . *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*. Springer; Auflage: Softcover reprint of the original 3rd ed. 1993 (4. Oktober 2013)
3. Siegfried Flügge , Hans Marschall. *Rechenmethoden der Quantentheorie: Elementare Quantenmechanik*. Springer; Auflage: 3. Aufl. 1965. Nachdruck (1. April 1976)
4. Philip McCord Morse , Herman Feshbach (Author). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math (1. Juni 1953)

## 3 Hilberträume

Ein Hilbertraum ist ein  $K$ -Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , in dem jede CAUCHY-Folge konvergiert.

Eine Abbildung  $h : V \times V \rightarrow K$  heißt für  $K = \mathbb{R}$  Bilinearform und für  $K = \mathbb{C}$  hermitesche Form, wenn sie für alle  $\varphi, \psi \in V$  und  $\alpha \in K$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $h(\varphi, \psi) = h^*(\psi, \varphi)$
- $h(\varphi, \alpha\psi) = \alpha h(\varphi, \psi)$
- $h(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = h(\varphi, \psi_1) + h(\varphi, \psi_2)$

### 3. Hilberträume

Ist  $h$  zusätzlich noch definit, gilt also

- $h(\varphi, \varphi) \geq 0$
- $h(\varphi, \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$

so nennt man  $h$  Skalarprodukt. Aus diesem kann eine Norm konstruiert werden durch

$$\|\cdot\|_h : V \rightarrow K : \varphi \mapsto \sqrt{h(\varphi, \varphi)}.$$

Eine Folge von  $\varphi_n$  heißt CAUCHY-Folge, falls es für  $m, n > N(\varepsilon)$

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Diese Folge ist konvergent, wenn für  $n > N(\varepsilon)$  gilt

$$\|\varphi_n - \Phi\| < \varepsilon,$$

wobei  $\Phi$  dann der Grenzwert der Folge ist. Ist dieser in  $V$  enthalten, so ist  $V$  vollständig.

**Beispiel:** Die Menge der auf dem Intervall  $[a, b]$  stetigen, komplexen Funktionen sei

$$\mathbb{F} := \{f(x) \mid f \text{ stetig auf } [a, b] \text{ und komplex.}\}.$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx \qquad \langle f \mid f \rangle = \int_a^b \|f(x)\|^2 dx \geq 0$$

Dieser Raum hat die Dimension  $\dim \mathbb{F} = \infty$ , denn er hat zum Beispiel auf  $[-\pi, \pi]$  mit  $\sin(nx)$  und  $\cos(nx)$  unendlich viele linear unabhängige Elemente.  $\mathbb{F}$  ist jedoch KEIN Hilbertraum, denn es gibt CAUCHY-Folgen in dieser Menge, die nicht gegen ein Element aus  $\mathbb{F}$  konvergieren. So zum Beispiel die Folge  $\{f\}_n$  mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : \quad \frac{1}{n} \leq x \leq b \\ (nx + 1)/2 & : \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : \quad a \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

die für alle  $n$  stetig ist. Sie konvergiert jedoch gegen die Heaviside'sche Sprungfunktion, die offensichtlich unstetig ist.

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Theta(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ \frac{1}{2} & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

### 3.1 Quadratintegrale Funktionen

Der Raum der auf dem Intervall  $[a, b]$  quadratintegrablen Funktionen  $L^2([a, b])$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_a^b \varphi^*(x) \psi(x) dx$$

ist tatsächlich ein Hilbertraum, wobei  $a, b = \pm\infty$  möglich ist. Die Eigenschaft, quadratintegrabel auf  $[a, b]$  zu sein, bedeutet, dass  $\langle \varphi | \varphi \rangle < \infty$  ist.

*Bemerkung:* Es ist auch Möglich, den Begriff quadratintegrabel bezüglich einer Gewichtungsfunktion  $w(x) > 0$  zu definieren. Man verwendet dafür das Skalarprodukt

$$\langle \varphi | \psi \rangle_w = \int_a^b \varphi^*(x) \psi(x) w(x) dx$$

und sagt dann "quadratintegrabel bezüglich  $w(x)$ ".

Es lässt sich zeigen, dass alle Hilberträume isomorph zum  $L_w^2([a, b])$  sind. Es gibt also eine bijektive Abbildung von einem beliebigen Hilbertraum in dem  $L_w^2([a, b])$  und insbesondere auf  $L_1^2([a, b]) = L^2([a, b])$ .

#### 3.2 Bemerkungen zur Norm

Jede Norm erfüllt für alle  $\varphi, \psi \in V$  und  $\alpha \in K$  die folgenden Eigenschaften:

- $\|\varphi\| \geq 0$
- $\|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$
- $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$  (Dreiecksungleichung)
- $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \cdot \|\varphi\|$

Für definite hermitesche Formen, also Skalarprodukte, kann man dieses Produkt auch durch die von ihm induzierte Norm ausdrücken.

$$h(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} [\|\varphi + \psi\|_h^2 - \|\varphi - \psi\|_h^2 + i\|i\varphi + \psi\|_h^2 - i\|i\varphi - \psi\|_h^2]$$

Man kann jedoch NICHT aus jeder Norm ein  $h$ -Skalarprodukt konstruieren. Damit das erhaltene  $h$  tatsächlich wieder ein Skalarprodukt ist, muss die **Parallelogrammgleichung** erfüllt sein:

$$\|\varphi + \psi\|_h^2 + \|\varphi - \psi\|_h^2 = 2\|\varphi\|_h^2 + 2\|\psi\|_h^2$$

Diese ist schon für die  $p$ -Norm

$$\|\cdot\|_p : V \rightarrow K : \varphi \mapsto \sqrt[p]{\sum |\varphi_i|^p}$$

für  $p \neq 2$  nicht mehr erfüllt.

Ein Hilbertraum ist also nichts anderes als ein Banachraum (normiert und vollständig), indem die zusätzlich noch die Parallelogrammgleichung gilt. Die Norm im Hilbertraum ist demnach stets von einem Skalarprodukt abgeleitet.

#### 3.3 Vollständigkeit und Orthonormalsysteme

Ein Hilbertraum ist separabel und vollständig.

Ein Vektorraum  $V$  heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare Menge  $M$  gibt, die Teilmenge von  $V$  ist und in diesem Raum dicht liegt. Das heißt

$$\forall \varphi \in V \quad \exists \varphi_M \in M \quad \text{mit} \quad \|\varphi - \varphi_M\| < \varepsilon.$$

Ein Vektorraum heißt weiterhin **vollständig**, wenn

$$\forall \{\varphi_m\} \subset M \text{ konvergent} \quad \exists \varphi \in V \quad \text{mit} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_m\| = 0.$$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

### Orthogonal-/Orthonormalsysteme

Die Menge  $\Phi := \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset V$ , wobei  $\Lambda$  eine beliebige Indexmenge ist, heißt Orthogonalsystem, wenn

$$\langle \varphi_\lambda \mid \varphi_\mu \rangle = 0 \quad \forall \lambda \neq \mu$$

erfüllt ist. Im Spezialfall

$$\langle \varphi_\lambda \mid \varphi_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

ist  $\Phi$  sogar ein Orthonormalsystem.

### Basen

Eine linear unabhängige Menge  $B := \{\psi_\lambda\} \subset V$  heißt, Basis, wenn jedes  $\varphi \in V$  durch

$$\varphi = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \psi_\lambda$$

darstellbar ist, wobei  $a_\lambda$  die Entwicklungskoeffizienten sind. Diese erhält man durch

$$\langle \psi_\mu \mid \varphi \rangle = \sum_{\lambda} a_\lambda \langle \psi_\mu \mid \psi_\lambda \rangle = \sum_{\lambda} a_\lambda \delta_{\mu\lambda} = a_\mu.$$

Im Falle einer überabzählbaren Basis geht die Summe natürlich in ein Integral über. Ist  $B$  ein Orthonormalsystem, nennt man es auch Orthonormalbasis.

### Vollständigkeitsrelation

Betrachten wir  $f(x) = \sum_{\lambda} a_\lambda \psi_\lambda(x)$  mit den Entwicklungskoeffizienten

$$a_\lambda = \int_a^b \psi_\lambda^*(y) f(y) dy = \langle \psi_\lambda \mid f \rangle.$$

Man kann  $f$  dann auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{\lambda} \int_a^b \psi_\lambda^*(y) f(y) \psi_\lambda(y) dy = \int_a^b f(y) \underbrace{\sum_{\lambda} \psi_\lambda^*(y) \psi_\lambda(x)}_{\delta(y-x)} dy = \int_a^b f(y) \delta(y-x) dy.$$

Ein Beispiel eines Orthonormalsystems ist die Fourierzerlegung von  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  auf  $[-\pi, \pi]$ . Das verwendete System ist

$$\tilde{\mathbb{F}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$$



### 3. Hilberträume

und die Zerlegung

$$f(x) = a_0 + \sum_n a_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_m b_m \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}}$$

mit

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} dx, \quad b_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Unter Verwendung der komplexen Exponentialfunktion

$$\mathbb{F} = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

lässt sich auch die etwas verbreitete Fourierdarstellung formulieren.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{mit} \quad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Auf einem allgemeinen Intervall  $[-a, a]$  hat man

$$c_n = \int_{-a}^a f(x) \frac{e^{-i\frac{\pi}{a}nx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{i\frac{\pi}{a}nx}}{\sqrt{2a}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(y) e^{i\frac{\pi}{a}n(x-y)} dy.$$

Was bei allgemeine Grenzen passiert, ist jedoch meistens nicht so interessant. Viel wichtiger ist, was bei  $a \rightarrow \infty$  passiert. Damit wird  $\frac{\pi}{a}$  nämlich klein,  $k = n\frac{\pi}{a}$  bleibt jedoch endlich, und die Summe geht zum Integral über.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \dots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ik(x-y)} dy$$

Das liefert uns die FOURIERSchen Integralformeln für kontinuierliche Basen mit Index  $k \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

Nun bleibt noch zu überprüfen, ob  $\mathbb{F}$  tatsächlich vollständig und orthonormal ist.

$$\left\langle \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'x} e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi}} dx = ?$$

Das entspricht genau der FOURIER-Transformation von  $\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}}$ . Das setzen wir nun einmal in die inverse Transformation ein.

$$\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i(k'-k)x}}{\sqrt{2\pi}}$$

Damit das erfüllt sein kann, muss aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k'-k)x}}{2\pi} dx = \delta(k' - k)$$

sein. Diese Beziehung verdeutlicht uns, dass im Falle kontinuierlicher Basen das KRONECKER-Delta  $\delta_{k'k}$  in der Orthonormalitätsrelation in eine Delta-Distribution  $\delta(k' - k)$  übergeht.

$$\sum \rightarrow \int \iff \delta_{k'k} \rightarrow \delta(k' - k)$$

Die Vollständigkeit stellt man hier folgendermaßen fest:

$$\begin{array}{llll} \text{diskret} & \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}^*(y) \psi_{\lambda}(x) & = & \delta(x - y) \\ \text{kontinuierlich} & \int_{\Lambda} \psi^*(y, \lambda) \psi(x, \lambda) d\lambda & = & \delta(x - y) \end{array}$$

Man stellt sofort fest, dass Orthogonalität und Vollständigkeit für kontinuierliche Basen dasselbe ist.

*Anmerkung:* Kanonisch konjugierte Variablen sind über FOURIER-Transformation verknüpft und genügen deshalb einer Unschärferelation.

### Impulsdarstellung

In der Quantenmechanik spielt der sogenannte Impulsoperator eine wichtige Rolle. In der Ortsdarstellung lautet er

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \partial_x^2.$$

## 4. Operatoren

Wir erinnern uns an die FOURIER-Transformation

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk,$$

was sich kurz schreiben lässt als

$$f = \int |k\rangle \langle k| f\rangle.$$

Das heißt

$$k \hat{=} \langle x | k \rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{und} \quad \langle k | x \rangle = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Wenden wir nun den Impulsoperator auf diese Funktionen an, so erhalten wir

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \hbar k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Das heißt eine Eigenwertgleichung. Die Exponentialfunktionen dieser Form sind also Eigenfunktionen des Impulsoperators mit den zugehörigen Impulswerten  $\hbar k$ .

## 4 Operatoren

Was wissen wir bis jetzt? Wir kennen die Raum  $L^2$ , vollständige Funktionensysteme und die FOURIER-Entwicklung. In der Quantenmechanik spielen Operatoren eine zentrale Rolle. Ein Operator  $\hat{A}$  ordnet einem Element aus einem Vektorraum  $V$  ein anderes Element auf  $V$  zu.

$$\hat{A} : V \rightarrow V : \varphi \rightarrow \hat{A}\varphi$$

Falls  $\psi, \varphi \in V$  und  $a, b \in K$  so heißen die Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  linear, falls

- $\hat{A}(a\varphi + b\psi) = a\hat{A}\varphi + b\hat{A}\psi$
- $(\hat{A} + \hat{B})\varphi = \hat{A}\varphi + \hat{B}\varphi$
- $\hat{A}\hat{B}\varphi = \hat{A}(\hat{B}\varphi)$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

Im  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  sind lineare Operatoren als Matrizen darstellbar. Dabei heißt  $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}$  der zu  $\hat{\mathbf{A}}$  inverse Operator, wenn

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{1}}$$

gilt. Es gibt natürlich auch einen 0-Operator und einen 1-Operator.

$$\hat{\mathbf{0}}\varphi = 0 \quad \hat{\mathbf{1}}\varphi = \varphi \quad \forall \varphi$$

### 4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Man nennt  $\varphi \in V$  (wobei  $\varphi$  nicht der Nullvektor ist) Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  eines Operators  $\hat{\mathbf{A}}$ , wenn

$$\hat{\mathbf{A}}\varphi = \lambda\varphi$$

gilt. Das heißt der Operator reproduziert den Vektor bis auf einen Faktor. Das bei ist auch  $\lambda = 0$  möglich. Es gibt auch Operatoren, für die kein Eigenvektor im angegebenen Raum existiert, so zum Beispiel  $\hat{\mathbf{A}} = x$ . Es gibt nämlich kein  $\varphi(x)$ , so dass

$$x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

für alle  $x$  möglich ist. Ein Beispiel für einen Operator, bei dem das aber funktioniert ist

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{d}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} e^{ikx} = ik e^{ikx}.$$

Die Funktion  $e^{ikx}$  ist also Eigenvektor zum Eigenwert  $ik$  von  $\frac{d}{dx}$

### 4.2 Selbstadjungierte Operatoren

Ein Operator heißt **selbstadjungiert**, wenn er  $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^\dagger$  erfüllt. Das heißt konkret

$$\begin{aligned} \mathbb{R}: \quad \hat{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}}^T \\ \mathbb{C}: \quad \hat{\mathbf{A}}^* &= \hat{\mathbf{A}}^T \end{aligned}$$

Solche Operatoren besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Sie haben NUR reelle Eigenwerte.
2. Eigenvektoren zur verschiedenen Eigenwerten  $\lambda$  und  $\mu$  sind orthogonal.

## 4. Operatoren

Das lässt sich leicht zeigen.

$$1.: \quad \lambda \langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \hat{A}\varphi \rangle = \langle \hat{A}\varphi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \lambda\varphi \rangle^* \implies \lambda = \lambda^*$$

$$2.: \quad \begin{aligned} \langle \psi | \hat{A}\varphi \rangle &= \lambda \langle \psi | \varphi \rangle \\ \langle \hat{A}\psi | \varphi \rangle &= \mu \langle \psi | \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\implies \lambda = \mu \quad \text{oder} \quad \langle \psi | \varphi \rangle = 0$$

Ist  $\{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine maximal große Menge von linear unabhängigen Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators, so sie auch im unendlichdimensionalen noch eine Basis.

### 4.3 Unitäre Operatoren

Unitäre Operatoren erhalten das Skalarprodukt und erfüllen damit

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}.$$

Da sie Längen und Winkel erhalten, kommen sie oft in Verbindung mit Drehimpulsen vor. Im reellen Fall heißen unitäre Operatoren auch orthogonal. Ein Beispiel für unitäre Operatoren sind die PAULischen Spinmatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen sind selbstadjungiert und unitär.

### 4.4 Kommutatoren

Bei Operatoren ist die Reihenfolge sehr wichtig. Im Allgemeinen ist  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ . Um dieses Problem zu behandeln, verwenden man den sogenannten Kommutator:

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

der im allgemeinen ungleich Null ist. Am Beispiel der PAULischen Spinmatrizen sieht der Kommutator folgendermaßen aus:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\sigma_z$$

$$[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$$

$$[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

Diese drei Gleichungen sind tatsächlich die eigentliche Definition der PAULI-Matrizen, denen eine ganze Reihe von Matrizen genügen. Die in 4.3 genannten sind nur spezielle Formen, die sogenannten kanonischen PAULI-Matrizen.

Ein anderes Beispiel zur Vertauschung von Operatoren findet man im Raum der quadratintegriblen Funktionen. Betrachten wir die Operatoren  $\hat{A} = x$  und  $\hat{B} = \frac{d}{dx}$ . Der Ausdruck

$$\left[ x, \frac{d}{dx} \right] = x \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} x =$$

ergibt jedoch zunächst wenig Sinn. Das liegt daran, dass man sich Operatoren immer angewendet auf Vektoren/Funktionen denken muss. Etwas einleuchtender wäre also

$$\left[ x, \frac{d}{dx} \right] f(x) = x \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} (x f(x)) = x \frac{d}{dx} f(x) - f(x) - x \frac{d}{dx} f(x) = -f(x)$$

Somit ist der obige Kommutator also

$$\left[ x, \frac{d}{dx} \right] = -\hat{1}.$$

## 5 Differenzialgleichungen der Physik

In der Physik kommen viele Differenzialgleichungen vor, die sich zum Teil sehr schwer lösen lassen. Eine Auswahl der wichtigsten Gleichungen sind:

$$\text{LAPLACE-Gleichung} \quad \Delta \psi(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{POISSON-Gleichung} \quad \epsilon_0 \Delta \psi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) \quad (2)$$

$$\text{HELMHOLTZ-Gleichung} \quad \Delta \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Diffusionsgleichung} \quad \Delta \psi(\vec{r}) - k^2 \psi(\vec{r}) = 0 \quad (4)$$

$$\text{SCHRÖDINGER-Gleichung} \quad \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) - E \psi(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

Die Gleichungen 1, 3, 4 und 5 sind alle von der Form

$$\Delta \psi(\vec{r}) + f(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + \tilde{k} \psi(\vec{r}) = 0.$$

Dafür gibt es ein gemeinsames Lösungsverfahren, solange  $f(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$  ist. Man geht dann in Kugelkoordinaten über und verwendet den LAPLACE-Operator in entsprechender Form:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

## 5. Differenzialgleichungen der Physik

So erhalten wir am Beispiel der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$0 = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(\vec{r}) - \frac{2mV(\vec{r})}{\hbar^2} \psi(\vec{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\vec{r})$$

Für eine bessere Lesbarkeit machen wir einen Separationsansatz und setzen  $\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$ .

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)Y(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) R(r)Y(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) - \frac{2mV(\vec{r})}{\hbar^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) + \frac{2mE}{\hbar^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi)$$

Um jetzt wieder etwas Ordnung zu schaffen, multiplizieren wir zunächst mit  $r^2$ .

$$0 = \color{red}{1} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)Y(\vartheta, \varphi) + \color{red}{1} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) R(r)Y(\vartheta, \varphi) + \color{red}{1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) - \frac{2mV(\vec{r})}{\hbar^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) \color{red}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) \color{red}{r^2}$$

Dann sortieren wir etwas um. Wir machen uns klar welcher Operator worauf wirkt.

$$0 = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) \right] Y(\vartheta, \varphi) + \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y(\vartheta, \varphi) \right] R(r) + \left[ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\vartheta, \varphi) \right] R(r) - \frac{2mV(\vec{r})}{\hbar^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} R(r)Y(\vartheta, \varphi) r^2$$

Nun dividieren das alles von links durch  $R(r)Y(\vartheta, \varphi)$  und nehmen dabei stillschweigend an, dass uns das ganze nicht um die Ohren fliegt.

$$0 = \frac{\color{red}{1}}{\color{red}{R(r)}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) \right] + \frac{\color{red}{1}}{\color{red}{Y(\vartheta, \varphi)}} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y(\vartheta, \varphi) \right] + \frac{\color{red}{1}}{\color{red}{Y(\vartheta, \varphi)}} \left[ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\vartheta, \varphi) \right] - \frac{2mr^2}{\hbar^2} V(\vec{r}) + \frac{2mr^2 E}{\hbar^2}$$

Schließlich holen wir die  $Y(\vartheta, \varphi)$ -Terme noch auf die andere Seite.

$$\frac{1}{R(r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) \right] - \frac{2mr^2}{\hbar^2} V(\vec{r}) + \frac{2mr^2 E}{\hbar^2} = -\frac{1}{Y(\vartheta, \varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y(\vartheta, \varphi) \right] - \frac{1}{Y(\vartheta, \varphi)} \left[ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\vartheta, \varphi) \right]$$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

Nun sehen wir, dass die beiden Seiten unabhängig voneinander denselben Wert haben. Sie müssen also beide konstant sein. Das können wir nutzen, um die beiden Seiten getrennt zu lösen. Wir setzen also jede Seite gleich  $\lambda$  und erhalten zwei Differenzialgleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) - \frac{2mr^2 V(r)}{\hbar^2} + \frac{2mr^2 E}{\hbar^2} - \lambda &= 0 \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\vartheta, \varphi) &= -\lambda Y(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

Wir wollen nun weiter separieren, indem wir  $Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$  setzen und die entsprechende Gleichung mit  $\sin^2 \vartheta / \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$  multiplizieren. Wir können dann wieder unter Beachtung der Operatoren entsprechend kürzen.

$$\frac{1}{\Theta(\vartheta)} \left[ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \Theta(\vartheta) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) + \lambda \sin^2 \vartheta = 0$$

Wir stellen um und können die beiden Seiten wieder gleich einer Konstanten  $\nu$  setzen.

$$\frac{1}{\Theta(\vartheta)} \left[ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \Theta(\vartheta) + \lambda \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) \equiv \nu$$

Nun sind  $\vartheta$  und  $\varphi$  getrennt und man erhält zwei weitere Gleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) + \nu \Phi(\varphi) &= 0 \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) + \left( \lambda - \frac{\nu}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist sehr leicht mit einem Exponentialansatz zu lösen.

$$\Phi(\varphi) = A e^{i\sqrt{\nu}\varphi} + B e^{-i\sqrt{\nu}\varphi}$$

Sollte  $\nu = 0$  sein, reduziert sich  $\Phi$  zu

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \implies B = 0.$$

Nun gibt es noch etwas wichtiges über  $\nu$  zu sagen. Wir hatten ganz am Anfang angenommen, dass das Potential  $V(\vec{r})$  kugelsymmetrisch ist. Das hat zur Folge, dass  $\nu$  nur bestimmte Werte annehmen kann, denn wenn man sich einmal um  $2\pi$  in  $\varphi$ -Richtung dreht, muss  $\Phi(\varphi)$  wieder denselben Wert annehmen. Das



## 5. Differenzialgleichungen der Physik

heißt, es muss  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$  sein. Damit ist  $\sqrt{v}$  notwendigerweise ganzzahlig. Wir setzen deshalb  $m = \pm\sqrt{v} \in \mathbb{Z}$ . Somit erhalten wir

$$\Phi_m(\varphi) = \text{const.} \cdot e^{im\varphi}.$$

Da diese Konstante frei wählbar ist, setzen wir sie so an, dass  $\Phi_m$  normiert ist.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_m | \Phi_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \Phi_m(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} ||\text{const.}||^2 e^{-im\varphi} e^{im\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} ||\text{const.}||^2 d\varphi = 2\pi ||\text{const.}||^2 \equiv 1 \\ \Rightarrow \text{const.} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch den Anteil von  $\vartheta$  lösen.

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) + \left( \lambda - \frac{v}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) = 0 \quad (\star)$$

Aus physikalischen Gründen muss  $v = m^2$  sein. Wir machen nun eine Koordinationstransformation, die gleich als sehr nützlich herausstellen wird.

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$$

Das setzen wir nun wieder in  $(\star)$  ein und übernehmen im nächsten Schritt  $\cos \vartheta$  als neue Variable und nennen sie  $x$ .

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \left( -\sin \vartheta \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \left( (1 - \cos^2 \vartheta) \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \right) \tilde{\Theta}(\cos \vartheta) + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - \cos^2 \vartheta} \right) \tilde{\Theta}(\cos \vartheta) = \\ &= \frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{d}{dx} \right) \tilde{\Theta}(x) + \left( \lambda - \frac{m^2}{(1 - x^2)} \right) \tilde{\Theta}(x) \end{aligned}$$

Das erinnert der Form nach sehr stark an die Legendre-Polynome.

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} P_l(x) = l(l+1) P_l(x)$$

Das ist fast genau das, was bereits dasteht, mit  $m = 0$  und  $\lambda = l(l+1)$ . Wir müssen also eine Eigenwertgleichung

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} P(x) = -\text{const.} \cdot P(x)$$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

lösen. Dazu überlegen wir uns zunächst erstmal den Definitionsbereich unserer Variablen  $x$ . Wir erinnern uns, dass  $x = \cos \vartheta$  ist und  $\vartheta$  von 0 bis  $2\pi$  läuft. Die Lösung muss also auf  $[-1, 1]$  liegen und darf dort möglichst keine Polstellen haben. Dazu wählen wir den Potenzreihenansatz

$$P(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+s} \quad \text{mit} \quad a_0 \neq 0$$

Der Parameter  $s$  soll hier ein mögliches Offset der Reihe verdeutlichen, wobei  $s \geq 0$  sein muss, um die Stetigkeit auf dem ganzen Intervall zu gewährleisten. Das ganze setzen wir nun oben ein.

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + C \right] P(x) = \\ &= \left[ \left(1-x^2\right) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + C \right] \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+s} = \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ a_{\lambda}(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-1} - a_{\lambda}(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-2+2} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_{\lambda}(\lambda+s)x^{\lambda+s-1+1} + Ca_{\lambda}x^{\lambda+s} \right] \end{aligned}$$

Um das nun alles wieder zusammenzubekommen, führen wir beim ersten Term eine Indexverschiebung mit  $\tilde{\lambda} = \lambda + 2$  durch.

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-2} &= \\ &= a_0 s(s-1)x^{s-2} + a_1(s+1)(1+s-1)x^{s-1} + \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_{\lambda}(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-2} = \\ &= a_0 s(s-1)x^{s-2} + a_1 s(s-1)x^{s-1} + \sum_{\tilde{\lambda}=0}^{\infty} a_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}+s+2)(\tilde{\lambda}+s+1)x^{\tilde{\lambda}+s} \end{aligned}$$

Jetzt ersetzen wir "ganz einfach"  $\tilde{\lambda}$  durch  $\lambda$  und setzen den ersten Term wieder in unsere ursprüngliche Potenzreihe ein!

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{\lambda+s} [(\lambda+s+2)(\lambda+1+1)a_{\lambda+2} - (\lambda+s)(s+s-1)a_{\lambda} - 2(\lambda+1)a_{\lambda} + \text{const.} \cdot a_{\lambda}] + \\ &\quad + a_0 s(s-1)x^{s-2} + a_1 s(s+1)x^{s-1} \end{aligned}$$

Das geht nur wenn der Ausdruck in eckigen Klammern für alle  $\lambda$  gleich Null ist. Außerdem muss erfüllt sein.

$$a_0 s(s-1) = 0 \quad (1)$$

$$a_1 s(s+1) = 0 \quad (2)$$

## 5. Differenzialgleichungen der Physik

Die Gleichung 1 ist erfüllt, wenn  $s = 0$  oder  $s = 1$  ist ( $a_0 \neq 0$  vorausgesetzt). Für die zweite Gleichung muss entweder  $s = 0$  oder  $a_1 = 0$  sein. Wir erinnern uns, dass  $s = -1$  aufgrund der Stetigkeitsanforderung auf  $[-1, 1]$  nicht zulässig ist. Somit haben wir die folgende Bedingung.

$$(s = 0 \quad \text{oder} \quad (s = 1, a_1 = 0)) \quad \text{und} \quad [...] = 0.$$

Jetzt bleibt noch zu klären, wann der geklammerte Ausdruck verschwindet. Das ist erfüllt, wenn

$$a_{\lambda+2} = a_\lambda \frac{(\lambda + s)(\lambda + s - 1 + 2) - \text{const.}}{(\lambda + s + 2)(\lambda + s + 1)}$$

Daraus wird ersichtlich, dass ein Koeffizient immer den übernächsten bestimmt. Es gibt also zwei unabhängige Lösungsketten bei  $s = 0$ , nämlich für gerade und für ungerade  $\lambda$ . Schauen wir uns diese Ketten einmal an.

$$\begin{array}{ll} a_0 = \text{beliebig} & a_1 = \text{beliebig} \\ a_2 = a_0 \left( -\frac{\text{const.}}{2} \right) & a_3 = a_1 \left( \frac{2 - \text{const.}}{6} \right) \\ a_4 = a_0 \left( -\frac{\text{const.}}{2} \right) \left( \frac{6 - \text{const.}}{12} \right) & a_5 = a_1 \left( \frac{2 - \text{const.}}{6} \right) \left( \frac{12 - \text{const.}}{10} \right) \end{array}$$

Im Fall von  $s = 1$  existiert bloß die gerade Kette, da  $a_1 = 0$  sein muss.

$$\begin{array}{l} a_0 = \text{beliebig} \\ a_2 = a_0 \left( \frac{2 - \text{const.}}{6} \right) \\ a_4 = a_0 \left( \frac{2 - \text{const.}}{6} \right) \left( \frac{12 - \text{const.}}{10} \right) \end{array}$$

Das sind aber die Koeffizienten der ungeraden Kette von  $s = 0$ . Damit gibt es letztendlich für  $s = 0$  und  $s = 1$  insgesamt bloß zwei Ketten.

$$\begin{array}{ll} \text{gerade:} & P(x) = a_0 \left( 1 - \frac{\text{const.}}{2} x^2 + \left( -\frac{\text{const.}}{2} \right) \left( \frac{6 - \text{const.}}{12} \right) x^4 + \dots \right) \\ \text{ungerade:} & P(x) = a_1 \left( x + \left( \frac{2 - \text{const.}}{6} \right) x^3 + \left( \frac{2 - \text{const.}}{6} \right) \left( \frac{12 - \text{const.}}{10} \right) x^5 + \dots \right) \end{array}$$

Natürlich sind  $a_0$  und  $a_1$  aufgrund der Homogenität der Differenzialgleichung frei wählbar. Die beiden gefundenen  $P(x)$  funktionieren auf jeden Fall solange, wir uns nur auf  $[-1, 1]$  bewegen, was aber natürlich durch  $P(\cos \vartheta)$  gegeben ist. Nun bleibt noch zu klären, ob die Reihen tatsächlich konvergieren.

$$\frac{a_{\lambda+2} x^2}{a_\lambda} = \frac{\lambda(\lambda + 1) - \text{const.}}{(\lambda + 2)(\lambda + 1)} x^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} x^2$$

## Mathematische Ergänzungen zur Quantenmechanik

Das konvergiert, solange  $|x| < 1$  ist. Über  $|x| = 1$  können wir so keine Aussage machen. An dieser Stelle lässt sich der GAUSSsche Konvergenztest anwenden: Demnach konvergiert eine Reihe  $\sum U_n$  mit  $U_n > 0$ , wenn es ein  $h > 1$  gibt, das

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2} \quad \text{mit} \quad B(n) < k < \infty$$

gewährleistet. Gibt es kein solches  $h$ , das heißt  $h \leq 1$ , so divergiert die Reihe. Mit  $\lambda = 2\mu$  und  $|x| = 1$  haben wir bei unseren Reihen für sehr große  $\mu$

$$\frac{a_\mu}{a_{\mu+1}} = \frac{(2\mu+1)(2\mu+2)}{2\mu(2\mu+1) - \text{const}} \stackrel{\mu \rightarrow \infty}{=} \frac{2\mu+2}{2\mu} = 1 + \frac{1}{\mu} + 0.$$

Diese Reihe divergiert also für  $|x| = 1$ . Der einzige Ausweg bleibt jetzt, aus dieser unendlichen Reihe durch eine Abbruchbedingung eine endliche zu machen. Das kriegen wir hin, wenn die Konstante die Form

$$\text{const.} = n(n+1) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

hat. Dann wäre nämlich  $a_{n+2} = 0$  und alle weiteren auch. Für gerade  $n$  bricht nur die gerade Reihe ab. Für ungerade  $n$  nur die ungerade Reihe. Es darf also keine gemischte Reihe geben. Entweder ist  $a_0 = 0$  oder  $a_1 = 0$ . So haben wir

$$n=0 \quad P_0(x) = 1$$

$$n=1 \quad P_1(x) = x$$

$$n=2 \quad P_2(x) = a_0 \left( 1 - \frac{6}{2} x^2 \right)$$

$$n=3 \quad P_3(x) = a_0 \left( x + \frac{2-13}{6} x^3 \right)$$

$$n=4 \quad P_4(x) = a_0 \left( 1 - \frac{20}{2} x^2 + \frac{20}{2} \frac{14}{12} x^4 \right)$$

Nach Konvention ist  $P_n(1) = 1 \quad \forall n$ . Daraus folgt

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (25x^4 - 30x^2 + 3)$$