

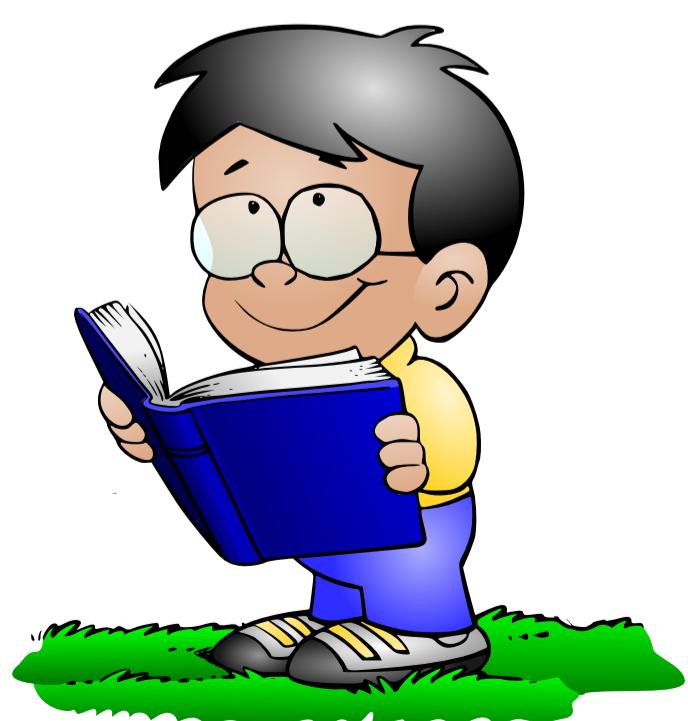
WIKING





ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

My school notes



Studijní notes

Wiking

Obsah

I. Lineární algebra	1
1. Základy lineární algebry	3
1.1. Matice	3
1.2. Determinanty	4
1.3. Vlastní čísla a vlastní vektory	5
1.4. Polynomy	7
1.5. Vektorové prostory se skalárním součinem	7
1.6. Vektory	8
Seznam literatury	8
II. Matematická analýza I	9
2. Historie matematické analýzy	11
Seznam literatury	11
3. Reálná a komplexní čísla	13
Seznam literatury	13
4. Limita a spojitost funkce	15
4.1. Reálná funkce	15
4.2. Limita funkce	18
4.3. Spojitost funkce	18
Seznam literatury	18
5. Derivace funkce	19
5.1. Základní věty diferenciálního počtu	19
Seznam literatury	21
6. Aplikace diferenciálního počtu	23
6.1. Průběh funkce	23
Seznam literatury	24
7. Primitivní funkce	27
7.1. Motivace	27
7.2. Tabulka neurčitých integrálů	28
7.3. Metody určení primitivní funkce	28
Seznam literatury	32
8. Určitý integrál	33
8.1. Motivace	33
8.2. Vlastnosti určitého integrálu	34
Seznam literatury	34
9. Řady	35
Seznam literatury	35
III. Obyčejné diferenciální rovnice	37
10. Elementární metody řešení diferenciálních rovnic	39
10.1. Diferenciální rovnice 1. řádu	39
Seznam literatury	39
IV. Numerické metody	41
11. Úvod do numerických metod	43
11.1. Úvodní slovo	43
11.2. Reprezentace čísel ve výpočetní technice	44

11.3. Chyby při numerických výpočtech	44
11.4. Řešení nelineárních rovnic	45
V. Fyzika	47
12. Historie fyziky	49
12.1. Hlavní etapy vývoje	49
13. Práce a potenciální energie	51
13.1. Potenciály a pole	51
14. Elektromagnetismus	53
14.1. Elektrické síly	53
14.2. Elektrická a magnetická pole	54
14.3. Charakteristiky vektorových polí	55
14.4. Zákony elektromagnetizmu	55
14.5. Co jsou pole?	58
14.6. Působení na dálku versus teorie pole	59
14.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice	59
15. Diferenciální počet vektorových polí	61
15.1. Chápání fyziky	61
15.2. Vektorový počet	62
15.3. Skalární a vektorová pole	62
15.4. Derivace polí - gradient	63
15.5. Operátor ∇	65
15.6. Operace s ∇	65
15.7. Diferenciální rovnice proudění tepla	65
15.8. Druhé derivace vektorových polí	66
15.9. Nástrahy	67
16. Integrální počet vektorových polí	69
16.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$	69
16.2. Tok vektorového pole	70
16.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta	71
16.4. Cirkulace vektorového pole	73
16.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta	74
16.6. Pole s nulovou rotací a divergencí	75
16.7. Shrnutí	75
16.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury	76
17. Elektrostatika	79
17.1. Statika	79
17.2. Coulombův zákon, superpozice	80
17.3. Elektrický potenciál	81
17.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$	82
17.5. Tok pole \vec{E}	83
17.6. Gaussův zákon. Divergence pole \vec{E}	84
17.7. Pole nabité koule	85
17.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy	86
18. Speciální teorie relativity	89
18.1. Princip relativity	89
18.2. Lorentzova transformace	90
19. Geometrická optika	91
19.1. Úvod	91
VI. Astrofyzika	93
20. Úvod	95
20.1. Historie astrofyziky	95
20.2. Základní vztahy	95

VII. Mechanika	97
21. Kinematika částice	99
21.1. Kinematický popis pohybu částice	99
22. Dynamika částice	105
VIII. Teorie elektromagnetického pole	107
23. Spojité matematické modely polí	109
23.1. Elektrický náboj	109
23.2. Elektromagnetické pole	109
23.3. Elektrostatické pole	111
23.4. Stacionární proudové pole	111
23.5. Stacionární magnetické pole	115
IX. Signály a soustavy	121
24. Číslicové signály - posloupnosti	123
24.1. Základní typy posloupností	123
24.2. Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	124
24.3. Základní operace s posloupností	124
25. Vlastnosti a popis lineárních systémů	127
25.1. Linearita, časová invariance a kauzalita	127
25.2. Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce	129
X. Teorie elektrických obvodů	133
26. Základy elektrických obvodů	135
26.1. Metody řešení lineárních elektrických obvodů	135
26.2. Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	135
26.3. Modifikovaná metoda uzlových napětí	136
26.4. Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	137
26.5. Napěťový dělič	138
27. Přechodné děje	139
27.1. Fyzikální podstata přechodných dějů	139
27.2. Přechodný jev kmitavého obvodu	141
28. Harmonické obvody	143
28.1. Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty	143
28.2. Obvody s nastavitelnými parametry	145
XI. Elektronické součástky	147
29. Základní zákony elektromagnetismu	149
29.1. Magnetická indukce	149
29.2. Zákon elektromagnetické indukce	149
29.3. Sprážený tok vzduchové cívky	152
29.4. Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem	152
30. Topologické vlastnosti elektromagnetického pole	155
30.1. Topologie diskrétních útvarů	156
31. Teorie transformátoru	157
31.1. Transformátor jako lineární pasivní dvojbran	157
31.2. Matematické modely lineárního transformátoru	158
31.3. Klasifikace a názvosloví transformátoru	158
31.4. Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou	158
31.5. Princip činnosti, základní konstrukční provedení	159
31.6. Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	159
31.7. Ztráty v reálném transformátoru	161
31.8. Rozptyl transformátoru	162
31.9. Cívky s feromagnetickým jádrem	162
31.10. Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	163

32. Optoelektronika	165
32.1. Optoelektronické systémy	165
XII. Senzory a akční členy	169
33. Snímače tepelných veličin	171
33.1. Základní pojmy	171
XIII. Analogové elektronické systémy	173
34. Počítačová simulace v elektrotechnice	175
34.1. Historie	175
34.2. Simulace a analýza v programu LTspice IV	175
35. Zesilovače	177
35.1. Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	177
36. Operační zesilovače	179
36.1. Úvod	179
36.2. Parametry operačního zesilovače	179
36.3. Ideální operační obvod	180
37. Konverze mezi digitálním a analogový signálem	183
37.1. Konverze mezi digitálním a analogový signálem	183
37.2. Principy A/D převodníků	186
37.3. Převod číslicového signálu na analogový	186
38. Kmitočtové filtry	189
38.1. Základní vlastnosti kmitočtových filtrů	189
38.2. Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky	191
38.3. Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů	191
38.4. Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu	191
38.5. Filtry RLC vyšších řádů	191
38.6. Filtry ARC 2. řádu	191
38.7. Filtry ARC vyšších řádů	192
38.8. Filtry se spínánými kapacitory	192
38.9. Zvážní typy a aplikace kmitočtových filtrů	192
XIV. Elektronické napájecí zdroje	193
39. Impulzně regulované napájecí zdroje	195
39.1. Úvod	195
39.2. Impulzní regulace ve výkonové elektronice	195
39.3. DC/DC měniče bez transformátoru	196
39.4. DC/DC měniče s transformátorem	198
39.5. Metody regulace spínaných zdrojů	204
39.6. Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů	205
XV. Číslicové elektronické systémy	209
40. Číslicové systémy a signály	211
40.1. Co je číslicový systém	211
40.2. Kombinační logické funkce	211
41. Číslicové součástky a technologie	215
41.1. Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	215
41.2. Bipolární digitální obvody	215
41.3. Unipolární digitální obvody	215
41.4. Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	216
XVI. Mikroprocesorová technika	221
42. Procesory AVR	223
42.1. AVR Architektura	223

43. ANSI-C pro mikrokontroléry	225
43.1. Stručný úvod	225
XVII Programovatelné logické obvody	227
44. Architektura	229
44.1. Typy struktur programovatelných logických obvodů	229
44.2. Dynamické parametry PLD	235
45. Jazyk VHDL	237
45.1. Návrh číslicového obvodu	237
45.2. Úvod	238
45.3. Základní vlastnosti jazyka VHDL	238
45.4. Logické úrovně	238
45.5. Souběžné příkazy	239
45.6. Sekvenční příkazy	239
45.7. Technologicky nezávislá část návrhu	239
45.8. Knihovna LPM	239
XVIII Elektromagnetická kompatibilita	243
46. Vlastnosti plošných spojů	245
XIX.C	247
47. Terminálový vstup a výstup	249
47.1. Hlavíčkový soubor stdio.h	249
47.2. Standardní vstup a výstup znaku	249
47.3. Standardní vstup a výstup řetězcu	250
47.4. Formátovaný standardní vstup a vystup	250
47.5. Souhrnné cvičení	250
48. Pointery	251
48.1. Základy práce s pointery	251
49. Preprocesor jazyka C	253
49.1. Připojení externích souborů	253
49.2. Definice maker	253
49.3. Podmíněný překlad	253
XX. ANSI/C++	255
50. Přehled jazyka C++	257
50.1. Objektově orientované programování	257
51. Úvod do tříd	263
51.1. Funkce konstruktor a destruktory	263
XXI. Elektrické měřicí systémy	267
52. LabView	269
52.1. Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView	269
52.2. Základní části virtuálního přístroje	270
52.3. Práce s grafy	270
XXII. Výkonová elektronika	273
53. Měniče s vnější komutací	275
53.1. Takt a komutace	275
54. Polovodičové součástky výkonové elektroniky	277
54.1. MOSFET tranzistory	277

55. Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů	279
55.1. Úvod	279
55.2. Výkonové tranzistory MOS	280
55.3. Tranzistory IGBT	280
55.4. Metody řízení spínacího procesu	280
55.5. Způsoby detekce nadproudu	280
XXII Elektrické přístroje	283
56. Teorie elektrického oblouku	285
56.1. Teorie spínacího oblouku	285
XXI Železniční zabezpečovací technika	289
57. Úvod	291
57.1. Klasifikace poruch	291
58. Bezpečnost a spolehlivost zabezpečovacích systémů	293
58.1. Spolehlivost	293
58.2. Bezpečnost	293
58.3. Integrita bezpečnosti	294

Část I.

Lineární algebra

1. Základy lineární algebry

Obsah

1.1. Maticy	3
1.1.1. Maticová algebra	3
1.1.2. Označení prvků matice	3
1.2. Determinanty	4
1.2.1. Permutace	4
1.3. Vlastní čísla a vlastní vektory	5
1.3.1. Motivace	5
1.4. Polynomy	7
1.4.1. Rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky	7
1.5. Vektorové prostory se skalárním součinem	7
1.5.1. Ortogonální doplnky	7
1.6. Vektory	8
Seznam literatury	8

1.1. Matice

Definice 1.1.1. Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici (m, n) . Jestliže každé uspořádané dvojici $(m, n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ přiřadíme prvek $a_{i,j} \in \mathcal{R}$ obdržíme reálnou **matici** typu (m, n) nad \mathcal{R} . Čísla jsou indexy, i je řádkový a j je sloupcový index.

Matici zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

která má právě mn prvků (a_{ij}) uspořádaných do m řádků a n sloupců.
Stručně pišeme $A = (a_{ij})$

Příklad 1.1.1. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice velikosti 4×4 . Prvek matice a_{23} je 2.

1.1.1. Maticová algebra

Definice 1.1.2. Součinem matice $A \in \mathcal{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathcal{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathcal{R}_{m,p}$ pro kterou platí:

$$C = AB; C = (c_{ij}); c_{ij} = \sum_n^{k=1} a_{ik} b_{kj}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p. \quad (1.1.2)$$

Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B . Obrázek 1.1.1 demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobením druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku c_{ij} (viz 1.1.2).

1.1.2. Označení prvků matice

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **řádek** a **sloupec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci matice A se obvykle značí a_{ij} . Potom i -tý řádek matice obsahuje vodorovnou n -tici prvků $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a j -tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, kde $j = 1, 2, \dots, n$.

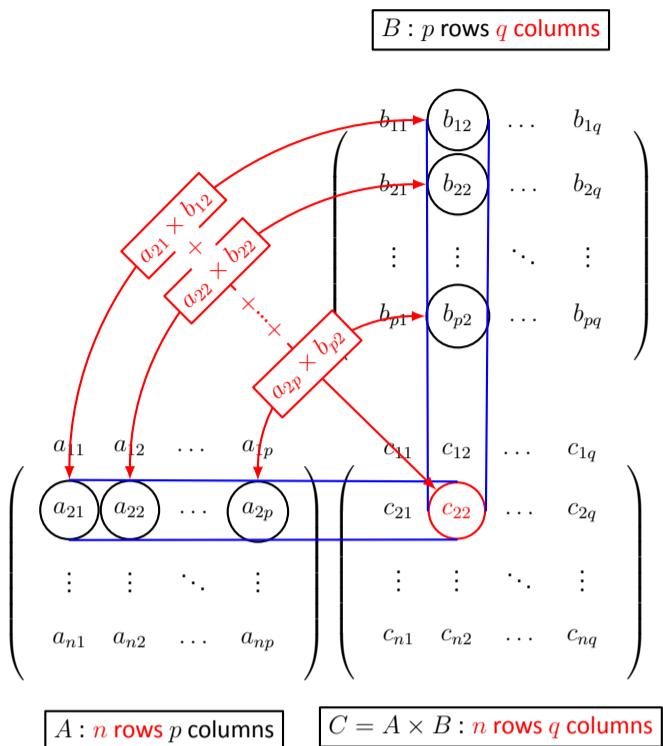
V tabulce 1.1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální¹, jednotkové², nulové, transponované a symetrické.

Matice téhož typu (m, n) nad \mathbb{R} budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

Definice 1.1.3. (Rovnost matic): Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je rovna matici $\mathbf{B} = (b_{kl})$, jsou-li matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě **rovnají**, tj.

¹Prvky a_{ii} kde $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice \mathbf{D} je typu (m, m) , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

²Jestliže $m = n$, pak mluvíme o čtvercové matici řádu m .



Obrázek 1.1.1.: Násobení matic - 1. krok

Matice	Zápis
řádková	$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
sloupcová	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
diagonální	$a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
jednotková	$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
nulová	$\mathbf{0} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \forall i, j$
transponovaná	$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
symetrická	$\mathbf{S} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

Tabulka 1.1.1.: Speciální typy matic

$\mathbf{A} \in \Re_{m,n}, \mathbf{B} \in \Re_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$

1.2. Determinanty

Abychom mohli nadefinovat determinant, budeme muset vědět, jak vypočítat permutaci entice, respektive znaménko permutace.

1.2.1. Permutace

Definice 1.2.1. Nechť \mathbf{M} je libovolná konečná množina. Permutací množiny M nazýváme zobrazení π množiny \mathbf{M} na sebe.

Příklad 1.2.1. Permutace π množiny $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ je např. zobrazení π , definované předpisem:

$$\pi(a) = c, \pi(b) = d, \pi(c) = b, \pi(d) = a, \quad (1.2.1)$$

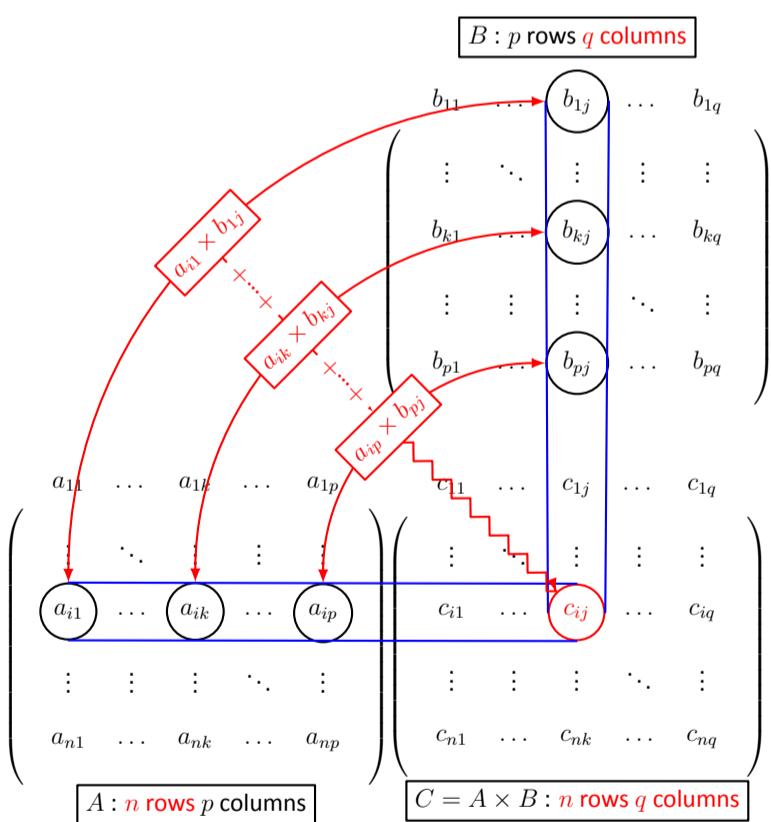
Místo tohoto zápisu se však používá přehlednější zápis ve tvaru matice typu $(2, 4)$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

kde v prvním řádku jsou vypsány všechny prvky množiny \mathbf{M} (v libovolném pořadí) a ve druhém řádku je pod každým prvkem zapsán jeho obraz v permutaci. Tutož permutaci však můžeme zapsat ve tvaru matice několika různými způsoby. Například mohou být zapsány takto:

$$\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & a & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \text{apod.} \quad (1.2.3)$$

Zřejmě všechny čtyři uvedené zápisys permutace rov. 1.2.2 ve tvaru



Obrázek 1.1.2.: násobení matic - 2. krok

matice se liší navzájem pouze pořadím sloupců. Aby bylo možné zapsat každou permutaci množiny \mathbf{M} ve tvaru rov. 1.2.2 jediným způsobem, je nutné zvolit pevné pořadí prvků množiny \mathbf{M} a v zápisu permutace uvádět prvky matice \mathbf{M} v prvním řádku v tomto pořadí. Avšak známe-li toto pořadí prvků množiny \mathbf{M} , je pak obvykle zbytečné jej v zápisu permutace uvádět, ale stačí uvést pouze pořadí obrazů, tj. druhý řádek. Zvolíme-li např. v naší množině \mathbf{M} pevné pořadí prvků $\{a, b, c, d\}$, pak permutaci rov. 1.2.1 zapíšeme jako uspořádanou čtveřici $\{c, d, b, a\}$.

Definice 1.2.2. Když vytváříme uspořádanou n -tici navzájem různých prvků n -prvkové množiny \mathbf{M} , přiřazujeme každému prvku množiny \mathbf{M} právě jedno přirozené číslo, index příslušného prvku, z množiny prvních n přirozených čísel.

$$\pi = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (1.2.4)$$

Proto každé permutaci uspořádané n -tice prvků množiny \mathbf{M} odpovídá jednoznačně permutace příslušných indexů tj. permutace množiny 1.2.4 z definice 1.2.2. Stačí se tedy omezit při vyšetřování permutací n -prvkové množin na vyšetřování permutací množiny 1.2.4. Permutace π množiny 1.2.4 budeme zapisovat jako uspořádané n -tice

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$$

, kde $\pi(i)$ je číslo z množiny 1.2.4, které permutace π přiřazuje číslu i .

Příklad 1.2.2. *Spočítejme celkový počet permutací množiny.* V každé uspořádané n -tici může být na prvním místě kterákoli z n cifer, na druhém místě kterákoli ze zbývajících $n - 1$ cifer (kromě té, která je na prvním místě), na třetím místě každá ze zbývajících $n - 2$ cifer atd. Je tedy celkový počet všech permutací n -prvkové množiny $n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1$. Toto číslo se zapisuje pomocí symbolu $n!$ (čti ***n-faktoriál***).

Definice 1.2.3. *Inverze v permutaci:* Inverzí v permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

1.3. Vlastní čísla a vlastní vektory

1.3.1. Motivace

Poznámka: Je-li $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární zobrazení z prostoru \mathcal{V} do prostoru \mathcal{V} (nikdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít takovou bázi prostoru \mathcal{V} , že je matice zobrazení \mathbf{A} v této bázi co nejjednodušší, např. má následující strukturu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & A_k \end{pmatrix},$$

kde A_k jsou čtvercové matice malého řádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde A_k jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definice 1.3.1. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ (matice je čtvercová řádu n).

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jestliže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (1.3.1)$$

pro jisté komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{u} \neq \Theta$, potom číslo λ nazýváme **vlastním číslem** matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{u} **vlastním vektorem** příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme **spektrem matice** \mathbf{A} . Pokud rov. 1.3.1 rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

můžeme ji rovněž psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

Poznámka: U vlastních čísel studium pouze reálných matic ztrácí smysl, protože i reálná matice může mít komplexní vlastní čísla. Proto se uvažuje obecná komplexní matice.

Poznámka: Podmínka existence nenulového vektoru $\mathbf{u} = \Theta$ v definici vlastního čísla je nezbytná: kdyby bylo připuštěno i $\mathbf{u} = \emptyset$, potom by každé komplexní číslo bylo vlastním číslem a definice by ztratila smysl.

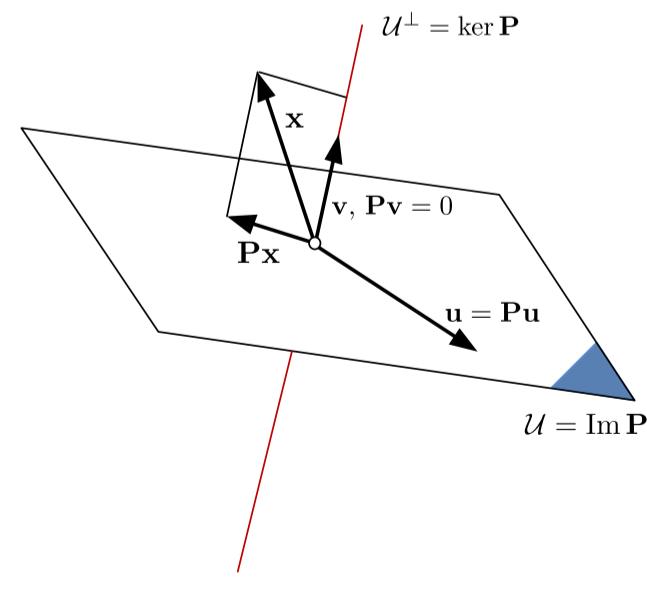
Poznámka: Odpovídá-li matice \mathbf{A} matici nějakého zobrazení \mathcal{A} , pak každý nenulový vektor z jádra zobrazení $\ker \mathcal{A}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu \emptyset . Je-li $\ker \mathcal{A} = \{\Theta\}$ (je-li matice \mathbf{A} regulární), pak \emptyset není vlastním číslem matice \mathbf{A} .

Příklad 1.3.1. Je-li \mathbf{P} matice ortogonální projekce v prostoru \mathbb{R}^3 na nějaký podprostor \mathcal{U} (\mathcal{U} je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, všechny vektory z \mathcal{U} (s výjimkou nulového vektoru Θ) jsou vlastními vektory matice \mathbf{P} příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor \mathcal{U}^\perp je roven jádru projekce (nulovému prostoru matice \mathbf{P}), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku \mathcal{U} (s výjimkou Θ) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.

Soustava rov. 1.3.3 je **homogenní** a stručně ji můžeme zapsat

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (1.3.4)$$

Homogenní soustava má netriviální řešení, právě když je determinant



Obrázek 1.3.1.

matice soustavy rovnou nule, tj. v případě soustavy rov. 1.3.3, resp. rov. 1.3.4 platí

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \mathbf{0} \quad (1.3.5)$$

Determinant $A(\lambda) = |A - \lambda I|$ nazýváme **charakteristický polynom** matice A - jedná se o polynom stupně n v proměnné λ , který má v oboru komplexních čísel n kořenů. Rovnici $A(\lambda) = 0$ nazýváme **charakteristická rovnice matice A** - jejími kořeny jsou **charakteristické hodnoty** (resp. **vlastní čísla**) **matice A** .

Příklad 1.3.2. Určete spektrum matice a její spektrální poloměr následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Spektrum matice je množina všech jejích vlastních čísel. Spektrální poloměr je maximum z absolutních hodnot vlastních čísel. Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -3 - \lambda & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$(2 - \lambda) \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)^2(-3 - \lambda) + 1.25(2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) = 0$$

$$(2 - \lambda)[(2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 1.25 + 6] = 0$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1.25) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -0.5 + i, \quad \lambda_3 = -0.5 - i$$

- Spektrum matice \mathbf{A} je $\sigma(\mathbf{A}) = \{2, -0.5 + i, -0.5 - i\}$.
- Spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| = 2$.



Příklad 1.3.3. Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Vlastní vektory \mathbf{x}_i odpovídající vlastním číslům λ_i , jsou řešením homogenní soustavy rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$.

- Vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0.5 \\ -3.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) - \frac{7}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + \frac{9}{4} = 0$$

$$\lambda_1 = 4.5, \quad \lambda_2 = 0.5$$

- Vlastní čísla matice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$(3 - \lambda)(4 - \lambda) + \frac{5}{2} = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + \frac{29}{2} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{7+3i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7-3i}{2}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = 4.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 - 4.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4 - 4.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3.5 & 0.5 \\ -3.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_2 = 0.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 - 0.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4 - 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 3.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = \frac{7+3i}{2}$: $(\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 - \frac{7+3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7+3i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -(1-3i) \\ 5 & (1-3i) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{B} pro $\lambda_2 = \frac{7-3i}{2}$: $(\mathbf{B} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 - \frac{7-3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7-3i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -(1+3i) \\ 5 & (1+3i) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0$$

```

1 % example:
2 % Determine the spectrum of a matrix and its spectral
   % radius:
3 % write the matrix A
4 A = [2 2 0; -3 -3 5; 0 -0.25 2]
5 % solutions:
6 % d = eig(A) Returns the vector of the matrix's own
   % numbers.
7 vlastni_cisla = eig(A)
8 spektralni_polomer = max(abs(vlastni_cisla))
9 =====
10 % example:
11 % Specify your own numbers and corresponding own vectors

```

```

12 % of the following matrices:
13 A1 = [1 0.5; 3.5 4]
14 A2 = [3 -1; 2.5 4]
15 % solutions:
16 [vl_vektory_mA1 ,vl_cisla_mA1] = eig(A1)
17 [vl_vektory_mA2 ,vl_cisla_mA2] = eig(A2)
18 % notes:
19 % vlastni cisla jsou na diagonale
20 % 1. sloupec vl_vektoru odpoveda vl_cislu v 1. sloupce

```

Výpis 1.1: Výpis programu pro ověření výpočtu vlastních čísel matic programem Matlab.

Příklad 1.3.4. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$, kde \mathbf{A} je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: (z předchozího příkladu víme, že $\lambda_1 = 4.5, \lambda_2 = 0.5$) a \mathbf{I} jednotková matice. Označme symbolem λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a nechť \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor. Pak platí:

- Matice \mathbf{A}^2 má vlastní čísla rovna λ^2 .
- Matice $4\mathbf{A}$ má vlastní čísla rovna 4λ .
- Matice $9\mathbf{A}^{-1}$ má vlastní čísla rovna $\frac{9}{\lambda}$.

Matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$ má vlastní čísla ve tvaru $\lambda^2 - 4\lambda + \frac{9}{\lambda} - 1$, vlastní vektory jsou stejné jako vlastní vektory odpovídající vlastním číslům matice \mathbf{A} . Tedy:

$$\sigma(\mathbf{B}) = \left\{ 4.5^2 - 4 \cdot 4.5 + \frac{9}{4.5} - 1, \quad 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + \frac{9}{0.5} - 1 \right\} = \{3.25, 15.25\}$$

Definice 1.3.2. Rovnost dvou polynomů: Řekneme, že dva polynomy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 + b_0$ stupňů n a m se sobě **rovnají** právě tehdy, když $m = n$ a $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_{n-1} = b_{m-1}, a_n = b_m$. V tomto případě také říkáme, že mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou **totožné**.

Věta 1.3.1. Jestliže mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou dva polynomy stupně n tého a jestliže pro $n+1$ různých reálných nebo komplexních čísel x platí $f(x) = g(x)$, potom jsou polynomy **totožné**.

1.4. Polynomy

1.4.1. Rozklad rye racionální funkce na parciální zlomky

Příklad 1.4.1. Rozložte na parciální zlomky lomenou racionální funkci

$$f(x) : y = \frac{7x+8}{x^2+x-2}$$

Nejprve vypočteme nulové body jmenovatele:

$$x^2 + px + q = (x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv \rightarrow p = -(u+v), \quad q = uv$$

Kořenové činitele $x^2 + x - 2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ zvolíme za jmenovatele parciálních zlomků a rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{7x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

kde A, B jsou neznámé konstanty. Tyto konstanty určíme tak, aby rozklad platil pro každé $x \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$. Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost dvou polynomů

$$7x+8 = (A+B)x + 2A - B$$

Podle 1.3.1 se musí rovnat koeficienty u x a absolutní členy obou stran poslední rovnice \Rightarrow dostaneme soustavu rovnic pro určení A a B ve tvaru:

$$7 = A + B \quad (1.4.1)$$

$$8 = 2A - B$$

$$A = 5, \quad B = 2$$

Postup, který jsme užili, nazýváme **Metodou neurčitých koeficientů**.

Pozn: Pro určení koeficientů A, B se užívají také jiné postupy, např. dosazování kořenů jmenovatele, která je výhodná zejména v případech, kdy jmenovatel lomené racionální funkce má jednoduché kořeny. Postupujeme tak, že rov. 1.4.1 násobíme součinem kořenových činitelů $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ a dostaneme rovnici

$$7x + 8 = A(x+2) + B(x-1)$$

pro určení koeficientů A, B dosazováním kořenů.

$$\begin{aligned} x = -2 \rightarrow & \quad -14 + 8 = B(-2-1) \rightarrow B = 2 \\ x = +1 \rightarrow & \quad +7 + 8 = A(1+2) \rightarrow A = 5 \end{aligned}$$

1.5. Vektorové prostory se skalárním součinem

1.5.1. Ortogonální doplnky

Nechť U je podprostor vektorového prostoru V . Ortogonální doplněk U^\perp obsahuje všechny vektory, které jsou kolmé ke každému vektoru z U , neboli

$$\forall \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

což lze vyjádřit pomocí skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ortogonální doplněk U^\perp k podprostoru $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ tedy hledáme jako řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} \vec{u}_1 & 0 \\ \cdots & \vdots \\ \vec{u}_k & 0 \end{array} \right),$$

nuly na pravé straně při výpočtu zpravidla vymezují. Připomeňme také vztah

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \quad (1.5.1)$$

Příklad 1.5.1. Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle (1, -3, 2), (2, 1, 5) \rangle^\perp$$

(Zdroj: [Moš07, s. 3])

Řešení: Hledáme vektor (x, y, z) , jehož skalární součin je se zadánými vektory roven nule. Budeme tedy řešit (úpravou na Gaussův tvar pomocí elementárních úprav) homogenní soustavu rovnic zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odtud dostáváme

$$z = \alpha, \quad 7y + z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}\alpha, \quad x + \frac{3}{7}\alpha + 2\alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{17}{7}\alpha$$

neboli

$$(x, y, z) = \alpha \left(-\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right) = \alpha = (17, 1, -7).$$

V dalších příkladech budeme nuly na pravé straně soustavy vymezovat a upravovat na výhodnější tvar

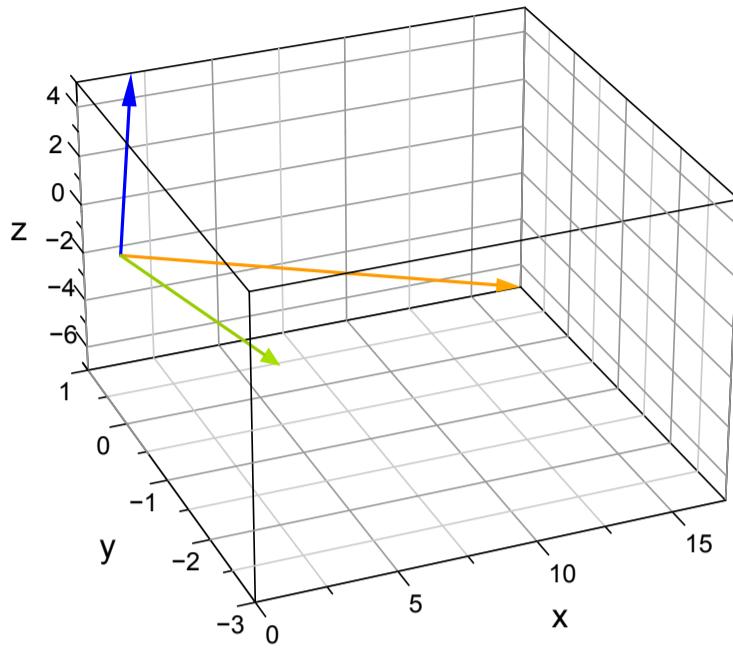
$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

Odtud již snadno zjistíme, že vektor $(x, 1, -7)$ jistě vyhovuje druhé rovnici.

Dosadíme-li ho do první rovnice, dostaneme $7x + 17 \cdot (-7) = 0$ a $x = 17$.

Hledaný ortogonální doplněk je tedy lineární obal

$$\langle(17, 1, -7)\rangle^\perp.$$



Obrázek 1.5.1.: Vizualizace vektorového prostoru a jeho ortogonálního doplňku

pomocí sw MatLab - MuPAD příkazem:

```
plot(plot::Arrow3d([1,-3,2]),plot::Arrow3d([2,1,5]),
plot::Arrow3d([17,1,-7]))
```

Výsledek předchozího příkladu 1.5.1 lze interpretovat tak, že jsme našli všechny vektory, které jsou kolmé na rovinu určenou vektory ze zadání. Rovina je útvar dvojrozměrný a protože prostor všech vektorů je trojrozměrný, musí nutně mít podprostor ortogonálních vektorů ve shodě se vztahem 1.5.1 pouze jednu dimenzi. Vše je dobře patrné z obr. 1.5.1

1.6. Vektory

Zadejte složky vektoru \vec{a} :

$$\vec{a} = \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}$$

a vektoru \vec{b} :

$$\vec{b} = \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}$$

Operace s vektory:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \\ \theta &= \quad {}^\circ \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}\end{aligned}$$

Seznam literatury

- [Moš07] F. Mošna. "Řešené příklady z Matematiky III". In: XXX (Oct. 2007). příklady (cit. on p. 7).

Část II.

Matematická analýza I

2. Historie matematické analýzy

Obsah

Seznam literatury	11
-----------------------------	----

Analýza jako nezávislý předmět byla vytvořena v 17. stol. během vědecké revoluce. Kepler, Galilei, Descartes, Fermat, Huygens, Newton a Leibniz, když zmíníme jen několik důležitých jmen těch, kteří přispěli k jejímu vzniku. Otázky z mechaniky, optiky a astronomie hrály roli v jejím raném období, tak jako vnitřní problémy matematiky, jako výpočet obsahů, objemů a analýza komplikovaných křivek. Pohyb po zakřivených drahách působením proměnných sil, které se staly předmětem důkladného zájmu po studiu volně padajících těles Galilea, vedl k počátečnímu úspěchu. Z velké rozmanitosti snah, které se objevily na konci 17. stol. v práci Newtona a Leibnize, se zrodila nová matematická disciplína, jejíž některé poznatky jsou v těchto studijních zápisích.

Základní myšlenka použití diferenciálních rovnic k získání pohledu na globální chování proměnných kvantit z jejich (infinitezimálních) změn prokázala základní a plodné výsledky daleko za hranicemi matematiky a fyzika a formovala náš souhrnný vědecký pohled na svět, zvláště na představu o kauzalitě. Na konci 18. stol., vskutku, největší vědci došli ke shodě, že procesy v přírodě (a společnosti) jsou determinovány a podřízeny zákonům, které mohou být popsány v podobě diferenciálních rovnic. Laplace, tento mistr matematické fyziky, naznačil obraz nějaké fiktivní vševedoucí inteligence, užívající úplhou znalost zákonů a stavu světa v daný časový okamžik, by mohla předpovídat další vývoj světa navždy a hned. Myšlenka *přírodních zákonů* byla kmotrem při vytvoření matematického pojmu funkce a naopak nebyla by to myšlenka nikdy tak vlivná, kdyby matematická analýza nevyvíjela úspěšné metody pro výzkum funkčních závislostí.

3. Reálná a komplexní čísla

Obsah

Seznam literatury	13
---------------------------------------------	----

4. Limita a spojitost funkce

Obsah

4.1. Reálná funkce	15
4.1.1. Pojem funkce	15
4.1.2. Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce	15
4.1.3. Některé zvláštní vlastnosti funkcí	16
4.1.4. Operace s funkcemi. Uspořádání	18
4.1.5. Elementární funkce	18
4.1.6. Zobrazení v jiných strukturách	18
4.1.7. Cvičení	18
4.2. Limita funkce	18
4.3. SPOJITOST funkce	18
Seznam literatury	18

4.1. Reálná funkce

4.1.1. Pojem funkce

4.1.2. Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce

Každé funkci můžeme přiřadit její graf. **Grafem funkce** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, jejíž souřadnice x , y v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovuje rovnice

$$y = f(x). \quad (4.1.1)$$

Grafem funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné "představy". Grafy některých funkcí jsou "křivky" (intuitivním smyslu tohoto slova). Avšak u některých funkcí názorná představa grafu selhává. Vezmeme-li např. Dirichletovu funkci z odst. **, snadno zjistíme, že její graf nemůžeme sestrojit (byly by to "dvě rovnoběžné přímky $y = 0$ a $y = 1$ s nekonečným množstvím mezer")

Zadat funkci znamená udat její definiční obor a "zobrazovací předpis", tj. pravidlo (formulované slovně či v používaném matematickém jazyku), podle něhož můžeme jednoznačným způsobem rozhodnout, jaká funkční hodnota odpovídá libovolně zvolenému číslu z definičního oboru. Definičním oborem bývá často interval nebo sjednocení intervalů. Není-li definiční obor udán, rozumíme jím množinu všech reálných čísel, pro něž je příslušný předpis definován. Tuto množinu nazýváme **přirozeným (též maximálním) definičním oborem funkce**. Je to tzv. *existenční obor* výrazu, jímž je funkce definována [BMR89, s. 84].

Například funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, můžeme vyjádřit bez udání definičního oboru \mathbb{R} vztahem

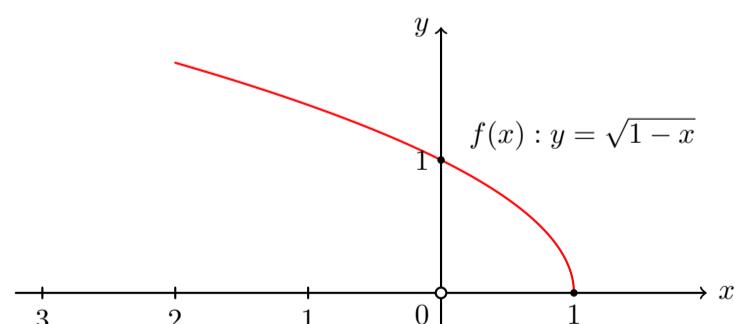
$$f : y = x^2,$$

neboť předpis $y = x^2$ má smysl pro každé reálné číslo x . Avšak u funkce $g : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, je nutné v zápisu funkce definiční obor $\langle 0, 1 \rangle$ uvést, píšeme tedy

$$g : y = x^2, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zobrazovací předpis, kterým je funkce zadána, může být rozmanitý. Nejčastěji a pro účely matematické analýzy nevhodnější je *analytické zadání vzorcem*, tj. rovnicí tvaru $y = f(x)$ nebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru. Přitom v rovnici $y = f(x)$ je na pravé straně nějaký správně definovaný výraz obsahující nejméně jednu proměnnou x a nabývající jednoznačné hodnoty pro danou hodnotu proměnné x .

Příklad 4.1.1. Vzorcem $f(x) = \sqrt{1-x}$ je dáná funkce, jejímž přirozeným oborem je interval $(-\infty, 1]$ (uvažme, že výraz $\sqrt{1-x}$ je definován v reálném oboru, je-li $1-x \geq 0$). Graf této funkce je část paraboly, jejíž osou je osa x , viz obr. 4.1.1.



Obrázek 4.1.1.: Graf funkce $y = \sqrt{1-x}$ je část paraboly, jejíž osou je osa x

Příklad 4.1.2. Funkce je dána vzorcem

$$f(x) : y = |x|.$$

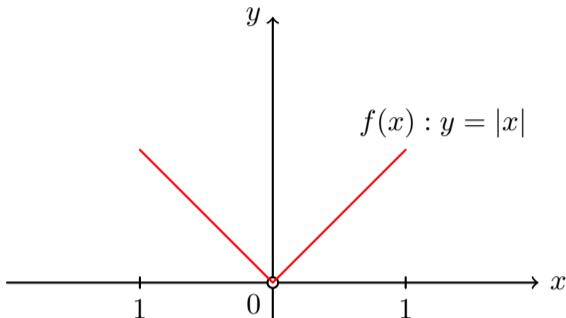
Přirozeným definičním oborem této funkce je množina \mathbb{R} . Táž funkce může být dána i vzorcem

$$f(x) : y = \sqrt{x},$$

nebo dvěma rovnicemi

$$f(x) : y = \begin{cases} x & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

což je zřejmé, uvědomíme-li si jak je definována absolutní hodnota. Graf funkce je na obr. 4.1.2.



Obrázek 4.1.2.: Graf funkce $y = |x|$

Funkce může být analyticky zadána i jinak než vzorcem $y = f(x)$. časté je **parametrické vyjadřování**, tj. vyjádření dvojicí rovnic

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J, \quad (4.1.2)$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině J (J bývá obvykle interval). Proměnná t se nazývá **parametr**: má zde pomocný význam. Zajímá nás totiž vztah mezi x a y . Rovnice 4.1.2 definuje relaci $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

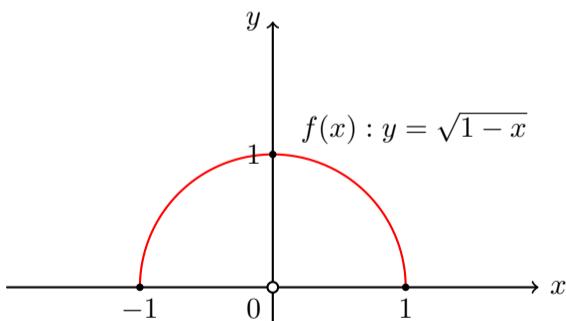
$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{existuje } t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t), y = \psi(t)\}. \quad (4.1.3)$$

Tato relace může být za určitých podmínek jednoznačná tj. je funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} . V tomto případě říkáme, že funkce f je **definována parametricky rovnicemi** 4.1.2

Příklad 4.1.3. Rovnice $x = \cos t, y = \sin t \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$, definují parametricky funkci

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (4.1.4)$$

jejíž grafem je polokružnice, ležící v horní polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$.



Obrázek 4.1.3.: Graf funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ je polokružnice

Blíže se parametrickým zadáním funkce budeme zabívat v kapitole 6 (Aplikace diferenciálního počtu).

Funkce může být někdy zadána též rovnicí tvaru

$$F(x, y) = 0. \quad (4.1.5)$$

Přitom F je funkce dvou proměnných, tj. zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Kromě

rovnice 4.1.5 může být dána ještě podmínka, aby bod (x, y) patřil k některé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Rovnicí 4.1.5 je definován opět jakási relace $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\} \quad (4.1.6)$$

(případně $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0, (x, y) \in M\}$), zajímá nás, kdy tato relace je funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Říkáme pak, že funkce f je dána **implicitně** uvedenou rovnicí 4.1.5 (příp. rovnicí 4.1.5 a podmírkou $(x, y) \in M$). Naproti tomu zadání funkce ve tvaru $y = f(x)$ nazýváme **explicitním**.

Příklad 4.1.4. Rovnicí $x + 2y - 3 = 0$ je implicitně definována funkce $f : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Příklad 4.1.5. Rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ a podmírkou $y \geq 0$ je definována implicitní funkce z příkladu 4.1.3. Relace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ není ovšem jednoznačná, každé hodnotě $x \in (-1, 1)$ odpovídají dvě hodnoty $y : y_1 = \sqrt{1 - x^2}, y : y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Podmírkou $y \geq 0$ druhou hodnotu vylučujeme. Místo podmíny $y \geq 0$ bychom mohli uvést i jiné podmínky, aby rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určovala implicitní funkci.

Vyšetřování podmínek, při nichž rovnice $F(x, y) = 0$ je definována funkce f , se obvykle provádí metodami matematické analýzy funkce více proměnných.

Funkce může být někdy dána tabulkou, tj. dvojicemi hodnot argumentu a funkce, což bývá obvyklé při zjišťování závislosti veličin měřením. Proměnná x se v tomto případě mění "diskrétně". Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme definovat úplně jen tehdy, je-li definiční obor konečná množina. Tabulkou však používáme i v jiných případech, zejména chceme-li vyznačit pomocí ní, některé hodnoty, které nás z nějakého důvodu přednostně zajímají.

V technických aplikacích bývá funkce dána graficky. Z grafu můžeme ovšem funkční hodnoty určit pouze přibližně. Pro další matematické zpracování je grafické zadání nejméně vhodné, i když jeho praktický význam nelze popřít.

Speciálním případem reálných funkcí jedné realné proměnné jsou **posloupnosti reálných čísel**.

4.1.3. Některé zvláštní vlastnosti funkcí

4.1.3.1. Omezená funkce

Definice 4.1.1. Funkci f nazýváme **shora (zdola) omezenou** na množině $A \subset D(f)$, je-li shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot $f(A)$. Je-li funkce f omezená shora i zdola na množině A , pak ji nazýváme **omezenou na množině A** . Je-li $A = D(f)$, nazýváme funkci **omezenou**. Viz kniha [BMR89, s. 87]

Funkce f je omezená na množině A , právě když existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pro každé } x \in A$$

neboli

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pro každé } x \in A.$$

Příklad 4.1.6. Funkce $f : y = \frac{1}{x^2+1}$ je omezená. Platí totiž

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| = \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zdola je tato funkce omezena dokonce číslem 0.

- Je-li funkce f shora omezená na množině A , existuje konečné supremum $\sup f(A)$. Toto číslo nazýváme **supremem funkce f na množině A** a označujeme je též $\sup_{x \in A} f(x)$ nebo $\sup\{f(x), x \in A\}$.
- Je-li funkce f zdola omezená na množině A , existuje konečné infimum $\inf f(A)$, které nazýváme **infimum funkce f na množině A** a označujeme je též $\inf_{x \in A} f(x)$ nebo $\inf\{f(x), x \in A\}$.

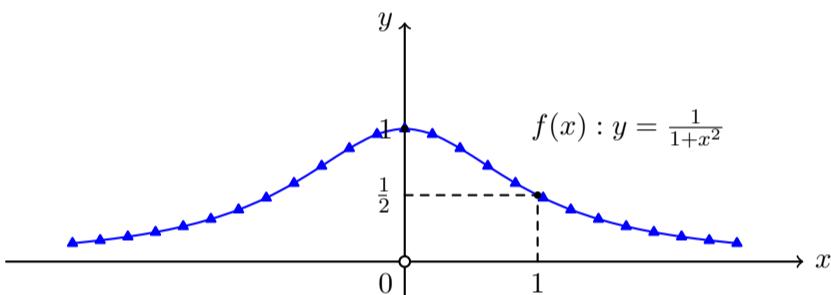
- Není-li funkce f shoda (zdola) omezená na množině A , pak je ovšem $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$ ($\sup_{x \in A} f(x) = -\infty$).
- Má-li množina $f(A)$ největší (nejmenší) prvek, pak toto číslo nazýváme největší (nejmenší) hodnotou funkce f na množině A (je-li $A = f(f)$, též absolutním maximem, resp. absolutním minimumm funkce f) a značíme je $\max_{x \in A} f(x)$ ($\min_{x \in A} f(x)$). V tomto případě existuje takové číslo $x_0 \in A$, že $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$ ($f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$). Pro všechna $x \in A$ tedy platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Je zřejmé, že největší (nejmenší) hodnota funkce f na množině A , pokud existuje je současně supremem (infimum) funkce f na A .

Příklad 4.1.7. Pro funkci z příkladu 4.1.6 platí:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{x^2 + 1} = \max_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{x^2 + 1} = 1; \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{x^2 + 1} = 0, \quad (4.1.7)$$

tato funkce však nenabývá v definičním oboru \mathbb{R} nejmenší hodnoty, neboť je stále $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$. To, že infimum je 0, dokážeme takto: Zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, pak snadno zjistíme, že existuje x , pro něž $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$:

$$1 < \varepsilon(x^2 + 1) \\ \frac{1}{\varepsilon} < x^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < x$$



Obrázek 4.1.4.

Neexistuje tedy kladné číslo, jíž by bylo dolnímezí množiny funkčních hodnot, takže infimum je 0. Graf funkce f je na obr. 4.1.4.

4.1.3.2. Monotonní funkce

Definice 4.1.2. Funkci f nazýváme **rostoucí (klesající)** na množině $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Funkci f nazýváme **neklesající (nerostoucí)** na množině $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Rostoucí a klesající funkce (na množině A) se nazývají **ryze monotonné** (na množině A), neklesající a nerostoucí funkce (na množině A) se nazývají **monotonné** (na množině A).

Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí. Ryze monotonné funkce tvoří tedy podmnožinu množiny monotónních funkcí.

Příklad 4.1.8. Funkce $y = 2x + 1$ je **rostoucí** na intervalu $(-\infty, \infty)$. Platí totiž: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$.

Příklad 4.1.9. Funkce $y=[x]$ je **neklesající** na intervalu $(-\infty, \infty)$ (viz příklad **).

Příklad 4.1.10. Heavisideova funkce (viz příklad **) je **neklesající** na intervalu $(-\infty, \infty)$ (viz příklad **).

Příklad 4.1.11. Funkce $y = |x|$ je **klesající** na intervalu $(-\infty, 0)$ a **rostoucí** na intervalu $(0, \infty)$.

Definice 4.1.3. Funkci f nazýváme **konstantní** na množině A , jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, platí $f(x_1) = f(x_2)$. V tom případě existuje reálné číslo k takové, že pro každé $x \in A$ je $f(x) = k$. Je-li $k = 0$, mluvíme o **nulové funkci** na množině A .

Výrok "funkce f je konstantní na množině A " zapisujeme též $f(x) = \text{konst}$ na A . Funkci konstantní na \mathbb{R} budeme stručně nazývat **konstantní funkci** nebo krátce **konstantou**. Z textu bude obvykle patrné, interpretujeme-li symbol k jako reálné číslo nebo jako konstantní funkci. Je zřejmé, že konstantní funkce na množině A je zároveň neklesající i nerostoucí na množině A . Toto tvrzení se dá obrátit. Lze snadno dokázat i tuto větu:

Věta 4.1.1. Funkce f je **rostoucí** na množině A , právě když je neklesající na množině A a na žádné dvoubodové podmnožině $B \subset A$ není konstantní.

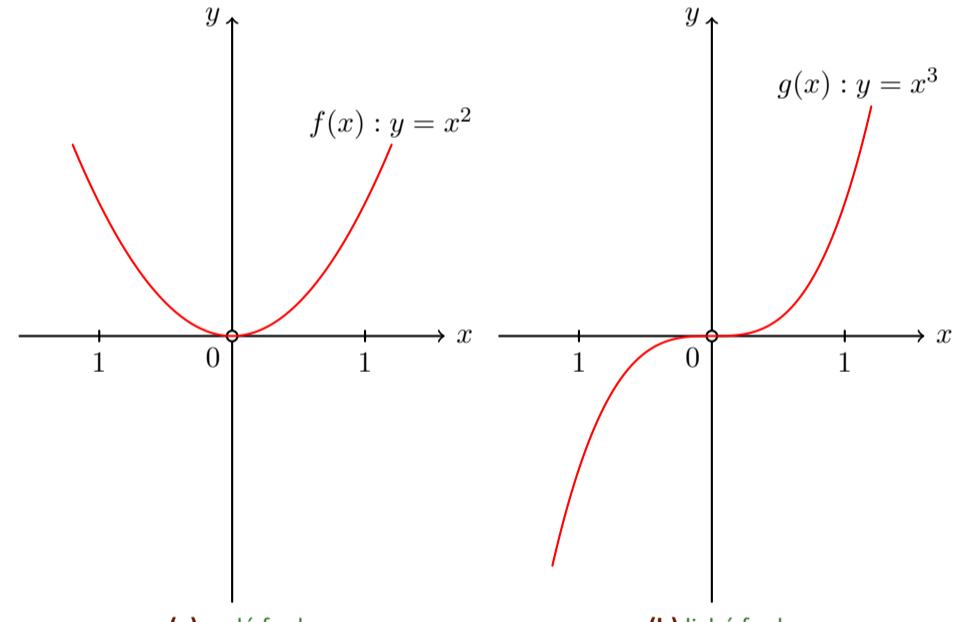
Obdobná tvrzení platí i pro klesající funkce.

4.1.3.3. Sudé a liché funkce

Definice 4.1.4. Funkce f se nazývá **sudá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá **lichá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (osy funkčních hodnot), graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Příklad 4.1.12. Funkce $f : y = x^2$ je sudá, funkce $g : y = x^3$ je lichá.



Obrázek 4.1.5.: Příklad sudé a liché funkce

Daná funkce nemusí být ovšem ani sudá, ani lichá. Snadno se dokáže tvrzení:

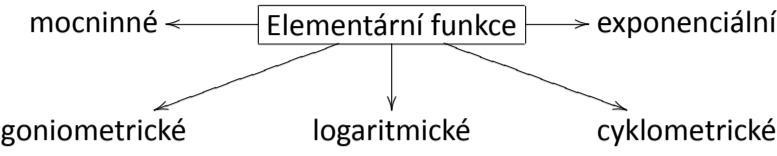
- Je-li sudá funkce f na množině $D(f) \cap (0, \infty)$ rostoucí (klesající), je na množině $D(f) \cap (-\infty, 0)$ klesající (rostoucí).
- Je-li lichá funkce na množině $D(f) \cap (0, \infty)$ rostoucí (klesající), je též na množině $D(f) \cap (-\infty, 0)$ klesající (rostoucí).

4.1.3.4. Periodická funkce

4.1.4. Operace s funkcemi. Uspořádání

4.1.5. Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme [Pol98, s. 10]:



4.1.5.1. Goniometrické funkce

- Základní vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.8)$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.9)$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.10)$$

- Součtové vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.11)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.12)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.13)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.14)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (4.1.15)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \quad (4.1.16)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha.$$

4.1.6. Zobrazení v jiných strukturách

4.1.7. Cvičení

4.2. Limita funkce

4.3. Spojitost funkce

Seznam literatury

- | | |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [BMR89] | J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. <i>Matematická analýza</i> . SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on pp. 15, 16). |
| [Pol98] | J. Polák. <i>Matematická analýza I</i> . ZČU - FAV, 1998. ISBN: 80-7082-466-2 (cit. on p. 18). |

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

- Vzorce pro dvojnásobný úhel 2α

Pro každé $\alpha \in R$ platí:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.1.17)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (4.1.18)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (4.1.19)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad (4.1.20)$$

- Vzorce pro poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.21)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.22)$$

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (4.1.23)$$

$$\left| \cot \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (4.1.24)$$

Vzorce 4.1.21 a 4.1.22 odvodíme pomocí vzorců 4.1.18 a 4.1.8:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos 2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

a dále užijeme vztahu $\sqrt{a^2} = |a|$ (platí pro každé $a \in \mathbb{R}$). Užitím součtových vzorců a toho že, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$ a $\cos \pi = -1$ lze snadno odvodit, že pro každé $\alpha \in R$ platí

5. Derivace funkce

Obsah

5.1. Základní věty diferenciálního počtu	19
5.1.1. Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce	19
5.1.2. Věty o střední hodnotě	19
5.1.3. Některé důsledky Lagrangeovy věty	20
Seznam literatury	21

5.1. Základní věty diferenciálního počtu

5.1.1. Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce

V tomto článku uvedeme významné věty, zvané souhrně věty o *střední hodnotě diferenciálního počtu*, a dále pak ukázky jejich užití v matematické analýze. Avšak dříve než budeme tyto věty formulovat, uvedeme jedno důležité tvrzení, které sice bude mít v dalších úvahách tohoto článku pomocnou úlohu, ale v teorii extrémů má i samostatný význam. [BMR89, s. 186]

Věta 5.1.1. Nechť funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na množině A své největší (nejmenší) hodnoty na vnitřním bodě c množiny A . Máli funkce f v bodě c derivaci, potom $f'(c) = 0$.

Důkaz. Nechť např. $f(c)$ je největší hodnota funkce f na množině A , takže $f(x) \leq f(c)$ pro $\forall x \in A$. Potom pro $x \in A, x < c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

a tedy

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Dále pro $x \in A, x > c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

a proto

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Platí tedy

$$f'_+(c) \leq f'_-(c) \geq f'_-(c).$$

Avšak $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$. Odtud plyně $f'(c) = 0$. ■

5.1.2. Věty o střední hodnotě

Věta 5.1.2. Rolleova věta¹ Nechť funkce f má tyto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$;
2. má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu (a, b) ;
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Protože je funkce f je na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, nabývá v tomto intervalu své největší hodnoty M , své nejmenší hodnoty m . Přitom ovšem platí:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (5.1.1)$$

Nyní mohou nastat dva případy:

1. funkce f nabývá M i m právě v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Podle předpokladu 3 věty 5.1.2 však potom platí $f(a) = f(b) = m = M$. Vzhledem ke vztahu 5.1.1 odtud plyně, že funkce f je konstantní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a tedy $f'(x) = 0$ dokonce v každém bodě $x \in (a, b)$

¹Michel Rolle [Mišel Rol] (1652-1719) Francouzský matematik

2. Funkce f nabývá apsoň jedné z hodnot M, m v některém vnitřním bodě ξ intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom podle věty 5.1.1 je $f'(\xi) = 0$.

Významným zvláštním případem Cauchyovy věty je další věta, která se častěji používá.

Věta 5.1.4. (Lagrangeova věta)². Nechť funkce má tyto vlastnosti:

- Je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu (a, b) .

Poznámka 5.1.1. Rolleova věta sama zaručuje jen existenci apsoň jednoho bodu $\xi \in (a, b)$, ve kterém je $f'(\xi) = 0$. Neumožnuje však ani určení tohoto bodu (nebo bodů), ani stanovení jejich počtu

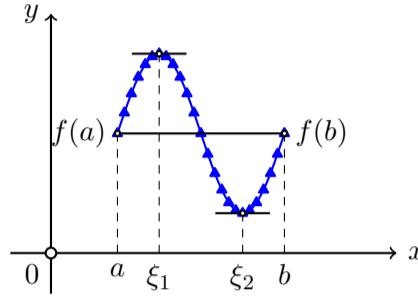
Potom existuje v otevřeném intervalu (a, b) apsoň jeden bod ξ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad (5.1.4)$$

či-li

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad (5.1.5)$$

Důkaz. Tvrzení této věty je důsledkem tvrzení Cauchyovy věty, a to pro případ $g(x) = x$. Protože $g'(x) = 1$ dokonce všude, jsou splněny všechny tři podmínky Cauchyovy věty. Proto platí i závěr této věty, z něhož pro náš případ již plyne vzorec 5.1.4 a tedy i vzorec 5.1.5. ■



Obrázek 5.1.1.: K výkladu Rolleovy věty

Z Rolleovy věty plyne důležitá věta:

Věta 5.1.3. (Cauchyova věta). Nechť funkce f a g mají tyto vlastnosti:

1. Jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje derivace $f'(x)$ (vlastní či nevlastní) a vlastní derivace $g'(x)$,
3. $g'(x) \neq 0$ na (a, b)

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje apsoň jeden bod ξ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (5.1.2)$$

Důkaz. Poznamenejme především, že z předpokladu 3 $g'(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$ a z předpokladu spojitosti funkce g na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ ihned vyplývá vztah $g(b) - g(a) \neq 0$. Kdyby totiž bylo $g(b) = g(a)$, potom by podle Rolleovy věty 5.1.2 existoval apsoň jeden bod $\eta \in (a, b)$ takový že $g'(\eta) = 0$. To však by byl spor s předpokladem $g'(x) \neq 0$ pro každý bod $x \in (a, b)$. Proto má smysl podíl na levé straně rovnosti 5.1.2

K vlastnímu důkazu Cauchyovy věty zavedeme takovou pomocnou funkci F , aby splňovala podmínky Rolleovy věty. Definujme ji pro $x \in \langle a, b \rangle$ předpisem

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]. \quad (5.1.3)$$

Snadno ověříme, že tato funkce skutečně splňuje podmínky Rolleovy věty na intervalu $\langle a, b \rangle$:

- Je spojitá na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$, což je důsledkem spojitosti funkce f a g na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$,
- má derivaci F' na otevřeném intervalu (a, b) , což plyne z existence derivace f' a g' funkce f a g na intervalu (a, b) ,
- $F(a) = F(b) = 0$

Platí tedy i závěr Rolleovy věty pro funkci F , tj. na intervalu (a, b) existuje apsoň jeden bod ξ , pro který $F'(\xi) = 0$. Zderivujeme-li funkci F , dostaneme (dosadíme-li $x = \xi$):

$$F'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - f'(\xi)[g(b) - g(a)] = 0$$

Odtud již plyne rovnost 5.1.2

Poznámka 5.1.4. Lagrangeova věta se často nazývá větou o přírůstku funkce, protože vzorcem 5.1.5 se vyjadřuje přírůstek funkce, tj. rozdíl $f(b) - f(a)$. Všechny tři uvedené věty, tj. věta Rolleova, Cauchyova a Lagrangeova, se v literatuře nazývají souhrnně **věty o střední hodnotě diferenciálního počtu**.

Poznámka 5.1.5. Na obr. ** je ilustrován geometrický význam Lagrangeovy věty. Podíl na levé straně rovnosti 5.1.4, tj. číslo $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ je směrnice sečny s , spojující body A, B grafu funkce f , které odpovídají krajním bodům intervalu $\langle a, b \rangle$. Podle tvrzení Lagrangeovy věty existuje v otevřeném intervalu (a, b) apsoň jeden bod ξ tak, že tečna grafu funkce f v příslušném jeho bodě je rovnoběžná s přímkou s .

Poznámka 5.1.6. Z Lagrangeovy věty vyplývá toto tvrzení: Nechť funkce f vyhovuje na intervalu $\langle a, b \rangle$ podmínkám Lagrangeovy věty a x_1, x_2 jsou dva libovolné různé body intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom v otevřeném intervalu s krajními body x_1, x_2 existuje apsoň jeden bod ξ , pro který platí Lagrangeův vzorec:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (5.1.6)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (5.1.7)$$

Potom bod ξ lze vyjádřit takto:

$$\xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), \quad \text{kde } \vartheta \in (0, 1). \quad (5.1.8)$$

Označíme-li $x_2 - x_1 = h$, můžeme vzorec 5.1.6 napsat ve tvaru

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = f'(x_1 + \vartheta h)h, \quad \text{kde } \vartheta \in (0, 1). \quad (5.1.9)$$

5.1.3. Některé důsledky Lagrangeovy věty

Lagrangeova věta, má některé významné důsledky, které nyní uvedeme [BMR89, s. 189]:

Věta 5.1.5. Nechť funkce f vyhovuje podmínkám Lagrangeovy věty a navíc nechť $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Potom funkce f je prostá na intervalu $\langle a, b \rangle$.

²Joseph Louis Lagrange [lagrénz] (1736-1813), francouzský matematik

Důkaz. Nechť x_1, x_2 jsou libovolné dva různé body intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom podle Lagrangeova vzorce 5.1.3 platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \neq 0$$

neboť $f'(\xi) \neq 0$ dle předpokladu. ■

Věta 5.1.6. *Funkce f je konstantní na intervalu (a, b) , právě když má na tomto intervalu derivaci a platí $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.*

Důkaz. Tedy

- Je-li funkce f konstantní na intervalu (a, b) , pak je $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, jak již víme.
- Nechť $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Dokažme, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) = f(x_2)$. Z existence derivace vyplývá spojitost funkce a jsou tedy splněny podmínky Lagrangeovy věty na každém intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (a, b)$. Podle vzorce 5.1.3 tedy platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (x_1, x_2)$. Protože podle předpokladu je $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a, b)$, platí $f(x_1) - f(x_2) = 0$, tj. $f(x_1) = f(x_2)$

■

References

[BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on pp. 19, 20).

6. Aplikace diferenciálního počtu

Obsah

6.1. Průběh funkce	23
6.1.1. Monotonie funkcí	23
Seznam literatury	24

Diferenciální počet má rozsáhlou oblast užití. V této kapitole ukážeme použití výsledků předchozích kapitol k vyšetřování průběhu funkce a vlastnosti rovinných křivek.

6.1. Průběh funkce

Pomocí derivace můžeme studovat vlastnosti funkce, které usnadní vyšetřování jejího průběhu.

6.1.1. Monotonie funkcí

Jednou z důležitých vlastností funkce je její "monotonie", kterou jsme definovali již v odst. 4.1.3 kap. 4. Proto je při vyšetřování průběhu funkce důležité určit množiny (často jsou to intervaly), na nichž je funkce monotónní, jinak řečeno, najít "intervaly monotonie funkce" (viz [BMR89, s. 208]).

1. Zjistíme **definiční obor funkce**, vyjádříme jej v intervalech a z nich poznáme, kde je funkce **spojitá**. Funkce je spojitá v (a, b) pro každý bod tohoto intervalu, když $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolně zvolené číslo, a pro všechna x z okolí bodu c je $|x - c| < \delta$, kde $\delta > 0$ je na ε nezávislé.
2. Určíme, je-li funkce **lichá** $f(-x) = -f(x)$ nebo **sudá** $f(-x) = f(x)$. Je-li funkce lichá, je souměrná podle středu souměrnosti (obyčejně to bývá počátek souřadnic xy), je-li sudá, je souměrná podle osy y .
3. Určíme **průsečíky křivky s osami pravoúhlých souřadnic**. Body, ve kterých křivka protíná osu x spolu s body, ve kterých není křivka spojitá, rozlišují intervaly, v nichž je graf křivky nad osou x od intervalů, ve kterých je graf křivky pod osou x .
4. V krajních bodech definičních intervalů, ve kterých je funkce spojitá, stanovíme **limity funkce** a dále

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

5. Vypočítáme $f'(x)$ a $f''(x)$, abychom zjistily, kde je funkce **rostoucí** $f'(x) > 0$, **klesající** $f'(x) < 0$ a kde jsou **lokální extrémy**. Dostaneme-li dosazením kořenů rovnice $f'(x) = 0$ do $f''(x)$ hodnotu $f''(x) > 0$, má funkce lokální minimum, při $f''(x) < 0$ má funkce lokální maximum. V intervalech, kde $f''(x) > 0$, je křivka **konvexní (vypuklá)**, kde $f''(x) < 0$, je křivka **konkávní (vydutá)**. Body, v nichž $f''(x)$ mění znaménko, jsou **inflexní body**. Najdeme je tak, že stanovíme hodnoty x , pro které je $f''(x) = 0$ nebo neexistuje. Číslo c je inflexní bod, když existuje takové okolí bodu c , že pro $x > c$ je oblouk křivky konvexní a pro $x < c$ konkávní. Je nutné si uvědomit, že když má $f'(x)$ konečnou derivaci, je inflexní bod c taky nulovým bodem druhé derivace čili kořenem rovnice $f''(x) = 0$. Obrácená věta neplatí, tj. z $f''(x) = 0$ nevyplývá, že v bodě c má $f'(x)$ extrém a že bod c je inflexním bodem.

6. **Asymptota** je tečna křivky $f(x)$, jejíž bod dotyku je v nekonečnu. Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

je přímka $x = a$ její asymptotou. Jinak asymptoty mají rovnici $y = kx + q$, kde x a y jsou souřadnice bodů na asymptotách. Existují li konečné limity

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q$$

pak je asymptotou přímka $y = kx + q$. Můžeme-li rovnici křivky rozložit (tj. rozložit její pravou stranu, obyčejně dělením čitatele jmenovatelem, má-li tvar zlomku) na dvě části, z nichž jedna má tvar $kx + q$ a druhá zbytek $\varphi(x)$, tj. $f(x) = kx + q + \varphi(x)$ a $\varphi(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, je přímka $y = kx + q$ asymptotou.

7. Zpřesnění grafu křivky provedeme sestavením tabulky souřadnic dalších bodů křivky, tj. ke zvoleným hodnotám x (z definičního oboru funkce) vypočítáme hodnoty y . Do dalších řádků tabulky zapíšeme hodnoty $f'(x)$ a $f''(x)$, ve kterých intervalech je funkce *rostoucí*, ve kterých *klesá*, kde je *vypuklá*, kde je *dutá*, kde jsou *lokální extrémy*, *inflexní body* apod., případně sestavíme dílkové tabulky pro jednotlivé charakteristické vlastnosti vyšetřované funkce.

Příklad 6.1.1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

1. Definiční obor $D_f = \mathcal{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

2. Funkce je sudá

$$f(-x) = f(x) : \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}.$$

Funkce není periodická.

3. Stanovíme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru $1, -1$ a v nevlastních bodech $-\infty, +\infty$. Protože je funkce **sudá**, omezíme se jen na vyšetřování nezáporné části. Nejprve vlastnosti funkce v okolí bodu 1 . Ten nepatří do D_f a proto určíme limity funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Pro výpočet limity použijeme substituci $y = 1 - x^2$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2-y}{y} = +\infty$$

¹ proto

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Obdobně dojdeme k

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

A konečně v nevlastních bodech $\pm\infty$ je limita

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = 0 - 1 = -1.$$

Výpočtem limit jsme zároveň určili dva absolutní (globální) extrémy a jeden lokální:

- v intervalu $(-1, 1)$ má funkce maximum ∞ a minimum 1 ,
 - v intervalech $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ má funkce minimum $-\infty$ a maximum -1 .
4. Nyní vyšetříme zda, případně kolik a jaké, má funkce $f(x)$ průsečíky s osami souřadnic. S osou x nemá funkce žádné průsečíky, protože pro $y = 0$ není definována $H_f = \mathcal{R} - \{-1, 1\}$. Pro $x = 0$ je $y = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$, proto má $f(x)$ právě jeden průsečík s osou y a to $[0, 1]$.
5. Zatím jsme zjistili, že naše funkce není definována v bodech 1 a -1 a proto není spojitá v \mathcal{R} . Nevíme však, jaký je její průběh v jednotlivých

¹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

intervalech definičního oboru. Abychom získali názornější představu o průběhu funkce, zjistíme má-li derivaci.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+x^2)'(1-x^2) - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

Protože má vlastní derivaci², můžeme určit její vlastnosti v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. V těchto intervalech je $y' > 0$ a proto jde o funkci ryze monotónní, rostoucí³ v daných intervalech⁴. Výpočtem zjistíme druhou derivaci funkce. Ta nám pomůže určit další extrém v intervalu $(0, 1)$ a zároveň vyšetřit konkávnost a konvexnost.

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x)'(1-x^2)^2 - (4x)(1-2x^2+x^4)'}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(1-2x^2+x^4) - 4x(-4x+4x^3)}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

Abychom mohli určit lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $(0, 1)$, pomocí druhé derivace, musíme najít kořeny rovnice $f''(x) = 0$. V našem případě

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x_0 = 0,$$

tento kořen⁵ pak dosadíme do druhé derivace, tj.

$$y''(0) = \frac{4(3 \cdot 0^2 + 1)}{(1-0^2)^3} = 4,$$

protože je $f''(x) > 0$, má v bodě x_0 lokální minimum. Můžeme rovněž konstatovat, že funkce nemá inflexní body⁶. Konkávnost a konvexnost funkce v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ vyšetříme pomocí vlastností druhé derivace funkce. Tedy

- $(0, 1) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konvexní**,
- $(1, \infty) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konkávní**.

6. Z předchozích výpočtů plyne, že křivka má asymptoty $y = -1, x = \pm 1$.

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. Matematická analýza. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on p. 23).

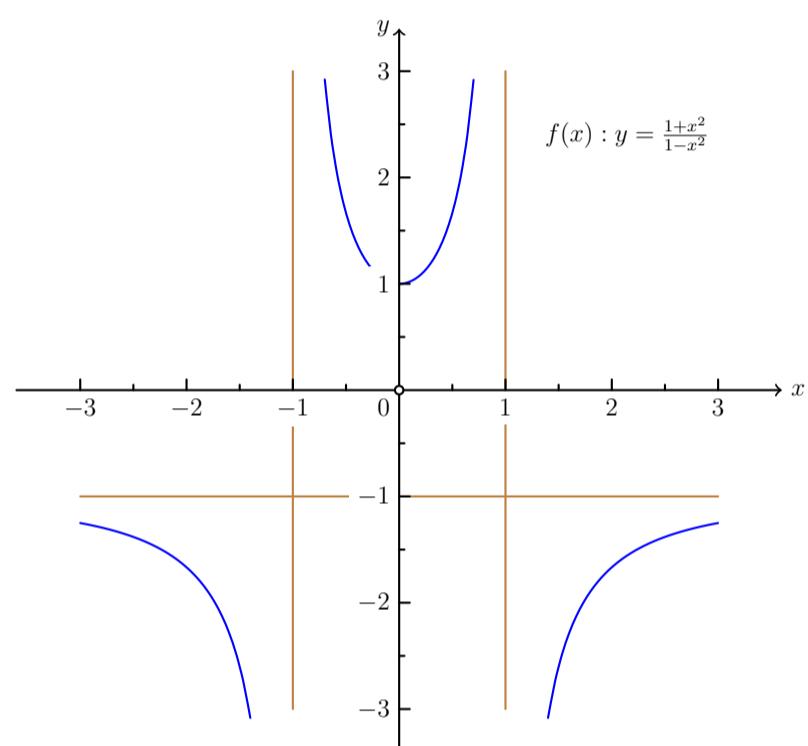
² $f(x)$ je spojitá v intervalech $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ věta s spojité funkci

³Plyne z věty o postačujících podmínkách ryze monotónnosti funkce na intervalu

⁴V intervalech $(-\infty, -1), (-1, 0)$ je funkce klesající.

⁵stacionární bod

⁶Pro existenci inflexního bodu je nutné splnění jedné z podmínek a to buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.



Obrázek 6.1.1.: Graf funkce $f(x)$

7. Primitivní funkce

Obsah

7.1. Motivace	27
7.2. Tabulka neurčitých integrálů	28
7.3. Metody určení primitivní funkce	28
7.3.1. Integrování součtu, úprava integrandu a integrování rozkladem	28
7.3.2. Integrace racionální funkce	29
Seznam literatury	32

7.1. Motivace

Zavedením pojmu derivace funkce jsme motivovali důležitým požadavkem definovat okamžitou rychlosť pohybu bodu po přímce. Existuje přirozeně i požadavek opačný, tj. nalézt zákon dráhy pohybu bodu po přímce, je-li dána jeho okamžitá rychlosť jako funkce času. [BMR89, s. 253]

Příklad 7.1.1. Je dána okamžitá rychlosť v pohybu bodu po přímce (ose) x rovnici $v(t) = 2t + 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Najděte zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase $t = 0$ měl bod polohu $x = x_0$.

řešení:

Označíme-li $x(t)$ polohu bodu v okamžiku t , pak $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Hledáme tedy funkci $x = x(t)$, pro níž platí

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad x(0) = x_0.$$

Je ihned patrné, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$x(t) = t^2 + t + C, \quad (7.1.1)$$

kde C je libovolná konstanta. Funkce, která splňuje i druhou podmínu (říkáme ji též počáteční podmínka), najdeme z rovnice 7.1.1 dosazením dané podmínky $t = 0$, $x = x_0$. Dostaneme $x_0 = C$. Dosazením do 7.1.1 za C plyne hledaný zákon dráhy

$$x(t) = t^2 + t + x_0.$$

Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě dané podmínky a zároveň vidíme, že hledaná primitivní funkce daných vlastností je jediná.

Každé takové funkci, jejíž derivací je daná funkce, budeme říkat **primitivní funkce** k dané funkci. Na uvedeném příkladě je patrné, že k dané funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Množinu všech primitivních funkcí se často nazývá **neurčitým integrálem**. Po tomto názorném uvedení do problému přejdeme k přesné formulaci základních pojmu.

Definice 7.1.1. Funkce $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval, se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na intervalu J právě když, pro všechna $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$ (v krajních bodech intervalu J , pokud k němu patří, jde o derivaci jednostrané).

Příklad 7.1.2. K funkci $\sin x$ je primitivní funkci na libovolném intervalu $J \subset (-\infty, +\infty)$ funkce $-\cos x$, protože $(-\cos x)' = \sin x$. Ale též funkce $3 - \cos x$ je primitivní funkci k funkci $\sin x$, protože $(3 - \cos x)' = \sin x$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

Je vidět, že rozdíl dvou primitivních funkcí k téže funkci je konstanta. To není náhoda, jak potvrzuje následující věta:

Věta 7.1.1. a) Je-li funkce F primitivní funkci k funkci f na intervalu J a reálná konstanta, pak i funkce $G = F + c$ je primitivní funkci k funkci f na intervalu J .

b) Jsou-li funkce F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu J , pak funkce $F - G$ je na intervalu J konstantní.

Důkaz. Tvrzení a) plyne z definice protože $G'(x) = [F(x) + c] = F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Tvrzení b) je důsledek věty 5.1.6. ■

7.2. Tabulka neurčitých integrálů

Pokud není nic uvedeno, platí vzorce pro všechna x a pro všechny hodnoty uvedených konstant. Místo platí pro x z intervalu $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ píšeme sturčně $x \neq 0$ apod. Literatura: [Rek63, p. 396].

$$\int 0 dx = c \quad (7.2.1)$$

$$\int a dx = ax + c \quad (7.2.2)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ pro} & n \in \mathbb{Z}, n > 0, \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ pro} & n \in \mathbb{Z}, n < -1, \\ \forall x > 0, \text{ pro } n \in \mathbb{R} \text{ pro} & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c \quad (7.2.21)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c \quad (7.2.22)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad (7.2.23)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad (7.2.24)$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (7.2.25)$$

$$\int \frac{a}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \quad (7.2.26)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (7.2.27)$$

$$\int \frac{a}{x \sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sec^{-1} \frac{x}{a} \quad (7.2.28)$$

(7.2.3)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad \forall x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c \quad \forall x > 0$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

(7.2.4) Procesu hledání primitivní funkce se často říká integrování nebo integrace (od slova "integrál"), což z matematického hlediska znamená provést in-

(7.2.5) verzní operaci k operaci derivování. Smutnou zprávou je, že na rozdíl od derivování neexistuje obecný vzorec pro integrování součinu či podílu,

(7.2.6) ani obecný vzorec pro integrování složených funkcí. Při hledání integrálů složitějších funkcí se využívá např. *linearita, metoda per partes, substituční metoda*, popř. některé další speciální metody. Řešitel v mnoha případech musí projevit důvtip a intuici, která mu pomůže nalézt primitivní funkci k dané funkci.

(7.2.8)

7.3. Metody určení primitivní funkce

Příklad 7.3.1. Zdroj [Kni+O4, s. 29].

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx \quad (7.3.1)$$

Dělením čitatele integrantu jmenovatelem dostaneme rozklad integrantu na součet funkcí, jejichž integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x) : (x^2 + 1) = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \\ \underline{-x^4 \quad -x^2} \\ \underline{3x^3 - 4x^2 + 3x} \\ \underline{-3x^3 \quad -3x} \\ \underline{\quad \quad \quad 4x^2} \\ \underline{\quad \quad \quad \quad 4} \end{array}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c \quad \forall x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (7.2.10)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c \quad \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (7.2.11)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad \forall x \in (-1, 1) \quad x \in \mathbb{R} \quad (7.2.12)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c \quad (7.2.13)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c \quad (7.2.14)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c \quad (7.2.15)$$

Tedy

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Pro uvedený integrál dostaneme

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx =$$

$$\int \left(x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \operatorname{arctan} x + C.$$

(7.2.17)

(7.2.18)

(7.2.19)

Příklad 7.3.2.

$$\int \frac{2x^4 - 5x^2 + 14x + 13}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\} \quad (7.3.2)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c = \sinh^{-1} x + c \quad (7.2.16)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c = \cosh^{-1} x + c \quad x \in (1, +\infty) \quad (7.2.17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad (7.2.18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \quad (7.2.19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \begin{cases} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c & \text{pro } |x| > 1 \\ \cosh^{-1} x + c & \text{pro } |x| < 1 \end{cases} \quad (7.2.20)$$

$$\begin{array}{r}
 \left(\begin{array}{r} -2x^4 \\ -2x^4 + 2x^3 + 4x^2 \end{array} \right) : (x^2 - x - 2) = 2x^2 + 2x + 1 + \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} \\
 \underline{-2x^3 - x^2 + 14x} \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2 + 4x} \\
 \hline x^2 + 18x + 13 \\
 \underline{-x^2 - x - 2} \\
 \hline 19x + 15
 \end{array}$$

Zbytek po dělení představuje integrál, jež je počítán v příkladu 7.3.18 a proto ho vynecháme.

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx + \int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \\
 &= \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} \ln|x+1| - \frac{53}{3} \ln|x-2| + C
 \end{aligned}$$

Příklad 7.3.3. Zdroj [Kni+O4], s. 29].

$$\int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx \quad (7.3.3)$$

Integrand upravíme přičtením a odečtením výrazu $3x^2$ v čitateli zlomku takto:

$$\frac{3}{(1+x^2)x^2} = \frac{3+3x^2-3x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{1+x^2}$$

Tedy v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$, platí

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= -\frac{3}{x} - 3 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

Příklad 7.3.4. Zdroj [Kni+O4], s. 30].

$$\int \sqrt{1+\cos 2x} dx \quad (7.3.4)$$

Funkci $\sqrt{1+\cos 2x}$ upravíme na základě goniometrické identity 4.1.18

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

takto

$$\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} |\cos x| = \varepsilon \sqrt{2} \cos x,$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi), \\ -1, & x \in (\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi), \end{cases}$$

n je přirozené číslo. Proto pro x ležící v uvedených intervalech je

$$\int \sqrt{1+\cos 2x} dx = \varepsilon \sqrt{2} \int \cos x dx = \varepsilon \sqrt{2} \sin x + C.$$

Příklad 7.3.5. Zdroj [Kni+O4], s. 30].

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx \quad (7.3.5)$$

Integrand upravíme na součet dvou tabulkových integrálů použitím vzorce

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

takže

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

Příklad 7.3.6. Zdroj [Kni+O4], s. 30].

$$\int \tan^2 x dx \quad (7.3.6)$$

funkci napíšeme ve tvaru

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

takže

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 7.3.7.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx, \quad (\sin^2 x \cos^2 x \neq 0; x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}) \quad (7.3.7)$$

Integrand upravíme pomocí vzorce pro dvojnásobný úhel 4.1.22:

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C.$$

Příklad 7.3.8.

$$\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} dx, \quad (\sin x \cos x \neq 0; x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}) \quad (7.3.8)$$

Integrand rozšíříme o funkci $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}} dx = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\tan x}} dx = \int \frac{1}{\tan x} dx = \ln|\tan x| + C.$$

7.3.2. Integrace racionální funkce

Některé příklady v předchozím odstavci, (viz např. 7.3.1 a 7.3.2) jsme dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostali rozklad integrandu na součet racionální funkce (polynomu) a ryze lomené racionální funkce. Integrování polynomu je snadné, neboť jde o součet integrálů tvaru $\int c_k x^k dx$, kde k je celé nezáporné číslo. Omezíme se tedy na integrování ryze lomené racionální funkce, tj. funkce ve tvaru $P(x)/Q(x)$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy, přičemž stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. Taková funkce může vzniknout součtem několika jednoduchých zlomků.

Příklad 7.3.9. Upravte

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+3} &= \frac{x^2+x+3+x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+3)} \\
 &= \frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x-3}
 \end{aligned}$$

Jsme tedy vedeni myšlenkou, zda naopak každá ryze lomená racionální funkce se dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru - budeme jim říkat parciální zlomky, které umíme integrovat. Tím se budeme zabývat v dalších odstavcích.

po úpravě dostaneme tabulkový integrál

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1}, \quad (7.3.14)$$

Příklad 7.3.10.

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx, \quad x \in R \quad (7.3.9)$$

Kvadratický polynom ve jmenovateli upravíme na čtverec $f(x) = (x + m)^2 + n$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(2x - 1)}{3} + C \end{aligned}$$

Definice 7.3.1. Parciální (částečným) zlomkem, budeme nazývat zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (7.3.10)$$

A, M, N, α, p, q reálné $p^2 - 4q < 0$, k celé nezáporné.

Integrál prvního zlomku, tj. $\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx$, vypočeme substitucí $x - \alpha = t$, odtud plyne $dx = dt$,

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \int \frac{A}{t^k} dt. \quad (7.3.11)$$

Tento integrál se rovná

$$-\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}} + C. \quad (7.3.12)$$

je-li $k > 1$, a rovná se $A \ln|x - \alpha| + C$, je-li $k = 1$. Výsledek platí na každém intervalu neobsahujícím bod α .

U integrálu druhého zlomku uvedeme postup výpočtu pro $k = 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mx}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{N}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x + p) - p}{x^2 + px + q} dx + N \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx. \end{aligned}$$

Z naznačeného postupu je vidět hlavní myšlenka: upravit integrál na lineární kombinaci dvou integrálů, z nichž první má v čitateli integrandu derivaci jmenovatele a je podle příkladu *** roven $\ln|x^2 + px + q|$ kde $x^2 + px + q > 0$ pro $x \in R$ a integrand druhého integrálu má čitatel konstantní.

Výpočet druhého integrálu probíhá takto:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx; \quad (7.3.13)$$

substitucí $x + \frac{p}{2} = t \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ dostáváme dále

$$\int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)(t^2 + 1)} dt$$

jehož řešení je

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan t = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

Z postupu je opět vidět hlavní myšlenka: úprava integrandu na tvar $\frac{1}{t^2 + 1}$. Jmenovatel $x^2 + px + q$ jsme doplnili na úplný čtverec a užili uvedenou substituci (uvažme, že $q - \frac{p^2}{4} > 0$, protože diskriminant $\frac{p^2}{4} - q$ trojčlenu $x^2 + px + q$ je podle předpokladu záporný). Výsledek platí u obou integrálu v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

7.3.2.1. Substituční metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

Věta 7.3.1. Jestliže

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad (7.3.15)$$

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) du = F(\varphi(x)) + C \quad (7.3.16)$$

Základem úspěchu při aplikací věty je správný výběr funkce $\varphi(x)$. Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schématicky veden od rov. 7.3.16 ke vzorci rov. 7.3.15.

Příklad 7.3.11. $\int e^{x^2} dx$

$$\int e^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Příklad 7.3.12. $\int x^3 e^{x^4} dx \quad x \in R$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^4} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^4 \\ du = 4x^3 dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{e^u}{4} = \frac{e^{x^4}}{4} + C \end{aligned}$$

Funkce typu $f(x) = \sqrt{ax + b}$:

Funkci, jež je dána rovnicí, jež obsahuje polynomy proměnné x ve výrazu $\sqrt{ax + b}$, v němž $ax + b > 0$, $a > 0$, integrujeme pomocí substituce:

$$u = \sqrt{ax + b}, \quad du = \frac{1}{2} \frac{a}{u} dx, \quad dx = 2 \frac{u}{a} du \quad (7.3.17)$$

Je-li potřeba dosadit do integrované funkce také za x , vyjádříme ze substituční rovnice $x = \frac{u^2 - b}{a}$.

Funkce typu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$, $a \neq 0$:

Příklad 7.3.13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$:

Řešení: Užijeme Eulerovu substituci

$$u = x + \sqrt{x^2 + a}, \quad du = \frac{u}{\sqrt{x^2 + a}} dx, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

7.3.2.2. Integrace goniometrických funkcí

7.3.2.3. Integrace po částech - per partes

Ze vztahů pro nalezení diferenciálů $d(uv) = udv + vdu$ a $udv = d(uv) - vdu$ vyplývá vzorec pro *metodu integrace per partes*:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (7.3.18)$$

Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenosť pro výběr funkcí u a v . Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím se myslí dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně $\int v du$ lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

Příklad 7.3.14. $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Příklad 7.3.15. $\int \sqrt{x^2 + a} dx$, kde $a \neq 0, x^2 + a > 0$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{x^2 + a} & dv = 1 \\ du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx & v = x \end{bmatrix}$$

$$x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \right]$$

Integrál na pravé straně vyjádříme podle příkladu 7.3.13 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$ a výsledek dostaneme ve tvaru

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| \right]$$

Příklad 7.3.16. $\int \arctan x dx \quad x \in R$

$$\int \arctan x dx = \begin{bmatrix} u = \arctan x & dv = 1 \\ du = \frac{1}{x^2 + 1} dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$x \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \begin{bmatrix} x^2 + 1 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} =$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|t|$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C$$

7.3.2.4. Rozklad ryze lomené funkce v parcíální zlomky

Nechť je dána racionální funkce $R = \frac{P}{Q}$ s reálnými koeficienty. Můžeme předpokládat, že je *ryze lomená*¹. Pokud by tomu tak nebylo, dostaneme dělením čitatele jmenovatelem zlomku součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Příklad 7.3.17. $\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx$ [Kni+O4, s. 90]

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 7$ jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jeden člen

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 7}.$$

Členy mnohočlenu na pravé straně seřadíme podle mocnin x

$$8x - 31 = x(A + B) + (7A - 2B).$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů dostaneme

$$8 = A + B$$

$$-31 = -7A - 2B$$

Řešením této soustavy je $A = 3, B = 5$. Platí tedy (pro všechna $x \neq 2 \text{ a } x \neq 7$)

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x - 7}.$$

$$\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{5}{x - 7} dx$$

$$= 3 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 7| + C.$$

Výsledek platí v každém intervalu, který neobsahuje body $x = 2, x = 7$.

Příklad 7.3.18. $\int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\}$

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$ jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jeden člen:

$$\frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$$

$$19x + 15 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

$$19x + 15 = x(A + B) - 2A + B$$

$$19 = A + B$$

$$15 = -2A + B$$

Řešením této soustavy je $A = \frac{4}{3}, B = \frac{53}{3}$.

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{53}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx = \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \frac{53}{3} \ln|x - 2| + C$$

Příklad 7.3.19. $\int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx$ [Kni+O4, s. 90]

Polynom $Q(x) = x^3 - 4x^2 - x - 4$ má kořeny $\alpha_{1,2} = \pm 1, \alpha_3 = -4$, které jsou jednoduché tj. $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 4}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici společným jmenovatelem zlomků pravé strany (polynomem $Q(x)$), dostaneme

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x + 1)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x + 1)$$

čili

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x^2 + 5x + 4) + B(x^2 + 3x - 4) + C(x^2 - 1)$$

$$2x^2 + 34x + 14 = (A + B + C)x^2 + (5A + 3B)x + (4A - 4B - C)$$

¹tj. stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q

Porovnáním odpovídajících si koeficientů u stejných mocnin x dostaneme pro neznámé koeficienty A, B, C soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ 5A + 3B &= 34 \\ 4A - 4B - C &= 14 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = 5, B = 3, C = -6$ a tedy

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{5}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx &= \int \frac{5}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{6}{x+4} dx \\ &= 5 \ln|x-1| + 3 \ln|x+1| - 6 \ln|x+4| + C. \end{aligned}$$

Příklad 7.3.20. $\int_a^{\infty} \frac{2x+3}{2x^3+2} dx \quad x \in R - -1$

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on p. 27).
- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on pp. 28, 29, 31).
- [Rek63] K. Rektorys. *Přehled užité matematiky*. 1. vydání. SNTL, 1963 (cit. on p. 28).

8. Určitý integrál

8.1. Motivace

Obsah

8.1. Motivace	33
8.1.1. Výpočet integrálu	33
8.2. Vlastnosti určitého integrálu	34
Seznam literatury	34

8.1.1. Výpočet integrálu

Příklad 8.1.1. Metodou per partes spočítejte integrály: $\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx$

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x dx &= \int e^x dx + \int x \cdot e^x dx \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x \\ \int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx &= [xe^x]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - e\end{aligned}$$

kde integrál

$$\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

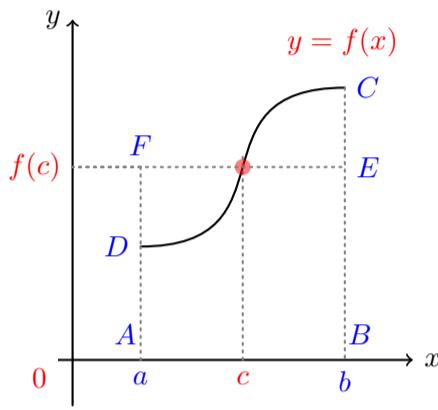
8.2. Vlastnosti určitého integrálu

V této kapitole mluvíme o spojité funkci $f(x)$ \Rightarrow příslušné integrály tedy vždy existují. Čerpáno z knih: [Kni+O4].

Věta 8.2.1. První věta o střední hodnotě integrálního počtu: Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu (a, b) , existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \quad (8.2.1)$$

Důkaz. Použitím Lagrangeovy věty napsané pro funkci $F(x)$, primitivní na intervalu (a, b) k dané funkci $f(x)$. Podmínky věty jsou zřejmě splněny: $F(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) a má všude derivaci $F'(x) = f(x)$. Tedy existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$,



Obrázek 8.2.1.

že

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(c),$$

čímž je věta dokázána, neboť $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ a $F'(c) = f(c)$. Funkční hodnotu $f(c)$, danou podle (8.2.1) rovnicí

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad (8.2.2)$$

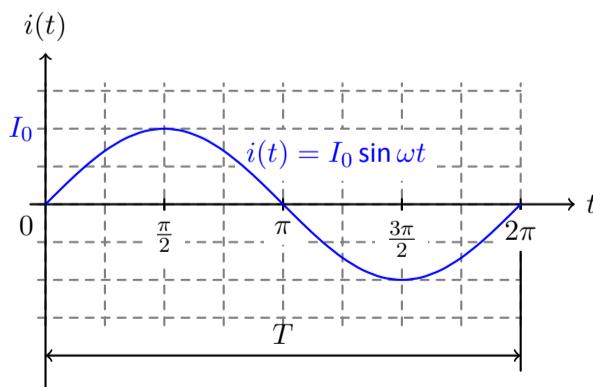
nazýváme střední hodnotou.

Pro spojitu nezápornou funkci $f(x)$, lze větu o střední hodnotě jednoduše geometricky interpretovat dle (obr. 8.2.1). Levá strana (8.2.1) určuje obsah křivočáreho lichoběžníku $ABCD$, pravá strana obsah obdélníka $ABEF$. Podle této věty nabývá funkce $f(x)$ alespoň v jednom bodě intervalu (a, b) takové hodnoty $f(c)$, že uvažovaný křivočáry lichoběžník má stejný obsah jako obdélník o základně $b-a$ a výšce $f(c)$ (str. 155 knihy [Kni+O4]).

Příklad 8.2.1. Určete střední hodnotu i_s střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

v časovém intervalu $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$ (v průběhu jedné poloviny periody). I_0 je maximální hodnota proudu (obr. 8.2.2), perioda T je dána vztahem $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Obrázek 8.2.2.

Podle 8.2.2 bude

$$\begin{aligned} i_s &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \omega t dt = \frac{2I_0}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2I_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) \\ &= \frac{2I_0}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi} I_0 = 0,637 I_0. \end{aligned}$$

Tato hodnota se rovná intenzitě elektrického proudu, při kterém by vodičem v průběhu uvažované poloviny periody prošel stejný elektrický náboj jako při proudu střídavém.

Příklad 8.2.2. Efektivní hodnota i_{ef} střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

(viz předchozí příklad) je definována jako odmocnina ze střední hodnoty funkce $i^2(t)$ v průběhu jedné periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Tedy

$$\begin{aligned} i_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{I_0^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{I_0^2}{2} \end{aligned}$$

neboť $\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$. Odtud

$$i_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Střídavý proud $i(t) = I_0 \sin \omega t$ má na témže odporu stejný výkon jako stejnosměrný proud o intenzitě $i = 0,707 I_0$.

Následující věta může být využita k odhadu některých integrálů

Věta 8.2.2. Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu: Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v intervalu (a, b) a je-li funkce $g(x)$ v (a, b) nezáporná a nerostoucí, existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x)dx. \quad (8.2.3)$$

Zcela obdobnou větu lze vyslovit pro případ, že $g(x)$ je v intervalu (a, b) nezáporná a neklesající, tj. na pravé straně 8.2.3 je pak integrál $g(b) \int_c^b f(x)dx$

Příklad 8.2.3. Odhadněte hodnotu integrálu

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (8.2.4)$$

Řešení: Funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ jsou v uvažovaném intervalu $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ spojité a funkce $g(x)$ je kladná a nerostoucí.

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^c \sin x dx = \frac{1}{100\pi} (\cos 100\pi - \cos c)$$

kde c je kladné číslo z intervalu $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$. Dále pro všechna $c \in \langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ platí $0 \leq 1 - \cos c \leq 2$, takže

$$0 \leq \int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{50\pi}.$$

References

[Kni+O4] V. Knichal et al. Matematika II. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on p. 34).

9. Řady

Obsah

Seznam literatury	35
-------------------------	----

Část III.

Obyčejné diferenciální rovnice

10. Elementární metody řešení diferenciálních rovnic

10.1. Diferenciální rovnice 1. řádu

Obsah

10.1. Diferenciální rovnice 1. řádu	39
Seznam literatury	39

Řada fyzikálních principů má tvar výroku, resp. vztahu mezi jistými veličinami (funkcemi) a jejich změnami, vztaženými ke zvoleným nezávisle proměnným parametru (čas, souřadnice). Změny (okamžité, lokální) se nejlépe vystihují pomocí derivací. Takový zákon má pak charakter vztahu mezi uvažovanými veličinami a jejich derivacemi. Nejčastěji bývá vztah vyjádřen formou rovnosti:

- Newtonův zákon: okamžitá změna hybnosti $p(t) = m(t) \cdot v(t)$ pohybujícího se objektu je úměrná působící síle $F(t)$ v každém okamžiku t zvoleného časového rozmezí

$$\frac{d}{dt} (m(t) \cdot v(t)) = F(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

- Kirchhoffův zákon pro LR – obvod: v okamžiku t je součet napětí na cívce s indukčností L a na rezistoru o odporu R roven napětí $U(t)$ na svorkách zdroje. Tuto rovnost pak zapisujeme ve tvaru (pro L,R = konst)

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri = u(t), \quad (10.1.1)$$

kde $i = i(t)$... funkce popisující závislost proudu na čase.

Chceme-li určit funkci $i = i(t)$ popisující průběh proudu v obvodu tak, aby byl splněn příslušný K.z. a současně, aby byl splněn požadavek na počáteční stav:

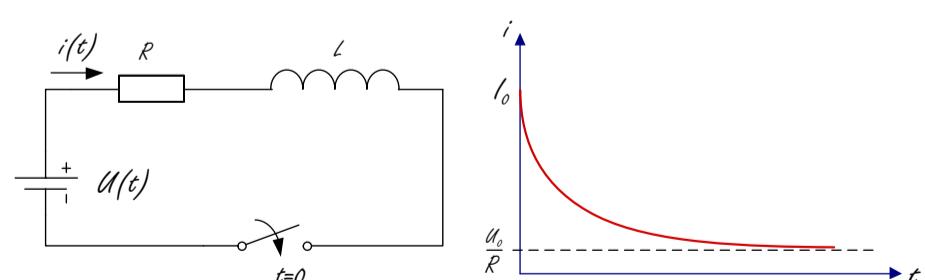
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U, \quad i(0) = I_0, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (10.1.2)$$

Metodami uvedenými později stanovíme právě jednu funkci $i = i(t)$, která je řešením dané tzv. **počáteční úlohy**.

$$i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad (10.1.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{U_0}{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} i(t) = I_0 = i(0)$$

- tedy obvykle formulujeme úlohu najít jistou funkci tak, aby zákon byl splněn tj. Kirchhoffův zákon užijeme k tomu, abychom nalezli funkci $i(t)$
- užijeme-li rovnosti vyjadřující takový zákon k tomu, abychom určili funkci, která v takovém vztahu vystupuje spolu s derivacemi, stává se tento požadavek úlohou, která má charakter rovnice s derivacemi, neboli diferenciální rovnice. Funkce, která požadavek splňuje, se pak nazývá řešení diferenciální rovnice.



Obrázek 10.1.1.: Graf průběhu proudu $i(t)$ po sepnutí spínače v době $t = 0$.

Část IV.

Numerické metody

11. Úvod do numerických metod

Obsah

11.1. Úvodní slovo	43
11.2. Reprezentace čísel ve výpočetní technice	44
11.2.1. Zaokrouhlování	44
11.3. Chyby při numerických výpočtech	44
11.3.1. Zdroje a typy chyb	44
11.3.2. Definice chyb, šíření chyb při výpočtu	44
11.3.3. Absolutní a relativní chyba	44
11.4. Řešení nelineárních rovnic	45
11.4.1. Motivace	45
11.4.2. Metoda bisekce	45

11.1. Úvodní slovo

Numerické metody jsou metody, které na rozdíl od metod analytických poskytujících spojité řešení na určité předem definované oblasti, dávají číselné řešení v předem zvolených diskrétních bodech této oblasti. Na rozdíl od analytických metod toto řešení většinou nebývá přesné, ale představuje pouze jeho approximaci, která je zatížena určitou chybou.

Možnosti analytických metod se již asi třicet let pokládají prakticky za vyčerpané. Drtivá většina problémů (a to zdaleka nejen v oblasti technických věd), které bylo možno analyticky vyřešit, již tehdy byla vyřešena. Při výpočetním výsledkům ovšem v mnoha případech nastávaly značné problémy; spojité řešení bylo například popsáno kombinací vyšších funkcí (Besselovy, Legendrové atd.) v podobě nekonečných řad, přičemž bylo třeba načítat dostatečný počet jejich členů k dosažení požadované přesnosti. A zde se již začaly uplatňovat různé numerické techniky, které ovšem bylo v té době možno realizovat jen na kalkulačkách nebo ze současného pohledu na primitivních počítačích.

Ačkoli základy sofistikovaných numerických metod byly položeny již před více než šedesáti lety, jejich intenzivní a široký rozvoj je spojen teprve s vývojem a zdokonalováním výpočetní techniky v posledních asi čtyřiceti letech a lze říci, že v poslední době s řešením čím dál tím složitějších problémů ze všech vědních oblastí (nestacionární a nelineární úlohy ve 2D a 3D) stále nabývají na významu.

Výsledkem aplikace převážné většiny numerických metod je sestavení velkého systému lineárních či nelineárních algebraických rovnic, který je nutno nějakým způsobem vyřešit existují ovšem numerické techniky i pro jiné účely, jako je například součet různých řad, výpočet určitých integrálů atd., jejich počet však není příliš velký). A v popředí zájmu jsou především dvě otázky:

- jak sestavit onen systém tak, aby počet zmíněných rovnic byl co nejmenší (přičemž ale informace o rozložení hledané veličiny v oblasti je maximální a co nejpřesnější) a
- jak tento systém vyřešit co nejrychleji a s nejmenší možnou chybou.

Na tomto místě je nutno podotknout, že i malá vylepšení stávajících postupů mohou při řešení složitých úloh vedoucí na řešení soustav milionů či desítek milionů rovnic (aktuální stav) zajistit velmi výrazné časové úspory. Samotná realizace jakékoli numerické metody sestává z několika kroků:

- Sestavení matematického modelu dané úlohy. Tento krok je sám o sobě často nesmírně komplikovaný; reálný fyzikální problém musíme mnohdy zjednodušit tak, aby byl vůbec dostupnými prostředky řešitelný, aniž by však vzniklé chyby přesáhly přijatelné hodnoty. Takový matematický model zpravidla sestává z různých rovnic (algebraických, diferenciálních, integrálních, smíšených), neurčitých nebo určitých integrálů a podobně.
- Výběr konkrétní metodiky, jakou tento model budeme řešit. Uvedená metodika by měla být co nejvhodnější z celé řady hledisek, jako je rychlosť výpočtu, spolehlivost, robustnost, přesnost, konvergence, stabilita atd. O těchto pojmech jistě už většinou máme jakousi intuitivní představu, v dalším textu však některé z nich upřesníme. Na základě zvolené metody vypracujeme algoritmus, což je konečné množství instrukcí, které musíme provést, aby se celý výpočet bezezbytku provedl.
- Navržený algoritmus musíme nyní naprogramovat. Přitom lze využít buď nějakého programovacího jazyka (FORTRAN, C++ a další), nebo nějakého prostředí s již předprogramovanými operacemi nebo celými bloky výpočtu (MatLab, Mathematica). V některých případech lze využít i již existujících profesionálních programů, které

takový algoritmus obsahují (freeware tohoto typu je velmi řídké). Ty jsou ovšem velmi drahé a uživatel do nich zpravidla nemůže zasahovat za účelem například optimalizace výpočtu.

- Dalším krokem je realizace výpočtu. Zde je kromě provedení samotného výpočtu nutné ověřit, že výsledky jsou korektní. K tomu používáme buď experiment, nebo jinou metodu, která je již pro úlohu daného typu spolehlivě prověřená. Dále ověřujeme celou řadu aspektů, jako je například geometrická konvergence řešení (závislost výsledků na hustotě diskretizační sítě) a popřípadě jiná kritéria, o nichž se více dozvímme později.
- Posledním krokem je vyhodnocení a posouzení získaných výsledků, zpravidla na vizuálním základě, porovnáním, ale i jinak.

11.2. Reprezentace čísel ve výpočetní technice

Při realizaci numerických algoritmů na počítači se lze setkat se dvojí reprezentací čísel, a to pomocí **pevné** nebo **plovoucí desetinné tečky**. Pevná desetinná tečka znamená vždy předem definovaný počet desetinných míst. Pracujeme-li se čtyřmi desetinnými místy, interpretují se následující čísla takto:

8675	8675.0000
3.24	3.2400
-0.000006	-0.0000

Tabulka 11.2.1.: Reprezentace čísel v pevné desetinné tečce

Zatímco první dvě čísla jsou zobrazena přesně, třetí číslo nikoli, je zaokrouhleno. Proto je tento způsob nepraktický, při vědeckotechnických výpočtech se neužívá a v dalším textu se jím už nebude zábývat.

Daleko pružnější je proto počítání s plovoucí desetinnou tečkou, kdy se v každém číslu respektuje předepsaný počet prvních číslic. V tomto případě se uvedená čísla zobrazují takto:

8675	+0.8675E+04	nebo	+8.675E+03
3.24	+0.3240E+01	nebo	+3.240E+00
-0.000006	-0.6000E-05	nebo	-6.000E-06

Tabulka 11.2.2.: Reprezentace čísel v plovoucí desetinné tečce

Každé nenulové číslo a lze reprezentovat jako $a = +m \cdot 10^e$, kde $0.1 < m < 1$ a e je celé číslo. Samozřejmě, číslo m může obsahovat nekonečnou řadu číslic a celé číslo e se může pohybovat od minus nekonečna do nekonečna. To ale v počítačové reprezentaci není možné; zde je číslo m omezeno na konečný počet n číslic a právě tak je omezen i exponent. Číslo a je tedy počítačem approximováno jako $a = \pm m \cdot 10^e$, kde $m = 0.d_1d_2\dots d_n$. Toto číslo m se nazývá **mantisa** a e **exponent**.

V jednoduché přesnosti má v počítačích e velikost $|e| < 38$, ve dvojitě přesnosti $|e| < 308$. Jsou-li tyto hodnoty překročeny, vzniká chyba známá jako **underflow** nebo **overflow**.

11.2.1. Zaokrouhlování

Čísla jsou v počítačové interpretaci často zaokrouhlována (mají-li v mantise velký počet číslic), poněvadž mantisa m zde může těchto číslic obsahovat pouze n . Pravidla zaokrouhlování jsou jasná. Zopakujeme zde jen to, že čísla typu 7.65 nebo 7.75 (chceme-li zrušit jedno desetinné místo) zaokrouhlíme tak, že poslední číslice je sudá. Takže zatímco 7.65 zaokrouhlíme na 7.6, 7.75 zaokrouhlíme na 7.8.

Chybu při zaokrouhlování můžeme určit jako (n je počet číslic v mantise m)

$$\left| \frac{m - \hat{m}}{m} \right| \leq \frac{0.5}{10^{n-1}} \quad (11.2.1)$$

11.3. Chyby při numerických výpočtech

Protože základem numerických metod je získávání přibližných výsledků, je nutné mít vždy představu, jaký rozdíl může být mezi přesným řešením dané úlohy a řešením získaným použitou numerickou metodou.

11.3.1. Zdroje a typy chyb

Pomineme-li jako zdroj chyb člověka dopouštějícího se omylu, můžeme chyby rozdělit na několik základních druhů.

- **Chyby matematického modelu** - vznikají nahrazením reálné fyzikální situace matematickým modelem. Může se jednat například o popis nějakého fyzikálního děje pomocí diferenciální rovnice.
- **Chyby vstupních dat** - jsou způsobeny nepřesnostmi při měření fyzikálních veličin
- **Chyby numerické metody** - vznikají při nahrazení původní matematické úlohy jednodušší numerickou. Často se jedná o nahradu nekonečného procesu procesem konečným, např. při výpočtu hodnoty některé elementární funkce pomocí součtu několika prvních členů její nekonečné Taylorovy řady nebo při approximaci určitého integrálu součtem konečného počtu funkčních hodnot. Odhad této chyby je důležitou součástí řešení každé numerické úlohy.
- **Chyby zaokrouhlovací** - vznikají tím, že při výpočtech pracujeme s čísly zaokrouhlenými na určitý, relativně nevelký počet míst. Tyto chyby se při výpočtu mohou kumulovat, nebo navzájem rušit. Při velkém počtu operací je posouzení jejich vlivu velmi náročné.

11.3.2. Definice chyb, šíření chyb při výpočtu

11.3.3. Absolutní a relativní chyba

Je-li hodnota \underline{c} approximace přesné hodnoty c , je **absolutní chyba** definována jako $\varepsilon = c - \underline{c}$ a **relativní chyba** $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{c}, c \neq 0$. Tato definice se může zdát neužitečná, poněvadž c neznáme. Lze-li však říci, že pokud se approximace \underline{c} blíží k c , můžeme psát $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\underline{c}}, \underline{c} \neq 0$. Bohužel, většinou neznáme ani hodnotu ε . Někdy však její hodnotu můžeme odhadnout vztahem $|\varepsilon| \leq \sigma$ a podobně lze odhadnout pro relativní chybu $|\varepsilon_r| \leq \sigma_r$.

11.3.3.1. Šíření chyb

Meze absolutních chyb při sčítání a odečítání se rovnají součtu příslušných mezi. Meze relativních chyb při násobení a dělení se rovnají součtu mezi jednotlivých relativních chyb.

- Nechť $|x_i - \hat{x}_i| = |\varepsilon_i| \leq \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \hat{x}_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (11.3.1)$$

- Nechť dále $\left| \frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right| = |\varepsilon_{ri}| \leq \sigma_{ri}, \quad i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n \hat{x}_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i - \varepsilon_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} \right| \end{aligned}$$

kde jsme ale při rozdílu součinů v druhém výrazu zanedbali všechny násobky různých absolutních chyb, tedy členy druhého a vyšších řádů.

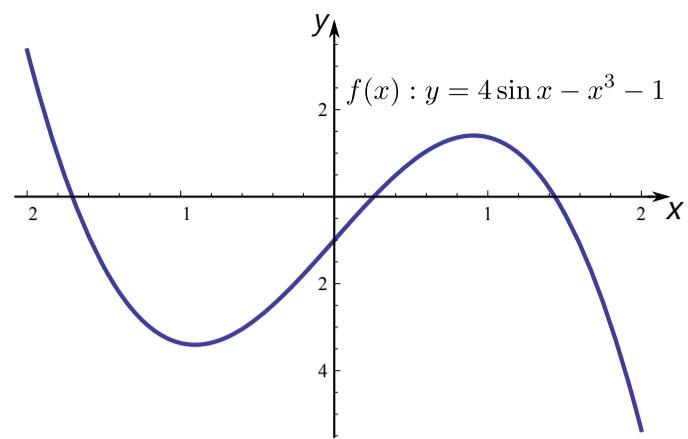
11.3.3.2. Podmíněnost numerických úloh a numerická stabilita algoritmů

Při numerickém řešení různých úloh musíme zkoumat, jaký vliv na výsledek mají malé změny ve vstupních hodnotách a zaokrouhlování během výpočtu. Řešení numerických úloh můžeme považovat za postup, kterým přiřazujeme vstupním údajům výstupní data. Je-li toto přiřazení spojité zobrazení, pak říkáme, že numerická úloha je **korektní úloha**, v opačném případě se jedná o úlohu **nekorektní**.

Pro tyto úlohy má zásadní význam relativní citlivost výsledku na malé změny ve vstupních parametrech úlohy. Korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malým relativním změnám vstupních údajů odpovídají malé relativní změny výstupních údajů. Číslo

$$C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}, \quad (11.3.2)$$

nazýváme **číslo podmíněnosti úlohy**. Pro dobře podmíněné úlohy je číslo C_p blízké číslu 1. Pokud malé relativní změny na vstupu způsobí velké relativní změny na výstupu, pak mluvíme o **špatně podmíněné úloze**. Řešení špatně podmíněných úloh je nejlépe se vyhnout, protože výsledky jakéhokoliv algoritmu jsou velmi nespolehlivé. Podobně řekneme, že je algoritmus **dobře podmíněný**, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech. Kromě nepřesnosti ve vstupních údajích ovlivňuje výsledek použitého algoritmu i zaokrouhlování čísel během výpočtu. Je-li vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek malý, mluvíme o **numericky stabilním algoritmu**. *Algoritmus dobré podmíněný a numericky stabilní se nazývá stabilní.*



Obrázek 11.4.1.: Graf funkce $f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$.

11.4.2. Metoda bisekce

Metoda známá také jako **metoda půlení intervalů**, je založena na principu znaménkových změn. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v koncových bodech intervalu (a_0, b_0) opačná znaménka, tj. platí $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Sestrojíme posloupnost intervalů $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$, které obsahují kořen. Intervaly (a_{k+1}, b_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots$, určíme rekurzivně způsobem, který si nyní popíšeme.

Střed intervalu (a_k, b_k) je bod $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Když $f(x_k) = 0$, pak $x_{k+1} = x^*$ je kořen a dál nepokračujeme.

11.4. Řešení nelineárních rovnic

11.4.1. Motivace

Kořeny nelineárních rovnic $f(x) = 0$ obecně neumíme vyjádřit explicitním vzorcem. K řešení nelineární rovnice proto používáme iteracní metody: z jedné nebo několika počátečních approximací hledaného kořene \hat{x} generujeme posloupnost x_0, x_1, x_2, \dots , která ke kořenu \hat{x} konverguje. Pro některé metody stačí, když zadáme interval (a, b) , který obsahuje hledaný kořen. Jiné metody vyžadují, aby počáteční approximace byla k hledanému kořenu dosti blízko; na oplatku takové metody konvergují mnohem rychleji. Často proto začínáme s "hrubou", avšak spolehlivou metodou, a teprve když jsme dostatečně blízko kořene, přejdeme na "jemnější", rychleji konvergující metodu.

Abychom naše úvahy zjednodušili, omezíme se na problém určení reálného jednoduchého kořene \hat{x} rovnice $f(x) = 0$, tj. předpokládáme, že $f'(\hat{x}) = 0$. Budeme také automaticky předpokládat, že funkce $f(x)$ je spojitá a má tolik spojitých derivací, kolik je jich v dané situaci zapotřebí.

Počáteční approximaci kořenů rovnice $f(x) = 0$ můžeme zjistit z grafu funkce $f(x)$: ručně, nebo raději pomocí vhodného programu na počítači, vykreslíme funkci $f(x)$ a vyhledáme její průsečíky s osou x .

Jinou možností je sestavení tabulky $[x_i, f(x_i)]$ pro nějaké dělení:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Příklad 11.4.1. Získejme hrubý odhad kořenů rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$$

Z obrázku 11.4.1 zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (-1, 0)$ a $x_3^* \in (1, 2)$.

Z obrázku zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (0, 1)$, $x_3^* \in (1, 2)$. Zkusme najít kořeny v těchto intervalech pomocí numerických metod popsánych v následujících odstavcích

Část V.

Fyzika

12. Historie fyziky

Obsah

12.1. Hlavní etapy vývoje	49
-------------------------------------	----

12.1. Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egyptané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimédovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlosť, zrychlení, síla apod.). Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich drahách kolem Slunce je táz jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a též elektromagnetické povahy. V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická

fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileihho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozpor vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoročasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlosť světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonova. Přelom 19. a 20. století je též pojmenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádřech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrin. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou též podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou též povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

13. Práce a potenciální energie

13.1. Potenciály a pole

Obsah

13.1. Potenciály a pole	51
-------------------------	----

$$K_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (13.1.1)$$

14. Elektromagnetismus

Obsah

14.1. Elektrické síly	53
14.2. Elektrická a magnetická pole	54
14.3. Charakteristiky vektorových polí	55
14.4. Zákony elektromagnetizmu	55
14.5. Co jsou pole?	58
14.6. Působení na dálku versus teorie pole	59
14.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice	59

14.1. Elektrické síly

[FLMoo, s. 13] Představme si sílu, která se podobá gravitaci a mění se převážně nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti, ale asi miliardu miliard miliard miliard-krát větší. A ještě s jedním rozdílem. Nechť existují dva druhy „látky“, které nazývajme kladná a záporná. Nechť na rozdíl od gravitace, v níž existuje pouze přitahování, se stejně druhy odpuzují a odlišné druhy přitahují. Co by se stalo?

Chomáč kladné látky by se ohromnou silou odpuzoval a rozptýlil by se na všechny strany. S chomáčem záporné by se stalo totéž. Ale směs stejného množství kladné a záporné látky by se chovala zcela odlišně. Ohromná přitažlivá síla by přitáhla opačné kousky k sobě. V konečném důsledku by se tyto úžasné síly navzájem téměř dokonale vykompenzovaly vytvořením hutných jemných směsí kladného a záporného, přičemž mezi dvěma oddělenými chomáči takových směsí by neexistovalo téměř žádné přitahování nebo odpuzování.

Taková síla existuje - je to elektrická síla! A každá látka je směsí kladných protonů a záporných elektronů, které se touto velkou silou přitahují a odpuzují. Ale vyvážení je tak dokonalé, že když stojíte blízko někoho jiného, necítíte sílu vůbec žádnou. Kdyby existoval jen malý zbytek nerovnováhy, poznali bychom to. Kdybyste stáli od někoho na vzdálenost paže a každý z vás by měl o jedno procento více elektronů než protonů, byla by odpudivá síla mezi vámi neuvěřitelná. Jak velká? Dost na to, aby zvedla obrovský mrakodrap? Ne! Aby zvedla Mount Everest? Ne! Odpuzování by stačilo na zvednutí břemene s hmotností celé zeměkoule!

S ohledem na tak perfektní vyvážení ohromné síly, působící v této směsi, není těžké pochopit, že látka s tendencí udržet své kladné a záporné náboje v nejjemnější rovnováze může mít velkou tvrdost a pevnost. Mrakodrap Empire State Building se například vychyluje ve větru jen o necelé tři metry, neboť elektrické síly udržují každý elektron a proton víceméně ve stálé poloze. Na druhé straně, když se podíváme na tak malé množství látky, že uvidíme jen několik atomů, libovolná malá část látky obvykle nebude mít stejný počet kladných a záporných; nábojů, takže budou existovat velké zbytkové elektrické síly. I kdyby byly počty obou druhů nábojů ve dvou sousedních malých částech stejné, pravděpodobně ještě zůstanou mezi oběma částmi elektrické síly, neboť síly mezi jednotlivými náboji se mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti. Zbytková síla může vzniknout, nachází-li se záporný náboj jedné části blíž kladnému náboji než kladný náboj zápornému v části jiné. Pak mohou být přitažlivé síly větší než odpudivé a může dojít k výslednému přitahování i dvou částí bez nadbytečných nábojů. Síla, která „udržuje“ pohromadě atomy, a chemická síla, která drží molekuly, jsou ve skutečnosti elektrickými silami působícími v oblastech s nedokončalou rovnováhou nábojů anebo s velmi malými vzdálenostmi.

Samozřejmě víme, že se atomy skládají z kladných protonů v jádře a záporných elektronů v jeho okolí. Můžeme se ptát: Když je tato elektrická síla tak úžasná, proč spolu protony a elektrony nesplynou? Když mají tvořit dokonalou směs, proč tato směs není ještě dokonalejší? Odpověď nacházíme v kvantových jevech. Pokusíme-li se naše elektrony uzavřít do oblasti těsně přiléhající k protonům, musí mít podle principu neurčitosti nenulovou střední kvadratickou hybnost, která je tím větší, čím těsnější je ohraničení. Právě tento pohyb, vyplývající ze zákonů kvantové mechaniky, zabraňuje elektrické přitažlivosti dostat náboje jakýmkoli způsobem blíž k sobě.

Je tu další otázka: Co drží pohromadě atomové jádro? V jádře je několik kladných protonů. Proč se od sebe neoddělí? Ukazuje se, že v jádře existují kromě elektrických i neelektrické síly, které se nazývají jaderné síly. Jsou větší než elektrické síly a jsou schopné držet protony u sebe i přes jejich elektrické odpuzování. Síly jádra však mají malý dosah - jejich velikost klesá mnohem rychleji než $\frac{1}{r^2}$. A to má důležitý důsledek. Kdyby jádro obsahovalo velmi mnoho protonů, stalo by se příliš velkým a nezůstalo by pohromadě. Příkladem je uran s 92 protony. Jaderné síly

působí převážně jen mezi každým protonem (nebo neutronem) a jeho nejbližším sousedem, ale elektrické síly působí i na větší vzdálenosti a vyvolávají tak odpuzování každého protonu od všech ostatních v jádře. Čím víc je v jádře protonů, tím je elektrické odpuzování silnější, až dokud - jako v případě uranu - není rovnováha tak křehká, že je jádro účinkem elektrické síly téměř připraveno se rozletět. Jestliže takové jádro jen trochu „postrčíme“ (pokud do něj vyšleme pomalý neutron), rozdělí se na dvě části s kladným nábojem. V důsledku elektrického odpuzování od sebe obě části odletí. Energie, která se při tom uvolňuje, je energií atomové bomby. Obvykle se tato energie nazývá jaderná, ale v podstatě je to elektrická energie uvolněná tehdy, když elektrické síly překonaly přitažlivé síly jádra.

Konečně se můžeme ptát, co drží pohromadě záporný elektron (neboť ten nemá žádné jaderné síly). Skládá-li se elektron celý z jednoho druhu látky, každá z jeho částí by měla odpuzovat ty ostatní. Proč se tedy nerozletí? Má však elektron „části“? Asi bychom měli říct, že elektron je jen bod a že elektrické síly působí jen mezi různými dvěma bodovými náboji, takže sám na sebe elektron nepůsobí. Snad. Vše, co můžeme říct, je, že otázka, co drží pohromadě elektron, způsobila v pokusech o vytvoření úplné teorie elektromagnetizmu mnoho těžkostí. Tato otázka zatím nebyla zodpovězena. V dalších kapitolách se budeme tomuto tématu věnovat více.

Jak jsme viděli, je třeba čekat, že právě kombinace elektrických sil a kvantově mechanických jevů bude určovat detailní strukturu makroskopických množství látek, a tím i jejich vlastnosti. Některé látky jsou tvrdé, jiné měkké. Některé jsou elektrickými vodiči, protože jejich elektrony se mohou volně pohybovat, jiné jsou izolátory, protože jejich elektrony jsou pevně připoutané k jednotlivým atomům. Později budeme hovořit o tom, jak vznikají některé z těchto vlastností. Je to však složitá otázka, proto nejdřív budeme zkoumat elektrické síly jen v jednoduchých situacích. Začneme s probíráním zákonů elektřiny, včetně magnetizmu, který je vlastně částí téhož předmětu.

Řekli jsme, že elektrická síla podobně jako gravitační klesá nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti mezi náboji. Tento vztah se nazývá Coulombův zákon. Ale neplatí přesně, když se náboje pohybují, protože elektrické síly závisí také na pohybu nábojů, a to komplikovaným způsobem. Jednu část síly mezi pohybujícími se náboji nazýváme *magnetická síla*, která vlastně představuje jeden aspekt elektrického účinku. Právě proto hovoříme o „elektromagnetizmu“.

Existuje důležitý obecný princip, který umožňuje zacházet s elektromagnetickými silami poměrně snadno. Experimentálně se zjistilo, že síla působící na náboj závisí pouze na poloze tohoto náboje, jeho rychlosti a velikosti, bez ohledu na to, kolik dalších nábojů existuje a jak se pohybují. Sílu \vec{F} působící na náboj q , který se pohybuje rychlostí \vec{v} , můžeme vyjádřit takto:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (14.1.1)$$

kde \vec{E} je *elektrické pole* a \vec{B} *magnetické pole* v místě, kde se nachází náboj. Důležité je, že elektrické síly všech nábojů ve vesmíru lze složit právě z těchto dvou vektorů. Jejich hodnoty závisí na tom, kde se uvažovaný náboj nachází, a mohou se v čase měnit. Kromě toho, nahradíme-li tento náboj jiným, změní se síla působící na nový náboj v poměru velikostí obou nábojů, nezmění-li všechny ostatní náboje na světě svou polohu nebo pohyb. (Samozřejmě že v reálné situaci každý náboj působí na všechny ostatní ve svém okolí a může je uvést do pohybu. A tak když v některých případech nahradíme náš určitý náboj jiným nábojem, mohou se pole změnit.)

Z 1. dílu víme, jak se určuje pohyb částice, známe-li sílu, která na ni působí. Dosadíme-li výraz (14.1.1) do pohybové rovnice, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (14.1.2)$$

Známe-li \vec{E} a \vec{B} , můžeme určit pohyby nabitéch částic. K tomu už jen potřebujeme vědět, jak \vec{E} a \vec{B} vznikají.

Jeden z nejdůležitějších zjednodušujících principů vytváření elektrických polí závisí na tomto: Předpokládejme, že určitý počet nábojů pohybujících se libovolným způsobem vytvoří pole \vec{E}_1 a jiná množina nábojů

vytvoří pole \vec{E}_2 . Působí-li obě množiny nábojů současně (při zachování stejných pohybů a poloh, které měly, když jsme o nich uvažovali odděleně), vytvoří pole, které je dáno součtem

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (14.1.3)$$

Tento fakt se nazývá princip *superpozice polí*. Platí také pro magnetická pole.

Z tohoto principu vyplývá, že budeme-li vědět, podle jakého zákona vytváří elektrická a magnetická pole jediný náboj pohybující se libovolným způsobem, zákony elektrodynamiky už budou úplné. Chceme-li znát sílu působící na náboj A , je třeba spočítat pouze \vec{E} a \vec{B} , které vytváří každý náboj B, C, D atd., pak vypočítat vektory \vec{E} a \vec{B} všech nábojů, a tak najít pole a síly působící z nich na A . Kdyby se ukázalo, že zákon, podle kterého se vytváří pole jediného náboje, je jednoduchý, byla by to nejšikovnější cesta, jak popsat zákony elektrodynamiky. My už jsme uvedli tento zákon (kapitola 28, díl 1), který je, bohužel, dost složitý.

Ukazuje se, že tvar, ve kterém jsou zákony elektrodynamiky nejednodušší, není tím tvarem, který byste zde mohli očekávat. Není totiž vůbec jednoduché udělat vzorec síly, kterou působí jeden náboj na druhý. Je pravda, že pokud jsou náboje v klidu, je výraz pro Coulombovu sílu ještě jednoduchý, ale když se náboje pohybují, vztahy se komplikují kromě jiného i časovým zpožděním a zrychlením. Z tohoto důvodu nehodláme prezentovat elektrodynamiku pouze prostřednictvím zákonů síly působící mezi náboji; pokládáme za vhodnější jiné hledisko - při něm jsou zákony elektrodynamiky zvládnutelné snáze.

14.2. Elektrická a magnetická pole

Nejdříve si musíme trochu rozšířit naši představu o elektrickém vektoru \vec{E} a magnetickém vektoru \vec{B} . Definovali jsme je pomocí sil působících na náboj. Nyní chceme hovořit o elektrických a magnetických polích v bodě, i v tom případě, kdy se v něm nenachází žádný elektrický náboj. Tvrdíme: jestliže existují síly působící na náboj, existuje tam „něco“ i tehdy, je-li náboj odstraněn. Když na náboj umístěný v bodě (x, y, z) působí v čase t síla \vec{F} daná výrazem (14.1.1), přiřazujeme bodu (x, y, z) v prostoru vektory \vec{E} a \vec{B} . O vektorech $\vec{E}(x, y, z, t)$ a $\vec{B}(x, y, z, t)$ si můžeme myslet, že určují síly, které by působily v čase t na náboj umístěný v bodě (x, y, z) za podmínky, že umístění náboje do bodu (x, y, z) neporuší polohy nebo pohyby žádných jiných nábojů vytvářejících i pole \vec{E} a \vec{B} .

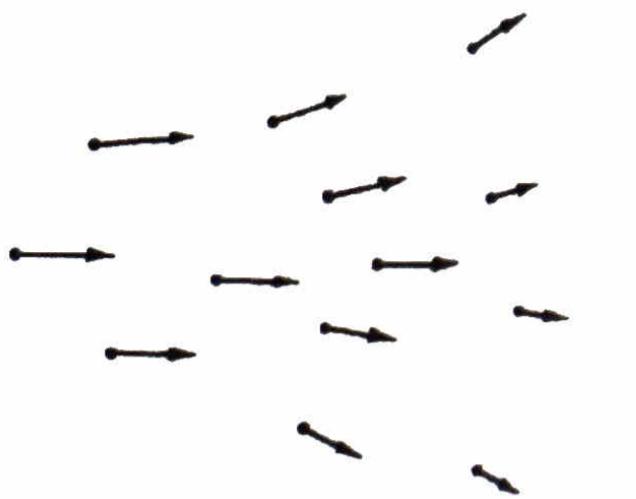
Podle této představy připíšeme každému bodu (x, y, z) v prostoru dva vektory \vec{E} a \vec{B} , které se mohou měnit v čase. Elektrická a magnetická pole pak chápeme jako *vektorové funkce* proměnných x, y, z a t . Protože vektor je určen svými složkami, každé z polí $\vec{E}(x, y, z, t)$ a $\vec{B}(x, y, z, t)$ představuje tři reálné funkce proměnných x, y, z a t .

Právě proto, že \vec{E} (nebo \vec{B}) je možné určit v každém bodě v prostoru, nazývá se pole. Pole je jakákoliv fyzikální veličina, která nabývá různé hodnoty v různých bodech prostoru. Například teplota je polem - v tomto případě skalárním polem, které zapisujeme jako $T(x, y, z)$. Teplota se může také měnit v čase, říkáme, že je závislá na čase a zapisujeme ji jako $T(x, y, z, t)$. Jiným příkladem je „rychlostní pole“ tekoucí kapaliny. Rychlosť kapaliny v každém bodě prostoru v čase t zapisujeme jako $\vec{v}(x, y, z, t)$. Je to vektorové pole.

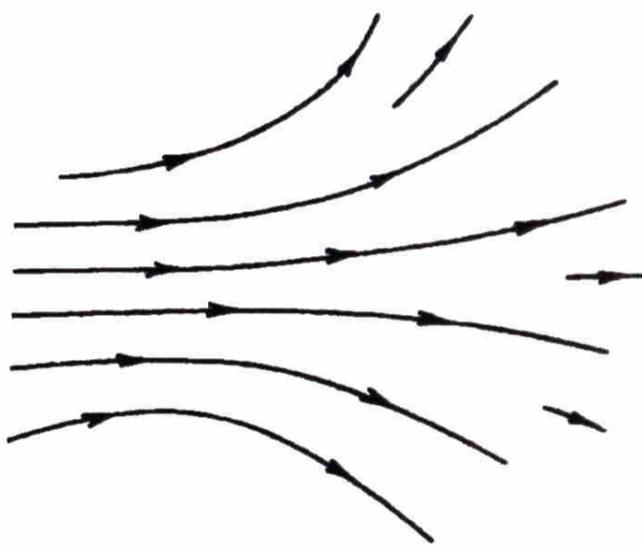
Vraťme se k elektromagnetickým polím. Ačkoliv se jejich závislost na nábojích, které je vytvořily, vyjadřuje složitými vzorce, mají důležitou následující vlastnost: vztahy mezi hodnotami polí v *jednom bodě* a hodnotami polí v *bodech sousedních* jsou velice jednoduché. Pole lze zcela popsat pomocí několika vztahů, které mají tvar diferenciálních rovnic. Právě pomocí takových rovnic se zapisují zákony elektrodynamiky nejjednodušší.

Existují rozmanité nápady, jak si vytvořit představu o chování polí. Nejsprávnější z nich je i nejabsolutnější: pole chápeme prostě jako matematické funkce polohy a času. Můžeme se pokusit získat představu pole také tím, že si v mnoha bodech prostoru nakreslíme vektory, z nichž každý bude udávat intenzitu a směr pole v daném bodě. Takové zobrazení pole vidíme na obr. 14.2.1a. Můžeme všude vektory ve směru tečny, tj. jakoby šly za šipkami a sledovaly směr pole. Když postupujeme takto, ztrácíme znázornění délek vektorů.

Intenzitu pole můžeme však znázornit tak, že křivky vykreslíme daleko od sebe, když je pole slabé, a blízko sebe, když je silné. Domluvíme se přitom, že počet křivek připadající na jednotku plochy postavenou kolmo na křivky bude přímo úměrný intenzitě pole. Toto je ovšem jen zjednodušení a vyžaduje, aby se tu a tam objevily nové křivky tak, aby jejich počet vždy souhlasil s intenzitou pole. Pole z obr. 14.2.1a je znázorněno pomocí těchto siločar na obr. 14.2.1b.



(a) šipkami, jejichž velikosti a směry udávají hodnoty vektorového pole v bodech, ze kterých vycházejí.



(b) siločar, jejichž tečny mají v každém bodě směr vektoru pole a jejichž hustota je úměrná velikosti vektoru pole.

Obrázek 14.2.1.: Znázornění vektorového pole

14.3. Charakteristiky vektorových polí

[FLMoo, s. 16] V našem popisu zákonů elektřiny, který se opírá o pojem pole, budeme používat dvě matematicky důležité vlastnosti vektorového pole. Předpokládejme, že máme nějakou uzavřenou plochu, a ptáme se, zda se „něco“ ztrácí z jejího nitra, tj. zda má pole vlastnost „výtoku“. Například v případě rychlostního pole bychom se mohli ptát, zda rychlosť směruje vždy ven z plochy, nebo obecněji, zda víc kapaliny (za jednotku času) vytéká než vtéká. Výsledné množství kapaliny, vytékající z určité plochy za jednotku času, se nazývá tok rychlostí plochou. Tok elementární ploškou je roven složce rychlostí kolmé na plošku, násobené velikostí plošky. Pro libovolnou uzavřenou plochu je čistý výtok, nebo krátké tok, roven součinu jejího plošného obsahu a střední normálovou složku rychlostí, orientované ven z objemu uzavřeného plochou:

$$\text{Tok} = (\text{Střední normálová složka}) \cdot (\text{plošný obsah}) \quad (14.3.1)$$

I v případě elektrického pole můžeme matematicky definovat veličinu analogickou k toku. Opět ji nazveme tokem, ale samozřejmě nepůjde o tok nějaké látky, protože elektrické pole není rychlosť něčeho. Ukazuje se však, že i tak je matematická veličina udávající střední normálovou složku pole velice užitečná. Pak hovoříme o elektrickém toku, definovaném taktéž podle (14.3.1). Přitom je užitečné zavést tok nejen zcela uzavřenou

plochou, ale jakoukoliv ohraničenou plochou. Podobně jako předtím se tok takovou plochou definuje jako součin jejího plošného obsahu a střední normálové složky vektoru. Tyto pojmy ilustruje obr. 14.3.1.

Druhá vlastnost vektorového pole se týká spíše křivky než plochy. Opět si představme rychlostní pole, které popisuje tok kapaliny. Mohli bychom si položit tuto zajímavou otázku: Cirkuluje kapalina? Myslíme tím toto: existuje výsledný rotační pohyb kapaliny podél nějaké uzavřené křivky? Představme si, že jsme v jeden okamžik zmrazili všechnu kapalinu s výjimkou vnitřku trubice s konstantním průřezem a tvarem uzavřené křivky, jako na obr. 14.3.2. Mimo trubici se kapalina zastaví, ale uvnitř se může udržovat v pohybu, a to v závislosti na hybnosti kapaliny zachycené v trubici, tj. podle toho, zda hybnost kapaliny v jednom směru podél trubice je větší než hybnost v opačném směru.

Veličinu nazvanou cirkulace definujeme jako výslednou rychlosť kapaliny v trubicích i násobenou délkou trubice. Naše pojmy můžeme nyní opět rozšířit a cirkulaci definovat pro jakékoli vektorové pole (i když tam není nic, co by se pohybovalo). Pro libovolné vektorové pole se cirkulace podél libovolné myšlené uzavřené křivky definuje jako střední tangenciální složka vektoru (s ohledem na směr oběhu po křivce) násobená délkou křivky (obr. 14.3.3).

$$\text{Cirkulace} = (\text{střední tangenciální složka}) \cdot (\text{délka křivky}). \quad (14.3.2)$$

Uvidíme, že z této definice opravdu vyplývá číslo, které je přímo úměrné rychlosti oběhu kapaliny v rychle zamrzlé trubici, popsané předtím.

Právě pomocí těchto dvou pojmu - toku a cirkulace — už můžeme uvést všechny zákony elektřiny a magnetizmu. Možná, že význam zákonů hned plně nepochopíme, ale poskytnou nám určitou představu o tom, jak se v konečném tvaru formuluje fyzika elektromagnetických jevů.

14.4. Zákony elektromagnetizmu

[FLMoo, s. 17] První zákon elektromagnetizmu určuje tok elektrického pole:

$$\text{Tok } \vec{E} \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = \frac{\text{celkový náboj uvnitř plochy}}{\epsilon_0} \quad (14.4.1)$$

kde ϵ_0 je vhodná konstanta (čte se „epsilon nula“). Není-li uvnitř plochy žádný náboj, ačkoliv v jejím okolí náboje jsou, je střední normálová složka \vec{E} nulová, takže výsledný tok plochou je nulový. Abychom naznačili hloubku tohoto tvrzení, můžeme ukázat, že vztah (14.4.1) je ekvivalentní s Coulombovým zákonem. Stačí doplnit předpoklad, že pole jednotlivého náboje je kulové symetrické. V případě bodového náboje opíšeme kolem náboje kulovou plochu. Střední normálová složka vektoru pole je pak dána právě velikostí \vec{E} v libovolném bodě kulové plochy, neboť pole má nevyhnuteLNě radiální směr a v každém bodě na kouli má stejnou intenzitu. Naše pravidlo tvrdí, že součin pole na povrchu koule a plošného obsahu jejího povrchu, tj. tok směrem ven z koule, je přímo úměrný náboji uvnitř koule. Jestliže bychom poloměr koule zvětšili, plošný obsah by vzrostl přímo úměrně druhé mocnině poloměru. Ale střední normálová složka elektrického pole vynásobená zvětšeným plošným obsahem se musí rovnat stejnemu náboji uvnitř, a pole se tedy musí zmenšit nepřímo úměrně druhé mocnině poloměru — dostáváme výsledek, že pole je nepřímo úměrné čtvrtci vzdálenosti.

Vezmeme-li libovolnou pevnou křivku v prostoru a měříme-li podél ní cirkulaci elektrického pole, zjistíme, že obecně není rovna nule (i když jde o Coulombovo pole). Pro elektřinu platí totiž i druhý zákon, podle něhož pro jakoukoliv plochu S (neuzavřenou) ohraničenou křivkou C platí

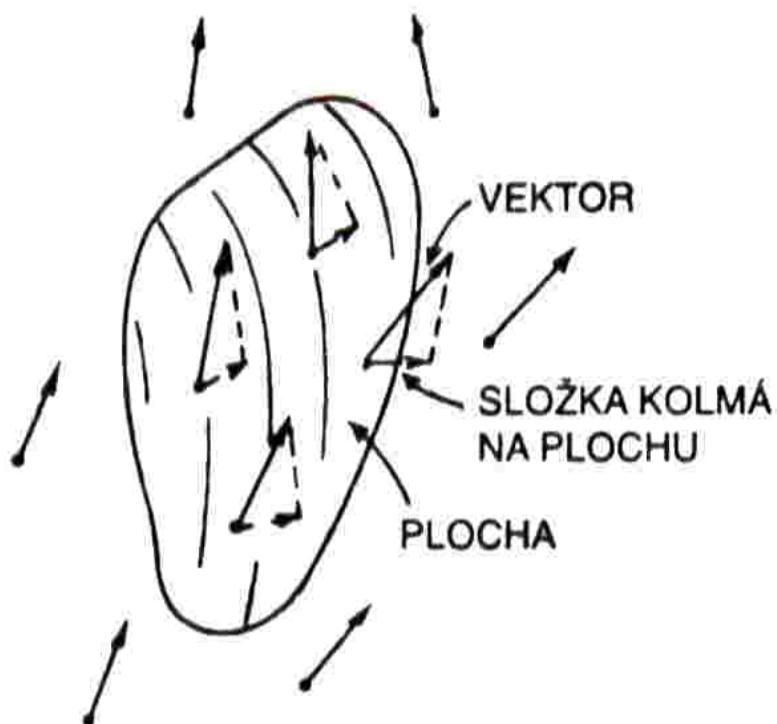
$$\text{Cirkulace } \vec{E} \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt}(\text{tok } \vec{B} \text{ plochou } S). \quad (14.4.2)$$

Zákony elektromagnetického pole můžeme završit zapsáním dvou analogických rovnic pro magnetické pole \vec{B} :

$$\text{Tok } \vec{B} \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = 0. \quad (14.4.3)$$

Pro plochu S ohraničenou křivkou C platí

$$c^2 \text{ Cirkulace } \vec{B} \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt}(\text{tok } \vec{E} \text{ plochou } S) + \frac{\text{elektrický proud plochou } S}{\epsilon_0}. \quad (14.4.4)$$



Obrázek 14.3.1.: Tok vektorového pole plochou se definuje jako součin střední hodnoty normálové složky vektoru a obsahu plochy.

Konstanta c^2 , která vystupuje v rovnici (14.4.4), je druhou mocninou rychlosti světla. Vyskytuje se tu proto, že magnetizmus je ve skutečnosti relativistickým efektem elektřiny. Konstanta ϵ_0 byla vložena proto, aby vhodným způsobem vyšly jednotky elektrického proudu.

Rovnice (14.4.1) až (14.4.4) spolu se vztahem (14.1.1) vyjadřují všechny zákony elektrodynamiky¹. Jak si vzpomínáte, Newtonovy zákony sice bylo možné snadno zapsat, ale měly mnoho velmi složitých důsledků a zabralo nám mnoho času, než jsme se o nich dověděli všechno. Napsat tyto naše zákony tak jednoduché není, z čehož vyplývá, že jejich důsledky budou ještě složitější, a zabere nám opravdu velmi mnoho času, než je všechny objasníme.

Zákony elektrodynamiky můžeme ilustrovat sérií jednoduchých pokusů, které kvalitativně ukazují vzájemné vztahy elektrických a magnetických polí. První člen ve vztahu (14.1.1) jste pocítili, když jste si česali vlasy, a proto ho nebudeme ilustrovat. Druhou část výrazu (14.1.1) lze demonstrovat při průchodu proudu vodičem, který visí nad tyčovým magnetem tak, jako na obr. 14.4.1.

Účinkem síly $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ se při zapnutí proudu vodič pohně. Po dobu trvání proudu se náboje uvnitř vodiče pohybují, tj. mají rychlosť \vec{v} , a proto na ně působí magnetické pole magnetu, což se projeví pohybem vodiče do strany.

Když se vodič pohně doleva, je třeba čekat, že magnet dostane náraz směrem doprava. (V opačném případě bychom mohli celé zařízení umístit na vůz a měli bychom pohonné systém, který nezachovává hybnost!) I když je síla příliš malá na to, aby byl pohyb tyčového magnetu viditelný, jemněji uložený magnet, např. střelka kompasu, by se pohnul.

Jak působí na magnet vodič elektrického proudu? Proud ve vodiči vytváří vlastní magnetické pole, které se projeví silovým působením na magnet. Podle posledního člena v rovnici (14.4.4) vyvolá proud nevyhnutelně *cirkulaci pole* \vec{B} — v tomto případě křivky pole \vec{B} (magnetické indukční čáry) jsou uzavřené a obepínají vodič, jak je vidět na obr. 14.4.2. Právě toto pole \vec{B} je původcem síly působící na magnet.

Podle rovnice (14.4.4) je při stálém proudu cirkulace pole \vec{B} stejná pro jakoukoliv křivku, která vodič obepíná. Křivky, např. kružnice, které jsou dále od vodiče, mají obvod větší, takže tangenciální složka \vec{B} musí být menší. Vidíte, že podle očekávání bude pole \vec{B} klesat nepřímo úměrně vzdálenosti od dlouhého přímého vodiče.

Řekli jsme, že proud ve vodiči vytváří magnetické pole a že v magnetickém poli působí na vodič, kterým prochází proud, síla. Pak bychom měli také očekávat, že vytvoříme-li magnetické pole proudem v jednom vodiči, bude působit silou na jiný vodič, kterým také prochází proud. Můžeme si to ukázat na dvou visících vodičích, jako na obr. 14.4.3. Mají-li proudy stejný směr, vodiče se přitahují, jsou-li proudy opačného směru, vodiče se odpuzují.

Krátce řečeno elektrické proudy vytvářejí magnetická pole právě tak jako magnety. Ale počkejte, co je vlastně magnet? Jestliže pohybující se náboje vyvolávají magnetická pole, není možné, že magnetické pole kousku železa je ve skutečnosti také důsledkem proudů? Ukazuje se, že ano. Tyčový magnet z našeho pokusu můžeme nahradit cívku navinutou z drátu, stejně jako na obr. 14.4.4. Prochází-li cívku proud (jakož i přímým vodičem nad ní), pozorujeme pohyb vodiče přesně jako předtím, kdy jsme měli místo cívky magnet. Jinak řečeno, proud v cívce imituje magnet. Ukazuje se tedy, že kus železa působí tak, jako kdyby obsahoval ustavičně obíhající proud. Magnety opravdu můžeme objasnit pomocí permanentních proudů v atomech železa. Sílu účinkující na magnet na obr. 14.4.2 vyvolává tedy druhý člen ve vztahu (14.1.1).

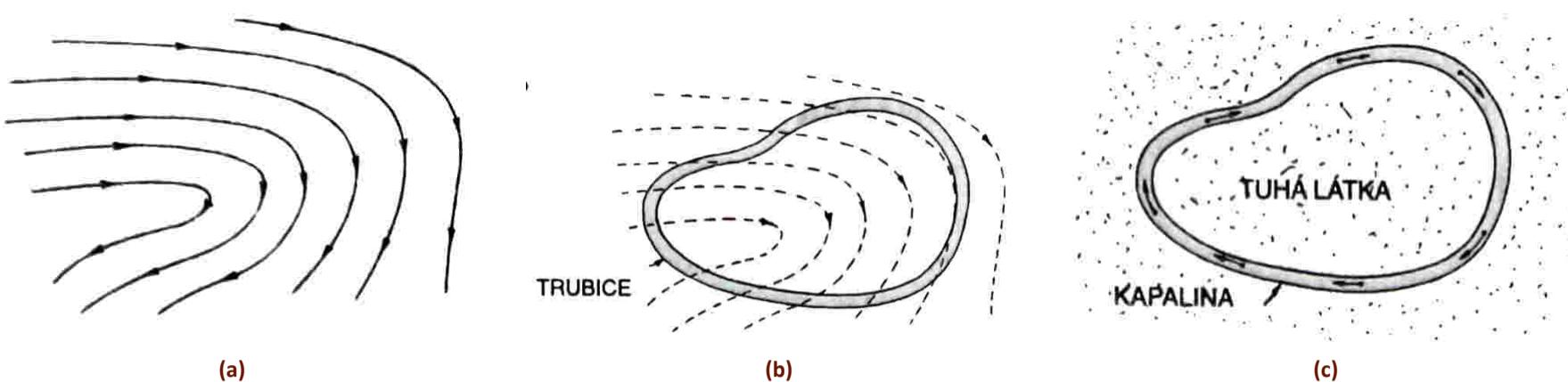
Odkud se tyto proudy berou? Jednou z možností je, že z pohybu elektronů v atomových orbitách. To však není případ železa, třebaže to tak v některých látkách je. Kromě oběhu v atomu se elektron otáčí i kolem své vlastní osy (nějak podobně jako vlastní rotace Země) a právě tento pohyb, tzv. spin elektronu, vytváří magnetické pole v případě železa. (Ríkáme, že je to „něco podobného“ jako vlastní rotace Země, protože tento problém zasahuje tak hluboko do kvantové mechaniky, že klasické představy opravdu příliš dobře nevystihují tyto poměry.) Ve většině látek se některé elektrony otáčejí jedním směrem, kdežto jiné směrem opačným, takže jejich magnetizmus se vyruší. Ale v železe - ze záhadného důvodu, o němž budeme hovořit později - jsou osy otáčení mnoha elektronů uspořádány jedním směrem, a to je zdrojem magnetizmu.

Protože pole magnetů pocházejí z proudů, nemusíme do rovnice (14.4.4) nebo (14.4.4) přidávat žádný zvláštní člen zohledňující magnety. Stačí zahrnout všechny proudy včetně těch, které souvisejí se spinem elektronů, a zákon bude správně. Také byste si měli všimnout, že podle rovnice (14.4.4) neexistují magnetické „náboje“ analogické s elektrickými, vystupující na pravé straně rovnice (14.4.2). Žádné se nenašly.

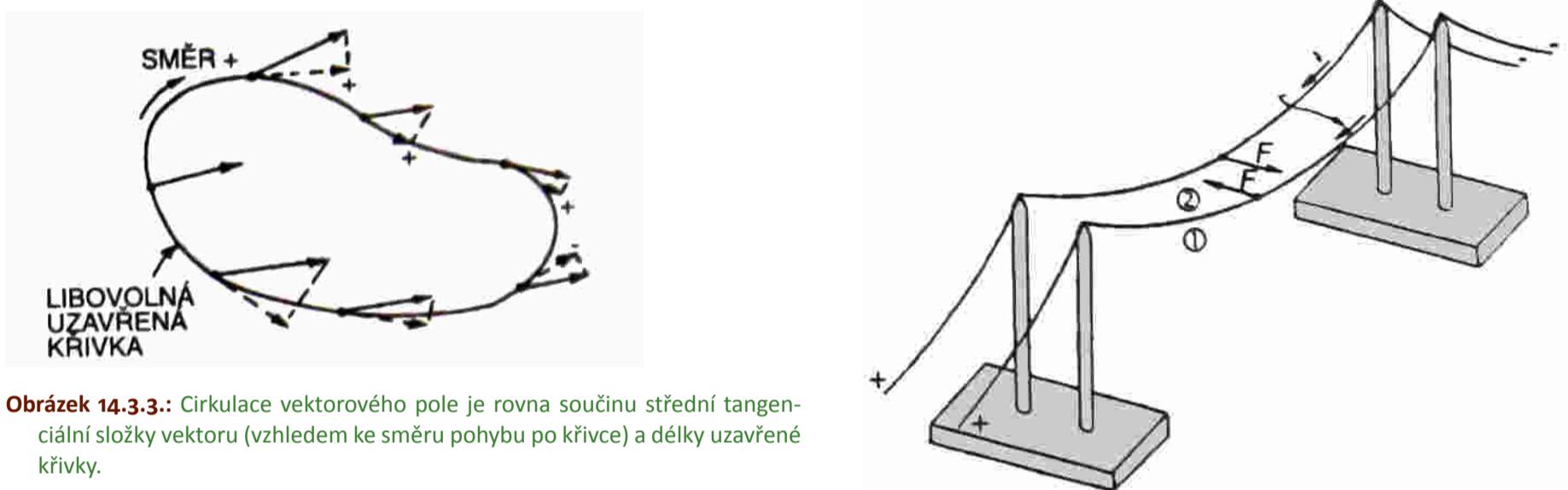
První člen na pravé straně rovnice (14.4.4) objevil Maxwell čistě teoreticky a je velmi důležitý. Podle něj mají proměnlivá elektrická pole magnetické účinky. Pravda je, že bez tohoto člena by rovnice neměla smysl, protože bez něho by neexistovaly elektrické proudy v obvodech, které netvoří uzavřené smyčky. Ale, jak uvidíme na následujícím příkladě, takové proudy existují. Představme si kondenzátor skládající se ze dvou roviných desek. Nechť se nabijí proudem směřujícím k jedné desce a vycházejícím z druhé z nich (obr. 14.4.5). Opišme okolo jednoho z přívodů křivku C , jejíž vnitřek vyplníme plochu S_1 , která přetíná vodič (viz obrázek). Podle (14.4.4) je cirkulace \vec{B} podél C určena proudem ve vodiči. Ale co když vnitřek křivky C vyplníme jinou plochou S_2 , která má tvar mýsy a prochází mezi deskami kondenzátoru, přičemž se nikde nedotýká vodiče. Touto plochou jistě neprochází žádný proud. A zajisté změna umístění myšlené plochy nezmění reálné magnetické pole! Cirkulace pole \vec{B} se tedy nesmí změnit. První člen na pravé straně rovnice (14.4.4) se ve skutečnosti kombinuje s druhým členem tak, aby složením daly shodné výsledky pro obě plochy S_1 a S_2 . V případě S_2 se cirkulace \vec{B} udává pomocí rychlosti změny toku pole \vec{E} mezi deskami kondenzátoru. Vychází, že změna \vec{E} je právě v takovém poměru k proudu, aby rovnice (14.4.4) byla správná. Maxwell viděl tuto potřebu a byl prvním, kdo napsal úplnou rovnici.

Zařízením znázorněným na obr. 14.4.5 můžeme demonstrovat další ze zákonů elektromagnetismu. Odpojme konce zavěšeného vodiče od akumulátoru a připojme je ke galvanometru, který nám ukazuje, jestli vodičem protéká proud. Když vodič postrčíme do strany v magnetickém poli magnetu, zaznamenáme proud. Takový jev je opět dalším důsledkem

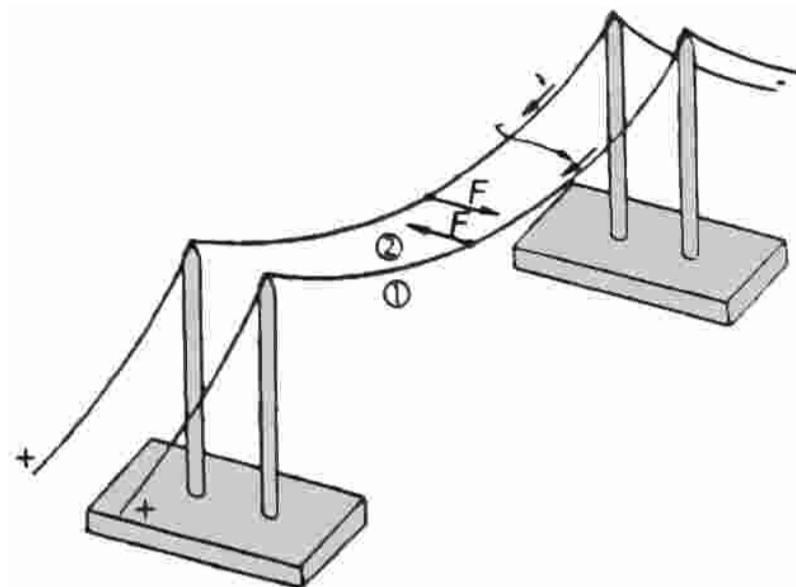
¹Už se potřebujeme jen dohodnout na konvencích pro výběr znaménka cirkulace.



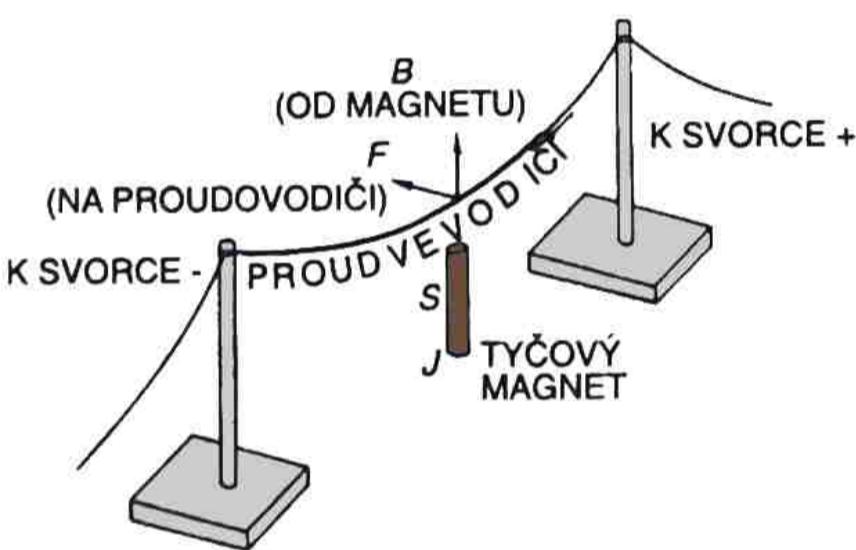
Obrázek 14.3.2.: Cirkulace vektorového pole: a) Pole rychlosti v kapalině. b) Představme si trubici s konstantním průřezem a tvarem nějaké uzavřené křivky. c) Kdyby kapalina všude s výjimkou vnitřku trubice náhle zmrzla, v trubici by cirkulovala.



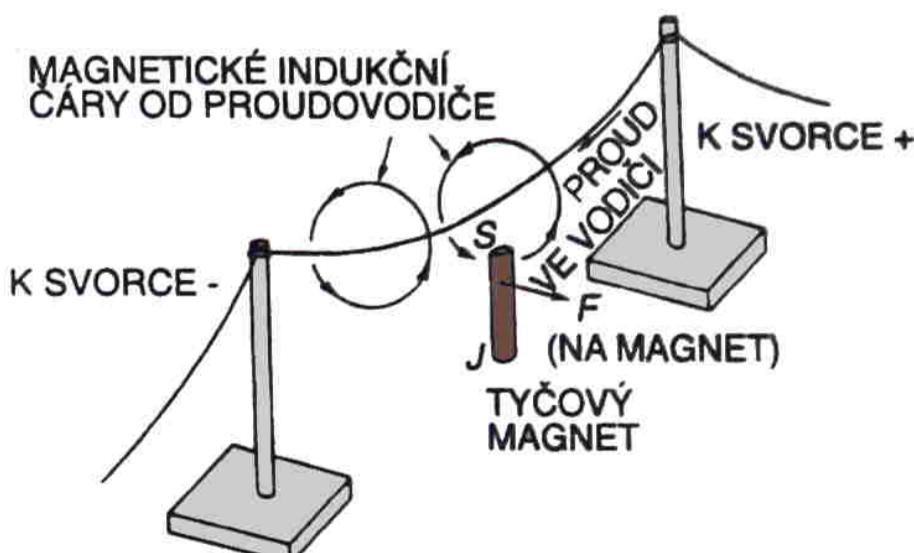
Obrázek 14.3.3.: Cirkulace vektorového pole je rovna součinu střední tangenciální složky vektoru (vzhledem ke směru pohybu po křivce) a délky uzavřené křivky.



Obrázek 14.4.3.: Dva vodiče, kterými prochází proud, na sebe navzájem působí silami.



Obrázek 14.4.1.: Tyčový magnet vytvárá ve vodiči pole \vec{B} . Když vodičem prochází proud, působením síly $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ se vodič pohně.

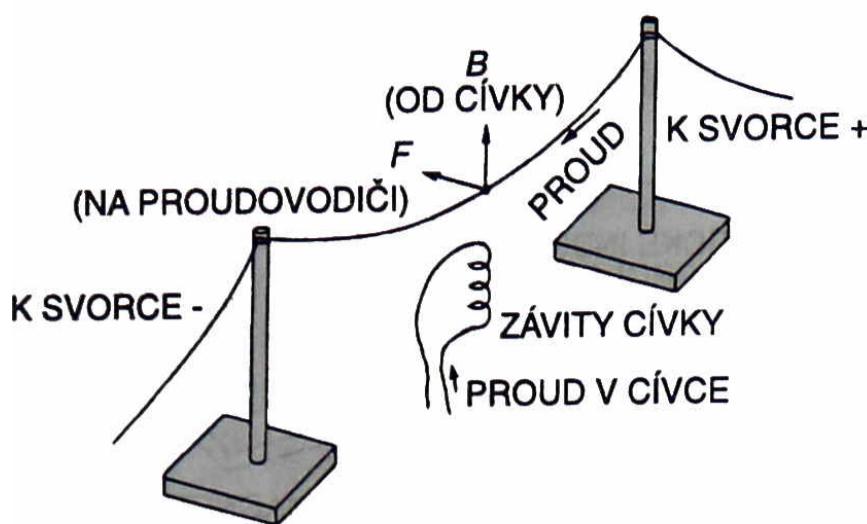


Obrázek 14.4.2.: Magnetické pole vodiče působí silou na magnet.

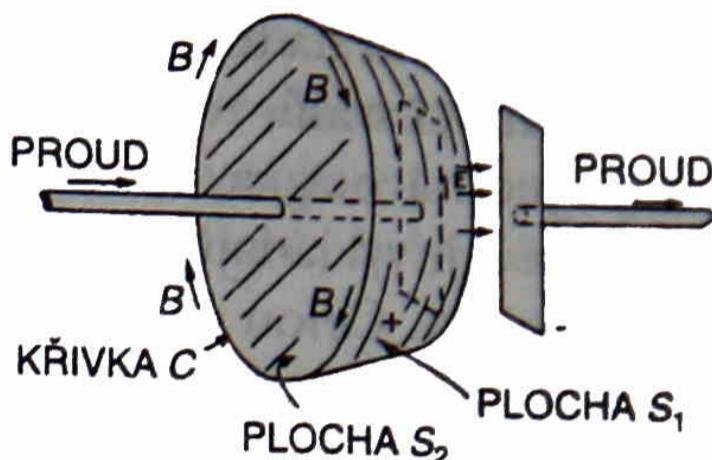
vztahu (14.1.1) — na elektrony ve vodiči působí síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Elektrony mají příčnou rychlosť, neboť se pohybují s vodičem. Rychlosť v v kombinaci se svislým \vec{B} magnetu vyvolává sílu působící na elektrony v podélném směru (vzhledem k vodiči) a uvádí je do pohybu ke galvanometru.

Předpokládejme však, že vodič necháme v klidu a pohybujeme magnetem. Na základě principu relativity se domníváme, že by v tom neměl být žádný rozdíl. A opravdu, na galvanometru pozorujeme podobný proud. Jak působí magnetické pole na náboje, které se nepohybují? Podle vztahu (14.1.1) tam musí být elektrické pole. Pohybující se magnet musí vytvořit elektrické pole. Jak k tomu dojde, popisuje kvantitativně rovnice (14.4.2). Tato rovnice popisuje mnoho prakticky důležitých úkazů, např. ty, které se vyskytují v elektrických generátorech a transformátořích.

Nejpozoruhodnějším důsledkem našich rovnic je, že spojením rovnic (14.4.2) a (14.4.4) lze vysvětlit vyzařování elektromagnetických vln na velké vzdálenosti. Příčina spočívá zhruba v tomto. Předpokládejme, že někde máme vznikající magnetické pole, třeba proto, že jsme např. najednou zapnuli proud ve vodiči. Potom se podle rovnice (14.4.2) musí objevit cirkulace elektrického pole. Když elektrické pole postupně vzniká a vytváří svou cirkulaci, bude se podle rovnice (14.4.4) generovat magnetická cirkulace. Ale náhodou tohoto magnetického pole způsobí vznik nové cirkulace elektrického pole atd. Takto si pole razí svou cestu prostředem, aniž by potřebovala náboje nebo proudy někde jinde než ve svém zdroji. Tím způsobem jeden druhý vidíme! To všechno obsahují rovnice elektromagnetických polí.



Obrázek 14.4.4.: Tyčový magnet na obr. 14.4.1 je možné nahradit cívku s elektrickým proudem. Na vodič přitom působí podobná síla.



Obrázek 14.4.5.: Cirkulace vektoru \vec{B} po křivce C je určena bud' proudem procházejícím plochou S_1 nebo rychlosti změny toku vektoru \vec{E} plochou S_2 .

14.5. Co jsou pole?

[FLMoo, s. 23] Nyní uděláme několik poznámek o našem způsobu náhledu na tuto otázku. Mohli byste namítнуть: „Celá ta záležitost s tokem a cirkulacemi je velmi abstraktní. V každém bodu prostoru existují elektrická pole, kromě toho platí určité zákony. Ale co se opravdu děje? Proč to nemůžete vysvětlit např. tím, ať už je to cokoliv, co prochází mezi náboji?“ Problém je ve vašich předsudcích. Mnozí fyzici říkají, že přímé působení bez ničeho mezi působícími objekty je nemyslitelné. (Jak to mohli označit za nemyslitelnou ideu, když už byla vymyšlena?) Říkají: „Podívejte se, jediné síly, které známe, jsou přímým působením jednoho kousku látky na jiný. Je nemožné, aby existovala síla, jejíž přenos nic nezprostředkuje.“ Ale co se ve skutečnosti děje, když zkoumáme „přímé působení“ jednoho kusu látky na druhý? Zjistíme, že nejde o bezprostřední dotyk obou kusů, kusy jsou od sebe trochu vzdálené a uplatňují se mezi nimi elektrické síly, působící v malém měřítku. Tak docházíme k tomu, že působení ve formě přímého dotyku máme vysvětlovat pomocí elektrických sil. Zajisté by nebylo rozumné trvat na tom, že elektrická síla má vypadat jako staré známé odtlačování nebo přitahování pomocí svalů, zejména když se ukazuje, že svalové účinky je třeba vykládat jako elektrické síly! Jediná otázka, která má smysl, je, jaký způsob popisu elektrických sil je nevhodnější. Někteří lidé si je vykládají jako působení nábojů na dálku a používají přitom složitý zákon. Jiní si oblíbili siločáry. Celou dobu kreslí siločáry a psát vektory \vec{E} a \vec{B} je podle nich příliš abstraktní. Siločáry jsou však jen hrubým způsobem popisu pole a je velmi těžké podat správné kvantitativní zákony bezprostředně pomocí siločar. Kromě toho pojmenování siločar neobsahuje nejhodnotnější princip elektrodynamiky - princip superpozice, i když víme, jak vypadají siločáry pro jednu množinu nábojů a jak vypadají pro jinou množinu nábojů, neuděláme si z toho žádnou představu o obrazu siločar v případě, že množiny působí najednou. Naproti tomu z matematického hlediska je superpozice jednoduchá - prostě sečteme dva vektory. Určitou předností siločar je, že poskytují názorný obraz, ale mají také nevýhody. Způsob uvažování pomocí přímé interakce má velké výhody, když se uvažuje o

elektrických nábojích v klidu, ale má také velké nevýhody, jde-li o náboje v rychlém pohybu.

Nejlepším způsobem je používat abstraktní pojem pole. To, že je abstraktní, je nepříjemné, ale nevyhnutelné. Pokusy popisovat elektrické pole jako pohyb nějakých ozubených koleček, pomocí siločar nebo napětí v nějaké látce si vyžádaly větší úsilí fyziků, než by stačilo na samotné nalezení správných odpovědí na problémy elektrodynamiky. Je zajímavé, že, správné rovnice o chování světla v krystalech vypracoval McCullough už r. 1843. Lidé mu však říkali: „Dobrě, ale taková reálná látka, jejíž mechanické vlastnosti by mohly vyhovovat těmu rovnici, neexistuje, a protože světlo je vlnění, které musí kmitat v něčem, nemůžeme těmu abstraktnímu rovnici věřit.“ Kdyby lidé byli bývali méně zaujati, mohli by uvěřit správným rovnici chování světla o mnoho dříve.

Co se týče magnetického pole, můžeme udělat následující poznámku: Předpokládejme, že jste nakonec úspěšně vytvořili obraz magnetického pole pomocí nějakého druhu siločar nebo koleček rychle se otáčejících v prostoru. Pokuste se potom vysvětlit, co se stane se dvěma náboji pohybujícími se v prostoru rovnoběžně stejnou rychlosťí. Protože se pohybují budou se chovat jako dva proudy a každý z nich bude mít svoje magnetické pole (podobně jako proudy ve vodičích na obr. 14.4.3). Pozorovatel, který by se pohyboval spolu s náboji, by je však vnímal jako stojící a tvrdil by, že magnetické pole není. Ozubená kolečka anebo siločáry tedy zmizí, když se pohybujete spolu s objektem! Jediné co jsme udělali je, že jsme vytvořili nový problém. Jak mohou ozubená kola zmizet? Lidé, kteří kreslí siločáry, se dostávají do podobných těžkostí. Nejen, že není možné říci, zda se siločáry s náboji pohybují anebo ne, ale můžou v určitých souřadnicových soustavách zcela zmizet.

To, co bychom ještě chtěli říct, je, že magnetizmus je skutečně relativistickým efektem. V právě uvažovaném případě dvou rovnoběžně se pohybujících nábojů lze očekávat, že bude třeba udělat relativistické korekce k jejich pohybu pomocí členů řádu $\frac{v^2}{c^2}$. Tyto korekce musí odpovídat magnetické síle. Ale co se silou mezi dvěma vodiči v našem pokusu (obr. 14.4.3)? Tam je magnetická síla jedinou působící silou. Nevypadá jako „relativistická korekce“. Kromě toho, odhadneme-li rychlosť elektronů ve vodiči (to můžete udělat sami), zjistíme, že jejich střední rychlosť podél vodiče je asi $0,01 \text{ cm s}^{-1}$. Takže $\frac{v^2}{c^2}$ je asi 10^{-25} . Určitě zanedbatelná „korekce“. Ale není! Ačkoli magnetická síla je v tomto případě 10^{-25} „normální“ elektrické síly mezi pohybujícími se elektrony, vzpomeňme si, že „normální“ elektrické síly vymizely v důsledku téměř dokonalého vyrovnání - neboť vodiče mají stejný počet protonů i elektronů. Rovnováha je mnohem přesnější než $1/10^{-25}$ a malý relativistický člen, který nazýváme magnetickou silou, je jediným členem, který zůstal, a stává se tak dominantním.

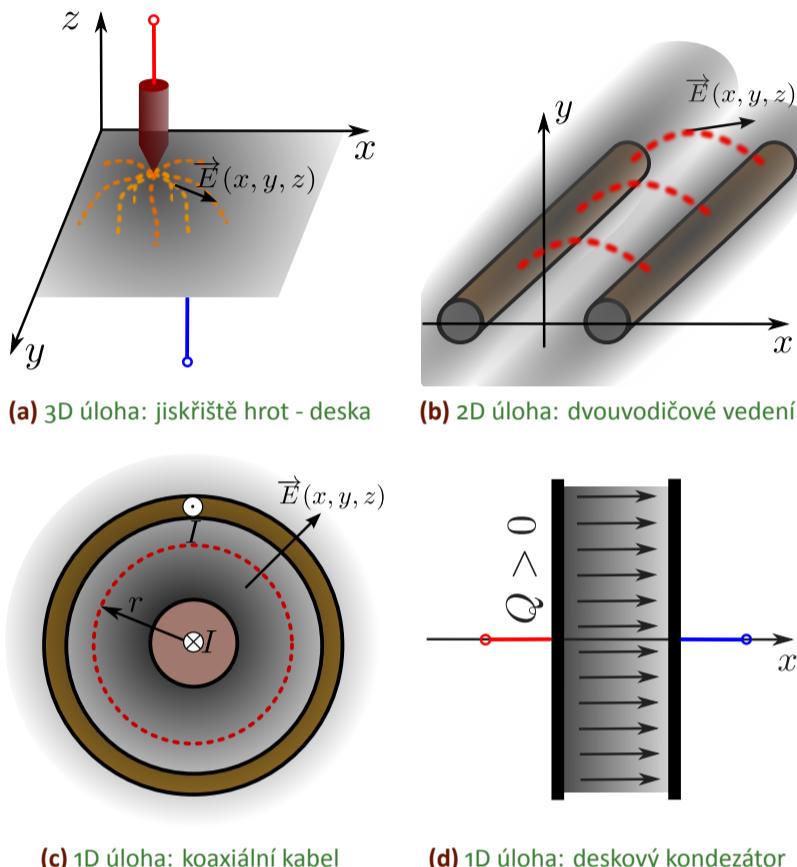
Právě téměř dokonalé vzájemné vyrušení elektrických sil umožnilo zkoumat relativistické efekty, tj. magnetizmus, a objevit správné rovnice s přesností $\frac{v^2}{c^2}$, i když fyzici nevěděli, co se ve skutečnosti děje. A právě proto, když byla objevena teorie relativity, elektromagnetické zákony se nemusely měnit. Na rozdíl od mechaniky už byly správné s přesností $\frac{v^2}{c^2}$.

Elektromagnetické pole je rozloženo v prostoru a může se měnit s časem. Veličiny, které toto pole popisují jsou obecně funkci času a tří geometrických souřadnic. Podle časového průběhu rozlišujeme:

1. **pole časově neproměnné:** jsou-li náboje v klidu, budeme hovořit o poli statickém, jsou-li v rovnoměrném pohybu (tj. tvoří-li stejnosměrný proud), jde o pole stacionární.
2. **pole časově proměnné čili nestacionární:** jestliže se elektromagnetické pole mění s časem relativně pomalu, nazýváme jej kvazistacionárním. Jestliže se mění s časem periodicky, říkáme, že je v ustáleném stavu. Speciální případy jsou:
 - **harmonický ustálený stav:** pole se časem mění podle sinové nebo kosinové funkce
 - **neustálený (přechodný) stav:** pole přechází z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tento případ nastane tehdy, když zdroje pole změní své parametry, resp. svou polohu v prostoru.

Podle prostorového průběhu rozlišujeme:

1. **trojrozměrné:** (trojdimenzionařní, prostorové pole), veličiny charakterizující pole jsou funkčemi tří geometrických souřadnic (např. x, y, z). Označení: *3D pole*.
2. **dvojrozměrné:** (dvojdimenzionařní pole), veličiny charakterizující pole jsou funkčemi dvou geometrických souřadnic. Dvourozměrné pole je např. pole rovinné (je funkcií souřadnic x, y), nebo pole rotačně souměrné (je funkcií r, z). Označení: *2D pole*.
3. **jednorozměrné:** (jednodimenzionařní pole), veličiny charakterizující pole jsou funkčemi jedné geometrické souřadnice (např. x , nebo r). Označení: *1D*.
4. **homogenní:** veličiny charakterizující pole jsou v kterémkoliv bodě uvažované oblasti prostoru týtéž. (tj. jsou nezávislé na geometrických souřadnicích).



Obrázek 14.5.1.: Příklad trojdimenzionálního a), dvojdimenzionálního b) a jednodimenzionálního c), d) pole

14.6. Působení na dálku versus teorie pole

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci Jamese Clerka Maxwella „Pojednání o elektřině a magnetismu“. Maxwell založil svou teorii v větší části na intuitivních úvahách Michaela Faradaye. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovatelem interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu „působení na dálku“, který předcházel teorii pole.

Co je „působení na dálku“? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše díky svojí přítomnosti. Jakékoli vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlosť šíření zprostředkovávaného přenosu. To je známo jako „silové působení na dálku“, protože kromě objektů působících na sebe „silou“ a „vzdálenosti“ mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námitky proti modelu „působení na dálku“, protože odpovídaly jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit

objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit *prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícím se v prostoru mezi objekty*.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (médium) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlostí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled „teorie pole“ se tak vyhýbá pojmu „působení na dálku“ a nahrazuje jej pojmem „působení nepřetržitým kontaktem“. Tento „kontakt“ je způsoben tlakem nebo „polem“ indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetismu byla první teorií pole. Na závěr uvedeme definici pojmu „pole“, vystihující předchozí ideje

Definice 14.6.1. Fyzikální pole jsou vesměs zprostředkovateli vzájemného působení (interakcí) mezi hmotnými objekty. Např. elektromagnetické pole je specifická forma hmoty. Základní vlastnosti má společně s ostatními formami hmoty: je objektivní realitou existující nezávisle na našem vědomí, přísluší mu určitá energie, hmotnost a hybnost, přičemž pro tyto veličiny platí zákony zachování, má kvantovou strukturu (elementární částice elektromagnetického pole se nazývají fotony) a stejně jako ostatní elementární částice mohou projevovat též vlnový charakter. Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem elektromagnetických interakcí v makroskopickém i mikroskopickém měřítku a přitom však může existovat i mimo látkové objekty samostatně ve formě elektromagnetického vlnění.

14.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice

[FLMoo, s. 25] Tuto kapitolu zakončíme poukázáním na to, že mezi mnohými jevy, které zkoumali Řekové, byly dva velmi neobvyklé. Když třete kousek jantaru, můžete jím zvednout malé kousky papyru. Dále to byl podivný kámen z okolí města Magnesia v Malé Asii, který přitahoval železo. Je těžké si představit, že toto byly jediné dva Řekům známé úkazy, v nichž se projevují elektrické a magnetické účinky. Důvod, že to opravdu byly jediné dva úkazy, které byly tehdy známy, spočívá především ve fantastické přesnosti vyrovnaní nábojů, o níž jsme se zmínili dříve. Práce vědců, kteří přišli po Řecích a kteří objevovali jeden nový jev za druhým, byly vlastně jen různými aspekty těchto vlastností jantaru a magnetovce. Dnes si uvědomujeme, že i jevy chemické interakce a konec konců i samotného života je třeba objasňovat pomocí elektromagnetismu.

Současně s tím, jak se vyvíjelo chápání elektromagnetismu, se objevily také technické možnosti, o nichž se lidem dříve nesnilo. Stalo se možným posílat zprávy telegrafem na velké vzdálenosti, mluvit s člověkem, který je na kilometry vzdálený, bez jakýchkoliv spojů v meziprostoru. Vznikly obrovské energetické soustavy. Velká vodní turbína spojená stovkami kilometrů drátů se vzdáleným elektromotorem udržuje jeho otáčky ve svém rytmu, tisíce a tisíce vodičů se rozvětvují, desítky tisíc motorů na desetitisících místech pohánějí stroje v průmyslu i domácnostech, to vše se otáčí a funguje díky poznání zákonů elektromagnetismu.

Dnes prakticky využíváme i nejjemnější efekty. Elektrické síly, jakkoliv mohutné, mohou být i velmi slabé a můžeme je řídit a mnoha způsoby využívat. Naše přístroje jsou tak citlivé, že to, co člověk dělá, můžeme rozpoznat podle toho, jak ovlivňuje elektrony v tenké kovové tyči vzdálené stovky kilometrů od něj. Jediné co potřebujeme, je použít tyč jako anténu televizního přijímače.

Z dlouhodobého pohledu historie lidstva, tak, jak se bude jevit, například, za deset tisíc let, lze sotva pochybovat, že Maxwellův objev zákonů elektrodynamiky bude hodnocen jako nejvýznamnější událost 19. století.

V porovnání s touto důležitou vědeckou událostí upadne americká občanská válka z téhož desetiletí do provinční bezvýznamnosti.

References

- [FLMoo] R. Feynman, R. Leighton, and S. Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Ed. by I. Štoll. Nakladatelství Fragment, 2000, p. 806. ISBN: 80-7200-420-4 (cit. on pp. [53](#), [55](#), [58](#), [59](#)).

15. Diferenciální počet vektorových polí

15.1. Chápání fyziky

Obsah

15.1. Chápání fyziky	61
15.2. Vektorový počet	62
15.3. Skalární a vektorová pole	62
15.4. Derivace polí - gradient	63
15.5. Operátor ∇	65
15.6. Operace s ∇	65
15.7. Diferenciální rovnice proudění tepla	65
15.8. Druhé derivace vektorových polí	66
15.9. Nástrahy	67

[FLMoo, s. 27] Fyzik potřebuje mít schopnost zkoumat problémy z několika hledisek. Exaktní analýza reálných fyzikálních problémů je obvykle velmi složitá. Jakákoliv konkrétní fyzikální situace se může ukázat příliš spletitou na to, aby bylo možné ji analyzovat přímo řešením diferenciální rovnice. Přesto lze získat velmi dobrou představu o chování systému, má-li fyzik určitou schopnost vycítit charakter řešení v různých situacích. Přitom jsou velice prospěšné takové představy jako siločáry, kapacita, odpor a indukce. Proto strávíme mnoho času při jejich analýze. Tím získáme cit pro to, co se v různých situacích děje. Na straně druhé ani jeden z heuristických modelů, takových, jako jsou siločáry, není adekvátní skutečnosti a přesný ve všech situacích. Existuje pouze jediný způsob formulace zákonů, a to pomocí diferenciálních rovnic. Předností rovnic je jejich fundamentálnost, a pokud je nám známo, i přesnost. Jestliže jste se naučili diferenciální rovnice, vždy se k nim můžete vrátit. Neexistuje přitom nic, co by bylo třeba se odnaučit.

Pochopit, co se v různých situacích děje, nám zabere určitý čas. Budeme muset řešit rovnice. Pokaždé, když řešíme rovnice, se něco dozvím o charakteru řešení. Aby jsme si tato řešení zapamatovali, bude také užitečné zkoumat, co znamenají z hlediska siločář a dalších pojmu. To je cesta, kterou rovnicím opravdu „porozumíme“. V tom je rozdíl mezi matematikou a fyzikou. Matematici, anebo lidé s vyvinutým matematickým myšlením, často při „studiu“ fyziky sejdou s cesty, protože fyziku ztrácejí ze zřetele. Říkají: „Podívejte se, tyto diferenciální rovnice - Maxwellovy rovnice -představují vše, co se v elektrodynamice vyskytuje; samotní fyzikové přiznávají, že není nic, co by nebylo obsaženo v těchto rovnicích. Jsou to složité rovnice, ale jde konec konců jen o matematické rovnice, a když jím porozumím matematicky, budu chápat i jejich fyziku.“ Tak tomu však není. Matematici, kteří studují fyziku s tímto přístupem, a takoví jsou mnozí z nich, obvykle přispívají fyzice málo a opravdu málo i matematice. Selžou, protože skutečné fyzikální situace v reálném světě jsou tak složité, že je nevyhnutelné je chápat v mnohem širším kontextu.

Co opravdu znamená pochopit rovnici, tj. více než ve strikně matematickém smyslu, vyjádřil Dirac. Řekl: „Rozumím tomu, co rovnice znamená, umím-li určit vlastnosti jejího řešení, aniž bych ji ve skutečnosti řešil.“ Ovládáme-li tedy způsob, jak se dovědět, co se děje v daných situacích, aniž bychom rovnice skutečně řešili, „chápeme“ rovnice v aplikaci na tyto situace. Fyzikální chápání je naprosto nematematičké, nepřesné a neexaktní, ale pro fyzika naprosto nevyhnutelné.

Kurz, jako je tento, bývá obvykle založen na postupném budování fyzikálních představ - začíná jednoduchými situacemi a pokračuje situacemi stále složitějšími. Vyžaduje to, abyste neustále zapomínali věci, které jste se naučili dříve - věci, jež platí v určitých situacích, ale neplatí obecně. Například „zákon“, že elektrická síla se mění s druhou mocninou vzdálenosti, neplatí vždy. My dáváme přednost opačnému postupu. Raději napřed probereme úplné zákony a pak budeme postupovat zpět a aplikovat je na jednotlivé situace, se souběžným rozvíjením fyzikálních představ. A to je to, co se chystáme dělat nyní.

Náš přístup je úplným opakem historického přístupu, při němž se předmět podává na základě experimentů, které o něm poskytly informaci. Předmět fyziky však budovalo velmi mnoho bystrých lidí během uplynulých více než 200 let, a protože my máme na nabytí informací jen omezenou dobu, není v našich silách probrat vše, co udělali oni. Bohužel, jedno z toho, co přitom bude zřejmě chybět v těchto přednáškách, je historický, experimentální postup. Je naděje, že je možné nahradit tento nedostatek v určité míře laboratorními cvičeními. Vše, co musíme pustit ze zřetele, si můžete také doplnit čtením encyklopedií, v nichž se občas vyskytují historické články o elektřině a o jiných oblastech fyziky. Historickou informaci najdete také v mnoha učebnicích elektřiny a magnetismu.

15.2. Vektorový počet

[FLMoo, s. 28] Nyní začneme s abstraktním, matematickým pohledem na teorii elektřiny a magnetizmu. Základní myšlenkou je vysvětlit význam zákonů formulovaných v kapitole 14. Ale abychom to udělali, musíme nejdříve vysvětlit novou a zvláštní symboliku, kterou chceme použít. Takže na chvíli zapomeňme na elektromagnetismus a věnujme se matematice vektorových polí. Je velmi důležitá nejen pro elektromagnetismus, ale pro všechny druhy fyzikálních situací. Diferenciální počet vektorů je pro všechna odvětví fyziky stejně důležitý jako obyčejný diferenciální a integrální počet. Tak se do toho pustíme.

Dále uvádíme několik faktů z vektorové algebry, přičemž předpokládáme, že je již znáte: V pravoúhlém kartézském systému je každý bod prostoru určen polohovým vektorem \vec{r} , který má složky x, y, z , což budeme zapisovat takto:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (15.2.1)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z . Velikost vektoru \vec{r} určíme ze vztahu

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (15.2.2)$$

Pro ověření pár faktů z vektorové algebry pro vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ uvádíme následující vztahy: Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \dots \text{skalár} \quad (15.2.3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \dots \text{vektor} \quad (15.2.4)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \quad (15.2.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (15.2.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (15.2.7)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (15.2.8)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad (15.2.9)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (15.2.10)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (15.2.11)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (15.2.12)$$

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (15.2.13)$$

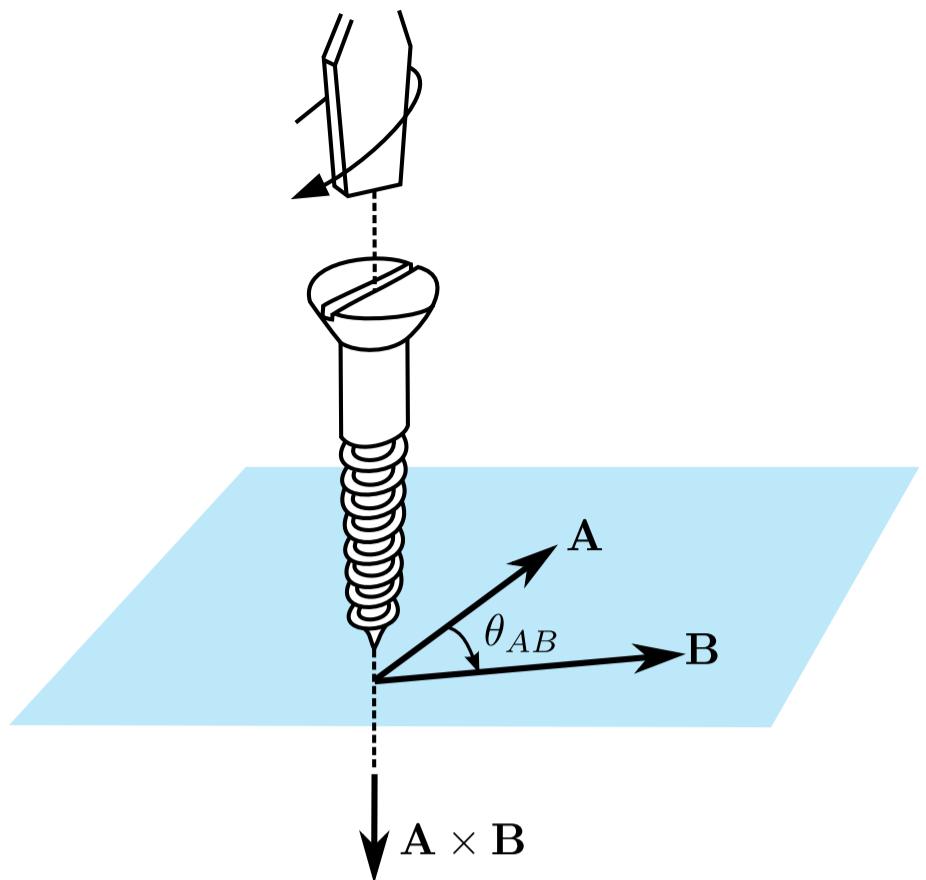
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (15.2.14)$$

Rovnost (15.2.11) platí samozřejmě pouze v limitě, když $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se blíží nule.

Vektorový součin vektorů \vec{A} a \vec{B} je definován jako vektor kolmý k vektorům \vec{A} a \vec{B} s velikostí rovnou ploše kosoúhelníku, který oba vektory definuje:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |A| |B| \sin \theta \quad (15.2.15)$$

kde θ je úhel svíraný vektory \vec{A} a \vec{B} ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) a \vec{n} je jednotkový vektor kolmý k nim. Takové jednotkové vektory však existují dva; volba závisí na tom, je-li souřadný systém definován jako pravotočivý nebo levotočivý. V pravotočivém souřadném systému lze použít pravidlo jako na obr. 15.2.1.



Obrázek 15.2.1.: Určení směru vektoru $\vec{A} \times \vec{B}$ pomocí pravotočivého šroubu

chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit.

Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá určité představy myšlených ploch, proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě *teplotního pole* se tyto plochy nazývají *izotermickými hladinami* nebo *izotermami*. Obrázek 15.3.1 zobrazuje teplotní pole a ukazuje závislost T na x a y při $z = 0$. Je nakresleno několik izoterem.

U vektorových polí je v každém bodě prostoru dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlosť látky, tvořící těleso je v každém bodě vektor, který je funkcií polohy. V druhém případě uvažujme proudění tepla z teplejších míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. *Hustota tepelného toku* je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji \vec{h} . Její velikost je mírou proudícího tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 15.3.1. Definujeme \vec{h} přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde infinitesimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 15.3.3a). Vyjádříme to v symbolech: je-li ΔP tepelná energie, která projde za jednotku času

$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t \quad \vec{e}_t \dots \text{jednotkový vektor ve směru toku} \quad (15.3.1)$$

Vektor \vec{h} je možno definovat i jiným způsobem - pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obrázek 15.3.3b znázorňuje plošku ΔS_2 skloněnou pod úhlem ϑ k ploše ΔS_1 kolmé na tok. Jednotkový vektor \vec{n} je kolmý na plošku ΔS_2 . Vektory \vec{n} a \vec{h} svírají úhel ϑ (neboť \vec{h} je kolmý ΔS_1). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou ΔS_2 ? Tok ploškou ΔS_2 je stejný jako ploškou ΔS_1 , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to $\Delta S_1 = S_1 \cos(\vartheta)$. Hustota toku ploškou ΔS_2 je

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{S_1 \cos(\vartheta)} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (15.3.2)$$

15.3. Skalární a vektorová pole

[FLMoo, s. 29] *Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty veličiny.* Řečeno jinými slovy, polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru.

Nejjednodušší možné fyzikální pole je **skalární pole**. Skalárním polem

Tuto rovnici interpretuje tak, že hustotu tepelného toku \vec{h} (teplo prošlé za jednotku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je \vec{n} , udává výraz $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku ΔS_2 je $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za definice \vec{h} . Stejně představy můžeme použít i pro jiná vektorová pole.

15.4. Derivace polí - gradient

[FLMoo, s. 31] Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle x ? Nebo podle y , nebo z ?

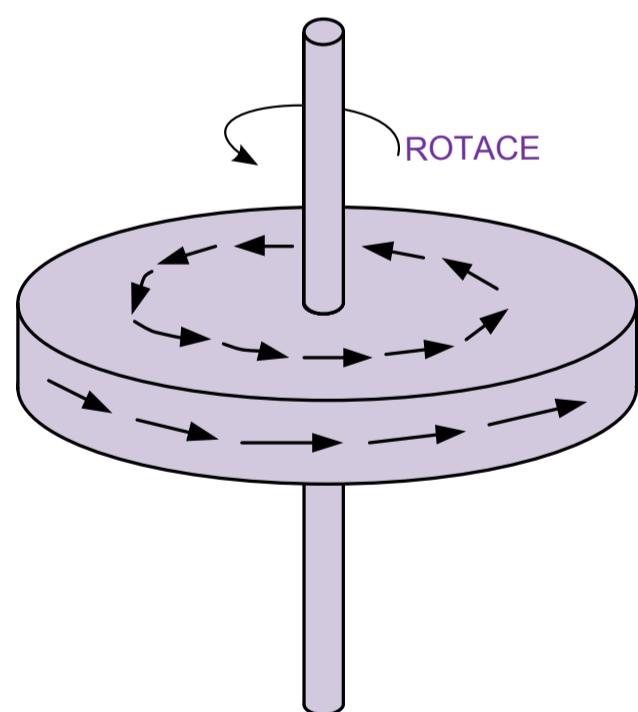
Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry, nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například $\frac{\partial T}{\partial x}$? Je to skalár nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu x , $\frac{\partial T}{\partial x}$ se jistě změní. Ale všimněme si, že máme tři možné derivace: $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$. Protože existují tři derivace a víme, že tři čísla tvoří vektor, tyto tři derivace by mohly představovat složky jednoho vektoru:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{vektor} \quad (15.4.1)$$

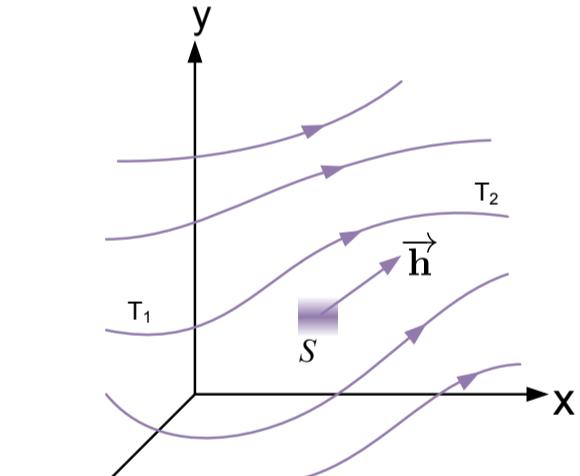
Samozřejmě, ne každá tři čísla obecně tvoří vektor. Je tomu tak pouze tehdy, když při pootočení souřadnicové soustavy se složky vektoru správně transformují. Proto je nevyhnutelné prozkoumat, jak se naše tři derivace změní při otočení souřadnicové soustavy. Ukážeme, že rov. 15.4.1 je skutečně vektorem. Při otáčení souřadnicové soustavy se derivace transformují správně.

Můžeme se o tom přesvědčit několika způsoby. Jeden způsob je položit si takovou otázku, na níž lze odpovědět nezávisle na souřadnicové soustavě, a pokusit se vyjádřit odpověď v "invariantním" tvaru. Například jsou-li \vec{A} a \vec{B} vektory a $S = \vec{A} \cdot \vec{B}$, víme, že S je skalárem. I bez zjišťování víme, zda se S mění se změnou souřadnicových soustav. Nemůže, neboť jde o skalární součin dvou vektorů. Podobně, víme-li, že \vec{A} je vektorem a mám tři čísla B_1, B_2 a B_3 , o kterých zjistíme že

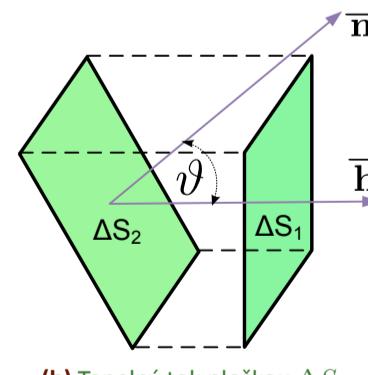
$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (15.4.2)$$



Obrázek 15.3.2.: Rychlosť v rotujúcim tělese je príkladom vektorového pole.



(a) Hustota tepelného toku představuje vektorové pole.



(b) Tepelný tok ploškou ΔS_2

Obrázek 15.3.3.: a) Vektor hustota tepelného toku \vec{h} ukazuje směr proudění. Jeho velikost je rovna energii, která za jednotku času projde elementární ploškou postavenou kolmo na směr proudění, vydělené obsahem této plošky.
b) Tepelný tok ploškou ΔS_2 je stejný jako tepelný tok ploškou ΔS_1 .

kde S je totéž pro libovolnou souřadnicovou soustavu, pak tři čísla B_1, B_2 a B_3 jsou nutně složkami B_x, B_y a B_z nějakého vektoru \vec{B} .

Zvažme případ teplotního pole. Vezměme dva body P_1 a P_2 v malé vzdálenosti $\Delta\vec{r}$ od sebe. Teplota v P_1 je T_1 a v P_2 je T_2 s rozdílem $\Delta T = T_2 - T_1$. Teploty v těchto reálných, fyzikálních bodech určitě nezávisí na volbě os souřadnic. Konkrétně ΔT je číslo nezávislé na souřadnicové soustavě. Je to skalár.

Zvolíme-li nějakou vhodnou souřadnicovou soustavu, můžeme například $T_1 = T(x, y, z)$ a $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, kde $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ jsou složky vektoru $\Delta\vec{r}$ (obr. 15.4.1). Vzhledem k rovnosti rov. 15.2.11 můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \quad (15.4.3)$$

Levá strana rovnosti (15.4.3) je skalárem. Pravá je součtem tří součinů obsahujících jako součinitele $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, které jsou složkami vektoru. Z toho vyplývá, že tři čísla

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Představují také x -ovou, y -ovou a z -ovou složku nějakého vektoru. Pro tento nový vektor použijeme symbol ∇T . Symbol ∇ (nazývaný "nabla") je převráceným Δ a má připomínat derivování. ∇T se čte různě: "nabla T " nebo "gradient T " nebo "grad T ";

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^T \quad (15.4.4)$$

Použitím této nové symboliky se můžeme pokusit rovnost (15.4.3) přepsat na kompaktnější tvar

$$\Delta T = \nabla T \cdot \vec{r} \quad (15.4.5)$$

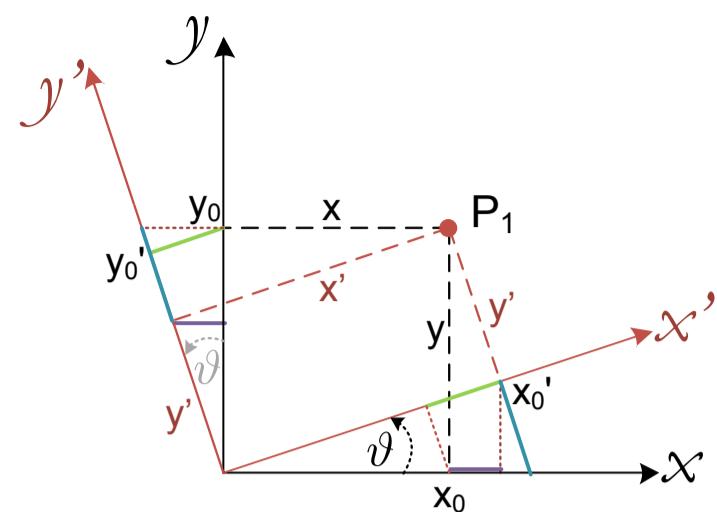
Tento vztah, vyjádřený slovy, říká, že rozdíl teplot ve dvou sousedních bodech je roven skalárnímu součinu gradientu T a rozdílu polohových vektorů obou bodů. Tvar rov. 15.4.5 také ilustruje již uvedený důkaz, že ∇T je opravdu vektorem.

Stále ještě nejste přesvědčeni? Ukážeme, že složky ∇T se transformují stejně jako složky \vec{r} . Pokud ano, ∇T je vektor podle naší původní definice vektoru. Abychom si to trochu zjednodušili, položme $z = z'$, takže souřadnici z již nemusíme brát v úvahu.

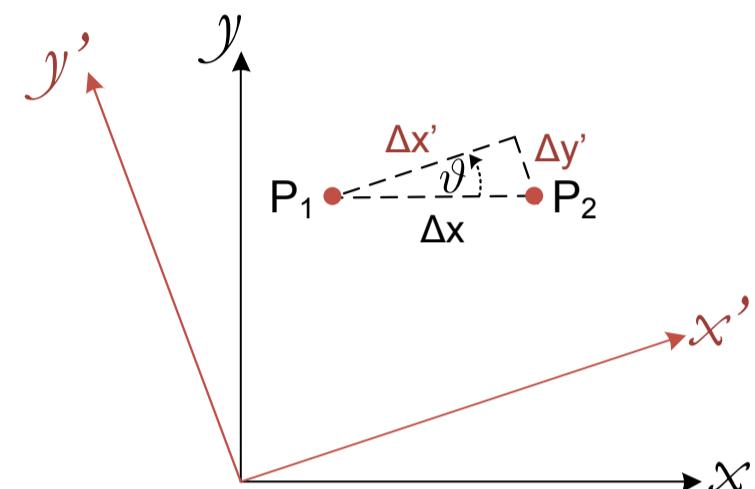
Uvažujme o soustavě x', y' pootočené o úhel ϑ vzhledem k soustavě xy

¹V naší symbolice představuje výraz (a, b, c) vektor se složkami a, b, c . Použijeme-li jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, můžeme psát

$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$



(a) Transformace do pootočené souřadnicové soustavy



(b) Speciální případ, v němž je vektor \vec{r} rovnoběžný s osou x .

Obrázek 15.4.2.: Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Dokažme to!

(obr. 15.4.2). Souřadnice bodu (x, y) vyjádřené v čárkované soustavě jsou

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ y' &= -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \\ y &= x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (15.4.6)$$

Transformují-li se nějaká dvojice čísel podle těchto rovnic stejně jako x a y , jde o složky vektoru.

Nyní si všimněme rozdílu teplot ve dvou sousedních bodech P_1 a P_2 , zvolených tak, jak to znázorňuje obr. 15.4.2b. Při výpočtu v souřadnicích x a y můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad \text{nebo} \quad \Delta T = \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y. \quad (15.4.7)$$

A výpočet v čárkované soustavě? Tam bychom psali

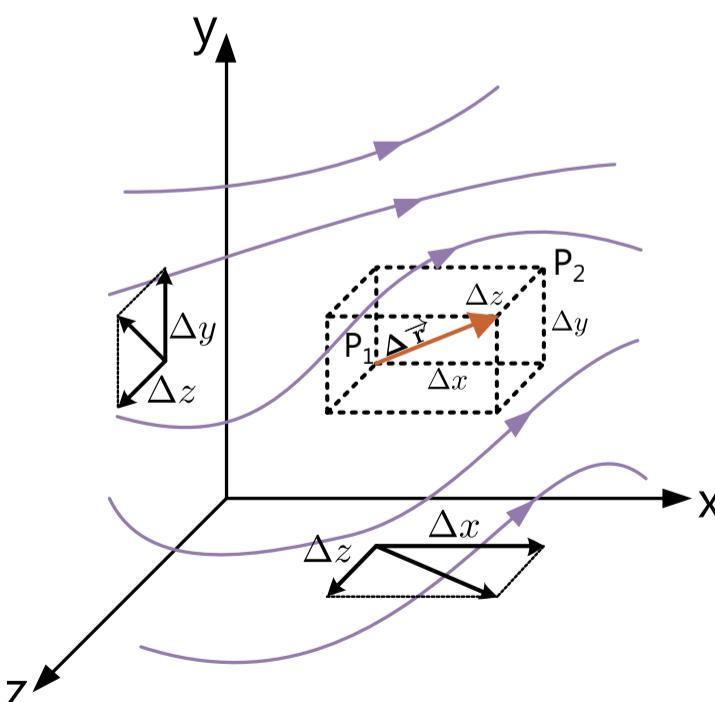
$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y' \quad (15.4.8)$$

Podíváme-li se na obr. 15.4.2b, vidíme, že

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad \Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta$$

nebo $\Delta y'$ je záporné při kladném Δx . Dosazením těchto výrazů do rov. 15.4.8 dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta \right) \Delta x \end{aligned} \quad (15.4.9)$$



Obrázek 15.4.1.: Vektor \vec{r} , jehož složky jsou $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Porovnáním rov. 15.4.9 s rov. 15.4.7 zjistíme, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (15.4.10)$$

Podle tohoto vztahu $\frac{\partial T}{\partial x}$ dostaneme z $\frac{\partial T}{\partial x'}$ a $\frac{\partial T}{\partial y'}$ právě tak jako x z x' a y' (rov. 15.4.6). $\frac{\partial T}{\partial x}$ je tedy x – ovou složkou vektoru. Podobné úvahy by ukázaly, že $\frac{\partial T}{\partial y}$ je y – ová a $\frac{\partial T}{\partial z}$ jeho z – ová složka. ∇T je zajisté vektorem. Jde o vektorové pole odvozené ze skalárního pole T .

15.5. Operátor ∇

[FLMoo, s. 34] Důkaz, že $\text{grad } T$ nebo ∇T je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejně i tehdy, kdyby se T zaměnilo za jakékoli jiné skalární pole. Transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom T vynechat a nahradit rovnici (15.4.10) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (15.5.1)$$

Ponecháme přitom operátory "hladové po derivování".

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme jej nazvat složkami *vektorového operátoru*. Můžeme psát

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (15.5.2)$$

což samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (15.5.3)$$

Gradient jsme abstrahovali od T .

Musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od ∇ . $T\nabla$ je stále operátorem, zatímco ∇T už není "hladovým" operátorem, neboť se nasytí. Je to opravdový fyzikální vektor, představující rychlosť změny T v prostoru. Víme, že rychlosť změny T v nějakém směru udává složku vektoru ∇T v tomto směru (viz vztah 15.4.5). Z toho vyplývá, že ∇T směřuje tam, kde má největší možnou složku – jinými slovy, směrem, v němž se T mění nejrychleji.

Gradient T má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny T .

15.6. Operace s ∇

[FLMoo, s. 35] Je možné s vektorovým operátorem ∇ provádět nějaké jiné algebraické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vyjádřením skalárního součinu. Mohly bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}) \quad (15.6.1)$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. $((\vec{A} \cdot \vec{B})$ je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru ∇ s vektorovým polem, které známe, např. \vec{h} . Vypíšeme-li ho ve složkách

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x \cdot h_x + \nabla_y \cdot h_y + \nabla_z \cdot h_z \quad (15.6.2)$$

nebo

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (15.6.3)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali

bychom²

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \quad (15.6.4)$$

což je totéž číslo, které bychom dostali z (rov. 15.6.3), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h} \quad (15.6.5)$$

pro každý bod prostoru. Tedy $\nabla \cdot \vec{h}$ je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíte si uvědomit, že kombinace derivací $\nabla \cdot \vec{h}$ je dost specifická. Existují rozmanité kombinace, např. $\frac{\partial h_y}{\partial x}$, které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina $\nabla \cdot (\text{vektor})$ je ve fyzice neobyčejně užitečná. Byla nazvána **divergencí** (div \vec{h}). Například

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{divergence } \vec{h}. \quad (15.6.6)$$

Podobně jako v případě ∇T můžeme najít fyzikální význam i pro $\nabla \times \vec{h}$. Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru ∇ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (15.6.7)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz rov. 15.2.6).

$$(\nabla \times \vec{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (15.6.8)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (15.6.9)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (15.6.10)$$

Kombinace $\nabla \times \vec{h}$ se nazývá **rotace** \vec{h} (rot \vec{h}). O příčině tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor ∇ :

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{vektor}$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{skalár}$$

$$\nabla \times \vec{h} = \text{rot } \vec{h} = \text{vektor}$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislém na nějaké souřadnicové soustavě.

Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru ∇ napíšeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetismu - Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}$$

kde ρ (ró) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu, \vec{j} je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

15.7. Diferenciální rovnice proudění tepla

[FLMoo, s. 37] Uvedeme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy

²Na \vec{h} se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je \vec{h} "derivováno" podle x, y a z nebo podle x', y' a z' , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro \vec{h} jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme \vec{h} čárkou.

a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Vezmeme-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahřejeme na teplotu T_2 , zatímco protilehlou stranu ochladíme na odlišnou teplotu T_1 , materiélem bude proudit teplo ve směru od T_2 k T_1 (obr. 15.7.1).

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu S stěn i rozdílu teplot $T_2 - T_1$ a nepřímo úměrný vzdálenosti d mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok). Nechť P je tepelná energie, která projde deskou za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda(T_2 - T_1) \frac{S}{d}, \quad (15.7.1)$$

Konstanta úměrností λ (lambda) se nazývá *součinitel teplotní vodivosti*.

Co se stane ve složitějším případě, řekněme v tělese nepravidelném tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 15.7.1a, ale v miniaturním měřítku. Nasměrujeme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami obr. 15.7.1b, takže pro destičku bude platit rov.

15.7.1.

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky ΔS , je tepelný tok

$$P = \lambda(\Delta T) \frac{\Delta S}{\Delta d} \quad (15.7.2)$$

kde Δd je tloušťka destičky. $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ jsme definovali jako velikost vektoru \vec{h} ležícího ve směru tepelného toku.

Teplo bude proudit od $T_1 + \Delta T_1$ k T_1 a tudíž kolmo na izotermy (obr. 15.7.1b). $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává dále právě rychlosť změny T při změně polohy.

Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává maximální rychlosť změny T , a tedy velikost vektoru ∇T . Protože směr ∇T je opačný než směr³ \vec{h} rov. 15.7.2 zapsaná pomocí vektorů bude vypadat takto

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (15.7.3)$$

Rovnice 15.7.3 je diferenciální rovnici vedení tepla v masivních tělesech. Jde o skutečnou vektorovou rovnici. Každá její strana je vektor, je-li λ jen číslo. Je zobecněním speciální rov. 15.7.2 pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Tato symbolika je užitečný nejen proto, že v ní rovnice vypadají jednodušeji, ale i proto, že nejasnější ukazuje fyzikální obsah rovnic bez odvolání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.

15.8. Druhé derivace vektorových polí

[FLMoo, s. 39] Dosud jsme měli pouze první derivace. Proč se však nezabývat i druhými derivacemi? Mohli bychom sestavit několik kombinací:

- a) $\nabla \cdot (\nabla T)$
- b) $\nabla \times (\nabla T)$
- c) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h})$
- d) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$
- e) $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

Můžeme se přesvědčit, že to jsou všechny možné kombinace.

Podívejme se nejdříve na druhou z nich, tj. na b). Má stejný tvar jako $\nabla \times (\nabla T)$: má stejný tvar jako $\vec{A} \times (\vec{h} T) = (\vec{A} \times \vec{A}) = 0$, neboť $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

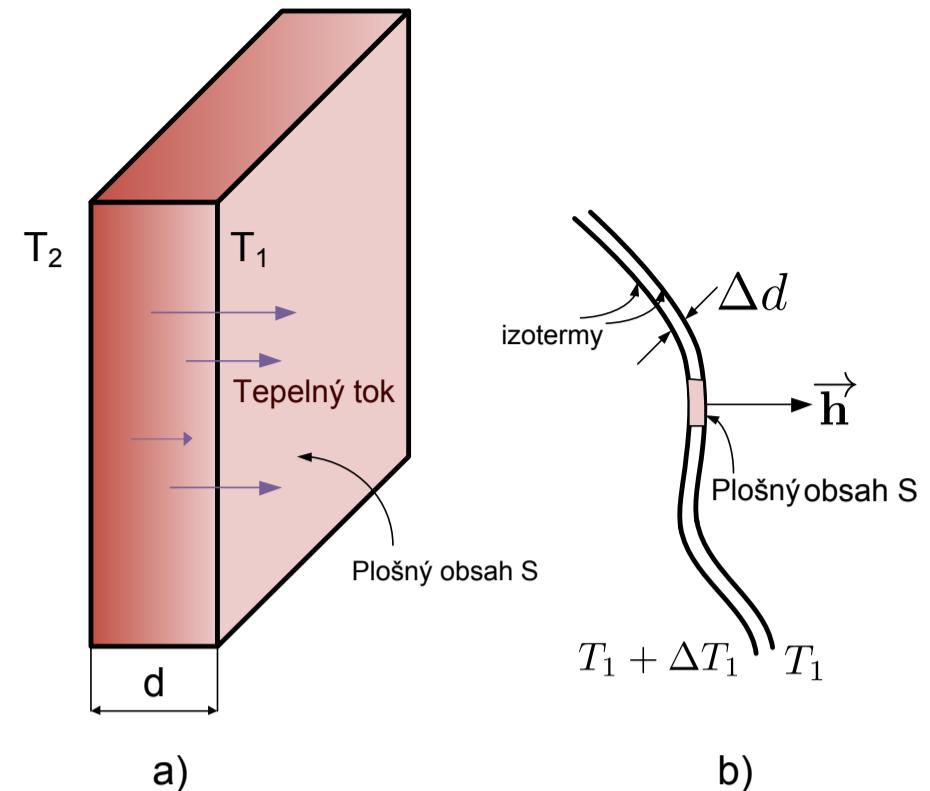
$$\text{rot grad } T = \nabla \times \nabla T = 0. \quad (15.8.1)$$

Jak dochází k této rovnosti, můžeme vidět, když si výraz b) napíšeme ve složkách:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

což je nula podle rovnosti (15.2.12). Stejně je to pro další složky. $\nabla \times (\nabla T) = 0$ tedy platí pro jakékoli rozdělení teploty - dokonce pro *jakoukoliv* skalárni funkci.

³Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.



Obrázek 15.7.1.: a) Tepelný tok deskou. b) Infinitesimální destička rovnoběžná s izotermy hladinou ve velkém kuse látky

Vezměme si jiný příklad. Podívejme se, zda se podaří dostat i jiný výraz rovný nule. Skalární součin vektoru s vektorovým součinem obsahující tentýž vektor dává nulu

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

neboť $(\vec{A} \times \vec{B})$ je kolmý na \vec{A} a jeho složka ve směru \vec{A} je tedy nulová. Stejná kombinace se vyskytuje v rovnici d), a tak dostáváme

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \text{div}(\text{rot } \vec{h}) = 0. \quad (15.8.2)$$

Snadno se opět ukáže, že je to 0, zapíší-li se naznačené operace ve složkách.

Nyní zformulujeme dvě matematické věty, které nebudem dokazovat. Jsou to velice zajímavé věty a je pro fyziky užitečné je znát.

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, řekněme vektorového pole \vec{A} , je nula. Viděli jsme (rovnost 15.8.1), že rotace gradientu je rovna nule, což se vzhledem k vlastnostem vektorů dobře pamatuje. Bylo by tedy dobré možné, aby bylo \vec{A} gradientem nějaké veličiny; jeho rotace by pak byla nutně nulová. Platí zajímavá věta, podle které, je-li $\text{rot } (\vec{A})$ rovna nule, je \vec{A} vždy gradientem něčeho, a tedy existuje určité skalární pole Ψ (psí) takové, že \vec{A} je rovno $\text{grad } \Psi$. Jinými slovy platí následující věta

Věta 15.8.1. Je-li $\nabla \times \vec{A} = 0$, existuje ψ takové, že $\vec{A} = \nabla \psi$

Podobná věta platí i v případě, že $\text{div } A$ je rovna nule. Rovnost (15.8.2) říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáme-li se s vektorovým polem \vec{D} , přičemž $\text{div } \vec{D}$ je rovna nule, můžeme z toho usoudit, že \vec{D} je rotací nějakého vektorového pole \vec{C} .

Věta 15.8.2. Je-li $\text{div } \vec{D} = 0$, existuje \vec{C} takové, že $\vec{D} = \nabla \times \vec{C}$.

Při zkoumání možných kombinací dvou operátorů ∇ jsme zjistili, že dvě z nich dávají vždy nulu. Podívejme se nyní na ty, které nejsou nulové. Vezměme kombinaci $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{T})$, která byla v našem záznamu napsaná jako první. Obecně nulu nedává. Vypíšeme složky:

$$\nabla \cdot \vec{T} = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T).$$

Potom

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla T) &= \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_x(\nabla_z T) + \nabla_z(\nabla_z T) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}.\end{aligned}$$

z čehož v obecném případě dostaneme nějaké číslo. Jde o skalární pole.

Vidíme, že není třeba ani dávat závorky a aniž bychom riskovali záměnu, můžeme psát $\nabla \cdot (\nabla T) = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T$. Na ∇^2 se díváme jako na nový operátor - **Laplaceův operátor**:

$$\text{Laplaceův operátor} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}. \quad (15.8.3)$$

Protože Laplaceův operátor je skalárním operátorem, můžeme jím působit i na vektor - myslíme tím tutéž operaci na každou složku vektoru v pravoúhlé souřadnicové soustavě:

$$\nabla^2 \vec{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

Podívejme se na další možnost, kterou je rovnice e), tj. $\nabla \times \nabla \times \vec{h}$. Vzhledem k vektorové rovnosti (15.2.10) můžeme rotaci vyjádřit jinak. Při použití výše této rovnice musíme \vec{A} a \vec{B} nahradit operátorem ∇ a položit $\vec{C} = \vec{h}$.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \vec{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Okamžik! Něco je špatně. První dva členy jsou totiž vektory, jak to má být (operátory v nich jsou „nasycené“), ale poslední člen není v pořádku. Má stále charakter operátoru. Chyba je v tom, že jsme nebyli dost pozorní při dodržování pořadí symbolů v zápisech našich členů. Když si znova všimnete rovnosti (15.2.10), zjistíme, že bychom ji mohli stejně dobře napsat ve tvaru:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Pořadí členů teď vypadá lip. Proveďme naši substituci do této rovnice. Dostáváme

$$\nabla \times (\nabla \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h}$$

Tento tvar se zdá být v pořádku. Skutečně je správný, o tom se můžete přesvědčit výpočtem složek. Poslední člen je Laplaceův operátor a tak můžeme stejně dobře napsat

$$\nabla \times (\nabla \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{h}.$$

Již jsme se zmínili o všech kombinacích v našem seznamu výrazů v úvodu kapitoly 15.8 s dvojitým operátorem ∇ s výjimkou případu c), tj. $\nabla(\nabla \cdot \vec{h})$. To je přípustné vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm říci nedá. Jde pouze o určité vektorové pole, které se může příležitostně vyskytnout.

Bude vhodné, když naše závěry shrneme:

$$\begin{array}{lll}\nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla^2 T & \dots \text{skalární pole} \\ \nabla \times (\nabla T) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) &= & \dots \text{vektorové pole} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} \\ (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{h} &= \nabla^2 \vec{h} & \dots \text{vektorové pole}\end{array}$$

Všimněme si, že jsme se nepokusili zavést nový operátor $\nabla \times \nabla$. Víme proč?

15.9. Nástrahy

[FLMoo, s. 41] Naši znalost obvyklé vektorové algebry jsme aplikovali na algebru operátoru ∇ . Musíme přitom však být opatrní, neboť se můžeme dostat na scestí. Zmíníme se o dvou nástrahách. V tomto kursu se však nevyskytnou. Co byste řekli následujícímu výrazu, který obsahuje dvě skalární funkce ψ a φ (fí):

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi)?$$

Asi byste chtěli prohlásit: musí to být nula, protože je to stejné jako

$$(\vec{A}a) \times (\vec{B}b),$$

což je rovno nula, neboť vektorový součin dvou stejných vektorů $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy nula. Ale v našem případě dva operátory ∇ nejsou stejné. První působí na jednu funkci, a to ψ , zatímco druhý působí na jinou funkci, tj. φ . Proto ačkoliv je označujeme tímtéž symbolem ∇ , je třeba o nich uvažovat jako o odlišných operátorech. Je to pochopitelné, vždyť směr $\nabla \psi$ závisí na funkci ψ , a proto asi nebude rovnoběžný s $\nabla \varphi$.

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi) \neq 0 \text{ (obecně).}$$

My, naštěstí, nebudeme muset takové výrazy použít. (Co jsme právě řekli, nemění nic na faktu, že $\nabla \times \nabla(\psi) = 0$ pro jakékoli skalární pole, neboť zde působí oba operátory ∇ na stejnou funkci.)

Nástraha číslo dvě (které se opět v kurzu vyhneme) spočívá v tomto: Pravidla, která jsme tu uvedli, jsou jednoduchá a pěkná, když se použijí pravoúhlé souřadnice. Máme-li například $\nabla^2 \vec{h}$ a potřebujeme složku x , hned pišeme

$$(\nabla^2 \vec{h})_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Stejný výraz se však nedá napsat, když bychom se ptali na radiální složku $\nabla^2 \vec{h}$. Radiální složka $\nabla^2 \vec{h}$ není rovna výrazu $(\nabla^2 \vec{h})_r$. Příčina je v tom, že máme-li co dělat s vektorovou algebrou, jsou směry všech vektorů plně určeny. Ale pokud jde o vektorová pole, jsou jejich směry v různých místech různé. Pokusíme-li se popsat vektorové pole, řekněme v polárních souřadnicích, to, co nazýváme radiálním směrem, se od bodu k bodu mění. Proto se můžeme dostat do velkých těžkostí, když začneme derivovat složky. Například i pro konstantní vektorové pole se radiální složka bod od bodu mění.

Obvykle je nejbezpečnější a nejjednodušší držet se pravoúhlých souřadnic a vyhnout se těžkostem. Je tu však jedna výjimka, která stojí za zmínku: Protože Laplaceův operátor ∇^2 je skalár, můžeme jej psát v souřadnicové soustavě jaké jen chceme (např. v polárních souřadnicích). Ale protože je to diferenciální operátor, smíme jej použít pouze na vektoru, jejichž složky mají pevný směr, tj. na složky dané v pravoúhlé souřadnicové soustavě. Proto budeme-li naše vektorové diferenciální rovnice sávat ve složkách, budeme všechna vektorová pole vyjadřovat pomocí jejich x-ových, y-ových a z-ových složek.

References

- | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [FLMoo] | R. Feynman, R. Leighton, and S. Matthew. <i>Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3</i> . Ed. by I. Štoll. Nakladatelství Fragment, 2000, p. 806. ISBN: 80-7200-420-4 (cit. on pp. 61–63, 65–67). |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

16. Integrální počet vektorových polí

16.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$

Obsah

16.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$	69
16.2. Tok vektorového pole	70
16.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta	71
16.3.1. Tepelná vodivost, rovnice difúze	72
16.4. Cirkulace vektorového pole	73
16.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta	74
16.6. Pole s nulovou rotací a divergencí	75
16.7. Shrnutí	75
16.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury	76

V kapitole 15 jsme viděli, že existují různé způsoby derivování polí. Některé vedou k vektorovým polím, jiné dávají pole skalární. Ačkoliv jsme odvodili mnoho různých vzorců, vše, co je v kapitole 15, lze shrnout do jediného pravidla: operátory $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$ představují tři složky vektorového operátoru ∇ . Rádi bychom nyní trochu vnikli do významu derivací polí. Potom získáme lepší cit pro to, co znamená vektorová rovnice pole.

Již jsme se zmínili o významu operace gradient (∇ působí na skalár). Teď se budeme zajímat o význam operací divergence a rotace. Interpretovat tyto veličiny je možné nejlépe pomocí určitých vektorových integrálů a rovnic, které uvádějí tyto integrály do souvislosti. Bohužel, tyto rovnice nelze získat z vektorové algebry nějakou snadnou substitucí. Proto se je budete muset učit jako něco nového. Jeden z těchto integrálních vztahů je prakticky triviální, ale další dva nejsou. Odvodíme je a objasníme, co z nich vyplývá. Rovnice, které budeme studovat, představují vlastní matematické věty. Užitečné budou nejen při interpretování významu a obsahu divergence a rotace, ale i při vypracování obecných fyzikálních teorií. Tyto matematické věty jsou pro teorii polí tím, čím je zákon zachování energie pro mechaniku částic. Takové obecné věty, jako jsou tyto, jsou důležité pro hlubší porozumění fyziky. Uvidíme však, že při řešení úloh z nich mnoho užitku není (s výjimkou nejjednodušších případů). I tak je potěšující, že na začátku našeho výkladu se setkáme s mnoha jednoduchými úlohami, řešitelnými pomocí těchto tří integrálních vzorců, které budeme nyní probírat. Uvidíme však, že sotva se úlohy stanou těžšími, nebude moci tyto jednoduché metody použít.

Nejdříve si vezměme integrální vzorec s gradientem. Obsahuje velmi jednoduchou myšlenku: Protože gradient představuje rychlosť změny veličiny mající charakter pole, integrujeme-li tuto rychlosť změny, dostaneme celkovou změnu. Předpokládejme, že máme skalární pole $\Psi(x, y, z)$. Funkce Ψ bude mít v nějakých dvou bodech (1) a (2) hodnoty $\Psi(1)$, resp. $\Psi(2)$ (Používáme pohodlnou symboliku, ve které (2) představuje bod x_2, y_2, z_2 a $\Psi(2)$ znamená totéž jako $\Psi(x_2, y_2, z_2)$.) Je-li Γ (gama) nějaká křivka spojující body (1) a (2) (obr. 16.1.1), platí následující

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla \Psi) \cdot d\vec{s} \quad (16.1.1)$$

Jde o *křivkový integrál* z (1) do (2) skalárního součinu $\nabla\Psi$ (vektor) a $d\vec{s}$ (jiný vektor — infinitezimální element křivky Γ , orientovaný ve směru postupu z (1) do (2) po křivce Γ).

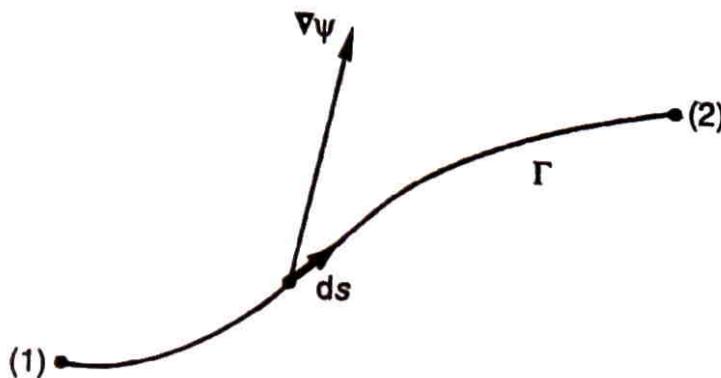
Nejdříve bychom měli vysvětlit, co rozumíme křivkovým integrálem. Uvažujme skalární funkci (x, y, z) a křivku Γ spojující dva body (1) a (2). Vyznačme na křivce nějaký počet bodů a sousední body spojujeme tak, jak ukazuje obr. 16.1.2. Délku jednotlivých úseček označme Δs_i kde i je index, který nabývá hodnot $1, 2, 3, \dots$. Křivkovým integrálem $\int_{(1)}^{(2)} f ds$ rozumíme limitu součtu $\sum_i f_i \Delta s_i$, kde f_i je hodnota funkce pro i -tou úsečku. Limitní hodnota je to, čemu se součet blíží, přidáváme-li víc a více úseček (takovým způsobem, aby největší $\Delta s_i \rightarrow 0$).

Integrál v naší větě (vztah 16.1.1) znamená totéž, ačkoliv vypadá trochu jinak. Namísto f máme jiný skalár - složku $\Delta\Psi$ ve směru $\Delta\vec{s}$. Označíme-li tuto tangenciální složku $(\Delta\Psi)_t$, je jasné, že

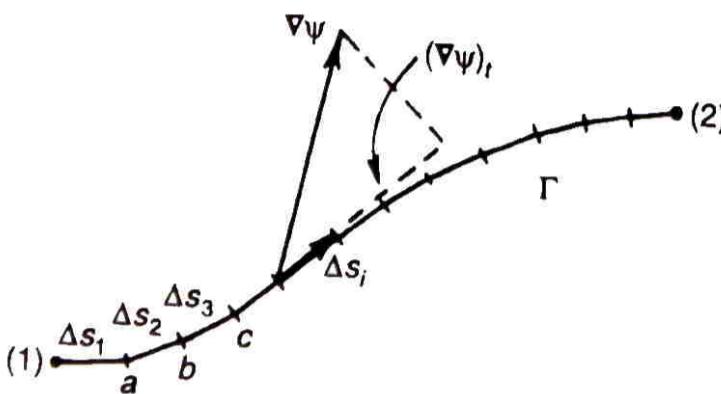
$$(\Delta\Psi s)_t = (\Delta\Psi) \cdot \Delta\vec{s} \quad (16.1.2)$$

Integrál v (16.1.2) představuje sumu takovýchto členů.

Nyní se podívejme na to, proč rovnost (16.1.2) platí. V kapitole 14 je ukázáno, že složka $\Delta\Psi$ ve směru malého posunutí $\Delta\vec{r}$ udává rychlosť změny Ψ v tomto směru $\Delta\vec{r}$. Uvažujme o úsečce $\Delta\vec{s}$ z bodu (1) do bodu a na obr. 16.1.2. Podle naší definice



Obrázek 16.1.1.: Význam veličin vystupujících v rovnosti 16.1.1. Vektor $\nabla\Psi$ se vztahuje k elementu $d\vec{s}$.



Obrázek 16.1.2.: Křivkový integrál je limitou součtu.

$$\Delta\Psi = \Psi(a) - \Psi(1) = (\Delta\Psi)_1 \cdot \vec{s}_1. \quad (16.1.3)$$

Takže

$$\Psi(b) - \Psi(a) = (\Delta\Psi)_2 \cdot \vec{s}_2, \quad (16.1.4)$$

kde $(\Delta\Psi)_1$, znamená, samozřejmě, gradient počítaný na úsečce $\Delta\vec{s}_1$ a $(\Delta\Psi)_2$ gradient počítaný na úsečce $\Delta\vec{s}_2$. Výpočtem rovností (16.1.3) a (16.1.4) dostaneme

$$\Psi(b) - \Psi(1) = (\Delta\Psi)_1 \cdot \vec{s}_1 + (\Delta\Psi)_2 \cdot \vec{s}_2 \quad (16.1.5)$$

Můžeme se přesvědčit, že postupným přidáváním takovýchto členů dostaneme

$$\Psi(b) - \Psi(a) = \sum_i (\Delta\Psi)_i \Delta\vec{s}_i \quad (16.1.6)$$

Levá strana nezávisí na tom, jak volíme naše intervaly (zůstávají-li body (1) a (2) stejné) také můžeme vzít limitu druhé strany. Tím jsme dokázali rovnost (16.1.1). Z našeho důkazu můžete vidět, že tato rovnost nezávisí ani na tom, jak zvolíme body a, b, c, ..., ani na volbě křivky Γ spojující (1) a (2). Naše věta platí pro jakoukoliv křivku vedenou z (1) do (2).

Ještě jedna poznámka o označování: Uvidíme, že nevznikne žádný zmatek, budeme-li pro pohodlí psát

$$(\Delta\Psi) \cdot d\vec{s} = \Delta\Psi \cdot d\vec{s} \quad (16.1.7)$$

V tomto označení má naše věta tento tvar:

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\Psi \cdot d\vec{s} \quad (16.1.8)$$

jakákoli křivka od (1) do (2)

16.2. Tok vektorového pole

Definovali jsme vektor \vec{h} jako teplo procházející jednotkovou plochou za jednotkový čas. Předpokládejme, že uvnitř tělesa vyplňeného látkou máme nějakou uzavřenou plochu S , která ohraňuje objem V . Chtěli bychom zjistit, kolik tepla vytéká z tohoto objemu.

Označme plošný obsah elementu plochy S jako dS . Tento symbol

nahrazuje dvojrozměrný diferenciál

$$ds = dx dy. \quad (16.2.1)$$

Tok tepla elementární ploškou dS je roven jejímu plošnému obsahu vynásobenému složkou \vec{h} kolmou na dS . Už jsme definovali \vec{n} jako jednotkový vektor směřující pod pravým úhlem ven z plochy (obr. 16.2.1). Složka \vec{h} , kterou potřebujeme, je

$$h_n = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (16.2.2)$$

Tok ploškou dS pak je

$$\vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (16.2.3)$$

Celkový tepelný tok jakoukoliv plochou dostaneme, sečteme-li příspěvky všech elementárních plošek vytvářející plochu S . Jinými slovy, integrujeme-li 16.2.3 přes celou plochu: Celkový tepelný tok plochou S se rovná

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS \quad (16.2.4)$$

Tento plošný integrál¹ budeme také nazývat *tokem plochou*. Můžeme to chápout tak, že \vec{h} je hustota proudu tepelného toku a plošný integrál z ní je celkový proud tepla směřující ven z plochy za jednotku času (v joulech za sekundu).

Rádi bychom tuto ideu zobecnili na případ, kdy vektor nepředstavuje tok něčeho konkrétního, mohlo by jít například o elektrické pole. Kdybychom chtěli, jistě bychom mohli integrovat normálovou složku elektrického pole plochou. Ačkoliv tu nejde o tok něčeho, nazýváme tuto veličinu tokem. Říkáme tok vektoru \vec{E} plochou S se rovná $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$. Slovo tok zde používáme v obecném významu jako, *plošný integrál normálové složky vektoru*.

Vraťme se k případu tepelného toku a uvažujme situaci, v níž se teplo zachovává. Například si představíme nějakou látku, ve které se po počátečním ohřevu tepelná energie dále ani negeneruje, ani neabsorbuje. Existuje-li pak tok tepla uzavřenou plochou, musí tepelný obsah objemu vymezeného plochou klesat. Tedy v podmírkách, ve kterých se teplo zachovává, tvrdíme, že

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (16.2.5)$$

kde Q je teplo uvnitř plochy. Tok tepla plochou S je roven rychlosti změny celkového tepla Q uvnitř S za čas, vzaté se záporným znaménkem. Takováto interpretace je možná, neboť hovoříme o tepelném toku a kromě toho jsme udělali předpoklad, že teplo se zachovává. O celkovém teple uvnitř objemu bychom nemohli hovořit, kdyby se v tomto objemu teplo generovalo.

Nyní poukážeme na zajímavou vlastnost toku jakéhokoliv vektoru. Můžeme mít na mysli stále vektor tepelného toku, ale vše bude platit i pro jakékoliv vektorové pole \vec{C} . Představme si, že máme uzavřenou plochu S , která ohraňuje objem V . Rozdělme nyní objem V jakýmsi řezem na dvě části (obr. 16.2.2). Dostaneme tím dvě uzavřené plochy a dva objemy. Objem V_1 ohraňuje plocha S_1 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_a a plochy řezu S_{ab} . Objem V_2 ohraňuje plocha S_2 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_b doplněné řezem S_{ab} . Položme si nyní otázku: Předpokládejme, že vypočítáme tok z plochy S_1 a přičteme ho k toku z plochy S_2 . Je roven tento součet toku z celé plochy S , s níž jsme původně začínaly? Odpověď zní ano. Tok z částí ploch S_{ab} , společnou oběma plochám S_1 a S_2 se přesně vyruší. Pro tok vektoru \vec{C} z objemu V_1 můžeme psát:

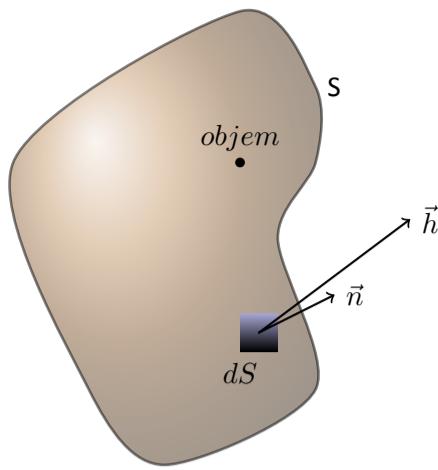
- tok plochou S_1 je roven:

$$\int_{S_a} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS \quad (16.2.6)$$

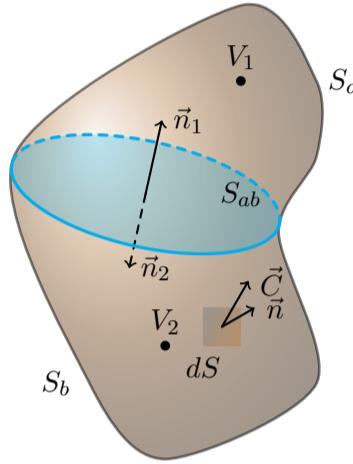
- tok plochou S_2 je roven:

$$\int_{S_b} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (16.2.7)$$

¹Malý kroužek na znaku integrálu znamená, že integrujeme přes uzavřenou plochu.



Obrázek 16.2.1.: Uzavřená plocha S vymezuje objem V . Jednotkový vektor \vec{n} udává vnější normálu k plošnému elementu dS a \vec{h} je vektor hustoty teplého toku pro uvažovaný plošný element.



Obrázek 16.2.2.: Objem V uvnitř plochy S je řezem S_{ab} rozdělen na dvě části. Dostáváme tím objem V_1 vymezený plochou $S_1 = S_a + S_{ab}$ a objem V_2 vymezený plochou $S_2 = S_b + S_{ab}$.

Všimněme si, že v druhém integrálu jsme psali \vec{n}_1 , pro vnější normálu k S_{ab} , patří-li tato k S_1 a \vec{n}_2 patří-li k S_2 , jak ukazuje obr. 16.2.2. Zřejmě $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ takže

$$\int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (16.2.8)$$

Sečteme-li rovnosti 16.2.6 a 16.2.7 přesvědčíme se, že součet toku přes S_1 a S_2 je dán součtem dvou integrálů, které spolu dávají tok původní plochy $S = S_a + S_b$.

Vidíme, že o toku úplnou vnější plochu S je možné uvažovat jako o součtu toků dvou částí, na které se objem V rozdělil. *Takto pro jakýkoliv způsob dělení původního objemu musí obecně platit, že tok vnější plochou, daný původním integrálem, je roven součtu toků ze všech jeho malých vnitřních částí.*

16.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta

Uvažujme krychli jejíž hrany mají směr souřadnicových os tak, jako na obr. 16.3.1. Předpokládejme, že souřadnice jednoho z vrcholu krychle je totožný se začátkem souřadnicové soustavy x, y, z . Nechť Δx je délka hrany krychle ve směru osy x , Δy je délka hrany ve směru osy y a Δz délka hrany ve směru osy z . Chceme najít tok vektorového pole \vec{C} povrchem krychle. Dostaneme jej sečtením toků každou ze šesti stěn. Nejdříve uvažujeme stěnu na obrázku 16.3.1 označenou jako 1. Tok směřující touto stěnou ven z krychle je dán integrálem záporně vzaté x -ové složky \vec{C} plochou stěny: Protože máme malou krychli můžeme tento integrál approximovat hodnotou x ve středu stěny (označíme jej jako bod 1) vynásobenou plošným obsahem stěny, tj. $\Delta y \Delta z$:

$$\text{tok z 1} = -C_x \Delta y \Delta z \quad (16.3.1)$$

Podobně napíšeme tok stěnu 2:

$$\text{tok z 2} = C_x \Delta y \Delta z \quad (16.3.2)$$

Obecně se $C_x(1)$ a $C_x(2)$ trochu liší. Je-li dostatečně malé, můžeme psát

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x. \quad (16.3.3)$$

Na pravé straně tohoto vztahu bychom ve skutečnosti měli uvést více členů. Všechny však budou obsahovat vyšší mocniny Δx , a proto, uvažujeme-li limitní případ malého Δx , budou zanedbatelné. Takovým způsobem pro tok stěnou 2 vychází

$$\text{tok z 2} = \left(C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z. \quad (16.3.4)$$

Sečtením toků stěnami 1 a 2 dostaneme

$$\text{tok z 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (16.3.5)$$

Derivace by se měla počítat ve skutečnosti ve středu stěny 1, tj. v bodu $[x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}]$. Ale v limitním případě infinitezimální krychle uděláme pouze zanedbatelnou chybu, počítáme-li je ve vrcholu (x, y, z) .

Provedeme-li stejně úvahy pro každý z dvou párů stěn, dostaneme

$$\text{tok z 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{tok z 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Celkový tok všemi stěnami je součtem těchto členů. Dostáváme tedy

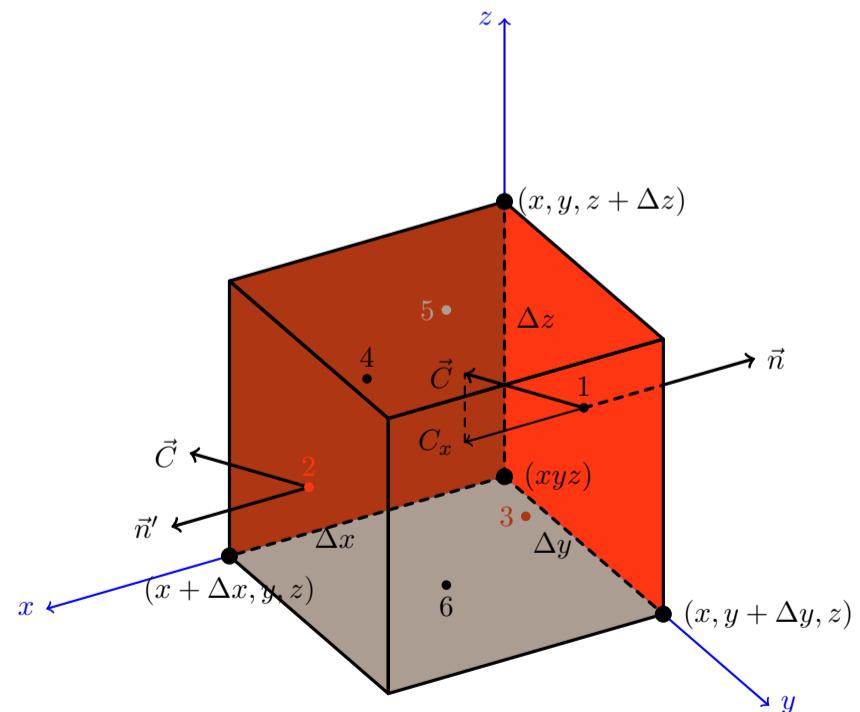
$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (16.3.6)$$

Součtem derivací je právě $\nabla \cdot \vec{C}$ a dále $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$, tj. objem krychle. Takovýmto způsobem můžeme pro infinitezimální krychli psát

$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V. \quad (16.3.7)$$

Ukázali jsme, že tok z povrchu infinitezimální krychle ven je roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. Nyní vidíme význam divergence vektoru. Divergence vektoru v bodě P je tok - vycházející „proud“ vektoru \vec{C} - připadající na jednotkový objem v okolí P .

Divergenci \vec{C} jsme uvedli do souvislosti s tokem \vec{C} z každého infinitezimálního objemu. V případě konečného objemu můžeme využít fakt, který jsme už dokázali, že celkový tok z objemu je součtem toků z každé jedné části. To znamená, že divergenci můžeme integrovat přes celý objem. Z toho vyplývá věta, že integrál normálové složky každého vektoru přes jakoukoliv uzavřenou plochu je možné zapsat jako integrál z divergence tohoto vektoru přes objem uzavřený touto plochou. Tato věta byla



Obrázek 16.3.1.: Výpočet toku pole \vec{C} z malé krychle

pojmenována po Gaussovi.

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad \dots \text{Gaussova věta} \quad (16.3.8)$$

kde S je jakákoli uzavřená plocha a V je objem jí vymezený.

16.3.1. Tepelná vodivost, rovnice difúze

Abychom se lépe seznámili s *Gaussovo větou*, uveďme nějaký případ jejího použití. Vezměme opět případ tepelného toku, například v kovu. Předpokládejme, že máme jednoduchou situaci, kdy všechno teplo bylo o přivedeno už dříve a těleso se nyní pouze ochlazuje. Žádné zdroje tepla už nejsou, takže teplo se zachovává. Kolik je potom tepla uvnitř určitého zvoleného objemu v libovolném čase? Množství tepla se musí změňovat, a to právě o množství, které vytéká z objemu jeho povrchem. Kdyby byl náš objem malou krychlí, pak podle vztahu 16.3.7 bychom napsali

$$\text{tok tepla} = \int_{\text{krychle}} \vec{h} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{h}) \Delta V. \quad (16.3.9)$$

Tato hodnota však musí být rovna rychlosti, kterou se teplo ztrácí z vnitřku krychle. Je-li q teplo připadající na jednotkový objem, $q \Delta V$ je teplo v krychli a rychlosť jeho *úbytku* je

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (16.3.10)$$

Z porovnání rov. 16.3.9 a 16.3.10 vidíme, že

$$\nabla \cdot \vec{h} = -\frac{dq}{dt}. \quad (16.3.11)$$

Podotkneme, že rovnice tohoto tvaru se ve fyzice vyskytuje velmi často. Vyjadřuje *Zákon zachování*, v tomto případě *Zákon zachování tepla*. Ve vztahu 16.2.5 jsme tentýž fyzikální jev vyjádřili jiným způsobem. Zde máme *diferenciální* tvar zákona zachování zatímco rovnost 16.2.5 představuje jeho *integrální* tvar.

Rovnici (16.3.11) jsme odvodili použitím vztahu (16.2.5) na infinitezimální krychli. Můžeme postupovat i obráceně. Pro velký objem V ohraničený plochou S vyplývá z Gaussovy věty

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = \int \nabla \cdot \vec{h} dV. \quad (16.3.12)$$

Dosadíme-li sem z (16.3.11), zjistíme, že integrál na pravé straně je právě $-\frac{dQ}{dt}$ a opět dostaneme vztah (16.2.5).

Nyní uvažujme jiný případ. Představme si, že máme těleso vyplněné látkou s malou dutinou uvnitř. Nechť v ní dochází k nějaké chemické reakci generující teplo. Nebo bychom si to mohli představit tak, že tam jsou nějaké vodiče vedoucí k miniaturnímu odporu, který je zahříván elektrickým proudem. Budeme předpokládat, že teplo se generuje prakticky v jednom bodě. Nechť P označuje energii uvolněnou v tomto bodě za jednu sekundu. Dále budeme předpokládat, že ve zbytku objemu se teplo zachovává a že generování tepla probíhalo velmi dlouho, takže se teplota už nikde nemění. Otázka zní: Jak vypadá tepelný vektor \vec{h} na různých místech kovu? Jaká je hustota tepelného toku v každém bodě?

Víme, že integrujeme-li normálovou složku vektoru \vec{h} po uzavřené ploše, která obklopuje zdroj, vždy dostaneme P . Všechno teplo, které se generuje v bodovém zdroji, musí vyjít povrchem, neboť jsme předpokládali, že tok je stálý. Máme těžkou úlohu najít vektorové pole, které integrováno přes jakoukoliv plochu, dá vždy P . Toto pole však můžeme najít docela snadno, vezmeme-li speciálnější plochu. Vezmeme kulovou plochu s poloměrem R a se středem ve zdroji a budeme předpokládat, že proudění tepla je radiální (obr. 16.3.2). Intuice nám napovídá, že vektor \vec{h} by měl směřovat radiálně, jde-li o velké těleso a nejsme-li blízko stěn, a že ve všech bodech kulové plochy by měl mít stejnou velikost. Vidíte, že na to, abychom našli odpověď, přidáváme k naší matematice jisté množství dohadů - obyčejně nazývané „fyzikální intuice“.

Když je pole \vec{h} radiální a kulově symetrické, je integrál normálové složky vektoru \vec{h} kulovou plochou velmi jednoduchý, protože tehdy je normálová

složka vektoru rovna velikosti vektoru \vec{h} a je konstantní. Obsah plochy, přes kterou integrujeme, je $4\pi R^2$. Potom dostaneme

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = h \cdot 4\pi R^2 \quad (16.3.13)$$

kde h je velikost vektoru \vec{h} . Tento integrál má být roven P , tedy rychlosti, se kterou teplo ve zdroji vzniká. Dostáváme

$$h = \frac{P}{4\pi R^2}$$

nebo

$$\vec{h} = \frac{P}{4\pi R^2} \vec{e}_r \quad (16.3.14)$$

kde, jako obvykle, \vec{e}_r představuje jednotkový vektor v radiálním směru. Podle našeho výsledku je \vec{h} přímo úměrné P a mění se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti od zdroje.

Výsledek, který jsme právě dostali, se hodí na proudění tepla v blízkosti bodového zdroje tepla. Pokusme se nyní najít rovnice pro nejobecnější případ proudění tepla, platí-li jediná podmínka, že teplo se zachovává. Budeme se zabývat pouze tím, co se stane v prostoru bez jakýchkoliv zdrojů nebo absorbátorů tepla.

Diferenciální rovnice pro vedení tepla byla odvozena v kapitole 15. Podle rovnice (15.7.3) platí

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (16.3.15)$$

(vzpomeňte si, že tento vztah platí sice přibližně, ale pro takové látky jako jsou kovy, docela dobře.) Dá se použít, samozřejmě, jen v těch oblastech látky, ve kterých nedochází ke generování nebo absorpci tepla. Už jsme odvodili jiný vztah, rovnici (16.3.11), který platí, když se teplo zachovává. Když v (16.3.11) vektor \vec{h} vyjádříme podle (16.3.15), dostaneme

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \vec{h} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

nebo

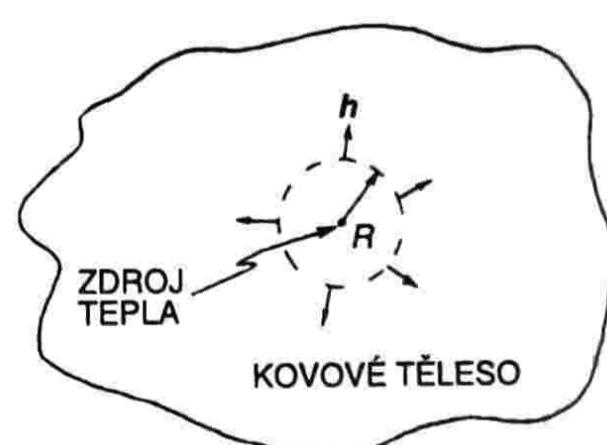
$$\frac{dq}{dt} = \lambda \nabla \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T \quad (16.3.16)$$

je-li λ konstanta. Vzpomínáte si, že q je množství tepla v jednotkovém objemu a $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ je *Laplaceův operátor*

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Uděláme-li ještě jeden předpoklad, můžeme dostat velmi zajímavou rovnici. Budeme předpokládat, že teplota látky je přímo úměrná tepelnému obsahu jednotkového objemu, tj. že látka má určitou měrnou tepelnou kapacitu. Platí-li tento předpoklad (což bývá často), můžeme psát

$$\Delta q = c_V \Delta T$$



Obrázek 16.3.2.: V oblasti blízko bodového zdroje proudí teplo radiálně směrem ven.

nebo

$$\frac{dq}{dt} = c_V \frac{dT}{dt} \quad (16.3.17)$$

Rychlosť změny teplaje priamo úmerná rychlosťi změny teploty. Součinitel úmernosti c_V je tu měrná tepelná kapacita jednotky objemu látky. Ze vztahů (16.3.17) a (16.3.16) dostávame

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c_V} \nabla^2 T \quad (16.3.18)$$

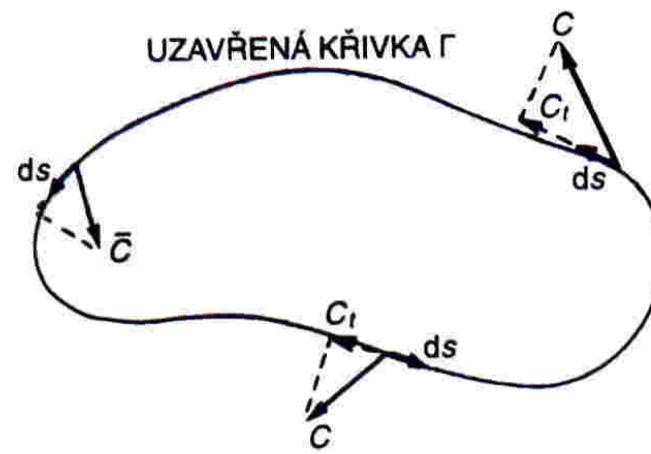
Zjišťujme, že časová rychlosť změny T v každém bodě je přímo úmerná Laplaceovu operátoru teploty T , tj. druhé derivaci její závislosti na poloze v prostoru. Dostávame diferenciální rovnici s proměnnými x, y, z a t pro teplotu T .

Diferenciální rovnice (16.3.18) se nazývá *rovnici difúze tepla*. Často je psána ve tvaru

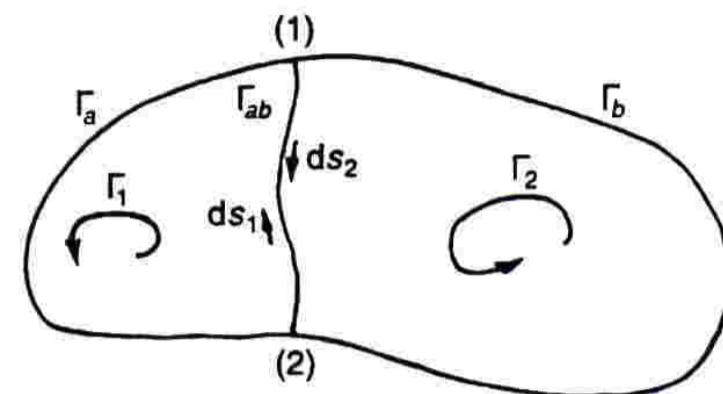
$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T \quad (16.3.19)$$

kde D je koeficient *difúze tepla* a zde je roven hodnotě $\frac{\lambda}{c_V}$.

Rovnice difúze se objevuje v mnoha fyzikálních úlohách - při difúzi plynů, neutronů a v dalších případech. Nyní však máme úplnou rovnici, která popisuje difúzi v nejobecnější možné situaci. Později probereme způsoby řešení rovnice difúze, abychom našli, jak se v konkrétních případech mění teplota. Nyní se vrátíme zpět k výkladu dalších vět o vektorových polích.



(a) Cirkulace vektorového pole \vec{C} po křivce Γ je křivkový integrál \vec{C} (tj. tangenciální složky vektoru \vec{C}).



(b) Cirkulace po celé křivce $\Gamma_a + \Gamma_b$ je rovna součtu cirkulací po dvou křivkách: $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ a $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$.

Obrázek 16.4.1.: Cirkulace vektorového pole C

16.4. Cirkulace vektorového pole

Podobným způsobem, jakým jsme to udělali v případě divergence, chceme nyní prozkoumat rotaci. Gaussovu větu jsme odvodili analýzou plošného integrálu, ačkoli zpočátku nebylo zřejmé, že se chystáme zabývat divergencí. Jak jsme věděli, že máme integrovat přes celou plochu, abychom dostali divergenci? Vůbec nebylo jasné, že vyjde tento výsledek. A právě bez zjevného opodstatnění teď vypočítáme pomocí vektoru ještě cosi a ukážeme, že to souvisí z rotací. Tentokrát budeme počítat to, co se nazývá cirkulace vektorového pole. Je-li \vec{C} nějaké vektorové pole, vezmeme jeho složku podél nějaké křivky a vypočítáme integrál této složky po celé uzavřené křivce. Tento integrál se nazývá cirkulací vektorového pole po (uzavřené) křivce. Už dříve v této kapitole jsme uvažovali křivkový integrál vektoru $\nabla \Psi$. Nyní provedeme totéž pro jakékoli vektorové pole \vec{C} .

Nechť je Γ nějaká uzavřená křivka v prostoru - pouze myšlená (obr. 3.7). Křivkový integrál tangenciální složky vektoru \vec{C} po této křivce bude

$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s}. \quad (16.4.1)$$

Je nutné, abyste si všimli, že integrujeme po celé křivce kolem dokola, nejen z jednoho bodu do druhého, jako jsme to dělali předtím. To, že je třeba integrovat po celé dráze dokola, nám má připomenout malý kroužek na znaku integrování. Tento integrál se nazývá cirkulace vektorového pole po křivce Γ . Název se převzal ze zkoumání cirkulace kapaliny a podobně jako tok se rozšířil a použil na jakékoli pole, i když tam není žádná „circulující“ látka.

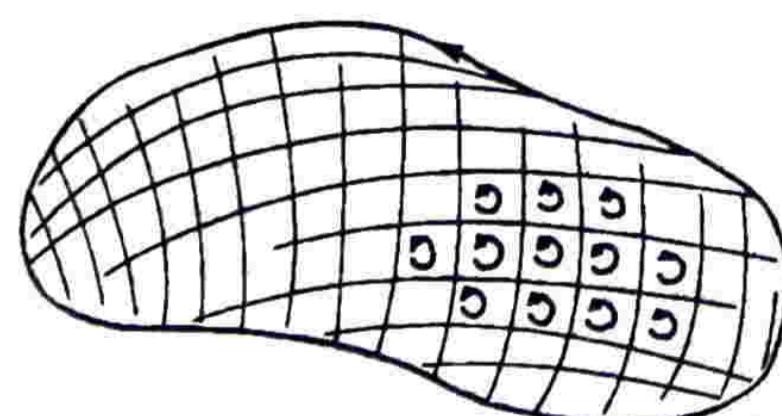
Stejnou hrou, jakou jsme předvedli v případě toku, můžeme ukázat, že cirkulace po křivce je součtem cirkulací po dvou dílčích křivkách. Předpokládejme, že jsme naši křivku na obr. 16.4.1a rozdělili na dvě uzavřené křivky spojením dvou bodů (1) a (2) na původní křivce nějakou čarou napříč (obr. 16.4.1b). Nyní existují dvě uzavřené křivky a Γ_1 a Γ_2 . Γ_1 je vytvořena z Γ_a -té části původní křivky, která je vlevo od (1) a (2) plus zkratka Γ_{ab} . Křivku Γ_2 vytváří zbytek původní křivky plus zkratka.

Cirkulace po Γ_1 je součtem integrálů po Γ_a a po Γ_{ab} . Podobně cirkulace po Γ_2 je součtem dvou částí, jedné související s Γ_a a druhé související s Γ_{ab} . Integrál po Γ_{ab} bude mít v případě křivky Γ_2 opačné znaménko než v případě Γ_1 , protože směr oběhu bude opačný - vždyť oba naše křivkové integrály musíme počítat ve stejném smyslu oběhu.

Toutéž úvahou, jakou jsme provedli dříve, se můžete přesvědčit, že

součet obou těchto cirkulací dá právě křivkový integrál po původní křivce Γ . Příspěvky pocházející od Γ_{ab} se ruší. Cirkulace po jedné části plus cirkulace po druhé části je rovna cirkulaci po vnější křivce. S procesem rozdělování původní křivky můžeme pokračovat do jakéhokoliv počtu menších uzavřených drah. Sečteme-li cirkulace po menších dráhách, dojdeme vždy k rušení příspěvků od jejich společných částí, takže součet je ekvivalentní s cirkulací po původní křivce.

Nyní předpokládejme, že původní uzavřená křivka ohraničuje nějakou plochu. Ve skutečnosti existuje nekonečně mnoho ploch, jež všechny mají původní křivku jako svoji hranici. Naše výsledky však nebudou záviset na tom, kterou plochu zvolíme. Nejdříve rozdělíme naši původní křivku na mnoho malých uzavřených křivek, jež všechny budou ležet na námi zvolené ploše, jak je vidět na obr. 16.4.2. Zvolíme-li naše křivky dostatečně malé, můžeme, bez ohledu na tvar plochy, předpokládat, že každá z nich utváří v podstatě rovinou plošku. Kromě toho můžeme křivky vybrat tak, že každá bude velmi blízká obvodu čtverce. Cirkulaci po velké křivce nyní můžeme vypočítat tak, že najdeme cirkulace po obvodech všech malých čtverců a ty sečteme.



Obrázek 16.4.2.: Je zvolena nějaká plocha ohraničená uzavřenou křivkou Γ . Plocha se rozdělí na množství malých přibližně čtvercových plošek. Cirkulace po Γ je rovna sumě cirkulací po malých uzavřených křivkách.

16.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta

Jak najít cirkulaci pro každý z malých čtverečků? Závisí to na tom, jak je čtvereček orientovaný v prostoru. Kdyby měl speciální orientaci, například kdyby ležel v některé ze souřadnicových rovin, bylo by možné výpočet provést snadno. Protože jsme dosud o orientaci souřadnicových os neudělali žádný předpoklad, můžeme si osy dobře zvolit tak, aby ten čtvereček, na který je v té chvíli soustředěna naše pozornost, ležel v rovině xy (obr. 16.5.1).

Vyjádříme-li náš výsledek ve vektorové symbolice, můžeme tvrdit, že bude pro všechny konkrétní orientace roviny tentýž.

Nyní chceme najít cirkulaci pole \vec{C} po obvodu našeho malého čtverce. Křivkový integrál se snadno vypočte, uděláme-li čtvereček tak malý, že podél jakékoli jeho strany se vektor \vec{C} moc nemění. (Tento předpoklad platí tím lépe, čím menší je čtvereček, takže v podstatě mluvíme o infinitezimálních čtverečcích.) Vyjdeme z bodu (x, y) - levého dolního rohu obrázku - a budeme postupovat ve směru vyznačeném šipkami. V případě první strany, označené 1, nechť je tangenciální složka $C_x(1)$, délka dráhy nechť je Δx . První příspěvek k integrálu tedy bude $C_x(1)\Delta x$. V případě druhé strany dostaneme $C_y(2)\Delta y$, v případě třetí $-C_x(3)\Delta x$ a v případě čtvrté strany to bude $-C_y(4)\Delta y$. Záporná znaménka jsou nutná, neboť tangenciální složku musíme vyjadřovat vzhledem ke směru postupu po obvodu. Celý křivkový integrál pak bude

$$\oint \vec{C} d\vec{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y. \quad (16.5.1)$$

Všimněme si prvního a třetího člena na pravé straně. Spolu dávají

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x. \quad (16.5.2)$$

Mohli byste se domnívat, že podle naší approximace je rozdíl v hranaté závorce roven nule. Je to tak, ale pouze v nulovém přiblížení. Můžeme však být přesnější a vzít v úvahu i rychlosť změny \vec{C}_x . Když to uděláme, můžeme psát

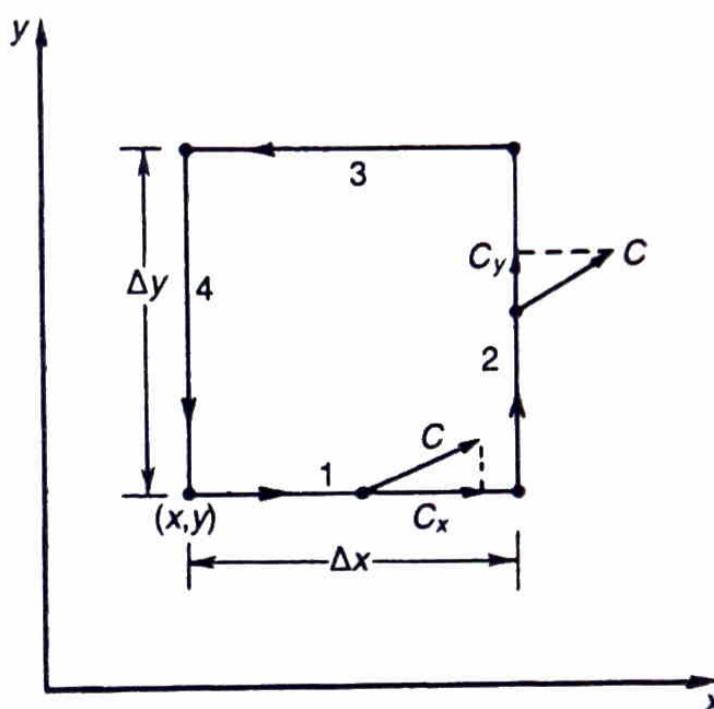
$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} dy. \quad (16.5.3)$$

Kdybychom zahrnuli následující přiblížení, vystoupily by v něm i členy obsahující Δy^2 . Protože však nakonec přejdeme k limitě pro $\Delta y \rightarrow 0$, je možno takové členy zanedbat. Dosadíme-li (16.5.3) do (16.5.2), jistíme, že

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} dx dy. \quad (16.5.4)$$

Souhlasně s naší approximací je možno tuto derivaci počítat v bodě (x, y) .

Podobně můžeme vyjádřit zbývající dva členy ve výrazu (16.5.1) pro



Obrázek 16.5.1.: Výpočet cirkulace C po obvodu malého čtverečku

cirkulaci

$$[C_y(2) - C_y(4)]\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} dx dy. \quad (16.5.5)$$

Cirkulace po obvodu čtverečku pak bude

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.5.6)$$

což je zajímavé, neboť rozdíl závorkách představuje právě z -ovou složku rotace. Kromě toho si všimněme, že $\Delta x \Delta y$ je plošný obsah našeho čtverečku. Takovýmto způsobem můžeme naši cirkulaci (16.5.6) psát jako

$$(\nabla \times \vec{C})_z dS. \quad (16.5.7)$$

Ale z -ová složka ve skutečnosti znamená normálovou složku vzhledem k plošnému elementu. Cirkulaci po obvodu diferenciálního čtverečku proto můžeme vyjádřit v invariantním vektorovém tvaru:

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = (\nabla \times \vec{C})_n dS = (\nabla \times \vec{C}) \cdot n dS. \quad (16.5.8)$$

Náš výsledek zní: cirkulace jakéhokoliv vektoru \vec{C} po obvodu infinitezimálního čtverečku je rovna normálové (vzhledem k rovině, v níž leží čtvereček) složce vektoru rot \vec{C} vynásobené plošným obsahem čtverečku.

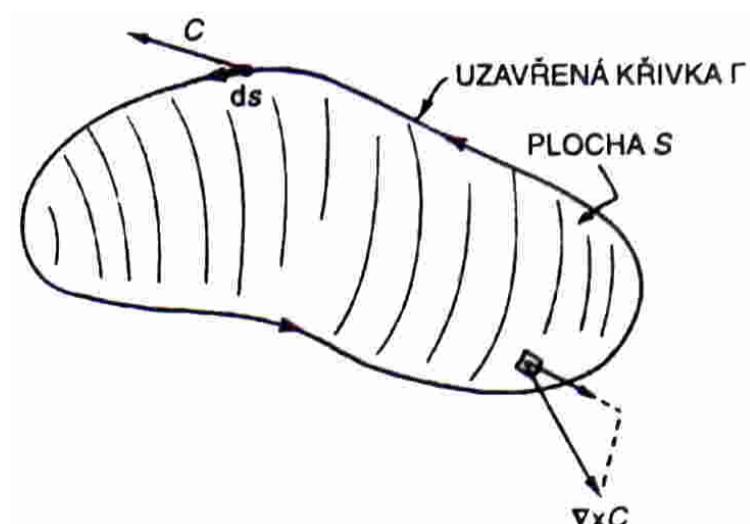
Cirkulaci po jakékoli uzavřené křivce Γ je možné nyní lehce uvést do souvislosti s rotací vektorového pole. Křivku „vyplníme“ nějakou vhodnou plochou S (obr. 16.5.2) a vypočítáme cirkulace po obvodech množiny infinitezimálních čtverečků tvořících tuto plochu. Tento součet je možno zapsat jako integrál. Naším výsledkem je velmi užitečná věta, nazvaná Stokesova věta (podle G. G. Stokese).

$$\text{Stokesova věta: } \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{C})_n dS. \quad (16.5.9)$$

kde S je jakákoli plocha ohraničená křivkou Γ .

Nyní musíme něco říci o znaménkové konvenci. Na obr. 16.5.1 směřuje osa z k vám v „obyčejné“, tj. pravotočivé soustavě. Kdybychom náš křivkový integrál počítali při kladné orientaci oběhu, zjistili bychom, že cirkulace je rovna z -ové složce vektoru $\nabla \times \vec{C}$. Kdybychom postupovali opačným směrem, dostali bychom opačné znaménko. Jak tedy budeme obecně vědět, který směr zvolit za kladný pro normálovou složku vektoru $\nabla \times \vec{C}$? Kladná normála musí souviset se smyslem rotace vždy tak, jak je to na obr. 16.5.1. Obecný případ je vyznačen na obr. 16.5.2.

Jedním ze způsobů, jak si tento vztah zapamatovat, je *pravidlo pravé ruky*. Přiložíte-li pravou ruku podél křivky Γ tak, že prsty ukazují kladný smysl $d\vec{s}$, palec ukazuje směr kladné normály k ploše S .



Obrázek 16.5.2.: Cirkulace \vec{C} po Γ je rovna plošnému integrálu normálové složky vektoru $\nabla \times \vec{C}$

16.6. Pole s nulovou rotací a divergencí

Nyní bychom se rádi zabývali některými důsledky našich nových vět. Nejdřív vezměme příklad vektoru, jehož rotace je všude rovna nule. Pak je podle Stokesovy věty jeho cirkulace po každé křivce také rovna nule. Z toho vyplývá, že zvolíme-li na uzavřené křivce dva body (1) a (2) (obr. 16.6.1), křivkový integrál tangenciální složky z (1) do (2) nezávisí na tom, po které ze dvou možných drah se vypočítá. Můžeme udělat závěr, že integrál z (1) do (2) bude záviset pouze na poloze těchto bodů, tj. je pouze nějakou funkcí polohy. Stejnou logiku jsme použili v kapitole 13, když jsme dokázali, že když je integrál nějaké veličiny po uzavřené dráze vždy roven nule, lze jej vyjádřit jako rozdíl funkce polohy dvou bodů. Tento fakt nám umožnil zavést pojem potenciálu. Dále jsme dokázali, že vektorové pole je gradientem této potenciálové funkce (viz vztah 13.1.1).

Z toho vyplývá, že každé vektorové pole s nulovou rotací je rovno gradientu nějaké skalární funkce. To je užitečný poznatek: je-li $\nabla \times \vec{C} = 0$, existuje skalární pole Ψ (psí), že $\vec{C} = \nabla \Psi$. Tento zvláštní druh vektorového pole tedy můžeme, chceme-li, popsat pomocí skalárního pole.

Ukážeme ještě něco. Předpokládejme, že máme libovolné skalární pole φ (fi). Vytvoříme-li jeho gradient $\nabla \varphi$, musí být integrál tohoto vektoru po jakémkoliv uzavřené křivce roven nule. Jeho křivkový integrál z bodu 1 do bodu 2 bude $\varphi(2) - \varphi(1)$. Představují-li 1 a 2 tentýž bod, bude podle věty 1 (vztah 16.1.8) křivkový integrál roven nule:

$$\int_{\text{jakákoli uzavřená křivka}} \nabla \times (\nabla \varphi) dS = 0 \quad (16.6.1)$$

pro jakoukoliv plochu. Je-li tento integrál roven nule pro každou plochu, musí být roven nule i jeho integrand. Vždy tedy platí

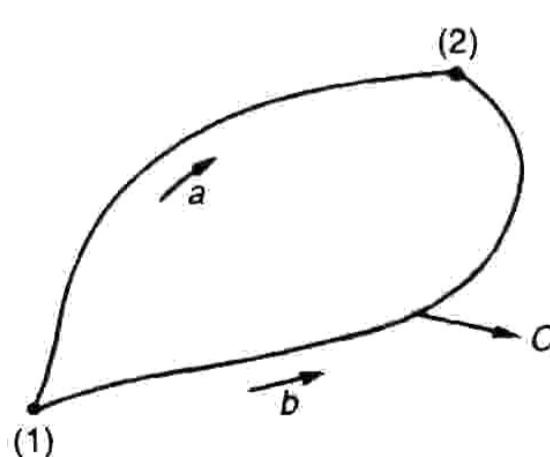
$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (16.6.2)$$

Tentýž výsledek jsme dokázali v článku 15.8 pomocí vektorové algebry.

Nyní se podívejme na zvláštní případ, kdy malou uzavřenou křivku Γ vyplníme velkou plochou S , jako na obr. 16.6.2. Rádi bychom se vlastně dozvěděli, co se stane, když se uzavřená křivka „scvrkne“ na bod, takže ohrazení plochy zmizí, tj. plocha se stane uzavřenou. Je-li vektor \vec{C} všechny konečný, musí se při „scvrkávání“ křivky Γ křivkový integrál po Γ blížit nule (integrál je přibližně přímo úměrný délce Γ která se blíží nule). Podle Stokesovy věty se musí plošný integrál veličiny $(\nabla \times \vec{C})_n$ také blížit nule. Když plochu uzavíráme, jako bychom přidávali příspěvky, které postupně vyruší to, co bylo předtím. Dospěli jsme k nové větě

$$\oint_{\text{jakákoli uzavřená křivka}} (\nabla \times \vec{C})_n d\vec{S} = 0 \quad (16.6.3)$$

Nyní je to zajímavé, neboť jednu větu o plošném integrálu uzavřenou plochou už máme. Takový plošný integrál je podle Gaussovy věty (vztah 16.3.8) roven objemovému integrálu divergence vektorového pole. Z Gaussovy věty použité na vektor $\nabla \times \vec{C}$ vyplývá



Obrázek 16.6.1.: Je-li $\nabla \times \vec{C}$ rovno nule, cirkulace po uzavřené křivce Γ je také rovna nule. Křivkový integrál $\vec{C} \cdot d\vec{s}$ z (1) do (2) po křivce a proto musí být stejný jako tentýž křivkový integrál po křivce b .

Z toho usuzujeme, že druhý integrál musí být též roven nule:

$$\int_{\text{jakýkoliv objem}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) dV = 0 \quad (16.6.4)$$

To také platí pro každé vektorové pole \vec{C} . Protože však rovnost (16.6.4) je správná pro *každý objem*, musí platit, že v každém bodě prostoru je integrand roven nule. Dostáváme, že vždy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0. \quad (16.6.5)$$

To je však stejný výsledek, jaký jsme dostali v článku 15.8 z vektorové algebry. Nyní začínáme chápát, jak jedno souvisí s druhým.

$$\int_{\text{uzavřená plocha}} (\nabla \times \vec{C})_n d\vec{S} = \int_{\text{objem uvnitř plochy}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) dV. \quad (16.6.6)$$

16.7. Shrnutí

Shrňme, co jsme se dozvěděli o vektorovém počtu. Skutečně významné výsledky kapitol 15 a 16 jsou tyto:

1. Operátory $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$ mohou považovat za tři složky vektorového operátoru:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (16.7.1)$$

Zachází-li se s tímto operátorem jako s vektorem, vzorce, které pro něj vyplývají z vektorové algebry, jsou správné.

2. Rozdíl hodnot skalárního pole ve dvou bodech je roven křivkovému integrálu tangenciální složky gradientu tohoto skaláru po jakémkoliv křivce spojující oba body:

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla \Psi \cdot d\vec{s} \quad (16.7.2)$$

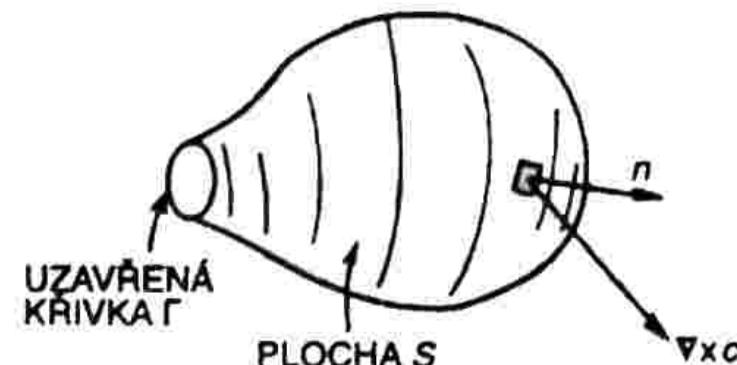
jakákoli křivka od (1) do (2)

3. Plošný integrál normálové složky libovolného vektoru po uzavřené ploše je roven integrálu divergence tohoto vektoru přes vnitřní objem ohrazený plochou:

$$\int_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad (16.7.3)$$

4. Křivkový integrál tangenciální složky libovolného vektoru po uzavřené křivce je roven plošnému integrálu normálové složky rotace tohoto vektoru po jakémkoliv ploše, která je touto křivkou ohrazena:

$$\oint_S \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int (\nabla \times \vec{C}) \cdot \vec{n} dS. \quad (16.7.4)$$



Obrázek 16.6.2.: Přechodem k limitnímu případu uzavřené plochy zjistíme, že plošný integrál veličiny $(\nabla \times \vec{C})_n$ musí konvergovat k nulové hodnotě.

16.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury

Záměrem této „názorné exkurze“ do teorie pole je poskytnout náhled s využitím animací. Zopakujme že, vektor je veličina, která určuje nejen velikost, ale i směr v prostoru. Vektory tedy používáme k popisu fyzikálních veličin, jako je např. rychlosť, hybnosť, zrychlení nebo síla působící na objekt. Nicméně, pokud se pokoušíme popsat systém, který se skládá z velkého počtu objektů (např. pohybující se voda, sníh, dešť,...), musíme přiřadit vektor každému samostatnému objektu. Například v každém okamžiku můžeme jakékoli sněhové vločce přiřadit vektor rychlosti, který charakterizuje její pohyb. Padající sníh je příkladem diskrétního, tj. nespojitého prostředí.

Na druhou stranu, jestliže chceme analyzovat pohyb tekutiny, musíme vektor rychlosti přiřadit v každém okamžiku každé části tekutiny. Takto budou vektory popisovat směr a velikost rychlosti v každém čase a v každém bodě prostoru. Soubor všech vektorů rychlosti nazveme *vektorovým polem rychlostí*. Nyní je jasné podstatný rozdíl mezi vektorovým a skalárním polem tj., že vektorové obsahuje informaci jak o velikosti, tak i o směru veličiny v každém časovém okamžiku pro každý bod v prostoru, zatímco skalární pouze udává velikost dané veličiny v každém čase a v každém bodě prostoru. Příkladem spojitého prostředí je např. proudění vzduchu.

Obecné vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$ můžeme napsat ve tvaru:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (16.8.1)$$

kde jednotlivé komponenty jsou *skalární pole*. Pro ilustraci vlastností vektorových polí použijeme tekutinové pole, protože vizualizace takových typů vektorových polí jsou nejjednodušší.

Zobrazení vektorových polí je provedeno pomocí šumové textury, která je lokálně korelována se směrem vektorového pole. Obdobné zobrazení lze přirozeným způsobem realizovat i experimentálně. Rozházíme-li semínka trávy v silném elektrickém poli, začnou se orientovat delší osou rovnoběžně se směrem silokřivek pole. Poskytnou nám tím hustý soubor vzorků zobrazujících směry a tedy i tvar pole. Platí tedy, že lokální směry polí jsou v souhlase se směry šumové textury diagramu. Šumová textura umí poskytnout mnoho informací o prostorové struktuře pole.

První animace 16.8.1 znázorňuje *divergující tok* tekutiny, šumovou texturou, jejíž směr je v korelace se směrem tohoto toku. Animace na obr. 16.8.2 zobrazuje jinou třídu chování toku tekutiny - *cirkulaci, víření*. Kapalina se pohybuje jednoduše v kruzích, nic zde nevzniká ani nezaniká (nemá zdroj ani propad).

Na animaci 16.8.3 je zřídko v blízkosti menší vípusti (propadu), zatímco animace 16.8.4a znázorňuje dvě zřídla nestejně síly. Tekutinové pole může mít více než jeden střed víření.

Na animaci 16.8.4b je ukázán tok pole se dvěma víry, cirkulacemi. Toky víří v opačných směrech a jeden je silnější než druhý. Na animaci 16.8.4c máme stejnou situaci, ale směry obou vírů jsou stejné.

Na animaci 16.8.5a je ukázán konstantní tok klesající dolů, který se vzájemně ovlivňuje se zřídlem. Zdroj je částečně schopen téci vzhůru proti proudu padající tekutiny, ale nakonec je také stržen a otočen směrem dolů.

Podobně na animaci 16.8.5b je znázorněn homogenní tok směřující dolů, interagující s tokem cirkulujícím proti směru hodinových ručiček. Otáčivý tok je schopen téci kousek proti proudu, ale nakonec je stržen silnějším tokem směrem dolů.

Konečně na animaci 16.8.5c jsou ukázány oba toky pole, jak vír, tak i zdroj (jak rotace, tak také divergence vektorového pole jsou nenulové). Jakékoli vektorové pole lze zapsat jako součet nevírových částí (nulová rotace) a nedivergujících (nezřídlových, nezdrojových) částí (zádná zřídla ani propady čistic). V našem studiu elektromagnetismu uvidíme, že statické elektrické pole je nevírové (tj. vypadá jako na animacích 16.8.1, 16.8.3, 16.8.4a a 16.8.5a) a statické magnetické pole je nedivergující, nezdrojové (tj. podobá se animacím 16.8.2, 16.8.4b, 16.8.4c a 16.8.5b). Jenom v případech časově proměnného elektrického pole můžeme pozorovat, že má elektrické pole obě vlastnosti, tj. je jak zdrojové, tak i vírové, takže vypadá jako na animaci 16.8.5c. Narození od pole elektrického je pole magnetické

Obrázek 16.8.1.: Proudové pole má zřídko v počátku souřadnic a proudnice od něho směřují radiálně

Obrázek 16.8.2.: Proudové pole je vytvářeno pouze vírem; je bez zřídla, tekutina se pohybuje po kružnicích a nedochází ani ke vzniku, ani k zániku čistic tekutiny

Obrázek 16.8.3.: Proudové pole je složeno ze zřídla a z propadu (tzv. proudový dipól); v okolí zřídla a propadu směřují proudnice vždy od zřídla směrem k propadu

vždy nezdrojové (nedivergentní), a to i v časově proměnných situacích. To znamená, že magnetické pole se vždy podobá modelům z animacím [16.8.2](#), [16.8.4b](#), [16.8.4c](#) a [16.8.5b](#).

(a) Tok tekutiny s dvěma různě silnými zřídky (b) Tok tekutiny s dvěma opačně orientovanými víry (c) Tok tekutiny s dvěma souhlasně orientovanými víry

Obrázek 16.8.4.: Znázornění proudového pole pomocí animací využívající šumové textury, která je v reálném čase deformována ve směru rychlostního pole: a) proudové pole je složeno ze dvou různě silných zřídel v různých místech; v blízkém okolí obou zřídel se proudnice pohybují směrem od zřídel.b) proudové pole je složeno ze dvou různě silných vírů v různých místech; směr rotace jednoho víru je ve směru hodinových ručiček a druhého proti směru hodinových ručiček; c) proudové pole je složeno ze dvou různě silných vírů v různých místech; směr rotace obou vírů je v tomto případě shodný

(a) Zřídklo a homogenní tok

(b) Vír a homogenní tok

(c) Tok tekutiny s vírem a zřídlem

Obrázek 16.8.5.: Znázornění proudového pole pomocí animací využívající šumové textury, která je v reálném čase deformována ve směru rychlostního pole: a) proudové pole je vytvářeno zřídklem umístěným v homogenním konstantním toku, který míří shora dolů (tzv. Rankinovo polotěleso, Rankinův ovál); b) proudové pole je složeno z víru a homogenního toku směřujícího shora dolů; c) proudové pole je vytvářeno kombinací víru a zřídla

17. Elektrostatika

Obsah

17.1. Statika	79
17.2. Coulombův zákon, superpozice	80
17.3. Elektrický potenciál	81
17.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$	82
17.5. Tok pole \vec{E}	83
17.6. Gaussův zákon. Divergence pole \vec{E}	84
17.7. Pole nabité koule	85
17.8. Siločary, ekvipotenciální plochy	86

17.1. Statika

[FLMoo, s. 63] Nyní začneme s podrobným studiem teorie elektromagnetismu. Celý elektromagnetismus je obsažen v Maxwellových rovnicích.

Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17.1.2)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \quad (17.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (17.1.4)$$

Situace popsané těmito rovnicemi mohou být velice složité. Nejdříve budeme uvažovat o poměrně jednoduchých situacích a učit se, jak s nimi zacházet. Složitější situace probereme až potom. Nejsnáze se pracuje ve statickém případě¹, kdy nic nezávisí na čase. Tehdy mají všechny náboje trvale pevnou polohu v prostoru anebo, pohybují-li se, pak pouze jako ustálený proud v obvodu (takže se ρ a \vec{j} v čase nemění). V těchto podmínkách všechny členy, které jsou časovými derivacemi pole, jsou rovny nule a Maxwellovy rovnice získají tento tvar:

Elektrostatika:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.1.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.1.6)$$

Magnetostatika:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (17.1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (17.1.8)$$

Na soustavě těchto čtyř rovnic si všimněte zajímavé věci. Soustavu lze rozdělit na dva páry rovnic. Přitom elektrické pole \vec{E} se objevuje pouze v prvních dvou a magnetické pole \vec{B} pouze v druhých dvou rovnicích soustavy. Obě pole spolu vzájemně nesouvisí. Znamená to, že *dokud jsou proudy a náboje statické, jsou elektřina a magnetizmus oddělené* jevy. Vzájemná závislost \vec{E} a \vec{B} se neobjeví, pokud nedochází k takovým změnám nábojů anebo proudů jako při nabíjení kondenzátoru anebo při pohybu magnetu. \vec{E} a \vec{B} budou na sobě navzájem záviset pouze v případě dostatečně rychlých změn, když v Maxwellových rovnicích dostanou význam časové derivace.

Podíváte-li se na rovnice statiky, uvidíme, že studium obou těchto předmětů, které nazýváme elektrostatika a magnetostatika, je ideální pro seznámení se s matematickými vlastnostmi vektorových polí. Elektrostatika je čistým příkladem vektorového pole s *nulovou rotací a nenulovou divergencí*. Magnetostatika je čistým příkladem pole s *nulovou divergencí a nenulovou rotaci*. Častější, a snad si myslíte, že i lepší, způsob přednášení teorie elektromagnetismu je začít nejdřív elektrostatikou, a tak se poučit o divergenci. Magnetostatika a rotace budou probrány později. Poté se elektřina a magnetizmus spolu zkombinují. My jsme se rozhodli, začít úplnou teorií vektorového počtu. Nyní ji budeme aplikovat na speciální případ, na elektrostatiku, tj. na pole \vec{E} dané prvním párem rovnic (17.1.5) a (17.1.6).

Začneme nejjednoduššími situacemi, tedy těmi, v nichž jsou dány polohy všech nábojů. Kdybychom měli studovat elektrostatiku pouze na této úrovni (což budeme dělat ve dvou následujících kapitolách), bylo by to velmi jednoduché, téměř banální. Jak uvidíte, vše je možné

¹Vlastně stacionární případě. O elektrostatice mluvíme obyčejně tehdy, když jsou náboje nehybné.

získat z Coulombova zákona a několika integrací. V mnoha reálných elektrostatických úlohách však zpočátku nevíme, kde náboje jsou. Víme pouze, že se mezi sebou rozdělily podle vlastností látky. Polohy, jež náboje zaujaly, závisí na poli \vec{E} , a to zase závisí na polohách nábojů. Tím se věci značně komplikují. Umístíme-li například do blízkosti vodiče nebo izolátoru nabitého těleso, elektrony a protony ve vodiči nebo v izolátoru se přemístí. Hustota náboje ϱ v rovnici (17.1.5) pak bude mít jednu část, kterou určíme z velikosti přeneseného náboje, ale i další části, pocházející od nábojů, které se přemístily ve vodiči. Je nutné započítat všechny náboje. Přitom je možné dospět k některým zálužným a zajímavým problémům. Ačkoli se má tato kapitola zabývat elektrostatikou, její hezčí a náročnější partie neobsahne. Budeme v ní rozebrávat situaci, kdy polohy všech nábojů můžeme pokládat za známé. Přirozeně, měli byste být schopni zvládnout tuto situaci dřív, než se pokusíte řešit složitější problémy.

17.2. Coulombův zákon, superpozice

[FLMoo, s. 65] Bylo by logické vyjít z rovnic (17.1.5) a (17.1.6). Jednoduší však bude, začneme-li někde jinde a vrátíme se k témtu rovnicím. Výsledky budou ekvivalentní. Začneme zákonem, o němž jsme již hovořili dříve, tzv. *Coulombovým zákonem*. Podle něho působí mezi dvěma nepohybujícími se náboji síla, která je přímo úměrná součinu nábojů a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti mezi nimi. Síla má směr přímky spojující oba náboje.

$$\text{Coulombův zákon} \quad \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = \vec{F}_2, \quad (17.2.1)$$

kde \vec{F}_1 je síla působící na náboj q_1 , e_{12} je jednotkový vektor směřující od q_2 k q_1 a r_{12} je vzdálenost mezi q_2 k q_1 . Síla \vec{F}_2 působící na náboj q_2 je stejně velká jako \vec{F}_1 , ale má opačný směr.

Konstanta úměrnosti se z historických důvodů píše jako $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. V soustavě jednotek SI, kterou používáme, je rovna přesně $10^{-7} C^2$ ($10 \cdot 10^{-7}$ krát druhá mocnina rychlosti světla ve vakuu). Protože rychlosť světla ve vakuu je přibližně $10 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, konstanta má hodnotu zhruba $9 \cdot 10^9 \text{ m F}^{-1}$ (metr/farad) a její rozdíl vzhledem k základním veličinám soustavy SI je $\text{m}^3 \text{kgs}^{-4} \text{A}^{-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7} C^2 && \dots \text{z definice} \\ &= 9,0 \cdot 10^9 && \dots \text{z experimentu} \end{aligned}$$

Možné způsoby vyjádření rozměru konstanty jednotky:

- m F^{-1} ,
- nebo $\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$,
- nebo $\text{m}^3 \text{kgs}^{-4} \text{A}^{-2}$,
- nebo Vm C^{-1} .

Jde-li o víc než dva náboje - a pouze takové případy jsou opravdu zajímavé - musíme Coulombův zákon doplnit ještě jedním přírodním zákonem: síla působící na jakýkoliv náboj je vektorovým součtem Coulombových sil pocházejících od všech ostatních nábojů. Tento zákon se nazývá *princip superpozice*. To je vše, co se týká elektrostatiky. Kombinujeme-li Coulombův zákon a princip superpozice, není nic víc třeba. Rovnice (17.1.5) a (17.1.6) - rovnice elektrostatiky - neříkají nic více, nic méně.

Při používání Coulombova zákona je vhodné zavést pojem elektrického pole. Říkáme, že pole $\vec{E}(1)$ je rovno síle působící na náboj q_1 (ze strany všech ostatních nábojů) a připadající na jednotku náboje (tj. vektor působící síly, dělený velikostí náboje (q_1)). Vydělíme-li rovnost (17.2.1) (q_1) ,

dostaneme pro účinek nábojů jiných než (q_1) , že

$$\vec{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} \quad (17.2.2)$$

Chápeme to tak, že $\vec{E}(1)$ udává cosi pro bod 1 i tehdy, kdyby tam náboj q_1 nebyl - za předpokladu, že všechny ostatní náboje zachovají své původní polohy. Říkáme, že $\vec{E}(1)$ je elektrické pole v bodě 1.

Elektrické pole $\vec{E}(1)$ je vektor, takže rovnici (17.2.2) myslíme ve skutečnosti tři rovnice pro každou složku jednu. Explicitně vypíšeme x-ovou složku, pro kterou z rovnice (17.2.2) vyplývá, že

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (17.2.3)$$

Podobně pro ostatní složky.

Je-li víc nábojů, je pole \vec{E} v nějakém bodě 1 součtem příspěvků od každého z ostatních nábojů. Každý člen součtu bude mít tvar (17.2.2), resp. (17.2.3). Bude-li q_j označovat velikost j -tého náboje a \vec{r}_{1j} je vektor posunutí z polohy q_j do bodu 1, píšeme

$$\vec{E}(1) = \sum_{j=1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \vec{e}_{1j} \quad (17.2.4)$$

což, samozřejmě, znamená, že

$$E_x(x, y, z) = \sum_{j=1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_j}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (17.2.5)$$

a analogicky pro další složky.

Často je pohodlnější nebrat v úvahu fakt, že náboje existují jako diskrétní objekty - protony a elektrony - a pokládat je za rozptýlené v nějakém spojitém útvaru anebo, jak se to nazývá, v nějakém „rozdelení“. Tento přístup je v pořádku, pokud nás nezajímá, co se děje ve velmi malých rozmezích. Rozdelení náboje charakterizujeme „*hustotou náboje\varrho(x, y, z). Nachází-li se v malém objemu ΔV_2 v okolí bodu 2 množství náboje Δq_2 , pak je ϱ definováno vztahem*

$$\Delta q_2 = \varrho(2) \Delta V_2. \quad (17.2.6)$$

Při používání Coulombova zákona při takovém přístupu nahradíme sumy ve vztazích (17.2.4) a (17.2.5) integrály přes všechny objemy obsahující náboje. Pak bude platit

$$\vec{E}(1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\varrho(2) \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2 \quad (17.2.7)$$

Někteří lidé píšou raději

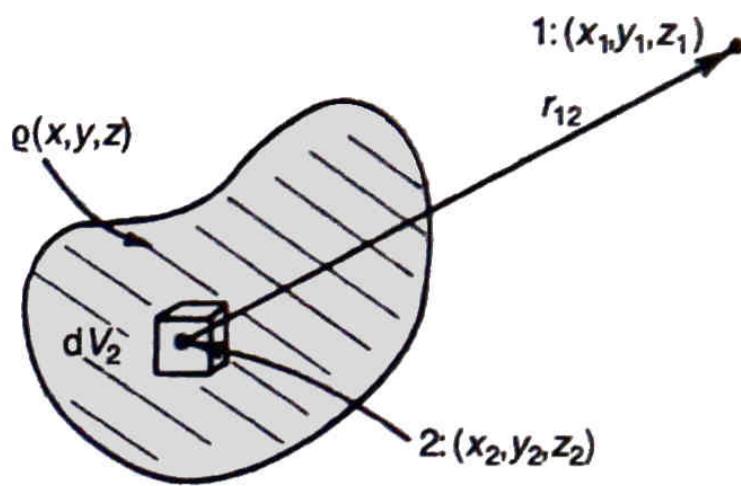
$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

kde \vec{r}_{12} je vektor posunutí z 2 do 1 (obr. 17.3.1). Integrál udávající \vec{E} je pak zapsán takto

$$\vec{E}(1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\varrho(2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dV_2 \quad (17.2.8)$$

Chceme-li pomocí těchto integrálů něco vypočítat, musíme je obvykle podrobně rozepsat. Pro x-ovou složku rovností (17.2.7) nebo (17.2.8) bychom pak psali

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{celý prostor}} \varrho(x_2, y_2, z_2) \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}} dx_2 dy_2 dz_2 \quad (17.2.9)$$



Obrázek 17.2.1.: Elektrické pole \vec{E}_v bodě 1 nějakého rozdělení nábojů získáme integrálem přes toto rozdělení. Bod 1 se může nacházet i uvnitř rozdělení

Tento vzorec nebudeme používat často. Napsali jsme jej sem pouze proto, abychom zdůraznili fakt, že jsme úplně vyřešili všechny ty elektrostatické úlohy, ve kterých známe polohy všech nábojů. Jsou dány náboje. Jaká jsou pole? Odpověď: vypočtěte tento integrál. Nic víc k tomu není potřeba; pouze výpočet složitých trojrozměrných integrálů - přesně vzato, je to práce pro počítač.

Pomocí našich integrálů můžeme najít pole vytvářená nabitym rovinním nebo lineárním útvarem, nabité kulovou plochou anebo jiným udaným rozdělením náboje. Je důležité uvědomit si, že i když budeme kreslit siločáry, hovořit o potenciálech nebo počítat divergence, výsledek už máme. Závisí pouze na tvaru tohoto integrálu. Někdy je snadnější jej vypočítat nějakým důvtipným trikem než jeho skutečným výpočtem. Ovládat takovéto postupy však vyžaduje naučit se mnohé neobvyčejné věci. V praxi je možná jednodušší nesnažit se dělat chytrého, a namísto toho vypočítat vždy integrál přímo. I přesto se však nyní pokusíme být v této záležitosti důvtipnými a budeme pokračovat analýzou některých jiných vlastností elektrického pole.

17.3. Elektrický potenciál

[FLMoo, s. 66] Nejdříve probereme pojem elektrického potenciálu, který souvisí s prací vykonanou při přenášení náboje z jednoho bodu do druhého. Mějme nějaké rozdělení náboje, které vytváří elektrické pole. Ptejme se, kolik práce je třeba vynaložit na přenos malého náboje z jednoho místa na druhé. Práce, která se vykonává přenášením náboje po nějaké dráze proti elektrickým silám, je rovna záporně vzatému integrálu po této dráze ze složky elektrické síly ve směru pohybu.

Přenášíme-li náboj z bodu a do bodu b , bude platit

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde \vec{F} je elektrická síla působící na náboj v každém bodě a $d\vec{s}$ je diferenciální vektor posunutí podél dráhy (obr. 17.3.1).

Pro naše účely je zajímavější uvažovat práci, která by se konala při přenášení jedné jednotky náboje. Tehdy síla působící na náboj je číselně rovna intenzitě elektrického pole. Označíme-li práci vykonanou proti elektrickým silám v tomto případě W_{jedn} můžeme psát

$$W_{jedn} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (17.3.1)$$

To, co dostaneme pomocí takového integrálu, obecně závisí na dráze, po které integrujeme. Jestliže by integrál (17.3.1) závisel na dráze od a do b , mohli bychom z pole získávat práci přenášením náboje do b po jedné dráze a pak zpět do a po jiné. Do b bychom šli po dráze, pro kterou je W menší, a zpět po jiné dráze, odčerpávající více práce, než vkládáme.

Získávat energii z pole - na tom není v principu nic nemožného. Opravdu se setkáme s poli, kde to možné je. Může se stát, že když pohybujete nábojem, působíte silami na jinou část „mechanizmu“. Pohybuje-li se

mechanismus proti síle, ztrácí energii, přičemž celková energie v přírodě se nemění. Avšak v elektrostatice takový „mechanismus“ není. Víme, jaké síly působí zpětně na zdroje pole. Jsou to coulombovské síly působící na náboje, které jsou původci pole. Mají-li Ostatní náboje v prostoru pevné polohy, což předpokládáme pouze v elektrostatice, nevykonávají ty zpětné síly při působení práci. Neexistuje žádný způsob, jak z nich získat energii, samozřejmě za předpokladu, že v elektrostatických situacích platí princip zachování energie. Věříme, že platí, ale teď ukážeme, že to musí vyplývat z Coulombova zákona pro sílu.

Uvažujme nejdříve, co se stane v poli vyvolaném jediným nábojem q . Nechť je bod a ve vzdálenosti r_1 od q a bod b ve vzdálenosti r_2 . Nyní z a do b přenesme jiný náboj, který budeme nazývat „zkušebním“ nábojem a jehož velikost zvolíme rovnou jedné jednotce. Začněme s tou dráhou, která je ze všech možných drah pro výpočet nejjednodušší. Náš zkušební náboj přeneseme nejdřív po oblouku kružnice a pak podél poloměru, jak to znázorňuje obr. 17.3.2a. Najít práci vykonanou na této speciální dráze je dětskou hrou (jinak bychom ji nebyli zvolili). Především vůbec žádná práce se nevykoná na dráze z a do a' . Pole je radiální (podle Coulombova zákona), takže jeho intenzita je kolmá na směr pohybu. Dále na dráze z a' do b má intenzita pole směr pohybu a mění se jako $\frac{1}{r^2}$. Práce vykonaná přenosem zkušebního náboje z a do b bude

$$- \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (17.3.2)$$

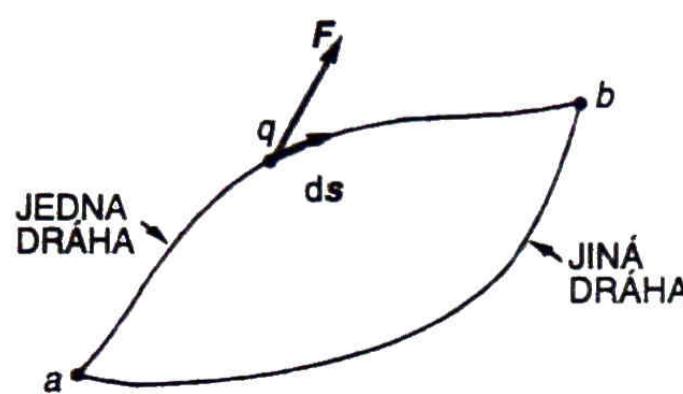
Vezměme nyní jinou jednoduchou dráhu, např. takovou, jaká je znázorněna na obr. 17.3.2b. Chvíli vede po oblouku kružnice, potom chvíli radiálně, potom opět po oblouku a potom radiálně atd. Předně, když jdeme po oblouku kružnice, práci nevykonáváme. Když jdeme po radiálním úseku, musíme integrovat $\frac{1}{r^2}$. Na prvním radiálním úseku integrujeme z r_a do $r_{a'}$, na druhém úseku z $r_{a'}$ do $r_{a''}$ atd. Součet všech těchto integrálů dá totéž jako jediný integrál přímo z r_a do r_b . Pro tuto dráhu dostáváme stejný výsledek, jaký jsme dostali v případě první dráhy. Je zřejmé, že tentýž výsledek bychom dostali pro jakoukoliv dráhu, která se skládá z libovolného počtu takovýchto úseků.

Jak to bude v případě hladkých drah? Dostali bychom tentýž výsledek? O této otázce jsme hovořili už ve 13. kapitole 1. dílu. Na základě stejných důvodů, které jsme použili tam, můžeme udělat závěr, že práce vykonaná při přenášení jednotkového náboje z a do b nezávisí na dráze.

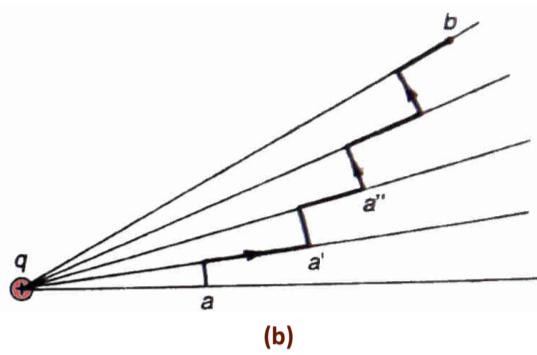
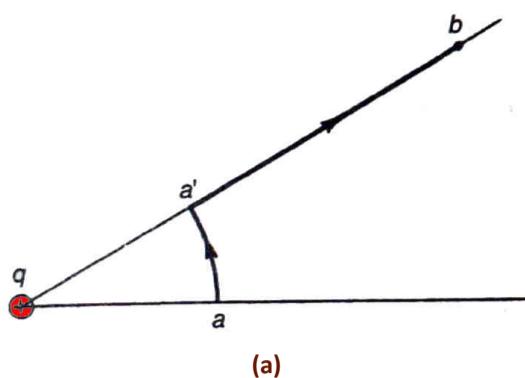
$$W_{jedn} = - \int_{a-b}^b \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

jakákoliv
dráha

Protože vykonaná práce závisí pouze na koncových bodech, je možné ji udat jako rozdíl dvou čísel. Přesvědčíme se o tom následujícím způsobem. Zvolme vztahený bod P_0 a domluvme se, že budeme počítat náš integrál použitím dráhy, která bude vždy procházet bodem P_0 . Nechť $\varphi(a)$ označuje práci vykonanou proti poli při přechodu z P_0 do bodu a a $\varphi(b)$ práci vykonanou při přechodu z P_0 do bodu b (obr. 17.3.3). Práce vykonaná při přechodu z a do P_0 (cestou do b) je záporně vzaté $\varphi(a)$, takže bude platit



Obrázek 17.3.1.: Práce konaná při přenesení náboje z a do b je rovna záporně vzatému integrálu ze skalárního součinu $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ po dráze z a do b



Obrázek 17.3.2.: Přenášením zkušebního náboje z a do b po obou těchto dráhách se koná stejná práce

$$-\int_a^b \vec{E} d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (17.3.3)$$

Protože tu bude vždy vystupovat pouze rozdíl hodnot funkce φ ve dvou bodech, ve skutečnosti nepotřebujeme ani specifikovat polohu bodu P_0 . Jakmile jsme však zvolili nějaký referenční bod, hodnota φ je už určena pro každý bod v prostoru; φ je tedy *skalární pole*. Je funkcí x, y, z . Tuto skalární funkci nazýváme *elektrostatickým potenciálem* v libovolném bodě.

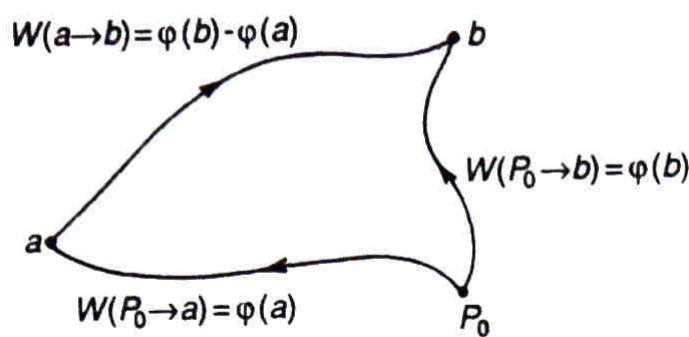
Elektrostatický potenciál:

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E} d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (17.3.4)$$

Často je pohodlné volit vztahený bod v nekonečnu. V případě jednotlivého náboje nacházejícího se v počátku souřadnicové soustavy pak s ohledem na vztah (17.3.2) pro potenciál φ v nějakém bodě (x, y, z) dostaneme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (17.3.5)$$

Elektrické pole několika nábojů je možné napsat jako součet elektrického pole prvního, druhého, třetího atd. náboje. Integrujeme-li součet, abychom našli potenciál, dostaneme součet integrálů. Každý z těchto integrálů představuje potenciál jednoho z nábojů. Usuzujeme tak proto, že potenciál množiny nábojů je součtem potenciálů jednotlivých nábojů. Princip superpozice platí tedy i pro potenciály. Stejnými úvahami, kterými jsme našli elektrické pole skupiny nábojů a rozdělení nábojů, můžeme do-



Obrázek 17.3.3.: Práce vykonaná při postupu po jakémkoliv dráze z a do b je rovna záporně vzájemné práci z nějakého bodu P_0 do a zvětšené o práci z P_0 do b

stat úplné vzorce i pro potenciál φ v nějakém bodě, který označíme 1:

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{1j}} \quad (17.3.6)$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2 \quad (17.3.7)$$

Zapamatujte si, že potenciál φ má fyzikální význam: je to potenciální energie, kterou by měl jednotkový náboj, přenesl-li by se z nějakého vztaheného bodu do daného bodu v prostoru.

$$17.4. \vec{E} = -\nabla\varphi$$

[FLMoo, s. 70] Kdo potřebuje potenciál φ . Vždyť síly působící na náboje jsou určeny hodnotami \vec{E} -elektrickým polem. Vtip je v tom, že \vec{E} je možné snadno dostat z φ tak jednoduše jako vypočítat derivaci. Uvažujme dva body, jeden v x a druhý v $(x+dx)$, ale u obou při stejných y a z , a ptejme se, jak velká práce se vykoná při přenášení jednotkového náboje z jednoho bodu do druhého. Jde o dráhu podél horizontálny z x do $x+dx$. Vykonaná práce je dána rozdílem potenciálů v obou bodech:

$$\Delta W = \varphi(x+dx, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x.$$

Ale práce vykonaná po téže dráze proti poli je

$$\Delta W = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x \Delta x.$$

Vidíme že,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (17.4.1)$$

Podobně $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ - nebo, napsané souborné symbolikou vektorové analýzy,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (17.4.2)$$

Tato rovnice představuje diferenciální tvar vztahu (17.3.4). Jakoukoliv úlohu, v níž jsou dány náboje, je možné řešit výpočtem potenciálu pomocí (17.3.6) nebo (17.3.7) a použitím vztahu (17.4.2) pro výpočet pole. Vztah (17.4.2) souhlasí i s tím, co jsme zjistili o vektorovém počtu: pro každé skalární pole platí

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (17.4.3)$$

Podle vztahu (17.3.7) je skalární potenciál φ dán trojrozměrným integrálem podobným tomu, který jsme měli pro \vec{E} . Je proto vůbec výhodné počítat φ místo \vec{E} ? Ano. Pro φ máme jen jeden integrál, zatímco pro \vec{E} jsou zapotřebí tři integrály, neboť jde o vektor. Kromě toho $\frac{1}{r}$ je obvykle jednodušší integrovat než $\frac{x}{r^3}$. V mnoha praktických případech se ukazuje, že je poněkud jednodušší vypočítat φ a pak najít elektrické pole pomocí gradientu, než počítat tři integrály pro \vec{E} . Je to čistě praktická záležitost.

Potenciál φ má kromě toho i hlubší fyzikální význam. Ukázali jsme, že \vec{E} v Coulombově zákoně je odvozeno z $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, kdy φ je dáno vztahem (17.3.4). Ale z vektorového počtu víme, že je-li \vec{E} rovno gradientu skalárního pole, pak rot \vec{E} musí být rovna nule:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.4.4)$$

Toto je však právě naše druhá základní rovnice elektrostatiky (17.1.6). Ukázali jsme tak, že Coulombův zákon definuje pole \vec{E} , které splňuje tuto podmínu. Dosud je vše v pořádku.

Ve skutečnosti jsme dokázali, že $\nabla \times \vec{E}$ je rovno nule, dřív než jsme definovali potenciál. Ukázali jsme, že práce vykonaná na uzavřené dráze je rovna nule, tj. že

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

pro každou dráhu. V kapitole 16 jsme se přesvědčili, že pro každé takové pole musí být $\nabla \times \vec{E}$ všude rovno nule. Elektrické pole v elektrostatice je

tedy příkladem pole s nulovou rotací.

Můžeme se pocvičit ve vektorovém počtu tím, že dokážeme tvrzení, že $\nabla \times \vec{E} = 0$, a to výpočtem složek vektoru $\nabla \times \vec{E}$ pro pole bodového náboje dané vztahem (17.2.2). Bude-li výsledkem výpočtu nula, pak podle principu superpozice bychom dostali nulu pro jakékoli rozdělení náboje.

Je třeba poukázat na důležitou skutečnost. Pro libovolnou radiální sílu nezávisí vykonaná práce na dráze a existuje potenciál. Přemýšlite-li o tom, přesvědčíte se, že všechny úvahy, které jsme provedli výše, abychom ukázali, že integrál práce nezávisí na dráze, byly postaveny pouze na faktu, že síla jednotlivého náboje je radiální a kulově symetrická. Při těchto úvahách jsme nevyužívali skutečnost, že závislost síly na vzdálenosti je dána vztahem $\frac{1}{r^2}$, mohlo by tedy jít o libovolnou závislost na r . Existence potenciálu a skutečnost, že $\nabla \times \vec{E}$ je rovna nule, pramení opravdu jen ze symetrie a směru elektrostatických sil. Proto vztahy (17.4.3) nebo (17.4.4), mohou obsahovat pouze část zákonů elektřiny.

17.5. Tok pole \vec{E}

[FLMoo, s. 72] Nyní odvodíme rovnici pole, která závisí právě a přímo na skutečnosti, že ve jmenovateli zákona síly vystupuje druhá mocnina vzdálenosti. To, že se pole mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, se někomu zdá být „jedině přirozeným“, neboť „je to způsob, kterým se šíří všechno“. Vezměme si světelný zdroj, z něhož vychází světlo: množství světla procházející základnou kužele s vrcholem ve zdroji je stejně bez ohledu na to, jak daleko je základna od zdroje. Tak to musí být, má-li se světelná energie zachovávat. Množství světla připadající na jednotku plochy, tedy intenzita osvětlení, se musí měnit přímo úměrně plošnému obsahu základny kužele, tj. nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Ze stejněho důvodu by se zajisté mělo měnit i elektrické pole. Ale nic takového jako „stejný“ důvod neexistuje. Nikdo nemůže říci, že elektrické pole je mírou toku něčeho podobného jako světlo, které se musí zachovávat. Kdybychom měli takový „model“ elektrického pole, v němž by vektor pole udával směr a rychlosť, tj. představoval by tok nějakých drobných vyletujících „kulek“, a kdyby náš model vyžadoval, aby se tyto kulky zachovávaly a žádná by nemohla zmizet, pokud už byla vystřelená, tak bychom řekli, že můžeme nevyhnutelnost zákona nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti „pochopit“. Na druhé straně nevyhnutelně musí existovat nějaký matematický způsob, jak tuto fyzikální představu vyjádřit. Kdyby elektrické pole bylo něčím takovým jako zachovávající se vyletující kulky, měnilo by se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, a takové chování bychom byli schopni popsat rovnici - což je čistě matematická záležitost. Není tedy nic špatného na tom, když se této představy podržíme, pokud ovšem nebudeme tvrdit, že elektrické pole se opravdu skládá z kulek, ale budeme si vědomi toho, že používáme model, který nám pomáhá najít správné matematické vyjádření.

Předpokládejme, že jsme si na chvíli představili elektrické pole jako proud něčeho, co se zachovává - všude, tj. mimo místa, kde se nacházejí náboje. (Proudění musí někde začínat.) Představujeme si, že něco, ať už je to cokoliv, vytéká z náboje do okolního prostoru. Byl-li by \vec{E} vektor takového toku (jako je \vec{h} v případě tepelného toku), v blízkosti bodového zdroje by se vyznačoval závislostí $\frac{l}{r^2}$. Tento model chceme nyní použít k tomu, abychom našli způsob, jak dojít k zákonu nepřímé úměrnosti na druhé mocnině vzdálenosti principiálnější nebo abstraktnější cestou místo toho, aby se prostě konstatovalo: „nepřímo úměrné druhé mocnině“. (Snad se divíte, proč se chceme vyhnout přímému zformulování takového jednoduchého zákona, a místo toho chceme dosáhnout téhož jinou cestou. Ale mějte trpělivost! Ukáže se, že je to užitečné.)

Ptáme se: Jaký je tok pole \vec{E} ven z libovolné uzavřené plochy v okolí bodového náboje? Nejdříve vezměme jednoduchou plochu, jakou ukazuje obr. 17.5.1.

Má-li pole \vec{E} charakter toku, musí být celkový tok z takové krabičky roven nule. Tento výsledek opravdu dostaneme, rozumíme-li „tokem“ z této plochy plošný integrál normálové složky vektoru \vec{E} , tj. veličinu, kterou jsme nazvali tokem pole \vec{E} . V případě radiálních (rovnoběžných se spojnicí k náboji) stěn je normálová složka \vec{E} nulová. V případě kulových čelních stěn je normálová složka E_n rovna velikosti vektoru \vec{E}

- se záporným znaménkem u menší a s kladným u větší stěny. Velikost vektoru \vec{E} klesá jako $\frac{1}{r^2}$, ale plošný obsah stěny je přímo úměrný veličině r , takže jejich součin na r nezávisí. Tok vektoru \vec{E} do stěny a se právě ruší tokem ze stěny b . Celkový tok z S je roven nule, což je rovnocenné s tvrzením, že pro tuto plochu je

$$\oint_S E_n dS = 0. \quad (17.5.1)$$

Dále ukážeme, že obě koncové plochy mohou být skloněny vzhledem k radiální přímce a integrál (17.5.1) se přitom nezmění. Ačkoli to platí obecně, pro naše účely postačí ukázat, že to platí, jsou-li koncové plochy malé, takže se ze zdroje jeví pod malým úhlem, přesněji pod infinitesimálním úhlem. Na obr. 17.5.2 vidíme plochu S s radiálními „stěnami“ a šikmými „konci“. Na obrázku nejsou koncové plochy malé, ale máte si představit podobnou situaci s velmi malými koncovými plochami. Pak bude pole \vec{E} na každé ploše dostatečně homogenní, abychom mohli pracovat pouze s jeho hodnotou ve středu plochy. Skloníme-li plošku o úhel ϑ , její plošný obsah se zvětší $\frac{l}{\cos\vartheta}$ krát. Ale E_n složka vektoru \vec{E} normálová k ploše, se změní úměrně $\cos\vartheta$. Součin $E_n \cdot \Delta S$ se tedy nezmění. Tok z celé plochy S zůstává nulový.

Nyní se snadno přesvědčíme, že tok z objemu vymezeného jakoukoliv plochou S musí být roven nule. Každý objem je totiž možné si představit, jako kdyby se skládal z částí, podobných útvaru znázorněnému na obr. 17.5.2. Celá plocha S se přitom rozdělí do párů koncových plošek, a protože vtoky a výtoky z těchto koncových plošek se v jednotlivých párech navzájem ruší, celkový tok z plochy S bude roven nule. Tuto představu ilustruje obr. 17.5.3. Dostáváme úplně obecný výsledek, že celkový tok pole \vec{E} ven z jakékoli plochy S v poli bodového náboje je roven nule.

Ale pozor! Nás důkaz platí pouze tehdy, neobklopuje-li plocha S náboj. Co by se stalo, kdyby se bodový náboj nacházel uvnitř plochy? Opět můžeme naši plochu rozdělit na páry plošek, které jsou vymezeny radiálními přímkami procházejícími nábojem tak, jak to ukazuje obr. 17.5.4. Opět jsou tu toky oběma ploškami stejně velké, z týchž důvodů jako dříve, pouze teď mají stejně znaménko. Tok z plochy, která obklopuje náboj, není nulový. Jaký tedy je? Můžeme ho najít malým trikem. Předpokládejme, že náboj „odstraníme“ z „vnitřku“ tím, že ho obalíme malou plochou S_1 uloženou úplně uvnitř původní plochy S (obr. 17.5.5a)

Pak se v objemu mezi oběma plochami S a S_1 žádny náboj nenachází. Celkový tok z tohoto objemu (včetně toku plohou S') je roven nule na základě úvah, jež jsme již uvedli. Z těchto úvah vlastně vyplývá, že tok do objemu plochou S_1 je stejný jako tok z něj ven plochou S .

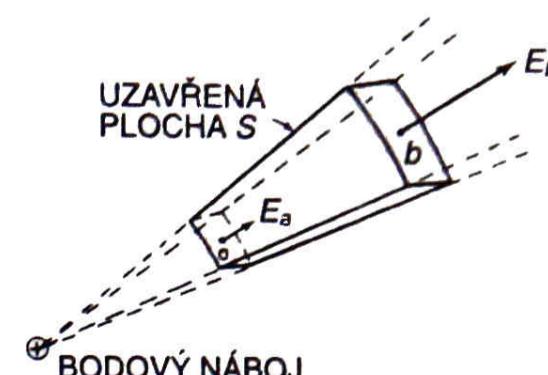
Za S' můžeme zvolit plochu jakéhokoli tvaru. Zvolme tedy kulovou plochu se středem v náboji (obr. 17.5.5b). Pak dokážeme snadno vypočítat tok touto plochou.

Je-li poloměr malé koule r , má \vec{E} všude na jejím povrchu velikost

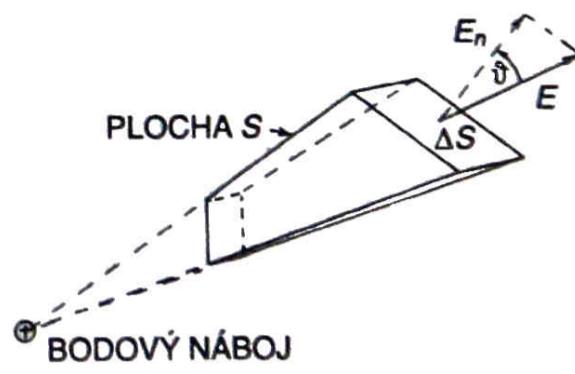
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

a směr normály k povrchu. Celkový tok S' dostaneme, vynásobíme-li tuto normálovou složku plošným obsahem plochy S' :

$$\text{Tok plochou } S' = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (17.5.2)$$



Obrázek 17.5.1.: Tok vektoru \vec{E} z plochy S je roven nule



Obrázek 17.5.2.: Tok vektoru \vec{E} z plochy S je roven nule

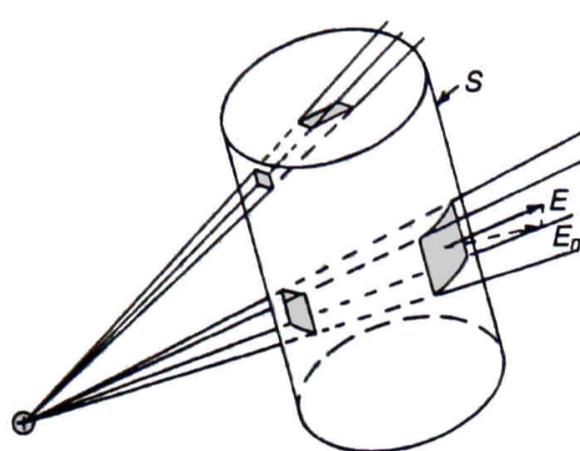
je tedy roven hodnotě, která nezávisí na poloměru koule! Z toho vidíme, že tok ven z plochy S je také roven $\frac{q}{\epsilon_0}$ - hodnotě, jež nezávisí na tvaru plochy S , pokud náboj q zůstává uvnitř.

Naše výsledky můžeme napsat takto:

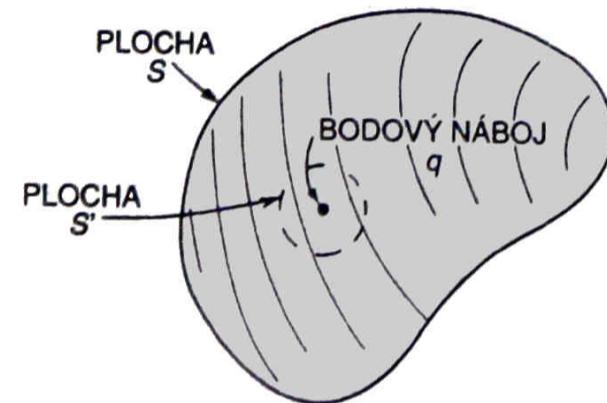
$$\int E_n dS = \begin{cases} 0 & q \text{ vně } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & q \text{ uvnitř } S \end{cases} \quad (17.5.3)$$

jakákoliv uzavřená plocha S

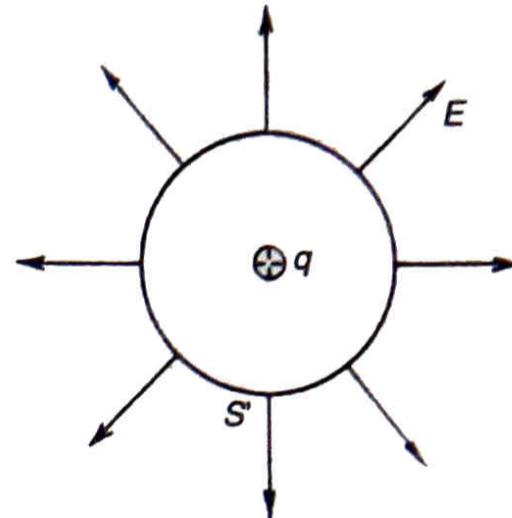
Vraťme se k naší analogii s kulkami a podívejme se, zda má smysl. Podle naší věty je celkový tok kulek nějakou plochou roven nule, neobklopuje-li plocha zbraň vystřelující kulky. Je-li zbraň obklopena plochou, ať má jakýkoliv tvar a velikost, počet kulek jí proletující je stejný - určuje jej rychlosť, jakou zbraň kulky vystřeluje. Pro zachovávající se kulky vypadá všechno celkem rozumně. Ale poskytuje nám tento model něco víc, než dostáváme napsáním vztahu (17.5.3)? Nikomu se nepodařilo dosáhnout toho, aby tyto kulky dokázaly něco víc, než zformulovat tento jediný zákon. Kromě toho už nevedou k ničemu, jen k omylům. Proto dnes dáváme přednost čistě abstraktní představě elektromagnetického pole.



Obrázek 17.5.3.: Každý objem lze považovat za úplně složený z infinitezimálních komolých kuželů. Tok \vec{E} z jednoho konce kuželového segmentu se rovná zápornému toku z druhého konce. Celkový tok z plochy S je proto roven nule.

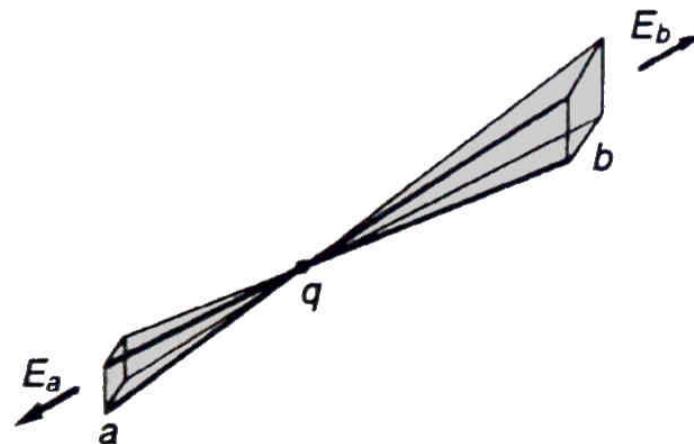


(a) Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.



(b) Tok kulovou plochou obsahující uvnitř bodový náboj q je roven $\frac{q}{\epsilon}$

Obrázek 17.5.5.



Obrázek 17.5.4.: Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.

17.6. Gaussův zákon. Divergence pole \vec{E}

[FLMoo, s. 75] Náš překrásný výsledek, tj. vztah (17.5.3). jsme dokázali pro jedený bodový náboj. Nyní předpokládejme, že jsou dva náboje, náboj q_1 v jednom bodě a náboj q_2 v jiném bodě. Tato úloha vypadá těžší. Elektrické pole, jehož normálovou složku při toku integrujeme, je polem pocházejícím od obou nábojů, tj. představuje-li \vec{E}_1 elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj q_1 a \vec{E}_2 elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj q_2 , celkové elektrické pole $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Tok každou

uzavřenou plochou S je

$$\oint_S E_{1n} + E_{2n} dS = \oint_S E_{1n} dS + \oint_S E_{2n} dS. \quad (17.6.1)$$

V případě obou nábojů je roven toku vyvolanému prvním nábojem plus tok vyvolaný druhým nábojem. Jsou-li oba náboje na vnější straně S , tok plochou S je nulový. Je-li q_1 uvnitř S a q_2 mimo, první integrál dává $\frac{q_1}{\epsilon_0}$ a druhý nulu. Obklopuje-li plocha oba náboje, bude každý dávat svůj příspěvek a dostáváme, že tok je $\frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$. Obecné pravidlo je zřejmé: celkový tok z uzavřené plochy je roven celkovému náboji uvnitř, dělenému ϵ_0 .

Náš výsledek představuje důležitý obecný zákon elektrostatického pole, nazvaný *Gaussův zákon*.

$$\int_{\text{jakákoliv uzavřená plocha } S} E_n dS = \frac{\text{součet nábojů uvnitř}}{\epsilon_0} \quad (17.6.2)$$

nebo

$$\int_{\text{jakákoliv uzavřená plocha } S} E_n dS = \frac{Q_{uvnitř}}{\epsilon_0} \quad (17.6.3)$$

kde

$$Q_{uvnitř} = \sum_{uvnitř S} q_i. \quad (17.6.4)$$

Popišeme-li rozmístění nábojů pomocí hustoty náboje ρ , můžeme to chápout tak, že každý infinitezimální objem dV obsahuje „bodový“ náboj ρdV . Součet všech nábojů pak bude dán integrálem

$$Q_{uvnitř} = \int_{\substack{\text{objem} \\ \text{uvnitř } S}} \rho dV. \quad (17.6.5)$$

Z našeho odvození vidíme, že Gaussův zákon vyplývá ze skutečnosti, že mocnitél v Coulombově zákoně je roven přesně dvěma. Pole se zákonem $\frac{1}{r^3}$ nebo jakékoliv pole se zákonem $\frac{1}{r^n}$, kde $n \neq 2$, by ke Gaussovou zákonu nevedlo. Gaussův zákon tedy není právě ničím jiným než vyjádřením (v odlišném tvaru) Coulombova zákona síly, která působí mezi dvěma náboji. Opravdu, zpětným postupem můžete z Gaussova zákona odvodit Coulombův zákon. Oba tyto zákony jsou zcela ekvivalentní, máme-li na paměti, že síly působící mezi náboji jsou radiální².

Nyní bychom rádi napsali Gaussův zákon pomocí derivací. Abychom to udělali, použijeme Gaussův zákon na povrch infinitezimální krychle. V kapitole 16 jsme ukázali, že tok vektoru \vec{E} z takového krychle je roven hodnotě $\nabla \cdot \vec{E}$ vynásobené objemem krychle dV ! Náboj uvnitř dV je podle definice roven ρdV , takže z Gaussova zákona dostaneme

$$\nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.6.6)$$

Diferenciální tvar Gaussova zákona představuje první z našich fundamentálních rovnic pole v případě elektrostatiky (rovnice 17.1.5). Ukázali jsme tím, že obě rovnice elektrostatiky (rovnice 17.1.5 a 17.1.6) jsou ekvivalentní Coulombovu zákonu síly. Dále se budeme zabývat jedním příkladem použití Gaussova zákona. (Později se dostaneme k mnohem většímu množství takových příkladů.)

17.7. Pole nabité koule

[FLMoo, s. 77] Jednou z těžkých úloh, s nimiž jsme se setkali, když jsme studovali teorii gravitace, bylo dokázat, že síla pocházející z pevné koule je na jejím povrchu taková, jako kdyby všechna látka byla soustředěna ve středu koule. Newton po mnoho let svou teorií gravitace nepublikoval, protože si nebyl jistý, zda je toto tvrzení pravdivé. Dokázali jsme jej ve 13. kapitole 1. dílu tak, že jsme vypočítali integrál potenciálu a

²A kulové symetrické neboli centrální

pak jsme pomocí gradientu našli gravitační sílu. Nyní můžeme tuto větu dokázat jednodušším způsobem. Tentokrát budeme dokazovat ji odpovídající větu pro homogenně elektricky nabité kouli. (Protože zákony elektrostatiky jsou stejné jako zákony gravitace, mohl by být tentýž důkaz proveden i pro gravitační pole.)

Ptáme se: Jaké je elektrické pole \vec{E} v bodě P , který se nachází někde mimo kouli s rovnoměrným rozdělením náboje? Protože tam není žádný význačný směr, můžeme předpokládat, že \vec{E} směřuje od středu koule. Uvažujme myšlenou kulovou plochu, která je koncentrická s nabité koulí a prochází bodem P (obr. 17.7.1). Tok směrem ven z této plochy je

$$\int E_n dS = E \cdot 4\pi R^2.$$

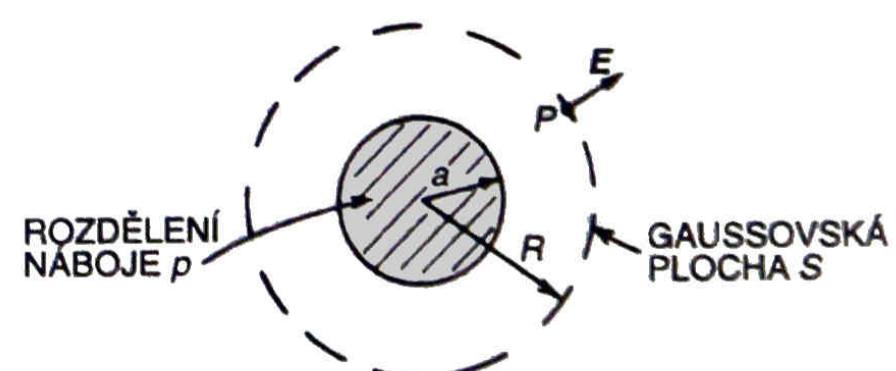
Podle Gaussovy věty je tento tok roven celkovému náboji koule Q (dělenému ϵ_0):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

neboli

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

což je stejný vzorec, jaký bychom měli pro bodový náboj Q . Newtonovu úlohu jsme dokázali snáze než pomocí integrálu. To je, pravda, jen zdánlivě jednodušší - nějaký čas vám trvalo, než jste porozuměli Gaussovou zákonu, takže se můžete domnívat, že ve skutečnosti jste ani žádný čas neušetřili. Když však budete používat tuto větu stále častěji, začne se to splácat. Je to otázka efektivnosti.



Obrázek 17.7.1.: Použití Gaussova zákona na odvození pole homogenně nabité koule

17.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy

[FLMoo, s. 78] Nyní bychom rádi uvedli geometrický popis elektrostatického pole. Oba zákony elektrostatiky - první, že tok je přímo úměrný náboji uvnitř, a druhý, že elektrické pole je gradientem potenciálu - je rovněž možno interpretovat geometricky. Ilustrujeme to těmito dvěma příklady. Nejdříve mějme pole bodového náboje. Nakreslíme křivky ve směru pole, tj. křivky, jejichž tečny mají všude směr vektoru pole (obr. 17.8.1). Jsou to tzv. siločáry.

V každém bodě ukazují směr elektrického vektoru. Chceme však znázornit i jeho velikost. Můžeme proto zavést pravidlo, že intenzitu elektrického pole bude reprezentovat „hustota“ siločar. Hustotou siločar rozumíme počet siločar připadajících na jednotku plochy v rovině kolmé na siločáry. Pomocí těchto pravidel můžeme vytvořit obraz elektrického pole. V případě bodového náboje se musí hustota siločar zmenšovat podle zákona $\frac{1}{r^2}$. Ale plošný obsah kulové plochy kolmé na siločáry při každém poloměru r vzrůstá s r^2 . Zachováme-li tedy tentýž počet siločar ve všech vzdálenostech od náboje, jejich hustota zůstane přímo úměrná velikosti pole. Stejný počet siločar v každé vzdálenosti můžeme zabezpečit tak, že budeme trvat na tom, aby siločáry byly souvislé, tj. aby siločára, pokud už jednou z náboje vyšla, nikde nekončila. Gaussův zákon vyjádřený jazykem siločar říká, že siločáry mají začínat pouze v kladných nábojích a končit pouze v záporných nábojích. Počet siločar vycházejících z náboje q musí být roven $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Podobný geometrický obraz můžeme nyní najít i pro potenciál φ . Nejjednodušší způsob jak znázornit potenciál, je nakreslit plochy, na nichž je φ stálé. Říkáme jim ekvipotenciální plochy (hladiny), tj. plochy se stejným potenciálem. Jaký je geometrický vztah ekvipotenciálních ploch k siločáram? Elektrické pole je gradientem potenciálu. Gradient udává směr nejrychlejší změny potenciálu, a proto je kolmý na ekvipotenciální plochu (v každém bodě). Kdyby totiž \vec{E} nebylo kolmé na ekvipotenciální plochu, mělo by v ní nenulovou složku. Pak by se potenciál na ploše měnil a nebyla by ekvipotenciální plochou. Ekvipotenciální plochy tedy musí všude svírat se siločárami elektrického pole pravý úhel.

V případě osamoceného bodového náboje jsou ekvipotenciálními plochami kulové plochy se středem v náboji. Na obr. 17.8.1 jsme ukázali řez těmito kulovými plochami procházejícími nábojem.

Jako druhý příklad uvažujme pole v blízkosti dvou stejně velkých nábojů, jednoho kladného a druhého záporného. Najít toto pole je snadné. Jde o superpozici polí pocházejících od každého z těchto nábojů. Můžeme tedy dva obrázky, jako je obr. 17.8.1, položit jeden na druhý, ale to nejde. Dostali bychom tak siločáry, které se navzájem protínají, a to není možné, neboť \vec{E} nemůže mít v jednom bodě dva různé směry. Nevýhoda popisu pole pomocí siločar je nyní očividná. Geometrickými úvahami nelze snadno dospět k tomu, jaký průběh budou mít nové siločáry. Ze dvou nezávislých obrazů siločar nemůžeme dostat jejich složený obraz. Princip superpozice - jednoduchý a zároveň hluboký princip teorie elektrických

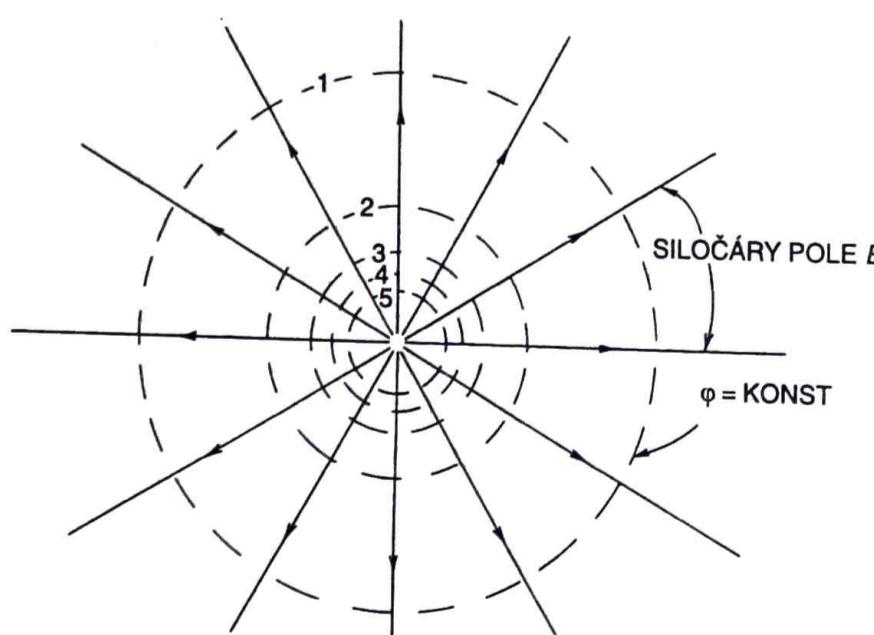
polí - nemá v popisu pole pomocí siločar jednoduchou reprezentaci.

Představa siločar má však své použití, a proto bychom přece rádi nakreslili jejich obraz pro dvojici nábojů stejné velikosti a opačných znamének.

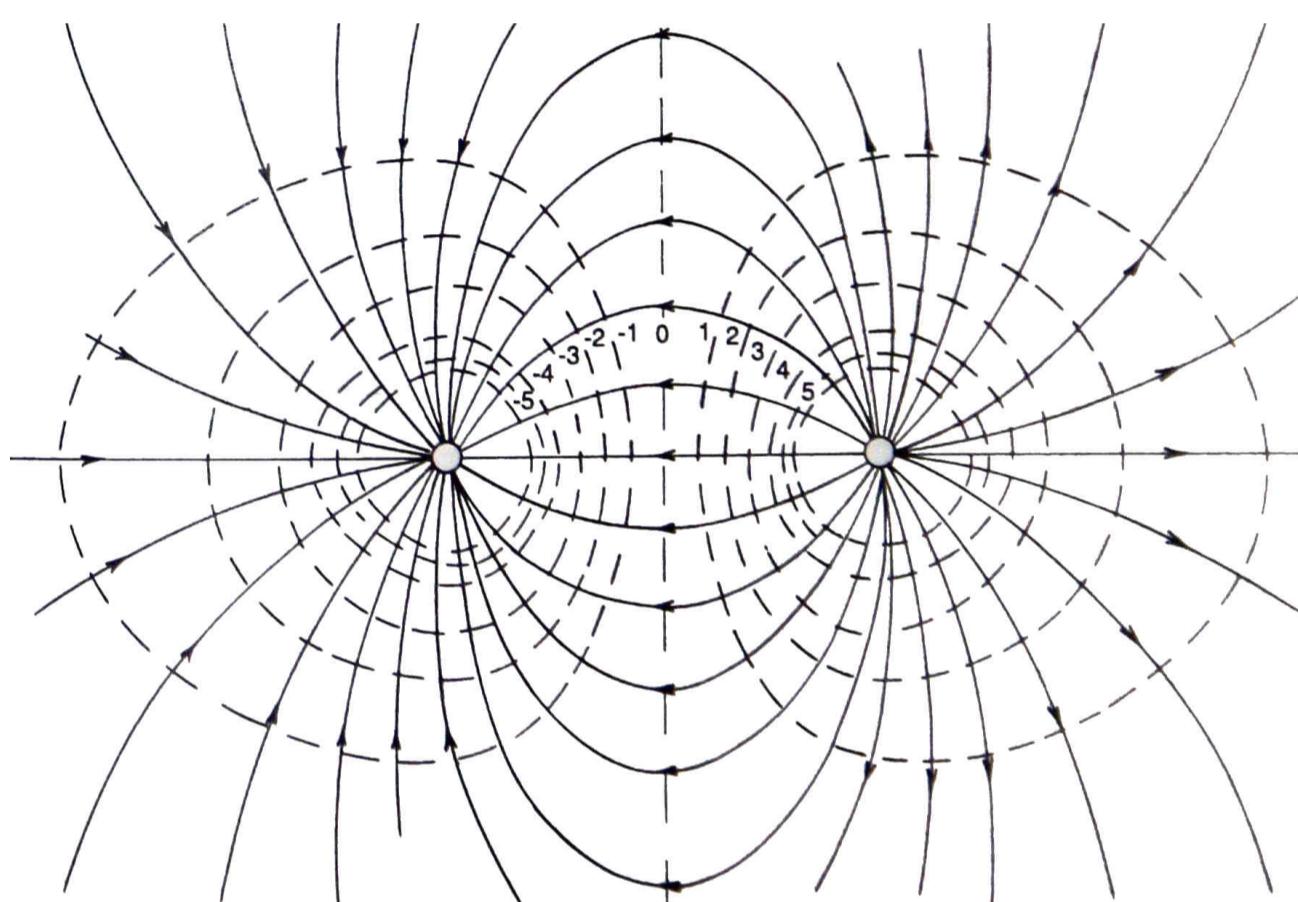
Vypočítáme-li pole ze vztahu (17.2.4) a potenciály z (17.3.5), můžeme siločáry a ekvipotenciální hladiny nakreslit. Výsledkem je obr. 17.2.4. Tuto úlohu jsme však museli řešit nejdříve matematicky.

References

- [FLMoo] R. Feynman, R. Leighton, and S. Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Ed. by I. Štoll. Nakladatelství Fragment, 2000, p. 806. ISBN: 80-7200-420-4 (cit. on pp. 79–86).



Obrázek 17.8.1.: Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě kladného bodového náboje.



Obrázek 17.8.2.: Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě dvou stejně velkých bodových nábojů s opačným znaménkem

18. Speciální teorie relativity

18.1. Princip relativity

Obsah

18.1. Princip relativity	89
18.2. Lorentzova transformace	90

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy ronice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak jej odstranit.

Oboje, chybu i korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že m je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlosť. V Einsteinově opraveném vztahu má m hodnotu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18.1.1)$$

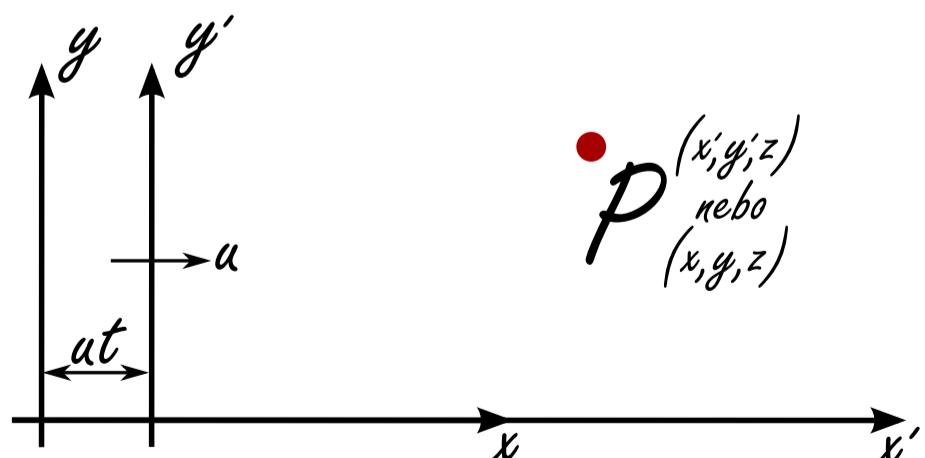
kde m_0 je *klidová hmotnost* (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje) a c je *rychlosť světla*, která je přibližně rovna $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlostí $9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$ a po dosazení do uvedeného vztahu dostaneme korekci hmotnosti ne větší než dvě až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostačně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosti světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý a proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Proto je zajímavé sledovat, jaké kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona. Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o *speciální teorii relativity* z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou *Obecná teorie relativity*. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ *gravitace*.

Newton byl první, kdo vyslovil *princip relativity* jako jeden z důsledků pohybových zákonů: Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejné ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočáre vpřed. To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlostí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samozřejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je pravda, že ve všech experimentech provedených v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální zákony stejné, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje konstantní rychlostí u ve směru osy x , přičemž měří polohu určitého bodu (obr. 18.1.1). Ve své souřad-



Obrázek 18.1.1.: Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých x-ových os.

nicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy x jako x' . Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy x ve své souřadnicové soustavě značí jako x . Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunu za čas t o vzdálenost ut , a jestliže soustavy z počátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (18.1.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetransformovaly do stejných zákonů v čárkované soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soustavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje či nikoliv.

Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumu elektrických, magnetických a světelných jevů, jež vyústilo v *Maxwellovu teorii elektromagnetického pole*, která jednotně popisuje elektřinu, magnetizmus a světlo. Zdálo se však, že Maxwellovy rovnice nevyhovovaly principu relativity, neboť přetransformujeme-li Maxwellovy rovnice pomocí rovnic 18.1.2, nebudou mít stejný tvar. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měli lišit od jevů v nehybné lodi. Těmito jevy by pak bylo možné určit rychlosť lodi, a ve speciálním případě pomocí vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možné určit i absolutní rychlosť lodi. Jedním z důsledků Maxwellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří vsemi směry stejnou rychlosťí $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dalším důsledkem těchto rovnic je, že pohybuje-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlosťí c . Tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje vede k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlosťí u a že světlo z reflektorů auta za námi nás míjí rychlosťí c . Zdiferencováním první rovnice 18.1.2 máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u, \quad (18.1.3)$$

což znamená, že podle *Galileovy transformace* by zdánlivá rychlosť světla měřená z auta nemohla být c , ale $c - u$. Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosťi Země, ale všechny selhaly - nedávaly vůbec žádné rychlosťi. Ukázalo se, že někde byla chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

18.2. Lorentzova transformace

Když se zjistilo, že s rovnicemi v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileiho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxwellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problému je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si H. A. Lorentz všiml pozoruhodné věci, když použil v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (18.2.1)$$

tvar rovnic se nezměnil. Rovnice 18.2.1 jsou známé jako *Lorentzovy transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že všechny fyzikální zákony, by měly být takové, aby se při Lorentzově transformaci neměnily. Jinými slovy, měly bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak se ukázalo jediné co je třeba, je změnit hmotnost m v Newtonových rovnicích podle vztahu 18.1.1. Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejné.

Pro pochopení smyslu této nové transformace nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání prostoru a času.

19. Geometrická optika

Obsah

19.1. Úvod	91
----------------------	----

19.1. Úvod

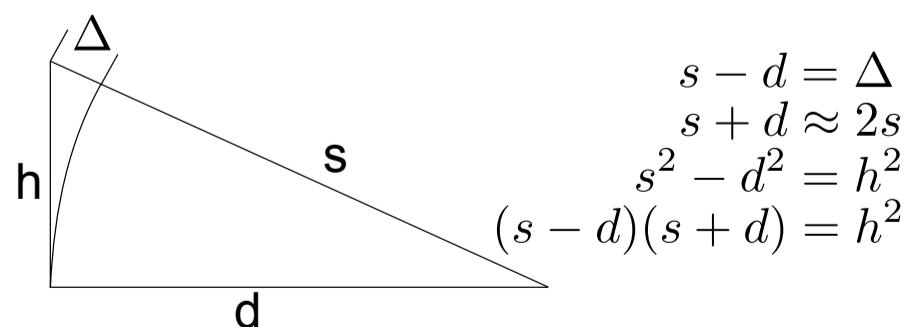
Na několika přístrojích předvedeme approximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější approximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů a přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná.

Abychom mohli pokračovat potřebujeme jeden geometrický vztah a to: máme-li trojúhelník s malou výškou h a velkou základnou d , pak přepona s je delší než základna (viz obr. 19.1.1).

Tedy

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (19.1.1)$$

To je celá geometrie, kterou je třeba znát, aby bylo možné diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch.



Obrázek 19.1.1.: Trojúhelník s malou výškou a velkou základnou

Část VI.

Astrofyzika

20. Úvod

Obsah

20.1. Historie astrofyziky	95
20.2. Základní vztahy	95

Astrofyzika je vědní obor ležící na rozhraní *fyziky* a *astronomie*. Zabývá se fyzikou vesmíru, včetně fyzikálních vlastností (svítivost, hustota, teplota, chemické složení) astronomických objektů jako jsou hvězdy, galaxie a mezihvězdná hmota, jakož i jejich vzájemné působení.

Podle metod výzkumu těchto objektů se dělí na *fotometrii*, *spektroskopii*, *radioastronomii*, *astrofyziku rentgenovou*, *infračervenou*, *ultrafialovou* a *neutrínovou*. Každý z těchto podoborů se dále dělí na praktickou a teoretickou část. Praktická získává potřebná data. Teoretická s pomocí fyzikálních zákonů vysvětluje pozorované chování vesmírných těles.

20.1. Historie astrofyziky

20.2. Základní vztahy

- **AU - astronomická jednotka:** průměrná vzdálenost Země od Slunce, $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Vzájemné vzdálenosti planet či jiných objektů sluneční soustavy vyjádřené v AU poskytují relativně názorné měřítko vzdáleností těchto objektů od sebe. Přesná hodnota je

$$1AU = 149\,597\,870\,691 \pm 6 \text{ m}$$

Kvůli výšší přesnosti *Mezinárodní astronomická unie* (International Astronomical Union, IAU) přijala novou definici, podle které je AU délka poloměru nerušené oběžné kruhové dráhy tělesa se zanedbatelnou hmotností, pohybujícího se okolo Slunce rychlosťí $0,017\,202\,098\,950$ radiánů za den ($86\,400$ s).

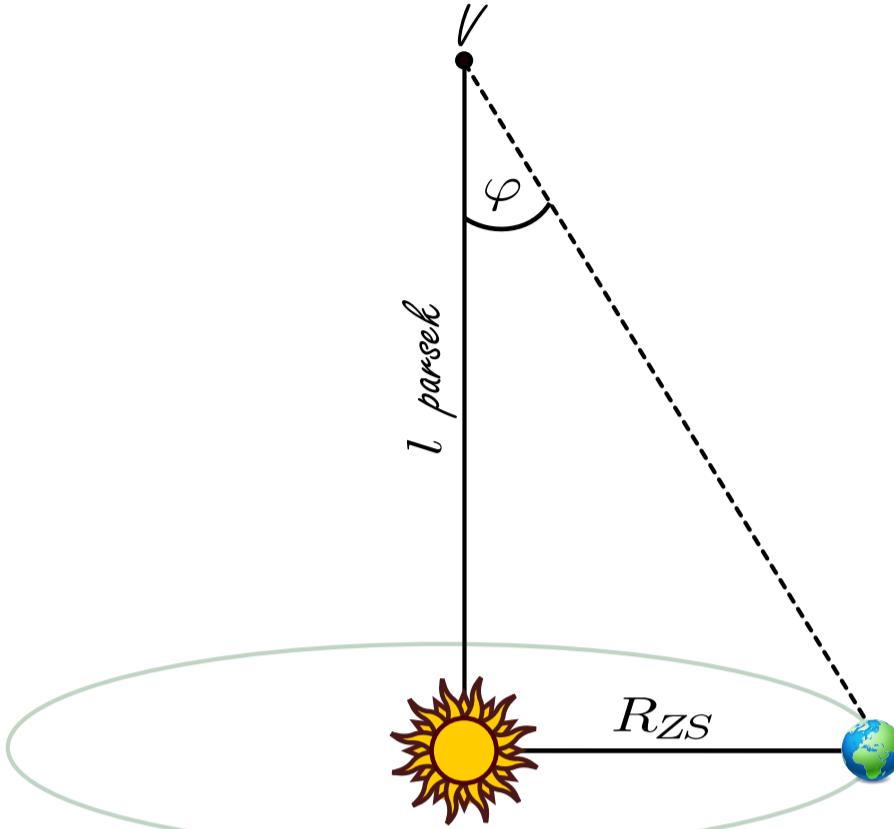
- Vzdálenost Země od Slunce je $1,00 \pm 0,02$ AU.
 - Měsíc obíhá kolem Země ve vzdálenosti $0,0026 \pm 0,0001$ AU.
 - Mars je od Slunce vzdálen $1,52 \pm 0,14$ AU.
 - Jupiter je od Slunce vzdálen $5,20 \pm 0,05$ AU.
 - Nejvzdálenější člověkem vyrobené těleso, sonda Voyager 1, bylo 31. prosince 2007 ve vzdálenosti $104,93$ AU od Slunce.
 - Průměr sluneční soustavy bez *Oortova oblaku* je přibližně 105 AU.
 - Průměr sluneční soustavy s Oortovým oblakem se odhaduje na 50 000 až 100 000 AU.
 - Nejbližší hvězda (po Slunci), Proxima Centauri, se nachází přibližně ve vzdálenosti 268 000 AU.
 - Průměr hvězdy Betelgeuze je 2,57 AU.
 - Vzdálenost Slunce od středu Galaxie je přibližně $1,7 \cdot 10^9$ AU.
 - Velikost viditelného vesmíru je asi $8,66 \cdot 10^{14}$ AU.
- **I.y. - světelný rok:** vzdálenost, kterou světlo ulétla za jeden rok, $9,46 \cdot 10^{12}$ km,
 - **pc - parsek, paralaktická sekunda:** vzdálenost, ze které by poloměr oběžné dráhy Země byl kolmo k zornému paprsku vidět pod úhlem $1''$, $30,9 \cdot 10^{12}$ km.

Příklad 20.2.1. Spočtěte, jakou vzdálenost v metrech vyjadřuje jeden parsek [Kčog, s. 3].

řešení: 1 pc (paralaktická sekunda) je vzdálenost, ze které vidíme velkou poloosu oběžné dráhy Země kolem Slunce pod úhlem $\varphi = 1''$. Úhel $1''$ je tak malý, že strany VS a VZ na obrázku prakticky splývají a místo pravého trojúhelníka VSZ můžeme použít definiční vztah úhlu v obloukové míře (velikost úhlu je možné určit jako poměr délky oblouku

vymezeného rameny na kružnici opsané kolem vrcholu k poloměru této kružnice). Proto

$$\varphi = \frac{R_{SZ}}{l} \rightarrow l = \frac{R_{SZ}}{\varphi},$$



Obrázek 20.2.1.: Parsek

kde l je vzdálosť 1 pc v metrech, R_{SZ} je vzdálosť země od Slunce a φ je úhel jedné vteřiny vyjádřený v radiánech.

$$l = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60 \cdot 60} \cdot \frac{2\pi}{360}} \cong 3 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$

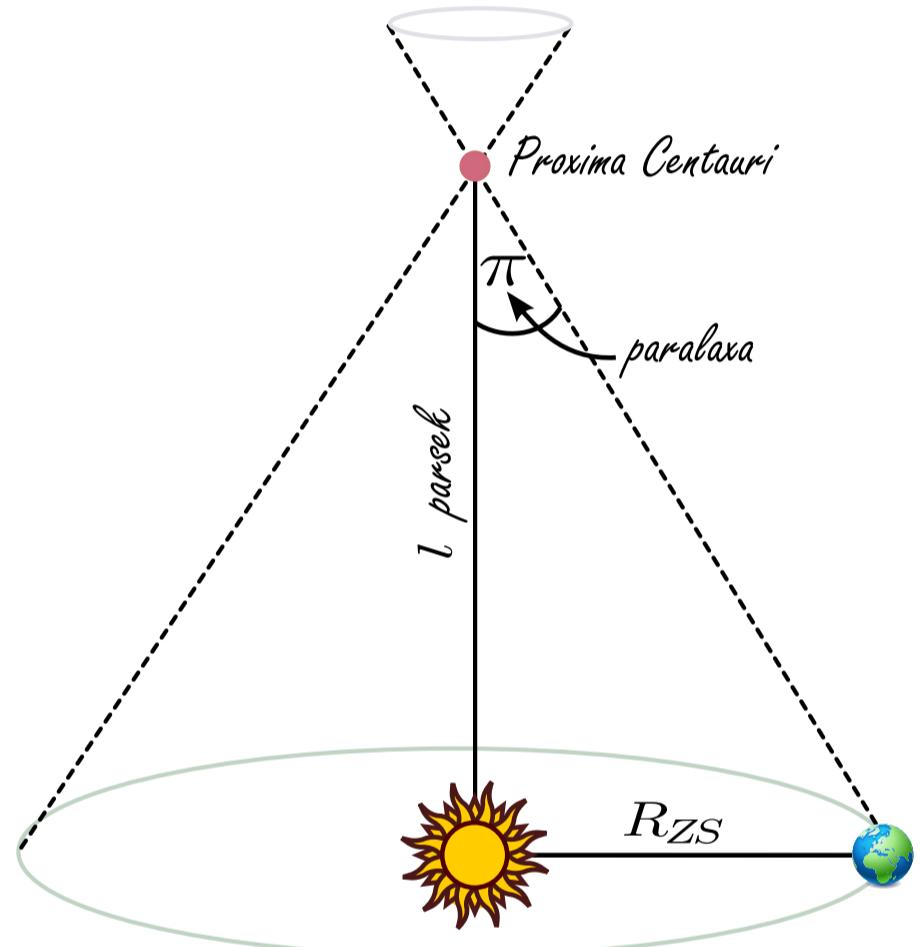
Další jednotkou, kterou se v astrofyzice měří vzdálenost dvou vesmírných těles, je *paralaxa*. Pozorovací místa musí být od sebe výrazně vzdálena, aby například při měření vzdálenosti naší nejbližší hvězdy - *Proxima Centauri* byla paralaxa vůbec měřitelná. Vzdálenost této hvězdy je 4,2 světelných let (nebo 270 000 AU) od Země.

Příklad 20.2.2. Najděte paralaxu *Proximy Centauri*, která je od nás vzdálená asi 4,2 světelného roku [KČo9, s. 4].

Řešení: Díky pohybu Země kolem Slunce se zdá, že blízké hvězdy opisují oproti vzdáleným elipsu. Úhlový poloměr této elipsy se nazývá *paralaxa hvězdy*. Lze ji změřit jen pro nejbližší hvězdy. Z definice úhlu (jako v předchozím příkladě) tedy vyplývá, že

$$\pi = \frac{R_{SZ}}{l} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

což je přibližně 0.76''. Vidíme, že i u druhé nejbližší hvězdy po Slunci není paralaxa ani celá 1''.



Obrázek 20.2.2.: Paralaxa naší nejbližší hvězdy

References

- [KČo9] P. Kulhánek and M. Červenka. *Astrofyzika v příkladech*. Ed. by F. ČVUT. FEL ČVUT, 2009. 87 pp. (cit. on pp. 95, 96).

Část VII.

Mechanika

21. Kinematika částice

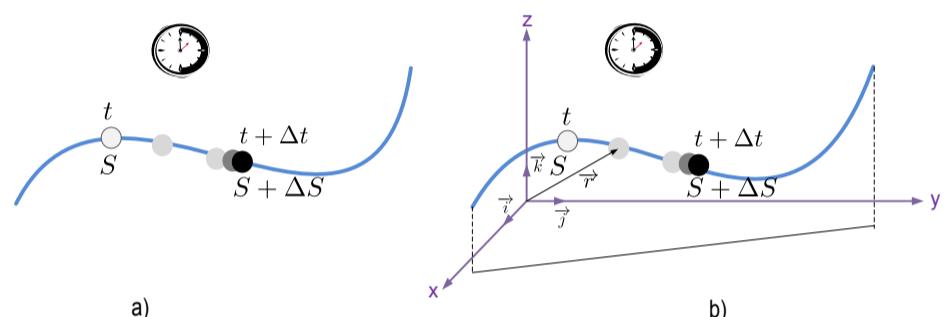
Obsah

21.1. Kinematický popis pohybu částice	99
21.1.1. Základní pohyby a jejich skládání	100
21.1.2. Skládání pohybů	100

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem hmotný bod je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměru částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

21.1. Kinematický popis pohybu částice

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po přičinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, trajektorii, a snažíme se určit jednak tvar této trajektorie a zákon pohybu po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase¹. Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.



Obrázek 21.1.1.: Příklad trajektorie částice a zavedení kartézské soustavy souřadnic

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit dráhu částice $s(t)$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 21.1.1). V okamžiku t je částice v bodě daném prošlou dráhou s , v okamžiku $t + \Delta t$ v bodě $s + \Delta s$. Dráha s tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

Přitom můžeme zavést **střední rychlosť částice** v intervalu Δt

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (21.1.1)$$

okamžitou rychlosť částice v okamžiku t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (21.1.2)$$

a okamžité zrychlení

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (21.1.3)$$

Takto zavedené rychlosť a zrychlení jsou skalární funkce času a udávají pouze jak se mění dráha a rychlosť při pohybu po zadané trajektorii, ve směru tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu částice v prostoru vzhledem k nějaké vztazné soustavě. Tato soustava, například kartézská, je spojena s nějakým tuhým tělesem a doplněna hodinami umístěnými například v počátku. V místnosti mohou jako kartézské osy sloužit průsečnice stěn

¹Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrosvětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojmem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrosvětě pohybuje podle zákona kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně stanovit její polohu a rychlosť

a podlahy. Potom udáváme tři kartézské souřadnice částice jako funkce času:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (21.1.4)$$

Soustava tří rovnic (rov. 21.1.4) představuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnici trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rov. 21.1.4 čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (21.1.5)$$

Přitom $s = s[x(t), y(t), z(t)]$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalární rychlosť bude

21.1.1. Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu částice.

21.1.1.1. Pohyb přímočarý

Nechť přímočarý pohyb probíhá podél osy x s počátečními podmínkami $x = x_0, v_x = \dot{x} = v_{0x}$ při $t = t_0$. Pak rozlišujeme

- *Pohyb rovnoměrný* s konstantní rychlosťí v_{0x} a nulovým zrychlením $a_x = 0$. Integrací a použitím počátečních podmínek dostávame zákon pohybu:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (21.1.6)$$

- *Pohyb rovnoměrně zrychlený* s konstantním zrychlením a_{0x} kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostávame zákon rychlosťi a zákon pohybu:

$$v = v_{0x} + a_{0x}(t - t_0), \quad (21.1.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{0x}(t - t_0)^2. \quad (21.1.8)$$

Je-li při $t = 0, x = 0, v = 0$ dostaneme známé vztahy

$$v = a_{0x}t, \quad x = \frac{1}{2}a_{0x}t^2$$

- *Pohyb nerovnoměrný* se zrychlením obecně závislým na čase $a(t)$. Pak dostaneme zákon rychlosťi a zákon pohybu integrováním

$$v = v_{0x} + \int_{t_0}^t a(t)dt \quad (21.1.9)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \int_{t_0}^t v(t)dt \quad (21.1.10)$$

21.1.1.2. Pohyb kruhový

21.1.1.3. Pohyb harmonický

Pohyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového pohybu kolem počátku do jedné z kartézských os. Například v ose y pak máme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (21.1.11)$$

kde

y ...výchylka (elongace),

A ...amplituda,

ω ...úhlová rychlosť [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$],

$T = \frac{2\pi}{\omega}$...perioda [s],

$f = \frac{1}{T}$...frekvence [Hz],

$\omega t + \varphi_0$...fáze,

φ_0 ...počáteční fáze při $t = 0$ neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosťi a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y = \dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (21.1.12a)$$

$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (21.1.12b)$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlosť předbíhá výchylku o $\frac{\pi}{2}$ a zrychlení o π (je v protifázi).

21.1.2. Skládání pohybů

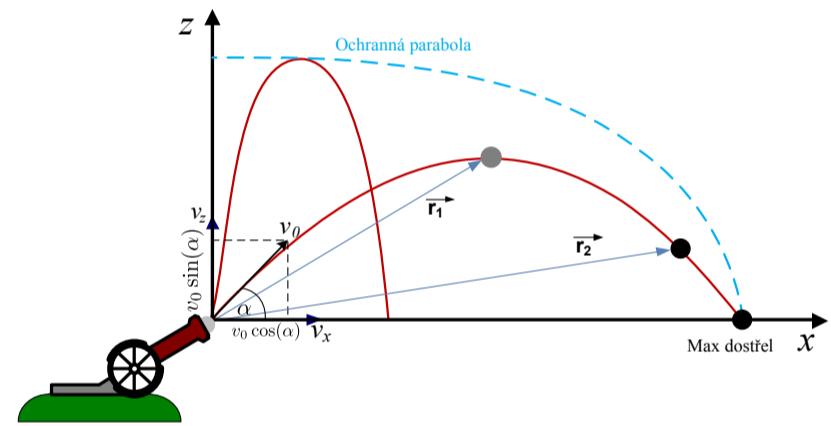
Ačkoliv částice může konat současně několik pohybů, lze je vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skládání pohybu.

21.1.2.1. Skládání kolmých přímočarých pohybů

Se skládáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při vrhu těles v homogenním těžovém poli ve vakuu. Uvažujme rovinný pohyb v rovině x, z , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g .

Příklad 21.1.1. Výstrel z děla (ve vakuu). Dělová koule opouští hlaveň zadanou rychlosťí. Určete:

- maximální dostrel pro zadanou ústřovou rychlosť,
- hranice oblasti, ve kterém lze zasáhnout cíl,
- stanovte velikost potřebného náměru děla pro zasazení libovolného cíle uvnitř ochranné paraboly.



Obrázek 21.1.2.: K příkladu výpočtu trajektorie projektile. Goniometrický vzorec
 $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$ lze snadno odvodit z náčrtu pomocí Pythagorovy věty
(Přepona pravoúhlého trojúhelníka je $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$)

Řešení: Uvažujte rovinný pohyb v rovině xz , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g . Ve směru osy z tedy probíhá rovnoměrně zrychlený pohyb podle rov. 21.1.8. Vztahneme-li počáteční podmínky k okamžiku $t = 0$, máme

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_z(t) = v_{0z} - gt \quad (21.1.13)$$

Ve směru osy x je pohyb rovnoměrný:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad v_x(t) = v_{0x} = \text{konst} \quad (21.1.14)$$

Dělová koule opouští hlaveň pod elevačním úhlem α za podmínek dle obr. 21.1.2a platí $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \alpha > 0, v_{0z} = v_0 \sin \alpha >$

0. Jde tedy o skládání rovnoměrného přímočáreho pohybu s rychlostí $v_0 \cos \alpha$ ve směru osy x a svislého pohybu vzhůru. Získané rovnice

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad x(t) = v_{0x}t \quad (21.1.15)$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučme-li z nich čas t , dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}x^2 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 \quad (21.1.16)$$

Nyní aplikujeme goniometrický vzorec

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

odvozený dle náčrtku na obrázku 21.1.2b a dostáváme rovnici

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)x^2 \quad (21.1.17)$$

Pohyb projektetu (dělové koule) probíhá po stejné trajektorii, jako šikmý vrh v homogenním těžovém poli ve vakuu, tedy po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, délku doletu a celkovou dobu letu.

- Maximální dolet pro daný elevační úhel:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)x^2 \quad (21.1.18)$$

Nezávislý kořen této kvadratické rovnice je námi hledaný dolet dělové koule

$$x_d = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (21.1.19)$$

- Celková doba letu:

$$t_d = \frac{x_d}{v_{0x}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{gv_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (21.1.20)$$

- Souřadnice vrcholu dráhy: získáme derivováním rov. 21.1.17

$$0 = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 (1 + \tan^2 \alpha)} x_v \quad (21.1.21)$$

$$x_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{2}{2} \quad (21.1.22)$$

$$x_v = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (21.1.23)$$

Souřadnici z_v dostaneme dosazením x_v do rov. 21.1.17

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \frac{v_0^4}{g^2} \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} \quad (21.1.24)$$

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (21.1.25)$$

$$z_v = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (21.1.26)$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu $\frac{\pi}{4}$ a obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly $\frac{\pi}{4} \pm \Delta\alpha$.

- Stanovení elevačního úhlu pro zasazení zadaných souřadnic $[X_c, Z_c]$: Opět vycházíme z rov. 21.1.17, ovšem tentokrát nejsou neznámé x a z , ale α : Použijeme substituci $\tan \alpha = p$ a vypočítáme kořeny

této kvadratické rovnice:

$$0 = gx^2 p^2 - 2v_0^2 xp + (gx^2 + 2zv_0^2) \quad (21.1.27)$$

$$p_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \quad (21.1.28)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \right) \quad (21.1.29)$$

Je-li cíl zadán v polárních souřadnicích $[r, \varphi]$, lze potřebný náměr stanovit takto:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gr^2 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi v_0^2)}}{gr \cos \varphi} \right) \quad (21.1.30)$$

Pokud ovšem bude diskriminant menší než 0, leží cíl mimo dosah děla. Tj. neexistuje takový náměr děla, kterým by bylo možné cíl zasáhnout. Je-li diskriminant roven nule, jedná se o hranici, za kterou již při dané ústřívek rychlosti nelze dostřelit. Body ležící na této obálce tzv. ochranná parabola mohou být zasaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu.

- Stanovení rovnice ochranné paraboly: To provedeme tak, že položíme diskriminant rovnice pro $\tan \alpha$ roven nule a dostaneme rovnici obálky

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2) \Rightarrow z = -\frac{v_0^2}{2g^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (21.1.31)$$

```

1 % =====
2 % Zadaní=====
3 % Delova koule opousti hlaven zadanou rychlosť.
4 % Urcete maximalni dosrel pro zadanou ustovou rychlosť,
5 % hranice oblasti, ve kterem lze zasahnout cil a stanovte
6 % velikost potrebnego nameru dela pro zasezeni
7 % libovolneho cile
8 % uvnitr ochranne paraboly.
9 % namer = 45; % [°] namer dela
10 go = 210; % [m/s] ustova rychlosť
11 go = 9.81; % [m/s-2] gravitacni zrychleni
12 % Angle required to hit coordinate (x,y)
13 cil=[2000,300];
14 % ===== rEsENi =====
15 vxo = vo*cos(namer/180*pi);
16 vyo = vo*sin(namer/180*pi);
17 % 1. Pohybove rovnice
18 t_dopad = (2*vyo)/go;
19 t1= 0:t_dopad/20:t_dopad;
20 r1 = [vxo*t1;
21 vyo*t1 - (1/2)*go*t1.^2];
22 % 2. Vypocet nameru pro zasazení zadaneho cile
23 t_trefa = cil(1)/vxo;
24 t2 = 0:t_trefa/20:t_trefa;
25 % namer alfa - dva koreny !!
26 Diskriminant =
27 sqrt(vo^4-(go*(go*cil(1)^2+2*vo^2*cil(2))));
28 alfa1 = atan((vo^2-Diskriminant)/(go*cil(1)));
29 alfa2 = atan((vo^2+Diskriminant)/(go*cil(1)));
30 namer_alfa1 = alfa1*180/pi;
31 namer_alfa2 = alfa2*180/pi;
32 r2 = [vxo*t2;
33 tan(alfa1)*vxo*t2 -
34 (go/(2*vo^2*cos(alfa1)^2)) * (vxo*t2).^2;
35 tan(alfa2)*vxo*t2 -
36 (go/(2*vo^2*cos(alfa2)^2)) * (vxo*t2).^2];
37 % 3. vypocet hranice dosazitelnosti cile - ochranna
38 % parabola
39 vxo_max = vo*cos(45/180*pi);
40 vyo_max = vo*sin(45/180*pi);
41 t_max = (2*vyo_max)/go; % max dosrel pri nameru 45 °
42 dosrel_max = vxo_max*t_max % [m]
43 vyska_max = vo^2/(2*go) % [m]
44 t3 = 0:t_max/500:t_max;
45 r3 = [vxo_max*t3;
46 vo^2/(2*go)-go/(2*vo^2)*(vxo_max*t3).^2];

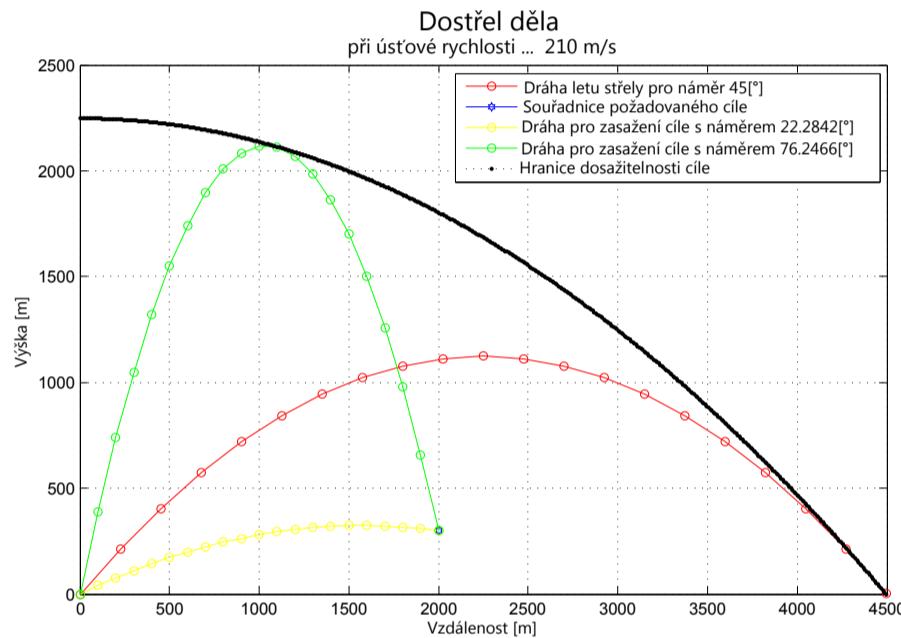
```

```

42 % graficke zpracovani vysledku
43 % figure;
44 plot(r1(1,:), r1(2,:),'-ro', cil(1),
45 cil(2),'-bh',r2(1,:), r2(2,:),'-yo',r2(1,:),
46 r2(3,:),'-go',r3(1,:), r3(2,:),':k','MarkerSize',6)
47 grid on;
48 title({'\fontsize{16}{Dostrel\,dela';
49     '\fontsize{12}{pri\,ustove\,rychlosti\,...\,',
50     'num2str(vo), '[m/s]' } })
51 xlabel('Vzdalenost[m]')
52 ylabel('Vyska[m]')
53 string1 = ['Draha\,letu\,strelu\,pro\,zadany\,namer\,',
54     'num2str(namer), '[\,]';
55 string2 = 'Souradnice\,pozadovaneho\,cile\,';
56 string3 = ['Draha\,pro\,zasazeni\,cile\,us\,namerem\,',
57     'num2str(namer_alpha1), '[\,]';
58 string4 = ['Draha\,pro\,zasazeni\,cile\,us\,namerem\,',
59     'num2str(namer_alpha2), '[\,]';
60 string5 = 'Hranice\,dosazitelnosti\,cile\,';
61 legend(string1, string2, string3, string4, string5)

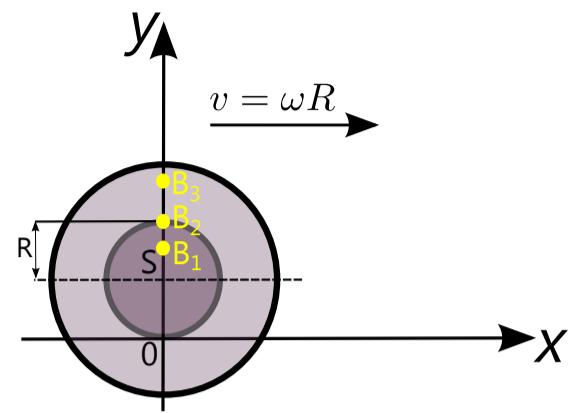
```

Výpis 21.1: kinematika_deло_ve_vakuu.m pro ověření výpočtu balistické dráhy projektetu.



Obrázek 21.1.3.: Výpočet trajektorie projektetu ve vakuu při ústové rychlosti 210m/s pomocí sw MATLAB®.

Příklad 21.1.2. Kolo vagónu se valí po vodorovné kolejnici. Uvažujte bod, který je v počátečním okamžiku pod středem kola ve vzdálenosti, která může být menší, rovna nebo větší než vzdálenost středu kola od kolejnice.



Obrázek 21.1.4.: Kolo vagónu a tři možné polohy bodu

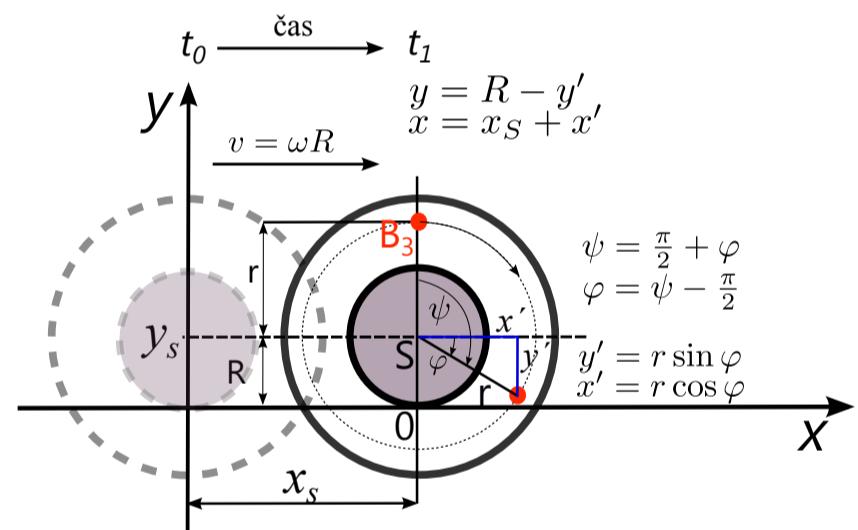
Určete parametrické rovnice dráhy zvoleného bodu, složky rychlosti a její velikost, složky zrychlení a jeho velikost, tečné a normálové zrychlení a poloměr křivosti dráhy. [Slao2, p. 11]

Řešení: Obvodová rychlosť v místě dotyku s kolejnicí je $v = \omega R$, což vzhledem k předpokladu o valení představuje posuvnou rychlosť kola. Parametrické rovnice pro střed kola jsou pak

$$x_S = \omega R t \quad (21.1.32)$$

$$y_S = R \quad (21.1.33)$$

Uvažovaný bod B_3 na obr. 21.1.5 je ve své nové pozici v čase t_1 posunut vůči středu o vzdálenost $r \cdot \sin \omega t$ ve směru osy x a o vzdálenost $r \cdot \cos \omega t$ ve směru osy y . Z obrázku 21.1.5 lze odvodit následující rovnice pro souřadnice libovolného bodu B na kole vagónu.



Obrázek 21.1.5.: Náčrt pro odvození parametrických rovnic pohybu libovolně zvoleného bodu na kole vagónu

- ve směru osy x :

$$\begin{aligned} x &= x_S + x' \\ x &= x_S + r \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ x &= x_S + r \sin \psi \\ x &= \omega R t + r \sin \omega t \end{aligned}$$

takže, parametrické rovnice dráhy mají tvar **cykloidy** viz 21.1.34.

$$x = \omega R t + r \sin \omega t \quad (21.1.34)$$

$$y = R + r \cos \omega t \quad (21.1.35)$$

- Složky rychlosti:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \omega R + r \omega \cos \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -r \omega \sin \omega t \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2} \end{aligned} \quad (21.1.36)$$

- Složky zrychlení:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \sin \omega t \quad (21.1.37)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t \quad (21.1.38)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r\omega^2 \quad (21.1.39)$$

Tento výsledek je superpozicí rovnoměrného kruhového a rovnoměrného přímočarého pohybu.

- Tečné zrychlení dostaneme derivací velikosti rychlosti

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \omega \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \cdot (-1) \cdot 2Rr\omega \sin \omega t \quad (21.1.40)$$

$$a_t = \frac{r\omega^2 \cdot |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \quad (21.1.41)$$

- Normálové zrychlení získáme užitím Pythagorovy věty

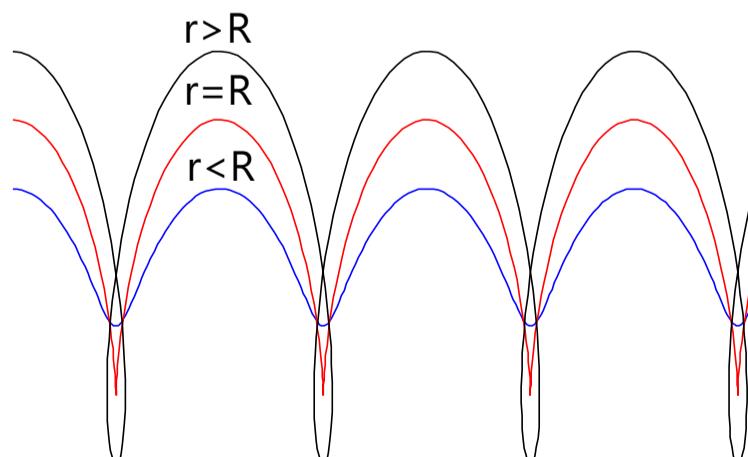
$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \\ a_n &= \sqrt{(r\omega^2)^2 - \left(\frac{Rr\omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \right)^2} \\ a_n &= \frac{r\omega^2 |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Poloměr křivosti R_0 dostaneme ze vztahu $a_n = \frac{v^2}{R_0}$:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\omega^2(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)}{r\omega^2|R \cos \omega t - r|} \\ R_0 &= \frac{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}}{|Rr \cos \omega t - r^2|} \end{aligned}$$

Poloměr křivosti není roven vzdálenosti od středu kola r : drahou bodu není kružnice, nýbrž cykloida (viz obr. 21.1.6).

$$\begin{aligned} (x - \omega Rt)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t \\ (y - R)^2 &= r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t + r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \quad \text{kde } t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{y - R}{r} \\ \left(x - R \arccos \frac{y - R}{r}\right)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \end{aligned}$$



Obrázek 21.1.6.: Cykloida: pro $r > R$ je cykloida prostá; pro $r < R$ je cykloida prodloužená; pro $r = R$ je cykloida zkrácená; [cykloida.m]

21.1.2.2. Skládání harmonických pohybů v kolmých směrech

Zmíníme se ještě o skládání **harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad y = B \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (21.1.42)$$

Výsledný pohyb vytváří zajímavé geometrické tvary známé pod názvem Lissajousovy obrazce. Jejich vzhled závisí na poměru frekvencí a na fázovém úhlu [SO02].

Označíme fázi kmitů ve směru x jako $\omega t + \varphi_{01} = \varphi$, rozdíl fází obou kmitů jako $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \delta$. Dále vyložíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Máme

$$\sin \varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi + \delta) = \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta = \frac{y}{B} \quad (21.1.43)$$

odkud

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sin \delta} \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \delta \right) \quad (21.1.44)$$

Sečteme-li nyní $\sin^2 \varphi$ a $\cos^2 \varphi$, dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (21.1.45)$$

V závislosti na δ může tato rovnice odpovídat rovnici úsečky, nebo elipsy. Je-li $\delta = n\pi$, probíhají kmity po úsečce, jejíž přímka má směrnici $k = \pm \frac{B}{A}$, je-li $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$, je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (21.1.46)$$

Jsou-li amplitudy obou pohybů stejné, přejde pro $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$ elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých pohybů o stejných frekvencích se setkáváme nejen v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 21.1.7a a obr. 21.1.7b [Što95].

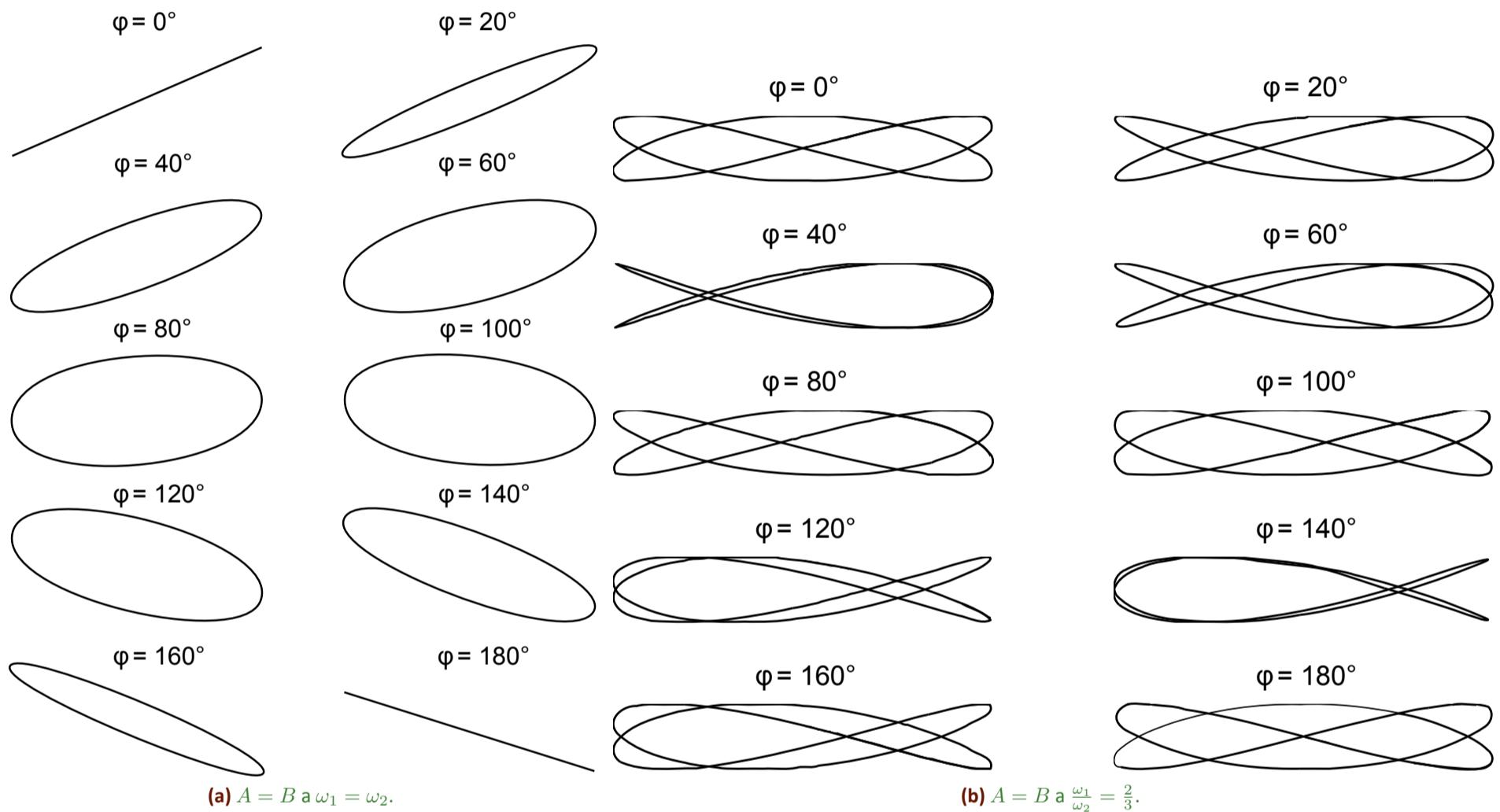
Jsou-li úhlové frekvence kolmých pohybů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce** viz 21.1.7b. Program ukazuje, jak se projevuje změna fázového úhlu při daném poměru frekvencí obou pohybů.

```

1 % Lissajousovy obrazce - vliv fazoveho uhlu
2 %
3 % neni - li pomery frekvenc rationalni cislo
4 % neni krivka uzavrena
5 clear
6 t = 0:0.01:7; i = 0;
7 omega1 = 2; omega2 = 3; % frekvence
8 A = 1; B = 1; % amplitudy
9
10
11 for fi = 0:pi/9:pi % 1. pohyb
12 x = A*sin(omega1*t);
13 y = B*sin(omega2*t + fi); % 2. pohyb
14 i=i+1; fi=fi*180/pi; % prevod na stupne
15 subplot(5,2,i);
16 plot(x,y,'r');
17 axis('off');
18 title(['\phi_i = ', num2str(fi), '°']);
19 end

```

Výpis 21.2: Lissajous.m vykreslí skládání harmonických pohybů v kolmých směrech.



Obrázek 21.1.7.: Trajektorie harmonických pohybů $x = A \sin(\omega_1 t)$ a $y = B \sin(\omega_2 t + \varphi)$ v kolmých směrech

22. Dynamika částice

Příklad 22.0.3. Dělová koule o hmotnosti $m = 24 \text{ kg}$ opustila hlaveň rychlosť $v = 500 \text{ ms}^{-1}$ v čase $\tau = 0.008 \text{ s}$ po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavni? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

Řešení:

- Délka hlavně: $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v\tau = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0.008 = 2 \text{ m}$
- Síla působící na kouli: $F = m\frac{v}{\tau} = 24 \cdot \frac{500}{0.008} = 1.5 \times 10^6 \text{ N}$
- Vykonaná práce při urychlování koule: $A = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \times 10^6 \text{ J}$

Příklad 22.0.4. Dráha střely s ohledem na odpor prostředí.

Řešení:

Část VIII.

Teorie elektromagnetického pole

23. Spojité matematické modely polí

Obsah

23.1. Elektrický náboj	109
23.1.1. Vlastnosti elektrického náboje	109
23.2. Elektromagnetické pole	109
23.2.1. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky	109
23.2.2. Maxwellovy rovnice	110
23.3. Elektrostatické pole	111
23.4. Stacionární proudové pole	111
23.4.1. Elektrický proud v kovových vodičích	111
23.4.2. Práce a výkon elektrického proudu	113
23.4.3. Ohmův zákon	113
23.4.4. Elektromotorické napětí	114
23.5. Stacionární magnetické pole	115
23.5.1. Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí	116
23.5.2. Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru	117
23.5.3. Rovnice pro magnetický potenciál	118

23.1. Elektrický náboj

23.1.1. Vlastnosti elektrického náboje

Na základě pokusů s elektrinou víme, že některá tělesa (například skleněná či ebonitová tyč po předchozím tření) mohou za určitých podmínek silové působit na jiná tělesa. Toto silové působení se vysvětluje přítomností elektrických nábojů. Elektrický náboj představuje pro nás výchozí fyzikální veličinu, přičemž mírou jejího množství a rozložení na příslušných tělesech je právě silové působení mezi nimi. Elektrický náboj je veličinou skalární, podobně jako hmotnost, a k jeho určení postačí jediná (reálná) číselná hodnota. Skutečnost, že síly elektrického působení mezi tělesy mohou být jak přitažlivé, tak odpudivé vysvětlujeme tím, že elektrický náboj může nabývat kladných i záporných hodnot - tělesa se souhlasným znamením náboje se přitom odpuzují, tělesa s nesouhlasným znamením náboje se přitahují. Tělesa, která nesou elektrický náboj nazýváme *kladně či záporně nabité*, tělesa o nulovém náboji jsou elektricky *neutrální*, nenabité. Často se setkáváme s případem, kdy na tělesech jsou odděleně rozloženy kladné a záporné elektrické náboje o téže absolutní hodnotě. Taková tělesa budou také elektricky silově působit, přestože jejich celkový elektrický náboj je nulový. Říkáme jim *polarizovaná*.

O přítomnosti elektrického náboje se přesvědčujeme pouze na základě jeho silového projevu. Znamená to, že existenci jednoho jediného náboje bychom nemohli nijak odhalit. Kdyby existovaly pouze dva náboje, mohli bychom určit, zda jsou souhlasného či nesouhlasného znamení, nemohli bychom však rozhodnout ani o znamení, ani o velikosti těchto nábojů. Teprve jsou-li k dispozici alespoň tři náboje, můžeme jeden z nich vybrat jako jednotkový a kladný a ze silového působení určit velikost a znamení druhých nábojů¹.

23.2. Elektromagnetické pole

23.2.1. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

Elektrický náboj je *skalární veličinou*. Jednotkou je *coulomb [C]*. Má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$), avšak v technických aplikacích k tomu nepřihlížíme. Náboj Q může být rozložen:

- *prostorově* v objemu V s objemovou hustotou

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad [C \cdot m^{-3}] \quad (23.2.1)$$

- *plošně* na ploše S , s plošnou hustotou

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (23.2.2)$$

¹Co je vlastní podstatou elektrického náboje nevíme. Na základě poznatků současné mikrofyziky jej můžeme považovat za jednu z vlastností elementárních částic, která podmiňuje jejich vzájemné působení. Rozlišujeme čtyři základní typy vzájemného působení (*interakce*) mezi elementárními částicemi: gravitační, slané elektromagnetické a silné. Gravitační interakce je univerzální a týká se všech částic. Setkali jsme se s ní v mechanice, její velikost udává Newtonův gravitační zákon a její podstatu se snaží objasnit obecná teorie relativity. Slabá interakce se projevuje u některých typů radioaktivního rozpadu za účasti neutrina. Podobně elektromagnetická interakce se uplatňuje mezi elementárními částicemi a jednou z jejich charakteristik je náboj. Silná interakce existuje mezi částicemi, které nazýváme hadrony, a drží pohromadě atomové jádro, které by se jinak odpudivými elektrickými silami působícími mezi protony musely rozdělit.

Současný rozvoj mikrofyziky naznačuje, že hadrony, které jsme dříve považovali za elementární, mají svoji strukturu a komponenty. Předpokládáme o nich, že jsou tvořeny tzv. kvarky. Na současné úrovni vystupují tedy jako elementární kvarky a leptony (k nim patří elektron, mion, tauon a odpovídající neutrino), jejich antičástice a dále pak částice, které zprostředkovávají interakci mezi nimi

- lineárně na křivce l , s lineární hustotou

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad [C \cdot m^{-1}] \quad (23.2.3)$$

Rozlišujeme:

- **volné náboje:** mohou se přemisťovat v makroskopických vzdálenostech,
- **vázané náboje:** mohou se přemisťovat jen v mikroskopických vzdálenostech.

Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují); vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

Elektrický proud je znám z každodenního života, přesto je velmi důležité umět tento pojem vnímat jak pro označení „jevu“ (kap. 23.4.1), tak jako fyzikální veličinu, která tento jev kvantitativně popisuje (kap. 23.2.1). Elektrický proud je *skalární fyzikální veličina* ozn. I resp. i , jejíž jednotkou je základní jednotka soustavy SI: *ampér* – [A]. V této soustavě jednotek je ampér definován na základě silových účinků mezi dvěma vodiči, kterými prochází elektrický proud. Tato síla je magnetického původu, avšak magnetické pole vzniká jako důsledek pohybu elektrického náboje. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů.

Připojíme-li vodič ke zdroji elektrického napětí, elektrické pole uvnitř působí elektrickou silou na vodivostní elektrony, vyvolává jejich pohyb a tím vytváří elektrický proud, který je po krátké době *stacionární* (ustálený, nezávislý na čase). Jestliže vodičem projde náboj ΔQ resp. dQ za časový interval Δt resp. dt , lze definovat *průměrný* resp. *okamžitý* proud ve vodiči:

- **průměrný** elektrický proud:

$$I_{AV} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [A],$$

- **okamžitý** elektrický proud (který je limitním případem proudu průměrného, studujeme-li množství náboje, které projde průřezem vodiče za infinitesimální (nekonečně krátký) časový interval):

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad [A].$$

V ustáleném stavu protéká všemi průřezy vodiče stejně velký proud,

- speciálně pohybuje-li se náboj vodičem rovnoměrně, nazýváme proud **stejnosměrný**, $I(t) = \text{konst}$, a platí

$$I_{DC} = \frac{Q}{t} \quad [A]$$

Elektrický proud jako *jev* charakterizuje jednu z forem fyzikálního pohybu, kterou je **uspořádaný pohyb elektricky nabitéch částic** v látce. Přestože jakýkoliv elektrický proud je vždy tvořen pohybujícími se náboji, nemusí všechny pohybující se náboje vytvářet elektrický proud. Ve vodiči dochází ke vzniku trvalého elektrického proudu za těchto podmínek:

- vodič se musí nacházet v trvalém elektrickém poli, což je realizováno pomocí tzv. *zdroje* (generátoru) elektrického napětí,
- ve vodiči musí být přítomny volné nosiče elektrického náboje.

Podle charakteru vnějšího elektrického pole lze rozlišit tři základní druhy proudů:

stejnosměrný proud vzniká tehdy, jestliže má intenzita elektrického pole konstantní orientaci,

střídavý proud ve vodiči vytváří vnější elektrické pole, jehož intenzita periodicky mění svou orientaci na opačnou,

stacionární stejnosměrný proud vzniká ve vodiči, je-li intenzita elektrického pole konstantní co do velikosti, směru i orientace.

Nabité částice představující volný náboj ve vodičích jsou v neustálém chaotickém tepelném pohybu (viz molekulová fyzika a termodynamika). Jedná se o *mikroskopický pohyb*, který nemá za následek makroskopický pozorovatelné přemístění náboje. Pokud ve vodiči vytvoříme elektrické pole, tepelný pohyb nabitých částic neustane, ale k náhodné složce rychlosti přibude ještě složka rychlosti ve směru vloženého pole.

Při studiu elektrického proudu v kovových vodičích se zabýváme ustálenými proudy vodivostních elektronů, které v kovu vytváří tzv. *elektronový plyn*. Tyto vodivostní elektrony jsou téměř volné a pohybují se v poli kladných iontů uspořádaných v krystalové mřížce.

Experimentálně lze elektromagnetické pole prokázat silovým působením na elektricky nabité částice. Celkovou sílu \vec{F} lze rozložit na elektrickou sílu \vec{F}_e , nezávislou na tom, zda je nabitá částice v klidu nebo v pohybu vůči vztažné soustavě a na magnetickou sílu \vec{F}_m , působící jen na pohybující se částice. Elektromagnetické pole má tedy dvě složky: **elektrické pole**, působící na náboj silou \vec{F}_e a **magnetické pole**, působící na pohybující se náboj silou \vec{F}_m [Mayo1, s. 13].

Intenzita elektrického pole \vec{E} je vektorovou veličinou charakterizující **elektrické pole**. Je definována jako *síla působící na nepohybující se jednotkový bodový náboj*:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (23.2.4)$$

kde \vec{F}_e je elektrická síla působící na náboj Q .

Magnetická indukce \vec{B} je vektorovou veličinou charakterizující **magnetické pole**. Je definována jako *síla působící na nepohybující se jednotkový bodový náboj*:

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad [T] \quad (23.2.5)$$

kde \vec{F}_m je magnetická síla působící na náboj Q pohybující se rychlostí \vec{v} . Jednotkou je *tesla* [T].

Síla, jež působí elektromagnetické pole na pohybující se náboj se nazývá **Lorentzova síla**

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [N] \quad (23.2.6)$$

23.2.2. Maxwellovy rovnice

Makroskopická teorie elektromagnetického pole v klasickém pojetí vychází ze základních zákonů vyjádřených *Maxwellovými rovnicemi* (MR). Lze je zapsat buď v **integrálním**, nebo **diferenciálním tvaru**. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté prostorové oblasti Ω , kdežto v diferenciálním tvaru ve vnitřním bodě této oblasti. Soustavu vlastních MR představují první čtyři páry rovnic; často se k nim připojuje jako další základní rovnice elektromagnetického pole rovnice kontinuity pro vodivý proud. Její integrální a diferenciální tvar reprezentují poslední dvě rovnice.

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot } \vec{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (23.2.7)$$

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (23.2.8)$$

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho_V \quad (23.2.9)$$

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (23.2.10)$$

$$\int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = - \frac{dQ}{dt} \quad \text{div } \vec{J} = - \frac{d\rho_V}{dt} \quad (23.2.11)$$

Předpokládá se, že *všechny křivky a plochy v integrálním tvaru MR jsou po částech hladké a všechny integrované veličiny jsou po částech spojité funkce*. Pak je zaručena existence integrálů v těchto rovnicích. V diferenciálním tvaru MR se předpokládají pouze **regulární body** oblastí, což jsou body, v nichž jsou veličiny \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} a \mathbf{H} **spojitě a spojité diferencovatelné funkce**; nejsou jimi tedy např. body rozhraní dvou různých prostředí, v

elektrickém poli body v nichž jsou umístěny diskrétní náboje, v magnetickém poli body proudových vláken atd.

23.3. Elektrostatické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou elektrické náboje. Náboje se nepohybují (tj. nedochází k elektrickému proudu) a tedy nevzniká magnetické pole. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
3. MR	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	$\text{rot } \vec{D} = \rho$
		$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

Tabulka 23.3.1.: Základní rovnice elektrostatického pole

23.4. Stacionární proudové pole

V elektrostatice (tj. elektrickém poli nepohybujících se nábojů) neexistuje trvalý elektrický proud. Zdroje napětí (galvanické články, termočlánky, dynamy aj.) mají tu vlastnost, že na jejich záporné svorce je trvale nadbytek elektronů, a na jejich kladné svorce jejich nedostatek. Těmito zdroji můžeme ve vodiči trvale udržovat elektrické pole a tedy i tok nosičů elektřiny. Jestliže se *náboje pohybují konstantní rychlostí, hovoříme o stacionárním elektrickém proudu*. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
Zákon kontinuity	$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div } \vec{J} = 0$
Ohmův zákon	$I = GU = \frac{U}{R}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$

Tabulka 23.4.1.: Základní rovnice stacionárního proudového pole

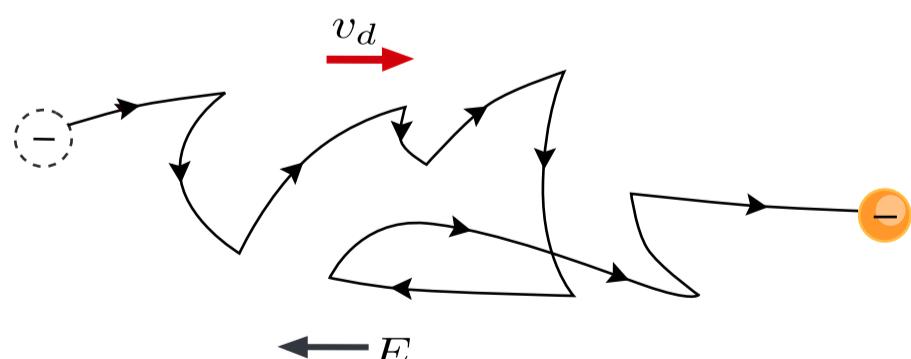
23.4.1. Elektrický proud v kovových vodičích

V předchozí kapitole 23.2.1 bylo o elektrickém proudu pojednáváno jako o skalární fyzikální veličině. V této kapitole nás bude zajímat makroskopický pohled na „jev“ známý jako **elektrický proud**.

Zopakujme, že elektrickým proudem je mírněn uspořádaný pohyb elektrických nábojů, a aby se tyto náboje mohly pohybovat, musí být volné - jsou přítomny v látkách, které nazýváme **vodiče**. Vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (elektrony v kovech, uhlíku a v polovodičích) anebo obojíh znamének (kladné a záporné ionty v elektrolytech, ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Volné nositele náboje (elektrony, ionty) lze rovněž oddělit od těchto látek (vodičů) a vytvořit elektrický proud ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Z vodičů mají největší význam **kovy**, které jsou polykrystalickými látkami s kovovou vazbou. Každý mikroskopický monokrystal kovu má pevnou krystalovou mříž sestavenou z kladných iontů, mezi nimiž se přetržitě pohybují *volné elektrony rychlostmi*, jejichž velikost je statisticky proměnná (co do velikosti i směru). Střední hodnota rychlosti (jako vektoru) všech elektronů je nulová. Střední hodnota rychlosti určitého elektronu je závislá na teplotě vodiče. Elektrony konají tzv. *termický pohyb*. Rychlosti neuspořádaných termických pohybů dosahují jen o několik řádů větších hodnot, než kmity iontů v krystalech mřížky.

Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. ke galvanickému článku), začne statisticky převládat uspořádaný pohyb nosičů kladného (záporného) náboje ve směru (proti směru) vnějšího pole nad termickým pohybem, což v makroskopickém měřítku pozorujeme jako **makroskopický elektrický proud**. Jsou-li ve vodiči přítomny nosiče náboje obou polarit, dojde k pohybu ve vzájemně opačných směrech, přičemž směr toku nosičů kladného náboje se historicky ztotožnuje se směrem toku elektrického proudu. U kovových vodičů je tedy směr proudu právě opačný, než směr toku elektronů, jenž tento elektrický proud tvoří.



Obrázek 23.4.1.: Pohyb elektronu ve vodiči. Fyzikálně je v_d průměrná rychlosť nosičů náboje uvnitř vodiče, který je vložen do vnějšího elektrického pole. Ve skutečnosti se ale elektron ve vodiči nepohybuje po přímce, jeho pohyb je chaotický.

Velikost (intenzitu) proudu posuzujeme podle velikosti náboje obojí polarity, který projde určitým průřezem vodiče ve vzájemně opačných směrech za jednotku času. Projde-li průřezem vodiče celkově náboj dQ za čas dt , bude tok náboje vodičem charakterizovat skalární veličina

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A], \quad (23.4.1)$$

která se nazývá **elektrický proud** ($1 C \cdot s^{-1} = 1 A$ čteno *ampér*). Tato jednotka patří mezi základní jednotky SI soustavy.

Pro **stacionární** (tj. časově neproměnný - ustálený) proud můžeme obecný výraz 23.4.1 nahradit rovnicí

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (23.4.2)$$

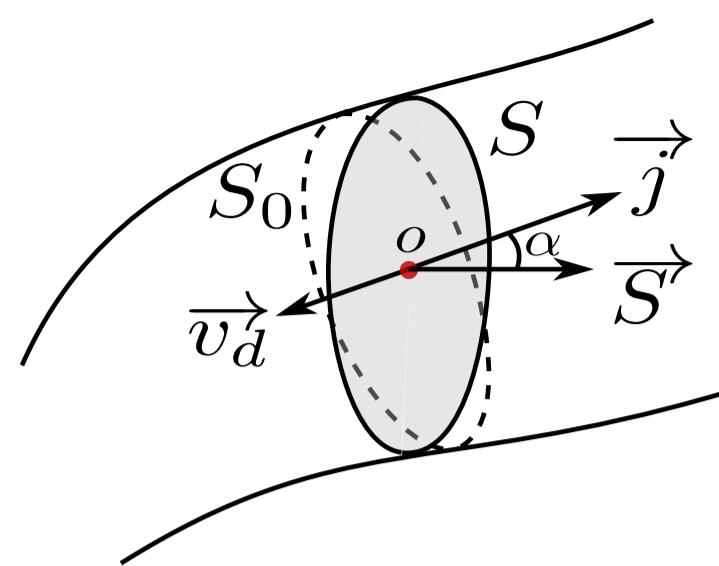
Jedná-li se o rovnoměrný pohyb bodového náboje Q po kružnici s periodou T , resp. s úhlovou rychlostí ω , můžeme vzniklý ustálený proud vyjádřit rovnicí

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}. \quad (23.4.3)$$

Bude-li se element náboje dQ pohybovat v lineárním útvaru rychlostí $v = \frac{dQ}{dl}$, bude po dosazení do rov. 23.4.1 reprezentovat elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl} \cdot v = \tau v, \quad (23.4.4)$$

kde τ je **délková hustota náboje** a v je velikost **okamžité rychlosti náboje** v uvažovaném místě lineárního útvaru.



Obrázek 23.4.3.: Rovinná plocha $S = S_0 \cos \alpha$

obecnějšího tvaru

$$I = \rho_0 \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{v}_d = j S \cos \alpha = j S_0, \quad (23.4.6)$$

kde $S_0 = S$ pro $\alpha = 0$ (viz obr. 23.4.3) a

$$\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{v}_d, \quad (23.4.7)$$

je proudová hustota. Je to vektor o velikosti

$$j = \frac{I}{S \cos \alpha} = \frac{I}{S_0} \quad A \cdot m^{-2}, \quad (23.4.8)$$

obecněji

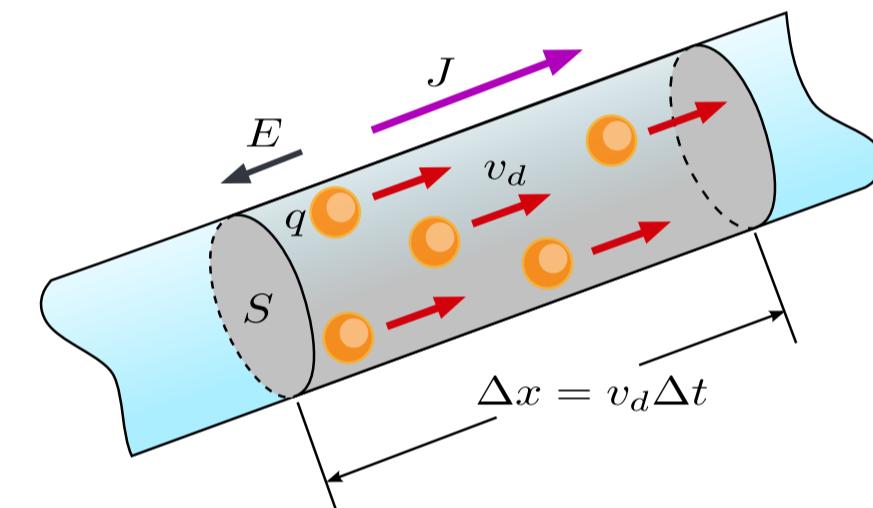
$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (23.4.9)$$

a o směru vektoru driftové rychlosti nositelů kladného náboje. Pro případ nositelů volného náboje - elektronů má proudová hustota opačný směr než driftová rychlosť v_d (obr. 23.4.3).

Velikost vektoru \mathbf{j} má význam plošné hustoty elektrického proudu v uvažovaném místě průřezu. Jednotkou je $A \cdot m^{-2}$.

Nebude-li proudová hustota na uvažovaném průřezu konstantní, bude celkový elektrický proud procházející průřezem o obsahu S dán integrálem

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (23.4.10)$$



Obrázek 23.4.2.: Směr elektrického proudu byl implicitně stanoven jako směr pohybu kladných nábojů. Nositeli elektrického náboje uvnitř vodičů jsou ovšem záporně nabité volné elektrony, které se tedy dle konvence pohybují proti směru elektrického proudu. Elektrický proud může protékat pevnými látkami (kovy, polovodiči), kapalinami (elektrolyty) a ionizovanými plyny. Látky, které nevedou elektrický proud, nazýváme nevodiči, izolanty

Elektrický proud je veličina, která obecně popisuje prostorový jev. Omezíme se nyní na běžný případ vodiče, jako je na obr. 23.4.2, který má volné náboje jen jedné polarity (u kovových vodičů jde o elektrony) a označme ρ_0 prostorovou hustotu volného náboje a v_d velikost usměrněné rychlosti jejich nositelů (elektronů). Pak za čas dt projde průřezem o obsahu S_0 ($S_0 \perp v_d$) náboj $dQ = \rho_0 S_0 v_d dt$. Elektrický proud vyjádřený rov. 23.4.1 můžeme přepsat do tvaru

$$I = \rho_0 S_0 v_d = -e n_0 S_0 v_d, \quad (23.4.5)$$

kde $n_0 = \frac{\rho_0}{-e}$ je počet nositelů volného náboje (tj. v našem případě elektronů, z nichž každý nese náboj $-e$ v jednotkovém objemu vodiče, přičemž pro elektrony zřejmě je $\rho_0 < 0$).

Rovinnou plochu S průřezu můžeme zavést jako vektor $v_r S$, který má směr daný normálou k ploše a pravidlem pravé ruky (ukazují-li prsty pravé ruky směr oběhu po hraniční křivce plochy, ukáže palec směr plochy jako vektoru \mathbf{S}). Protože driftová rychlosť v_d je také vektor, nebudeme obecně uvažovat vektory \mathbf{S}, \mathbf{v}_d o stejném směru a rovnici 23.4.5 přepíšeme do

Příklad 23.4.1. Driftová rychlosť elektronů ve vodiči: Vodičem z jednomocné mědi o průřezu $S_0 = 1 mm^2$ prochází elektrický proud $I = 5 A$. Vypočítejte:

- počet volných elektronů v jednotkovém objemu Cu,
- úhrný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu,
- driftovou rychlosť volných elektronů při proudu I .

Měď má poměrnou atomovou hmotnost $A_r = 63,54$ a hustotu² $s = 8,93 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$.

Řešení:

- Jeden mol mědi o molové hmotnosti $M = 0,06354 kg \cdot mol^{-1}$ a o molovém objemu

$$V_m = \frac{M}{s} = \frac{63,54 \cdot 10^{-3} kg \cdot mol^{-1}}{8,93 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}} = 7,12 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot mol^{-1}$$

obsahuje $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23}$ jednoatomových molekul Cu na jeden mol, z nichž každý má volný jeden (valenční) elektron. Tedy počet

²Pro hustotu budeme používat alternativní značku s , s ohledem na kolizi značky ρ , jež označuje hustotu náboje.

volných elektronů v jednotkovém objemu je

$$n_0 = \frac{N_A}{V_m} = \frac{s N_A}{M} = \frac{6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

- Úhrnný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu mědi je

$$Q_v = -e \cdot n_0 = -1,36 \cdot 10^{10} \text{ Cm}^{-3}.$$

- Velikost driftové rychlosti určíme ze vztahu $I = -en_0 v_d S_0 = -Q_v v_d S_0$ tj.

$$v_d = \left| \frac{I}{Q_v S_0} \right| = \frac{5}{1,36 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{C} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{Cm}^{-3} \cdot \text{m}^2} = 3676 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,3676 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Z provedených výpočtů si můžeme udělat názor o mikroskopických poměrech v kovových vodičích: počet volných nositelů náboje - elektronů a jejich úhrnný náboj v jednotkovém objemu je značný a proto driftová rychlosť elektronů potřebná k vyvolání proudu běžné velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá (doslova hlemýždí).

Příklad 23.4.2. Elektricky neutrální měděná mince o hmotnosti $m = 3,11 \text{ g}$ obsahuje stejně množství kladného a záporného náboje. Jaké je velikost kladného (nebo záporného) náboje obsaženého v minci?

Řešení:

Neutrální atom má záporný náboj $Z \cdot e$, představovaný jeho elektronu a kladný náboj o stejně velikosti představovaný protony v jádře. Pro mědě je atomové číslo Z rovno 29, tj. atom mědi má 29 protonů, a je-li elektricky neutrální, také 29 elektronů.

Náboj o velikosti Q_v , který hledáme je roven $N Z_e$, kde N je počet atomů obsažených v jednom molu (Avogadrova konstanta: $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Počet molů mědi v minci $\frac{m}{M}$, kde $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnosti mědi:

$$N = N_A \cdot \frac{m}{M} = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \frac{3,11 \text{ g}}{63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2,95 \cdot 10^{22}.$$

Velikost celkového kladného (záporného) náboje v minci je pak

$$Q_v = N Z_e = 2,95 \cdot 10^{22} \cdot 29 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 137039 \text{ C}$$

To je obrovský náboj. Pro srovnání: třeme-li ebonitovou tyč vlněnou látkou, můžeme na tyč přemístit stěží náboj o velikosti 10^{-9} C .

23.4.2. Práce a výkon elektrického proudu

Příklad 23.4.3. Za jakou dobu uvede ponorný vodič o příkonu 600 W do varu 1 l vody o počáteční teplotě 20°C. Uvažujte měrnou teplenu kapacitu vody $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Výměnu tepla s okolím neuvažujte.

Řešení:

Pro var vody bude zapotřebí tepla dle rovnice $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$. Potřebná elektrická práce je $Q_e = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$ a tedy dobu ohřevu stanovíme z rovnice:

$$\begin{aligned} P \cdot t &= m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{m \cdot c}{P} \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{1 \cdot 4200}{600} \cdot (100 - 20) \\ t &= 560 \text{ s} \end{aligned}$$

23.4.3. Ohmův zákon

Uvažujme vodič u něhož jsou volnými nositeli náboje elektrony. Nyní v mezích klasické mechaniky kvantitativně popíšeme mechanismus vedení proudu, který povede k všeobecně známému **Ohmovu zákonu**

Umístíme-li vodič do elektrického pole o intenzitě \vec{E} (např. připojením ke galvanickému článku), působí na každý volný elektron síla $\vec{F} = -e\vec{E}$, která mu podle Newtonova zákona udělí zrychlení $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}$ proti

směru vnějšího pole. Tím získávají chaoticky se pohybující elektrony ještě složku rychlosti v protisměru vloženého elektrického pole \vec{E} a dojde tedy k usměrnění driftového pohybu volných elektronů a v souladu s kapitolou 23.4.1 pozorujeme, že ve vodiči vznikl makroskopický elektrický proud.

Pohyb elektronu se ovšem neobejde bez srážek s ionty v krystalové mřížce. Dráhu, kterou se elektronu podaří urazit, nazýváme *volnou dráhou* d . Průměrná doba mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami nechť je τ za tuto dobu se bude elektron rovnoměrně urychlovat a těsně před následující srážkou jeho rychlosť dosáhne maxima tj. $\vec{v}_{max} = \vec{a} \cdot \tau$. Nás ovšem zajímá průměrná rychlosť (*driftová rychlosť*) na volné dráze průměrné velikosti:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{v}_{max}}{2} = -\frac{e\tau}{2m_e}\vec{E} \quad (23.4.11)$$

Proudová hustota 23.4.7 bude

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{v}_d = -en_0 \vec{v}_d = -\frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \vec{E} \quad (23.4.12)$$

Koefficient úměrnosti

$$\gamma = \frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \quad (23.4.13)$$

je závislý na počtu nositelů (elektronů) n_0 v jednotkovém objemu a na době τ , neboli na délce volné dráhy. Veličina γ se nazývá *měrná elektrická vodivost* neboli **konduktivita** látky. Protože dobu τ nelze přímo měřit, určuje se γ experimentálně. Přitom se zjišťuje, že pro určitou teplotu zkoumané látky je γ konstantní.

Po zevedení pojmu *měrná elektrická vodivost* látky 23.4.13, můžeme výraz 23.4.12 přepsat do výsledného tvaru

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (23.4.14)$$

který se v literatuře označuje jako *Ohmův zákon v diferenciálním tvaru* (i když se v pravém slova smyslu o diferenciální tvar nejedná). Výstižnější je označení *lokální tvar Ohmova zákona*, protože výraz 23.4.14 se vztahuje na určité místo, resp. bod, vodivého prostředí. Vztah říká, že proudová hustota v určitém bodě vodivého prostředí je přímo úměrná intenzitě vloženého elektrického pole v tomto bodě (platí pro určitou teplotu prostředí).

Uvažujme nyní lineární homogenní vodič délky l a příčného průřezu o obsahu S_0 , připojený ke zdroji o napětí U . Pak intenzita pole uvnitř vodiče bude mít konstantní velikost $E = \frac{U}{l}$. Dosadíme-li za velikost proudové hustoty $j = \frac{I}{S_0}$ do 23.4.14, dostaneme vztah

$$\frac{I}{S_0} = \gamma \frac{U}{l}, \quad (23.4.15)$$

z něhož vyplývá známý vztah

$$U = \frac{l}{\gamma S_0} I = RI, \quad (23.4.16)$$

kde

$$R = \frac{l}{\gamma S_0} = \rho \frac{l}{S_0}, \quad (23.4.17)$$

je **elektrický odpor** uvažovaného lineárního vodiče, přičemž $\rho = \frac{1}{\gamma}$ je *měrný elektrický odpor (rezistivita)*³. Výraz 23.4.17 představuje klasický Ohmův zákon zákon experimentálně objevený r. 1826 G. S. Ohmem. Jednotky:

- elektrický odpor: VA^{-1} ,
- měrný elektrický odpor: $\Omega \text{ m}$,
- měrná elektrická vodivost: $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Příklad 23.4.4. Zemnicí elektroda: Uvažujte zemnicí elektrodu ve tvaru koule o poloměru $a = 200 \text{ mm}$, uloženou do zeminy v hloubce, která je značně větší než je poloměr a . Pro jednoduchost řešení dále předpokládejte, že přívodní drát je od zeminy izolován (obr. 23.4.4). Zemina má

³Zde je další kolize značky ρ . Nyní se tomuto problému vyhneme využíváním pouze konduktivity, jenž se častěji používá v teorii elektromagnetického pole.

měrnou vodivost $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} m^{-1}$. Při zkratu teče přívodním drátem proud $I = 50 A$. Vypočítejte:

- a) Závislost potenciálu $\varphi = \varphi(r)$ elektrického pole, které se vytvoří v zemině při zkratu, kde r je vzdálenost od středu elektrody. Potenciál normujte volbou $\varphi(\infty) = 0$.
- b) Zemnicí odpor elektrody, který je definován vztahem

$$R_z = \frac{U_z}{I_z},$$

kde $U_z = \varphi(a) - \varphi(b)$ je zemnicí napětí

- c) Ztrátový výkon při zkratu.

Řešení: Ekvipotenciální a proudové plochy mají zřejmě kulový tvar se středem totožným s geometrickým středem elektrody. Proudová hustota na kulové ploše obecného poloměru r (viz. obr. 23.4.4) je

$$\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{n},$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor ve směru normály. Pak v bodech na této ploše musí být elektrické pole o intenzitě \vec{E} , kterou určíme ze vztahu

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{n}.$$

Závislost potenciálu $\varphi = \varphi(r)$ tohoto elektrického pole stanovíme pomocí následujícího integrálu

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{r} + C = - \frac{I}{4\pi\gamma} \int \frac{dr}{r^2} + C = \frac{I}{4\pi\gamma r} + C,$$

kde integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky $\varphi(\infty) = 0$, odkud $C = 0$. Hledaná závislost potenciálu je

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma r}, \quad r \in (a, \infty).$$

Zemina, v níž je uložena elektroda, je vastně rezistorem, jehož jeden okraj tvoří elektroda a druhým okrajem je nekonečně rozlehý vodivý prostor. Potenciální rozdíl mezi těmito okraji je

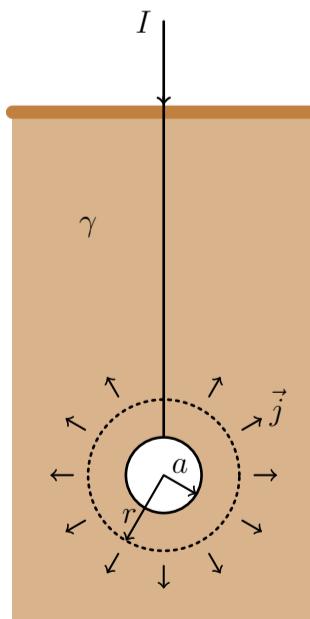
$$U_z = \varphi(a) - \varphi(\infty) = \frac{I}{4\pi\gamma a},$$

odkud zemnicí odpor

$$R_z = \frac{U_z}{I} = \frac{I}{4\pi\gamma a} = 22,1 \Omega$$

a ztrátový výkon

$$P_z = R_z \cdot I^2 = 55,3 \text{ kW}.$$



Obrázek 23.4.4.: Zemnicí elektroda

23.4.4. Elektromotorické napětí

Uzavřený proudový okruh C , nechť je v dynamické rovnováze - prochází jím ustálený elektrický proud. Uvažujme pro jednoduchost představy kladný náboj - ten se musí pohybovat ve směru klesajícího potenciálu (záporný náboj ve směru stoupajícího potenciálu). Je-li okruh uzavřený, musí kladné náboje opět vystoupit na místo s vyšším potenciálem - musí se tedy pohybovat proti elektrostatickým silám. Proto proti úbytku

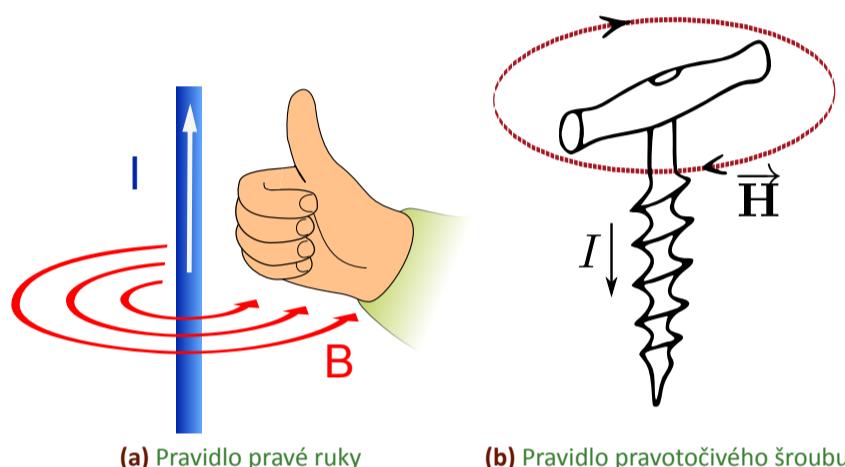
23.5. Stacionární magnetické pole

Zdrojem stacionárního magnetického pole jsou stejnosměrné proudy nebo permanentní magnety. Základní rovnice stacionárního magnetického pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
1. MR	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\text{rot } \vec{H} = \mathbf{J}$
4. MR	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
		$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Tabulka 23.5.1.: Základní rovnice magnetického stacionárního pole

Směr vektoru \mathbf{H} se prakticky určí například *pravidlem pravotočivého šroubu*: vodič nahradíme šroubem (s pravotočivým závitem) a otáčíme jím tak, aby se pohyboval ve směru proudu; směr otáčení pak udává směr vektoru \mathbf{H} . Vše je názorně vysvětleno na obrázku 23.5.1b. Podobných pomůcek existuje více, např. *pravidlo pravé ruky*: vodič uchopíme do dlaně pravé ruky tak, aby palec ukazoval směr proudu; prsty pak ukazují směr vektoru \mathbf{H} , obr. 23.5.1a.

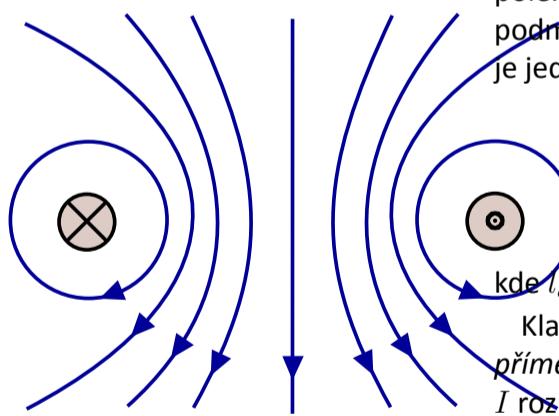


Obrázek 23.5.1.: Určení směru vektoru \mathbf{H} : a) pravidlem pravé ruky; b) pravidlem pravotočivého šroubu

K prověření těchto pravidel je na obr. 23.5.2 vyznačen směr indukčních čar kruhového závitu. Označení \otimes vyjadřuje proud vstupující do nákresny (symbol letícího šípu od pozorovatele) a označením \odot proud vystupující z nákresny (symbol hrotu šípu).

Rovnice 23.5.1 představuje **zákon celkového proudu** vyjadřující, rovnost oběhového magnetického napětí na libovolné uzavřené orientované křivce c proudu, který je s křivkou c spřažen. "Spřaženým proudem" rozumíme proud, který prochází libovolnou plochou S , jež je ohrazena křivkou c , přičemž plocha S je orientována vůči křivce c pravotočivě (obr. 23.5.3). [Mayo1, s. 55].

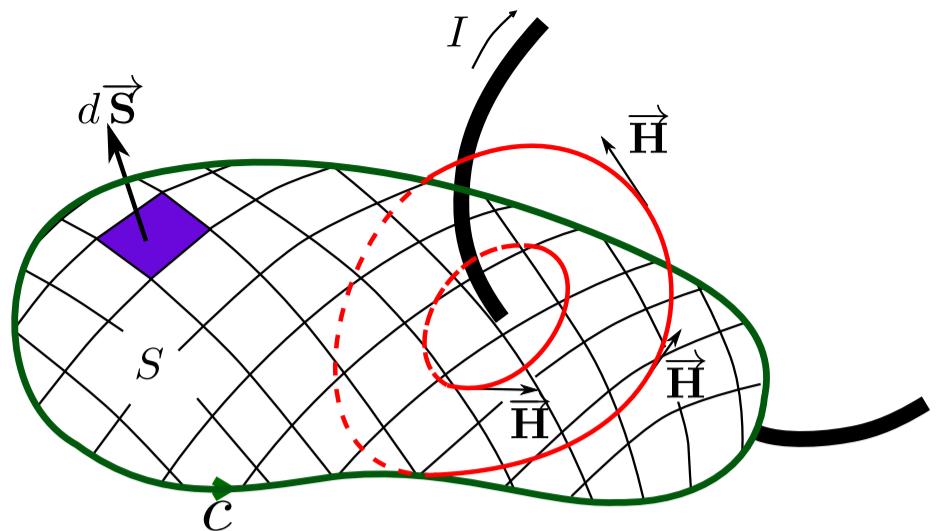
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (23.5.1)$$



Obrázek 23.5.2.: Indukční čáry kruhového závitu.

Základní úlohou řešení stacionárních proudových magnetických polí je určení rozložení veličin \mathbf{H} a \mathbf{B} v prostoru, je-li dáno prostorové a materiálové uspořádání a elektrické proudy vybuzují řešené magnetické pole.

V následujících úlohách se omezíme na analýzu jednodušších, souměrných magnetických polí v lineárním izotropním alespoň po částech homogenním prostředí. Pro zjednodušení budeme zanedbávat deformaci magnetického pole v okrajových oblastech a nebudeme uvažovat vliv blízkosti nesymetrického rozhraní a vliv blízkosti druhého zdroje magnetického pole. (Pro přesnější řešení by pak bylo nutné použít



Obrázek 23.5.3.: K zákonu celkového proudu

tzv. *metodu zrcadlení*.) Některá složitější pole lze rozdělit na několik jednodušších polí souměrného charakteru, resp. typického uspořádání. Vzhledem k tomu, že v předpokládaném lineárním prostředí ($\mu = \text{konst}$) platí pro stacionární magnetické pole *princip superpozice*, lze samostatně vyřešit nejpreve dílčí jednodušší pole jednotlivých proudů I_j a po jejich superpozici

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j(I_j), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j(I_j) \quad (23.5.2)$$

získáme výsledné pole celkového proudu [Kot99, s. 181].

Metodou přímé aplikace I. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru pro stacionární magnetické pole proudové

$$\oint_c \mathbf{H} dl = \oint_c H \cos \alpha dl = I_c \quad (23.5.3)$$

lze jednoduše použít tehdy, je-li ze zadанé úlohy zřejmá taková symetrie pole, že lze z nekonečně mnoha uzavřených křivek, splňující rov. 23.5.3, nalézt takovou integrační dráhu c , která obepíná proud I_c vytvázející magnetické pole a v jejich bodech platí podmínka

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = \text{konst}, \quad (23.5.4)$$

speciálně

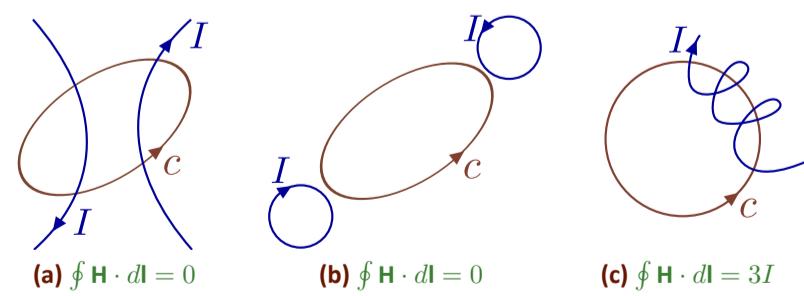
$$H = \text{konst}, \quad \alpha = 0. \quad (23.5.5)$$

Podmínka $\alpha = 0$, tj. $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{l}$ je identicky splněna na siločáre magnetického pole. Siločáry souměrných stacionárních magnetických polí splňují tedy podmínu 23.5.5 a řešení rovnice 23.5.3 při integraci po takovéto siločáre je jednoduché

$$\oint_c \mathbf{H} dl = H \oint_c dl = I_c \underbrace{\int_c dl}_{l_c} = I_c \rightarrow H = \frac{I_c}{l_c} \quad (23.5.6)$$

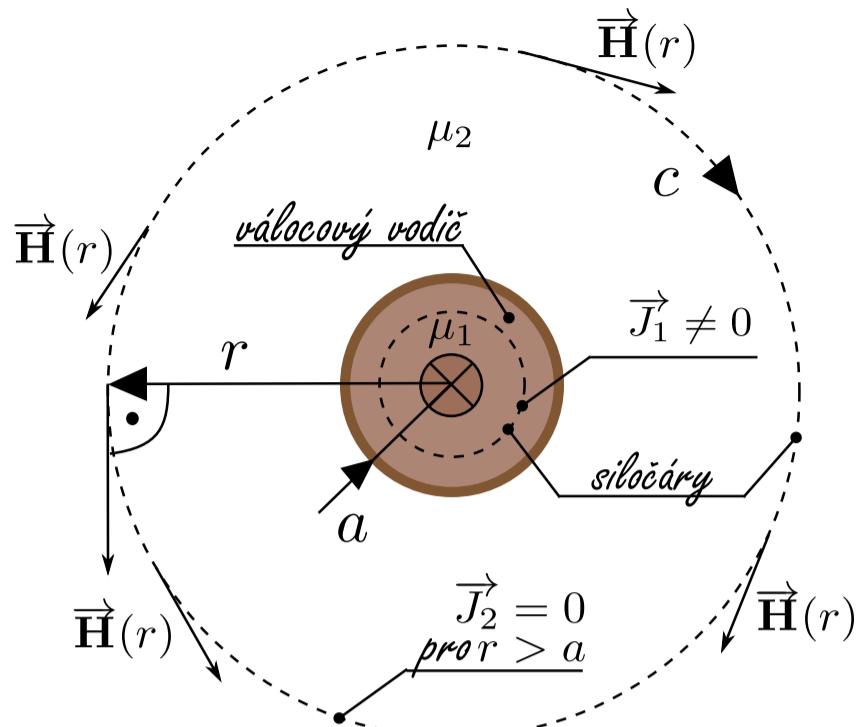
kde l_c je délka integrační dráhy c splňující podmínu 23.5.5.

Klasickým případem takovéto úlohy je magnetické pole *dlouhého přímého válcového vodiče* o poloměru a , délce l protékajícího proudem I rozloženým po průřezu souměrně kolem osy vodiče, tzn. obecně s hustotou $J = J(r)$. Z osové (rotační) symetrie vyplývá, že siločáry mag-



Obrázek 23.5.4.: K pojmu "proud spřažený s křivkou" pro tři různé případy křivky c .

netického pole mají tvar soustředných kružnic se středem v ose vodiče, ležících v rovině kolmé na osu vodiče obr. 23.5.5. Úlohy proto řešíme



Obrázek 23.5.5.: Pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

ve válcových souřadnicích s osou z totožnou s osou vodiče. Za předpokladu, že průměr vodiče je zanedbatelný vůči jeho délce lze zanedbat deformaci pole vlivem konců válcového vodiče a přejít na rovinný problém v polárních souřadnicích. Z důvodu osové souměrnosti je však pole závislé jen na vzdálenosti r od osy vodiče tj.

$$H = H(r), \quad B = B(r).$$

Na kruhových silovárách je tedy splněna podmínka 23.5.5 a z I. Maxwellovy rovnice 23.5.3

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cos 0 \oint_C dl = I(r), \quad (23.5.7)$$

kde C je kružnice o poloměru r a proud $I(r)$ je dán rovnicí

$$I(r) = \int_{S(r)} \mathbf{J}(r) d\mathbf{S} = \int_0^r J(r) 2\pi r dr \quad (23.5.8)$$

je proud protékající přes kruhovou plochu $S(r)$ ohraničenou kružnicí o poloměru r . Pak intenzita magnetického pole ve vzdálenosti r od osy vodiče má velikost

$$H = H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r}, \quad (23.5.9)$$

a magnetická indukce

$$B = B(r) = \frac{\mu I(r)}{2\pi r}, \quad (23.5.10)$$

přičemž μ je *permeabilita* v bodech na poloměru r . Magnetické pole v okolí kruhového přímého vodiče protékaného proudem I viz obr. 23.5.6 je tedy v souladu s předchozími úvahami dáno výrazy [Kot99, s. 183 - 185]:

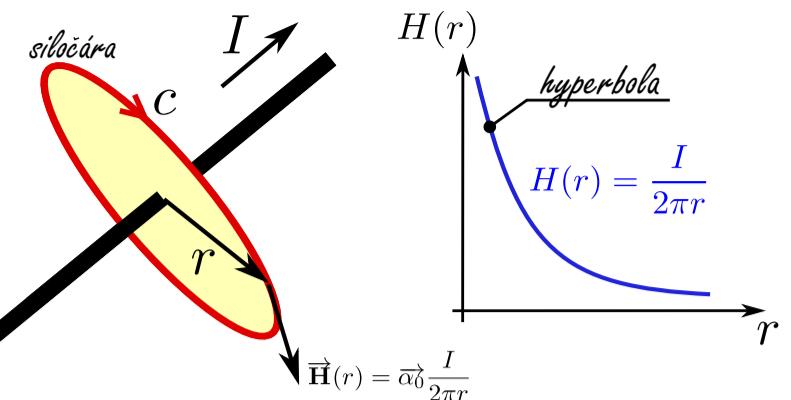
$$H = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}. \quad (23.5.11)$$

Jelikož 1. MR má nenulovou pravou stranu v magnetickém poli obecně není splněna nutná a postačující podmínka, aby magnetické napětí

$$\int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{m_{MN}} \quad [A] \quad (23.5.12)$$

nezáviselo na tvaru integrační cesty l z M do N . Tedy obecně nelze zavést *skalární magnetický potenciál*. Magnetické pole je tedy obecně **vírové (nepotenciální)**.

Všimněme si však speciálních případů, kdy pravá strana 1. MR je nulová a tedy magnetické pole bude **nevírové (magnetostatické)**. K tomu



Obrázek 23.5.6.: Průběh intenzity magnetického pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

dochází buď v oblasti kde

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (23.5.13)$$

tj. takové v němž neexistuje uzavřená křivka c spřažená s nějakým proudem, nebo v takovém bodu, v němž platí

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad (23.5.14)$$

tj. v bodu v němž je $\mathbf{J} = 0$.

Analogicky jako v elektrostatice, lze pak zavést magnetický potenciál φ_m vztahem

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (23.5.15)$$

Jednotkou φ_m je *ampér* [A]. Pro magnetické napětí mezi body M, N platí analogicky

$$U_{MN} = \int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varphi_m(M) - \varphi_m(N), \quad (23.5.16)$$

nezávisle na integrační cestě l .

23.5.1. Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí

Z předchozí kapitoly vyplývá, že intenzitu magnetického pole \mathbf{H} lze stanovit pomocí vztahu $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ tehdy, víme-li předem, že daným bodem prochází silová čára, na níž je intenzita pole konstantní, $H_s = \text{konst.}$ V tomto případě se kříkový integrál změní v pouhý součin intenzity pole a délky silové čáry

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_s \oint_C dl = H_s \cdot l_s \quad (23.5.17)$$

takže lze vypočítat intenzitu pole

$$H_s = \frac{I}{l_s}$$

pro body silové čáry.

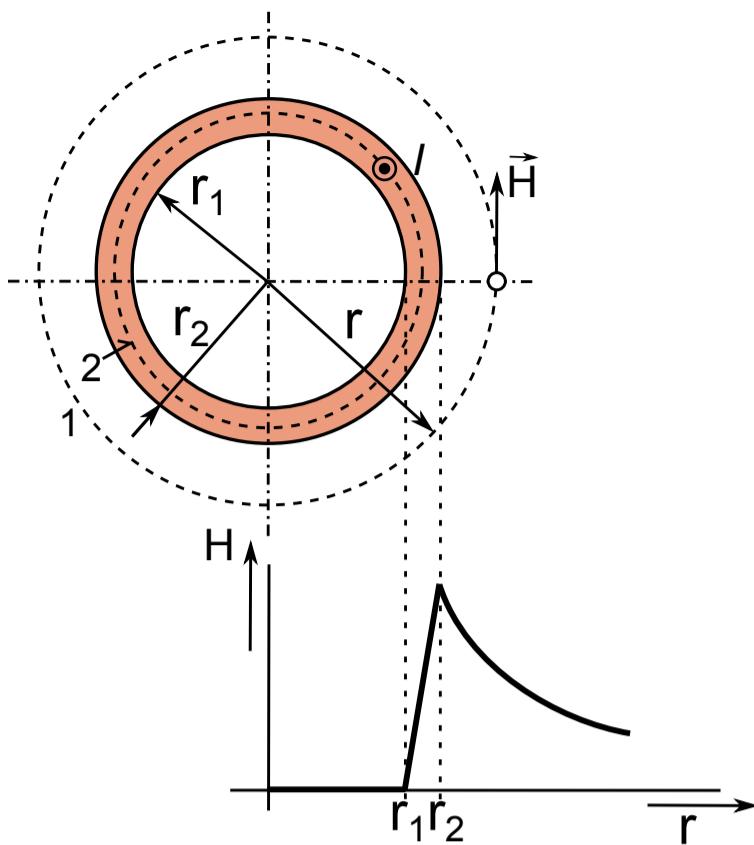
Tohoto postupu lze použít i tam, kde uvedená podmínka není splněna, avšak pole lze vyjádřit superpozicí dílčích polí, z nich každé tuto podmínu splňuje, viz příklad 23.5.2.

Příklad 23.5.1. Stanovte intenzitu magnetického pole $H = f(r)$ dlouhého válcového vodiče podle obr. 23.5.7 při rovnoměrném rozložení proudu I po průřezu.

Vodič s rovnoměrně rozloženým proudem podle obr. 23.5.7 je rotačně souměrný podle své osy a tedy i jeho magnetické pole je souměrné. Silové čáry jsou soustředné kružnice, vektor \mathbf{H} , jenž má směr tečny ke kružnici, je po celé délce kružnice stejně velký. Lze tedy snadno použít integrálního tvaru 1. MR (zákon celkového proudu)

Pro body ležící vně vodiče obepíná kruhová integrační dráha (vedená po silové čáre 1) celý proud vodiče I a platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I \quad (23.5.18)$$



Obrázek 23.5.7.: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého vodivého vodiče protékaného proudem

takže intenzita pole je

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (23.5.19)$$

Ve stěně dutého magnetického vodiče jsou silové čáry rovněž kružnice, neboť magnetické pole je i zde souměrné. Tyto siločáry však obepínají jen část proudu I' vodiče pro oběh siločáry 2 platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I' = \pi(r^2 - r_1^2)J \quad (23.5.20)$$

kde J je hustota proudu ve vodiči

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \quad (23.5.21)$$

Ve stěně vodiče je tedy intenzita pole

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (23.5.22)$$

V dutině vodiče je intenzita rovna nule. Vzhledem k souměrnosti pole by i zde mohlo platit $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r$. Protože dráha s poloměrem $r < r_1$ neobepíná žádný proud, je $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ a tedy musí být $H = 0$.

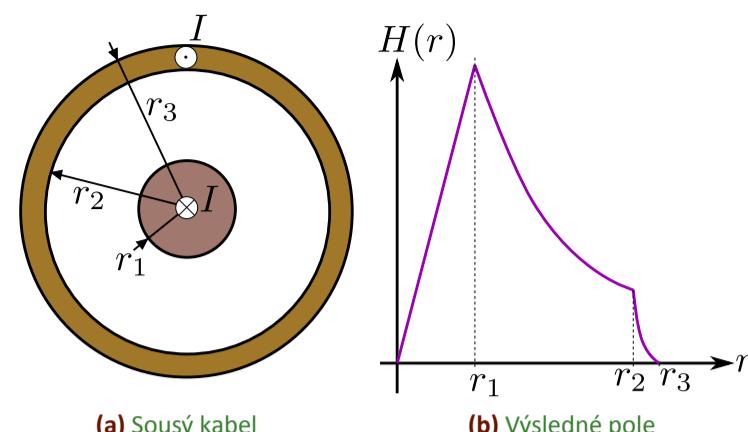
Příklad 23.5.2. Stanovete intenzitu magnetického pole dlouhého přímého sousého kabelu podle obr. 23.5.8a. Středním vodičem (žílou) prochází proud I a týž proud opačného smyslu prochází vnějším vodičem (pláštěm). Proudys jsou rovnoměrně rozloženy po průřezech vodičů. Nakreslete graf průběhu $H = f(r)$ [DM70, s. 92], [Kot99, s. 195].

Řešení: Rovnici 23.5.17 aplikujeme na jednotlivé intervaly osově souměrného stacionárního magnetického pole, přičemž se prakticky jedná o superpozici dvou polí. V oblasti $r < r_2$ se uplatňuje pouze pole vnitřního vodiče (žíly), pro $r > r_2$ přistupuje sousosé pole vnějšího trubkového vodiče.

- Pro oblast $r < r_1$ je vzhedem k

$$dI = J dS$$

$$I(r) = \int_S dI = \int_S J dS = \int_S J \cos \beta dS \\ = \left| \begin{array}{ll} \beta = 0 & H = \text{konst} \\ S = \pi r^2 & dS = 2\pi r dr \end{array} \right| = J \int_0^r 2\pi r dr = J\pi r^2$$



Obrázek 23.5.8.: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého souosého kabelu protékaného proudem: a) náčrt; b) $H = f(r)$

hledané řešení 1. MR dáno

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1 2\pi r = I(r) = J\pi r^2$$

kde celková proudová hustota je

$$J = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

a tedy

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r$$

- Pro oblast $r_2 > r > r_1$ řešíme v podstatě pole vně osamoceného vodivého vodiče $I(r)$ a tedy

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

- Pro $r > r_3$ je magnetické pole vytvářeno celým proudem žily I a příslušnou částí proudu pláště $J\pi(r^2 - r_2^2)$, kde proudová hustota

$$J = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

má opačnou orientaci oproti proudové hustotě žily.

Pak

$$I(r) = I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_3 2\pi r = I(r) \\ H_3 = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

Stejný výsledek dostaneme superpozicí opačně orientovaných polí

$$H_3 = H'_3 - H''_3 = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

Pruběh $H(r)$ je na obr. 23.5.8b.

23.5.2. Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru

Nechť je opět magnetické pole vyvoláno konstantním el. proudem $I = \text{konst}$. Jak vyplývá z předchozí kapitoly, základním vztahem pro toto pole je Ampérův zákon

$$\oint_J \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = I$$

Zvolme za integrační dráhu C obvod malé plošky ΔS , jíž prochází proud $\Delta I = J_n \Delta S$, kde J_n je průměr vektoru hustoty proudu do směru normály ΔS (předpokládáme, že ploška ΔS je dostatečně malá,

aby se dalo počítat s konstantní hustotou proudu v celém jejím rozsahu) [Trn72, s. 13]. Pro zvolený případ platí

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \Delta S \rightarrow \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (23.5.23)$$

Pro $\Delta S \rightarrow 0$ zavedeme označení

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (23.5.24)$$

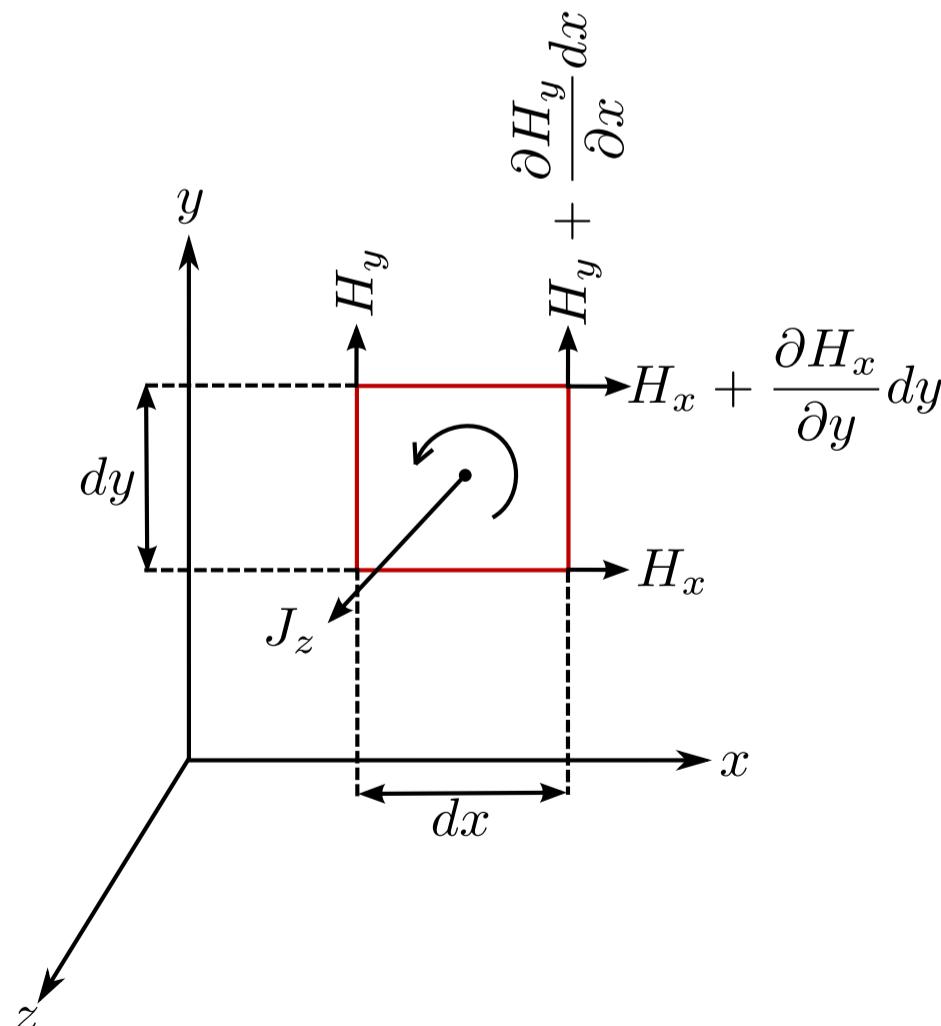
Rovnice 23.5.24 říká, že *rotace vektoru \mathbf{H}* , ($\text{rot } \vec{H}$), jehož průmět do určitého směru je roven průmětu vektoru hustoty proudu do tohoto směru. Z uvedených vztahů je patrný fyzikální význam rotace vektoru \mathbf{H} . Je to vektor, jehož velikost je rovna oběhovému magnetickému napětí po dráze v rovině kolmé k vektoru hustoty proudu, vztaženém k ploše obepínané oběhovou drahou (v nehomogenní poli to platí pro případ, že se plocha dráhy blíží k nule).

Při použití pravoúhlé soustavy kartézských souřadnic x , y a z jsou průměty vektoru $\text{rot } \vec{H}$ do jednotlivých os

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = J_x, \quad \text{rot}_y \mathbf{H} = J_y, \quad \text{rot}_z \mathbf{H} = J_z \quad (23.5.25)$$

Průmět $\text{rot}_x \mathbf{H}$ je dán oběhovým magnetickým napětím po obvodu plošky $dydz$ a platí

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{1}{dydz} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{dydz} \left[H_y dy + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right) dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{dydz} \left[\left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \right) dy - H_z dz \right] \\ &= \frac{1}{dydz} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} dydz - \frac{\partial H_y}{\partial z} dydz \right] = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z \end{aligned} \quad (23.5.26)$$



Obrázek 23.5.9.: K odvození pojmu $\text{rot}_z \mathbf{H}$

tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \\ \text{rot}_y \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \\ \text{rot}_z \mathbf{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \end{aligned} \quad (23.5.27)$$

Pro pravoúhlé souřadnice x , y , z můžeme tedy vztah $\text{rot } \vec{H} = \mathbf{J}$ rozepsat na tvar

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{i} \text{rot}_x \mathbf{H} + \mathbf{j} \text{rot}_y \mathbf{H} + \mathbf{k} \text{rot}_z \mathbf{H} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{i} J_x + \mathbf{j} J_y + \mathbf{k} J_z = \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (23.5.28)$$

Rotaci vektoru $\text{rot } \vec{H}$ můžeme též symbolicky vyjádřit vektorovým součinem Hamiltonova operátoru a vektoru \mathbf{H}

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z) \quad (23.5.29)$$

nebo také determinantu

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (23.5.30)$$

cylindrických souřadnic r , φ , z :

$$\text{rot}_r \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r \quad (23.5.31)$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{H} = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi$$

$$\text{rot}_z \mathbf{H} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = J_z$$

sférických souřadnic r , φ , ϑ

$$\text{rot}_r \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = J_r \quad (23.5.31)$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{H} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right] = J_\varphi$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi \sin \vartheta) \right] = J_\vartheta$$

Podobně jako v elektrickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{D} d\mathbf{s} = Q$ vztahem $\text{div } \vec{D} = \rho$, tak i v magnetickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0$ vztahem $\text{div } \vec{D} = 0$, nebo též v kartézských souřadnicích x , y a z jako

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

23.5.3. Rovnice pro magnetický potenciál

V regulárních bodech lineárního homogenního izotropního magnetika platí pro φ_m Laplaceova rovnice

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (23.5.33)$$

Důkaz plyne z rovnice $\text{div } \vec{B} = 0$ a rovnice $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\text{div } \vec{B} = \text{div} \mu \vec{H} = \text{div} \mu (-\text{grad} \varphi_m).$$

Pro $\mu = \text{konst}$ dostáváme $\text{div grad} \varphi_m = 0$, což je rovnice 23.5.33.

Na rozhraní mezi dvěma magneticky různými prostředími neplatí Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru a tedy ani Laplaceova rovnice 23.5.33. Podmínky pro \mathbf{H} a \mathbf{B} na rozhraní vyjádříme pomocí skalárního

magnetického potenciálu

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (23.5.34)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (23.5.35)$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ jsou derivace ve směru normály k rozhraní.

23.5.3.1. Vektorový magnetický potenciál

V elektrostatice jsme pro usnadnění mnohých problémů zavedli skalární elektrický potenciál - lze jej zavést vždy, neboť elektrostatické pole je vždy potenciální. Magnetické pole je však obecně vírové. Lze jej popsat skalárním potenciálem jen ve speciálních případech, tj. jestliže je polem potenciálním. Obecně je však zavedení skalárního potenciálu nepřípustné. Lze i pak zavést nějakou veličinu (analogickou skálárnímu potenciálu), s níž by se pracovalo snáze, než přímo s vektory pole?

Dříve než definujeme vektorový magnetický potenciál, zopakujme zavedení skalárního potenciálu v elektrostatice. Vyjdeme z 2. MR a z rovnice známé z vektorové analýzy:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_m = 0.$$

V magnetickém poli vyjdeme ze 4. MR a z jiné identity pro vektorovou funkci \mathbf{A} , známe z vektorové analýzy:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

odtud

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (23.5.36)$$

References

- [DM70] M. Dufek and M. Mikulec. *Příklady z teoretické elektrotechniky*. Ed. by K. František. SNTL, 1970, p. 380 (cit. on p. 117).
- [Kot99] J. Kotlan. *Základy teoretické elektrotechniky*. Ed. by F. elektrotechnická. ZČU Plzeň, 1999, p. 258. 258 pp. (cit. on pp. 115–117).
- [Mayo01] D. Mayer. *Teorie elektromagnetického pole*. Ed. by Z. Benešová. Západočeská univerzita v Plzni, 2001. 355 pp. (cit. on pp. 110, 115).
- [Trn72] Z. Trnka. *Teoretická elektrotechnika*. Nakladatelství technické literatury Praha, 1972, p. 410. 410 pp. (cit. on p. 118).

Část IX.

Signály a soustavy

24. Číslicové signály - posloupnosti

Obsah

24.1. Základní typy posloupností	123
24.2. Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	124
24.3. Základní operace s posloupností	124

Číslicové signály (matematicky posloupnosti čísel) [USo2] jsou v literatuře označovány symboly x_n , $x(n)$, nebo $x[nT]$, kde n je celé číslo a označuje pořadí prvku v posloupnosti¹. Poslední uvedený symbol $x[nT]$ zdůrazňuje souvislost číslicového signálu se signálem spojitým v čase(analogovým signálem), ze kterého vznikl vzorkováním a kvantováním. Symbol T označuje použitý vzorkovací krok. Jeho převrácená hodnota je rovna vzorkovací frekvenci $f_s = \frac{1}{T}$.

24.1. Základní typy posloupností

- Jednotkový impuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (24.1.1)$$

- Jednotkový skok

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (24.1.2)$$

- Reálná exponenciální posloupnost

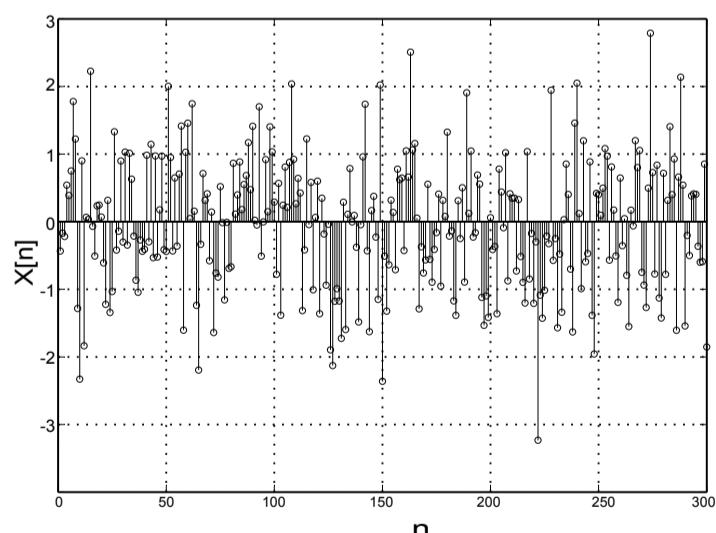
$$x[n] = A\alpha^n, n \geq 0, \quad (24.1.3)$$

- Chirp signál

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi f_{max}n^2}{(N-1)f_s}\right), \quad (24.1.4)$$

kde f_{max} je maximální požadovaný kmitočet, který musí být menší než polovina vzorkovacího kmitočtu $f_{max} < \frac{f_s}{2}$ a N je celkový počet vzorků.

- Pseudonáhodná posloupnost je posloupnost, která nahrazuje ideální bílý šum. Tuto posloupnost lze generovat různými algoritmy, které zaručují velmi dlouhou periodicitu generované posloupnosti. Má-li tato posloupnost approximovat bílý šum, musí co nejlépe splňovat požadavek nekorelovanosti sousedních vzorků (tedy konstantní spektrální výkonové hustoty) a nulové střední hodnoty. Často je požadován i jednotkový rozptyl.



Obrázek 24.1.1.: Příklad pseudonáhodné posloupnosti generované pomocí funkce `randn(1, 300)` v MATLABu

¹Takto zavedené označení je nejednoznačné, neboť nerozlišuje mezi celou posloupností a jejím jediným prvkem. Posloupnost by měla být správně označena např. symbolem $\{x[n]\}$, zatímco symbol $x[n]$ by měl být vyhrazen pro její jeden prvek. Nicméně uvedené značení je všeobecně používáno.

24.2. Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu

Příklad 24.2.1. Generujte signál s lineárně rostoucím kmitočtem "chirp signál", maximální kmitočet $f_{max} = 20\text{Hz}$, amplituda $A = 1$, vzorkovaný kmitočtem $f_s = 64\text{Hz}$.

```

1 % CHIRP SIGNAL
2 % =====
3 clear all; close all;
4 % generovani universalniho vektoru
5 N = 256; % pocet prvků
6 fs = 64; % vzorkovaci kmitocet v Hz
7 fmax = 20; % maximalni kmitocet v Hz
8 Amax = 1; % amplituda signalu
9 A2 = 0.5; % amplituda signalu
10 % casovy vektor s N prvky
11 t = linspace(0, (N-1)*(1/fs), N);
12 % generovani signalu s linearne rostoucim kmitocetem
13 kosinus = chirp(t,0,1,20);
14 %vykresleni
15 figure (1)
16 stem(1:N, kosinus(1:N), 'k'); % diskretni forma
17 plot(1:N, kosinus(1:N), 'k'); % spojita forma
18 xlabel('n')
19 ylabel('X[n]')
20 title(['Chirp signal: fmax=' num2str(fmax), ' Hz, fs='
21 , num2str(fs), ' Hz'])
22 grid on;
```

Výpis 24.1: gen_chirp_signal.m. Generuje chirp signál

24.3. Základní operace s posloupností

V dalším textu budeme používat tři základní lineární operace [USo2] zobrazené na 24.3.1:

- součin signálu $x[n]$ a reálné konstanty b :

$$w[n] = bx[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tato operace je v praxi realizována násobičkou a je zdrojem numerických chyb, tedy kvantizačního šumu, který produkuje číslicová zařízení.

- součet signálu $x[n]$ a signálu $y[n]$:

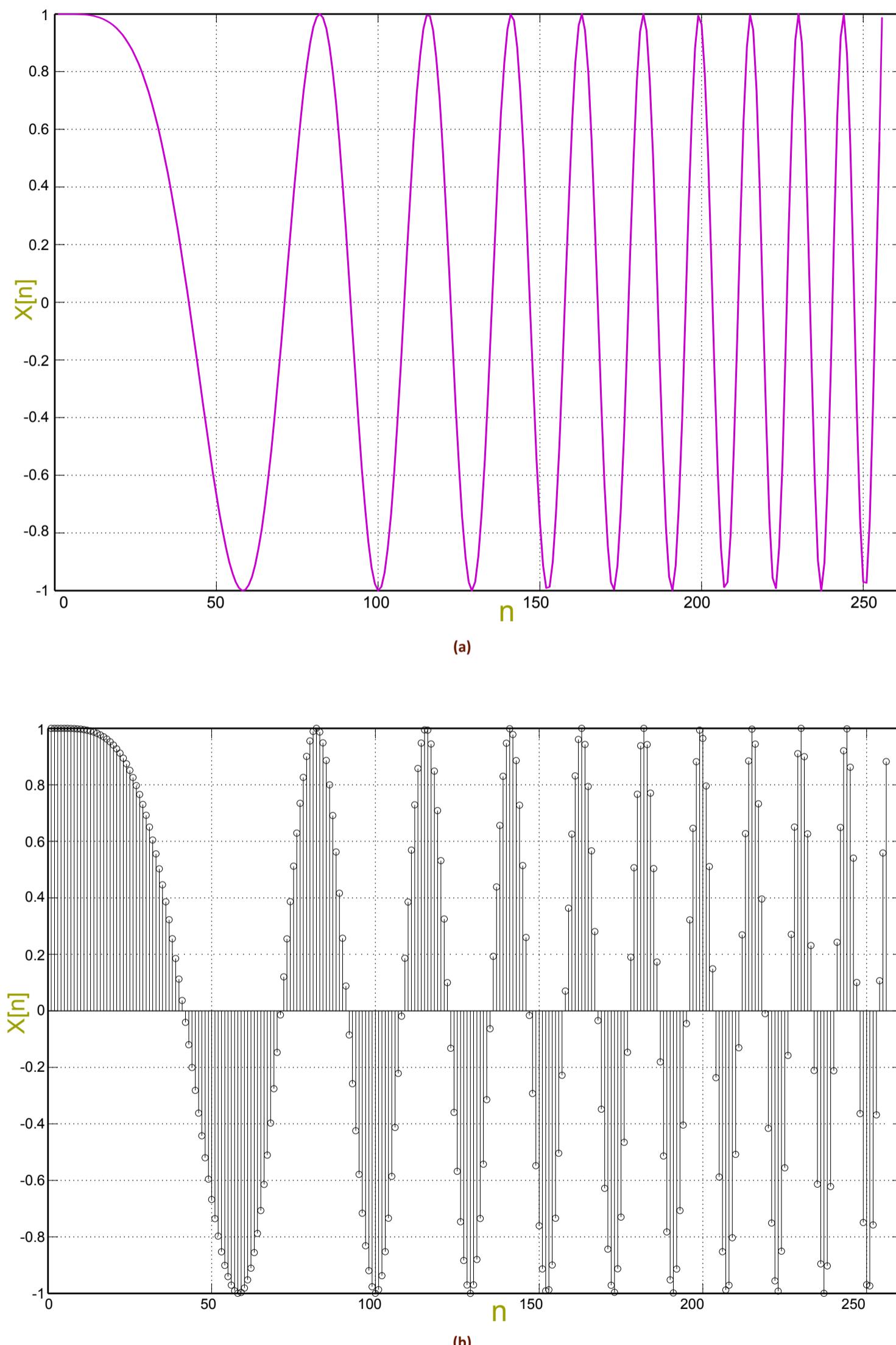
$$v[n] = x[n] + y[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto operaci provádí sčítáčka. Při neošetření může tato operace generovat hrubé chyby.

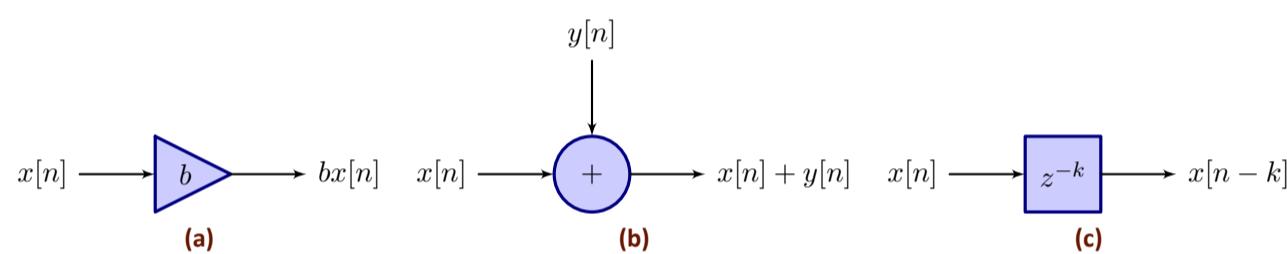
- zpoždění signálu $x[n]$ o k vzorkovacích kroků:

$$y[n] = x[n - k], n = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, M$$

Hodnoty $x[-k], k = 1, 2, \dots, M$ se nazývají počáteční podmínky. V digitálních implementacích provádíme operaci zpoždění paměťového registru pro každou jednotku požadovaného zpoždění z^{-1} .



Obrázek 24.2.1.: Chirp signál: Signál s lineárně rostoucím kmitočtem s maximální frekvencí 20 Hz vzorkovaný 254 Hz. Grafická reprezentace číslicových signálů bývá buď ve spojité formě (a) nebo v diskrétní formě (b)



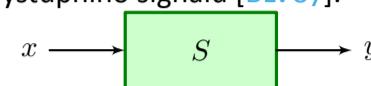
Obrázek 24.3.1.: Symboly základních operací

25. Vlastnosti a popis lineárních systémů

Obsah

25.1. Linearita, časová invariance a kauzalita	127
25.1.1. Konvoluce v diskrétních a spojitéch systémech	128
25.2. Popis spojitéch a diskrétních systémů, přenosová funkce	129
25.2.1. Spojité systémy	129

Na soustavu obvodů můžeme nahlížet jako na seskupení (množinu) navzájem souvisejících součástí, ke kterému je určen vstupní signál x , zvaný buzení a výstupní signál y , označovaný jako odezva. Z hlediska vlastností jde o systém představující "černou skříňku", jejíž vlastnosti můžeme identifikovat analýzou vstupního a výstupního signálu [BLV07].



Obrázek 25.0.1.: Symbol soustavy s jedním vstupem a jedním výstupem

- Systémy se spojitým časem (na vstupu i výstupu pracují se spojitémi signály) - relace mezi vstupem a výstupem můžeme symbolicky zapsat:

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\} \quad (25.0.1)$$

kde S je obecný popis systémové funkce, přiřazující vstupní veličině $x(t)$ odezvu $y(t)$. Z rovnice je zřejmé, že u spojité (analogové) soustavy výstupní signál závisí na všech hodnotách vstupního signálu, nikoli jen na některých jeho hodnotách v určitých časových okamžicích.

- Systémy pracující s diskrétním časem lze obdobně symbolicky vyjádřit relací vstup/výstup ve tvaru:

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} \quad (25.0.2)$$

kde \mathcal{S} je tentokrát systémový operátor přiřazení posloupnosti $x[n] \rightarrow y[n]$. U diskrétních systémů se zpracovávají posloupnosti hodnot signálů, získaných vzorkováním spojitého signálu

25.1. Linearita, časová invariance a kauzalita

Linearita systémů ve spojité diskrétní oblasti má velký význam, neboť dovoluje využívat princip superpozice k zjednodušování úloh jejich analýzy a syntézy.

Předpokládejme, že na vstupu lineárního diskrétního systému jsou přivedeny dva signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$. Účinky obou vstupních signálů na výstupní signál lze zkoumat odděleně a podle principu superpozice je na výstupu sečist. Označme dílčí odezvy $y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$ a $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$, potom je

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} \quad (25.1.1)$$

Analogický vztah platí i pro lineární spojité systém, tedy

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \mathcal{S}\{x_1(t) + x_2(t)\} \quad (25.1.2)$$

Jedná-li se o systém časově invariantní, jsou události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí), nikoliv na každém časovém okamžiku samostatně. Systém je časově invariantní, jestliže časový posun ve vstupní signálu vede ke stejnemu posunu výstupního signálu. Odezva diskrétního systému na posunutý vstupní signál $x[n-m]$ je pak určen vztahem

$$y[n-m] = \mathcal{S}\{x[n-m]\} \quad (25.1.3)$$

a obdobně pro odezvu spojité soustavy na posunutý (zpožděný) vstupní signál $x(t-\tau)$ platí analogicky rovnice

$$y(t-\tau) = \mathcal{S}\{x(t-\tau)\}. \quad (25.1.4)$$

Kauzální, příčinný systém je systém, u kterého výstupní signál závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu.

25.1.1. Konvoluce v diskrétních a spojitéch systémech

[BLVO7] Významnou charakteristikou lineárních časově invariantních systémů LTI je **impulzní odezva**. Její znalost umožňuje stanovit odezvu systému na obecný signál, lze ji využít i při syntéze systému.

$$h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}. \quad (25.1.5)$$

Mějme diskrétní LTI systém, na jehož vstup je přiveden *jednotkový diskrétní impulz*¹. Jednotkový impulz je posloupnost $\delta[n] = 0$ pro všechna n s výjimkou $\delta[0] = 1$. Odezva systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ se nazývá impulzní odezva a platí

$$h[n - m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}. \quad (25.1.6)$$

Vzhledem časové invariantnosti, posunutému jednotkovému impulu odpovídá posunutá impulzní odezva, tedy

$$1[n] = \sum_{m=0}^n [n - m] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots \quad (25.1.7)$$

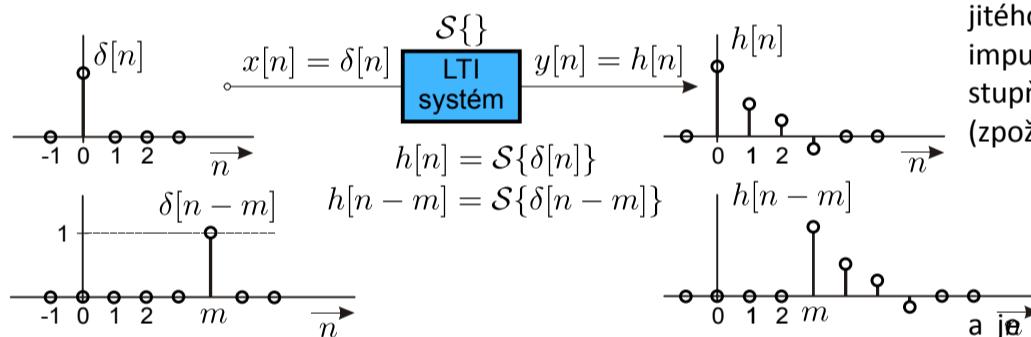
Jednotkový skok $1[n]$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat součtem

$$s[n] = \mathcal{S}\{1[n]\} = S\left\{\sum_{m=0}^n [n - m]\right\} = \sum_{m=0}^n S\{\delta[n - m]\}. \quad (25.1.8)$$

Odezva systému na jednotkový skok $1[n]$ se nazývá **přechodová odezva** $s[n]$ a platí

$$s[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n - m]\right\} = \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}. \quad (25.1.9)$$

Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$, resp. na posunutý impulz $\delta[n - m]$, bude $h[n]$ resp. $h[n - m]$ - viz obr. 25.1.1.



Obrázek 25.1.1.: Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ a posunutý impulz $\delta[n - m]$

Postupná úprava rovnice (25.1.9) je umožněna díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m]. \quad (25.1.10)$$

Poznamenejme, že formou (25.1.10) lze zapsat každý diskrétní signál.

Na obr. 25.1.2 znázorněna souvislost mezi posloupností jedniček a diskrétním signálem. *Posloupnost jedniček tvoří bázi pro diskrétní signály*. Každá komponenta diskrétního signálu je vyjádřena součinem $x[m]\delta[n - m]$. V uvedeném příkladě jde o posloupnost příslušnou jednotkovému skoku

$$1[n] = \sum_{m=0}^{15} \delta[n - m] \quad (25.1.11)$$

a odpovídající posloupnost konečného signálu

$$x[n] = \sum_{m=0}^{15} x[m]\delta[n - m]. \quad (25.1.12)$$

¹Nesmíme zaměňovat s Diracovým (také jednotkovým) impulzem.

Princip superpozice dovoluje získat odezvu systému jako sumu odezev na jednotlivé dílčí součásti vstupního signálu, které v rovnici (25.1.10) tvoří vážené jednotlivé impulzy, ze kterých je signál složen

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{S}\{\delta[n - m]\}. \quad (25.1.13)$$

Protože platí (25.1.5) a v důsledku časové invariantnosti vyplývá z rovnice 25.1.13 **konvoluciální suma**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n - m]x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k]. \quad (25.1.14)$$

Uvedli jsme, že u kauzálního systému závisí výstupní signál $y[n]$ pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $x[n], x[n - 1], x[n - 2], \dots$, takže v konvoluciální sumě 25.1.14

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n - k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n - k] \quad (25.1.15)$$

musíme položit všechny členy impulzní odezvy $h[k] = 0$ pro $k < 0$. Konvoluciální suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má pak tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n - k]. \quad (25.1.16)$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n < 0$ a $x[n] \neq 0, y[n] \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n - k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n - k]. \quad (25.1.17)$$

Podobně můžeme postupovat i v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém **konvoluciální integrál**. Vraťme se k výrazu 25.1.10 kterým jsme vyjádřili libovolný diskrétní signál. Pro případ spojitého signálu vytvořme analogickou formu zápisu využívající jednotkový impuls. Průběh obecného spojitého lze podle obr. 25.1.3 approximovat stupňovitým průběhem, který můžeme vyjádřit jako sumu posunutých (zpozděných) impulsů. Výchozí approximující impuls lze vyjádřit vztahem

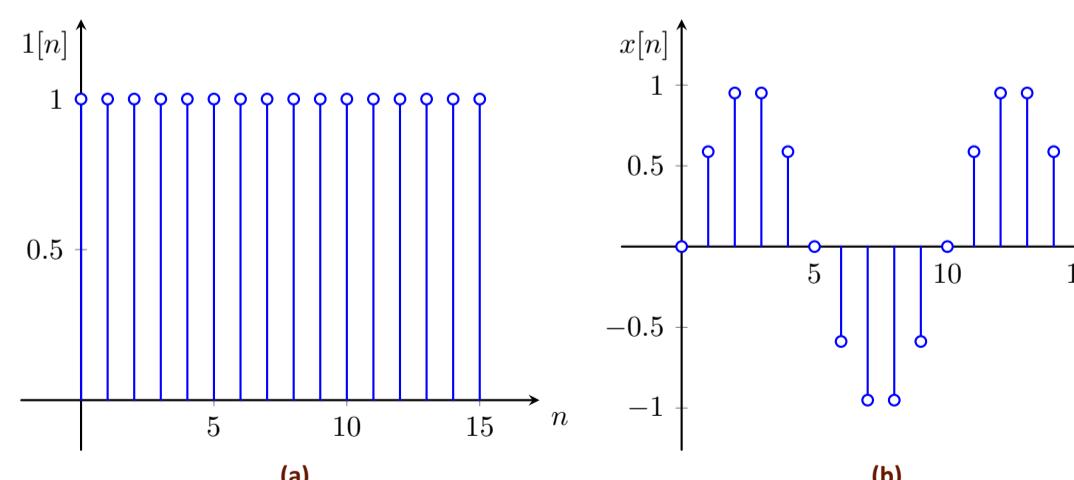
$$\delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (25.1.18)$$

a je znázorněn na obr. 25.1.3. *Jednotkový (Diracův) impuls* má jednotkovou plochu. Výrazem

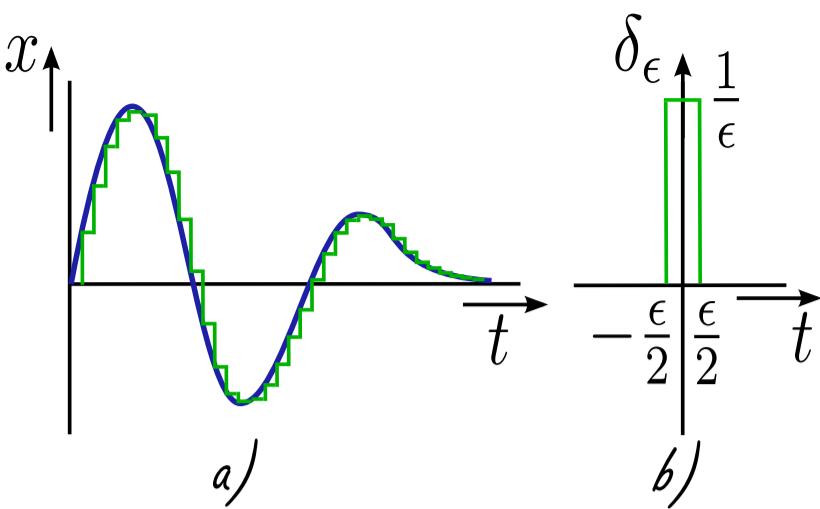
$$\delta_{\epsilon}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t). \quad (25.1.19)$$

Aproximaci spojitého průběhu $x(t)$ impulsy 25.1.18 lze vyjádřit rovnicí

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon)\delta_{\epsilon}(t - m\epsilon). \quad (25.1.20)$$



Obrázek 25.1.2.: Posloupnost jednotkového skoku $1[n]$ a signálu $x[n]$



Obrázek 25.1.3.: a) Aproximace spojitého průběhu signálu, b) K odvození jednotkové impulsní funkce

Zmenšování šířky impulsů $\epsilon \rightarrow 0$ se chyba aproximace zmenšuje a výraz přejde v limitu

$$x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon) \epsilon. \quad (25.1.21)$$

V limitě kdy $\epsilon \rightarrow 0$, můžeme sumu nahradit integrálem, dále součin $m\epsilon$ integrační proměnnou τ a ϵ jejím diferenciálem. Obdržíme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (25.1.22)$$

Vztahem 25.1.22 jsme spojitý průběh signálu vyjádřili jako sumu nekonečného počtu posunutých jednotkových impulsů váženou jeho okamžitými hodnotami. Předpokládejme dále, že na vstup lineárního časově invariantního spojitého systému je převeden jednotkový (Diracův) impuls a systém vytvoří odezvu $h(t)$. V případě obecného vstupního spojitého signálu $x(t)$ approximovaného vztahem 25.1.22, bude odezva analogového systému

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (25.1.23)$$

Uvedený integrál nazýváme **konvolucí** a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (25.1.24)$$

Funkce $h(t)$ představuje *impulsní odezvu*. Jedná se o výstupní signál systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t). \quad (25.1.25)$$

Z důvodu *kauzality*, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \text{ pro } |t| \geq 0, \quad (25.1.26)$$

$$h(t) = 0 \text{ pro } |t| < 0. \quad (25.1.27)$$

Potom můžeme konvoluční integrál 25.1.23 zapsat ve tvarem

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (25.1.28)$$

25.2. Popis spojitéch a diskrétních systémů, přenosová funkce

25.2.1. Spojité systémy

Lineární časově invariantní (LTI) spojité systém je obecně popsán soustavou integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, kterou lze postupným derivováním změnit na soustavu diferenciálních rovnic. Předpokládejme budící (nezávislou) veličinu $x(t)$ a odezvu (závislou)

výstupní veličinu $y(t)$, pak eliminací ostatních proměnných bude soustava popsána jedinou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (25.2.1)$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n a b_0, b_1, \dots, b_m jsou konstanty charakterizující lineární systém. Obecné řešení $y(t)$ rovnice 25.2.1 se sestává ze dvou částí, z řešení *homogenní rovnice* a *partikulárního řešení*. K řešení je třeba znát počáteční podmínky pro $y(t)$ a jeho derivace ve výchozím okamžiku.

S použitím *Laplaceovy transformace* při nulových počátečních podmínkách má rovnice (25.2.1) tvar

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j X(p), \quad (25.2.2)$$

kde $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ a $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ jsou Laplaceovy obrazy vstupní a výstupní veličiny, p je Laplaceův operátor derivace a také komplexní kmitočet $p = \sigma + j\omega$. Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ ku obrazu vstupní veličiny $x(p)$, při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (25.2.3)$$

Vzhledem k rovnici (25.2.2) je $H(p)$ racionálně lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{j=1}^m (p - p_{0j})}{\prod_{i=1}^n (p - p_{\infty i})} \quad (25.2.4)$$

kde p_{0j} jsou kořeny polynomu čitatele a představují **nulové body** a kořeny jmenovatele $p_{\infty i}$ jsou **póly** přenosové funkce, $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$ je násobná konstanta.

Kmitočtové charakteristiky získáme z přenosové funkce substitucí

$$p = j\omega, \quad (25.2.5)$$

ve které ω je úhlový kmitočet. Platí tedy

$$H(p)|_{p=j\omega} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = M(\omega) e^{j\Phi(\omega)}, \quad (25.2.6)$$

kde $M(\omega)$ je **modulová charakteristika** a $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$ se nazývá **fázová charakteristika**. Skupinové zpoždění je definováno jako záporně vzatá derivace fázové charakteristiky podle kmitočtu

$$\tau(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\arg H(j\omega)}{d\omega}. \quad (25.2.7)$$

V předchozí kapitole jsme ukázali, že *relace vstup/výstup LTI systému* souvisí prostřednictvím *konvoluce*

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t). \quad (25.2.8)$$

Přenosová funkce je Laplaceova transformace impulzní odezvy $h(t)$

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt, \quad (25.2.9)$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)X(p). \quad (25.2.10)$$

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako integrál impulzní odezvy

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad (25.2.11)$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}. \quad (25.2.12)$$

Algoritmus výpočtu impulzní odezvy z přenosové funkce je založen na výpočtu reziduí a rozkladu racionálně lomené funkce $H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}$ na částečné zlomky. Pokud má tato funkce jednoduché póly, rozklad má tvar².

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{k_\mu}{p - p_{\infty_\mu}} = \frac{k_1}{p - p_{\infty_1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty_2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty_n}} \quad (25.2.13)$$

kde k_μ se nazývají rezidua v pólech p_{∞_μ}) a platí

$$k_\mu = \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} (p - p_{\infty_\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (25.2.14)$$

$$= Q(p_{\infty_\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty_\mu}}} = Q(p_{\infty_\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty_\mu})} \quad (25.2.15)$$

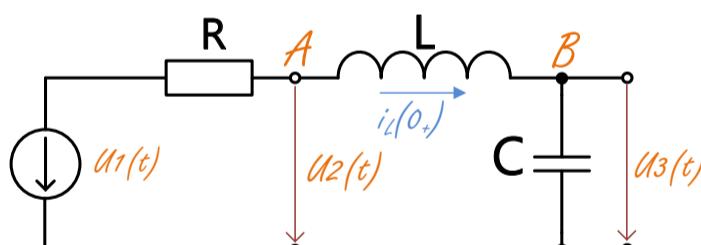
Impulzní odezva je pak dáná vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \sum_{\mu=1}^n k_\mu e^{p_{\infty_\mu} t} \quad (25.2.16)$$

Póly jsou obecně komplexní $p_{\infty_\mu} = \alpha_\mu + j\beta_\mu$, nebo reálné $p_{\infty_\mu} = \alpha_\mu$. Jsou to kořeny rovnice $N(p) = 0$. Rovnice 25.2.16 je důležitá i proto, že z ní poznáme, zda analogová soustava je stabilní. Je patrné, že soustava bude stabilní, jestliže bude $\Re\{p_{\infty_\mu}\} = \alpha_\mu < 0$, tj. leží-li kořeny p_{∞_μ} v otevřené levé polovině komplexní roviny $p_{\infty_\mu} = \sigma + j\omega$. Imaginární osa $j\omega$ je mezí stability, pravá polovina je oblastí nestability. Polynom, který má kořeny v levé otevřené polovině se označuje **Hurwitzův polynom**.

Příklad 25.2.1. Lineární spojitý systém je dán zapojením dle obrázku. Určete:

1. diferenciální rovnici pro odezvu $u_2(t)$, je-li na vstupu buzen napětím $u_1(t)$,
2. přenos napětí $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$,
3. impulsní odezvu $h(t)$.



Obrázek 25.2.1.: Zapojení obvodu RLC.

Řešení:

Pro zapojení dle obrázku získáme metodou uzlových napětí integrodiferenciální rovnice pro uzly A a B:

$$A : \frac{u_3(t) - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_3(\tau) - u_2(\tau)) d\tau + i_L(0+) = 0 \quad (25.2.17)$$

$$B : \frac{1}{L} \int_0^t (u_2(\tau) - u_3(\tau)) d\tau + C \frac{du_c}{dt} - i_L(0+) = 0$$

Derivováním a eliminací $u_3(t)$ z původních rovnic dostaneme pro odezvu $u_2(t)$ diferenciální rovnici II. řádu

$$\frac{d}{dt}(B) : u_2(t) - u_3(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow u_3(t) = u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2}$$

²Násobnost kořenů $N(p)$ neuvažujeme, protože se v LTI obvodech neuplatňuje

$$\frac{d}{dt}(B) \rightarrow (A):$$

$$\frac{u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (LC \frac{d^2 u_2(\tau)}{dt^2}) d\tau + i_L(0+) = 0$$

$$u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t) + RC \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right]_0^t + Ri_L(0+) = 0$$

Při nulových počátečních podmínkách: $\frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} = 0$, $i_L(0+) = 0$ dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (25.2.18)$$

V Laplaceově transformaci platí:

$$\mathcal{L} \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right] = pU_2(p) - u_2(0)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} \right] = p^2 U_2(p) - pu_2(0) - u_2(0), \text{ kde } u_2(0) = \frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0}$$

při nulových počátečních podmínkách

$$p^2 LCU_2(p) + pRCU_2(p) + U_2(p) = U_1(p) \quad (25.2.19)$$

Odtud vyplývá **přenosová funkce** $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (25.2.20)$$

K nalezení **impulsní odezvy** nejprve určíme póly přenosové funkce řešením rovnice $N(p) = 0$

$$p_{\infty_{12}} = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (25.2.21)$$

přenosovou funkci pak upravíme do tvaru

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_{\infty_1}) \cdot (p - p_{\infty_2})}, \quad K = \frac{1}{LC} \quad (25.2.22)$$

- Uvažujeme-li jednoduché póly a bude-li $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom z rov. 25.2.21 vyplývají dva reálné různé póly. Přenosovou funkci tedy můžeme zapsat obecným tvarem:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a_1} + \frac{k_2}{p + a_2} \quad (25.2.23)$$

kde $p_{\infty_1} = -a_1$, $p_{\infty_2} = -a_2$, Rezidua $k_1 = \frac{K}{a_2 - a_1}$, $k_2 = \frac{K}{a_1 - a_2}$ určíme z rov. 25.2.14. Impulsní odezvu pak vypočteme užitím rov. 25.2.16.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \frac{K}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{K}{a_1 - a_2} e^{-a_2 t} \quad (25.2.24)$$

- Když bude $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, obdržíme dvojici komplexně sdružených pólů a přenosovou funkci může obecně zapsat takto:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a - jb} + \frac{k_2}{p + a + jb} \quad (25.2.25)$$

kde $p_{\infty_1} = -a + jb$, $p_{\infty_2} = -a - jb$. Rezidua v pólech jsou dány výrazy $k_1 = -\frac{jk}{2b}$, $k_2 = \frac{jk}{2b}$. Impulsní odezvu opět určíme užitím rov. 25.2.16.

$$h(t) = \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-e^{jb t} + e^{-jb t})]$$

$$= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot \left(\frac{-\cos(bt) - j\sin(bt)}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{\cos(bt) - j\sin(bt)}{\sqrt{1 + b^2}} \right)]$$

$$= \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) \quad (25.2.26)$$

Pro stavební prvky: $R = 1k\Omega$, $L = 11.5mH$, $C = 22.5nF$ ukazuje výpis m-file *SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m* symbolický způsob řešení operátorových obvodových rovnic pomocí MATLABu. Jde o typ **dolní propust**, jehož přenosová funkce má tvar:

$$H(p) = \frac{3.9506 \cdot 10^9}{p^2 + 8.8889 \cdot 10^4 p + 3.9506 \cdot 10^9}.$$

```

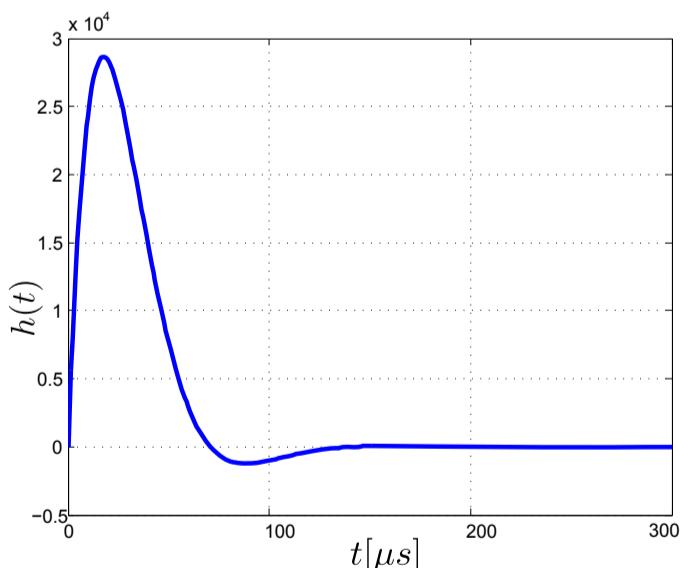
1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 15
3 % Vyresete symbolicky soustavu operatorovych obvodovych
4 % rovnic a vyjadrete prenosovu funkci
5 %
6 f1 = '(U3-U1)/R+U(U3-U2)/(p*L)';
7 f2 = 'p*C*U2+(U2-U3)/(p*L)';
8 % symbolické reseni rovnic
9 rU = solve(f1, f2, 'U2, U3');
10 % vyber pole U2, resp. U1 z datove struktury rU
11 rU.U2 % uzlove napeti U2
12 rU.U3 % uzlove napeti U3
13 % Prenosova funkce
14 P = rU.U2/'U1'
15 % symbolicka substituce
16 nP = subs(P, {'R', 'C', 'L'}, {1e3, 22.5e-9, 11.25e-3})
17 % nastaveni formatu zobrazeni cisel napr: 3.1416e+000
18 format short e
19 % citatel(numerator) a jmenovatel(denominator)
20 % symbolického výrazu
21 [num, den] = numden(nP) % num/den
22 % symbolické vyjadreni polynomu prevede na vektorove
23 % vyjadreni - A(1): první prvek vektoru (koeficient u
24 % nejvyssi mocniny polynomu)
25 N = sym2poly(den)
26 roots(N)
27 % H(p)=Q(p)/N(p)
28 % koeficient u nejvyssi mocniny ve jmenovateli bude 1
29 Q = sym2poly(num)/N(1)
30 N = N/N(1)

```

Výpis 25.1: *SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m*

Impulzní charakteristiku obdržíme dosazením do vztahu 25.2.26

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) = 8.8890 \cdot 10^4 e^{-4.4444 \cdot 10^4 t} \sin(4.4444 \cdot 10^4 t).$$



Obrázek 25.2.2.: Impulzní charakteristika

Z hlediska analýzy obvodů v kmitočtové oblasti je výhodné sestavit obvodové rovnice (metodami uzlových napětí a smyčkových proudů) přímo v operátorovém tvaru. Kirchhoffovy zákony pro uzavřenou smyčku a proudu do uzlu pak mají tvar

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

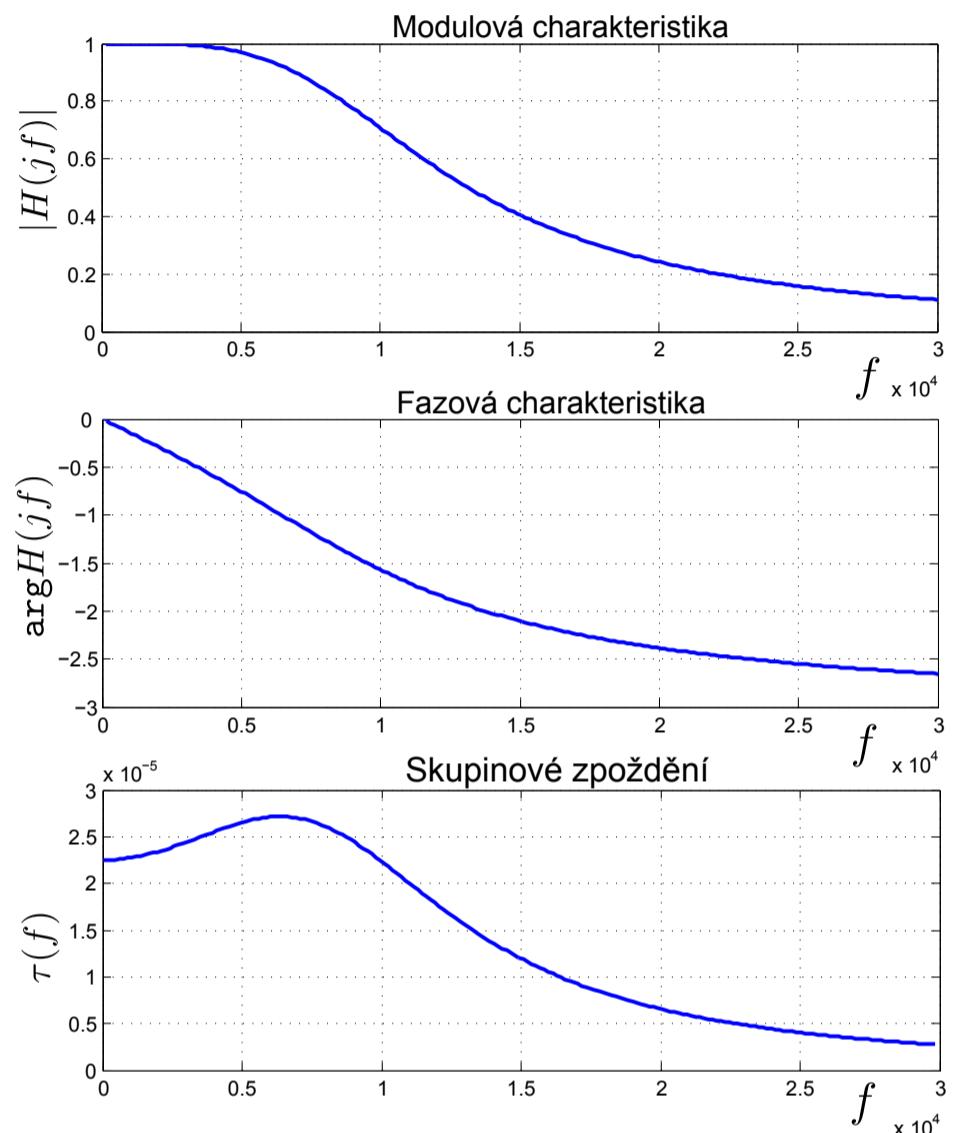
Metodou uzlových napětí pro zapojení na obr. 25.2.1 obdržíme rovnice

$$\frac{U_3(p) - U_1(p)}{R} + \frac{U_3(p) - U_2(p)}{pL} = 0 \quad (25.2.27)$$

$$pCU_2(p) + \frac{U_2(p) - U_3(p)}{pL} = 0 \quad (25.2.28)$$

Na rozdíl od 25.2.17 jde o algebraické rovnice, ze kterých eliminací uzlového napětí $U_3(p)$ vyplývá přenosová funkce 25.2.20

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$



Obrázek 25.2.3.: Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění filtru

Dosazením za $p = j\omega$ lze z přenosové funkce vyjádřit modulovou charakteristiku $H(j\omega)$ a fázovou charakteristiku $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$. Skupinové zpoždění vyplývá ze vztahu 25.2.7. Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění jsou na obr. 25.2.3.

Filtr má maximálně plochou modulovou charakteristiku přenosu. Mezní kmitočet propustného pásma je $f_p = 10kHz$, při kterém je $|H(j\omega_p)| = 0.707$. Tato hodnota odpovídá poklesu modulové charakteristiky o 3dB.

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 16
3 % Vykreslete modulovou, fazovou charakteristiku,
4 % charakteristiku skupinoveho zpozdeni a
5 % impulzni odezvu prenosove fce
6 % Q(p) 3.9506e+009
7 % H(p) = _____ = _____
8 % N(p) p^2 + 8.8889e+004p + 3.9506e+009
9 %
10 Q = 3.9506e+009;
11 N = [1, 8.8889e+004, 3.9506e+009];
12 f = linspace(0, 3e4, 200);
13 w = 2*pi*f;
14 %komplexni frekvencki odezva z analogove prenosove fce
15 H = freqs(Q, N, w);
16 figure(1)
17 plot(f, abs(H)); grid;
18 xlabel 'f x 10^4'
19 ylabel '|H(jf)|'

```

```
20 title 'Modulovaucharakteristika'
21 figure(2)
22 plot(f, phase(H)); grid
23 xlabel f; ylabel 'arguH(jf)';
24 title 'Fazovaucharakteristika'
25 % diff(X) – difference prvku vektoru
26 % [X(2)–X(1) X(3)–X(2) ... X(n)–X(n–1)]
27 t = diff(–phase(H))./diff(w); % aproximace derivace
28 figure(3)
29 plot(f(1:199), t); grid
30 xlabel f; ylabel '\tau(f)';
31 title 'Skupinoveuzpozdeni'
32 % vektorove vyjadreni prevede na symbolicka vyjadreni
33 P = poly2sym(Q)/poly2sym(N)
34 % inverzni Laplaceova transformace
35 ih = ilaplace(P)
36 % konverze racionalniho cisla na desetinne cislo
37 vpa(ih,5)
38 figure(4)
39 t = linspace(0, 3e–4, 200);
40 plot(t, subs(ih)); grid
41 xlabel f; ylabel 'h(t)';
42 title 'Impulzniuodezva'
```

Výpis 25.2: SAS_exam_03_Hp.m

Část X.

Teorie elektrických obvodů

26. Základy elektrických obvodů

Obsah

26.1. Metody řešení lineárních elektrických obvodů	135
26.2. Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	135
26.2.1. Pravidla pro sestavování rovnic	136
26.3. Modifikovaná metoda uzlových napětí	136
26.3.1. Metoda razítek	136
26.4. Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	137
26.5. Napěťový dělič	138

Ke každému skutečnému, fyzicky realizovanému, elektrickému obvodu lze nakreslit **obvodové schéma**. Toto schéma je vlastně *obvodovým modelem* skutečného obvodu. Obvodový model je sestaven ze základních obvodových prvků - **dvojpólů**. Název plyne z důležité topologické vlastnosti dvojpólů - mají dvě svorky [PVo4, s. 12].

Základních obvodových prvků je celkem pět: rezistor, cívka, kondenzátor, ideální zdroj napětí, ideální zdroj proudu. Zdůrazněme následující skutečnosti:

- Každý ze základních prvků je uvažován jako **ideální** (nemá žádné jiné parazitní vlastnosti).
- Kombinací základních prvků vznikne **náhradní zapojení** skutečného prvku, včetně jeho parazitních vlastností.
- Z pěti základních prvků je tedy možno sestavit **libovolný obvodový model** (elektrický obvod) **pasivní i aktivní**.
- U **aktivních obvodů** (např. zesilovačů) se uplatňují řiditelné, neboli parametrické prvky. Typickým příkladem je bipolární tranzistor, jenž je řízen proudem do báze.

26.1. Metody řešení lineárních elektrických obvodů

26.2. Klasická metoda uzlových napětí (MUN)

Metoda uzlových napětí je založena na tomto postupu:

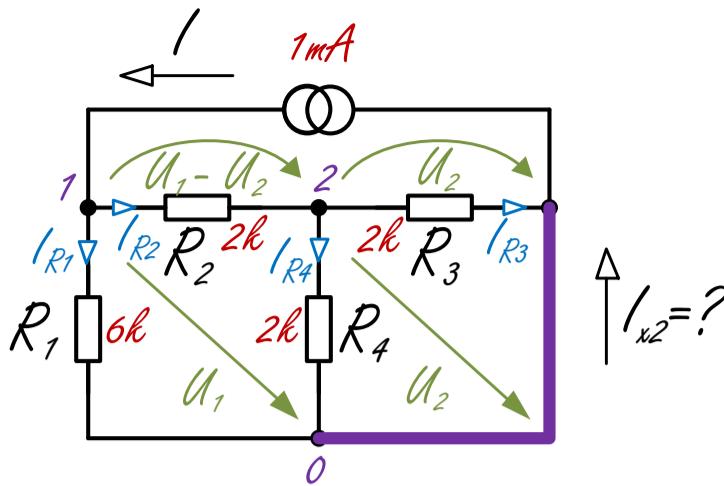
- Jeden z uzlů obvodu se prohlásí za tzv. **referenční uzel**. Přiřadí se mu číslo 0, případně v počítačovém simulátoru značka uzemnění. Vzhledem k tomuto uzlu se budou vztahovat napětí ostatních uzlů obvodu. Tato napětí se nazývají **uzlová napětí** a tvoří **soustavu neznámých obvodových veličin** metody. Je vhodné orientovat všechna uzlová napětí tak, aby čítací šipky směřovaly do referenčního uzlu. Uzlová napětí jsou neznámými metody i tehdy, je-li naším konečným cílem počítat jiné obvodové veličiny. Každé napětí a každý proud v obvodu jsou totiž vyjádřitelné jako lineární kombinace uzlových napětí.
- Pro každý uzel obvodu, vyjma referenčního, sestavíme rovnici 1. KZ ve tvaru: *součet proudů tekoucích dovnitř uzlu z vnějších zdrojů proudu = součtu proudů vytékajících větvemi obvodu ven z uzlu*.
- Rovnice vyřešíme, tj. získáme velikosti uzlových napětí. Z nich pak dopočteme požadovaný výsledek analýzy.

Metodu uzlových napětí lze objasnit na příkladu zapojení na obr. 26.2.1. Je třeba určit proud I_{x2} . Nejprve očíslovíme uzly. Zvolíme referenční uzel a přiřadíme mu číslo 0. Zde je třeba zdůraznit, že referenční uzel je možno volit zcela libovolně. Většinou se volí tak, aby případné hledané napětí bylo rovno jednomu z napětí uzlových. Dále si všimneme, že uzel, v němž je se spojuje rezistor R_3 a proudový zdroj, je vlastně součástí referenčního uzlu a jako takový se přídavně nečísluje - má již označení 0.

Vyznačená uzlová napětí U_1 a U_2 tvoří soustavu dvou neznámých, k níž musíme sestavit dvě rovnice. Budou to rovnice 1. KZ pro uzly 1 a 2. Protože počítáme proud I_{x2} , postačí určit uzlové napětí U_2 . Z něj totiž snadno určíme proud rezistorem R_3 a z něj I_{x2} .

Podle obr. 26.2.1 napíšeme 1. KZ pro rovnováhu proudů v uzlech 1 a 2:

$$\begin{aligned} \text{uzel 1: } I &= I_{R1} + I_{R2} \\ \text{uzel 2: } 0 &= -I_{R1} + I_{R2} + I_{R4} \end{aligned}$$



Obrázek 26.2.1.: Řešení obvodu metodu uzlových napětí - MUN [Bioo4, s. 62]

Orientaci čítacích šipek větvových proudů můžeme volit naprosto libovolně. Pokud se v orientaci zmýlíme, vyjde u daného proudu opačné znaménko.

Větvové proudy na pravé straně rovnic vyjádříme pomocí větvových vodivostí a větvových napětí, která závisí na uzlových napětí (viz obr. 26.2.1):

$$\text{uzel 1: } I = G_1 U_1 + G_2(U_1 - U_2)$$

$$\text{uzel 2: } 0 = -G_2(U_1 - U_2) + G_3 U_2 + G_4 U_2$$

Vytknutím neznámých upravíme rovnice na konečný tvar

$$\text{uzel 1: } I = (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 \quad (26.2.1)$$

$$\text{uzel 2: } 0 = -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2$$

Dosadíme-li vodivosti v [mS], vyjdou proudy na levé straně v [mA]

$$\text{uzel 1: } 1 = \frac{2}{3}U_1 - \frac{1}{2}U_2$$

$$\text{uzel 2: } 0 = -\frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2}U_2$$

Tyto rovnice dají řešení

$$[U_1, U_2] = \left[2, \frac{2}{3} \right] \text{ V} \quad (26.2.2)$$

Pohledem na schéma 26.2.1 zjistíme, že při $U_2 = \frac{2}{3}V$ bude proud $I_{R3} = \frac{1}{3}mA$ a hledaný proud I_{x2} vychází z 1. KZ

$$I_{x2} = I - I_{R3} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}mA. \quad (26.2.3)$$

26.2.1. Pravidla pro sestavování rovnic

Nyní pustme se do zobecnění poznatků z předchozího příkladu. Rovnice 26.2.1 zapíšeme v maticovém tvaru Porovnáme-li maticovou rovnici

$$\begin{array}{c} & U_1 & U_2 \\ \text{uzel 1: } & \begin{bmatrix} I \\ \boxed{} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ \text{uzel 2: } & \boxed{} & & \end{array}$$

s původním schématem obvodu 26.2.1 dospějeme k následujícím pravidlům:

- Pravidlo o sestavení vektoru budicích proudů na levé straně maticové rovnice:
 - V i-tém řádku je algebraický součet proudů, tekoucích dovnitř i-tého uzlu z vnějších zdrojů proudu.
- Pravidla o sestavení čtvercové vodivostní (admitanční) matice:
 - Prvek i, j na hlavní diagonále obsahuje součet všech vodivostí (admitancí), které jsou připojeny k uzlu i .
 - Prvek i, j ($i \neq j$) mimo hlavní diagonálu obsahuje záporně vztázený součet všech vodivostí, které jsou připojeny bezprostředně mezi uzly i a j .

Základní lineární dvojpóly (R, L, C) jsou reciprocní, tzn. chovají se stejně ve směru obou uzelů. Jinými slovy, jejich impedance je v obou případech stejná. Proto u obvodů s těmito součástkami vykazují admitanční matice *symetrii*, tj. prvky matice i, j a j, i jsou totožné.

26.3. Modifikovaná metoda uzlových napětí

Výhodou metody uzlových napětí je její snadná algoritmizace: algoritmus pro sestavení soustavy rovnic přímo ze schématu je velmi jednoduchý a lze jej tedy implementovat do počítačových programů pro analýzu a simulaci. Nevýhodou metody ovšem je, že neumožňuje analyzovat obvody se zdroji napětí a součástkami, které nemají admitanční rovnicu. Bohužel, k těmto součástkám patří nejen například takové prvky jako je obyčejný transformátor, ale i různé operační zesilovače, konvejory, a další moderní analogové prvky [Bioo4, s. 77].

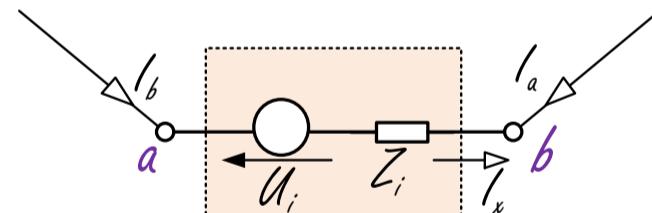
Proto klasická metoda MUN musí být podrobena určité modifikaci, která jednak zachová její výhodu - snadnou algoritmizovatelnost - jednak umožní analyzovat lineární obvody bez výše uvedených omezení. Jsou to metody:

- Metoda razítek
- Metoda zakázaného řádku
- Metoda U/I

26.3.1. Metoda razítek

Každý "problémový" prvek je popsán minimálně jednou přídavnou rovnicí a o stejný počet obohatí množinu neznámých. Současně dojde k modifikaci některých původních rovnic 1. KZ. Maticová rovnice pak získá zvláštní strukturu: k původní admitanční matici MUN přibudou řádky a sloupce, jejichž prvky obecně nemají rozdíl admitancí. Jsou to tzv. *razítky* původních elektrických prvků. Celá matice se pak nazývá **pseudoadmitanční**. Zvětšení rozdílu soustavy rovnic obvykle při počítačové analýze nemusí být na závadu. Při ručním řešení jde však prakticky vždy o problém [Bioo4, s. 78].

Uvažujme obvod popsaný rovnicemi klasické MUN. Mezi uzly a a b obvodu dodatečně připojme obecný dvojpól, který je popsán svým Théveninovým modelem podle obr. 26.3.1. Včleněním dvojpólu dojde ke změně napěťových a proudových poměrů v obvodu. Dvojpolem bude protékat proud I_x , který modifikuje proudové poměry mezi vузly a a b . Dojde i k změně původních uzlových napětí.



Obrázek 26.3.1.: Začlenění obecného lineárního dvojpólu, popsánoho Théveninovým modelem do obvodu [Bioo4, s. 78]

Původní rovnice popisující rovnováhu proudů v uzlu a musí být na pravé straně doplněna o proud I_x , vytékající ven z uzlu, a v uzlu b o proud I_x se záporným znaménkem, protože vtéká dovnitř uzlu b . Navíc uzlová napětí U_a a U_b jsou nyní vázána podmínkou

$$Z_i I_x + U_b = U_i + U_a, \text{ nebo } U_i = Z_i I_x + U_b - U_a \quad (26.3.1)$$

Všechny tyto modifikace lze zahrnout do nové soustavy rovnic MMUN:

Vektor neznámých uzlových napětí je rozšířen o další neznámou, I_x . Počet rovnic je rovněž zvětšen o jedničku, a to o výše uvedenou podmínce mezi uzlovými napětími U_a a U_b . Přitom napětí U_i je začleněno do vektoru známých budicích veličin na levé straně. Modifikace rovnic 1. KZ pro uzly a a b je provedena zápisem $+1$ a -1 do sloupce " I_x ".

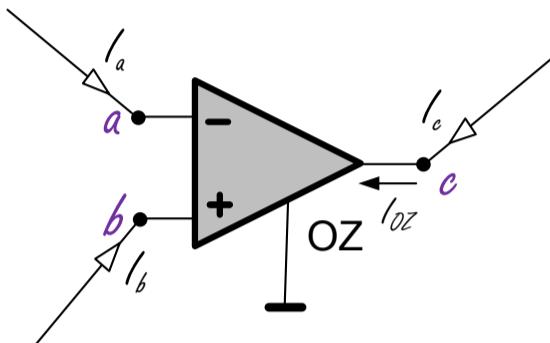
Právě provedený zápis je návodem, jak pomocí MMUN analyzovat například obvody obsahující zdroj napětí. Impedance Z_i může být i nulová, pak se bude jednat o ideální zdroj napětí. Při $U_i = 0$ a $I_i = 0$ lze modelovat zkrat mezi uzly a počítat proud, tekoucí tímto zkratem.

	U_a	U_b		I_x	
a	I_a	I_a	...	+1	U_a
b	I_b	I_b	...	-1	U_b
.
i	U_i	U_i	...	Z_i	I_x

Obrázek 26.3.2.: Razítko v pseudoadmitanční matici [Bio04, s. 79]

26.4. Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA

Ideální OPAMP, na obr. 26.4.1 po vložení do obvodu způsobí ztotožnění uzlových napětí U_a a U_b , a modifikaci proudových poměrů v uzlu c .



Obrázek 26.4.1.: Ideální operační zesilovač typu VFA

Ve spodním přídavném řádku je zapsána rovnice

$$0 = 1 \cdot U_a - 1 \cdot U_b \quad (26.4.1)$$

Výsledek řešení se nezmění, jestliže obě strany této rovnice vynásobíme libovolným nenulovým číslem. Ve spodním řádku tedy může být namísto $[1, -1]$ například $[15, -15]$. Je-li jeden ze vstupů OZ spojený s referenčním

	U_a	U_b	U_c		I_{OZ}	
a	I_a			...		U_a
b	I_b			...		U_b
c	I_c			...	+1	U_c
.
						I_{OZ}
	+1	-1		...		

Obrázek 26.4.2.: MMUN - pro ideální OPAMP typu VFA

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	I_1	I_2	I_{OZ}	
G_b				$-G_b$			-1		
	G_d				$-G_d$			-1	
		G_a	$-G_a$						1
$-G_b$		$-G_a$	$G_a + G_b$						
	$-G_d$			$G_c + G_d$					
			-1	1					
1									
	1								

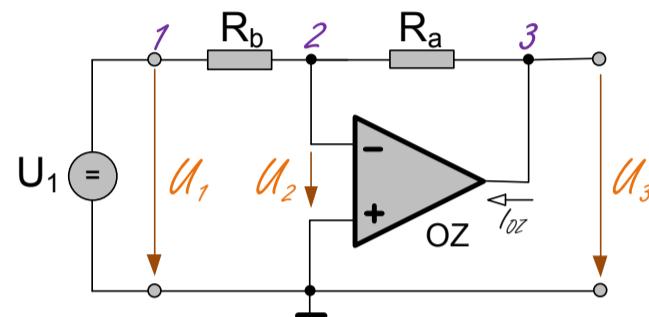
uzlem, neobjeví se příslušné uzlové napětí v rovnicích a proto v posledním řádku bude figurovat jen jedna jednička místo uvedené dvojice.

Jednička v řádku c a sloupci I_{OZ} reprezentuje připojení proudu I_{OZ} do celkové bilance proudů, vytékající z uzlu c .

Příklad 26.4.1. Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 26.4.3. Napište rovnice MMUN.

Rovnice MMUN budou v maticovém zápisu vypadat takto: Předposlední rovnice říká, že uzlové napětí U_1 je rovno napětí signálového zdroje U_{IN} . Jednička v posledním řádku reprezentuje jednoduchou rovnici $U_2 = 0$. Ačkoliv je obvod poměrně jednoduchý, je pro ruční řešení neefektivní, neboť jsme získali soustavu o 5 rovnic a 5 neznámých.

Příklad 26.4.2. Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 26.4.4. Napište rovnice MMUN.



Obrázek 26.4.4.: Neinvertující zesilovač

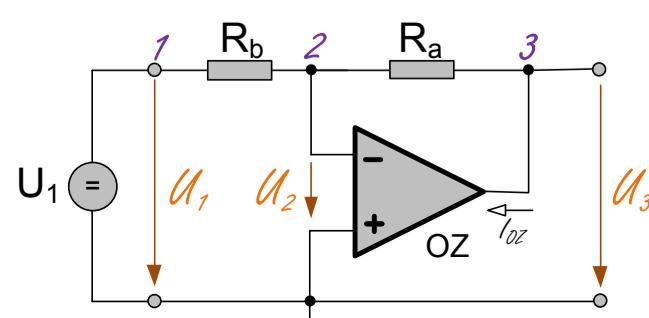
U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
			-1		U_1	
	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

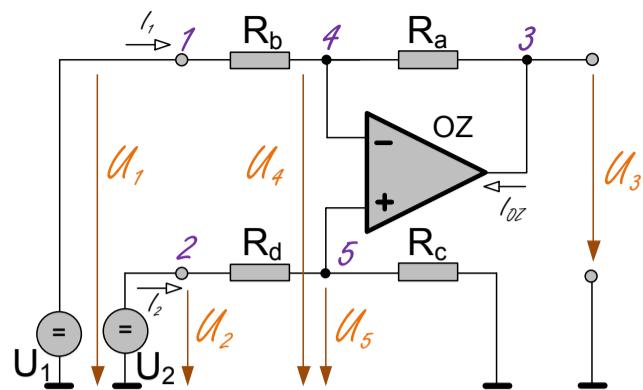
Tabulka 26.4.2.: Neinvertující zesilovač

Příklad 26.4.3. Uvažujme diferenciální zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 26.4.5. Napište rovnice MMUN.

x	b
U_1	
U_2	
U_3	
U_4	
U_5	
I_1	
I_2	
U_1	
U_2	

Tabulka 26.4.3.: Diferenciální zesilovač





Obrázek 26.4.5.: Diferenciální zesilovač

26.5. Napěťový dělič

V elektronických soustavách se největších přesnosti dosahuje u rezistorů, kde je standardně zaručována chyba menší než 1%, u přesných 0.1% a u velmi přesných 0.01%.

Bude nás zajímat jaký vliv má tolerance rezistorů na výsledný poměr výstupního ku vstupnímu napětí a také, zda-li při různém zvoleném poměru těchto rezistorů se bude měnit velikost chyby, ačkoliv budou mít stejnou přesnost. Intuitivně předpokládáme, že nejnepříznivější situace nastane, když hodnoty použitých rezistorů padnou na opačné strany tolerančních pásem, jenž reprezentuje Δ_1 a Δ_2 tj. $R_2 - \Delta_2 R_2$ a $R_1 + \Delta_1 R_1$ nebo $R_2 + \Delta_2 R_2$ a $R_1 - \Delta_1 R_1$. V obou případech bude chyba stejná, proto si vybereme například první případ a zapíšeme (rov. 26.5.1).

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2 - \Delta_2 R_2}{R_1 + \Delta_1 R_1 + R_2 - \Delta_2 R_2} \quad (26.5.1)$$

a po úpravě

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2}$$

Polynom ve jmenovateli rozvineme do následující podoby

$$[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) = (1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 + (1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1$$

$$(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 = [(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - (1 + \Delta_1)R_2 - (1 - \Delta_2)R_1$$

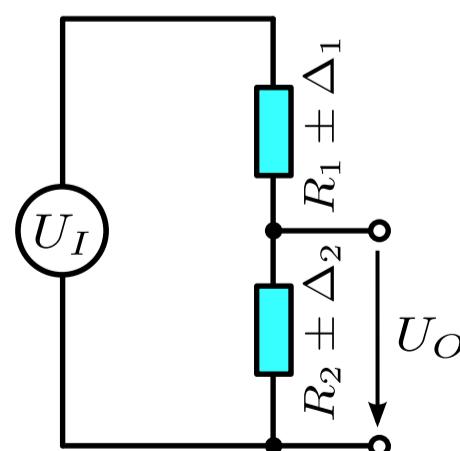
a získáme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - [(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}$$

Nyní vydělíme jmenovatel i čitatel $(R_1 + R_2)$ a dostaneme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta_2)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)] - \frac{[(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (26.5.2)$$

Standardně rezistory volíme se stejnou tolerancí, tedy $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ a



Obrázek 26.5.1.

získáme výslednou rovnici pro poměr $\frac{U_o}{U_i}$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta) + (1 - \Delta)] - \frac{[(1 + \Delta)R_2 + (1 - \Delta)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (26.5.3)$$

Řekněme například, že pro návrh děliče máme k dispozici rezistory s tolerancí 1% a vstupní napětí je 1 V. Obvod, ve kterém je dělič použit, umožnuje volit různé poměry, ale jejich součet je konstantní. Na otázku jaký poměr zvolit, abychom při dané toleranci rezistorů dostali výstupní napětí s největší přesností odpovídá následující tabulka.

R_1	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$19k\Omega$
R_2	$19k\Omega$	$10k\Omega$	$1k\Omega$
U_{out}	0,950	0,500	0,050
U_{out}^*	0,949	0,495	0,049
$\varepsilon_r [\%]$	0,101	1,000	1,883

Tabulka 26.5.1.

References

- [Bio04] D. Biolek. *Řešíme elektronické obvody aneb kniha o jejich analýze*. Vol. 1. BEN - technická literatura, 2004, p. 520. ISBN: 80-7300-125-X (cit. on pp. 136, 137).
- [PVo04] M. Patočka and P. Vorel. *Řídicí elektronika - pasivní obvody 1.díl*. Vol. 1. VUT Brno, 2004, p. 106 (cit. on p. 135).

27. Dynamické pochody v lineárních obvodech

27.1. Fyzikální podstata přechodných dějů

Obsah

27.1. Fyzikální podstata přechodných dějů	139
27.1.1. Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti	140
27.2. Přechodný jev kmitavého obvodu	141

V obvodu, který je v ustáleném stavu, nechť dojde buďto

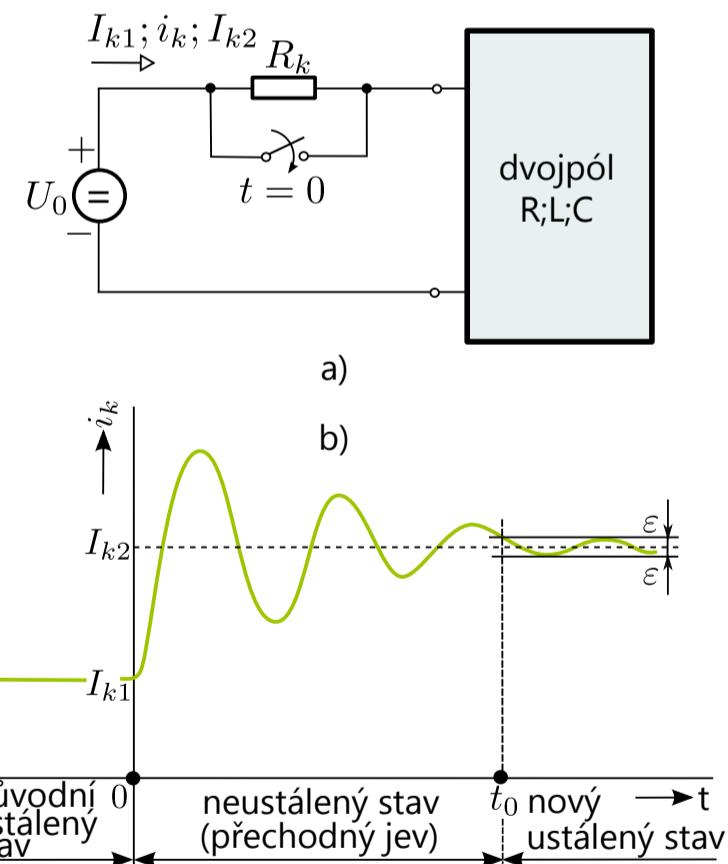
- ke změně parametru aktivního prvku (např. připojení nebo odpojení zdroje napětí nebo proudu),
- ke změně parametru pasivního prvku (např. zvětšení nebo zmenšení odporu, indukčnosti nebo kapacity),
- ke změně topologické struktury (např. přerušení větve, spojení větve nakrátko, připojení další větve).

Kteroukoliv z uvedených změn dostaneme nový obvod jemuž přísluší nový *ustálený stav*; tento stav však nenastane okamžitě. Zmíněná změna přivede obvod do *neustáleného stavu*, v němž odezvy napětí a proudů - nazýváme je **přechodnými jevy** - se postupně přibližují k hodnotám nového ustáleného stavu. Přechodné jevy, ač - přesně vzato - probíhají v nekonečně dlouhé době, jsou v praxi jevy krátkodobými, neboť odezvy se trvale "dostatečně těsně" přiblíží k hodnotám nového stavu již v poměrně krátké době - v běžných případech jsou to mikrosekundy až milisekundy.

Naskytá se otázka, proč odezvy obvodu obecně nepřecházejí z původního do nového ustáleného stavu skokem a proč dochází k neustálenému stavu obvodu. Obvod má elektromagnetickou energii $W(t)$, která je součtem energií elektrického pole kondenzátoru $W_e(t)$ a energií magnetického pole cívek $W_m(t)$. Elektromagnetická energie obvodu

$$W(t) = \sum_k W_{e_k}(t) + \sum_k W_{m_k}(t)$$

je tedy funkcí napětí na jeho kondenzátorech a proudů v jeho cívkách. Protože tyto veličiny určují energetický stav obvodu, nazýváme je **stavovými veličinami**.



Obrázek 27.1.1.: K objasnění pojmu "neustálený stav" a "přechodný jev"

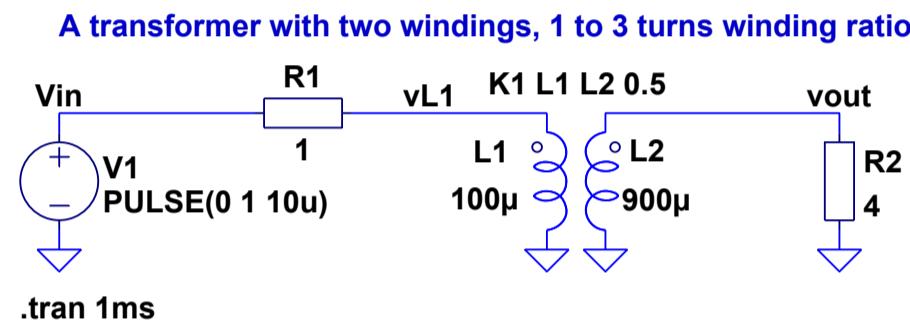
Elektrické výkony P v reálném elektrickém obvodu mají z fyzikálních důvodů vždy konečnou hodnotu. U obvodů, které jsou dostatečně adekvátními modely respektujícími tuto skutečnost (nazýváme je obvody

s konečnými výkony) je to postačující podmínkou pro to, aby jejich energie $W = W(t)$ byla spojitou funkcí času (neboť $P = \frac{dW}{dt}$). Z uvedených vztahů pro energii obvodu $W(t)$ je patrné, že $W = W(t)$ bude spojitou funkcí, jsou-li stavové veličiny *spojitými funkcemi*. To znamená, že hodnota stavových veličin v okamžiku před vznikem přechodného jevu je táz jako v okamžiku po jeho vzniku. Pro přechodný jev v okamžiku $t = 0$ platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} u_c(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u_c(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} i_L(t) \quad (27.1.1)$$

27.1.1. Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti

Příklad 27.1.1. *Transformátor:* Na primární vinutí vzduchového transformátoru s činitelem $k < 1$ je v čase $t = 0$ připojen zdroj napětí $U_1 = \text{konst}$. Formulujte postup pro výpočet odezv $i_1(t)$ a $i_2(t)$ pro obecné parametry zapojení a výsledky ověřte simulací pro následující hodnoty: $U_1 = 1V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, transformátor má převod $1 : 3$.



Obrázek 27.1.2.: Transformer.asc: Zapojení vzduchového transformátoru pro simulaci v programu LTSpice

Klasické řešení: Podle II. Kirchhoffova zákona platí soustava rovnic:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_1 \quad (27.1.2)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (27.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + L_1 \lambda & L_{12} \lambda \\ L_{12} \lambda & R_2 + L_2 \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (27.1.4)$$

$$(R_1 + L_1 \lambda) - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (27.1.5)$$

$$R_1 R_2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + L_1 L_2 \lambda - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (27.1.6)$$

$$\lambda^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + R_1 R_2 = L_1 L_2 \quad (27.1.7)$$

$$\lambda^2 \left(\frac{L_1 L_2 - L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) + \left(\frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2} \right) \lambda + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0 \quad (27.1.8)$$

Zavedeme-li $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$, $k = \frac{L_1 L_2}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $k^2 = \frac{L_1^2 L_2^2}{L_1 L_2}$, $\sigma = 1 - k^2$ dostaneme

$$\sigma \lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = 0 \quad (27.1.9)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\sigma \tau_1 \tau_2} = 0 \quad (27.1.10)$$

Je-li $\lambda_1 = -\beta + \alpha$ a $\lambda_2 = -\beta - \alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (27.1.11a)$$

$$\beta = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)^2 + \frac{4\sigma}{\tau_1 \tau_2}} \quad (27.1.11b)$$

Jelikož $k < 1$; je $0 < \sigma < 1$; rozbořením rovnice 27.1.11b plynne, že pak je

$\alpha \neq 0$, reálné. Soustava rovnic 27.1.2 má tedy obecné řešení

$$i_1(t) = i_{1o} + i_{1p} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{U_0}{R} \quad (27.1.12)$$

$$i_2(t) = i_{2o} + i_{2p} = K_3 e^{\lambda_1 t} + K_4 e^{\lambda_2 t} \quad (27.1.13)$$

Integrační konstanty K_1 , K_2 , K_3 a K_4 určíme z matematických počátečních podmínek: $i_1(0) = i_2(0) = 0$ (což jsou zároveň fyzikální počáteční podmínky) a $\frac{di_1}{dt}|_{t=0}$, $\frac{di_2}{dt}|_{t=0}$, které určíme z rovnic 27.1.2 pro $t = 0$:

$$L_1 i'_1 + L_{12} i'_2 = U_0 \implies i'_1 = \left(\frac{U_0 - L_{12} i'_2}{L_1} \right) \quad (27.1.14)$$

$$L_2 i'_2 + L_{12} i'_1 = 0 \quad (27.1.15)$$

Dále postupujeme tak, že do druhé rovnice dosadíme vyjádřenou první derivaci primárního proudu z první rovnice a získáme vztah pro první derivaci sekundárního proudu v čase $t = 0$:

$$\frac{di_1}{dt}|_{t=0} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (27.1.16)$$

$$\frac{di_2}{dt}|_{t=0} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (27.1.17)$$

Aplikací těchto počátečních podmínek na obecné řešení 27.1.12 plynou vztahy

$$i_1(0) = K_1 + K_2 + \frac{U_0}{R}; \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \quad (27.1.18)$$

$$i_2(0) = K_3 + K_4; -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_3 + \lambda_2 K_4 \quad (27.1.19)$$

Z první a třetí rovnice vypočítáme K_1 ; K_2 , ze druhé a čtvrté rovnice K_3 ; K_4 . Dosazením do rovnice 27.1.12 dostaneme po úpravě odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$. Speciálně pro $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$ je

$$i_1(t) = \frac{U_0}{2R} \left(2 - e^{-\frac{t}{\tau_3}} - e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (27.1.20)$$

$$i_2(t) = \frac{U_0}{2R} \left(-e^{-\frac{t}{\tau_3}} + e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (27.1.21)$$

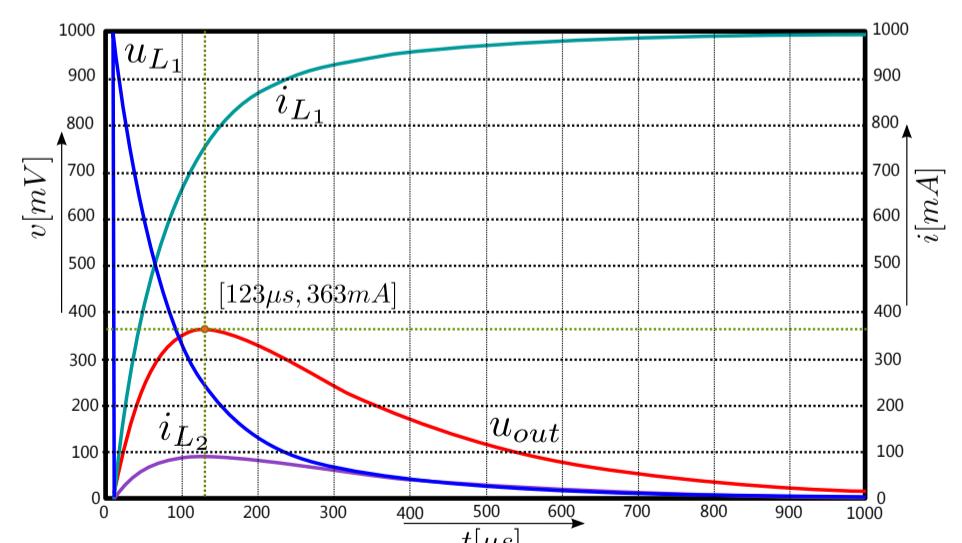
kde je $\tau_3 = \frac{L+L_{12}}{R}$; $\tau_4 = \frac{L-L_{12}}{R}$

Operátorové řešení: Laplaceovou transformací rovnice 27.1.2 dostáváme

$$(R_1 + pL_1) I_1(p) + pL_{12} I_2(p) = \frac{U_0}{p} \quad (27.1.22)$$

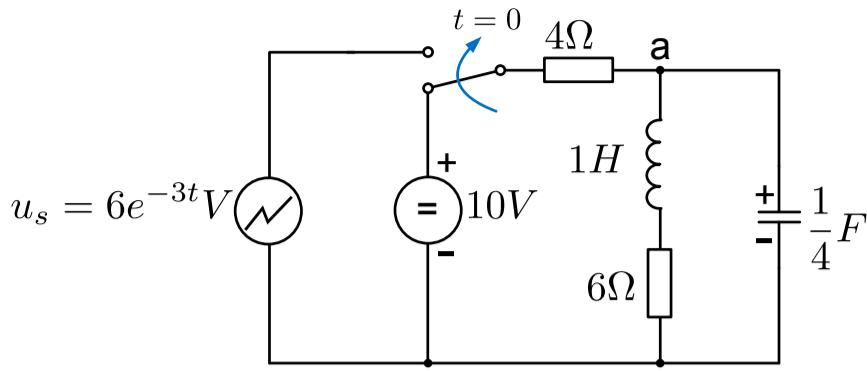
$$pL_{12} I_1(p) + (R_2 + pL_2) I_2(p) = 0 \quad (27.1.23)$$

Zavedeme σ ; τ_1 ; τ_2 , vypočítáme obrazy proudů a jejich zpětnou transformací dostaneme rovnice pro odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$.



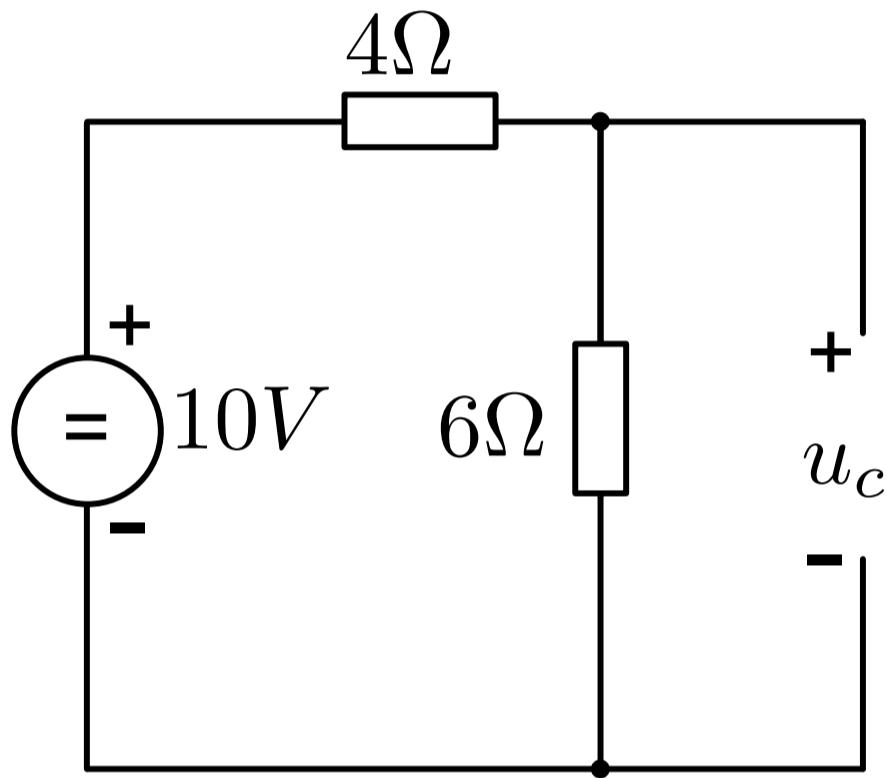
Obrázek 27.1.3.: Odezva na jednotkový skok transformátoru s parametry: $k = 0.5$, $L_1 = 100\mu H$, $L_2 = 900\mu H$

Příklad 27.1.2. Najděte odezvu napětí na kondenzátoru $u_c(t)$ obvodu na obrázku 27.1.4 pro $t > 0$. (zdroj [Dorf])



Obrázek 27.1.4.: Obvod k příkladu 27.1.2

Řešení: Nejdříve stanovíme počáteční podmínky, které vyplývají z ustáleného stavu v době $t = 0^-$. Obvod na obr. 27.1.4 můžeme překreslit do podoby na obr. 27.1.5



Obrázek 27.1.5.: Obvod k příkladu 27.1.2

$$u_c(t) = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad [V] \quad (27.1.24)$$

27.2. Přechodný jev kmitavého obvodu

Kmitavým obvodem máme na mysli obvod s jedním stupněm volnosti, složeného z odporu R , kapacity C a indukčnosti L , zapojených v sérii. Je jedním z nejdůležitějších případů elektrotechnické praxe. Dosud probírané případy (obvod RL a RC) jsou vždy určitým zjednodušením úplného obvodu s jedním stupněm volnosti, vzniklé tak, že buď indukčnost obvodu, nebo kapacita jsou zanedbatelné vzhledem k ostatním prvkům. Rozbor přechodného stavu kmitavého obvodu (dále stručně obvodu RLC) umožňuje stanovit směrnice pro možnost tohoto zjednodušení a jeho důsledky.

Zopakujme, že přechodný stav, je vždy dán superpozicí nového ustáleného stavu a vlastní přechodné složky, jejíž průběh závisí jen na vlastnostech obvodu a počátečních podmínek (a nikoliv na průběhu vstupního signálu), proto nejdříve budeme řešit tzv. *volný stav obvodu*, tj. stav, kdy vnější působení na vstupu je nulové. Za těchto okolností může v obvodu existovat přechodný jev, je-li v obvodu (tj. v akumulačních prvcích) na počátku nahromaděná určitá energie. Vzhledem k tomu, že to může být jednak energie elektrického pole v kondenzátoru, jednak energie magnetického pole v cívce, je počáteční stav úplně určen, známe-li hodnoty napětí na kapacitě a proudu v indukčnosti v počátečním okamžiku; matematicky vyjádřeno, stanovíme počáteční podmínky vždy ve tvaru

$$u_C(0) = U_{C_0} \quad i(0) = I_0. \quad (27.2.1)$$

Protože za volného stavu jsou vstupní svorky spojeny *nakrátko*, je rovnice pro proud v obvodu

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (27.2.2)$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + U_{C_0} = 0 \quad (27.2.3)$$

Řešení provedem pomocí Laplaceovy transformace. K přihlédnutí k počátečním podmínkám 27.2.2 dostaneme rovnici

$$I(p)(R + Lp + \frac{1}{pC}) = I_0L - \frac{U_{C_0}}{p}, \quad (27.2.4)$$

a z ní

$$I(p) = \frac{pCLI_0 - CU_{C_0}}{p^2LC + pRC + 1}. \quad (27.2.5)$$

28. Lineární obvody v harmonickém ustáleném stavu

Obsah

28.1. Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty	143
28.2. Obvody s nastavitelnými parametry	145

V této kapitole se seznámíme se *symbolicko-komplexní metodou* (SKM), jež má základní důležitost pro teorii obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Potom prozkoumáme vlastnosti jednodušších obvodů v tomto stavu a metody jejich analýzy. Posléze pojednáme o elektrickém výkonu v obvodech a o nejdůležitějších otázkách přenosu energie [May75, s. 60].

28.1. Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty

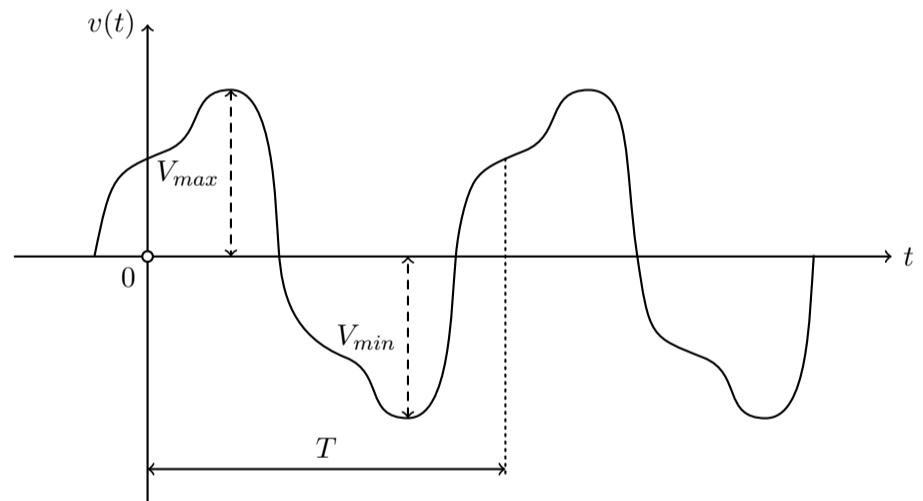
Periodickou veličinou nazýváme takovou veličinu v , jejíž závislost na čase lze vyjádřit periodickou funkcí, pro níž existuje konstanta $T > 0$ taková, že pro každé t platí vztah

$$v(t+T) = v(t), \quad (28.1.1)$$

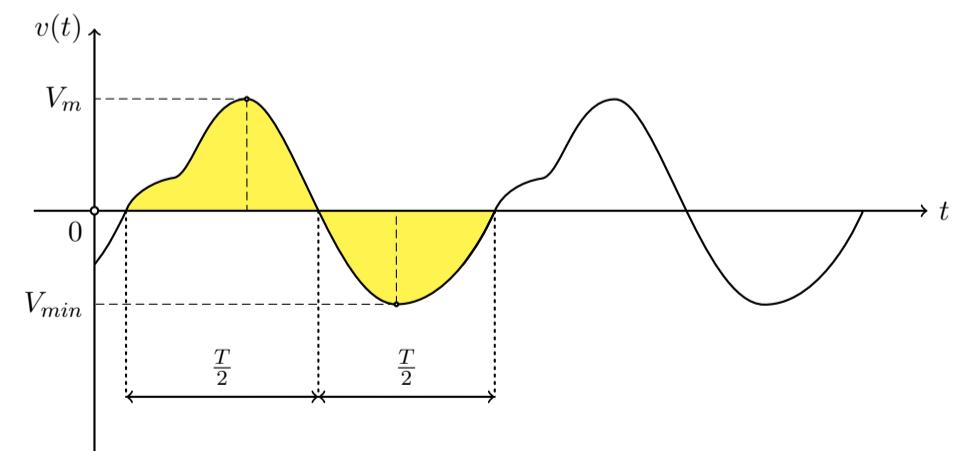
Konstanta T se nazývá **perioda** resp. *doba kmitu*. V aplikacích se zpravidla používá nejmenší kladná perioda, tzv. *základní perioda*; pro stručnost budeme hovořit pouze o periodě. Je-li dána periodická veličina na jakémkoliv intervalu $(t_0, t_0 + T)$, je tím zřejmě definována pro všechna $t > t_0$. Průběh veličiny v na jakémkoliv intervalu délky T se nazývá **cyklem**. Počet cyklů za jednotku času (za sekundu) udává **kmitočet**, nebo též *frekvenci* periodické veličiny

$$f = \frac{1}{T}, \quad (28.1.2)$$

V elektrotechnice rozdělujeme periodické veličiny do dvou skupin:



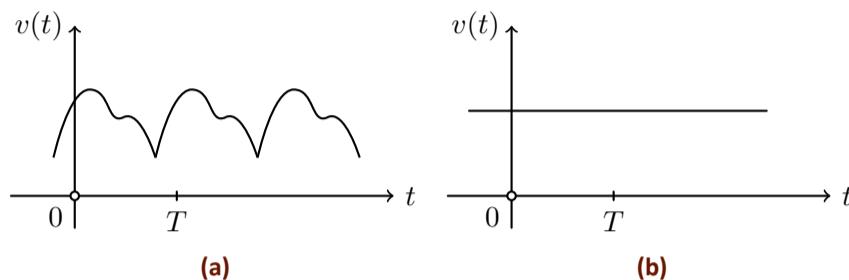
Obrázek 28.1.1.: Příklad periodické veličiny $v = v(t)$ pro kterou platí $v(t+T) = v(t)$



Obrázek 28.1.2.: Časový průběh střídavé veličiny $v = v(t)$, pro kterou platí, že obsahy ploch v jednom cyklu nad osou t a pod osou t jsou totožné

- Veličiny v , jež během svého cyklu změní znaménko (obr. 28.1.1) nazýváme **kmitavé**. Speciálním případem kmitavých veličin jsou **střídavé veličiny**, jež mají tu vlastnost, že po dobu $T/2$ jsou trvale kladné, po dobu $T/2$ naopak záporné a obsahy ploch omezených grafem funkce $v = v(t)$ v jednom cyklu nad osou t a pod osou t jsou *totožné* (obr. 28.1.2).

- Veličiny v , jež nemění své znaménko, tj. jsou trvale kladné nebo trvale záporné (obr. 28.1.3) nazýváme **pulsující**. Speciálním případem jsou **stejnosměrné veličiny**, které nemění svou hodnotu, tj. $v = \text{konst}$ (obr. 28.1.3 (b)).



Praktický význam mají zejména tyto hodnoty periodických veličin:

- Maximální hodnota** V_m periodické veličiny v , tj. největší hodnota, které tato veličina dosahuje $v_m = \max v(t)$
- Minimální hodnota** V_{min} periodické veličiny v , tj. nejmenší hodnota, které tato veličina dosahuje $v_m = \min v(t)$

Maximální a minimální hodnoty střídavé veličiny se nazývají též **vrcholovými hodnotami** (kladnými nebo zápornými), obr. 28.1.1 a 28.1.2.

Střední hodnota veličiny v v intervalu $\langle t_i, t_j \rangle$ je

$$V_s = \frac{1}{t_j - t_i} \int_{t_i}^{t_j} v(t) dt \quad (28.1.3)$$

U periodické veličiny se spravidla počítá střední hodnota v jednom cyklu. U střídavé veličiny je v jednom cyklu $V_s = 0$, a proto střední hodnotu vyjadřujeme v takovém intervalu v němž je $v \geq 0$.

Efektivní hodnota periodické veličiny v intervalu $\langle 0, T \rangle$ je

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (28.1.4)$$

U periodických napětí a proudů má praktický význam především jejich efektivní hodnota. Efektivní hodnotu periodického proudu $i = i(t)$ procházejícího konstatním odporem R lze interpretovat jako stejnosměrný proud I , při němž se za dobu T vyvine v odporu R stejná tepelná energie, jako průchodem proudu i . Podle Joulova-Lenzova zákona je totiž

$$RI^2T = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt} \quad (28.1.5)$$

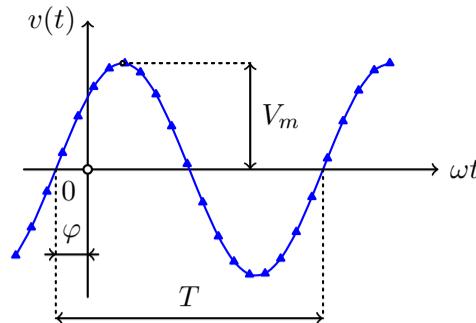
z čehož lze určit I v souladu s rovnicí 28.1.4. Obdobně lze fyzikálně interpretovat efektivní hodnotu napětí.

Střední hodnotu periodického proudu $i = i(t)$ lze fyzikálně interpretovat jako stejnosměrný proud I_s , jimž se za dobu T přenese stejný náboj Q jako proudem i :

$$Q = I_s T = \int_0^T i(t) dt \quad (28.1.6)$$

z čehož plyne I_s v souladu s rovnicí 28.1.3.

Efektivní hodnotu napětí (proudů) lze změřit např. feromagnetickým, elektrodynamickým nebo tepelným voltmetrem (ampérmetrem). Střední hodnotu napětí (proudů) magnetoelektrickým voltmetrem (ampérmetrem) a střední hodnotu výkonu elektrodynamickým wattmetrem.



Obrázek 28.1.4.: Harmonická funkce $v = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ resp. $v = V_m \cos(\omega t + \varphi')$ kde je $\varphi' = \varphi - \frac{T}{4}$

Střídavou veličinu v lze též do jisté míry charakterizovat činitelem tvaru β , činitelem výkyvu γ a činitelem plnění α definovanými vztahy

$$\beta = \frac{V}{V_s}, \quad \gamma = \frac{V_m}{V}, \quad \alpha = \frac{V_s}{V_m} \quad (28.1.7)$$

Je zřejmé, že platí $\alpha\beta\gamma = 1$.

V elektrotechnice mají velkou důležitost periodická napětí a proudy, jejichž závislost je dána sinusovou nebo kosinusovou funkcí, tj.

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (28.1.8)$$

nebo

$$v = V_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (28.1.9)$$

kde V_m, ω, φ jsou konstanty (obr. 28.1.4)

Jelikož, tato napětí, resp. proudy představují **harmonické kmity**, nazýváme je **harmonicky proměnné**, nebo krátce **harmonická napětí** resp. **harmonická proudy**. Konstanta V_m je maximální hodnota, či-li **amplituda**, $\omega t + \varphi$ je **fáze**, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ je **úhlový kmitočet** a φ je **počáteční fáze** harmonické funkce.

Rozdíl fází dvou harmonických veličin (stejného kmitočtu) nazýváme **fázový posun**.

Příklad 28.1.1. Pro harmonickou veličinu, určete efektivní hodnotu, střední hodnotu, činitele tvaru, činitele výkyvu a činitele plnění. **Řešení:** Efektivní hodnota je:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} \quad (28.1.10)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \doteq 0.707 V_m$$

Podrobný výpočet tohoto integrálu pomocí substituce $\omega t + \varphi = \frac{\alpha}{2}$ je poněkud zdlouhavější:

$$\omega t + \varphi = \frac{\alpha}{2} \rightarrow 2(\omega t + \varphi) = \alpha$$

$$\omega dt = \frac{1}{2} d\alpha \rightarrow dt = \frac{1}{2\omega} d\alpha$$

Nesmíme zapomenout přepočítat meze $\alpha_d|_{t=0} = 2\varphi$ a $\alpha_h|_{t=T} = 4\pi + 2\varphi$ nového integrálu.

$$V^2 = \frac{V_m}{2T\omega} \int_{\alpha_d}^{\alpha_h} \cos^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha$$

$$= \frac{V_m}{4\pi} \int_{\alpha_d}^{\alpha_h} \frac{1 + \cos \alpha}{2} d\alpha = \frac{V_m}{4\pi} \left(\frac{\alpha}{2} \Big|_{\alpha_d}^{\alpha_h} + \frac{1}{2} \sin \alpha \Big|_{\alpha_d}^{\alpha_h} \right)$$

$$= \frac{V_m}{4\pi} \left(2\pi + \varphi - \varphi + \frac{1}{2} \sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) = \frac{V_m}{2}$$

Při zjednodušování integrálu je užito goniometrického vzorce $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ a faktu $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Střední hodnota kladné půlvlny je

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}-\frac{\varphi}{\omega}}^{\frac{T}{4}-\frac{\varphi}{\omega}} V_m \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\frac{\varphi}{\omega}}^{-\frac{\varphi}{\omega}} V_m \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{2}{\pi} V_m \doteq 0,637 V_m \end{aligned}$$

činitele tvaru, výkyvu a plnění jsou

$$\beta = \frac{V}{V_s} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,111,$$

$$\gamma = \frac{V_m}{V} = \sqrt{2} \doteq 1.414,$$

$$\alpha = \frac{V_s}{V_m} = \frac{2}{\pi} \doteq 0,637$$

28.2. Obvody s nastavitelnými parametry

V praxi se setkáváme s obvody, u nichž lze (spojitě nebo stupňovitě) nastavit odpor odporníku, kapacitu kondenzátoru, vlastní nebo vzájemnou indukčnost cívek, amplitudu, fázi nebo kmitočet zdroje (napětí nebo proud). Nazveme je *obvody s nastavitelnými parametry*.

References

- [May75] D. Mayer. *Úvod do teorie elektrických obvodů*. Západočeská univerzita v Plzni, 1975. 355 pp. (cit. on p. 143).

Část XI.

Elektronické součástky

29. Základní zákony elektromagnetismu

29.1. Magnetická indukce

Obsah

29.1. Magnetická indukce	149
29.2. Zákon elektromagnetické indukce	149
29.3. Spřažený tok vzduchové cívky	152
29.4. Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem	152

V této teoreticky změřené kapitole budou shrnutý základní fyzikální zákony, kterými se řídí elektromagnetické jevy a jejich znalost bude nezbytná při studiu následujících praktičtěji zaměřených kapitol. Mízi nejdůležitější patří zákon elektromagnetické indukce. Velký praktický význam má jeho zobecnění i pro případy nejsložitější, jakými jsou *ne-lineární* a navíc *parametrické* magnetické obody. Důležitým pojmem je *spřažený magnetický tok* cívky. Pro hlubší pochopení všech zákonitostí bude vhodné upozornit na *topologické vlastnosti* elektromagnetického pole. Ukazuje se totiž, že topologický přístup je velice užitečný a silným nástrojem, který významně usnadňuje pochopení *Maxwellových rovnic* se všemi jejich důsledky [Pat11, s. 6]. Topologie elektromagnetického pole je proto věnována celá kapitola 30.

Základní veličinou pro popis magnetických polí a jejich účinků je *vektor magnetické indukce* - \vec{B} . Dle soustavy SI je jednotkou magnetické indukce *tesla* [T] a projevuje se silovými účinky na vodiče protékané proudy a indukováním napětí při jeho změně.

Je proto dobře měřitelný. První rovnice (Ampérův zákon) ze souboru Maxwellových rovnic určuje rovnost oběhového integrálu magnetické indukce po uzavřené křivce proudům protékaných vodiči, jež jsou touto křivkou uzavřeny.

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (29.1.1)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m je magnetická konstanta - **permeabilita vakua**. Elektrické proudy jsou stále obklopeny magnetickými poli. Tato pole se dají zesílit cívou s magnetickým jádrem. Na tomto jevu je založen jeden z elementárních principů elektrotechniky.

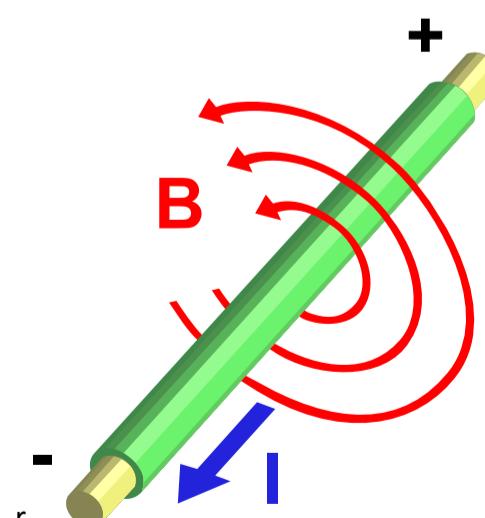
Protože je tento zákon stěžejní k pochopení ostatních principů, je vhodné si také uvědomit vztah jednotky magnetické indukce k základním jednotkám soustavy SI:

$$1T = 1 \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1 \frac{kg}{C \cdot s} = 1 \frac{kg}{A \cdot s^2} = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$

29.2. Zákon elektromagnetické indukce

Základní laboratorní experimenty, vedoucí k odhalení existence elektromagnetické indukce, uskutečnil Faraday¹ r. 1831. Matematickou formu-

¹Michael Faraday (1791 - 1867), samouk, zakladatel klasické elektrodynamiky, vynikající experimentátor: Zavedl pojem fyzikálního prostorového pole pomocí siločar, tzv. "trubic"



Obrázek 29.1.1.: Elektrický proud ve vodiči způsobuje vznik magnetické pole v jeho okolí.

laci indukčního zákona v podobě rovnice

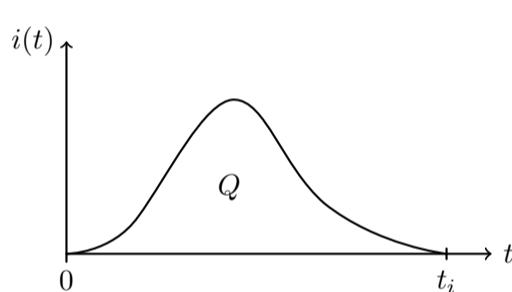
$$u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (29.2.1)$$

stanovil již on sám, postupně význam zákona formálně upřesňovali další badatelé např. Neumann² kolem roku 1845. Konečné znění Maxwellovy teorie včetně formulace indukčního zákona do podoby II. Maxwellovy rovnice budoval Maxwell³ velmi pozvolna, v období 1855 až 1873. Z historického pohledu je zajímavé a důležité, že přesné kvantitativní experimenty s elektromagnetickou indukcí byly v té době uskutečnitelné pouze pomocí **balistického galvanoměru**. Lze odhadnout, že nebyt tohoto přístroje, přesná matematická formulace indukčního zákona by se praděpodobně opozdila o několik let. Kupodivu, z psychologického hlediska je i v současnosti velmi vhodné vysvětlit princip indukčního zákona pomocí historických pokusů s balistickým galvanoměrem.

Jako každý elektromagnetický měnič energie (tj. motor), obsahuje i magnetoelektrické měřící ústrojí galvanoměru dva akumulátory energie: moment setrvačnosti J otočné části a indukčnost cívky L . Jedná se tedy o kmitavou soustavu 2. řádu. Každou takovou soustavu lze kriticky, případně nadkriticky tlumit - především zařazením tlumicího odporu vhodné velikosti do série s měřicím systémem (tlumení vlivem mechanického tření je úmyslně konstrukčně potlačeno na zanedbatelnou úroveň). Balistický galvanoměr je cíleně konstruován s velkým momentem setrvačnosti J a s malou tuhostí k_d direkčních pružin, aby měl dlouhou dobu kmitu $T_G = 2\pi\sqrt{J/k_d}$ několik sekund. Proteče-li galvanoměrem krátký proudový impuls $i(t)$ o celkové délce t_i podle obr. 29.2.1, pak lze snadno dokázat, že za předpokladu $t_i \ll T_G$ je první maximální výchylka α_{max} tlumeného pohybu ukazatele přímo úměrná celkovému náboji Q proudového impulsu podle rovnice

$$\alpha_{max} = k_b Q = k_b \int_0^{t_i} i(t) dt, \quad (29.2.2)$$

kde k_b je **balistická konstanta** použitého galvanoměru. Balistický galvanoměr tedy pracuje jako **integrátor** proudu v přesném matematickém smyslu.



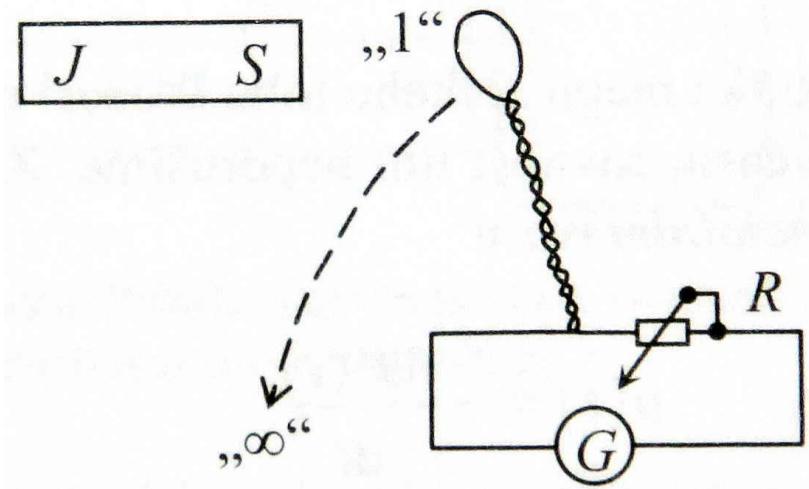
Obrázek 29.2.1.: Příklad krátkého proudového impulsu prošlého balistickým galvanoměrem.

Uvažujme experiment uspořádaný podle obr. 29.2.2. V uzavřeném obvodu galvanoměru se nachází celkový odpor R a tuhá samonosná cívka v podobě kruhového závitu, připojená na dlouhé ohebné zkroucené přívody. Husté zkroucení zajišťuje, že do samotných přívodů se nemůže indukovat žádné napětí, pohybujeme-li se cívka v magnetickém poli permanentního magnetu. Při rychlém přesunu z polohy l do vzdálené polohy ∞ klesne v cívce magnetický tok na nulu, časová změna toku zapříčiní vznik indukovaného napětí, napětí protlačí obvodem proudový impuls odpovídající přibližně obr. 29.2.1.

Za předpokladu kritického nebo nadkritického tlumení má odpor R relativně velkou hodnotu. Proto lze s dobrou přesností zanedbat vnitřní indukčnost měřicího systému galvanoměru a uvažovat, že celé napětí $u(t)$, indukované v cívce při jejím pohybu, spočine pouze na odporu. V

²Franz Ernst Neumann (1798 - 1895), teoretický fyzik, matematik, mineralog. Definoval pojem magnetický vektorový potenciál, formuloval Neumannův vzorec pro vzájemnou indukčnost dvou smyček. Učitel G. R. Kirchhoffa.

³James Clark Maxwell (1831 - 1879), teoretický fyzik, působil na Trinity College university v Cambridge, na King's College v Londýně, posléze první ředitel Cavendishovy laboratoře na univerzitě v Cambridge. Původně se zabýval teoretickou mechanikou a kinetickou teorií plynů. Soustavu čtyř Maxwellových rovnic odvodil především na základě mechanicko-elektrických analogií.



Obrázek 29.2.2.: Uspořádání experimentálního pracoviště s balistickým galvanoměrem

uzavřeném okruhu o celkovém odporu R pak platí Ohmův zákon ve tvaru

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}. \quad (29.2.3)$$

Dosadíme-li rovnici 29.2.3 do 29.2.2, po úpravě získáme vztah

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \frac{\alpha_{max} R}{k_b}. \quad (29.2.4)$$

Experimentálně je možno dospat ke dvěma stěžejním poznatkům:

- Při přesunu cívky z polohy l do polohy ∞ nezávisí výchylka α_{max} na rychlosti pohybu. (Za předpokladu $t_i \ll T_G$, což je omezení dané nedokonalostí přístroje a nijak nesouvisí se zkoumaným jevem.)
- Při přesunu cívky z polohy l do polohy ∞ zůstává součin ($\alpha_{max} \times R$) stále konstantní, měníme-li úmyslně velikost odporu R . To jest: při k-násobném zvýšení odporu klesne výchylka k-krát a naopak.

V poloze „1“ prochází plochou cívky magnetický tok Ψ . V poloze „ ∞ “ je zřejmě magnetický tok cívky nulový, tedy $\Psi_\infty = 0$. S ohledem na rovnici (29.2.4) lze pak oba experimentální poznatky interpretovat jediným možným způsobem:

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \text{konst} = \Psi - \Psi_\infty = \Psi. \quad (29.2.5)$$

Experiment lze opakovat s cívkami libovolných rozměrů, tvarů i počtu závitů. Výsledky budou kvalitativně stejné. Veličina Ψ se nazývá **spředený magnetický tok cívky**. Je to míra interakce cívky s magnetickým polem, které spojitě prostupuje celou plochou cívky. Rovnici (29.2.5) lze vyjádřit slovně: Spřadený magnetický tok cívky je úměrný časovému integrálu svorkového napětí na zkoumané cívce. Je určitě výhodné zvolit jedničku jako konstantu úměrnosti mezi tokem Ψ a integrálem napětí. Pak bude velikost spřadeného toku přímo rovna integrálu napětí. Určitý integrál v rovnici (29.2.5) lze nahradit integrálem neurčitým, pak je ale nutno přidat obecnou počáteční integrační konstantu Ψ_0 v newtonovském smyslu. Získáme tak zákon elektromagnetické indukce (indukční zákon) v integrálním tvaru

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad [\text{Wb}; \text{V}, \text{s}]. \quad (29.2.6)$$

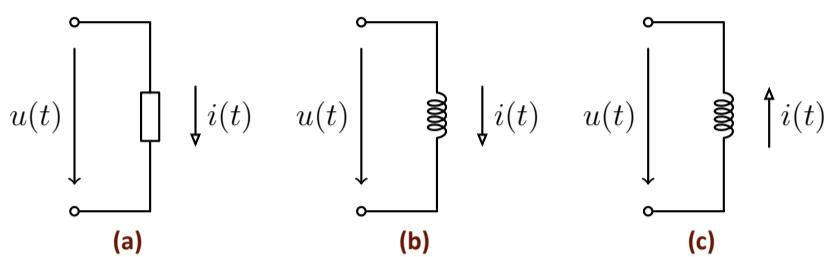
Z rovnice (29.2.6) plyne, že jednotka magnetického toku Weber⁴ má rozdíl [Vs], Budeme-li obě strany rovnice derivovat podle času, rovnost tím neporušíme. Získáme tak ryze matematickou cestou indukční zákon v diferenciálním tvaru

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad \text{resp.} \quad u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (29.2.7)$$

Obě rovnice (29.2.7a), (29.2.7b) se liší znaménkem + nebo - na pravé

⁴Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), teoretický fyzik, působil na univerzitách v Göttingenu a v Lipsku. Základatel předrelativistické elektrodynamiky. Určil totiž sílu mezi náboji v závislosti nejen na vzdálenosti, ale i na rychlosti a zrychlení, jeho teorie je ale platná pouze pro $v \ll c$. Blízký spolupracovník Gausse.

straně. Volba znaménka souvisí s domluvou, který režim cívky považujeme za základní: zda režim spotřebičový podle rovnice (29.2.7a), nebo režim zdrojový podle rovnice (29.2.7b). Oba režimy jakéhokoli dvojpólu jsou totiž jednoznačně definovány vzájemnou orientací napětí a proudu podle obr. 29.2.3. Odpor nemůže nikdy pracovat jako zdroj, proto slouží jako „normál“ definující spotřebičovou orientaci svorkových veličin. Oba režimy cívky se liší níže popsaným způsobem.



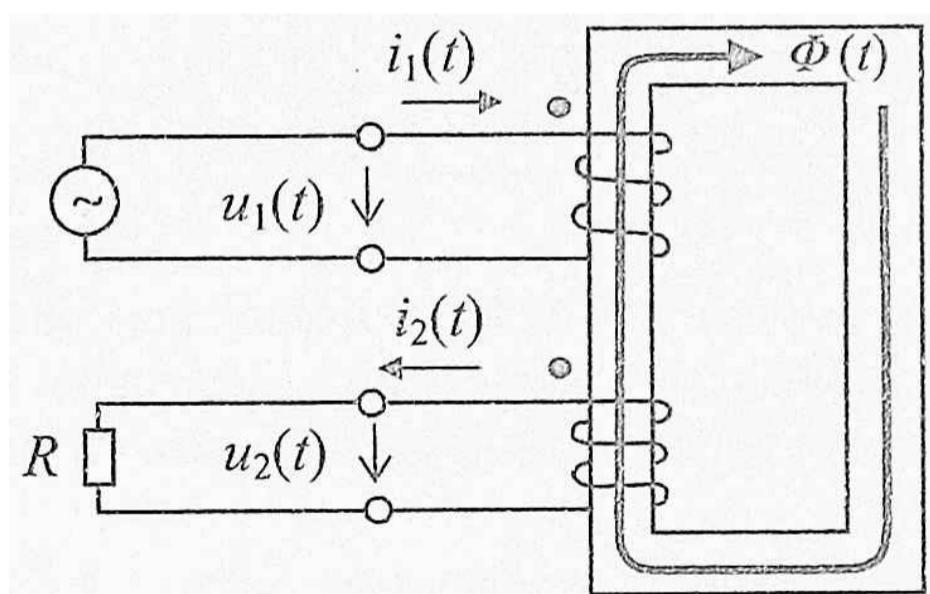
Obrázek 29.2.3.: Vzájemná orientace okamžité hodnoty proudu a napětí ve spotřebičovém a zdrojovém režimu: a) Odporník je vždy spotřebičem. b) Cívka ve spotřebičovém režimu. c) Cívka ve zdrojovém režimu.

Spotřebičový režim:

- Orientace svorkového napětí $u(t)$ je vůči proudu $i(t)$ souhlasná. Platí rovnice (29.2.7a).
- Cívka je připojena na zdroj napětí $u(t)$, odebírá z něj proud $i(t)$, tedy odebírá ze zdroje elektrickou energii a chová se jako spotřebič. Tuto energii přeměňuje na energii magnetického pole.
- Mezi směrem proudu a směrem toku platí *pravidlo pravé ruky*, PPR.

Zdrojový režim:

- Orientace svorkového napětí $u(t)$ je vůči proudu $i(t)$ nesouhlasná. Platí rovnice (29.2.7b).
- Cívka je vložena do proměnného magnetického pole $B(t)$, na jejích svorkách vzniká indukované napětí $u(t)$ (zastaralý výraz: „elektromotorická síla“). Z cívky se stal zdroj elektrického napětí $u(t)$, tj. generátor. Připojíme-li na svorky odpornou zátěž, začne do ní generátor dodávat elektrickou energii.⁵



Obrázek 29.2.4.: Princip transformátoru. Primární cívka pracuje ve spotřebičovém režimu (PPR), sekundární cívka ve zdrojovém režimu (PLR)

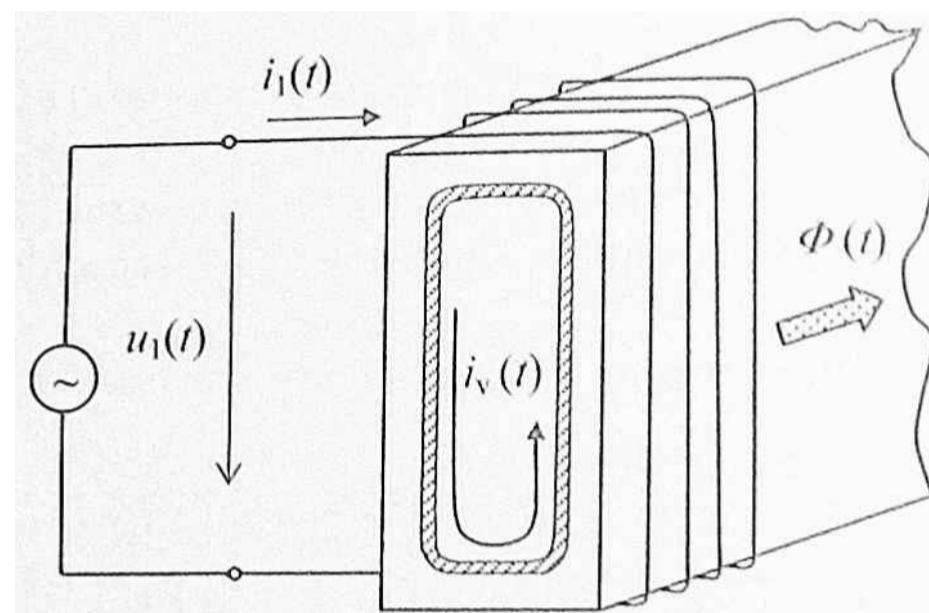
Z uvedených skutečností lze učinit následující závěr. Volba znaménka v rovnicích (29.2.7a, b) je věcí dohody, ale pouze v tom smyslu, zda zvolíme

⁵Faraday s Maxwelllem se znali osobně a po dohodě pokládali zdrojový režim cívky za základní, tedy pracovali s rovnicí (29.2.7b). Maxwell navíc pracoval s pojmem „electromotive force P' “, který svým významem přesně odpovídal dnešní „intenzitě elektrického pole“. Postupem času byl doslově přeloženému výrazu „elektromotorická síla“ nešťastně přiřazen v české i zahraniční literatuře význam „napětí“, což ještě více zvýšilo zmátek. Proto je rozumné výraz „elektromotorická síla“ vůbec nepoužívat.

za základní režim spotřebičový či zdrojový⁶. Například při analýze měničů ve výkonové elektronice je ustáleným zvykem zvolit označení proudu a napětí na indukčnosti podle obr. 29.2.3b. Bez ohledu na tuto volbu musíme v konkrétní situaci vždy pečlivě rozlišovat, ve kterém režimu se cívka skutečně nachází. Příklad: primární cívka transformátoru se nachází vždy ve spotřebičovém režimu, sekundární cívka vždy ve zdrojovém režimu. Se zdrojovým či spotřebičovým režimem úzce souvisí *Lenzův princip*⁷. Jedná se o zvláštní případ obecnějšího přírodního principu, vyjádřitelného jako „zákon akce a reakce“. V elektromagnetismu má zákon následující tvar:

Lenzův princip: Proud indukovaný v uzavřené vodivé smyčce vyvolá magnetické pole, které působí vždy proti původnímu budicímu poli, díky němuž indukovaný proud vznikl.

Všimněme si, že zmíněná „uzavřená vodivá smyčka“ se nachází *zdrojovém režimu*: je vložena do magnetického pole, indukuje se v ní napětí $u(t)$, které protlačí vodivým obvodem proud $i(t)$. Proud má ve *zdrojovém režimu* takový směr, že působí proti budicímu magnetickému poli. Příkladem je již zmíněná sekundární cívka transformátoru podle Obr. 1.1-*/« nebo uzavřená smyčka výřivého proudu ve vnitřním prostoru transformátorového plechu podle Obr. 1.1-5.



Obrázek 29.2.5.: Vznik výřivého proudu uvnitř elektricky vodivého transformátorového plechu. Budicí cívka pracuje ve spotřebičovém režimu (PPR). Elementární smyčka výřivého proudu odpovídá sekundárnímu vinutí a pracuje ve zdrojovém režimu (PLR).

Integrací rovnice (29.2.7a) lze zpětně dojít k integrálnímu tvaru (29.2.6). Je nutno zdůraznit, že obě rovnice jsou naprostě rovnocenné, navzájem převoditelné, obě nesou stejně množství informace, žádná není důležitější než druhá. Je pravdou, že z psychologického pohledu je indukční zákon snáze pochopitelný v *diferenciálním* tvaru (29.2.7). Pro hluboké porozumění magnetickým jevům je však nezbytné uvědomit si především jeho *integrální* podobu (29.2.6) se všemi matematickými důsledky:

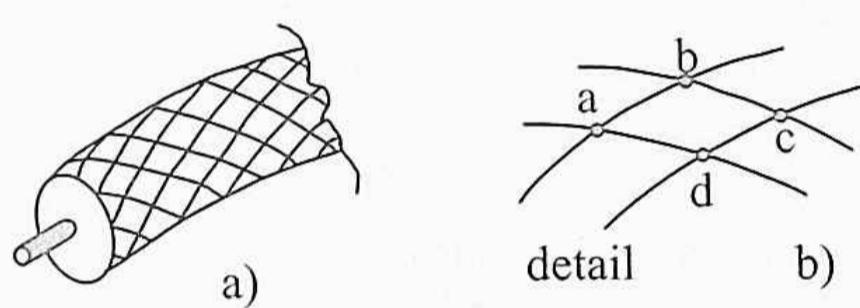
- Spřažený tok je roven integrálu napětí. Zákon platí *univerzálně*, bez ohledu na *linearitu* či *nelineárnu* magnetického obvodu. Rovnice (29.2.6) totiž definuje funkční závislost $\Psi = \Psi(u)$ mezi tokem a napětím, nikoli závislost $\Psi = \Psi(i)$ mezi *tokem a proudem*. Případná nelinearity se totiž týká výlučně závislosti $\Psi = \Psi(i)$, a tudíž nijak nenarušuje platnost rovnice (29.2.6).
- Z předchozího bodu plyne, že v obecném *nelineárním* případě není tok Ψ přímo úměrný proudu i . Přímá úměra $\Psi = Li$ totiž platí pouze ve zvláštním případě *lineárního* magnetického obvodu.
- Rovnice (29.2.6) platí ve spotřebičovém i generátorovém režimu cívky. Problém se znaménkem zůstává stejný jako u rovnic (29.2.7).

⁶Ojediněle se v literatuře, např. v [5], vyskytne názor, že znaménko v rovnicích (29.2.7a, b) je určeno tím, zda je cívka navinuta pravotočivě nebo levotočivě. To je chybné tvrzení. Pravotočivost či levotočivost cívky naprostě nijak nesouvisí se schopností cívky pracovat ve zdrojovém nebo spotřebičovém režimu.

⁷Heinrich Lenz (1804-1865), estonský fyzik, působil na univerzitě v Petrohradu. Princip po něm pojmenovaný objevil r. 1833.

- V uzavřené supravodivé smyčce platí vždy $u = 0$, i když jí teče konstantní ss. proud. Neurčitý integrál v rovnici (29.2.6) má pak nulovou hodnotu $\int 0dt = 0$, a zřejmě tedy platí $\Psi(t) = \Psi_0$, kde Ψ_0 je libovolná počáteční integrační konstanta. Fyzikálně má konstanta význam počátečního toku, který je v cívce naintegrován z předchozích dějů. Případ $\Psi_0 \neq 0$ odpovídá nabuzenému supravodivému magnetu, jehož tok $\Psi(t) = \Psi_0 = \text{konst.}$ se s časem nemění. Nabuzený supravodivý magnet se proto chová jako permanentní magnet. Případ $\Psi_0 = 0$ odpovídá magnetickému stínění pomocí závitu nakrátko, např. tzv. Faradayova klec, nebo stínění koaxiálního kabelu podle obr. 29.2.6. Každé oko a-b-c-d stínícího pláště tvoří „supravodivý“ závit nakrátko, v němž platí $u = 0$, tedy $\Psi = \int 0dt = 0$. Proto se do vnitřního prostoru ohraničeného pláštěm nemůže zvenčí dostat žádné střídavé rušivé magnetické pole (jedině pole stejnosměrné Ψ_{ss} , ale to je neškodné, protože nezpůsobuje vznik rušivého napětí ve středním vodiči kabelu; derivace konstanty je totiž nulová: $u(t) = \frac{d\Psi_{ss}}{dt} = 0$).

Na otázku „Proč je magnetický tok úměrný integrálu napětí?“ lze odpovědět pouze následujícím způsobem: „Protože je to jeden ze základních zákonů přírody, jehož správnost se nepodařilo experimentálně nikdy vyvrátit, nýbrž vždy pouze potvrdit.“ Deduktivní odvození indukčního zákona z vyšších přírodních zákonitostí není na úrovni klasické fyziky možné, není uskutečnitelné ani na vyšší úrovni kvantové elektrodynamiky⁸. Za povšimnutí stojí, že v diferenciální formě (29.2.7) nebylo přesné kvantitativní ověření indukčního zákona v době objevu proveditelné s ohledem na možnosti tehdejšího přístrojového vybavení. Experiment v nehomogenném poli podle obr. 29.2.2 by byl i v současnosti velmi těžko vyhodnotitelný. Naopak, ověření v integrálním tvaru je velmi snadné⁹. To opravňuje k domněnce vyslovené v historickém úvodu kapitoly.



Obrázek 29.2.6.: Plášť koaxiálního kabelu. Každé oko a-b-c-d tvoří závit nakrátko.

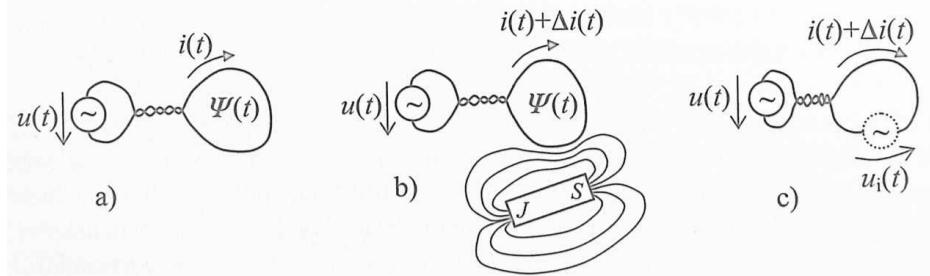
Příklad 29.2.1. Supravodivá cívka podle obr. 29.2.7 začne být v okamžiku $t = 0$ napájena ideálním zdrojem napětí $u(t)$. Později na ni začne působit vnější magnetické pole přibližujícího se permanentního magnetu. Jaký vliv bude mít PM na velikost spřaženého toku cívky?

Odpověď plyne přímo z rovnice (29.2.6): $\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t)dt$.

Ze zadání příkladu vyplývá, že počáteční integrační konstanta je nulová. Neurčitý integrál je možno nahradit integrálem určitým. Velikost spřaženého toku je tvarově definována přiloženým napětím, tedy hodnotou určitého integrálu. Proto externí magnetické pole nemůže spřažený tok cívky nijak změnit. Ideální napěťový zdroj má nulový vnitřní odpor. Proto se supravodivá cívka napájená tímto zdrojem stále chová jako supravodivý závit nakrátko, do něhož nemůže vniknout žádná siločára externího magnetického pole.

⁸Za objev kvantové elektrodynamiky obdržel Richard P. Feynman (1918-1988) Nobelovu cenu v r. 1965 (Feynmanovy fázorové diagramy a Feynmanův dráhový integrál; nositelé elektromagnetických sil jsou fotony). Vynikající teoretický fyzik, ale i praktik. Celoživotně působil na kalifornském technickém institutu. Během druhé světové války byl členem týmu pracujícího na vývoji americké atomové bomby v Los Alamos (projekt Manhattan).

⁹V současnosti by byl balistický galvanoměr nahrazen operačním zesilovačem zapojeným jako integrační zesilovač. Ten by zpracovával signál ze snímače proudu, např. z proudového bočníku. Po odezvě proudového impulsu by na výstupu zesilovače zůstalo naintegrováno určité konstantní napětí, jehož velikost by analogicky odpovídala maximální výchylce α_{max} galvanoměru.



Obrázek 29.2.7.: K příkladu, a) Supravodivá cívka je napájena ideálním napěťovým zdrojem, b) Později na ni začne působit externí pole pohybujícího se magnetu, c) Náhradní zapojení.

Jev lze vysvětlit následovně. Pohybující se magnet indukuje v cívce přídavné indukované napětí $u(t)$. Toto napětí se přičte k napětí napájecímu a způsobí změnu proudu $\Delta i(t)$ tekoucího cívou. Podle Lenzova principu začne tento přídavný proud působit proti poli PM. Přídavný proud $\Delta i(t)$ má přesně takovou velikost a směr, že uvnitř závitu dokonale vykompenzuje a zruší externí pole magnetu. Vnější pozorovatel tedy vidí, že supravodivý závit se chová jako magnetický izolant, jemuž se siločáry externího pole vyhnou, a celkový tok cívky není přítomností magnetu nijak ovlivněn. Celá soustava se navíc chová jako elektromechanický měnič energie (tj. motor), který je schopen pracovat v motorovém nebo generátorovém režimu. Pohybující se magnet totiž koná nebo spotřebovává mechanickou práci, protože na něj působí síla. Podle vzájemné okamžité orientace vektorů síly a rychlosti pracuje celá soustava bud' jako motor (koná mechanickou práci), nebo jako generátor (spotřebovává mechanickou energii a ukládá ji do zdroje napětí).

29.3. Spřažený tok vzduchové cívky

Experiment s galvanometrem popsáný v předchozí kapitole lze uskutečnit podrobněji ve čtyřech následujících modifikacích označených čísly 1 až 4. Pro výšší přehlednost budou těmito čísly systématicky značeny i veličiny v jednotlivých pokusech. Ze čtyř postupně gradujících experimentů vyplýne geometrická interpretace pojmu spřažený tok vzduchové cívky. Poznámka: V následujících experimentech se pokusná cívka nachází v generátorovém režimu. Učiníme však dohodu, že velikost toku budeme pro jednoduchost uvažovat v absolutní hodnotě, tj. bez ohledu na znaménko [Pat11, s. 12].

Experiment č. 1: Podle Obr ** je na ohebných zkroucených přívodech umístěna tuhá samonosná cívka, která má jeden závit o ploše ΔS . Plocha musí být malá, aby bylo možno předpokládat, že magnetické pole v těsném okolí cívky je homogenní (vektor indukce \mathbf{B}_1 , musí být v rámci cívky konstantní). Malé rovinné ploše závitu je pak možno přiřadit vektor \mathbf{B}_1 , jehož směr je kolmý na onu rovinu. Opakováním pokusu při různých úhlech α_1 , různě velkých plochách a různě velké indukci lze snadno zjistit, že velikost toku je přímo úměrná:

- veličině $\cos \alpha_1$,
- ploše závitu $\Delta S_1 \equiv \Delta S$,
- magnetické indukce B_1 .

To vede k jednoznačnému závěru, že tok lze vyjádřit jako skalární součin vektoru plochy a vektoru mg. indukce v daném místě „I“:

$$\int_0^{t_i} u(t)dt = \Psi_1 = B_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{S}_1. \quad (29.3.1)$$

29.4. Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem

Principiálně není transformátor nic jiného než soustava vzájemně magneticky vázaných cívek. Pro jednoduchost je v dalším popisu uvažován transformátor s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím, přičemž všechny závěry bude možné později rozšířit i na složitější systémy.

Při odvozování matematického modelu transformátoru vyjdeme z Faradayova zákona elektromagnetické indukce (druhá Maxwellova rovnice), který říká, že časová změna magnetického pole vytvoří výrové pole elektrické:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (29.4.1)$$

Vztah platí, uvažujeme-li nulovou velikost posuvného proudu tj. polarizačního a Maxwellova proudu. Tvoří-li smyčku l tenký vodič, indukuje se v něm napětí:

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (29.4.2)$$

V rov. 29.4.2 je úmyslně vynecháno záporné znaménko na pravé straně rovnice. To platí, je-li na vodič (cívku) pohlíženo jako na spotřebič napájený ze zdroje napětí (což odpovídá funkci primárního vinutí transformátoru). Takováto cívka vytvoří časově proměnné magnetické pole:

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad (29.4.3)$$

Konstanta Ψ_0 představuje Newtonovou počáteční integrační konstantu, funkce $\Psi(t)$ tzv. **spřažený magnetický tok s cívkou**. Je vidět, že *velikost spřaženého magnetického toku je úměrná pouze velikosti integrálu napětí na cívce, nemusí již být přímo úměrná proudu cívky* (to platí jen ve speciálním případě lineárních magnetických obvodů). Tento poznatek je velice důležitý, magnetický tok bude stejný jak pro vzduchové cívky, tak pro cívky s feromagnetickým jádrem (rozdíl bude spočívat pouze v průběhu a velikosti proudu cívky). Sycení jádra transformátoru napájeného ze zdroje napětí je závislé pouze na průběhu tohoto napětí. Pro spřažený magnetický tok cívky dále platí:

$$\Psi(t) = \oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} \quad (29.4.4)$$

kde S je orientovaná ohraničená plocha, jejíž hranice je tvořena křivkou l , viz probíhající osou vodiče po celé jeho délce. Tento vztah platí zcela obecně pro jakékoli prostředí, v nichž se magnetické pole nachází a pro libovolné tvary plochy S . Při návrhu transformátoru obvykle známe průběh spřaženého magnetického toku. Je vidět, že některé

29.4.4, který bychom pro tento konkrétní případ mohli upravit do podoby

$$\Psi(t) = \int \mathbf{B}_{vz}(t) \cdot d\mathbf{S}_{vz} + \sum_{i=1}^N \int \mathbf{B}_{Fe}(t) \cdot d\mathbf{S}_{Fe_i} \quad (29.4.5)$$

Protože vyčíslení tohoto vztahu je velice obtížné, zavedeme určité zjednodušující podmínky:

- zanedbáme rozptyl $B_{Fe} \gg B_{vz}$,
- magnetická indukce B_{Fe} je ve feromagnetiku rozložena homogenně a siločáry jsou kolmé k průřezu jádra.

Pak pro spřažený magnetický tok můžeme psát

$$\Psi(t) = N \cdot B_{Fe}(t) \cdot S_{Fe} = N \cdot \Phi(t) \quad (29.4.6)$$

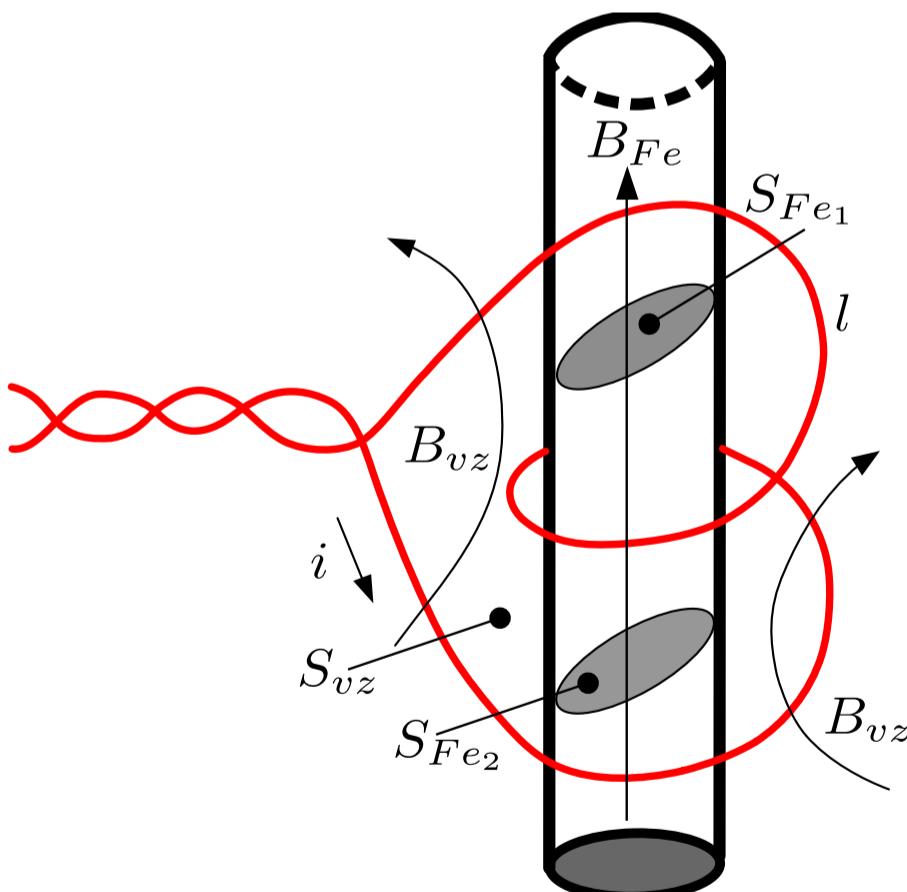
Rov. 29.4.6 by platila přesně, pokud by všechny indukční čáry \mathbf{B} protnuly plochu S_{Fe} N-krát. Ve skutečnosti ale všechny siločáry neprochází vsemi závity a vztah platí jen přibližně. Chyba je malá u feromagnetických obvodů (transformátory, cívky s feromagnetickým jádrem), kde je magnetická vodivost materiálu mnohonásobně větší, než magnetická vodivost vzduchu (řádově 1000x) a rozptyl je tudíž zanedbatelný. Velká je tato chyba například u vzduchových cívek, kde je rov. 29.4.6 nepoužitelná.

$$\begin{array}{lll} \Psi & \cong & N\Phi & \text{resp.} & \Psi(t) & \cong & N\Phi(t), \\ \Phi & = & B_{Fe}S_{Fe} & \text{resp.} & \Phi(t) & = & B_{Fe}(t)S_{Fe}. \end{array} \quad (29.4.7)$$

V literatuře bývá někdy spřažený tok cívky Ψ bez vysvětlení definován pomocí rovnice. To je nutno považovat za nešťastné. Za prvé se nejedná o "definici", ale o výsledek značně složitých výpočtů, za druhé tato rovnice *principiálně není přesná*

References

- [Pat11] M. Patočka. *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektronice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. VUTIUM, 2011, p. 564. ISBN: 9788021440036 (cit. on pp. 149, 152).



Obrázek 29.4.1.: Část magnetického obvodu se dvěma závity primárního vinutí.

indukční čáry B_{vz} neprocházejí materiélem jádra, jedná se o tzv. **rozptyl**. Přesný průběh spřaženého magnetického toku bychom získali aplikací rov.

30. Topologické vlastnosti elektromagnetického pole

Obsah

30.1. Topologie diskrétních útvarů	156
30.1.1. Základní pojmy teorie grafů	156

V předchozích kapitolách byly na mnohých místech zdůrazňovány některé topologické souvislosti. Kapitola o topologii je úmyslně zařazena až následně, jednak aby shrnula získané poznatky a v tiskla jim určitý řád, jednak aby čtenář již měl předchozí konkrétní představy o některých abstraktních pojmech [Pat11, s. 40].

Topologie je matematická disciplína, patřící do vyšších pater v hierarchii matematiky. Topologie se zabývá prostorovými útvary, podobně jako geometrie. Na rozdíl od geometrie ji však nezajímají kvantitativní ukazatele zkoumaných geometrických útvarů, nýbrž určité vyšší obecnější kvalitativní ukazatele. S nadsázkou lze říci, že je to "geometrie, která nic neměří". Topologie se dělí na dvě zdánlivě odlišné disciplíny:

- *Topologie diskrétních útvarů* neboli *teorie grafů* - zabývá se diskrétními prostorovými útvary, tj. *grafy*. Graf sestává z *uzlů* propojených *hranami*. Hrany mohou být *orientované* nebo *neorientované*. Všechny diskrétní elektrické obvody jsou *neorientovanými* grafy. Proto i všechny známe metody řešení diskrétních elektrických obvodů (metoda Kirchhoffových zákonů, metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí) podléhají zákonitostem diskrétní topologie.
- *Topologie spojitých útvarů* - zabývá se spojitými prostorovými útvary, tj. *plochami a křivkami* v prostorech libovolné dimenze. Patří sem všechny elektrické obvody s *parametry spojitě rozprostřenými* v 3D prostoru. Takovým útvarem je např. krabice naplněná elektricky vodivým grafitovým práškem, do níž umístíme v libovolných místech dvě nebo více elektrod. Intuitivně tušíme, že v prostoru krabice budeme pracovat s ekvipotenciálami v podobě *ploch* nebo se siločárami v podobě *křivek* atd.

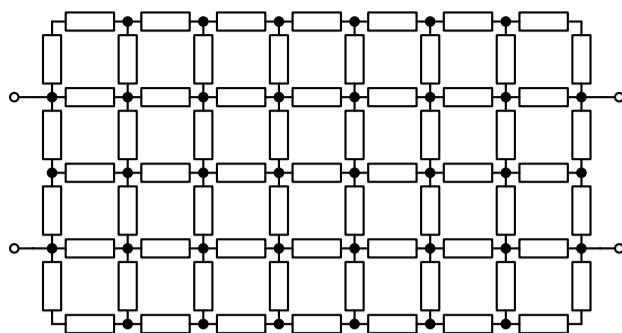
Elektrické obvody se chovají poněkud jinak než obvody magnetické:

- V *elektrických* obvodech je poměr mezi měrnou elektrickou vodivostí *vodičů* a *izolantů* minimálně 10^{12} , obvykle i větší. Proto lze snadno pomocí vodiče obaleného izolantem docílit toho, že elektrický proud teče pouze prostorově vymezenými *diskrétními* cestami. Pak je pochopitelné, že vhodným a *absolutně přesným* nástrojem k analýze elektrického obvodu je *topologie diskrétních útvarů*.
- V *magnetických* obvodech je poměr mezi měrnou magnetickou vodivostí (permeabilitou) *vodičů* a *izolantů* typicky 10^3 , což je dáno relativní permeabilitou feromagnetik vůči vakuu. Vakuum je tedy *velmi špatný* magnetický izolant a lepší v přírodě bohužel neexistuje. V této situaci je obtížné realizovat ryze diskrétní magnetický obvod, protože železo neumíme "obalit" kvalitním magnetickým izolantem. U cívky se železným jádrem podle obr. 29.4.1 v kapitole 29.4 jsme ukázali, že rozptylový tok vzdušných cest činí řádově 1 % až 5 % z toku celkového. Takový obvod je sice již řešitelný metodami *diskrétní topologie*, ale pouze přibližně. Je to běžný inženýrský postup, který se v praxi velmi úspěšně používá. Pokud však rozptylový tok nehceme nebo nemůžeme zanedbat, je nezbytné pracovat metodami *topologie spojitých útvarů*¹. Berme to jako ukázku, že mezi oběma topologiemi je hluboký vztah, i když není na první pohled patrný.

Na první pohled se zdá, že obě topologie využívají natolik odlišných matematických postupů, že spolu tyto disciplíny nijak nesouvisí. Opak je pravdu. Mezi oběma panuje hluboký vztah, obě vycházejí ze stejných základů. Vysvětlení lze hledat na obr. 30.0.1. Je zde nakreslen *přenosový dvojbran* se zcela obecnou vnitřní strukturou, která může mít např. podobu husté vodivostní² síť, ve které mají jednotlivé vodivosti

¹Všimněme si ale, že ke zjednodušeným výrazům pro výpočet spřaženého toku v *diskrétním* obvodu jsme dospěli pomocí integrálních metod, které používá topologie *spojitých* útvarů

²V magnetických obvodech je psychologicky výhodnější pracovat s magnetickými vodivostmi než s magnetickými odpory (reluktancemi). Permeabilita má totiž význam *měrné magnetické vodivosti*



Obrázek 30.0.1.: Pasivní dvojbran v podobě husté vodivostní sítě

nahodile různé hodnoty. S ohledem na dobře známé analogie je lhostejné, zda se jedná o *elektrický* nebo *magnetický* obvod. Nakreslený obvod je zcela určitě *diskrétní*, bude tedy řešen některou klasickou diskrétní metodou, např. metodou smyčkových proudů nebo metodou uzlových napětí. Výpočtem zjistíme, že z pohledu vstupní a výstupní brány má dvojbran konkrétní přenosové parametry (napěťový přenos naprázdno, proudový přenos nakrátko, vstupní impedanci naprázdno, nakrátko, atd.) Učíme následující myšlenkový pokus: vodivostní síť budem neustále zjemňovat. Tj., ve smíru vodorovném i svislém budeme zvyšovat počty prvků, ale tak, aby celková vodivost na jednotku délky zůstávala v dané oblasti *konstantní*. Výsledkem zjemňování bude v limitním případě vznik *spojité* vodivé desky (např. izolační podložka nastříkaná elketicky vodivým odporovým lakem). Mezi původním diskrétním obvodem a deskou zřejmě platí následující souvislosti:

- Původní diskrétní vodivosti byly nahodile různé → deska bude *nehomogenní, anizotropní*.
- Původní diskrétní vodivosti byly stejně velké ve směru x a stejně velké (ale s jinou hodnotou ve směru y) → deska bude *homogenní anizotropní*.
- Všechny diskrétní vodivosti měly stejnou hodnotu → deska bude *homogenní, izotropní*.

Intuitivně tušíme, že vytvořená *spojitá* deska³ bude mít všechny přenosové parametry číselně shodné s původním *diskrétním* obvodom. Přitom ale u desky nelze tyto parametry určit klasickými diskrétními metodami (nelze určit matici obvodu). Je nutný přechod od diskrétních operací k operacím integrálním, tedy od topologie *diskrétních útvarů* k topologii *spojitých útvarů*. Z uvedeného myšlenkového pokusu plyne, že v *limitním případě* velmi jemné síti musí dát diskrétní i spojité operace stejný kvantitativní výsledek. Na tomto poznatku je založeno přibližné řešení spojitých prostorových polí *metodami konečných prvků*.

Především jsme ovšem chtěli ukázat, že mezi diskrétními a spojitými topologickými metodami není zásadního rozdílu, obě vycházejí ze stejných základů a v limitním případě spolu splývají.

30.1. Topologie diskrétních útvarů

Cílem této kapitoly je především vysvětlit *princip reciprocity* v pasivních elektrických obvodech a pomocí něho odvodit *počet stupňů volnosti* elektrických obvodů. Zvláštním případem obvodu je *pasivní přenosový dvojbran*, u kterého bude dokázáno, že má vždy *tři stupně volnosti*. Tento poznatek má totiž mimořádný význam v teorii *transformátorů*, který je právě typickým představitelem přenosového dvojbranu. V kapitolách zabývajících se transformátorem - především jeho náhradním zapojením - se budeme odvolávat na výsledky získané v této kapitole.

30.1.1. Základní pojmy teorie grafů

Názvosloví a základní pojmy teorie grafů lze shrnout do následujících bodů:

³Uvedený příklad se týká dvojrozměrné desky. Příklad lze jistě zobecnit na trojrozměrné objekty (lze si představit krabici naplněnou vodivým grafitovým práškem, do které zavedeme čtyři bodové elektrody).

- Základním pojmem je *graf* (graf orientovaný, neorientovaný). Graf je vlastně „schéma“ příslušného obvodu s vyněchanými obvodovými prvky.
- Graf sestává z *uzlů* a *hran*.
- Uzel je spojení alespoň tří hran⁴.
- Hrana může být *orientovaná* (je jí přiřazen směr), *neorientovaná* (nemá přiřazen směr). V elektrotechnice se používají výhradně neorientované hrany - tedy i grafy (vlastnosti obvodových prvků R, L, C jsou nezávislé na směru proudu).
- *Úplný strom*: nepřerušená celistvá soustava nejmenšího počtu hran, která spojuje všechny uzly grafu.
- *Nezávislá hrana*: hrana nepatřící do úplného stromu.
- *Nezávislá smyčka*: uzavřená smyčka, která musí obsahovat nezávislou hranou, tj. hranu nepatřící do úplného stromu.
- Nezávislých smyček je tolik, kolik je nezávislých hran.

Označme v grafu:

- Počet uzlů: $q + 1$
- Počet hran úplného stromu: q
- Počet hran (počet neznámých proudů): p
- Počet nezávislých hran (nezávislých smyček): $n = p - q$

U složitých obvodů je hledání n nezávislých smyček obtížné. Proto se k tomuto účelu používá úplný strom, jehož nalezení je snadné. Nezávislé hrany jsou ty, které nepatří do úplného stromu. Každou nezávislou hranou pak musí procházet alespoň jedna nezávislá smyčka. Všechny pojmy budou ukázány na konkrétním příkladu.

Řešením obvodu se rozumí: Nalezení všech p neznámých proudů ve všech p hranách. Principiálně se vždy jedná o řešení soustavy p rovnic o p neznámých proudech.

K řešení lze použít tři metody:

- Metoda založená na přímém použití I. a II. Kirchhoffova zákona⁵. Je nejméně efektivní, vede na nejrozsáhlejší soustavu p rovnic o p neznámých.
- Metoda smyčkových proudů (Mesh Currents Matrix Method), Maxwellova metoda. Vede na soustavu pouze n rovnic o n neznámých smyčkových proudech⁶. Vezmeme-li v úvahu nejsložitější obvod, ve kterém je každá dvojice uzlů spojena hranou, pak bude:

$$n = p - q = \frac{q(q - 1)}{2}, \quad (30.1.1)$$

což je podstatně méně rovnic než p .

References

- [Pat11] M. Patočka. *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektrotechnice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. VUTIUM, 2011, p. 564. ISBN: 9788021440036 (cit. on p. 155).

⁴Spojení dvou hran je elektrický bod, nikoli uzel.

⁵Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), německý fyzik, působil na univerzitách v Heidelbergu a v Berlíně. I. a II. KZ objevil r. 1845 ještě jako student. Dále se zabýval spektroskopíí, tepelnou radiací černého tělesa, spoluobjevitel Cesia a Rubidia. Žák F. E. Neumanna.

⁶Ze smyčkových proudů lze skutečné proudy snadno vyřešit pomocí doplňkových rovnic sestavených pomocí I. KZ.

31. Teorie transformátoru

Obsah

31.1. Transformátor jako lineární pasivní dvojbran	157
31.1.1. Předpoklady analýzy	158
31.1.2. Princip reciprocity u transformátoru	158
31.1.3. Počet stupňů volnosti transformátoru	158
31.2. Matematické modely lineárního transformátoru . .	158
31.2.1. Základní model transformátoru ve tvaru impedanční \mathbb{Z} -matice	158
31.3. Klasifikace a názvosloví transformátoru	158
31.4. Souvislost indukovaného napětí a proudu cívky . .	158
31.5. Princip činnosti, základní konstrukční provedení . .	159
31.6. Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	159
31.6.1. Situace při sekundárním vinutí naprázdno . . .	159
31.6.2. Situace při zatížení sekundárního vinutí	160
31.7. Ztráty v reálném transformátoru	161
31.7.1. Joulový ztráty ve vinutí	161
31.7.2. Hysterezní ztráty v jádře	161
31.7.3. Ztráty vřivými proudy v jádře	162
31.8. Rozptyl transformátoru	162
31.9. Cívky s feromagnetickým jádrem	162
31.9.1. Fyzikální rozbor a příprava pro návrh	162
31.9.2. Důsledky a význam použití vzduchové mezery	162
31.10. Efektivní hodnoty proudů typických průběhů . . .	163

Před zahájením studia této kapitoly je naprosto nezbytné nejdříve pročist kapitolu 30 a seznámit se s *principem reciprocity* v pasivních přenosových soustavách, s *počtem stupňů volnosti* pasivních soustav, s popisem přenosového dvojbranu pomocí matic typu \mathbb{Z} , \mathbb{Y} a \mathbb{H} a konečně se základními *přenosovými parametry* dvojbranu.

Zvláštním a neobvyklým cílem této kapitoly je, kromě jiného, podání dvou nezávislých matematických důkazů, že *přesných* náhradních zapojení transformátoru lze sestrojit *nekonečně mnoho*, přičemž pouze dvě z nich, tj. Γ -článek a obrácený T -článek mají mimořádný význam. Bude ukázáno, že používání klasického T-článku je sice možné, ale je zbytečně složité! Bude podán matematický důkaz, že lpění na náhradním zapojení v podobě T-článku postrádá jakýkoli fyzikální i matematický smysl a v žádém případě nepřináší žádné výhody. Stejné výsledky můžeme nalézt ve [22], [23]. Tyto moderní postupy lze porovnat s klasickou teorií, uvedenou např. ve [20], [21].

Problematika transformátoru je rozdělena do dvou základních částí. V první je transformátor představen jako lineární pasivní dvojbran, ve druhé jako nelineární pasivní dvojbran. Postupně bude věnována pozornost následujícím tématům.

Transformátor jako lineární pasivní dvojbran:

- Princip reciprocity. Počet stupňů volnosti.
- Názvosloví a klasifikace transformátorů.
- Názvosloví a klasifikace přípustných modelů transformátoru.
- Základní fyzikální model ve tvaru impedanční \mathbb{Z} -matice.
- Model transformátoru *napětí* ve tvaru hybridní $\mathbb{H}_{\mathbb{U}}$ -matice.
- Model transformátoru *proudu* ve tvaru hybridní $\mathbb{H}_{\mathbb{I}}$ -matice.
- *Ekvivalentní* zapojení transformátoru. Z něho plynoucí experimentální identifikace parametrů.

• *Náhradní* zapojení transformátoru. Dvě odlišné metody hledání náhradního zapojení:

- metoda separace rozptylových indukčností,
- metoda stejně vstupní impedance.

Obě metody vedou k témuž výsledku: přesných náhradních zapojení existuje nekonečně mnoho. Lze je rozdělit do dvou tříd: třída fyzikálně *realizovatelných* třída *nerealizovatelných* zapojení (ale přesto matematicky korektních). Vypovídací schopnost náhradního zapojení.

- Vztah mezi Hopkinsonovými činiteli rozptylu ν a činitelem vazby k .

Transformátor jako nelineární pasivní dvojbran:

- Matematický model transformátoru napětí a proudu s nelineární magnetizační charakteristikou feromagnetika, bez uvažování hystereze.
- Teoretické zdůvodnění známého experimentálního faktu, že nelinearity magnetizační charakteristiky nemá negativní vliv na linearitu *napěťového přenosu* transformátoru.

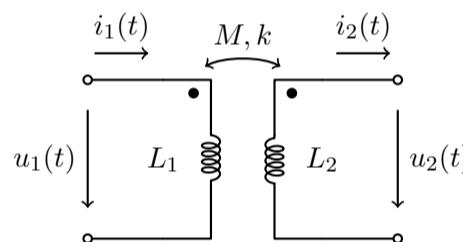
31.1. Transformátor jako lineární pasivní dvojbran

Při řešení drtivé většiny problémů vyskytujících se v technické praxi je možno pohlížet na transformátor jako na lineární přenosový dvojbran.

31.1.1. Předpoklady analýzy

Transformátor podle obr. 31.1.1 je typickým představitelem pasivního přenosového dvojbranu. Analýza transformátoru bude provedena za následujících předpokladů:

- Magnetizační charakteristika feromagnetického obvodu je lineární.
- Na obrázku je úmyslná odchylka oproti obvyklému značení směru sekundárního proudu. Jeho směr je totiž volen ve shodě s předpokladem, že transformátor je na výstupu zatížen pasivní zátěží pracující ve spotřebičovém režimu, tj. odporem. Jsou-li začátky obou vinutí označeny tečkami, pak pro okamžité hodnoty proudů i napětí jsou orientace všech čtyř šipek správné, tj. ve shodě se skutečností. Toto je důležitý předpoklad, který z psychologického hlediska zvláště studentům velmi usnadňuje analýzu a pochopení činnosti (není pedagogicky vhodné komplikovat analýzu neprůhledným režimem, s aktivní zátěží na sekundáru).
- Neexistují vířivé ztráty ve feromagnetiku. Vířivé ztráty však bude možno na základě získaných výsledků velmi přesně analyzovat a přidat do modelu transformátoru.
- Neexistují hysterézní ztráty ve feromagnetiku. Navíc problém hystereze nepřísluší do oblasti lineárních obvodů.
- Neexistují Jouleovy ztráty v mědi. Klademe tedy předpoklad $R_{Cu1} = 0, R_{Cu2} = 0$. Tato podmínka však neubírá na obecnosti řešení. Odpor primárního vinutí lze totiž snadno separovat mimo transformátor a myšlenkově zahrnout do vnitřní impedance napájecího zdroje, podobně odpor sekundárního vinutí lze zahrnout do impedance zátěže. Oba odpory je možno do matematického modelu velmi snadno zpětně znova začlenit.
- Nejsou uvažovány parazitní kapacity jednotlivých vinutí ani kapacita mezi oběma vinutími.



Obrázek 31.1.1.: Schématická značka transformátoru. Orientace okamžitých hodnot vstupních a výstupních signálů s respektováním pasivní zátěže ve spotřebičovém režimu.

31.1.2. Princip reciprocity u transformátoru

Princip reciprocity je nejobecnější vlastností všech *pasivních přenosových soustav*, jak bylo dokázáno v kap. 30. Princip reciprocity souvisí se známým poznatkem, že \mathbb{Z} - i \mathbb{Y} -matice každého lineárního pasivního elektrického obvodu je vždy symetrická podle hlavní diagonály. To znamená, že vždy platí $z_{ij} = z_{ji}$ a současně $y_{ij} = y_{ji}$. Všimněme si, že \mathbb{Z} -matice 31.2.2 transformátoru skutečně vyhovuje principu reciprocity, až na znaménko. Obě záporná znaménka v matici jsou důsledkem změny směru proudu $i_2(t)$ na opačný (realistický), podle obr. 31.1.1, a nejsou na závadu. Platnost principu reciprocity u transformátoru je velmi důležitá, protože v platnosti principu spočívá jediná možnost jak dokázat, že vzájemná indukčnost a činitel vazby transformátoru jsou pro oba směry přenosu stejné, tj. že platí

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (31.1.1)$$

$$k_{12} = k_{21} = k \quad (31.1.2)$$

Oba vztahy jsou neomylně platné pro „*dva jakkoli libovolně v prostoru tvarované vodiče, a to buď bez přítomnosti feromagnetika nebo i společně s ním*“. To jest, oba vztahy jsou platné v lineárním prostředí, které však může být magneticky nehomogenní (tj. permeabilita μ nemusí být v prostoru konstantní, může být funkcií prostorových souřadnic).

Poznámka 31.1.1. Rovnice (31.1.2-1), (31.1.2-2) totiž obecně vůbec nevyplývají z Neumannova vzorce

31.1.3. Počet stupňů volnosti transformátoru

31.2. Matematické modely lineárního transformátoru

31.2.1. Základní model transformátoru ve tvaru impedanční \mathbb{Z} -matice

Pro okamžité hodnoty lze \mathbb{Z} -matici psát ve tvaru

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - u_{i1}(t) \quad (31.2.1a)$$

$$u_2(t) = u_{i2}(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (31.2.1b)$$

$$\text{neboli: } u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (31.2.2a)$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (31.2.2b)$$

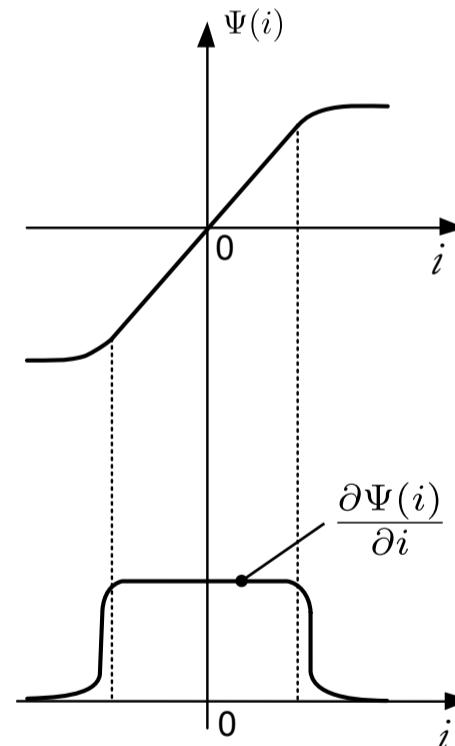
31.3. Klasifikace a názvosloví transformátoru

31.4. Souvislost indukovaného napětí a proudu cívky

Bylo již řečeno, že časový průběh spřaženého magnetického toku je úměrný integrálu napětí na cívce, nemusí však již být přímo úměrný proudu cívky. Indukované napětí je jednoznačně určeno rov. 29.4.2. Spřažený magnetický tok je obecnou funkcí proudu cívky, přičemž proud je funkcí času:

$$\Psi(t) = f[i(t)] \quad (31.4.1)$$

Dosadíme-li rov. 31.4.1 do rov. 29.4.2 a použijeme-li větu o derivaci



Obrázek 31.4.1.: Statická magnetizační charakteristika transformátoru s feromagnetickým jádrem a závislost diferenciální indukčnosti na proudu.

složené funkce¹, obdržíme pro napětí na cívce:

$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{\Psi(i)}{di} \frac{di}{dt} = L_d \cdot \frac{di}{dt} \quad (31.4.2)$$

kde $L_d = \frac{d\Psi(i)}{di}$ má význam **diferenciální indukčnosti**. Ta může být ve speciálních případech konstantní, ale ve většině reálných aplikací je funkčí

¹Je-li $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, potom derivace y podle proměnné x je rovna derivaci y podle proměnné u , násobené derivací u podle proměnné x

proudů cívkou. Jako příklad uvedeme transformátor s feromagnetickým jádrem. Zde je závislost spřaženého magnetického toku na proudu silně nelineárně závislá, obr. 31.4.1. Potom mluvíme o nelineárních magnetických obvodech.

Na obr. 31.4.1 je zobrazena **statická magnetizační charakteristika** a její derivace, představující průběh diferenciální indukčnosti vinutí v závislosti na proudu. Vidíme, že pro malé proudy je indukčnost největší s rostoucím proudem prudce klesá, nastane-li tzv. přesycení magnetického obvodu transformátoru. Tomuto režimu se snažíme správným návrhem transformátoru vyhnout. Velmi často se v technické praxi zavádí zjednodušení, při kterém se reálný magnetický obvod linearizuje - diferenciální indukčnost je považována za konstantní (nezávislá na proudu cívkou). Mluvíme pak o lineárních magnetických obvodech. Toto zjednodušení je použitelné pouze tehdy, pokud reálný magnetický obvod (transformátor) provozujeme v určitých mezích magnetizačního proudu, kdy se skutečná indukčnost příliš nemění. Nelineární magnetizační charakteristika na obr. 31.4.1 se linearizuje do podoby na obr. 31.4.2.

Závislost spřaženého magnetického toku na proudu cívkou je tedy lineární ($L = \text{konst}$) viz obr. 31.4.2:

$$\Psi(t) = f[i(t)] = L \cdot i(t) \quad (31.4.3)$$

Dosazením spřaženého magnetického toku do Faradayova zákona elektromagnetické indukce - rov. 29.4.2

$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{d}{dt} [L \cdot i] = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (31.4.4)$$

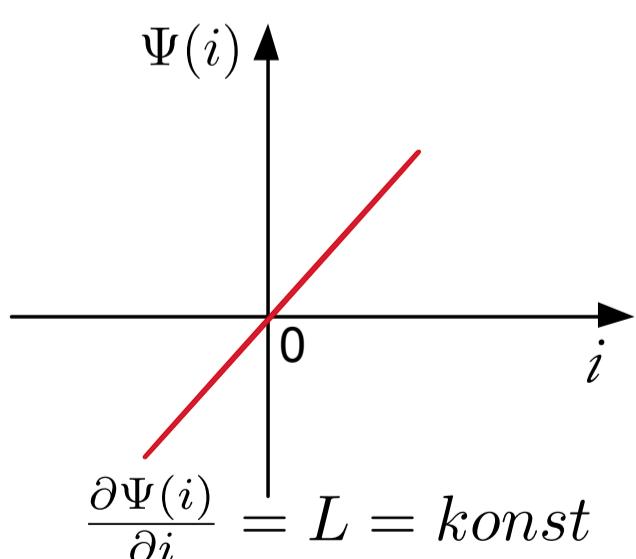
Ve zvláštním případě stejnosměrných veličin, kdy proud má lineární charakter, přejde vztah 31.4.3 do tvaru, který představuje tzv. **statickou definici indukčnosti**.

$$\Psi(t) = L \cdot I \quad (31.4.5)$$

Je ale třeba zdůraznit, že rov. 31.4.3, rov. 31.4.4 a rov. 31.4.5 platí pouze pro lineární magnetické obvody. Jestliže jsou použity při matematickém popisu transformátorů nebo cívek s feromagnetickým jádrem, je třeba mít na paměti, že tento linearizovaný model lze použít jen v určitém omezeném rozsahu daným skutečnou magnetizační charakteristikou. Nicméně, lineární model transformátoru je pro svou jednoduchost často používán.

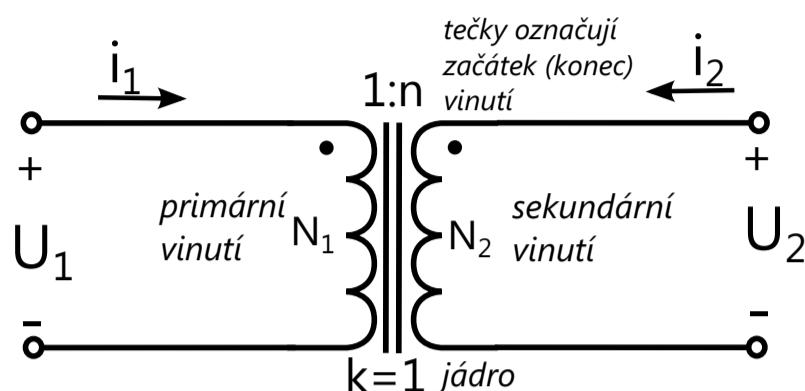
31.5. Princip činnosti, základní konstrukční provedení

Definice 31.5.1. *Transformátor je elektrický netočivý stroj, který umožňuje přenáset elektrickou energii z jednoho obvodu do jiného pomocí vzájemné elektromagnetické indukce. To znamená, že mění její parametry (napětí, proudy), přitom forma energie na vstupu i výstupu zůstává elektrická.*

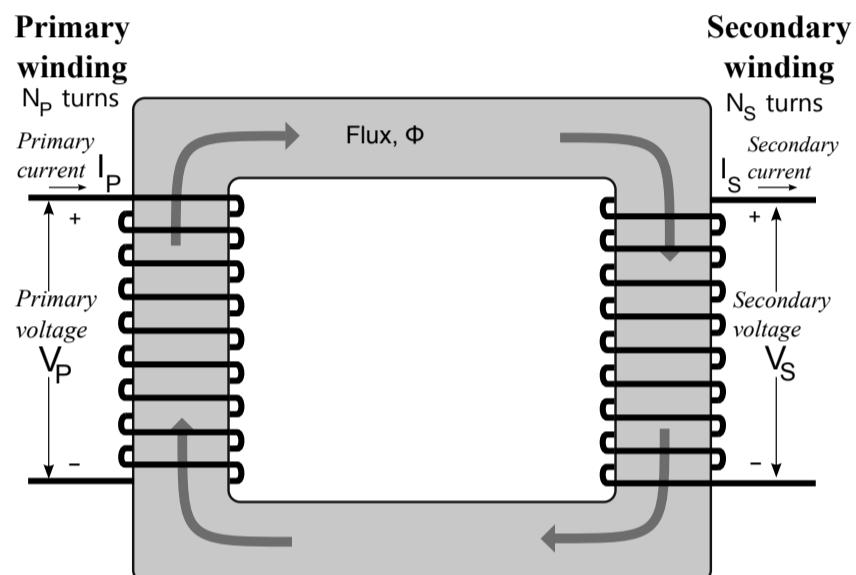


Obrázek 31.4.2.: Linearizovaná magnetizační charakteristika. Směrnice této přímky je právě rovna L

Transformátory jsou nezbytnou součástí řady elektrotechnických zařízení, počínaje vazebními a napájecími transformátory sdělovacích a polovodičových zařízení až k transformátorům blokovým a přenosovým, užívaným v energetice. Jejich výkony se pohybují od zlomků VA do stovek MVA. Podobně je tomu s jejich napětími od malých až po vvn. Zásadně transformátory mohou být jedno nebo vícefázové (obvykle třífázové)



(a) Schématická značka transformátoru s jádrem



(b) Principiální provedení transformátoru se dvěma vinutími

Obrázek 31.5.1.: Ideální transformátor s jádrem, s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím. Tečky označují začátky (resp. konec) vinutí. Význam má jejich poloha tečky vůči druhé. Budeme-li je chápat jako začátky vinutí, měl by se drát primáru a sekundáru vinout tak, jak je naznačeno na obrázku

Princip transformátoru je založen na **zákonu elektromagnetické indukce** - tedy magnetický tok vybuzený jedním vinutím indukuje napětí ve vinutí druhém (primár, sekundár). Obrázek 31.5.1b ukazuje, že magnetický tok je z jednoho vinutí do druhého veden prostřednictvím magnetického obvodu. Fyzikální princip vychází z **2. Maxwellovy rovnice** 29.4.1.

Převod transformátoru

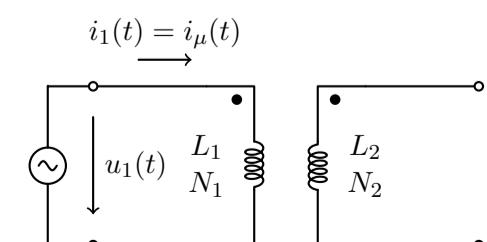
$$n = \frac{N_1}{N_2}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (31.5.1)$$

31.6. Zjednodušený rozbor funkce transformátoru

Uvažujme pro začátek transformátor s dokonale těsnou vazbou, tedy s činitelem vazby $k = 1$, s nulovým rozptylovým magnetickým tokem a s konečnou velikostí indukčnosti L_1 a L_2 primárního a sekundárního vinutí

31.6.1. Situace při sekundárním vinutí naprázdno

Podle indukčního zákona platí pro primární a



Obrázek 31.6.1.: Transformátor naprázdno.

sekundární napětí

$$u_1(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (31.6.1a)$$

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (31.6.1b)$$

kde $\Phi_\mu(t)$ je magnetický tok v jádře. Porovnáním rov. 31.6.1a a rov. 31.6.1b dostaneme následující rovnici:

$$u_2(t) = u_1(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (31.6.2)$$

Je zřejmé, že $u_1(t)$ a $u_2(t)$ mohou mít sice různou velikost, ale mají zcela stejný časový průběh. Z rov. 31.6.1a plyne, že magnetický tok je jednoznačně určen časovým integrálem z přiloženého primárního napětí:

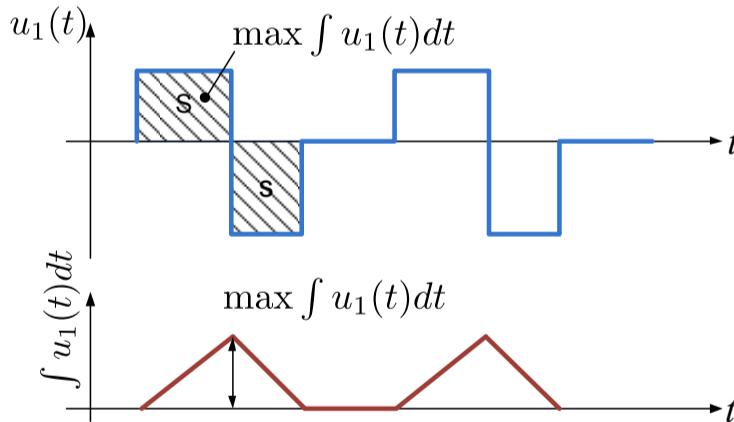
$$\Phi_\mu(t) = \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} + \Phi_{\mu_{poc}} \quad (31.6.3)$$

Primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu, tj. nesmí mít stejnosměrnou složku, jinak by magnetický tok rostl nade všechny meze (v praxi do přesycení). Velikost integrační konstanty $\Phi_{\mu_{poc}}$ závisí na konkrétním režimu transformátoru. Z rovnice také plyne užitečný vztah:

$$\Delta\Phi_\mu(t) = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1} \quad (31.6.4)$$

Je-li $u_1(t)$ periodická funkce s nulovou střední hodnotou, pak neurčitý integrál z $u_1(t)$ je rovněž periodická funkce, jejíž střední hodnota již ovšem nulová být nemusí (viz obr. 31.6.2). Φ_μ je rozkmit magnetického toku v jádře transformátoru. Z rovnice 31.6.3 je patrné, že bez bližší znalosti režimu transformátoru sice nelze přesně stanovit meze, v nichž se magnetický tok periodicky pohybuje, ale dle rov. 31.6.4 umíme přesně stanovit rozkmit toku čili vzdálenost mezi. Pro předpokládané homogenní rozložení pole ve feromagnetickém jádře lze určit rozkmit magnetické indukce:

$$\Delta B_\mu(t) = \frac{\Delta\Phi_\mu(t)}{S} = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1 S} \quad (31.6.5)$$



Obrázek 31.6.2.: Znázornění časového integrálu primárního napětí transformátoru.

pro lineární magnetické obvody vztah mezi tokem a magnetizačním proudem:

$$N_1 \Phi_\mu(t) = L_1 i_\mu(t) \quad (31.6.6)$$

Proud $i_\mu(t)$ je primární proud při sekundárním vinutí naprázdno, tzv. **magnetizační proud**. Je tedy přímo úměrný magnetickému toku $\Phi_\mu(t)$.

$$i_\mu(t) = \frac{N_1 \Phi_\mu(t)}{L_1} \quad (31.6.7)$$

Dosadíme-li za $\Phi_\mu(t)$ rov. 31.6.3 uvedené na stránce 160, dostaneme známý vztah mezi proudem a napětím cívky, vyjádřený v integrálním

tvaru:

$$i_\mu(t) = i_{\mu_{poc}} + \frac{1}{L_1} \int u_1(t) dt \quad (31.6.8)$$

Opět vidíme, že primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu.

31.6.2. Situace při zatížení sekundárního vinutí

Rovnice 31.6.2 až rov. 31.6.8 zůstávají v platnosti. Připojíme-li k sekundárnímu vinutí zátěž, začne téci sekundární proud $i_2(t)$. Např. pro odporovou zátěž bude platit

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (31.6.9)$$

Se sekundárním proudem je svázán magnetický tok $\Phi_2(t)$

$$\Phi_2(t) = \frac{L_2 i_2(t)}{N_2} \quad (31.6.10)$$

Proud $i_2(t)$, tedy i tok $\Phi_2(t)$, mohou mít bohužel stejnosměrnou složku (zátež může být např. jednocestný usměrňovač). Stejnosměrnou složku proudu však transformátor obecně neumí přetransformovat na primární stranu a pak dochází ke stejnosměrné předmagnetizaci jádra (sekundární proud stejnosměrnou složku obsahuje, primární proud nikoli). Jedná se o škodlivý jev, který může způsobit, zvláště při větších proudech i přesycení magnetického obvodu. Jev nastává např. při napájení transformátoru ze sítě. Síť se totiž jeví v průběhu celé pracovní periody jako napěťový zdroj s malou vnitřní impedancí. Za zvláštních okolností transformátor stejnosměrnou složku transformovat umí, např. v jednočinném propustném měniči. Zde je transformátor po určitou část periody od primárního zdroje odpojen, v té chvíli se vnitřní impedance primárního zdroje jeví jako nekonečně velká. Oba typy napájení je nutno rozlišovat.

Dále proto uvažujeme pouze takové typy zátěží, které stejnosměrnou složku nevytvářejí (např. zátež typu dvoucestný můstkový usměrňovač již tuto nečistotu nemá). Pak při uvažování dokonalé vazby, tj. při činiteli vazby $k = 1$, je v celém magnetickém obvodu sekundární tok $\Phi_2(t)$ plně vykompenzován primárním tokem $\Phi_1(t)$ stejně velikosti, ale opačného znaménka. Tok $\Phi_1(t)$ je svázán s "přídavným" primárním proudem, tedy proudem přetransformovaným ze sekundáru na primár - nazvaný jako $i'_1(t)$. Proud vzniká v primárním vinutí v důsledku Lenzova pravidla. Je zodpovědný za čerpání energie z primárního napájecího zdroje a jeho existence je současně v souladu se zákonem zachování energie

$$\Phi_1(t) = \frac{L_1 i'_1}{N_1} = \Phi_2(t) \quad (31.6.11)$$

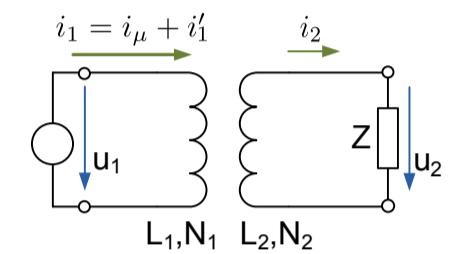
Srovnáním rov. 31.6.10 a rov. 31.6.11 obdržíme známý vztah pro transformaci proudů:

$$i'_1(t) = i_2(t) \frac{L_2 N_1}{N_2 L_1} = i_2(t) \frac{N_2^2 N_1}{N_2 N_1^2} = i_2(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (31.6.12)$$

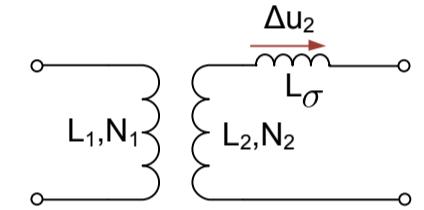
Celkový primární proud $i_1(t)$ tedy při zatížení transformátoru sestává ze dvou zcela nezávislých složek. Jednou složkou je magnetizační proud $i_\mu(t)$, který tekl už i ve stavu naprázdno (a nyní při zatížení se nezměnil) a druhou je výše zmínovaný přetransformovaný proud $i'_1(t)$:

$$i_1(t) = i'_1(t) + i_\mu(t) \quad (31.6.13)$$

Z dosud uvedených skutečností plyne důležitý závěr: tok v jádře zůstává nezměněn i při zatížení, je tedy stále roven původnímu toku $\Phi_\mu(t)$,



Obrázek 31.6.3.: Transformátor zatížený.



Obrázek 31.6.4.: Zjednodušená představa rozptýlu reálného transformátoru.

protože tok $\Phi_1(t)$ od proudu $i'_1(t)$ a tok $\Phi_2(t)$ od proudu $i_2(t)$ se plně kompenzují. *Sycení jádra u bezrozptylového transformátoru tedy vůbec nezávisí na velikosti zatěžovacího proudu, tedy ani na velikosti přenášeného výkonu!*

Reálné transformátory mají vždy určitý rozptylový tok. Ten je svázán s tzv. rozptylovými indukčnostmi (primární a sekundární): Takový transformátor si můžeme představit jako transformátor bezrozptylový s připojenými indukčnostmi $L_{\sigma 1}$ do série s primárním vinutím a $L_{\sigma 2}$ do série se sekundárním vinutím. Z hlediska vnějšího chování transformátoru lze uvažovat i jedinou rozptylovou indukčnost L_{σ} , přepočtenou jen na sekundární stranu (viz obr. 31.6.4).

Tento tok je samozřejmě svázán s úbytkem sekundárního napětí $\Delta u_2(t)$ na L_{σ} . Čili rozptylová indukčnost způsobuje nenulovou výstupní reaktanci transformátoru, Transformátor je pak "měkký", zatěžovací proud způsobí úbytek napětí:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{\sigma}(t)}{dt} \quad (31.6.14)$$

Skutečný transformátor má navíc nenulové odpory vodičů, na kterých vznikají podle Ohmova zákona další úbytky napětí a navíc Joulový ztráty.

Vraťme se nyní znovu k transformátoru bezrozptylovému, s dokonalou vazbou, a předpokládejme, že jeho vinutí mají navíc nulový odpor (supravodič). Pak na nich nevzniká průchodem proudu žádný ztrátový výkon a proudy $i_2(t)$ a $i'_1(t)$ lze libovolně zvyšovat. Jejich magnetické účinky se dokonale zruší, nemají tedy vliv na velikost sycení v jádře a transformátorem lze přenášet "libovolně" velký výkon (ve skutečnosti však omezený tzv. kritickou proudovou hustotou supravodiče, při níž zaniká supravodivý jev - pro niob asi 50 A/mm²).

U měděného (hliníkového) vinutí je nutno volit průřez vodičů úměrný proudu, aby nebyla překročena povolená proudová hustota s ohledem na přehřátí vodičů vlivem Joulova tepla. Rovnice 31.6.5 navíc napovídá, že musíme volit určitý počet primárních závitů N_1 , abychom nepřekročili maximální sycení jádra. N_1 je tím větší, čím je větší maximum - amplituda časového integrálu primárního napětí a čím menší průřez má jádro. Má-li se pak vinutí vtěsnat do okénka jádra, nelze zvyšovat průřez vodiče a tím i proudovou zatížitelnost libovolně. Díky tomu lze s daným průřezem magnetického obvodu S a průřezem okénka S_0 realizovat transformátor schopný přenést jen určitý omezený výkon.

Je tedy zřejmé, že maximální výkon bude přímo úměrný ploše okénka S_0 , protože čím je S_0 větší, tím tlustší vodiče můžeme použít a tím větší proudy (výkon) je možno transformovat. Kromě toho je maximální výkon přímo úměrný i průřezu magnetického obvodu S , protože čím je S větší, tím méně závitů N_1 potřebujeme pro dané sycení, viz rov. 31.6.5, a proto mohou být opět tlustší vodiče. Čili lze napsat:

$$P_{max} \approx S \cdot S_0 \quad (31.6.15)$$

Zamyslíme-li se nad rov. 31.6.5, lze úměru rov. 31.6.15 ještě doplnit. Maximální hodnota sycení tj. maximum funkce $B(t)$ je přímo úměrná maximu funkce časového integrálu primárního napětí. Uvažujme, že napětí neobsahuje stejnosměrnou složku, je periodické s kmitočtem f , ale jinak libovolného tvaru, tj. libovolného obsahu vyšších harmonických.

Pak je maximum časového integrálu takového primárního napětí (maximum toku, amplituda toku) zcela jistě konečné a nepřímo úměrné kmitočtu. To znamená, že zvýšíme-li kmitočet n -krát při zachování amplitudy a tvaru napětí, klesne maximum integrálu n -krát a bude moci být dle rov. 31.6.5 také n -krát méně závitů N_1 , aby sycení zůstalo stejně. Pak ve stejném poměru n můžeme zvýšit průřez vodičů, aniž bychom se báli, že se vinutí nevejde do okénka. Lze pak přenášet n -krát větší proud a výkon (napětí se nezměnila, pouze vzrostl kmitočet). Čili maximální výkon je přímo úměrný kmitočtu. Rovnici 31.6.15 lze proto doplnit:

$$P_{max} \approx f \cdot S \cdot S_0 \quad (31.6.16)$$

Pro jádra z plechu EI z křemíkové oceli lze pomocí tohoto vztahu s uvažováním přímé úměry mezi S_0 a S , odvodit vztah

$$P_{max} \approx S^2 \quad [W, cm^2] \quad (31.6.17)$$

Ten předpokládá maximální sycení 1T, proudovou hustotu asi

2,5 A/mm² a kmitočet 50 Hz. A týká se opravdu jen EI jader, protože při jeho odvození byla uvažována konkrétní závislost mezi S_0 a S pro tato jádra.

Ze vztahu rov. 31.6.16 vidíme, že zvyšování pracovního kmitočtu umožňuje přenášet větší výkon při zachování rozměrů jádra. To je základem filosofie všech spínaných zdrojů (měničů) s transformátorem. Kmitočet však nelze u reálného transformátoru zvyšovat nade všechny meze. Omezení představují hysterezní a vířivé ztráty v jádře a dále rozptylová indukčnost.

31.7. Ztráty v reálném transformátoru

31.7.1. Joulový ztráty ve vinutí

Joulový (ohmické) ztráty vznikají na odporu vinutí průchodem proudu. Tato skutečnost nutí zvyšovat průřez vodičů a způsobuje tak nutné zvyšování plochy okénka jádra S_0 a zvětšování celého transformátoru.

Z hlediska těchto ztrát se primární a sekundární vinutí chovají jako lineární odpory R_1 a R_2 . Joulový ztráty jsou proto úměrné kvadrátu efektivní hodnoty procházejícího proudu a jsou dány vztahem:

$$P_R = R_1 I_{1ef}^2 + R_2 I_{2ef}^2 \quad (31.7.1)$$

Efektivní hodnota proudů procházejících vinutími obecně není úměrná přenášenému činnému výkonu a může být v praxi někdy nečekaně vysoká. Např. u síťového transformátoru se sekundárním usměrňovačem a filtračním kondenzátorem bez vyrovnavací nárazové tlumivky. Zde odebraný sekundární proud $i_2(t)$ a tedy přetransformovaná složka primárního proudu $i'_1(t)$ tvar úzkých nabíjecích impulsů s velkou amplitudou. Jeho celková efektivní hodnota je několikrát větší než efektivní hodnota užitečné 1. harmonické, která se v tomto případě pouze samotná podílí na přenosu činného výkonu. Ten je totiž dán součinem efektivní hodnoty harmonického sekundárního napětí, efektivní hodnoty pouze 1. harmonické sekundárního proudu a $\cos \phi$ oné 1. harmonické proudu!

Pro omezení ohřevu vinutí na přípustnou mez je nutno omezit odpory vinutí. Při návrhu pracujeme s tzv. dovolenou proudovou hustotou J . Teče-li proud rovnoměrně celou plochou průřezu vodiče, platí vztahy:

$$J_1 = \frac{I_{1ef}}{S_1} \quad J_2 = \frac{I_{2ef}}{S_2} \quad (31.7.2)$$

S_1 a S_2 jsou průřezy primárního a sekundárního vinutí.

Doporučená hodnota J se pohybuje v případě měděných vodičů v rozmezí 1,5 až 7 A/mm². Pro větší transformátory s velkým objemem vinutí je třeba volit vždy hustotu menší. Při konstantní proudové hustotě totiž celkový Joulový ztrátový výkon roste s třetí mocninou lineárních rozměrů cívky, chladící povrch pouze s druhou mocninou. Vinutí těsně pod chladícím povrchem mohou mít větší proudovou hustotu než vinutí vnitřní.

Bez nuceného proudění vzduchu volíme u toroidních transformátorů hustotu J v rozsahu 2 až 5 A/mm², podle velikosti a počtu vrstev vinutí. U malých hrnčkových feritových jader lze volit nouzově až 4,5 A/mm². U běžně užívaných síťových transformátorů s mnohovrstvými cívками vinutými na kostrách se doporučuje hodnota 1,5 A/mm² (pro velké transformátory) až 3,5 A/mm² (pro malé transformátory). Při použití nuceného proudění vzduchu může být hustota J větší.

U transformátorů pracujících na vysokém kmitočtu musíme počítat s uplatněním **skinefektu**, díky němuž proud teče jen ve vrstvě pod povrchem vodiče a střední část tlustého vodiče by tak byla nevyužita.

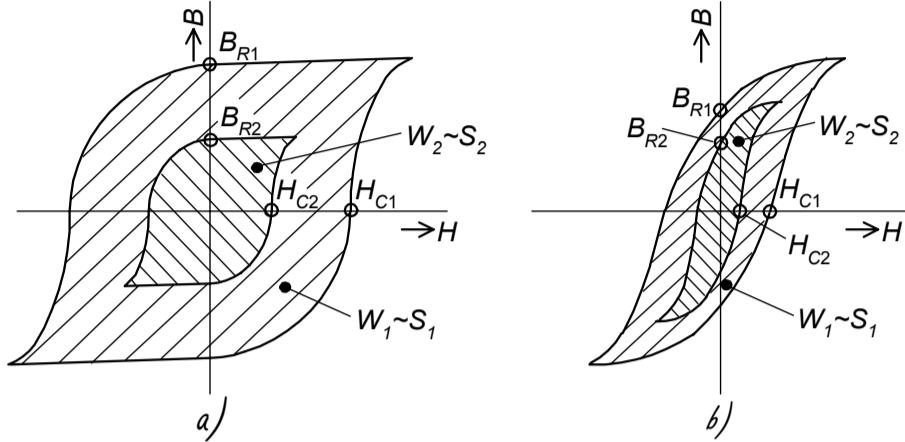
31.7.2. Hysterezní ztráty v jádře

Hysterezní ztráty souvisejí s energií W potřebnou na přemagnetování jádra. Energie W je úměrná ploše hysterezní smyčky (viz. obr. 3.5). Plocha hysterezní smyčky má fyzikální rozměr J/m^3 , jedná se tedy o objemovou hustotu ztrátové energie. Ta je pak velká pro materiály magneticky tvrdé, se širokou hysterezní smyčkou tj. s velkou *remanencí* B_R a *koercitivní intenzitou* H_C . Takové materiály proto nejsou pro jádra transformátoru vhodná. Naopak požadujeme materiály magneticky

měkké, s co nejužší hysterezní smyčkou a s co nejmenší remanentní indukcí.

Je zřejmé, že velikost plochy hysterezní smyčky S a tedy i energie W souvisí nejen s vlastnostmi materiálu B_R a H_C , ale i s amplitudou indukce B_m . Přibližně platí, že plocha S je úměrná kvadrátu B_m . (viz. obr. 3.5). Hysterezní ztrátový výkon je dán součinem této energie W a pracovního kmitočtu f , v jehož „rytmu“ dochází k přemagnetovávání.

$$P_h = W \cdot f \approx B_m^2 \cdot f^2 \quad (31.7.3)$$



Obrázek 31.7.1.: Hysterezní smyčka feromagnetického materiálu:
a) magneticky tvrdý materiál,
b) magneticky měkký materiál.

- Budeme-li měnit kmitočet a současně zachovávat sycení, tzn. budeme udržovat konstantní poměr amplitudy $u_1(t)$ a kmitočtu f při proměnném počtu závitů N_1 – viz rozbor vztahu (31.6.5). Pak bude díky konstantnímu sycení B_m i konstantní energie W . Ze vztahu (31.7.3) je pak vidět, že hysterezní ztráty budou přímo úměrné kmitočtu.

$$P_h \approx f \quad (31.7.4)$$

Toto je typický případ transformátoru v pulsních měničích, kdy volíme vysoký kmitočet za účelem snížení N_1 (aby se vinutí mohlo vinout tlustším vodičem) při zachování (nepřekročení) dovoleného sycení.

- Měníme-li kmitočet a současně zachovávat týž transformátor (totéž N_1 a S) a tutéž amplitudu $u_1(t)$. Pak z rozboru vztahu (31.6.5) vyplývá, že indukce bude nepřímo úměrná kmitočtu. Čili ze vztahu (31.7.3) pak vidíme, že hysterezní ztráty budou *hyperbolicky*, nepřímo úměrně, klesat s rostoucím kmitočtem.

$$P_h \approx \frac{1}{f} \quad (31.7.5)$$

Tento režim transformátoru se nazývá *odbuzevací*, neboť při růstu kmitočtu klesá indukce. V pulsních měničích by ale takový režim neměl žádný význam, protože bychom sice zvýšili kmitočet, ale museli bychom použít stále stejný objemný a těžký transformátor s velkým N_1 , stanoveným pro původní nízký kmitočet.

31.7.3. Ztráty výřivými proudy v jádře

31.8. Rozptyl transformátoru

Vraťme se nyní k zjednodušenému modelu rozptylu z obr. 31.6.4. Pro velikost rozptylové indukčnosti L_σ platí:

$$L_\sigma = \lambda_\sigma \cdot N_2^2 \quad (31.8.1)$$

kde λ_σ je *magnetická vodivost rozptylového magnetického obvodu*. Rozptylovou indukčnost L_σ (tj. sekundární rozptylovou indukčnost plus primární rozptylovou indukčnost přepočtenou na sekundární stranu) je nutno chápout jako indukčnost určující výstupní reaktanci transformátoru napájeného ovšem z ideálního napěťového primárního zdroje. Lze ji

snadno změřit, zkratujeme-li primární vinutí a měříme sekundární indukčnost $L_{2,k}$:

$$L_\sigma = L_{2,k} = L_2(1 - k^2) \quad (31.8.2)$$

kde k má význam *činitele vazby* a lze jej určit ze známého vztahu:

$$k = \frac{M}{L_1 L_2} \quad (31.8.3)$$

Zajímá nás ovšem **výstupní reaktance** ωL_σ , nikoliv samotná indukčnost L_σ , neboť napěťový úbytek je úměrný (při harmonickém průběhu napětí):

$$\Delta u_2(t) \approx \omega L_\sigma \quad (31.8.4)$$

Je zřejmé, že při konstantní rozptylové indukčnosti může být transformátor na vysokých kmitočtech naprostě nepoužitelný (měkký). Pak nezbývá, než velmi úzkostlivě a co nejvíce minimalizovat rozptylovou indukčnost. Je proto nutné podle rov. 31.8.1 minimalizovat rozptylovou magnetickou vodivost λ_σ . Ta je přibližně určená rovnicí:

$$\lambda_\sigma = \mu_0 \frac{S_\sigma}{l_\sigma} \quad (31.8.5)$$

kde $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H/m$ je *permeabilita vakua*. S_σ a l_σ jsou **ekvivalentní průřez a délka rozptylových cest**. Protože nelze snížit permeabilitu vzduchu, je nutno upravit geometrii jádra a současně zabezpečit co největší poměr permeability jádra k permeabilitě okolního prostředí. Jádro musí mít tvar bez ostrých zlomů ve směru magnetického toku, nejlépe kruhový tvar, tj. *toroidní jádro*. Je důležitá velká magnetická vodivost jádra λ . Ta je dána vztahem:

$$\lambda = \mu_r \mu_0 \frac{S}{l} \quad (31.8.6)$$

μ_r je *relativní permeabilita materiálu*, S je *průřez jádra*, l je *délka střední siločáry*. Nestačí jen velká permeabilita μ_r , ale i velký poměr $\frac{S}{l}$. Pro minimalizaci rozptylu jsou proto vhodná "baculatější" jádra s velkým S a malým l (často například několik toroidů s malým průměrem tj. malým l paralelně pro dosažení velkého S). Tím ale vzniká problém malého okénka S_0 pro vinutí, což znemožňuje vinout vodiči s velkým průřezem a přenášet tak velké výkony. Tyto protichůdné požadavky na tvar jádra bývají kritické a je nutno je v návrhu kompromisně vyřešit.

Rozptylovou indukčnost dále zmenšíme způsobem vinutí. Jsou-li vinutí na kostřičce, pak je vineme na sebe, nikoliv vedle sebe s přepážkou. Blíže jádru umístíme vinutí s menším počtem závitů. Vhodné je také střídavé prokládání jednotlivých vrstev primárního a sekundárního vinutí, roste však neúměrně pracnost (cena) a klesá činitel plnění okénka. *Bi filární vinutí* s nejtěsnější vazbou nelze uskutečnit v případě rozdílných počtů závitů (což je téměř vždy) a v případě nároků na izolační pevnost mezi vinutími rozprostřenými rovnoměrně po obvodu celého toroidu.

Poznámka k transformátorům obecně (nejen síťovým)

Všimněme si, že v celém výkladu není nikde zmínka o použití *vzduchové mezery v magnetickém obvodu jádra*. V kapitole Cívky s feromagnetickým jádrem je zamýšlení o vzduchových mezerech v magnetických obvodech a je zde vysvětlen jeden případ, kdy má smysl mezeru v transformátoru použít. Je zde ukázáno, že v případě předpokladu platnosti rov. 31.6.4 (což je mimo jiné případ běžných napájecích transformátorů) je použití vzduchové mezery bezúčelné a škodlivé, vede totiž ke vzrůstu magnetizačního proudu a zvýšení rozptylových toků.

31.9. Cívky s feromagnetickým jádrem

31.9.1. Fyzikální rozbor a příprava pro návrh

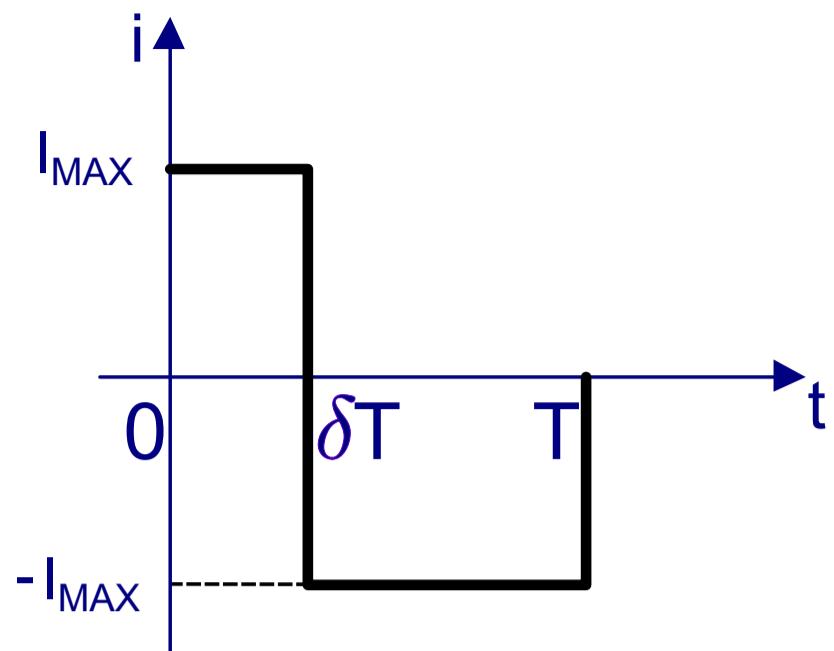
31.9.2. Důsledky a význam použití vzduchové mezery

31.10. Efektivní hodnoty proudů typických průběhů

Pro správnou volbu průřezu drátu pro vinutí je nutné stanovit přípustné oteplení, které je určeno efektivní hodnotou proudu. Pro nejčastější průběhy proudů jsem odvodil vztahy pro výpočet efektivních hodnot.

1. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.1a:

$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \int_0^{\delta T} t^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\delta T} \\ &= \frac{1}{T} \frac{I_{max}^2}{(\delta T)^2} \frac{(\delta T)^3}{3} = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} \end{aligned} \quad (31.10.1)$$



Obrázek 31.10.2.

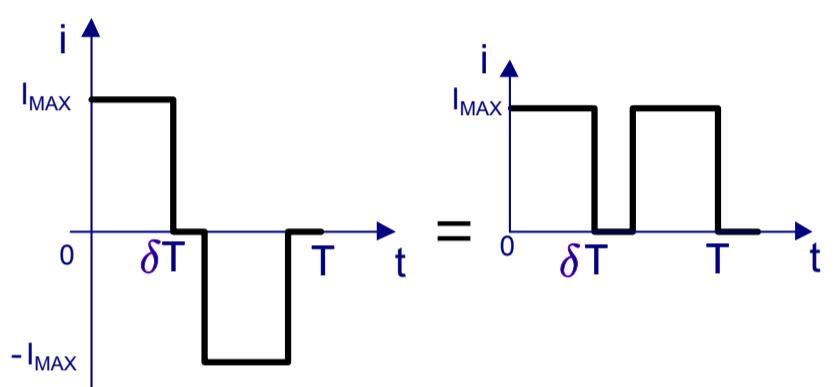
2. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.1b:

Pravý průběh na obrázku 31.10.1b je speciálním případem levého průběhu jehož efektivní hodnotu snadno určíme jako $I_{max} \sqrt{\frac{1}{3}}$. Pro úplnost provedeme výpočet následujícím způsobem

$$I_{ef}^2 = I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2 = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} + I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} = I_{max}^2 \frac{1}{3} \quad (31.10.2)$$

výpočet dílčí efektivní hodnoty proudu I_{ef2} :

$$\begin{aligned} I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^T \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \\ &\left(\begin{array}{l} \tau = t - \delta T \Rightarrow \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt \Rightarrow \tau_d = 0 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}^2}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_{max}}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\tau + \frac{2}{T(\delta-1)} \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{1}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left(T(1-\delta) - T(1-\delta) + \frac{T}{3}(1-\delta) \right) \\ &= I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} \end{aligned}$$

Obrázek 31.10.3.: $I_{ef} = I_{max} \sqrt{2\delta}$

$$I_{ef1}^2 = I_{ef2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (31.10.5)$$

3. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.2:

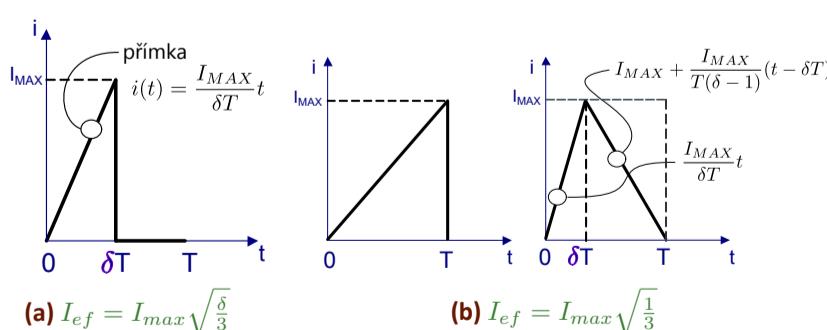
$$I_{ef} = I_{max}. \quad (31.10.3)$$

5. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.4:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (31.10.6)$$

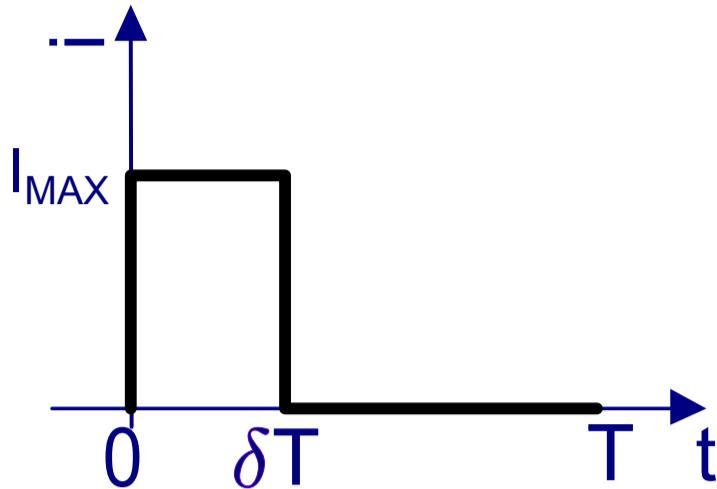
4. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.3:

$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{2I_{max}\delta} \quad (31.10.4)$$

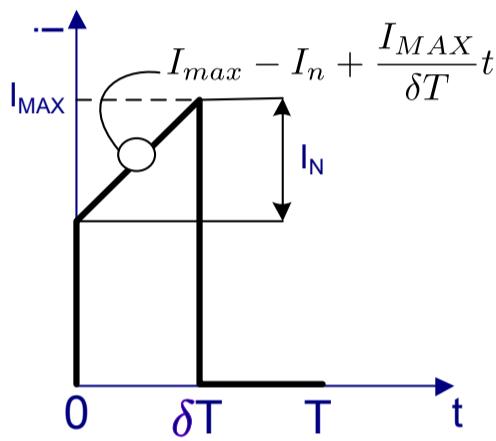


Obrázek 31.10.1.: Typické průběhy proudů, jejichž efektivní hodnotu je nutné stanovit při dimenzování vinutých komponent.

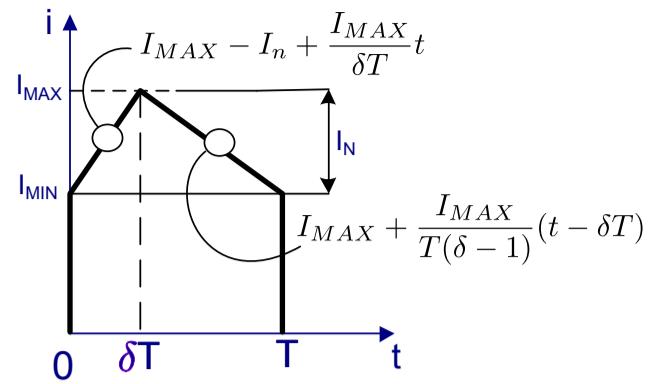
$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(I_{max} - I_n + \frac{I_n}{\delta T} t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{2I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 t^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{t^3}{3} \right)_0^{\delta T} \\ &= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 \delta T + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} \delta T^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{\delta T^3}{3} \right) \\ &= \delta \left((I_{max} - I_n)^2 + I_n \cdot (I_{max} - I_n) + \frac{I_n^2}{3} \right) \\ &= \delta \left(I_{max}^2 - 2I_{max}I_n + I_n^2 + I_{max}I_n - I_n^2 + \frac{I_n^2}{3} \right) \\ &= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \end{aligned}$$



Obrázek 31.10.4.



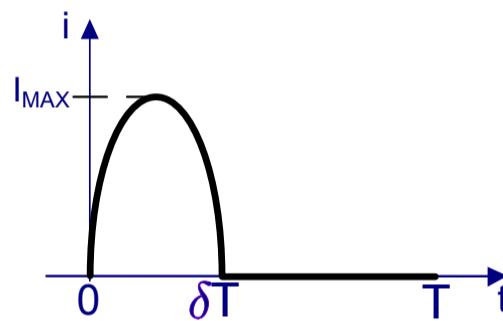
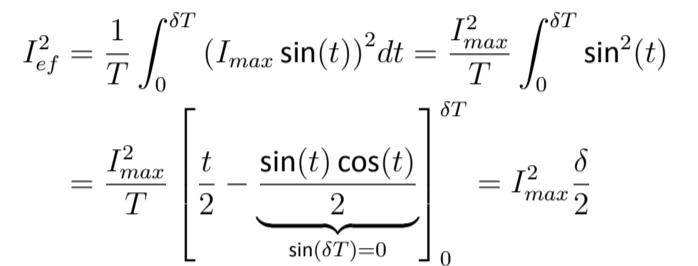
Obrázek 31.10.5.



Obrázek 31.10.6.

$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3}} \quad (31.10.8)$$

8. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.7:



Obrázek 31.10.7.

$$I_{ef} = I_{max} \sqrt{\delta \left(I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max} \right)} \quad (31.10.7)$$

$$I_{ef} = I_{max} \sqrt{\frac{\delta}{2}} \quad (31.10.9)$$

7. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.6:

$$\begin{aligned}
I_{ef1}^2 &= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \\
I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}(t - \delta T) \right)^2 dt \\
&= \text{meze:} \begin{pmatrix} \tau = t - \delta T & \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt & \tau_d = 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\
&= \frac{1}{T} \left[I_{max}^2 \tau + \frac{I_{max}I_n}{T(\delta-1)} \tau^2 + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\
&= (1-\delta) \left[I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3} \right]
\end{aligned}$$

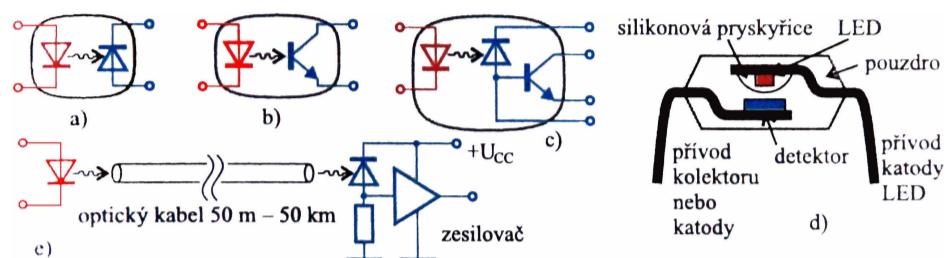
32. Optoelektronika

Obsah

32.1. Optoelektronické systémy	165
32.1.1. Statické parametry optoelektronických vazebních systémů	165
32.1.2. Dynamické parametry optoelektronických vazebních systémů	166
32.1.3. Izolační parametry optronu	166

32.1. Optoelektronické systémy

Velmi rozšířené je využití fotonové vazby pro galvanické oddělení pomocí optoelektronických vazebních členů, optronů, a přenos dat pomocí optických kabelů. Optron je tvořen zdrojem (obvykle GaAs LED) a detektorem záření (obvykle Si fotodioda nebo Si fototranzistor) vzájemně spojených optickou vazbou v jednom pouzdře. Vstup a výstup jsou proto elektricky odizolovány a podle typu pouzdra snesou izolační napětí¹ 1,5 kV až 5 kV.



Obrázek 32.1.1.: Optoelektronické systémy [VZO1, p. 179]

Přenos signálu mezi zdrojem a detektorem na velkou vzdálenost se provádí prostředím s malým útlumem a vysokou šumovou imunitou, kterým je optické vlákno. Jedno nebo několik takových vláken s povrchovou a mechanickou ochranou (z kevlaru a polyuretanu) tvoří optický kabel. Vlákno se skládá z vnitřního skleněného jádra (o průměru jednotek až desítek μm) s indexem lomu n_1 , a je pokryto tenkým skleněným pláštěm (tlustým desítky μm) s indexem lomu n_2 . Jelikož $n_1 > n_2$, dochází pro určité rozmezí úhlu dopadu k odrazu záření na rozhraní jádro-plášť a energie záření se pak šíří převážně jádrem vlákna. Z důvodu nízkého útlumu vlákna se přenos uskutečňuje v přenosových oknech 850 nm, 1300 nm a 1550 nm, přičemž s rostoucí hodnotou vlnové délky útlum vlákna klesá, ale cena potřebných optoprvků roste.

Typy optronů z hlediska aplikace:

- optrony vyráběné pro aplikace v lineárních obvodech mají dobrou linearitu a jsou používány pro galvanické oddělení analogových obvodů;
- optrony vyráběné pro aplikace v logických obvodech jsou určeny pro přenos pouze dvou úrovní signálů a proto je jejich realizace podstatně snadnější než realizace lineárních optronů.

32.1.1. Statické parametry optoelektronických vazebních systémů

32.1.1.1. Proudový přenosový poměr CTR

Přenosovou účinnost optoelektronického vazebního systému charakterizuje *proudový přenosový poměr CTR* (Current Transfer Ratio), který udává poměr výstupního ku vstupnímu proudu optronu v procentech při daném pracovním napětí (nastavení pracovního bodu), zátěži a teplotě.

$$CTR = \frac{I_{out}}{I_{in}} \times 100 \quad [\%] \quad (32.1.1)$$

S fotodiodou na výstupu je $CTR \approx 0,2 - 0,3\%$ a s fototranzistorem na výstupu je $CTR \approx 10 - 100\%$. Tento poměr vyjádřený rovnicí 32.1.1 je parametr svými vlastnostmi podobný proudovému zesilovacímu činiteli bipolárního tranzistoru h_{FE} ² a je s ním možné pracovat podobným způsobem.

¹(izolačním napětím se myslí rozdíl efektivních hodnot napětí mezi libovolnou vstupní a výstupní svorkou, při kterém dochází k průrazu mezi vstupem a výstupem)

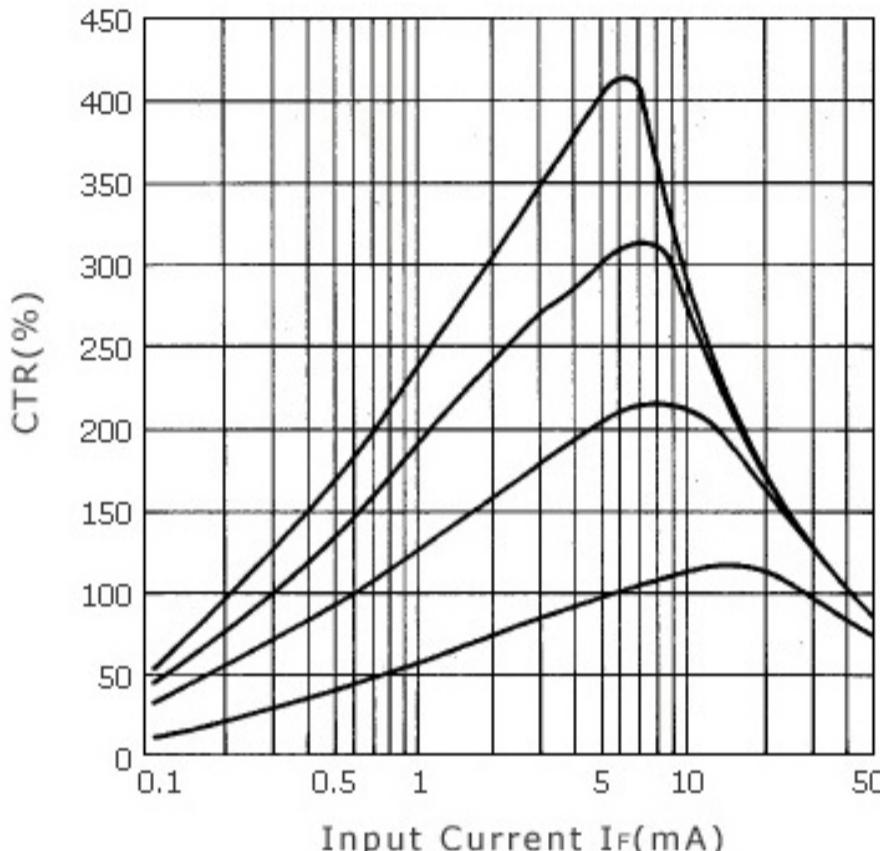
²nebo též h_{21E} resp. β . Jedná se o parametr vystupující v hybridních rovnicích popisující chování tranzistoru v zapojení se společným emitorem. h_{21E} jako diferenciální proudový přenos při výstupu nakrátko

V následujících odstavcích se budeme předpokládat optoelektronický vazební systém s fotodiódou na vstupu a fototranzistorem na výstupu. V tomto případě je zřejmé, že CTR udává v procentech poměr velikosti kolektorového proudu přijímacího tranzistoru I_C ku proudu vysílací diodou I_F .

$$CTR = \frac{I_C}{I_F} \times 100 \quad [\%] \quad (32.1.2)$$

Poměr je udáván pro určitý proud I_F diody LED a kolektorové napětí U_{CE} fototranzistoru, např. $CTR = 50\%$ při $I_F = 1\text{mA}$, $U_{CE} = 5\text{V}$ znamená, že když fotodiodou teče proud 1mA , je výstupní kolektorový proud $I_F = 0,5\text{mA}$.

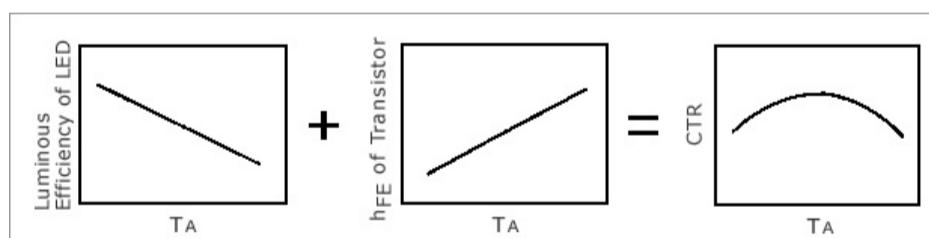
- Závislost CTR na vstupním proudu fotodiody na obr. 32.1.2a, není dáná monotónní funkcí, tj průběhem který by jen klesal, nebo naopak jen narůstal, ale vykazuje extrém, při kterém je dosažený přenosový poměr maximální.



(a) Závislost CTR na vstupním proudu fotodiody

Obrázek 32.1.2.: Závislost CTR na vstupním proudu fotodiody a) a teplotě b)

- Závislost CTR na teplotě na obr. 32.1.3 ukazuje že zobrazená křivka je výsledkem kombinace dvou teplotních koeficientů. Zatímco světelná účinnost LED³ vykazuje záporný teplotní koeficient, tranzistor naproti tomu kladný teplotní koeficient. 32.1.3.

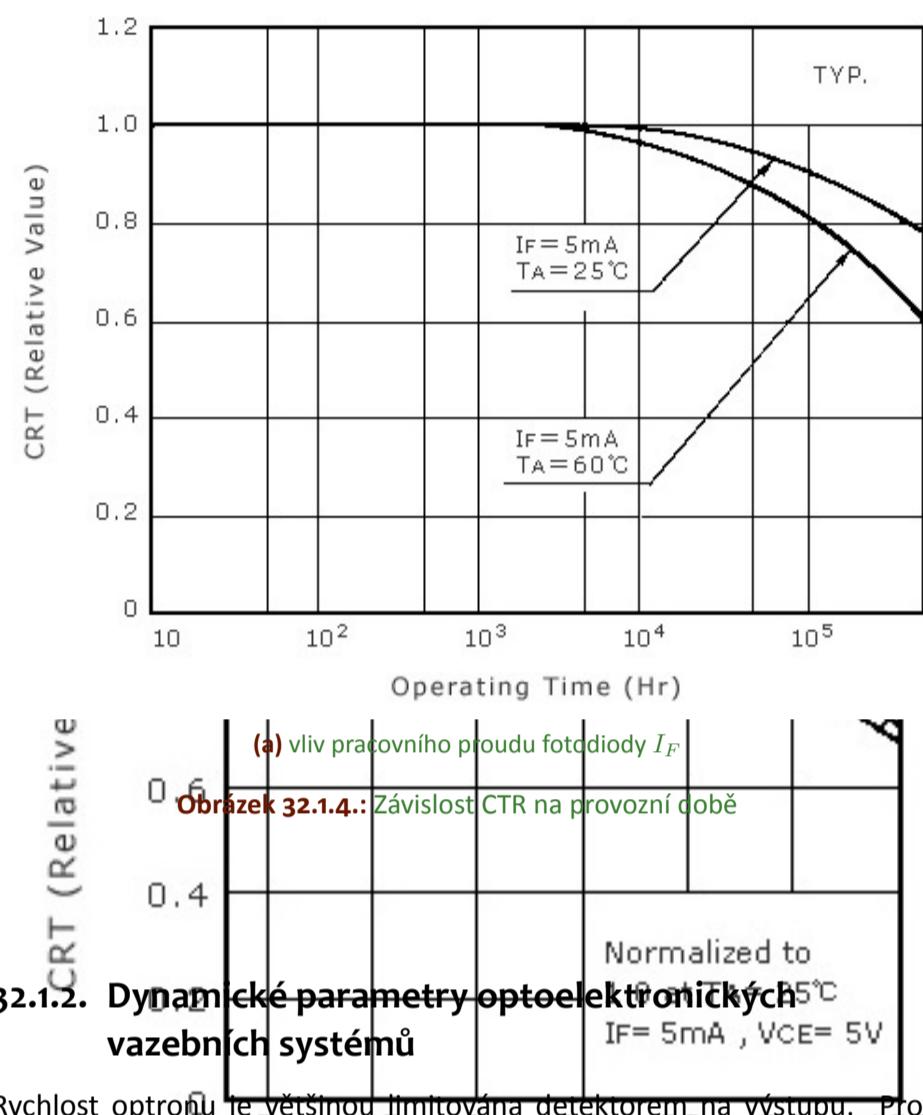


Obrázek 32.1.3.: Závislost CTR na teplotě

- Závislost CTR na čase na obr. 32.1.4a a obr. 32.1.4b udává velice důležitou vlastnost, na kterou je třeba klást důraz v aplikacích, vyžadujících dlouhou životnost produktu. Mohou to být například větrné elektrárny, drážní zabezpečovací zařízení atd. Největší vliv má na pokles CTR rychlosť stárnutí fotodiody. Světelná účinnost klesá tím rychleji, čím větší je pracovní proud I_F viz obr. 32.1.4a a čím větší je okolní teplota viz obr. 32.1.4b. V určité formě je degradace CTR způsobena také stárnutím optické vazby mezi fotodiodou a fototranzistorem a změnou účinnosti foto-elektrické

³LED luminous efficiency

konverze a stejnosměrného zesílení samotného fototranzistoru tj. h_{FE} .



32.1.2. Dynamické parametry optoelektronických vazebních systémů

Rychlosť oprotoru je většinou limitována detektorem na výstupu. Pro rychlý přenos číslicového signálu se proto vyrábí oprotory s fotodiodou integrovanou na jednom čipu rychlým zesilovačem, jehož výstup je přímo slučitelný s číslicovými obvody. The response time of a photocoupler is similar to that of a transistor, and is expressed as follows. $t_f = \frac{RL}{h_{FE} C_{CB}}$ kde R_L ... zatěžovací odpór, h_{FE} ... proudový zesilovací činitel tranzistoru (DC amplification), C_{CB} ... kapacita mezi kolektorem a bází.

From this formula, t_f increases as the load resistance increases as shown in Figure 6, so for high-speed signal transfer, the load resistance must be designed as small as possible within the allowable rating range.

However, when the load resistance is minimized, the transistor may not become completely ON and the output signal may be unstable unless the input current I_F and output current I_C are determined making sufficient allowance for factors such as the CTR specification range, the temperature characteristics, and the change over time.

Some examples of these characteristics are introduced below.

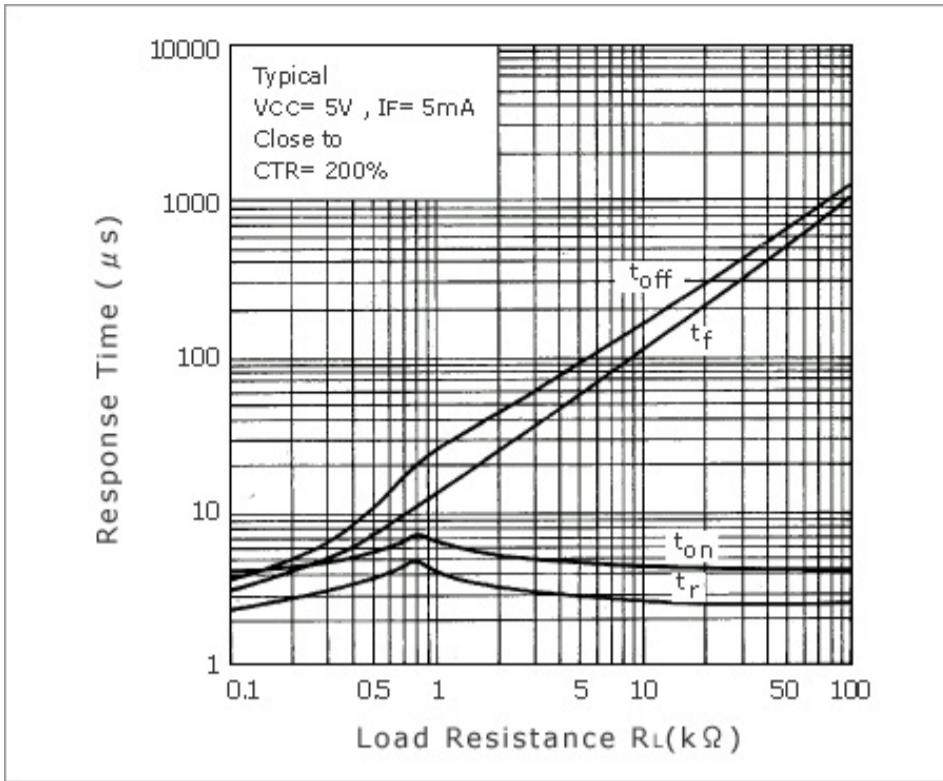
Figure 7 shows an example of the variation in the response time according to the ambient temperature (TA).

Figure 8 shows an example of the variation in the response time according to the input current (IF).

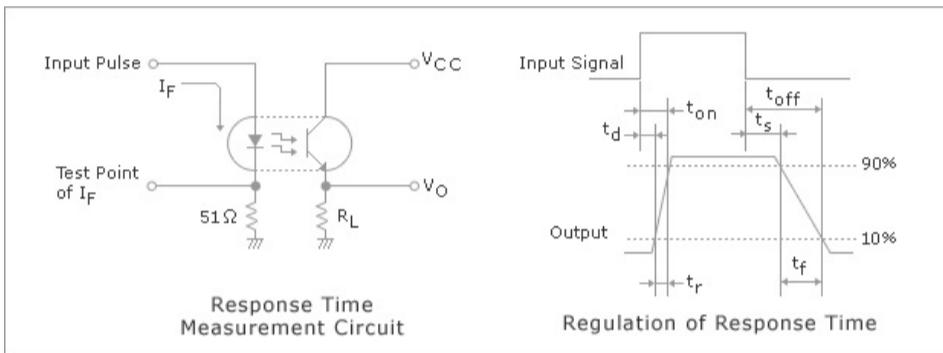
Figure 9 shows an example of the variation in the response time according to the power supply current (VCC).

32.1.3. Izolační parametry oprotoru

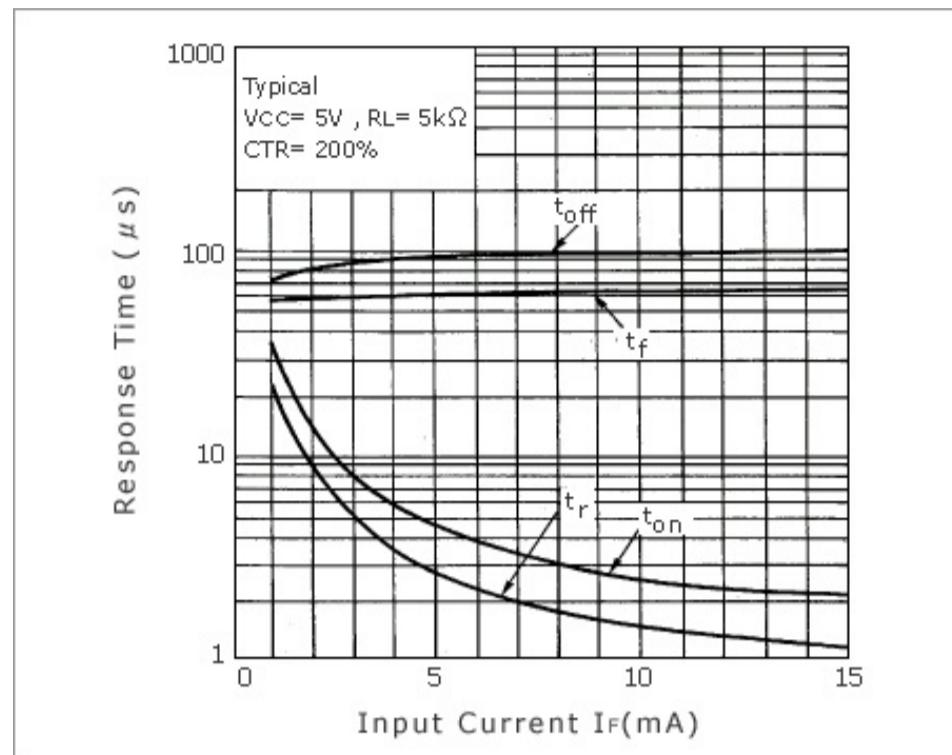
V mnoha aplikacích je na izolační bariéry, kladen jen požadavek na kvalitní galvanické oddělení. Galvanické oddělení je obvykle efektivním prostředkem, jak potlačit šíření rušení mezi systémy, neboť jednoduše dokážeme přerušit zemní a jiné impedanční smyčky v obvodě. Kvalita tohoto oddělení je pak závislá na velikostech parazitních kapacit mezi vstupem a výstupem optoelektronického prvku. V těchto obvodech je optoelektronických vazebních prvků použito ačkoliv, oddělované signály mají stejný vztažný potenciál (např. GND).



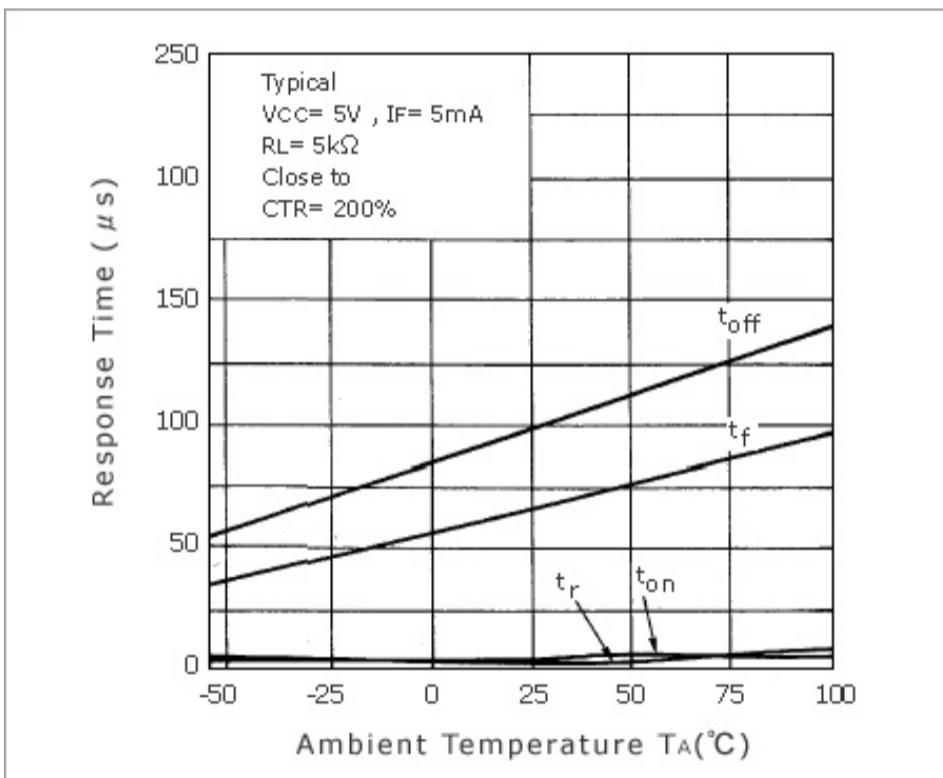
Obrázek 32.1.5.: Response Time vs. RL Characteristics



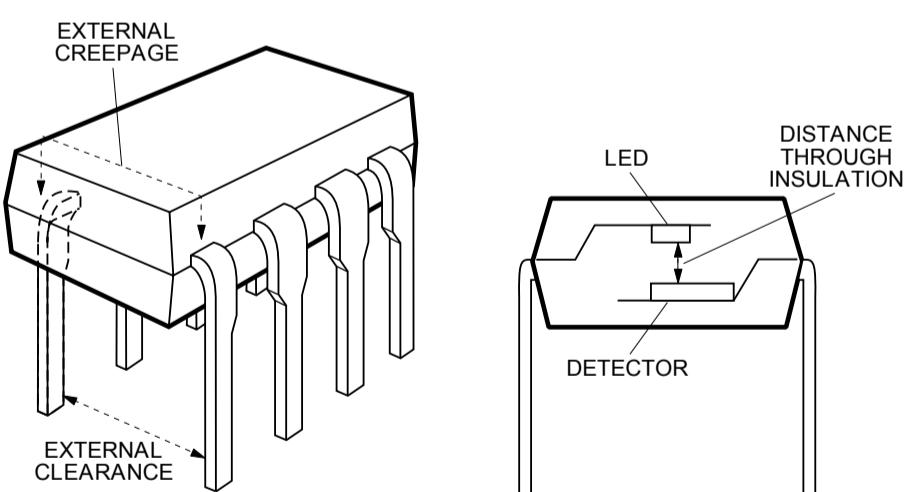
Obrázek 32.1.6.: ***



(a) Obrázek 32.1.8.: Závislost CTR na provozní době



Obrázek 32.1.7.: ***



Obrázek 32.1.9.: K pojmu external creepage a clearance

References

- [VZ01] J. Vobecký and V. Záhlava. *Elektronika součástky a obvody, principy a příklady*. 2. vydání. Praha: Grada Publishing, spol. s.r.o., 2001, p. 192. ISBN: 80-7169-884-9 (cit. on p. 165).

Část XII.

Senzory a akční členy

33. Snímače tepelných veličin

Obsah

33.1. Základní pojmy	171
33.1.1. Elektrické teploměry	171
33.1.2. Odporové snímače	171

33.1. Základní pojmy

Teplota je charakteristika tepelného stavu hmoty. V obecném významu je to vlastnost předmětů a okolí, kterou je člověk schopen vnímat a přiřadit jí pocity studeného, teplého či horkého. V přírodních a technických vědách a jejich aplikacích je to *skalární intenzivní veličina*, která je vzhledem ke svému pravděpodobnostnímu charakteru vhodná k popisu stavu ustálených makroskopických systémů. Teplota souvisí s kinetickou energií částic látky.

Teplota je základní fyzikální veličinou soustavy SI s jednotkou kelvin (K) a vedlejší jednotkou stupeň Celsia ($^{\circ}\text{C}$). Nejnižší možnou teplotou je teplota absolutní nuly (0 K; $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$), ke které se lze libovolně přiblížit, avšak nelze jí dosáhnout.

Do této skupiny patří především rozsáhlá část snímačů teploty. Z hlediska měřených veličin můžeme provést následující rozdělení.

1. Snímače teploty

a) Snímače pro dotykové měření

- elektrické
 - odporové kovové
 - odporové polovodičové
 - termoelektrické
 - polovodičové
- dilatační
- termoelektrické
- tlakové
- speciální

b) Snímače pro bezdotykové měření

- monochromatické pyrometry
- pásmové pyrometry
- radiační pyrometry

2. Snímače tepla

3. Snímače tepelného toku

33.1.1. Elektrické teploměry

33.1.2. Odporové snímače

Odporové snímače využívají princip změny elektrického odporu vlivem změny teploty. Základním požadavkem kladeným na materiál snímače je co největší a stálý teplontí součinitel odporu a zároveň co největší měrný odpor. Pro tyto účely se používají kovové a polovodičové materiály.

33.1.2.1. Kovové odporové snímače

Jsou to především čisté kovy, které se používají pro realizaci vlastního odporového článku. Požadavkem je, aby nereagovaly s izolačním nebo ochranným krytem. Jakékoli chemické nebo fyzikální vlivy by mohly způsobit nestálost odporu při stálé teplotě. Použitý materiál nemá vykazovat změnu teplotního součinitele odporu s časem (stárnutí) a hysterese. Nejčastěji používanými materiály je *platina*, *ník*, *měď*, *slitina stříbro-zlato* a další [Zeh83, s. 96].

Platina je výhodná pro velkou chemickou stálost, vysokou teplotou tavení a možností dosažení vysoké čistoty. Pro snímače teploty se používá tzv. fyzikálně čistá platina, jejíž čistota se pohybuje kolem 99,93 až 99,99 % Pt. Měření ukázala, že změny základního odporu u sériově vyráběných přesných teploměru se pohybí kolem $5 \cdot 10^{-6} R_o$ (což odpovídá 0,001 K), u nejlepších teploměrů je tato hodnota ještě o řadu menší. Proto se používá platina pro etalonový teploměr v oblasti teplot $-259,34\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $630,74\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Závislost odporu na teplotě pro rozsah o až 630 °C se vyjadřuje rovnicí

$$R_\vartheta = R_0(1 + A\vartheta + B\vartheta^2) \quad (33.1.1)$$

kde R_0 je odpor při 0 °C, ϑ ... teplota ve °C, A ... konstanta

($3,9075 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$), B ... konstanta ($-0,575 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$).

V rozmezí od 0 °C do –190 °C se vyjadřuje závislost odporu na teplotě rovnicí

$$R_\vartheta = R_0[1 + A\vartheta + B\vartheta^2 + C(\vartheta - 100)\vartheta^3] \quad (33.1.2)$$

kde C je konstanta ($-4 \cdot 10^{12} \text{ } ^\circ\text{C}$).

References

- [Zeh83] K. Zehnula. *Snímače neelektrických veličin*. SNTL, 1983, p. 372
(cit. on p. 171).

Část XIII.

Analogové elektronické systémy

34. Počítačová simulace v elektrotechnice

34.1. Historie

Obsah

34.1. Historie	175
34.2. Simulace a analýza v programu LTspice IV	175

V roce 1971 vytvořil student „University of California“, Berkeley, USA *Larry Nagel* program SPICE1 (SPICE = *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*). Program umožňoval analýzu dějů v obvodech, obsahujících zejména bipolární a unipolární tranzistory. O věrohodnost výsledků bylo usilováno propracovaností modelů i matematických algoritmů řešení rovnic. Uživatel měl navíc možnost rozšiřování sortimentu analyzovaných součástek technikou makromodelů zakladáním tzv. *podobvodů* (subcircuits) SPICE. Protože program byl v podstatě volně šířitelný, stal se brzo standardním simulačním nástrojem pro elektrotechnické úlohy. Usilovně se pracovalo na jeho zdokonalování.

V roce 1975 byla představena verze SPICE2 s podstatně vylepšenými modely i numerickými algoritmy. Tato verze byla v průběhu téměř 20 let postupně zdokonalována na Berkeleyské univerzitě až do dnes všeobecně známého standardu SPICE2G.6, který byl v r. 1983 zpřístupněn k volnému používání. Zdrojové texty SPICE1 a SPICE2 byly napsány ve Fortranu. Vzhledem k zvýšenému využívání unixových pracovních stanic padlo v Berkeley rozhodnutí přepsat SPICE2 do jazyka C. Tak začala vznikat verze SPICE3. Dnes je rozšířena verze SPICE3F.2. Oproti SPICE2G.6 se vyznačuje řadou vylepšení, ovšem z různých důvodů došlo k ztrátě zpětné kompatibility se SPICE2G.6.

S růstem výkonnosti počítačů PC byly programy, dosud běžící na výkonné pracovní stanicích, přepisovány na programy spustitelné na „PCčkách“. Tak vznikl standard PSpice. Dnes existuje více simulačních programů, které využívají v podstatě tří ne zcela kompatibilní standardy: SPICE2, SPICE3, PSPICE. Všechny lze rozdělit na tzv. „*Spice-like*“ a „*Spice-compatible*“ simulátory.

Označení „*Spice-like*“ znamená, že simulátor je schopen generovat podobné výsledky analýzy jako SPICE, avšak nemusí být schopen čist standardní vstupní soubory SPICE. Typickými příklady jsou staré verze programů Micro-Cap nebo TINA, program apod. Termínem „*Spice-compatible*“ se označují simulační programy, které dokáží čist standardní vstupní soubory SPICE, provádět klasické SPICE analýzy, a generovat výsledky v standardním SPICE2G.6 tvaru. Ze současných programů jsou to například PSpice, HSpice (standard SPICE3), WINSpice (standard SPICE3), MicroCap od verze IV, Multisim, LTspice (standard SPICE3) a další.

Kromě toho existují programy pro simulaci obvodů, které nemají s výše uvedenými skupinami programů mnoho společného. Jedná se zejména o jednoúčelové programy, specializované na analýzy obvodů, které nelze realizovat programy typu SPICE. Programy typu „*SPICE-compatible*“ jsou široce využívány mimo jiné proto, že umožňují neomezené rozšiřování sortimentu modelovaných součástek o nové typy, jejichž modely se průběžně objevují na webu a následně i v inovovaných knihovnách nových verzí programů. Na akademických pracovištích i v průmyslu je oblíbeným produktem OrcadPSpice.[Bio05, s. 10]

34.2. Simulace a analýza v programu LTspice IV

35. Zesilovače

Obsah

35.1. Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače .	177
35.1.1. Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru	177

V této kapitole se budeme zabývat rozbory vlastností základních obvodů a jejich účelným spojováním do funkčních bloků určených pro zesilování signálů. [NUo1, p. 101]

35.1. Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače

Přesný výpočet tranzistorového zesilovače vychází z určení dvojbranových parametrů tranzistoru a pokračuje sestavením matice obvodu a řešením této matice. Při použití vybraných rovnic matematických modelů pro programy SPICE lze dojít ke zjednodušenému řešení, ve kterém se některé parametry zanedbají a sestavené náhradní schema pak řešit libovolnou metodou. Přesto dostaneme výsledky s přesností, která pro obvyklé technické řešení postačuje.

35.1.1. Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru

Převodní charakteristika udává závislost výstupního proudu na vstupním napětí. Pro zapojení SE představuje převodní charakteristiku exponenciální závislost kolektorového proudu na napětí mezi bází a emitorem. Strmost je dána derivací funkce (tečnou) v daném pracovním bodě a odpovídá parametru y_{21} .

36. Operační zesilovače

Obsah

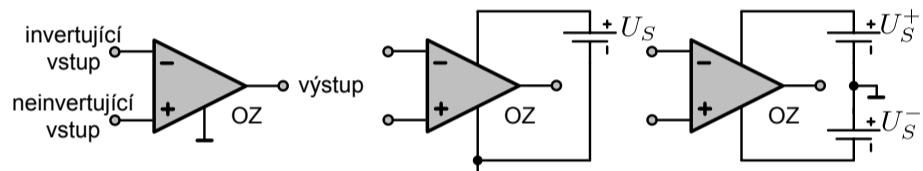
36.1. Úvod	179
36.2. Parametry operačního zesilovače	179
36.2.1. Lineární parametry a lineární model	179
36.2.2. Nelineární parametry	180
36.3. Ideální operační obvod	180
36.3.1. Paralelní operační obvod	180
36.3.2. Sériový operační obvod	180
36.3.3. Složený operační obvod	180

36.1. Úvod

Operační zesilovače (OZ, aj: opamp) původně vznikly jako složité elektronické obvody pro náročné použití při zpracování analogových (spojitě se měnících) stejnosměrných a nízkofrekvenčních střídavých signálů v analogových počítačích. Moderní polovodičová technologie umožnily vytvoření OZ v podobě levných integrovaných obvodů s malým počtem vývodů, které mají nepatrnou spotřebu, jsou odolné proti přetížení a umožňují jednoduše realizovat nejrůznější elektronická zařízení.

Svůj název získaly z dob *analogových počítačů*, ve kterých se používaly k realizaci matematických operací. Tyto integrované obvody se svými vlastnostmi blíží *ideálnímu zesilovačůmu napětí*. Jejich zesílení bez vnější zpětné vazby se blíží nekonečnu (10^7). Vstupní odpor je velmi velký ($10^4\Omega$) a výstupní odpor je malý (10Ω). Kmitočtový rozsah sahá od stejnosměrného signálu do desítek megahertzů. Vlastní šum a zkreslení zesilovače jsou rovněž malé. V dnešním pojetí je možné vymezit operační zesilovač jako **stejnosměrný zesilovač** s velkým zesílením a malým vlastním rušením, schopný stabilní činnosti v uzavřené zpětnovazební smyčce [Doso5, s. 5].

Směr signálového toku operačním zesilovačem (dále je OZ) od vstupu k výstupu je vyznačen trojúhelníkovým tvarem jeho symbolické značky na obr. 36.1.1.



Obrázek 36.1.1.: Symbolická značka OP s vyznačenými signálovými svorkami (a) a skutečná realizace zemní svorky (b, c)

Shrnutí

1. Operační zesilovač má čtyři signálové svorky, i když se často kreslí jen tři - oba vstupy a výstup. Čtvrtou signálovou svorkou je zem.
2. Souhlasné napětí u_{CM} je totožné s napětím jeho neinvertujícího vstupu u^+ .
3. Ideální operační zesilovač má za všech okolností nulové diferenční vstupní napětí a nulové vstupní proudy.

36.2. Parametry operačního zesilovače

Ideální operační zesilovač je nedosažitelná abstrakce. K posouzení kvality skutečného operačního zesilovače slouží řada funkčních parametrů jako soubor dat, která lze zjistit měřením na svorkách.

Operační zesilovač, jako každý aktivní elektronický obvod, je obvod nelineární. Funkční charakteristiky OZ však připouštějí linearizaci bez přílišného odklonu od skutečnosti. Odpovídající kvazilineární parametry jsou podkladem lineárního modelu OZ. Ostatní parametry jsou podstatně nelinearity, které tvoří meze jeho lineární oblasti.

36.2.1. Lineární parametry a lineární model

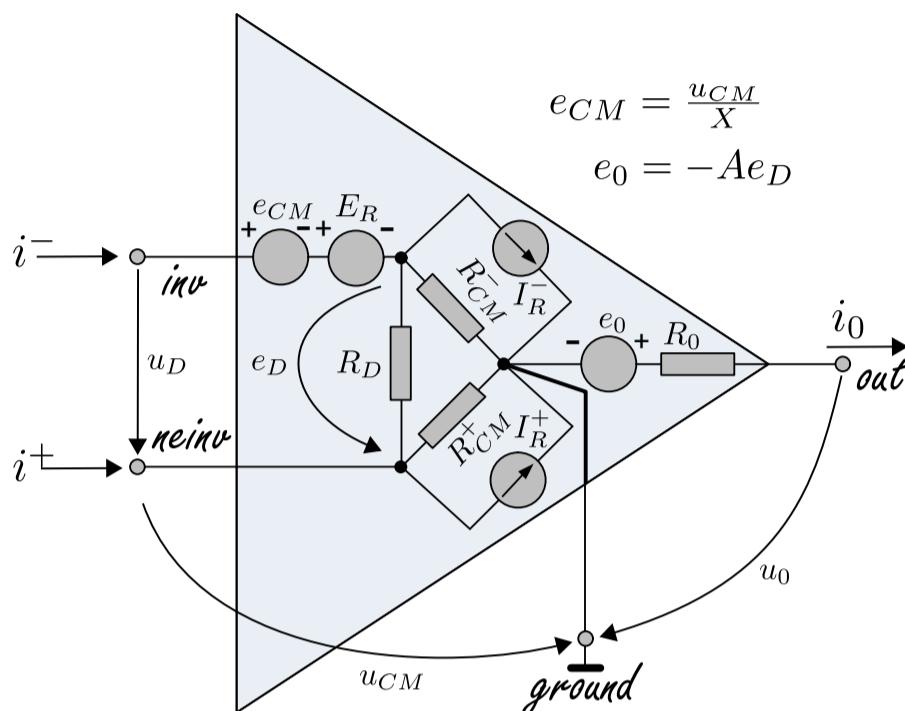
Obr. 36.2.1 ukazuje úplný *lineární model* operačního zesilovače. Se zřetelem k pozdější analýze chyb operačního obvodu je vhodné rozdělit znázorněné lineární parametry na **aditivní** a **multiplikativní**.

- Aditivní parametry zahrnují náhradní rušivé zdroje náhodných fluktuací: E_R , I_R^- , I_R^+ , které způsobují aditivní chybu operačního obvodu nezávislé na jeho signálovém vybuzení.

- Multiplikativní parametry představované čtyřmi odpory $R_D, R_{CM}^-, R_{CM}^+, R_0$ a dvěma řídicími konstantami $-A, 1/X$ závislých generátorů, vystihují pasivní a přenosové vlastnosti OZ způsobují multiplikativní chyby operačních obvodů úměrné jeho signálovému vybuzení.

Vnitřní, na svorkách neměřitelný napěťový úbytek e_D na odporu R_D zastavá v tomto modelu vazbu mezi vstupem a výstupem.

Při práci s proměnnými signály v časové nebo frekvenční oblasti se význam použitých symbolů vhodně rozšíří na impedance, operátorové přenosy apod.



Obrázek 36.2.1.: Lineární model operačního zesilovače

36.2.2. Nelineární parametry

Chyby, které provázejí approximaci skutečného operačního zesilovače lineárním modelem, se zvětšují se vstupním a výstupním vybuzením. To se týká zejména linearizace převodní charakteristiky naprázdno $u_0(u_D)$ výrazem $-A(u_D - E_R - e_{CM})$, výstupní charakteristiky $u_0(i_0)$ výrazem $e_0 - R_0 i_0$ a vstupní charakteristiky $e_{CM}(u_{CM})$ výrazem u_{CM}/X . Skutečný průběh každé z těchto charakteristik se vyznačuje velmi ostrým kolenem, při jehož překročení ztrácejí lineární parametry smysl. Signálové vybuzení, které přísluší tomuto kolenu, tak vymezuje dosti přesně oblast lineárního chování [Doso5, s. 29].

Třem svorkovým proměnným u_{CM}, u_O, i_0 přísluší tři statické nonlinearity (omezení rozkmitu) a tři dynamické nonlinearity (omezení rychlosti)

36.3. Ideální operační obvod

36.3.1. Paralelní operační obvod

Napěťový invertor ukazuje, že vstupní signálový proud může být generován také synteticky, kombinací napěťového signálového zdroje a sériového rezistoru. Takovým způsobem vytvořený **napěťový invertor** na obr. * je jedním z nejčastějších operačních obvodů.

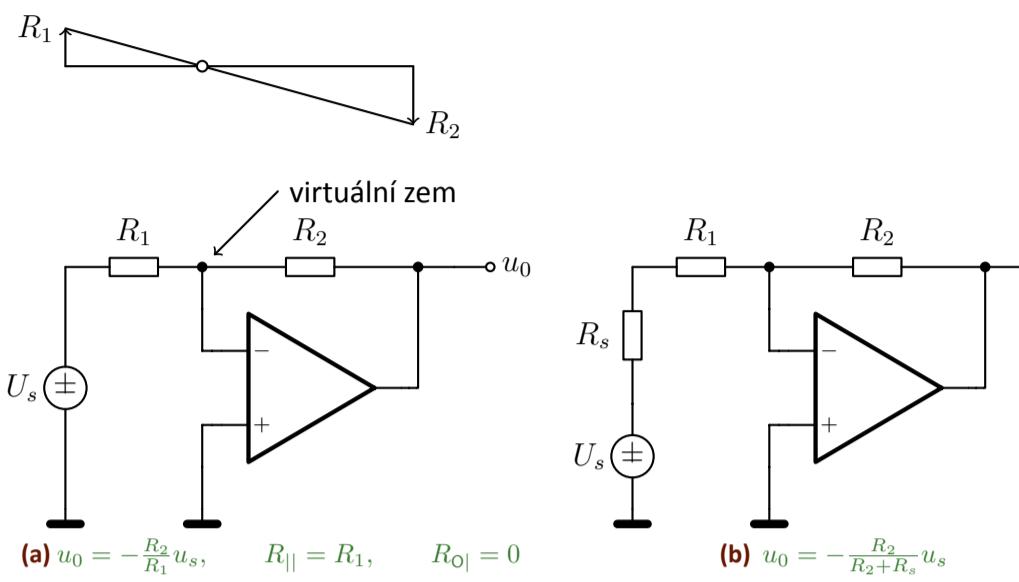
Vstupní napětí u_s je celé vloženo na rezistor R_1 (jeho pravý konec je virtuálně uzemněn) a vytvárá ekvivalentní vstupní proud $\frac{u_s}{R_1}$. Tento přitékající proud je kompenzován proudem $-\frac{u_0}{R_2}$ odsávaným přes zpětnovazební rezistor R_2 do výstupu operačního zesilovače

$$\frac{u_s}{R_1} = -\frac{u_0}{R_2}.$$

Ideální operační rovnice

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1} u_s. \quad (36.3.1)$$

Vyjadřuje úměrnost signálových napětí $-u_0$ a u_s velikostem přilehlých rezistorů R_2 a R_1 . Pro snadnější zapamatování se nabízí představa dvouramenné páky s délkami ramen R_1 a R_2 , otočné v bodě odpovídajícímu virtuální zemi, která přenáší výchylku u_s levého konce na výchylku u_0 pravého konce v opačné polaritě.



Obrázek 36.3.1.: Napěťový invertor. Jeho mechanickou analogií je dvouramenná páka (a). Přítomnost vnitřního odporu signálového zdroje R_s v operační rovnici je důsledkem konečného vstupního odporu $R_{||} = R_1$ (b).

Zesílení napěťového invertoru

$$G_i = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (36.3.2)$$

je záporné a nastavitelné v širokých mezích od 0 do ∞ výběrem rezistorů R_1 a R_2 . Zvláštním případem je jednotkový invertor se stejnými rezistory $R_1 = R_2$, který prostě inverteuje polaritu vstupního napětí:

$$u_0 = -u_s, \quad G_i = -1.$$

Výstupní odpor napěťového invertoru je ideálně nulový. Jeho vstupní odpor však ztrácí onen vyhrazený charakter typický pro kanonické operační obvody a nabývá indiferentní velikosti

$$R_{||} = R_1, \quad (36.3.3)$$

rovné velikosti virtuálně uzemněného rezistoru R_1 .

Napěťový invertor zatěžuje signálový zdroj (obr. *). To se projevuje poklesem svorkového napětí signálového zdroje o úbytek na vnitřním odporu R_s , nebo jinak řečeno, přítomností nedefinovaného a nestáleho vnitřního odporu R_s v operační rovnici invertoru:

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1 + R_s} u_s. \quad (36.3.4)$$

Taková vlastnost se obvykle považuje za nedostatek.

36.3.2. Sériový operační obvod

36.3.3. Složený operační obvod

Operační obvody, které není možné zahrnout do předcházejících dvou velkých tříd, se vyznačují:

- signálovým buzením obou vstupů operačního zesilovače,
- násobnou zpětnou vazbou,
- kombinací záporné a kladné zpětné vazby,
- použitím několika operačních zesilovačů,
- nestandardním zapojením operačního zesilovače.

36.3.3.1. Signálové buzení obou vstupů

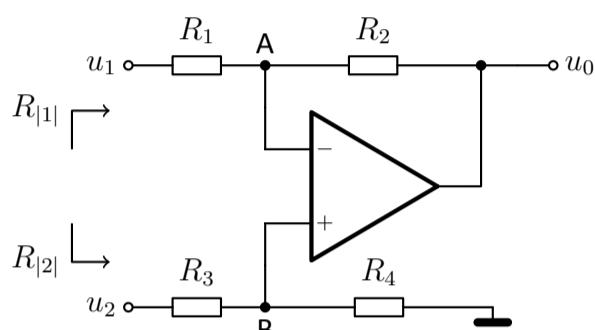
Rozdílový zesilovač na obr. 36.3.2 je lineární operační obvod se dvěma vstupy. Jeho výstupní napětí se najde superpozicí [Doso5, s. 126].

Nechť působí napětí u_1 a napětí u_2 je nulové. Neinvertující vstup operačního zesilovače je uzemněn přes paralelní kombinaci rezistorů R_3 a R_4 . Operační obvod představuje napěťový invertor a první složka výstupního napětí má velikost

$$-\frac{R_2}{R_1}u_1.$$

Nechť působí napětí u_2 a napětí u_1 je nulové. Operační obvod představuje neinvertující zesilovač s předřazeným děličem R_3 a R_4 a druhá složka výstupního napětí má velikost

$$u_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = u_2 \frac{R_2/R_1 + 1}{R_4/R_3 + 1} \cdot \frac{R_4}{R_3}.$$



rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{R_4}{R_3} &= \frac{R_2}{R_1} \\ u_0 &= \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1) \\ R_{|1|} &= R_1 \\ R_{|2|} &= R_3 + R_4 \\ R_{O|} &= 0\end{aligned}$$

Obrázek 36.3.2.: Rozdílový zesilovač. Podmínky potlačení souhlasné složky vstupních napětí u_1 a u_2 je poměrové vyvážení zpětnovazebních rezistorů, $R_4/R_3 = R_2/R_1$. S ohledem na offset se obvykle volí uplná symetrie, tj. $R_4 = R_2$ a $R_3 = R_1$.

Současné působení obou vstupních napětí ve vyváženém operačním obvodě

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1},$$

přísluší výstupní napětí

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1), \quad (36.3.5)$$

úměrné rozdílu vstupních napětí bez ohledu na jejich absolutní velikost. Odtud název operačního obvodu. Důvod zařazení napěťového děliče (R_3, R_4) je zřejmý - dělič sjednocuje zesílení invertujícího a neinvertujícího vstupu, která se liší absolutně o jednotku.

Dvěma vstupům přísluší dva vstupní odpory. První vstupní odpor

$$R_{|1|} = R_1$$

je roven velikosti rezistoru R_1 , protože vnitřní odpor bodu A¹ je nulový. Druhý vstupní odpor

$$R_{|2|} = R_3 + R_4$$

je roven součtu rezistorů R_3 a R_4 , protože vnitřní odpor zbytku operačního obvodu v bodě B je nekonečný. Tyto dva vstupní odpory jsou různé, i když jsou obě větve (R_1, R_2) a (R_3, R_4) stejné.

Vstupní odypy $R_{|1|}$ a $R_{|2|}$ přísluší dvěma samostatným uzemněným zdrojům signálových napětí u_1 a u_2 podle 36.3.2. Volnému (izolovanému) signálovému napěťovému zdroji připojenému diferenčně mezi vstupy rozdílového zesilovače, by příslušel diferenční vstupní odpor

$$R_{|D|} = R_1 + R_3,$$

rovný součkové velikosti rezistorů $R_{|1|}$ a $R_{|3|}$, protože body A a B jsou virtuálně zkratovány.

¹obdoba virtuální země

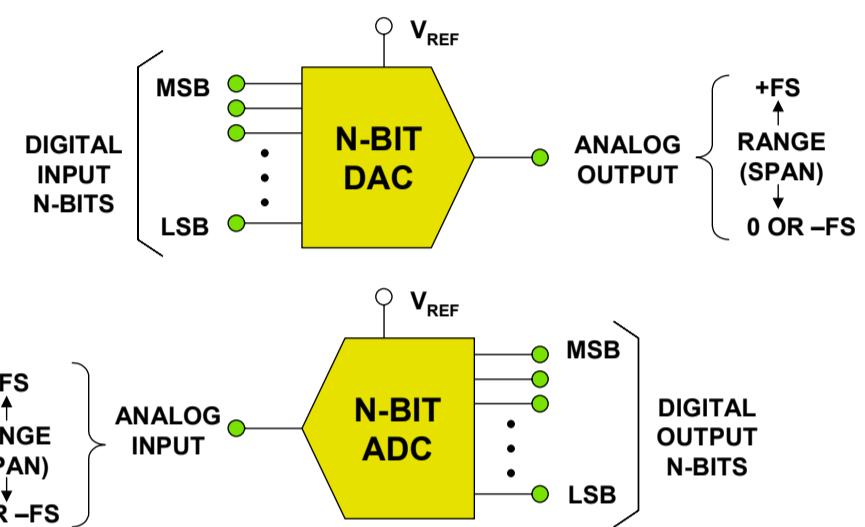
37. Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Obsah

37.1. Konverze mezi digitálním a analogový signálem	183
37.1.1. Základní struktura převodníků	183
37.1.2. Statické a dynamické parametry převodníků	184
37.1.3. Vzorkování	184
37.1.4. Kvantování	184
37.1.5. Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC	185
37.2. Principy A/D převodníků	186
37.3. Převod číslicového signálu na analogový	186
37.3.1. DA převodník DAC0800	187

37.1. Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Při zpracování analogového signálu je jednou z důležitých funkcí převod tohoto signálu z analogové podoby do číslicové a naopak. Proto jsou analogově-číslicové převodníky resp. číslicově-analogové převodníky (ADC - Analog-to-Digital Converter), (DAC - Digital-to-Analog Converter) velmi důležitými prvky jakéhokoli systému zpracovávajícího signál [Haz+10, s. 11]. Na obrázku 37.1.1 je definováno rozhraní obou typů převodníku.



Obrázek 37.1.1.: Definice rozhraní bloku analogově-číslicového (ADC) a číslicově-analogového (DAC) převodníku

Analogově-číslicové převodníky (Analog-to-Digital Converters) slouží k převedení analogového signálu na signál číslicový. Pro A/D převodník má analogová stupnice vstupního signálu délku FS (*Full scale*), udávanou např. ve voltech. Stupnice číslicového signálu pak vyznačuje diskrétní hodnoty výstupu, které převodník generuje při převodu analogového signálu [NU01, s. 202].

Číslicově-analogové převodníky (Digital-to-Analog Converters) slouží k opačnému procesu, tedy k převedení číslicového signálu na signál analogový, což by šlo realizovat pomocí lineárního digitálního potenciometru a připojeného zdroje referenčního napětí na jeho vstupu [NU01, s. 208]. Pro N-bitové binární slovo by musel mít $n-1$ rezistorů a n resp. $2n-1$ spínačů. To je monoliticky téměř nerealizovatelné již pro osmi- a vícebitové slovo. Řešení převodníků proto musí být mnohem úspornější, i když úspory budou vykoupeny jinými nevýhodami, případně omezeními pro jejich použití.

37.1.1. Základní struktura převodníků

Obě skupiny převodníků mohou typicky obsahovat komparátory, číslicové obvody, spínače, integrátory, vzorkovací obvody a/nebo pasivní součástky. Nezbytnou a důležitou součástí je i přesný zdroj referenčního napětí. V mnoha případech pak také platí, že DAC je jednou z částí ADC.

Analogově číslicový převod můžeme pomyslně rozložit do tří etap [ŠS10].

1. Převod signálu se spojitým časem na signál s diskrétním časem. Tomuto převodu říkáme vzorkování.
2. Kvantování vzorku s cílem vyjádřit vzorky konečnou množinou čísel. Tento krok je provázen vznikem tzv. kvantovacího šumu. Uvedený jev souvisí s nelineárním zkreslením známým z teorie obvodů.
3. Kódování spočívající zpravidla v binárním vyjádření čísel představujících velikosti vzorku.

37.1.2. Statické a dynamické parametry převodníku

Statické parametry převodníků jsou určovány pomocí *převodní charakteristiky*, zatím co dynamické vlastnosti se vyhodnocují z kmitočtového spektra převodníku [Haz+10, s. 11].

- rozsah,
- integrální a diferenciální nelinearity (*integral - INL, differential - DNL nonlinearity*),
- rozlišení převodníku (*resolution*),
- přesnost (*accuracy*),
- chyba monotónnosti,
- chyba nastavení nuly (*offset error*),
- hystereze a další.

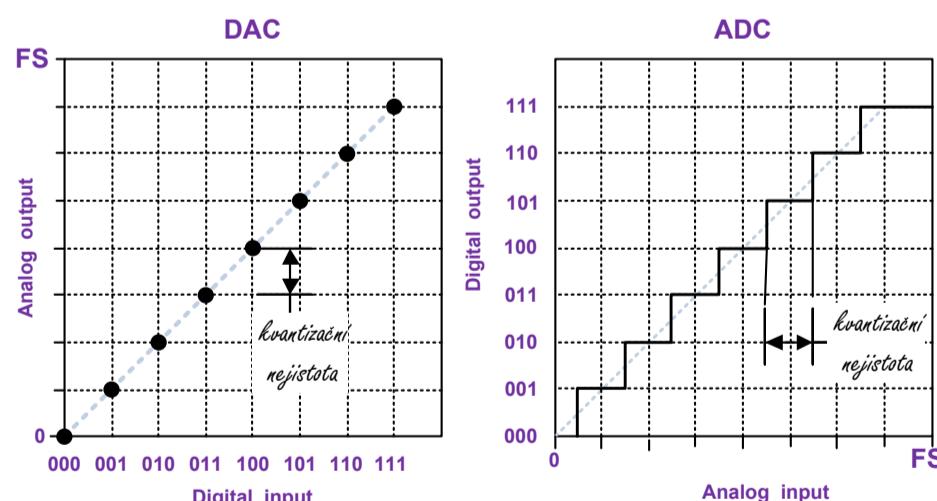
K hlavním dynamickým parametrům patří

- odstup signál - šum (*signal to noise ratio - SNR*) kap. 37.1.5.1,
- efektivní počet bitů (*effective number of bits - ENOB*),
- harmonické zkreslení (*total harmonic distortion - THD*),
- odstup signál-šum a zkreslení (*signal to noise and distortion - SINAD*),
- dynamický rozsah bez parazitních složek (*spurious free dynamic range - SFDR*),
- šum - vrcholový, efektivní (*noise - peak, rms*),
- doba přepnutí a ustálení.

37.1.3. Vzorkování

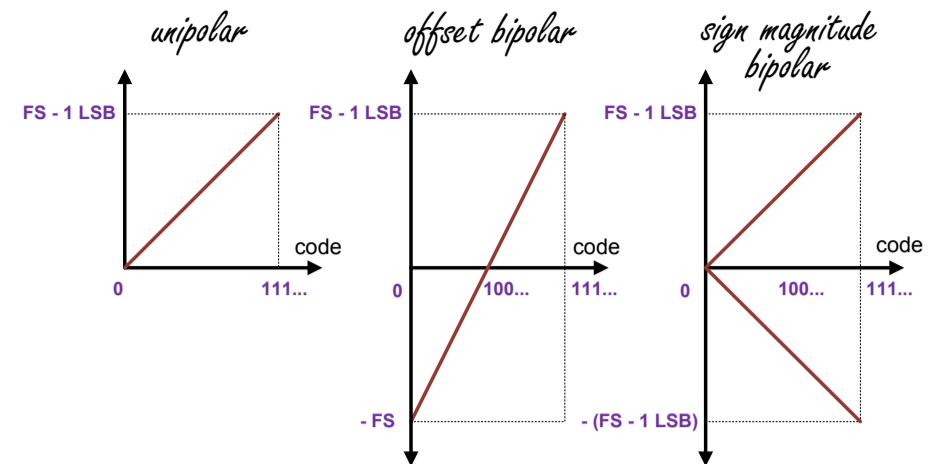
37.1.4. Kvantování

Pro přechod od časově spojitého signálu se spojitou množinou hodnot k číslicovému signálu, je nutné provést (výškové) kvantování, tj. kvantování hodnot signálu, které je patrné z obrázku 37.1.4. Je zřejmé, že mapování spojitého intervalu vstupních hodnot na diskrétní hodnoty digitálního výstupu způsobí, že každá hodnota digitálního výstupu platí pro vstupní signál měnící se v určitém podintervalu. Délka podintervalu, pro který platí jedna hodnota digitálního výstupu se nazývá **kvantizační krok převodníku** - Q , jenž je roven bitu s nejnižší váhou - LSB.



Obrázek 37.1.2.: Ideální přenosová funkce 3bitového unipolárního AD a DA převodníku. V případě DA převodníku je přenosová funkce tvořena osmi body, nikoliv čárou.

Převodní charakteristika DA i AD převodníku je znázorněna na obr. 37.1.2. Analogový signál je spojitý a číslicový signál vyjadřuje jen jeho vybrané diskrétní hodnoty. Proto je převodní charakteristika nespojitá. Naproti tomu digitální vstup vytvoří na výstupu pouze omezený počet hodnot výstupního signálu.

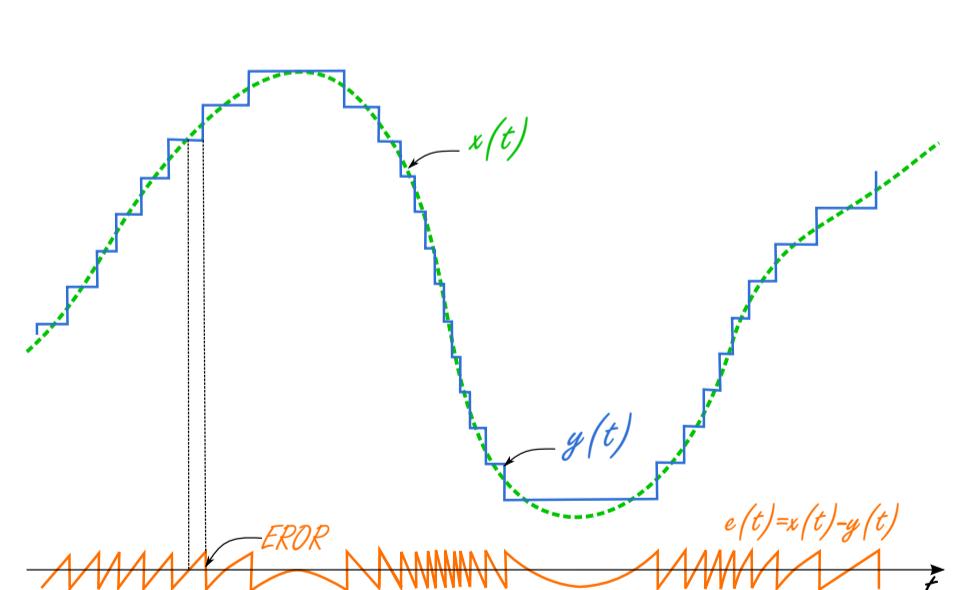


Obrázek 37.1.3.: Unipolární a bipolární převodníky [Keso4]

Počet úrovní AD převodníku, do kterého je rozdělen rozsah vstupního analogového signálu definuje **rozlišovací schopnost ADC** a lze ji vyjádřit různými způsoby, jak ukazuje tabulka 37.1.1 pro 2 až 24bitového převodníku.

Rozlišení N	2^N	Napětí 10V FS	ppm FS	% FS	dB FS
2-bit	4	2.5 V	250000	25	-12
4-bit	16	625 mV	62500	6,25	-24
6-bit	64	156 mV	15625	1,56	-36
8-bit	256	39,1 mV	3906	0,39	-48
10-bit	1024	9,77 mV	977	0,098	-60
12-bit	4096	2.44 mV	244	0,024	-72
14-bit	16384	610 μ V	61	0,061	-84
16-bit	65536	153 μ V	15	0,0015	-96
18-bit	262144	38 μ	4	0,0004	-108
20-bit	1048576	9.54 μ	1	0,0001	-120
22-bit	4194304	2.38 μ	0,24	0,000024	-132
24-bit	16777216	596 nV	0,06	0,000006	-144

Tabulka 37.1.1.: Porovnání rozlišovací schopnosti AD převodníku s různou délkom výstupního slova. Z tabulky vyplývá, že kvantizační krok 24bitového ADC odpovídá velikosti úbytku na rezistoru $2 \cdot 2k\Omega$ při teplotě $25^\circ C$, který vzniká vlivem tepelného šumu (viz Johnsonův šum) jenž je při šířce pásma 10 kHz roven 600 nV.



Obrázek 37.1.4.: Kvantizační chyba je rovna rozdílu původního $x(t)$ a kvantovaného signálu v úrovni $y(t)$ [WRB48]

Kvantizační chyba, jejíž průběh je na obr. 37.1.4, v dynamickém režimu, tj. při časových změnách vstupní analogové veličiny, způsobuje **kvantizační šum**.

zační šum. Ten lze pozorovat např. tehdy, kdy čísla získaná z převodníku A/D jsou vedena do převodníku D/A a jím je analogový signál rekonstruován. Rekonstruovaný signál se jeví jako signál původní, avšak se superponovaným rušivým signálem. Vzájemným odečtení rekonstruovaného a původního signálu, dostaneme samostatný rušivý signál, který lze podrobit analýze. Pokud je vzorkovací signál nekorelovaný se vzorkovaným signálem, je možno kvantizační šum považovat za náhodný. Vztah mezi původním signálem a signálem degradovaným kvantizačním šumem vyjadřuje parametr - SNR

- SNR - Signal to Noise Ratio: poměr signálu k šumu

$$SNR = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{(y(t) - x(t))^2\}} \quad (37.1.1)$$

- $E\{\cdot\}$... operátor průměrování
- $x(t)$... vstupní analogový signál
- $y(t)$... rekonstruovaný kvantovaný signál

Kvantizační chybu lze approximovat nekorelovaným pilovým průběhem s amplitudou špička-špička rovnou kvantizačnímu kroku Q . Ačkoliv takto provedená analýza (viz kapitola 37.1.5) není přesná, v běžných aplikacích zcela postačuje.

Na obr. 37.1.5 je kvantování realizováno tak, že je zajištěna minimální chyba kvantování, tj. převodník provádí operaci zaokrouhlování na nejbližší hodnotu. To znamená, že např. číslo jedna bude generováno vstupem v intervalu $1 \pm 0,5V$, je-li FS rovno 8V a máme-li k dispozici osm kvantizačních úrovní.

Převodník, který má v celém intervalu předváděných vstupních hodnot konstantní kvantizační krok, se též označuje jako lineární kvantizér. Převodník s přirozeným binárním kódem o N bitech je schopen na analogové straně reprezentovat $n-1$ nenulových úrovní analogové veličiny, přičemž platí

$$n = 2^N \quad (37.1.2)$$

A je-li o lineární N -bitový kvantizér, můžeme vyjádřit kvantizační krok vztahem

$$Q = \frac{FS}{n} = \frac{FS}{2^N} \quad (37.1.3)$$

Nejvyšší úroveň vstupní veličiny A pak bude

$$A_{max} = \frac{n-1}{n} + \frac{Q}{2} \quad (37.1.4)$$

V sekvenci bitů binárního čísla generovaného převodníkem se zpravidla první bit, který představuje nejvyšší binární řad, označuje MSB (Most Significant Bit), tedy nejvýznamnější bit. Poslední bit, tj. bit v poloze nejnižšího řádu, má označení LSB (Least Significant Bit), tedy nejméně významný bit. Je zřejmé, že LSB jednoznačně určuje základní krok na ose číslicového signálu. Dojde-li ke změně pouze v hodnotě LSB, změní se analogová hodnota právě o kvantizační krok. LSB tedy na analogové straně určuje rozlišovací schopnost převodníku. Např. osmibitový převodník má rozlišovací schopnost FS/256, tj. přibližně 0,4%. Je-li FS = 2V, musí rozlišit 8 mV [NUO1, s. 203].

Vzhledem k diskretizaci hodnot původního analogového signálu při převodu A/D dochází ke kvantizačním chybám. Je-li např. vstupní veličinou okamžité napětí u_a a této hodnotě odpovídá na výstupu číslo D , pak kvantizační chybu ε_q lze vyjádřit takto:

$$\varepsilon_q = u_a - FS \frac{D}{2^N} \quad (37.1.5)$$

37.1.5. Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC

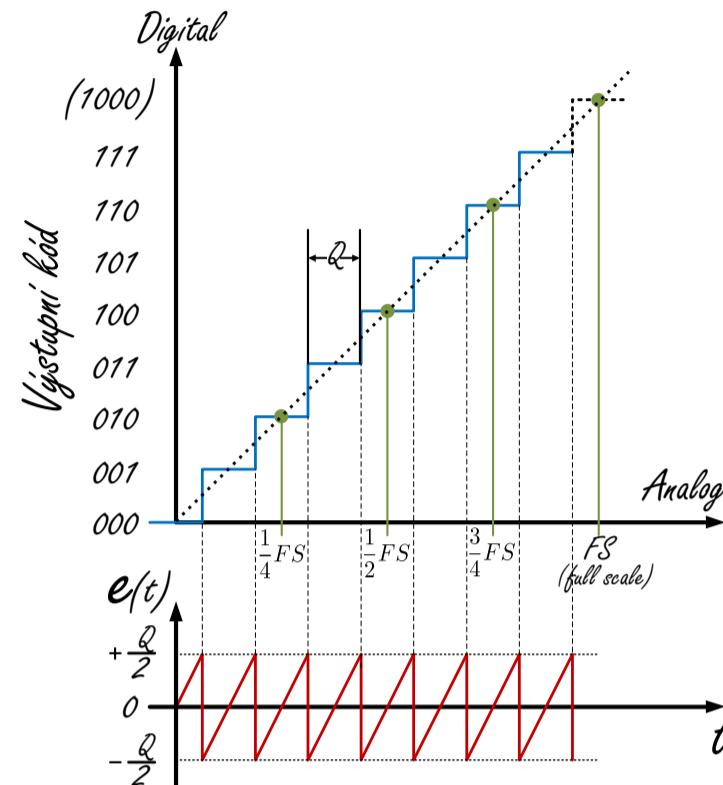
V předchozí kapitole byla nastíněna možnost approximace kvantizační chyby jakéhokoli AC signálu v časové oblasti (viz 37.1.4) nekorelovaným pilovým průběhem, za cenu určité nepřesnosti vyvážené jednodušším matematickým aparátem.

Vyjděme tedy z převodní charakteristiky ideálního N-bitového převodníku zatížené kvantizační chybou, tak jak je znázorněna na obr. 37.1.5. Z té je patrné, že chyba může v absolutní hodnotě dosáhnout maximálně

$e(t) = \frac{Q}{2}$, resp. $\pm \frac{1}{2}LSB$ a v rámci kvantizačního kroku ji lze popsat přímou se strmostí s :

$$e(t) = st, -\frac{Q}{2s} < t < +\frac{Q}{2s}$$

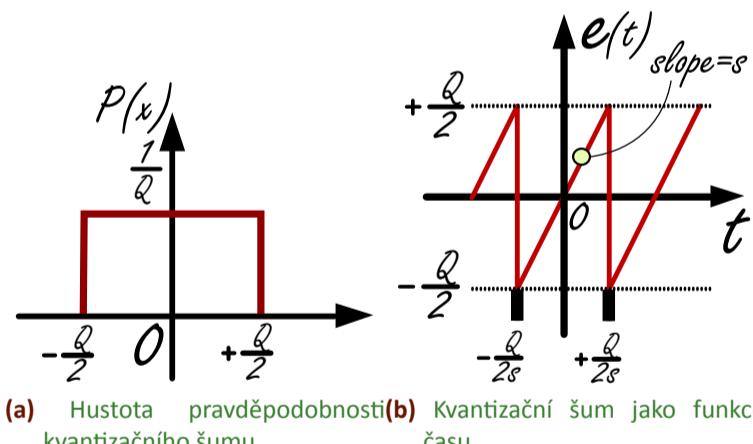
Statisticky je pravděpodobnost jejího rozložení $1/Q$ a je rovnoměrná od $-\frac{Q}{2}$ do $+\frac{Q}{2}$.



Obrázek 37.1.5.: Převodní charakteristika ideálních převodníků a závislost chyby kvantizace na vstupní analogové hodnotě

Z výše uvedeného plyne, že okamžitá hodnota kvantizační chyby $\varepsilon_q(t) = y(t) - x(t)$ může dosáhnout rozkmitu maximálně $\pm \frac{Q}{2}$ a jelikož předpokládáme rovnoměrné rozložení hodnot, je hustota pravděpodobnosti amplitud rovna $\frac{1}{Q}$.

Kvantizační šum σ^2 je definován jako výkon (rozptyl) střídavé složky kvantizační chyby ε_q a jeho efektivní hodnotu σ můžeme odvodit pomocí věty o druhém centrálním momentu nebo výpočtem efektivní hodnoty v časové oblasti.



Obrázek 37.1.6.: Odvození efektivní hodnoty kvantizačního šumu

1. V pravděpodobnostním počtu je K -tý moment definován jako:

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

tedy

$$e(t) = \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (x - x_0)^2 p(x) dx = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2}{12}$$

2. V časové oblasti má kvantizační šum pilový průběh viz obr. 37.1.6b. Z

definičního integrálu efektivní hodnoty dostaneme

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (st)^2 dt = \frac{Q^2}{12}.$$

Též můžeme využít znalosti efektivní hodnoty pro průběh tohoto typu: $\frac{U_m}{\sqrt{3}}$ a dosazením za $U_m = \frac{Q}{2}$ získáme opět stejný výsledek jako při výpočtu integrálu

Tedy efektivní hodnota kvantizačního šumu ideálního N-bitového převodníku je:

$$e(t) = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (37.1.6)$$

Předpokládejme na vstupu převodníku ustálený harmonický signál o amplitudě X . Dále předpokládejme, že signál s amplitudou X_m by pokryl celý rozsah převodníku FS . Pak se dá ze vztahu 37.1.1 vyjádřit odstup signálu od šumu SNR ideálního N -bitového převodníku jako podíl jejich výkonů resp. kvadrátu efektivních hodnot signálu a šumu v decibelech vztahem

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 \quad (37.1.7)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = 10 \log \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 = 20 \log \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \quad (37.1.8)$$

(37.1.9)

$$SNR = 1,76 + 6,02N + 20 \log \left(\frac{X}{X_m} \right) \quad (37.1.10)$$

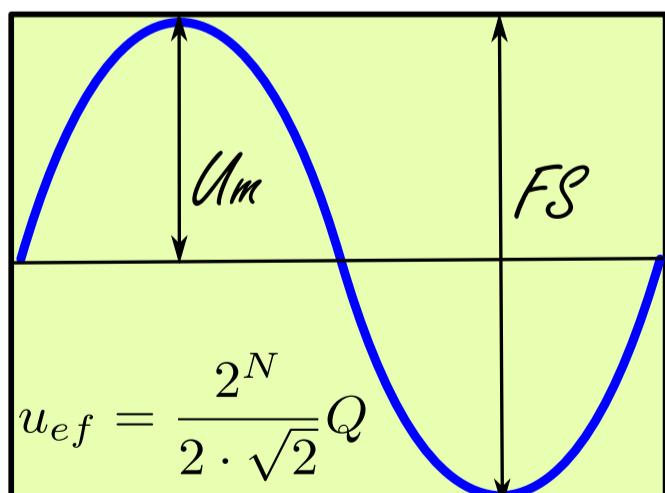
Lze tedy říci, že každý bit navíc v digitálním výstupu A/D převodníku přinese zlepšení odstupu signálu od šumu o 6 dB. Naproti tomu je třeba vědět, že uvedený výraz počítá s harmonickým signálem různého rozkmitu. Při zmenšování amplitudy bude relativní podíl šumu v signálu vyšší. Poměry se také mohou velmi změnit, když signál nebude mít harmonický charakter.

37.1.5.1. Odstup signálu od šumu

Z předchozí kapitoly víme, že SNR je definován jako poměr výkonu signálu k výkonu šumu ($výkon = ef.hodnota^2$). Pro samotný kvantizační šum platí:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{\frac{2^N}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot Q}{\frac{Q}{\sqrt{12}}} \right)^2 = N20 \log 2 + 20 \log \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad (37.1.11)$$

$$SNR_{dB} = 6,02 \cdot N + 1,76dB$$



Obrázek 37.1.7.

Tato hodnota platí pouze pro ideální převodník pouze s kvantizační chybou, a sinusový signál s rozkmitem přes celý rozsah převodníku. Skutečný převodník má ovšem vlivem dalších chyb SNR menší než SNR

určený pouze pro kvantizační šum. Tato hodnota se nazývá SINAD nebo SNDR - *Signal-to-Noise and Distortion ratio*.

Známe-li SNR skutečného převodníku, můžeme určit počet efektivních bitů N_{ef} tzn. *efektivní rozlišitelnost převodníku*. Ten je vždy menší než N .

$$N_{ef} = \frac{SNR - 1,76}{6,02} \quad (37.1.12)$$

37.2. Principy A/D převodníků

Převod analogového signálu na číslo lze uskutečnit několika různými postupy:[NU01]

1. Vstupní signál se porovnává s kvantovanou referenční veličinou a komparátory okamžitě vyhodnotí, který z nich je větší. Přímým výstupním údajem je binární číslicové slovo.
2. Vstupní signál i referenční veličina se v určité časové sekvenci zavádějí do integrátoru a komparátoru na jeho výstupu určuje sekvenci impulsů, vypovídající o hodnotě vstupní analogové veličiny. Informaci o vstupní veličině dále přenáší počet impulsu, jejich kmitočet nebo kódovaná sekvence impulsů. Tato informace může být převedena číslicovým blokem (obvykle blokem DSP) na binární číslicové slovo.

Bývá také používáno třídění na *převodníky s přímým a nepřímým vyhodnocením analogové veličiny*.

- Převodníky s přímým vyhodnocením porovnávají hodnoty analogové veličiny s vybranými kvantizačními úrovněmi současně nebo postupně, a to tak, že každá úroveň má vlastní komparátor. K těmto převodníkům patří *převodníky paralelní a kaskádní*.
- K nepřímému převodu můžeme využít postupného provolávání vstupní veličiny s vhodnými vzorky referenčního napětí, dodávanými na vstup jediného komparátoru v pořadí a velikosti řízené logickými obvody. U těchto převodníků je vstupní analogová veličina porovnávaná s výstupní veličinou převodníku D/A, přičemž je číslicový vstup tohoto převodníku měněn tak, aby se obě veličiny k sobě přibližovaly. Pokud se k sobě dostatečně přibliží, je převod ukončen. I zde jsou v podstatě jen dvě jednoduché možnosti přibližování výstup převodníku D/A k určité úrovni vstupní veličiny: buď se přibližování děje se stálým krokem, kdy jde o krokování po jednotlivých kvantovacích úrovních (*převodníky sledovací*), nebo postupnou approximací (*převodníky approximační*), kdy první krok rozhoduje o hodnotě MSB, další kroky porovnávají binárně zmenšované hodnoty odpovídající jednotlivým binárním řádům s tím, že poslední krok určí hodnotu LSB.

- Jinou možností nepřímého převodu A/D je převést hodnotu vstupní veličiny na takový parametr pomocného signálu, který se pak dá snadno převést na číslicový údaj. Tímto parametrem je nejčastěji kmitočet, jindy to může být i počet impulzů v určitém časovém intervalu nebo kódovaná sekvence impulzů. U těchto převodníků j kromě komparátoru typickým funkčním blokem integrátor.

37.3. Převod číslicového signálu na analogový

Číslicově-analogové převodníky převádějí číslicový signál zpravidla ve formě binárně kódovaného čísla na proud nebo napětí.

$$U_A = D \cdot U_{REF} \quad I_A = D \cdot I_{REF} \quad (37.3.1)$$

kde U_{REF}, I_{REF} jsou referenční napětí a proud určující rozsah výstupní veličiny. Je-li referenční napětí konstantní jedná se o klasické převodníky DAC. Při proměnném referenčním napětí se jedná o násobící převodníky MDAC, které realizují násobení časově proměnného referenčního signálu a vstupního číslicového signálu. Hodnota číslicového signálu D se

vyjadřuje ve dvojkovém nebo dvojkově desítkovém (BCD) kódu. Ve dvojkovém kódu:

$$D_B = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{-i} \quad (37.3.2)$$

n je počet bitů dvojkového čísla. Bit a_1 s nejvyšší vahou $1/2$ se označuje **MSB**, bit a_n s nejnižší vahou 2^{-n} se označuje **LSB**. Maximální hodnota číslicového signálu $D_{MAX} = 1 - 2^{-n}$ a proto maximální hodnota výstupní veličiny je vždy o 1 LSB menší, než je rozsah převodníku. Veličina $2^{-n} \cdot U_{REF}$, resp. $2^{-n} \cdot I_{REF}$ se nazývá **kvantum referenčního napětí nebo proudu** a určuje **rozlišitelnost** převodníku. Převodní funkci D/A převodníku můžeme v případě binárního kódu vyjádřit vztahem

$$U_A = U_{REF} \cdot (a_n 2^{-n} + a_{n-1} 2^{-(n-1)} + \dots + a_1 2^{-1}) \quad (37.3.3)$$

Statické vlastnosti D/A převodníku jsou určeny převodní charakteristikou, která je obvykle lineární (obr. 37.3.1). Převodní charakteristika reálného DA převodníku je zatížena chybou nuly, chybou zisku, integrální a diferenciální nelinearity a monotónností převodu.

Z převodní charakteristiky lze tedy určit následující parametry převodníku:

- Chybu nuly (posunu) ε_0

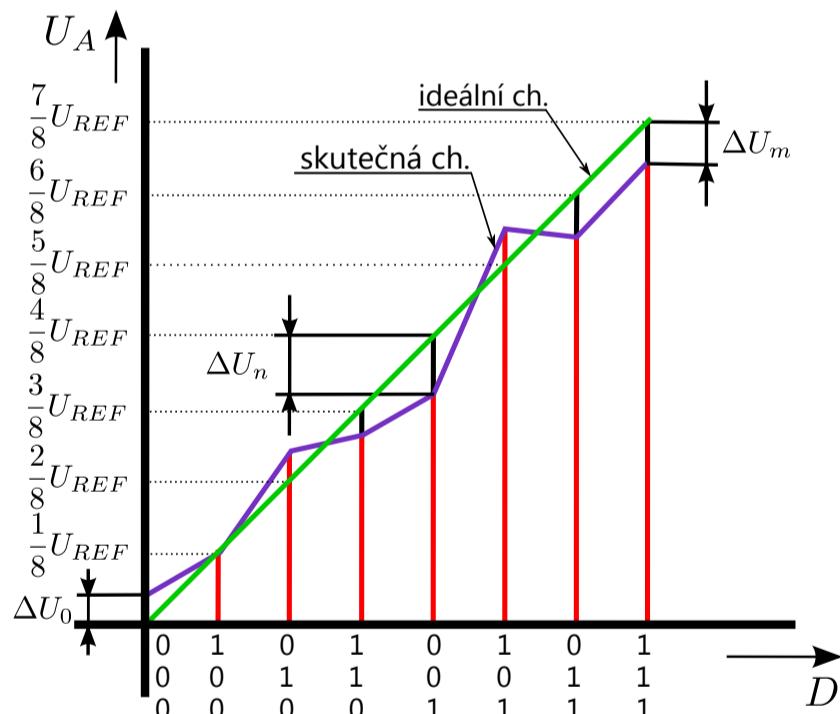
$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta U_0}{U_{REF}} \quad (37.3.4)$$

- Chybu měřítka (zesílení) ε_m

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta U_m - \Delta U_0}{U_{REF}} \quad (37.3.5)$$

- Integrální nelinearitu I_{NL} jako maximální odchylku výstupního napětí skutečného převodníku od ideální hodnoty v celém rozsahu převodníku

$$I_{NL} = \frac{\max \Delta U_n}{U_{REF}} \quad (37.3.6)$$

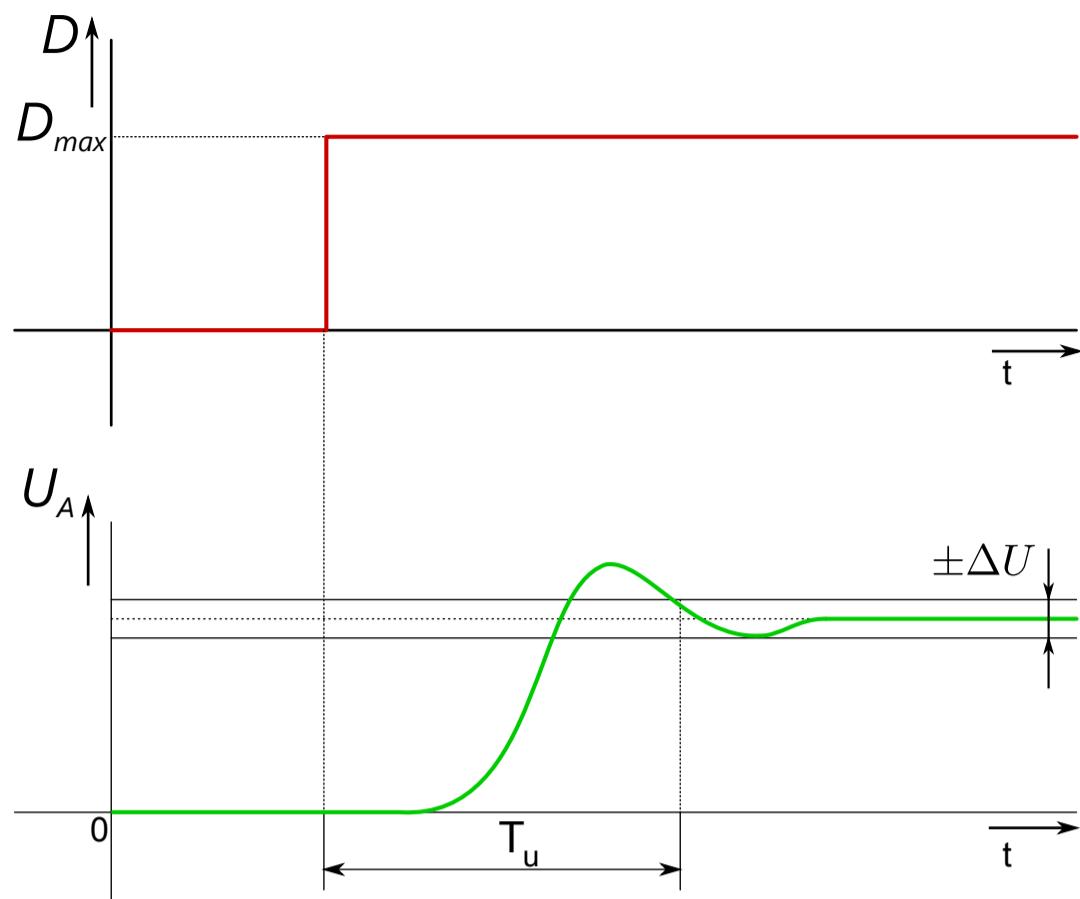


Obrázek 37.3.1.: Statická převodní charakteristika 3 bitového DA převodníku

Všechny tyto chyby se vyjadřují buď v procentech jmenovitého rozsahu U_{REF} převodníku, nebo v jednotkách ideální kvantizační úrovni (kvanta) $q = 2^{-n} \cdot U_{REF}$.

Dynamické vlastnosti D/A převodníku jsou charakterizovány **dobou ustálení** T_u (obr. 37.3.2), potřebnou k ustálení výstupního signálu na jmenovitou hodnotu se zadanou chybou ΔU obvykle $\pm 0.5LSB$.

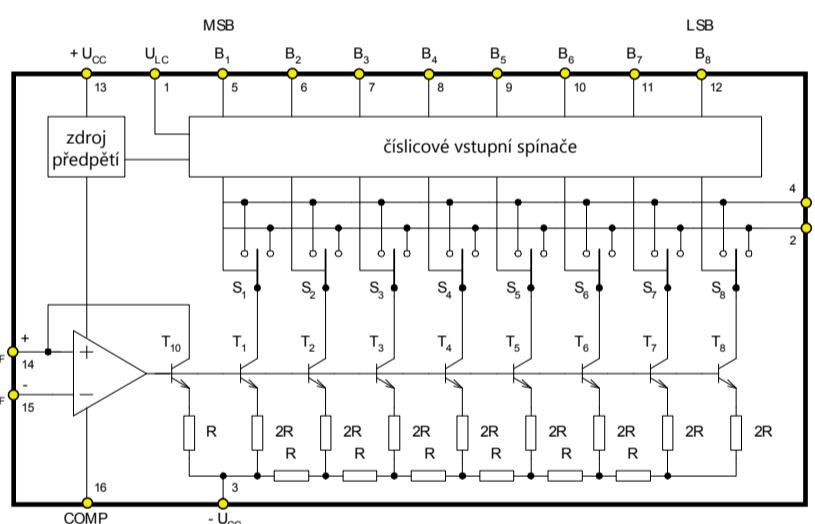
U násobících D/A převodníků se navíc určuje kmitočtový rozsah referenčního kmitočtem f_m , při kterém poklesne výstupní napětí převodníku o $3dB$ oproti stejnosměrnému napětí při maximální hodnotě číslicového signálu.



Obrázek 37.3.2.: Doba ustálení T_u DA převodníku. Je to celková doba od změny vstupního kódu do ustálení analogového výstupu s přesností $\pm \frac{1}{2} LSB$

37.3.1. DA převodník DAC0800

D/A převodník DAC0800 je velmi rychlý násobící D/A převodník s rozlišením 8 bitů, pracující na principu spínacích proudových zdrojů (viz obr. 37.3.3).



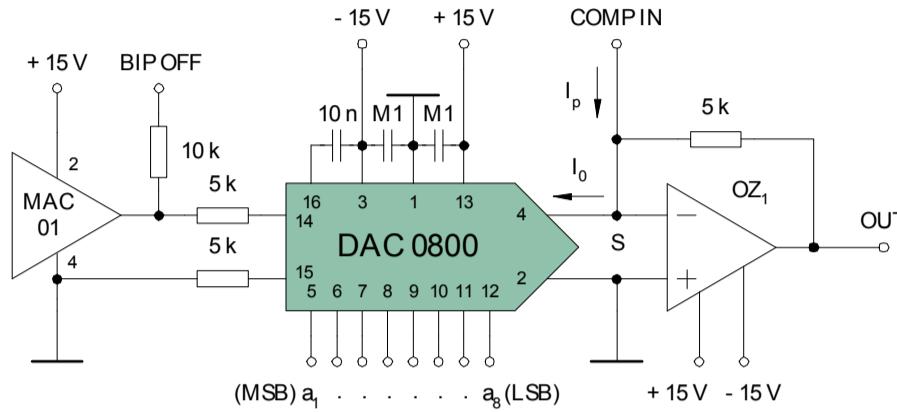
Obrázek 37.3.3.: Blokové schéma DA převodníku DAC0800

Vstup převodníku je proudový, proudový výstup je řešen jako komplementární. IO v sobě slučuje proudové spínače, váhové odpory a řídící zesilovač. Analogová reference, přesné vnější odpory, korekční kondenzátor a výstupní zesilovač se připojují vně převodníku. Převodník DAC0800 generuje váhové proudy do komplementárních proudových sběrnic I_0 a \bar{I}_0 prostřednictvím spínacích proudových zdrojů s tranzistory T_1 až T_8 a odpornou sítí $R - 2R$ viz obr. 37.3.3. Při úrovni H na číslicových vstupech B_1 až B_8 připojí spínače S_1 až S_8 příslušné váhové proudy na výstup I_0 a při úrovni L na výstup \bar{I}_0 .

Nezávislost váhových proudů na teplotních změnách zajišťuje referenční zdroj proudu s tranzistorem T_{10} a zesilovačem Z, ke kterému se připojuje referenční proud o jmenovité hodnotě $2mA$. Kondenzátor s kapacitou $10nF$ připojený mezi vývody 3 a 16 slouží ke kmitočtové kompenzaci zesilovače Z. Číslicové vstupy S_1 až S_8 řídí spínače S_1 až S_8 prostřednictvím převodníku úrovní, přičemž svorkou V_{LC} (pin 1) lze volit slučitelnost převodníku s obvody TTL, DTL, CMOS atd.

Vstupní referenční proud I_{REF} je odvozen pomocí vnějšího přesného odporu R_{REF} ze zdroje referenčního napětí U_{REF} . Souběh referenčního

proudů a plného výstupního proudu I_{FS} je zachován v rozpětí dvou dekád proměnné unipolární reference a umožnuje použít IO též jako násobící převodník. Výstupní proudy I_0 , \bar{I}_0 z vysokoimpedančních výstupů se mohou využívat přímo nebo pomocí vnějších odporů, popřípadě pomocí OZ, se mohou převést na napětí. Převodník pracuje se vstupním přímým binárním kódem při využití přímého proudového výstupu I_0 nebo se vstupním komplementárním binárním kódem, využije-li se doplňkový proudový výstup \bar{I}_0 . Rozhodovací úroveň číslicových vstupů lze z vnějšku nastavit na potřebnou hodnotu. Proto lze k řízení převodníku DAC0800 použít všechny běžně používané řady log. obvodů.



Obrázek 37.3.4.: Příklad zapojení převodníku DAC0800

Příklad zapojení D/A převodníku je na obr. 37.3.4. Obsahuje kromě vlastního D/A převodníku DAC0800 zdroj referenčního napětí MAC01 se jmenovitým referenčním napětím +10 V a invertor se zesilovačem, pracujícím ve funkci převodníku proudu na napětí pro realizaci napěťového výstupu převodníku. Funkce je následující: Napětí +10V z MAC01 je pomocí odporu $5k\Omega$ převedeno na proud $I_{REF} = 2mA$, který je přiveden do kladného referenčního vstupu DAC0800, kde je vynásoben nastavenou hodnotou číslicového signálu, zadanou pomocí osmi dvoupolohových přepínačů. Poté se proud $\max -2 \cdot (1 - 2^{-8}) mA$ objeví na výstupu I_0 a invertující zesilovač převede na odpovídající napětí. Zpětnovazební rezistor zesilovače $5k\Omega$ určuje rozsah výstupního napětí o až 10 V (unipolární režim). Jsou-li svorky BIP OFF a COMP IN propojeny, pak do sčítacího bodu S je přiveden proud $I_p = I_{REF}/2$ tj. 1 mA ($I_p = 10V/10k\Omega$) opačného směru než I_0 , který způsobí trvalý posun výstupní napěťové úrovni převodníku o $-5V$, takže rozsah převodníku bude $\pm 5V$ (bipolární režim) a hodnota výstupního napětí je určena dvojkovým kódem s posunutím (MSB určuje polaritu výstupního napětí).

38. Kmitočtové filtry

Obsah

38.1. Základní vlastnosti kmitočtových filtrů	189
38.1.1. Kmitočtové filtry a jejich použití	189
38.2. Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky	191
38.2.1. Průchod signálu kmitočtovým filtrem a přenosové kmitočtové charakteristiky filtrů	191
38.3. Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů	191
38.3.1. Filtry s přenosovou funkcí 1. řádu	191
38.3.2. Filtry s přenosovou funkcí 2. řádu	191
38.3.3. Přenosové funkce vyšších řádů	191
38.3.4. Citlivost a tolerance přenosových vlastností filtrů	191
38.4. Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu	191
38.4.1. Návrh filtrů RC	191
38.4.2. Návrh filtrů RLC 2. řádu	191
38.4.3. Návrh fázovacích článků RLC 1. a 2. řádu	191
38.5. Filtry RLC vyšších řádů	191
38.6. Filtry ARC 2. řádu	191
38.6.1. Základní principy funkce filtrů ARC	191
38.6.2. Obvody s náhradou cívky	192
38.6.3. Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností	192
38.6.4. Vliv reálných odporů a kondenzátorů	192
38.7. Filtry ARC vyšších řádů	192
38.8. Filtry se spínánými kapacitory	192
38.9. Zvláštní typy a aplikace kmitočtových filtrů	192

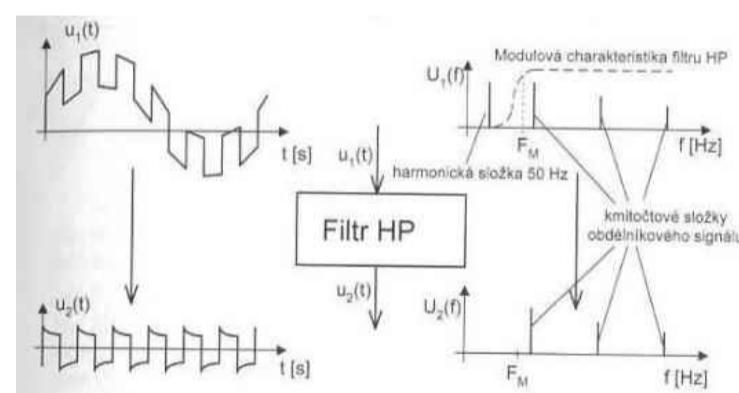
38.1. Základní vlastnosti kmitočtových filtrů

38.1.1. Kmitočtové filtry a jejich použití

Kmitočtové filtry jsou lineární elektrické obvody, používané v mnoha oblastech elektrotechniky a elektroniky. Jejich hlavním úkolem je výběr (selekce) kmitočtových složek procházejícího signálu podle jejich kmitočtů. Filtry obvykle některé kmitočtové složky signálů propouštějí bez útlumu (oblast se nazývá propustným pásmem), jiné kmitočtové složky potlačují (pásma potlačení, útlumu, nebo nepropustné pásma). Tyto vlastnosti obvykle vyjadřujeme *modulovou (amplitudovou) kmitočtovou charakteristikou* (závislost modulu napěťového přenosu na kmitočtu).

Příklad použití kmitočtového filtru ukazuje názorně obr. 38.1.1. Užitečný obdélníkový signál byl znehodnocen nízkofrekvenční rušivou harmonickou složkou (pronikající např. z napájecí střídavé sítě - kmitočet sítě je nižší, než kmitočty užitečných složek), signál je označen v grafu jako $u_1(t)$. Jak je z obrázku vidět, filtr typu horní propust propustil všechny kmitočtové složky s mezním kmitočtem vyšším než f_M (složky obdélníkového signálu) a potlačil tak nízkofrekvenční rušivou harmonickou složku, výsledný signál je v grafu označen jako $u_2(t)$. Z obr. 38.1.1 je zřejmé, že vliv kmitočtových filtrů na signál je dobře patrný zvláště při znázornění procesu filtrace v kmitočtové oblasti pomocí kmitočtového spektra - tedy pomocí rozkladu signálu na jeho jednotlivé harmonické složky.

Průchod signálu filtrem vede též obvykle k časovému zpoždění signálu, což je důsledkem fázových posuvů (zpoždění) procházejících harmonických kmitočtových složek signálu. Tyto vlivy obvykle vyjadřujeme *fázovou kmitočtovou charakteristikou*. Jejich vliv na výstupní signál je též zřejmý při znázornění signálu a vlastností filtru v časové oblasti (např. odezva na jednotkový skok). Fázové vlivy filtru na signál v propustném kmitočtovém pásmu se v časové oblasti projevují např. jako nežádoucí překmity či zvlnění průběhu signálu. V příkladu z obr. 38.1.1 (filtr typu horní propust) způsobil tento efekt zejména horní a spodní hran obdélníkového signálu. Uvedené vlivy je možné vhodnou volbou filtru minimalizovat. Na druhé straně ale existují případy, kdy těchto vlastností filtrů záměrně využíváme, např. ve fázovacích a zpožďovacích obvodech.



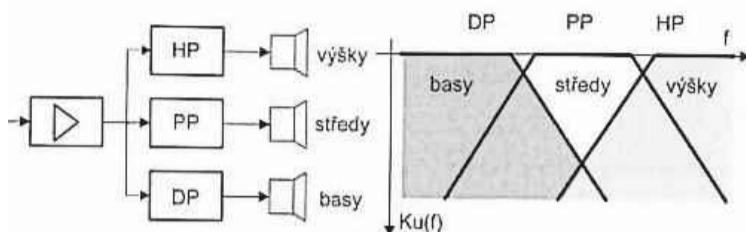
Obrázek 38.1.1.: Příklad selekce kmitočtových složek signálu filtrem typu horní propust pro potlačení nízkofrekvenční rušivé složky (např. kmitočet sítě 50 Hz)

38.1.1.1. Oblasti a příklady použití kmitočtových filtrů

Kmitočtové filtry patří mezi základní stavební bloky pro zpracování signálů. V radiotechnice je časté použití pásmových propustí pro výběr přijímaných signálů (vstupní obvody přijímačů, mezifrekvenční filtry), dolních propustí a horních propustí jako výhybek pro rozdelení kmitočtových pásů v anténních obvodech a předzesilovačích, pásmových zádrží pro rejekci (potlačení) rušících signálů, dolních propustí pro různé typy demodulátorů atd. Moderní komunikační systémy s rozloženým spektrem vyžadují také jeden z důležitých bloků přijímače filtr typu pásmová

propust. Obdobné je využití filtrů v telekomunikacích, při přenosu dat apod.

V elektroakustice se velmi často využívají korekční filtry (nastavitelné korektory hloubek, výšek, pásmové korektory, korektory kmitočtových charakteristik dynamických přenosek, magnetofonových hlav), různé typy filtrů v systémech omezení šumu (Dolby apod.). Dolní, horní a pásmové propusti tvoří kmitočtové výhybky pro reproduktorové soustavy (pasivní i aktivní), jak ukazuje obr. 38.1.2. V oblasti elektronické hudby se využívají různé filtry pro zabarvení zvuku a realizaci zvláštních zvukových efektů.



Obrázek 38.1.2.: Příklad použití filtrů v kmitočtových výhybkách reproduktoru.

Kmitočtové filtry se využívají také v oblasti *měřicí techniky*. Velmi často jsou to filtry pro výběr měřeného kmitočtového pásma, obzvláště pak v různých typech selektivních měření (selektivní voltmetry, měřiče harmonického a dalších typů zkreslení, různá vysokofrekvenční měření). Pro akustická měření se využívá několika typů váhových filtrů pro měření úrovně akustického signálu (modeluje se vnímání lidského ucha). Často se využívají korektorů kmitočtových vlastností snímacích čidel. I přes rozvoj číslicových kmitočtových filtrů je výhodné u slabých a hodně zarušených signálů provést před A-D převodem analogovou předfiltraci pro podstatné zvýšení dynamického rozsahu systému.

Zvláštní skupinu aplikací tvoří filtry typu dolní propust v systémech pro převod analogového signálu na číslicový. Pro splnění vzorkovacího teorému je zde v mnoha případech potřebné použít *antialiasingový filtr* pro zamezení překládání rušivého spektra do užitečného signálu a na výstupu takového systému obdobný rekonstrukční filtr. Kmitočtové filtry se používají často v *regulační technice*, speciální odrušovací filtry nacházejí uplatnění v *silnoproudé elektrotechnice*. Takto bychom mohli vyjmenovat mnoho dalších aplikací.

Lze říci, že neexistuje oblast elektrotechniky a elektroniky, kde se alespoň v omezené míře nevyužívají kmitočtové filtry. Základní orientace a znalost problematiky kmitočtových filtrů je proto potřebná prakticky pro každého tvůrčího pracovníka v elektrotechnice.

38.1.1.2. Způsoby realizací kmitočtových filtrů

Kmitočtové filtry můžeme v praxi realizovat mnoha odlišnými způsoby, které do určité míry určují i některé podstatné provozní vlastnosti filtru. Nejhodnější způsob realizace je potřebné si pro daný účel optimálně vybrat. Tyto způsoby realizací lze rozdělit orientačně do tří hlavních skupin:

- Realizace z **diskrétních prvků** (odpory, kondenzátory, cívky, operační zesilovače apod.), kde si každý uživatel může s menšími či většími problémy sestavit filtr přesné podle svých požadavků.
- Realizace v podobě **integrovaného bloku** je obvykle menší, levnější a lépe propracovaná, protože ji výrobce vyrábí ve velkých sériích vhodnou technologií. Na druhé straně si však uživatel obvykle nemůže upravit tento filtr podle svých speciálních požadavků a musí přesně dodržet podmínky zapojení podle výrobce.
- Realizace s **číslicovými filtry** spočívá v číslicovém zpracování signálu, kdy číslicovou interpretaci signálu matematicky upravujeme tak, aby výsledný signál měl po zpětném převodu shodné (či dokonce lepší) vlastnosti jako po průchodu normálním kmitočtovým filtrem. Matematicky tak modelujeme požadované vlastnosti filtrů a tímto způsobem lze dokonce realizovat i některé funkce a vlastnosti, které běžnými analogovými filtry nelze dosáhnout. Při realizaci jsme však omezeni na prostředí číslicového zpracování signálu (převodníky,

počítač či signálový procesor, vhodný program). Značným omezením může být i maximální rychlosť výpočtu počítače a vzorkování a tím i použitelné kmitočtové pásmo filtru.

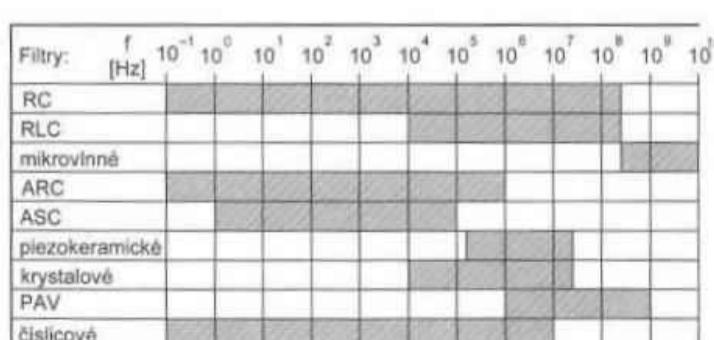
Jak je z tohoto dělení zřejmé, pro optimální výběr realizace filtru neexistuje univerzální návod, vždy záleží na podmírkách úlohy. Jde-li o úlohu, kdy řešíme číslicové zpracování signálu a máme dostatečnou výpočetní kapacitu daného prostředku, zvolíme číslicový filtr. V jiných případech (vysoký kmitočet signálů, slabý a zarušený signál, jde-li o výkonovou aplikaci apod.), použijeme analogový filtr. Při tomto řešení dáváme přednost standardnímu integrovanému filtru profesionální výroby (např. mezipřekovenční filtry přijímačů). Pokud však našim požadavkům plně nevhovuje, musíme navrhnut a vyrobit filtr požadovaných vlastností z dostupných diskrétních součástek. Složitost a rozmanitost vlastností jednotlivých realizací filtrů ukazuje i jejich následující podrobnější přehled, který rozděluje jednotlivé typy filtrů podle použitých stavebních prvků:

- **Filtry RC** vynikají svou jednoduchostí, dostupností a nízkou cenou výchozích součástek, rezistorů a kondenzátorů. Plné však u nich platí: za málo peněz - málo muziky. Praktické využití mají jen jednoduché filtry prvního řádu a druhého řádu s nízkým činitelem jakosti ($Q < 0,5$). Filtry RC vyšších řádů se v praxi používají výjimečně.
- **Filtry RLC** umožňují realizovat teoreticky libovolný typ filtru. Jejich omezení vyplývá především z použití cívek. Ty jsou obzvláště pro nízké kmitočty (velké hodnoty L) rozměrné, drahé a ztrátové (malý činitel jakosti Q). Obecné je také použití filtrů RLC omezeno vlastními ztrátami cívek a kondenzátorů a také tolerancí a stabilitou jejich hodnot pro propusti a zádrž s velmi malou relativní šírkou pásma. Obvykle jsou používány v kmitočtovém rozsahu od 100 kHz do 300 MHz, pro nižší kmitočty jen výjimečně. Pro kmitočty nad hranicí asi 300 MHz se výrazně projevují parazitní vlastnosti prvků a je lépe využít realizaci s rozprostřenými parametry - viz následující bod.
- **Mikrovlnné filtry** jsou realizací RLC filtrů v oblasti mikrovln ($f \gg 300$ MHz), kde již nelze použít prvky se soustředěnými parametry (R, L, C), ale používá se odpovídající realizace s rozloženými parametry jako jsou vlnovody, mikropásková vedení, koaxiální vedení apod.
- **Filtry ARC** (známé také jako *aktivní filtry RC*) v principu nahrazují filtry RLC. Místo cívek používají rezistory, kondenzátory a aktivní prvky, nejčastěji operační zesilovače. Mají obdobné vlastnosti jako filtry RLC, ale vzhledem k vlastnostem aktivních prvků se jejich použití omezuje nejčastěji na kmitočtové pásmo přibližně 0,1 Hz až 100 kHz. Současný pokrok v technologii aktivních prvků však umožňuje využití těchto filtrů na stále výších kmitočtech (dnes již řádové jednotky až desítky MHz), i když toto použití je zatím málo rozšířené. Kmitočtově jsou tedy vhodným doplňkem k filtrům RLC. Oproti nim mají výhodu i v snazší nastavitelnosti a laditelnosti změnou hodnot odporů. Jejich nevýhodou je na druhé straně potřeba napájení aktivních prvků. Objevují se i jejich specifické modifikace využívající parazitní vlastnosti aktivních prvků (R nebo C) jako stavebních prvků - filtry AC. AR apod.
- **Filtry ASC**, známé též jako *filtry se spínanými kapacitami* jsou speciální modifikací filtru ARC. Které místo odporů používají přepínané kondenzátory. Jejich hlavní výhodou je možnost poměrně snadné monolitické integrace v porovnání s filtry ARC. Některé typy můžeme zakoupit jako integrované obvody. Jejich mezní kmitočet je určen spínacím kmitočtem a jsou tedy snadno přeladitelné. Lze je řadit již do skupiny integrovaných filtrů, nicméně jsou zde možnosti určitého přizpůsobení požadavkům, a to jednak přeladěním, jednak také dostupnosti integrovaných nastavitelných bloků 2. řádu. Na druhé straně je však tento typ realizace kmitočtově ještě více omezen než filtry ARC a má navíc problémy s vysokým driftem, s určitým průnikem spínacího signálu do užitečného signálu a „schodovitostí“ výsledného signálu, způsobenou spínáním. Spínací kmitočet bývá $50 \times$ až $100 \times$ vyšší než mezní kmitočet filtru,

což do určité míry minimalizuje spínáním vzniklý projev diskretizace signálu v časové oblasti a možný aliasingový efekt (překládání spektra rušivého signálu do spektra užitečného signálu).

- Elektromechanické filtry** jsou historicky nejstarší „integrované“ filtry. Vycházejí z principu převodu elektrického signálu na mechanický, využitím některé formy mechanické rezonance a zpětného převodu výsledného mechanického signálu na elektrický. Chovají se tedy vesměs jako pásmové propusti. Podle typu mechanického rezonátoru je lze dělit na různé skupiny. Dříve byly používány např. magnetostriktční filtry a dnes jsou používané nejčastěji *piezokeramické filtry* (např. mezifrekvenční filtry 455 kHz a 10,7 MHz). Zvláštním typem je *krystalový filtr*, který odpovídá v podstatě složenému rezonančnímu obvodu s vysokým činitelem jakosti (řádové 10 000) a vysokou stabilitou rezonančního kmitočtu. Nejčastěji se využívá ve stabilních oscilátorech. Vzhledem k vysokému a nenastavitelnému činiteli jakosti a nenastavitelnému rezonančnímu kmitočtu se kristaly jako filtry používají velmi omezené. Zapojením většího počtu krytalů s velmi přesným výběrem lze realizovat úzký pásmový filtr pro speciální aplikace jako např. úzkopásmové mezifrekvenční filtry s vysokým rezonančním kmitočtem.
- Filtry s PAV (s povrchovou akustickou vlnou, anglická zkratka SAW)** jsou poměrně novým typem integrovaných filtrů, založených na principu vyzařování, šíření a fázového, kmitočtově závislého skládání povrchových akustických vln. Realizují se tak, že se nanese na nosnou keramickou destičku soustava vysílačích a přijímacích piezoelektrických zářičů, jejichž tvar a funkci lze přirovnat k dvěma Yagiho anténám. Obdobně jako u antén je rozměry a polohou zářičů tvarována přenosová kmitočtová charakteristika filtru. V porovnání s elektromechanickými filtry mohou realizovat podstatně širokopásmovější obvody. Proto se s výhodou používají, např. jako obrazové mezifrekvenční filtry v televizorech a v mnoha dalších aplikacích pro vysoké kmitočty. Na druhou stranu je jejich použití částečně omezeno vyšším průchozím útlumem.
- Filtry CCD (charge coupled devices - nábojové vázané obvody)** jsou dalším speciálním typem aplikace s časové diskrétní charakterem (např. jako filtry ASC). Využívá se u nich technologie známá např. z CCD televizních kamer a princip spočívá v postupném posuvu a fázově závislé sčítání jednotlivých „nábojových vzorků“.
- Číslicové filtry** jsou oproti předchozím filtrům odlišnou („softwarovou“) realizaci funkce filtrů, jejich princip byl popsán v předchozím odstavci.

Uvedený přehled potvrzuje značnou různorodost konečných realizací filtrů. Z přehledu vlastností jednotlivých typů kmitočtových filtrů je zřejmá i obtížnost úlohy konstruktéra při výběru optimálního způsobu realizace. Pro rychlejší orientaci o použitelnosti uvedených filtrů z hlediska kmitočtového pásma je možné využít tab. 38.1.3. Meze použití jednotlivých způsobů realizací je nutno chápát jen jako orientační, protože závisí nejen na současném stavu technologie, ale i na mnoha různých parametrech a požadavcích kladených na filtry.

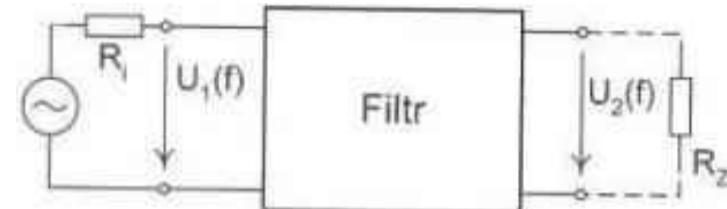


Obrázek 38.1.3.: Orientační znázornění kmitočtových pásů použitelnosti jednotlivých typů realizaci filtrů

38.2. Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky

38.2.1. Průchod signálu kmitočtovým filtrem a přenosové kmitočtové charakteristiky filtrů

Základní zapojení filtru připojeného ke zdroji harmonického signálu je uvedeno na obr. 38.2.1. Procházi-li přes kmitočtový filtr harmonický signál s amplitudou U_1 , kmitočtem f_1 a fázi φ_1 , získáme na výstupu filtru opět harmonický signál se stejným kmitočtem, ale jinou velikostí amplitudy a fáze (U_2 , φ_2).



Obrázek 38.2.1.: Filtr jako dvojbran

Přenos napětí K_U harmonického signálu filtrem lze pro daný kmitočet f vyjádřit komplexním výrazem

$$K_U = K_U \cdot e^{j\varphi} = \frac{U_2 e^{j\varphi_2}}{U_1 e^{j\varphi_1}}, \quad (38.2.1)$$

který můžeme rozdělit na reálnou a imaginární část. Častěji ale používáme vyjádření přenosu pomocí modulu a argumentu

$$K_U = \frac{U_2}{U_1}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (38.2.2)$$

kde modul K_U je poměr amplitud výstupního a vstupního signálu a argument φ je výsledný fázový posuv (časový rozdíl vztavený na periodu) mezi výstupním a vstupním signálem jako rozdíl fázi výstupního signálu φ_2 a vstupního signálu φ_1 . Modul přenosu K_U je bezrozměrné číslo a často se udává v logaritmické míře, kdy platí $K_U[\text{dB}] = 20 \log K_U$. Toto běžné používané vyjádření umožňuje grafické znázornění velkého rozsahu hodnot.

38.3. Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů

38.3.1. Filtry s přenosovou funkcí 1. řádu

38.3.2. Filtry s přenosovou funkcí 2. řádu

38.3.3. Přenosové funkce vyšších řádů

38.3.4. Citlivost a tolerance přenosových vlastností filtrů

38.4. Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu

38.4.1. Návrh filtrů RC

38.4.2. Návrh filtrů RLC 2. řádu

38.4.3. Návrh fázovacích článků RLC 1. a 2. řádu

38.5. Filtry RLC vyšších řádů

38.6. Filtry ARC 2. řádu

38.6.1. Základní principy funkce filtrů ARC

Při realizaci filtrů RLC pro nízké kmitočty jsou největší problémy s kvalitou, rozměry a cenou cívek. Proto se pro nízké kmitočty s výhodou nahrazují **aktivními filtry RC** (filtry ARC). Jejich základní princip spočívá

v "náhradě" cívky pomocí zapojení *aktivního prvku* (operační zesilovač, tranzistor) se dvěma rezistory a kapacitory. Nahradit cívku můžeme v zásadě dvěma základními způsoby. První spočívá v použití obvodu, který přímo nahrazuje cívku jako dvojpól a vykazuje mezi určitými svorkami příslušnou indukčnost. Druhý princip, jak bude ukázáno dále, nahrazuje cívku nepřímo, pomocí transformace výchozího LRC obvodu na ekvivalentně se chovající strukturu RCD, která indukční prvek neobsahuje, ale na druhou stranu potřebuje *syntetický prvek D* - dvojný kapacitor (kmitočtově závislý negativní rezistor).

38.6.2. Obvody s náhradou cívky

Aktivní filtry ARC, které vycházejí z filtru RLC a využívají k tomu přímou či nepřímou náhradu cívek, mají velké množství různých variant zapojení. Objasnění jejich funkce představuje i řadu různých pohledů na činnost filtru. V oblasti návrhu ARC filtru převažují dva hlavní přístupy. Velmi názorný je takový přístup, který vytváří obvody, vykazující na vstupních svorkách induktivní impedanci. Ty lze využít jako přímou náhradu indukčnosti ve filtru RLC. Zřejmě nejčastější je ale takový pohled, kdy vytváříme celý obvod ARC s přenosovou funkci 2. řádu jako ekvivalenci obvodu LRC 2. řádu, přičemž přímá náhrada cívky v obvodu nemusí být na první pohled zřejmá.

38.6.3. Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností

Stavebními prvky filtrů ARC jsou rezistory, kapacitory a aktivní prvky, jak již bylo naznačeno v předešlém textu. I pro nejjednodušší posouzení funkce, klasifikaci a výběr optimálního zapojení filtrů ARC je potřeba rozumět alespoň základním vlivům reálných vlastností těchto stavebních prvků na výsledné parametry ARC obvodu.

38.6.4. Vliv reálných odporů a kondenzátorů

(C_1 , i C_2) vytvářejí se zbytkem obvodu rezonanční obvod RLC, lze vliv jejich ztrát modelovat sériovým či paralelním spojením ideálního kapacitoru s rezistorem. Tento vliv lze posuzovat v principu shodně jako u filtrů RLC. Při ideálních vlastnostech zbývající části obvodu určuje hodnota činitele jakosti celkového obvodu činitel jakosti reálného kondenzátoru $Q_c = \frac{1}{tg\delta}$. Jeho hodnota musí být proto podstatně vyšší než výsledná funkční hodnota činitele jakosti celého obvodu (alespoň $10\times$). Při nižších hodnotách je třeba tento vliv brát v úvahu a pokud je to možné, kompenzujeme jej snížením vnějšího zatlumení tak, aby výsledné Q odpovídalo požadovanému. Je potřebné si uvědomit, že ztráty kondenzátorů může obdobně zvýšit i sériové či paralelní spojení kondenzátorů s parazitními odpory, jako je např. vnitřní odpor zdroje, parazitní vstupní a výstupní odpor aktivních prvků apod.

38.7. Filtry ARC vyšších řádů

38.8. Filtry se spínánými kapacitory

38.9. Zváštní typy a aplikace kmitočtových filtrů

Část XIV.

Elektronické napájecí zdroje

39. Impulzně regulované napájecí zdroje

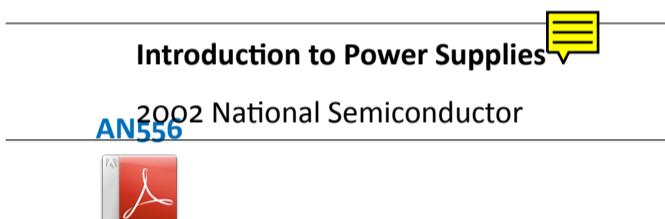
39.1. Úvod

Obsah

39.1. Úvod	195
39.2. Impulzní regulace ve výkonové elektronice	195
39.3. DC/DC měniče bez transformátoru	196
39.3.1. Vymezení pojmu a základních požadavků	196
39.3.2. Step-down converter (snižující neinvertující měnič)	198
39.3.3. Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)	198
39.3.4. Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou)	198
39.3.5. Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)	198
39.3.6. SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)	198
39.4. DC/DC měniče s transformátorem	198
39.4.1. Jednočinný propustný měnič s impulsním transformátorem	200
39.4.2. Jednočinný blokující měnič	204
39.5. Metody regulace spínaných zdrojů	204
39.5.1. Základy impulzní regulace	204
39.5.2. Regulační smyčka	205
39.6. Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů	205
39.6.1. Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem	206

Spínané napájecí zdroje plní funkci stejnou jako zdroje se spojitou regulací. Výkonový člen spínacích zdrojů je však zatěžován impulzně, tj. střídavě spínán a rozepínán. Lze tedy využít výhody impulzního režimu, tj. odebírat impulzní výkon podstatně větší, než je trvalý výkon při lineárním režimu regulátoru s týmž výkonovým členem. Spínací zdroje mají obecně větší účinnost než zdroje se spojitou regulací. Jsou výhodné zvláště tam, kde je velký rozdíl napětí na vstupu a výstupu regulátoru a kde jsou požadované malé rozmezry. Impulzní regulace zajistí stabilizované výstupní napětí i pro velké změny vstupního napětí; účinnost zdroje se při tom téměř nemění. I přes větší obvodovou složitost jsou ekonomicky výhodnější, neboť jejich použití vede k podstatné energetické úspore.

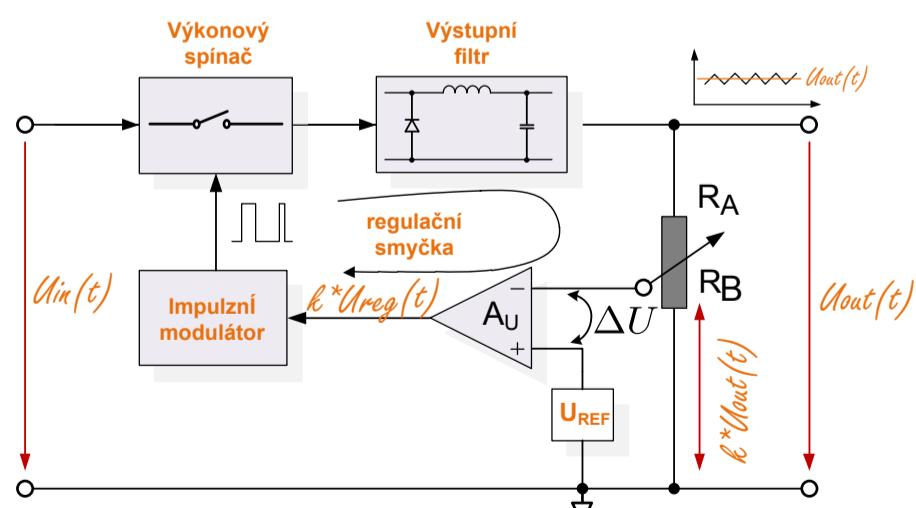
Impulzně regulované zdroje však mají v porovnání se zdroji s lineární regulací i některé nevýhodné vlastnosti, například pomalejší reakci výstupního napětí na rychlé změny zatěžovacího výstupního proudu. Při požadavku malého zvlnění výstupního napětí se nesmí zanedbat vliv impulzního charakteru těchto zdrojů. Impulzně regulované zdroje jsou také zdrojem rušivých signálů, které jsou generovány spínacími prvky [Ham96, s. 112].



39.2. Impulzní regulace ve výkonové elektronice

Základním principem a současně odlišností impulzní regulace od regulace klasické je v její *nespojitosti*. To znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí stabilizováno zásahy regulačního členu pouze v určitých, časově omezených intervalech. Podstata regulačního členu (regulátoru) tedy spočívá v řízení vzájemných časových relací aktivního a pasivního intervalu pracovního cyklu v závislosti na velikosti zesílené regulační odchylky.

Akční člen je tedy řízen dvouhodnotovým signálem, mající význam **zapnutí** nebo **vypnutí** výkonové součástky. Následující příklad demonstruje, jak lze tento signál vytvořit pomocí **pulzně-šírkové modulace** v simulátoru **LTS defense**. V simulacích některých topologií spínaných zdrojů bude místo zdroje s lineárně narůstajícím výstupním napětím viz obr. 39.2.3 použita regulační odchylka.



Obrázek 39.2.1: Základní schéma impulzního regulátoru

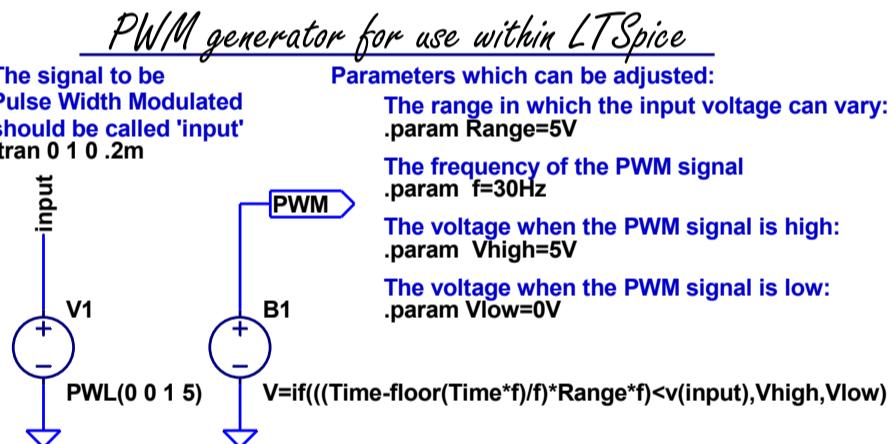
Srovnáme-li pro názornost klasický a impulzní regulátor na úrovni blokových schémat, vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál U_{ref} , zesilovač regulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprostě odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpor výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní. Z toho, jak je již známo, vyplývá velká poměrná výkonová ztráta na regulačním členu a tedy i malá účinnost spojité regulace za běžných provozních podmínek.

Impulzní regulace obr. 39.2.1 umožňuje výrazně snížit výkonovou ztrátu na regulačním členu. V tomto případě pracuje regulační prvek (tranzistor) jako řízený spínač. Proud jím tedy prochází pouze po určité interval pracovního cyklu. Přitom okamžitá výkonová ztráta v aktivním (sepnutém) stavu je vzhledem k $U_{CES} \rightarrow 0$ rádově menší, než u lineárního regulátoru. Další předností je, že velikost ztráty v podstatě nezávisí na rozdílu vstupního a výstupního napětí, ale prakticky pouze na kolektorovém proudu tranzistoru.

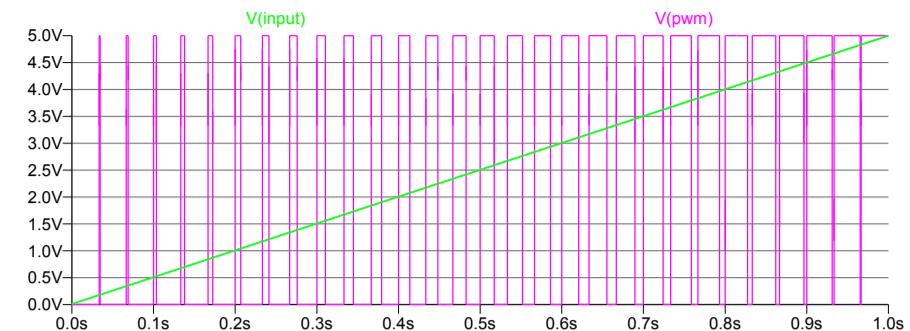
Možnost použít spínací regulační člen při stabilizaci stejnosměrného napětí je podmíněna jeho vzájemnou součinností s filtračním členem, který na rozdíl od aplikace ve spojitém regulátoru musí mít výrazný akumulační charakter. Uspořádání filtru, který je pro větší výkony vždy typu LC, je podřízeno topologii měniče. Princip činnosti nerozlučně vázané dvojice spínač - akumulační výstupní filtr spočívá v akumulaci energie, která je v aktivním intervalu odebrána ze zdroje, aby mohla být v následujícím pasivním intervalu (spínač vypnut) dodávána z filtru do zátěže [Ham96, s. 121].

Příklad 39.2.1. Na obr. 39.2.2 je realizován generátor šířkově modulovaného signálu pro simulátor LTSpice, jenž s výhodou využívá komponenty B-source, umožňující behaviorální popis požadovaného průběhu. Podrobnejším pohledem na zápis rovnic dle obr. 39.2.2, lze



Obrázek 39.2.2.: Realizace PWM generátoru pomocí komponenty B-source (Arbitrary behavioral voltage or current source) v LTSpice (soubor pwm.asc)

dojít k závěru, že zdroj $B1$ na svůj výstup vnútř hodnotu parametru V_{high} , nebo V_{low} , podle výsledku rozhodovací funkce $i.f.$. Tj. jeli $Time-floor(Time*f)/f)*Range*f$ větší než $V(\text{input})$, bude na výstupu $V_{high} = 5V$, v opačném případě $V_{low} = 0V$. Funkce $floor$ zaokrouhluje hodnotu svého argumentu na celé číslo (*integer*), což vede na schodovitý průběh a funkce $Time$ umožňuje do vztahu vnést okamžitou hodnotu simulačního času. Vzájemný odečtením získáme pilový průběh, kterým se komparuje s okamžitou hodnotou zdroje $V(\text{input})$.



Obrázek 39.2.3.: Výstupní signál $V(\text{pwm})$ z PWM generátoru na obr. 39.2.2 má-li rozhodovací napětí $V(\text{in})$ lineární charakter

39.3. DC/DC měniče bez transformátoru

39.3.1. Vymezení pojmu a základních požadavků

DC - DC měniče jsou obvody sloužící k regulaci elektrické energie, které mění vstupní stejnosměrné napětí U_1 na jiné výstupní stejnosměrné napětí U_2 . Budeme se přitom zabývat měniče tzv. *napěťového typu*, což jsou měniče napájené konstantním vstupním napětím z napěťového zdroje, nikoliv proudem, z proudového zdroje. V této kapitole se omezíme pouze na měniče bez transformátoru, které tedy neumožňují galvanické oddělení výstupu od vstupu [NVP99].

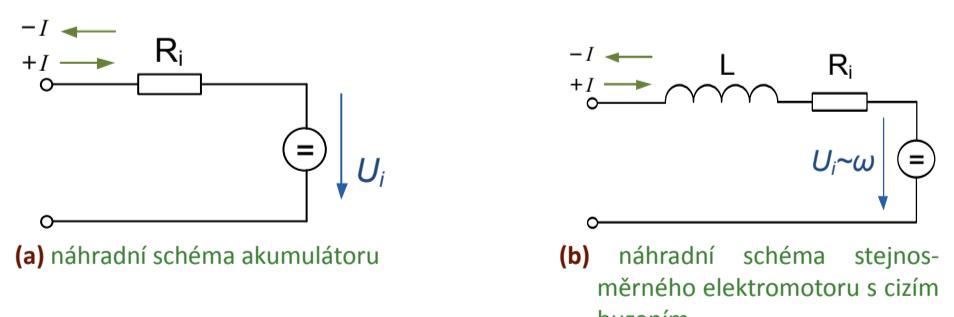
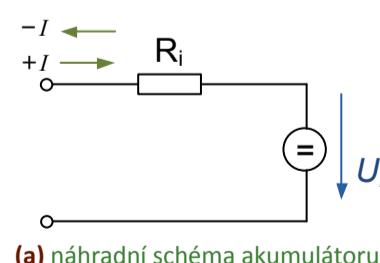
Každý měnič sestává z vlastního silového obvodu a řídicí elektroniky (regulačních obvodů). Silové obvody nesmí využívat při regulaci energie rezistorů a proto se mohou skládat jen ze **spínačů a akumulačních prvků**, tj. *indukčnosti a kapacit*.

39.3.1.1. Napájecí zdroj a zátěž měniče

DC/DC měniče mohou přenášet energii z principu oběma směry. Mohou tedy čerpat energii ze zdroje a dodávat ji do zátěže nebo také opačně energii čerpat ze zátěže a dodávat ji do zdroje. Pojmy zátěž a zdroj je proto nutné chápat v širším slova smyslu.

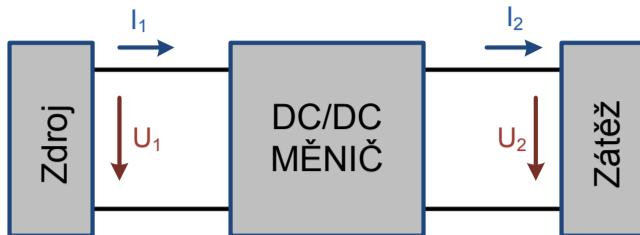
- Zdrojem s konstantním napětím U_1 , schopným dodávat i akumulovat energii, je akumulátor. Použijeme-li jako zdroj např. usměrňovač se sběrným kondenzátorem, pak není schopen dlouhodobě jímat energii z měniče, tj. dlouhodobě nesmí ve střední hodnotě převládat směr proudu do kladné svorky zdroje (krátkodobě, v okamžité hodnotě, je takový směr možný). Nabíjením sběrného kondenzátoru by totiž rostlo napětí U_1 . Tomu lze zabránit přeměnou dodávané energie na teplo ve vybíjecím rezistoru, či na Zenerově diodě, zapojené paralelně ke sběrnému kondenzátoru.
- Z hlediska schopnosti spotřeby či dodávky energie, lze rozlišovat zátěž **aktivní** a **pasivní**. Aktivní zátěž je opět např. akumulátor, ale třeba i stejnosměrný motor. Jeho náhradní zapojení, platné v ustáleném stavu, je uvedeno na obr. 11). Vnitřní rotační (pohybové) indukované napětí je úměrně otáčkám, proud pak momentu na hřídeli a to včetně znamének.

Teče-li proud ve střední hodnotě do zátěže (+I), pak motor pohání, tj. mění elektrickou energii na mechanickou (pracuje v *motorickém režimu*). Teče-li ze zátěže (-I), pak motor brzdí, tj. mění z vnějšku dodávanou mechanickou energii na energii elektrickou (pracuje v *generátorickém režimu*).



Obrázek 39.3.1.: Aktivní zátěž.

39.3.1.2. Pracovní kvadranty



Obrázek 39.3.2.: Označení vstupních a výstupních veličin DC/DC měniče.

Označme si vstupní a výstupní napětí a proud měniče podle obr. 39.3.2. Podle polarity výstupního napětí U_2 a výstupního proudu I_2 může měnič pracovat ve čtyřech kvadrantech tzv. **VA-roviny** (viz obr. 39.3.3).

V kvadrantech 1 i 3 dodává měnič energii do zátěže. Je-li zátěží motor, tak pohání. Pasivní zátěže mohou pracovat pouze v těchto kvadrantech. V kvadrantech 2 a 4 dodává aktivní zátěž energii zpět do měniče. Jde-li o motor¹, pak brzdí.

39.3.1.3. Možnosti zapojení silového obvodu

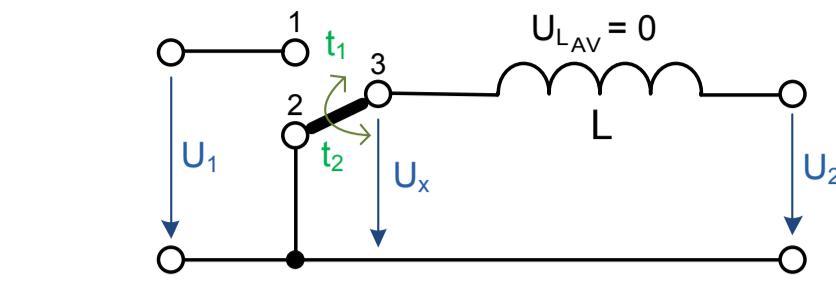
Na první pohled jsou zřejmá určitá omezení:

- Indukčnost nikdy nesmí být zapojena paralelně ke vstupu či výstupu (protože tam je napětí s nenulovou střední hodnotou).
- Kapacita nikdy nesmí být zapojena do série se vstupní nebo výstupní svorkou měniče (protože tudy prochází proud s nenulovou střední hodnotou).
- Jako akumulační prvek nelze použít samostatně kapacitu, není-li v obvodu použita ještě indukčnost (protože by v měniči napěťového typu docházelo k nepřípustnému nárazovému nabíjení kondenzátoru zkratovým proudem). Čili měnič napěťového typu musí obsahovat alespoň jednu indukčnost.
- Žádný spínač nesmí zkratovat vstup ani výstup měniče.

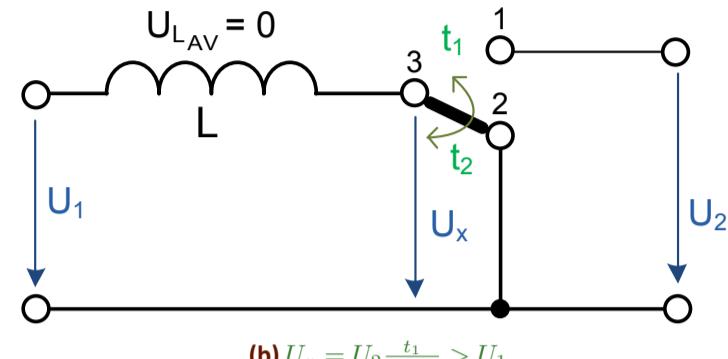
39.3.1.4. Nejjednodušší měniče s jediným akumulačním prvkem

Pro výchozí představu, vysvětlující princip činnosti, vytvoříme silový obvod měniče ze dvou prvků. Bude to indukčnost L a ideální přepínač. Vezmeme-li v úvahu omezení z kap. 39.3.1.3, existují podle obr. 39.3.4 jen tři způsoby, jak takový měnič zapojit [NVP99].

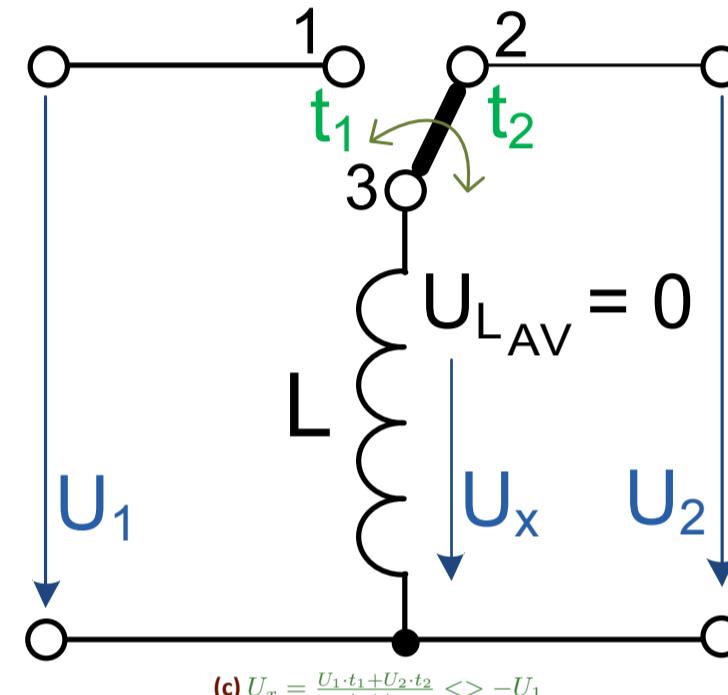
Označme střední hodnotu napětí mezi společným uzlem přepínače 3 a zemí jako U_x . Předpokládejme, že přepínač je ovládán periodickým signálem s periodou T a s nastavitelnou střídou, takže po dobu t_1 spojuje



$$(a) U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1$$



$$(b) U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1$$



$$(c) U_x = \frac{U_1 \cdot t_1 + U_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1$$

Obrázek 39.3.4.: Principiální schémata DC/DC měničů s jediným akumulačním prvkem.

svorky 3 – 1 a po dobu $t_2 = T - t_1$ pak svorky 3 – 2. Popišme nyní nejzákladnější vlastnosti tří měničů z obr. 39.3.4.

- Střední hodnota U_x na obr. 39.3.4a musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (39.3.1)$$

Výstupní napětí je rovno U_x , neboť střední hodnota napětí na indukčnosti L musí být nulová. Platí proto:

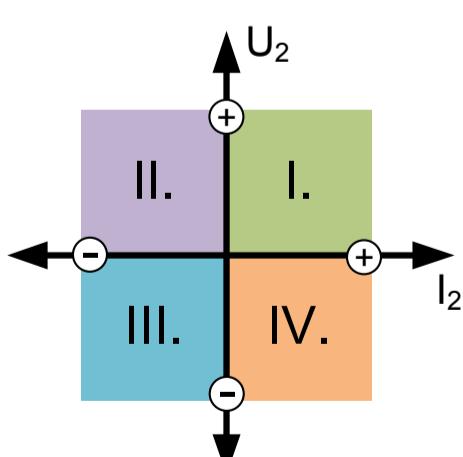
$$U_2 = U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (39.3.2)$$

Výstupní napětí je vždy menší než vstupní a má stejnou polaritu. Jde tedy o měnič **snižující** a **neinvertující**. Jeho jiné názvy jsou: **step-down, chopper, buck, propustný měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 1 a 2. Čili měnič je schopen dávat napětí U_2 jediné polarity, ale proud I_2 muže téci oběma směry (je-li to umožněno - aktivní zátěž).

- Střední hodnota U_x na obr. 39.3.4b musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1 \quad (39.3.3)$$

Vstupní napětí U_1 je rovno U_x (nulová střední hodnota napětí na



Obrázek 39.3.3.: Pracovní kvadranty ve VA rovině.

indukčnosti L). Odsud pro U_2 platí:

$$U_2 = U_1 \frac{t_1 + t_2}{t_1} > U_1 \quad (39.3.4)$$

Střední hodnota výstupního napětí je vyšší než vstupní napětí a má stejnou polaritu. Jde tedy o *zvyšující a neinvertující měnič*. Jiný název je měnič **step-up, boost**. Možné pracovní kvadranty² jsou opět 1 a 2.

3. Střední hodnota U_x na obr. 39.3.4c musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1 \quad (39.3.5)$$

Protože U_x je střední hodnota napětí na indukčnosti L, musí platit $U_x = 0$ tj.

$$U_1 = -\frac{t_1}{t_2} U_2 <> -U_1 \quad (39.3.6)$$

Výstupní napětí má opačnou polaritu než vstupní, jde tedy o měnič *invertující*. Velikost výstupního napětí může být větší i menší než vstupní. Vžité názvy jsou měnič **buck-boost, měnič se společnou tlumivkou, blokující měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 3 a 4.

39.3.1.5. Prakticky realizované silové obvody

Kap. 39.3.1.4 ukazuje, že elektronicky ovládaný přepínač tvoří základní stavební kámen každého měniče. Tyto přepínače se ve skutečných obvodech realizují pomocí tzv. horních a dolních spínačů, což jsou *trojpóly* podle obr. 39.3.5.

39.3.2. Step-down converter

(*snižující neinvertující měnič*)

Jedná se o měnič s horním spínačem. Další jeho používané názvy jsou: propustný měnič, chopper, buck. *Pracuje v 1. kvadrantu*.

39.3.3. Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)

39.3.4. Buck-boost converter

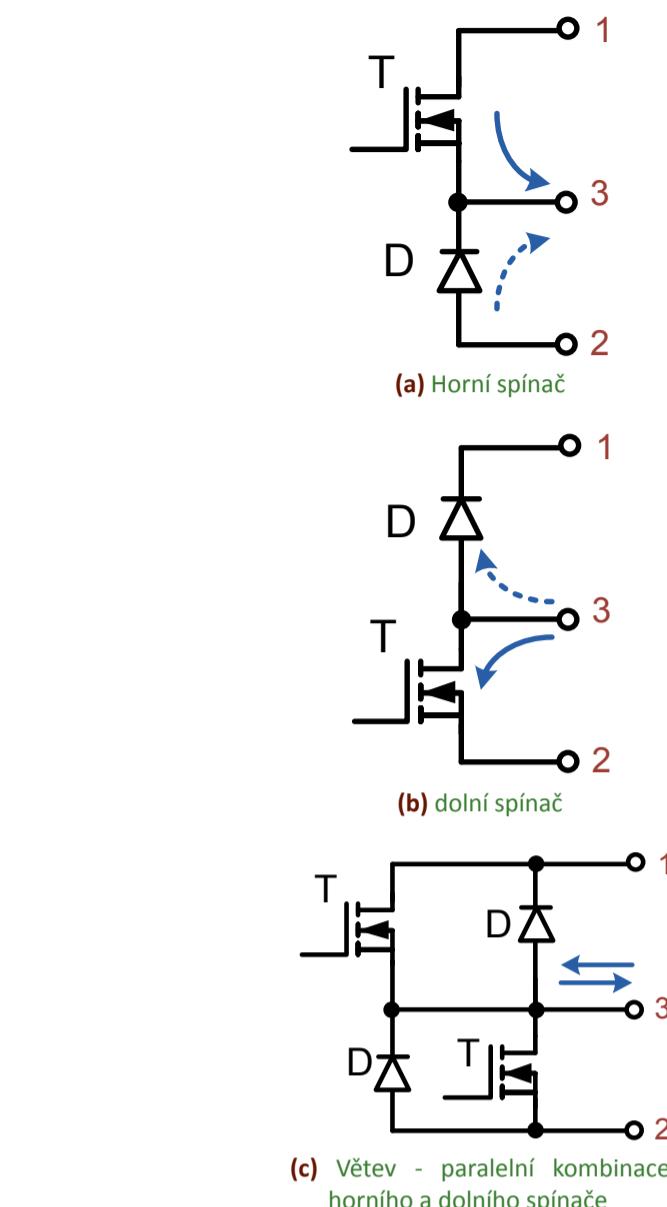
(*Invertující měnič se společnou tlumivkou*)

39.3.5. Cuk converter

(*Měnič se společným kondenzátorem*)

39.3.6. SEPIC converter

(*Single-ended primary inductor converter*)



Obrázek 39.3.5.: Horní a dolní spínač.

39.4. DC/DC měniče s transformátorem

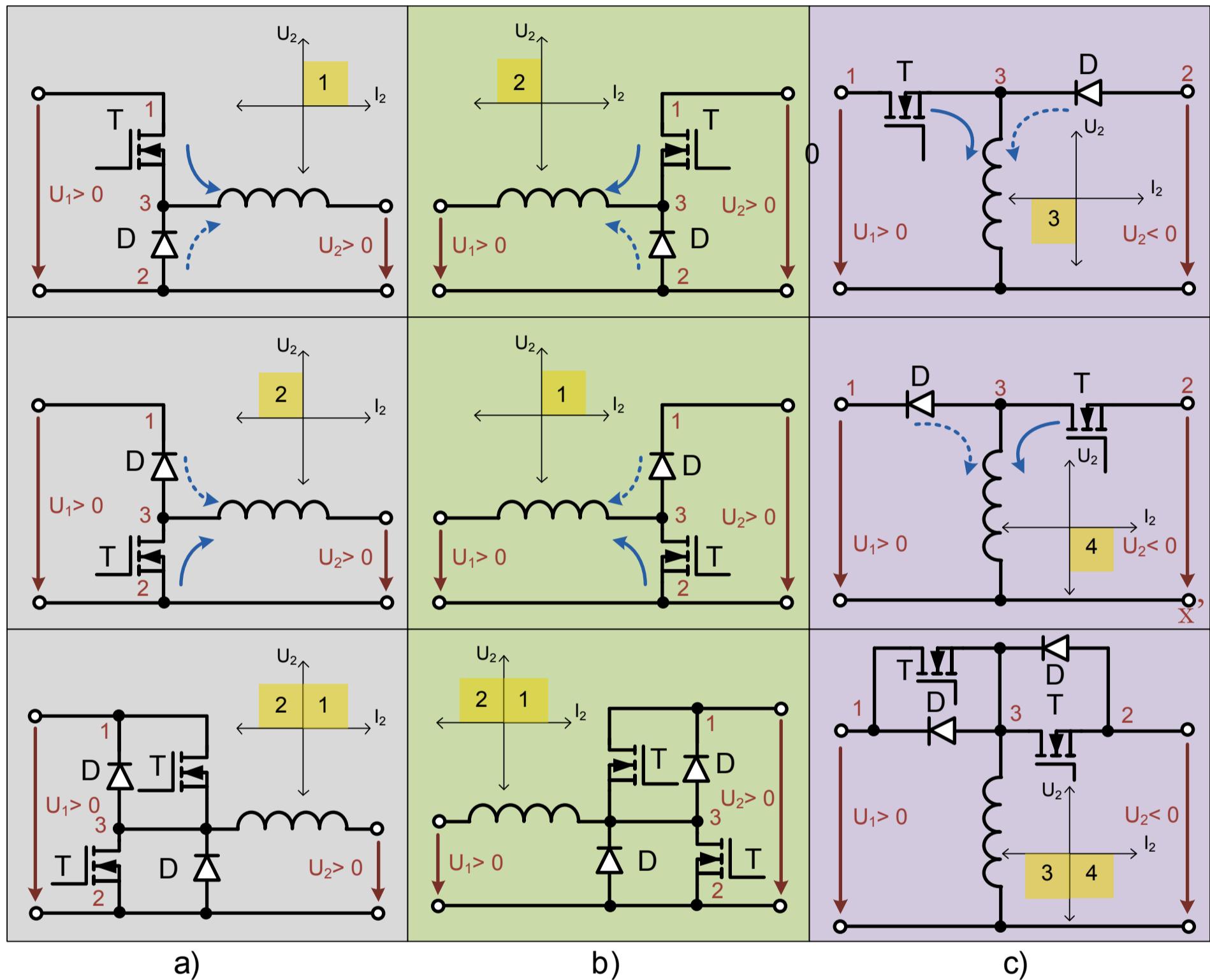
Základní popis DC/DC měničů bez transformátoru, provedený v kap. 39.3, platí i pro měniče s transformátorem. Doplněním vhodně zapojeného vf. impulsního transformátoru je umožněno galvanické oddělení výstupního a vstupního napětí a transformaci napětí a proudu. Nejčastěji se v praxi setkáme s transformátorovými verzemi měniče propustného z kap. 39.3.2 a měniče blokujícího z kap. 39.3.3. Existuje i transformátorová verze měniče Čukova z kap. 39.3.5.

Snižující měnič z kap. 39.3.2 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič propustný**, neboť díky transformátoru lze převodovým poměrem zajistit výstupní napětí i vyšší než vstupní (názvy „*snižující měnič*“ a „*step-down*“ by tedy byly zavádějící). Princip činnosti však v hrubých rysech zůstává stejný.

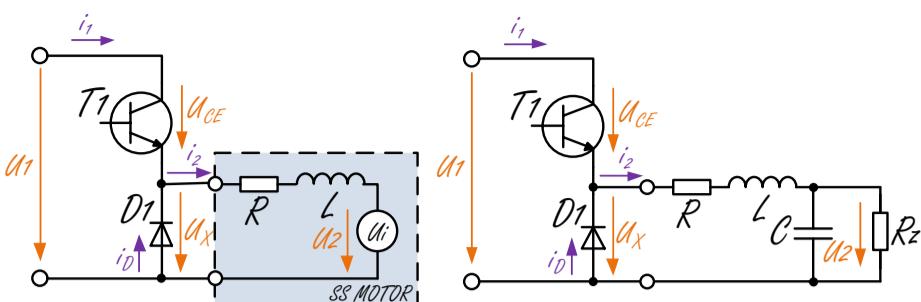
Invertující měnič se společnou tlumivkou z kap. 39.3.4 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič blokující**, neboť díky transformátoru lze vyrobit napětí libovolné polarity (název „*invertující měnič*“ proto pozbývá výstižnosti).

Základní stavební kameny měničů bez transformátoru tj. horní spínač a dolní spínač (kap. 39.3.1.5) tvoří základ i u měničů s transformátorem, i když v zapojeních jsou tranzistor a jeho protilehlá dioda *rozděleny* tím, že je tranzistor na primární straně a dioda na sekundární. Použití transformátoru navíc vyžaduje demagnetizační obvody (zajištění nulové střední hodnoty primárního napětí) a další výstupní usměrňovací diodu (diody). To vše vede k tomu, že transformátorové měniče jsou **jednokvadrantové**. Výstupní napětí má jedinou možnou polaritu a výstupní proud jediný možný směr takový, že zátež se chová vždy jako spotřebič, nikoli jako generátor.

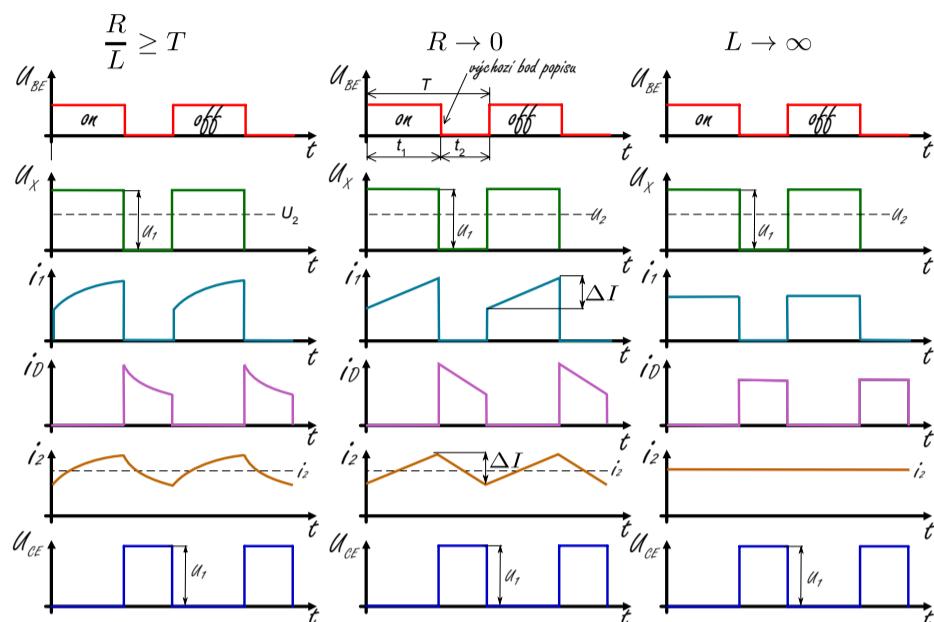
²Měnič 39.3.4a pracující v kvadrantu 1 je měničem 39.3.4b pracujícím v kvadrantu 2. Naopak 39.3.4a v kvadrantu 2 je 39.3.4b v kvadrantu 1. Čili 39.3.4a a 39.3.4b je vlastně týž obvod, pouze zaměňuje vstup a výstup.



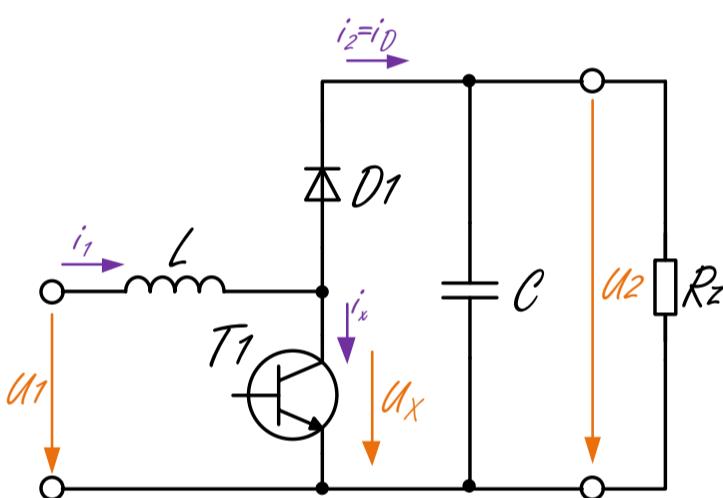
Obrázek 39.3.6.: Skutečné silové obvody měničů z obr. 39.3.4 a jejich pracovní kvadranty: a) měnič snižující neinvertující (step-down), b) měnič zvyšující neinvertující (step-up), c) měnič invertující (buck-boost)



Obrázek 39.3.7.: Snižující měnič pracující v prvním kvadrantu s aktivní zátěží typu stejnosměrný motor nebo s LC filtrem



Obrázek 39.3.8.: Průběhy napětí a proudů snižujícího měniče



Obrázek 39.3.9.: Zvyšujícího měnič pracující v prvním kvadrantu - Schéma zapojení

39.4.1. Jednočinný propustný měnič s impulsním transformátorem

Propustné měniče se vyznačují tím, že energie je přenášena ze vstupu na výstup v době zapnutí tranzistoru, nikoli v době vypnutí, jak je tomu u měničů blokujících.

V této i v následujících kapitolách budou analyzovány měniče typu DC/DC, které obsahují vysokofrekvenční impulzní transformátor na feritovém jádře. Transformátor zajišťuje galvanické oddělení mezi vstupní a výstupní stranou měniče. Je-li vstupní stejnosměrné napětí získáno usměrněním střídavé sítě, pak bývají tyto měniče někdy označovány jako tzv. *síťové spínané zdroje*.

Celý výkonový řetězec sestává z následujících základních bloků:

- buď síťový usměrňovač - stejnosměrný meziobvod — vlastní měnič,
- nebo akumulátor — stejnosměrný meziobvod - vlastní měnič.

Stejnosměrný meziobvod (ss. mezilehlý obvod, DC-bus, zwischenkreis) bývá napěťového typu, tj. vůči následujícímu měniči se chová jako (téměř) ideální zdroj konstantního napětí U_d nulovou vnitřní impedancí. Bývá realizován buď LC-filtrem, nebo samostatným sběracím kondenzátorem o velké kapacitě. Dvojcestným usměrněním sítě 1×230 V vznikne

na sběracím kondenzátoru ss. mezilehlé napětí U_d o hladině přibližně 300 V. Šestipulsním usměrněním sítě 3×400 V vznikne ss. napětí o jmenovité střední hodnotě 542 V.

Na hladině 542 V se obvykle používají tranzistory IGBT se závěrným napětím 1200 V, které pracují na spínacím kmitočtu od 25 kHz do 60 kHz (podle přenášeného výkonu). Kmitočet je ve většině případů omezen především přepínacími ztrátami v tranzistorech IGBT.

Na hladině 300 V bývají převážně používány tranzistory MOSFET se závěrným napětím 600 V. Tranzistory jsou v současnosti tak rychlé, že mohou pracovat na spínacím kmitočtu až do 300 kHz. Pracovní kmitočet leží typicky v oblasti 40 kHz až 120 kHz. Jediným důvodem ke zvyšování kmitočtu je zmenšování objemu transformátoru i výstupní tlumivky. Zvyšování kmitočtu nad 200 kHz není výhodné z následujících důvodů:

- Mezní kmitočet manganato-zinečnatých feritů leží kolem 450 kHz, tudíž v pásmu nad 200 kHz prudce rostou hysterezní ztráty (viz komplexní permeabilita v kap. 6.4.4.). Ztráty je nutno omezovat snižováním maximální pracovní indukce B_{max} , což působí proti zmenšování transformátoru.
- V oblasti nad 200 kHz začínají narůstat problémy se skinefektem ve vinutí transformátoru (nikoli ve vinutí tlumivky, v ní je proud téměř hladký). Na kmitočtu 200 kHz činí hloubka vniku již pouze $\delta \approx 0,14$ mm, viz kap. 4. Nutné je použití vf. lanka nejen na sekundám (málo závitů a velký průřez), ale i na primári (více závitů a menší průřez). Výsledkem je pokles činitele plnění ve vinutí, který působí proti zmenšování transformátoru.
- S rostoucím pracovním kmitočtem/dramaticky roste reaktance $2\pi f L_{2,K}$ výstupní rozptylové indukčnosti transformátoru $L_{2,K} = L_2(1 - k^2)$. Transformátor je pak velmi měkký a není schopen přenést požadovaný výkon. Jedinou obranou je dosažení co největšího činitele vazby k . Hodnota $k = 0,990$ je naprostě nedostatečná. Nutným minimem bývá $k = 0,998$, což ale přináší značné konstrukční problémy (viz kap. 17.6).
- S rostoucím kmitočtem roste negativní vliv parazitních mezizávitových kapacit vinutí.

39.4.1.1. Jednočinný propustný měnič - základní zapojení

Základní zapojení jednočinného propustného měniče s transformátorem je nakresleno na obr. 39.4.1. Jak již bylo předesláno, k přenosu energie ze vstupního do výstupního obvodu dochází v aktivním intervalu 0 až δT , během něhož se současně akumuluje energie v magnetickém poli tlumivky L . Po dobu zbývající části periody $(1 - \delta)T$ je tlumivka od transformátoru oddělena a na výstup dodává energii nahromaděnou v magnetickém poli. Vzhledem k *blokujícímu měniči* je zde výhoda účinného LC filtru tvořeného tlumivkou a výstupním kondenzátorem C po dobu celého pracovního cyklu. Ve srovnání s blokujícím měničem je tedy možné dosáhnout řádově menší dynamické odchylky $\Delta U_z(t)$. Navíc proud tekoucí L , skládající se z ustálené složky I_z a pilovitého průběhu Δi_L má spojitý charakter v průběhu celé periody T .

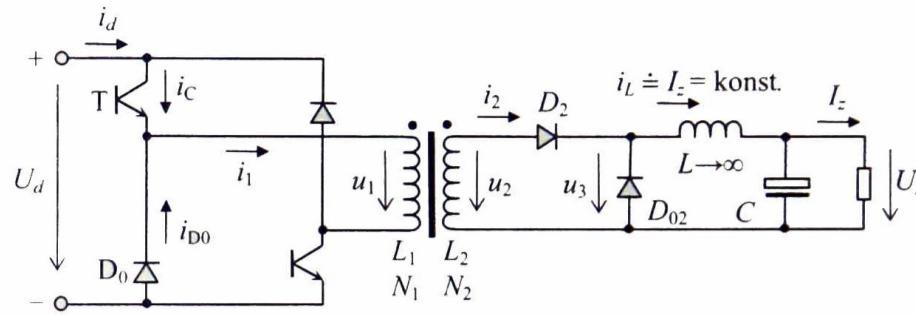
Časové průběhy všech důležitých veličin jsou zachyceny na obr. 39.4.2. Z důvodu snadnějšího výkladu budeme při prvotní analýze předpokládat následující zjednodušení:

- Tlumivka výstupního LC-filtru má velikou (nekonečnou) indukčnost. Proud tlumivky i_L je hladký, málo zvlněný, tudíž je přímo roven proudu zátěže: $i_L(t) = I_Z = \text{konst.}$
- Transformátor má dokonalou magnetickou vazbu $k = 1$. Neexistuje tedy výstupní rozptylová indukčnost $L_{2,K}$.

Obě zjednodušení později při detailní analýze odstraníme.

Měnič pracuje tak, že oba tranzistory jsou vždy zapínány i vypínány současně. Doba zapnutí je označena t_z . Střída je definována vztahem

$$s = \frac{t_z}{T}, \quad s_{max} = \frac{1}{2}, \quad \text{protože} \quad t < \frac{T}{2} \quad (39.4.1)$$



Obrázek 39.4.1.: Jednočinný propustný měnič - základní zapojení

Maximální doba zapnutí $t_z = t_1$, nesmí překročit hodnotu $\frac{T}{2}$, neboť pak dochází k lavinovitému přesycení transformátoru podle obr. 39.4.3. Při zapnutí obou tranzistorů má primární napětí konstantní hodnotu $U_1(t) = +U_d$. Magnetizační proud je integrálem z tohoto *konstantního* napětí, proto narůstá *lineárně* (pokud zanedbáme nelinearity magnetizační charakteristiky). V okamžiku t_1 jsou oba tranzistory vypnuty. Magnetizační indukčnost L_1 , však nedovolí zánik magnetizačního proudu a snaží se jej udržet na původní velikosti. Proud tedy musí začít téci oběma primárními diodami. Přes obě sepnuté diody připojí primární vinutí samo sebe na napájecí zdroj U_d ale v opačné polaritě, tedy bude $U_1(t) = -U_d$. Tímto napětím je jádro *demagnetováno* a magnetizační proud klesá, protože integrál ze záporné konstanty je klesající písmka. Obě diody se uzavřou až v okamžiku zániku magnetizačního proudu. Teprve tehdy je primární vinutí zcela odpojeno od mezilehlého zdroje U_d , stává se neutrálním vodičem neobsahujícím energii, proto teprve tehdy klesne primární napětí na nulu.

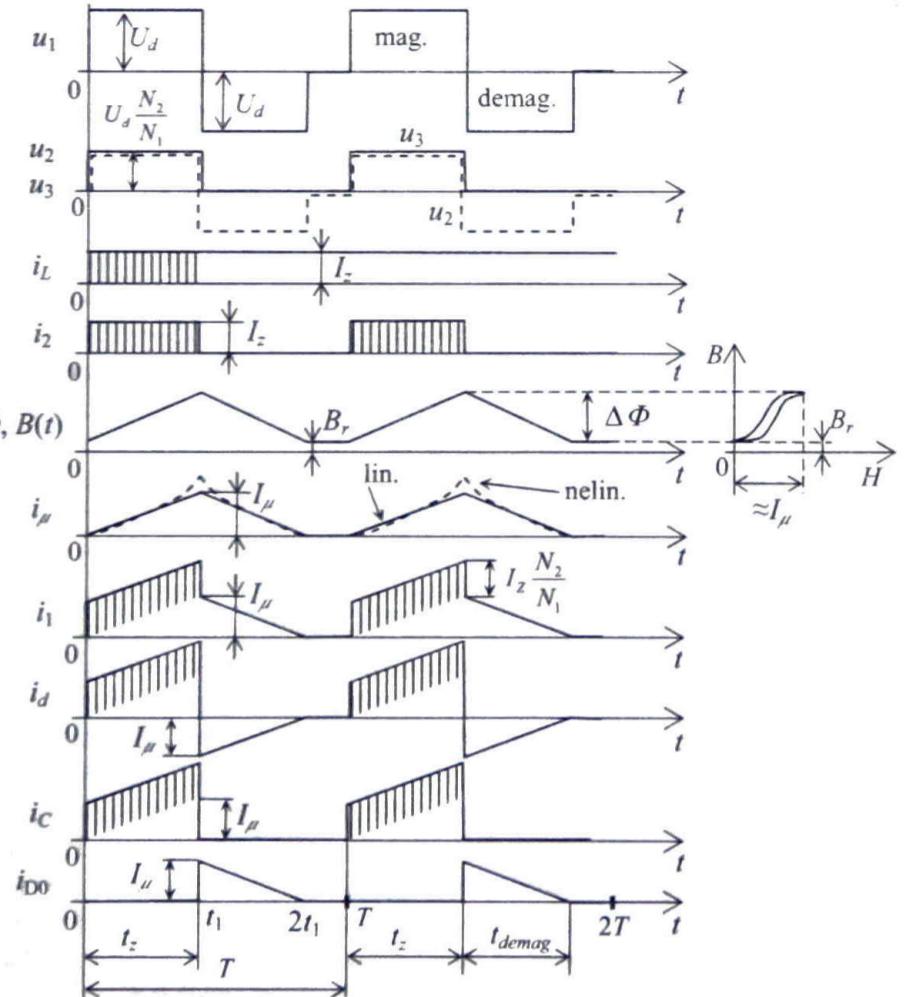
Sekundární napětí u_2 musí mít *stejný tvar* jako napětí u_1 , pouze je s převodem jinak velké. Záporný demagnetizační puls nesmí být využit k přenosu energie. Došlo by k narušení procesu demagnetizace. Proto musí být na sekundáru použit pouze jednocestný usměrňovač D_2 s nulovou diodou D_{02} (nikoli dvojcestný). Dioda D_{02} vede proud tlumivky v době, kdy jsou oba tranzistory vypnuty, a usměrňovač dioda D_2 je polarizována v závěrném směru. Užitečné napětí u_3 , na vstupu LC-filtru má potom tvar jednopolaritních impulsů o maximální střídě 0,5.

Sekundární proud i_2 má podobu *pravoúhlých* proudových impulsů, protože pokud proud sekundárem teče, tlumivka s velikou indukčností ($L \rightarrow \infty$) jej udržuje *konstantní*. S ohledem na vysoký pracovní kmitočet a na velký obsah harmonických je nutno učinit velmi přísná opatření proti vzniku skinefektu. Z toho důvodu nesmí být průměr sekundárního vodiče nebo tloušťka měděné fólie větší než 2δ , kde δ je hloubka vniku. Totéž platí i o primárním vodiči.

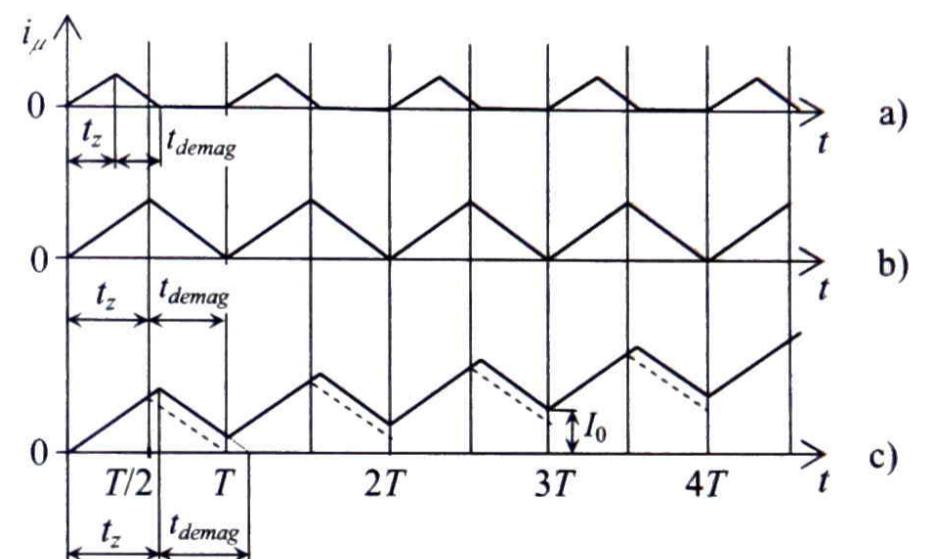
Maximální doba zapnutí $t_z = t_1$, nesmí překročit hodnotu $\frac{T}{2}$, neboť pak dochází k lavinovitému přesycení transformátoru podle obr. 39.4.3. Jev je způsoben tím, že doby magnetizace a demagnetizace jsou stejně dlouhé, tj. $t_z = t_{demag}$. Demagnetizační proud proto zaniká v okamžiku $2t_z$. Pokud v případě c) doba zapnutí překročí $\frac{T}{2}$, tj. $2t_z > T$, magnetizační proud nestihne v rámci pracovního cyklu T klesnout na nulu. Demagnetizace tudíž není dokončena. Tokotvorný magnetizační proud $i_\mu = I_0 + \frac{1}{L} \int u_1 dt$ je pak integrován z nenulové počáteční podmínky I_0 , která se při každém následujícím cyklu zvyšuje. Proto proud makroskopicky postupně narůstá do nekonečna. Ve skutečnosti se zastaví na veliké zkratové hodnotě $\frac{U_d}{R_{Cu1}}$. Podobně roste i magnetický tok. Jádro se tedy silně přesycuje, klesá jeho indukčnost a o to rychleji lavinovitě roste magnetizační proud. Výsledkem je velmi rychlá tepelná destrukce primárního vinutí (během několika sekund).

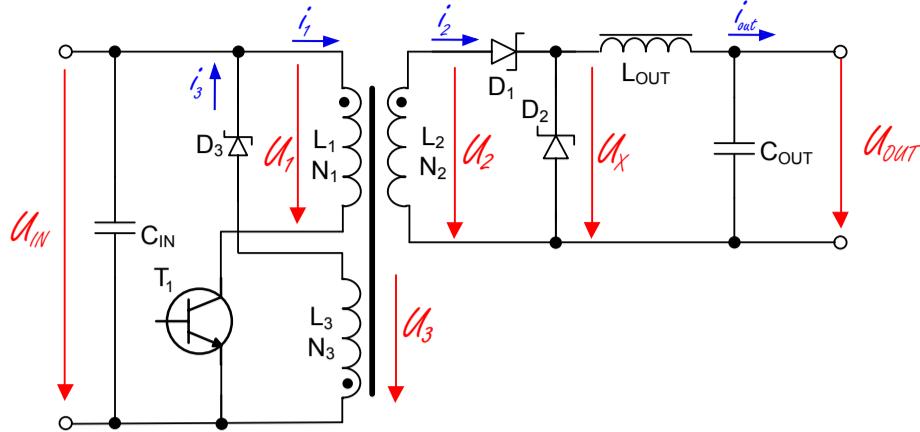
39.4.1.2. Návrh transformátoru

39.4.1.3. Jednočinný propustný měnič s demagnetizačním vinutím



Obrázek 39.4.2.: Jednočinný propustný měnič - průběhy důležitých veličin.

Obrázek 39.4.3.: Demagnetizace transformátoru při různých dobách zapnutí t_z :
a) dobrý stav $t_z < \frac{T}{2}$, b) mezní stav $t_z = \frac{T}{2}$, c) špatný stav $t_z > \frac{T}{2}$



Obrázek 39.4.4.: Propustný měnič s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

39.4.1.4. Popis činnosti

Nyní se věnujme podrobnějšímu rozboru funkce propustného měniče. Interval δT začíná **sepnutím tranzistoru** T_1 kladným impulzem z řídicích obvodů do jeho báze [Ham96, s. 131], které přiveze vstupní napětí na primární vinutí N_1 . V kapitole 31.6.1 byl odvozen vztah 31.6.4 pro magnetizační tok v jádře transformátoru. Pro nynější případ platí $u_1(t) = U_{in}$. Pak 31.6.4 nabude tvaru [NVP99, s. 104]:

$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{N_1} U_{in} t \quad (39.4.2)$$

Takže po zapnutí tranzistoru tok lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci doby zapnutí δT bude mít své maximum

$$\Phi_{\mu_{max}} = \frac{1}{N_1} U_{in} \delta T \quad (39.4.3)$$

Během doby δT bude sekundární napětí $u_2(t)$:

$$u_2(t) = N_2 \frac{\Phi_\mu(t)}{dt} = \frac{N_2}{N_1} U_{in} = U_2 \quad (39.4.4)$$

Čili během doby δT je sekundární napětí konstantní. Protože jde o kladné napětí, je D_1 otevřená, D_2 zavřená a výstupní proud I_{out} musí téci ze sekundárního vinutí transformátoru.

Kolektorovým obvodem a primárním vinutím N_1 teče proud i_{prim} . Propustně polarizovanou diodou D_1 prochází transformovaný vstupní proud přes L_{out} do zátěže a výstupního filtračního kondenzátoru C_{OUT} . Tento sekundární proud i_2 se časem lineárně zvětšuje od určitého $I_{L_{min}}$ a zároveň se lineárně zvětšuje také proud i_1 , závislého na převodu transformátoru. Z kapitoly 31.6.1 víme, že primární proud zatíženého transformátoru bude mít hodnotu

$$i_1(t) = i_\mu(t) + I_2 \frac{N_2}{N_1} \quad (39.4.5)$$

Pro magnetizační proud $i_\mu(t)$ přitom platí vztah (31.6.8). V našem případě je $u_1(t) = U_{in}$ a proto tento vztah dostane konkrétní podobu:

$$i_\mu(t) = \frac{U_1 t}{L_1} \quad (39.4.6)$$

Vidíme, že stejně jako tok $\Phi_\mu(t)$ tak i magnetizační proud $i_\mu(t)$ lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci δT má magnetizační proud své maximum:

$$i_{\mu_{max}}(t) = \frac{U_1 \delta T}{L_1} \quad (39.4.7)$$

Během doby δT je odebírána energie ze zdroje U_{in} (složka $I_{out} \frac{N_2}{N_1}$ primárního proudu) a dodávána do zátěže.

Nyní vypneme tranzistor T_1 . Proud $i_1(t)$ musí téměř skokem zaniknout. V jádře ale existuje na konci doby δT magnetický tok $\Phi_{\mu_{max}}$, odpovídající proudu $I_{\mu_{max}}$. Celková energie magnetického pole v okamžiku vypínání tranzistoru činí $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}$. Proud primárního vinutí je tranzistorem násilně přerušen.

Předpokládejme nejdříve, že neexistuje demagnetizační vinutí N_3 . Pak by při skokovém zániku primárního magnetizačního proudu stejně prudce zanikl i s ním svázaný tok $\Phi_{\mu_{max}}$. Pokles toku s obrovskou (teoreticky

nekonečnou) strmostí $-\frac{d\Phi}{dt}$ způsobí vznik napěťového Diracova impulsu, opačné polarity oproti stavu v době δT , kdy tok narůstal. Tímto impulsem, přičteným k napětí U_1 , je napěťově namáhan zavírající se tranzistor. Přitom se celá energie $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}$ přemění na křemíkovém čipu v teplo a je příčinou jeho neodvratné destrukce. U reálného tranzistoru je velikost napěťového impulsu vždy omezena průrazným napětím tranzistoru. Nikdy totiž není tranzistor natolik pomalý, že by omezujícím faktorem byla malá strmost $-\frac{di_C}{dt}$ zániku kolektorového proudu během vypínání. Destrukční energetické účinky však zůstávají v každém případě zcela ekvivalentní.

Aby popsaná situace nenastala, je zde demagnetizační vinutí N_3 . Děj pak bude vypadat takto: Po vypnutí tranzistoru T_1 se opravdu na primárním vinutí objeví napětí U'_1 opačné polarity, než bylo U_1 v sepnutém stavu, viz. obr. 39.4.5. Toto napětí však bude mít přesně definovanou velikost, kterou „dovolí“ vinutí N_3 . Na tom se totiž objeví také indukované napětí u_3 . Vzhledem k obrácené orientaci vinutí vůči N_1 bude mít záporný pól „na zemi“ a kladný pól na diodě D_2 . Toto napětí by „chtělo“ být opět teoreticky nekonečné, ale D_2 se otevře a pracuje v součinnosti se zdrojem U_1 jako napěťový omezovač, omezující napětí u_3 na velikost U_1 . Celá magnetizační energie $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}$ je vinutím N_3 odevzdána zpět do zdroje. Pak je zřejmé, že napětí indukované v primárním vinutí musí být:

$$U'_1 = u_3 \frac{N_1}{N_3} = U_1 \frac{N_1}{N_3} \quad (39.4.8)$$

Tento stav, kdy $u_1 = -U_1$ a $u_3 = U_1$, trvá po dobu, než tok $\Phi_\mu(t)$ klesne z počáteční hodnoty $\Phi_{\mu_{max}}$ na nulu. K tomu je třeba konečné doby t_{demag} , neboť U_1 není nekonečné a proto strmost poklesu $\frac{d\Phi}{dt}$ nemůže být nekonečně velká. Velikost U_1 je v této době konstantní a proto klesá tok lineárně. Celý jev se nazývá *demagnetizací jádra*.

Během demagnetizace se předává magnetizační energie jádra zpět do zdroje pomocí proudu $i_3(t)$. Proud $i_3(t)$ je přímo úměrný klesajícímu toku $\Phi_\mu(t)$ takto:

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \int u_3 dt = \frac{1}{L_3} \int \frac{N_3 d\Phi_\mu(t)}{dt} dt = \frac{N_3 \Phi_\mu(t)}{L_3} \quad (39.4.9)$$

Po skončení demagnetizace (uplynutí t_{demag}) je již magnetický tok nulový, jádro je energeticky neutrální, proto i napětí u_1, u_2, u_3 skokem zanikají na nulu. V neutrálním stavu soustava setrvává až do skončení doby $(1 - \delta)T$, tj. do zapnutí tranzistoru.

Pro magnetický tok během procesu demagnetizace musí platit:

$$\Phi_\mu(t) = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{U_1 t}{N_1} \quad (39.4.10)$$

Po uplynutí t_{demag} je tok nulový. Položíme-li tedy $\Phi_\mu(t)$ dle (39.4.10) rovný nule, lze odsud vyjádřit t_{demag} .

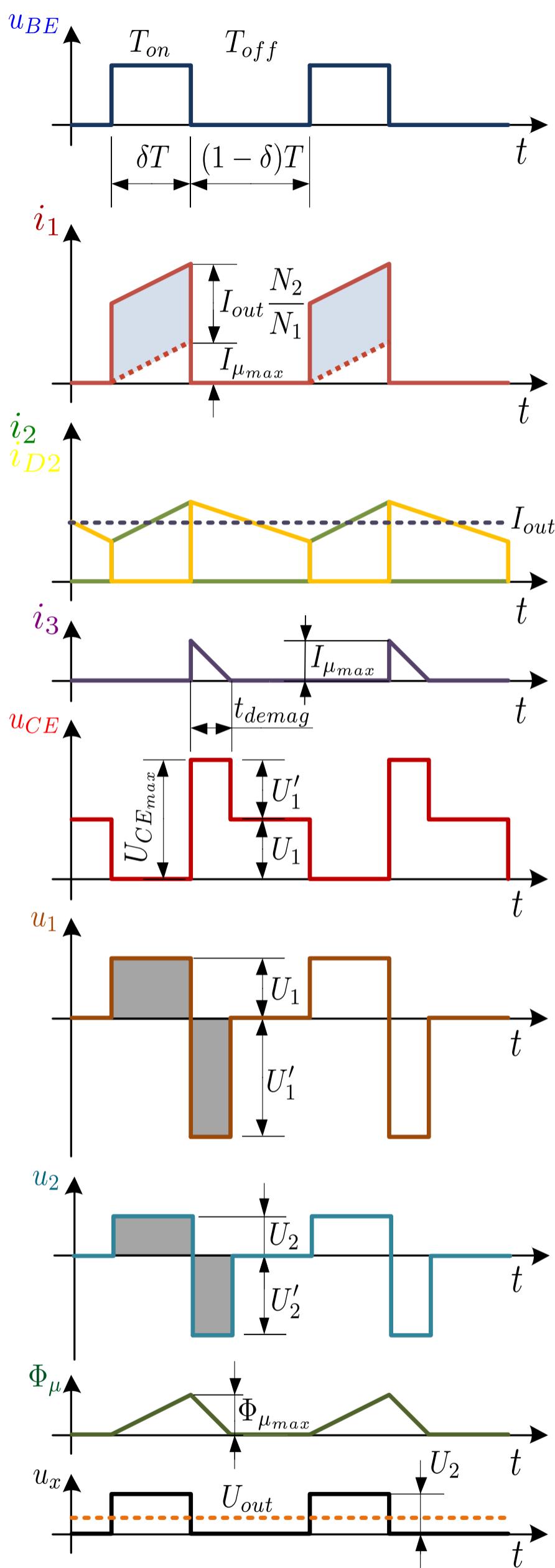
$$t_{demag} = \frac{N_1 \Phi_{\mu_{max}}}{U'_1} \quad (39.4.11)$$

Za $\Phi_{\mu_{max}}$ dosadíme vztah (39.4.3) a za U_1 vztah (39.4.8). Tím dostaneme:

$$t_{demag} = \frac{N_3 \delta T}{N_1} \quad (39.4.12)$$

Je zřejmé, že musíme zajistit, aby $(1 - \delta)T > t_{demag}$, jinak by tok ještě nestačil úplně zaniknout a už bychom znova spínali tranzistor. V průběhu dalšího sepnutí by se tok (a magnetizační proud) zvýšil opět o hodnotu $\Phi_{\mu_{max}}$ (resp. $I_{\mu_{max}}$), ale už z nenulové počáteční hodnoty a tak by neustále vzrůstal (během dalších period by se „naintegroval“ teoreticky na hodnotu $\rightarrow \infty$), až by došlo k přesycení jádra a tím k prudkému lavinovitému růstu magnetizačního proudu (neboť by současně klesla indukčnost L_1). Jev by postupoval až do zničení tranzistoru. Z výše uvedeného důvodu musí být maximální střída δ omezena na hodnotu:

$$\delta_{max} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{demag}} \quad (39.4.13)$$



Obrázek 39.4.5.: Průběhy veličin propustného měniče s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

Dosazením (39.4.12) za t_{demag} dostaneme:

$$\delta_{max} = \frac{N_1}{N_1 + N_3} \quad (39.4.14)$$

Výstupní napětí U_{out} je rovno střední hodnotě napětí u_x a platí proto:

$$U_{out} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (39.4.15)$$

39.4.1.5. Proudové a napěťové dimenzování součástek

V době t_{demag} je tranzistor namáhan napětím $U_{CE_{max}}$:

$$U_{CE_{max}} = U_1 + U'_1 = U_1 + \frac{N_3}{N_1} U_1 = U_1 \frac{N_1 + N_3}{N_1} \quad (39.4.16)$$

- Volíme-li $N_3 < N_1$, je $U'_1 > U_1$ a tedy namáhaní $U_{CE_{max}} > 2U_1$. Zato je ale maximální dovolená střída $\delta_{max} > 0,5$ a je tedy větší maximální dosažitelné výstupní napětí.
- Volíme-li $N_3 > N_1$, je $U'_1 < U_1$ a je tedy $U_1 < U_{CE_{max}} < 2U_1$. Zato je ale maximální dovolená střída $\delta_{max} < 0,5$ a je tedy menší maximální dosažitelné výstupní napětí.

Volba poměru N_3/N_1 proto záleží na tom, co je v dané aplikaci více kritické, zda napěťové namáhaní tranzistoru, či co největší dosažitelné výstupní napětí (s neměnným převodem N_2/N_1). V praxi se nejčastěji volí $N_3 = N_1$ z důvodu snadného souběžného (bifilárního) vinutí obou cívek - viz později.

- Proudové a dimenzování T_1 :

Zanedbáme-li magnetizační proud, pak lze psát, viz. obr. 39.4.5, pro špičkovou, střední a efektivní hodnotu kolektorového proudu tranzistoru následující rovnice:

$$I_{1_{max}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \quad (39.4.17)$$

$$I_{1_{av}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (39.4.18)$$

$$I_{1_{rms}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\delta} \quad (39.4.19)$$

- Proudové a napěťové dimenzování D_1 :

$$I_{D_{1max}} = I_{out} \quad (39.4.20)$$

$$I_{D_{1av}} = I_{out} \delta \quad (39.4.21)$$

$$I_{D_{1rms}} = I_{out} \sqrt{\delta} \quad (39.4.22)$$

$$U_{D_{1Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_3} \quad (39.4.23)$$

- Proudové a napěťové dimenzování D_2 :

$$I_{D_{2max}} = I_{out} \quad (39.4.24)$$

$$I_{D_{2av}} = I_{out} (1 - \delta) \quad (39.4.25)$$

$$I_{D_{2rms}} = I_{out} \sqrt{1 - \delta} \quad (39.4.26)$$

$$U_{D_{2Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (39.4.27)$$

- Proudové a napěťové dimenzování D_3 :

$$I_{D_{3max}} = I_3 = I_{\mu_{max}} \frac{N_1}{N_3} = \frac{U_1 \delta_{max} T}{L_1} \cdot \frac{N_1}{N_3} \quad (39.4.28)$$

$$I_{D_{3av}} = I_{3av} = \frac{I_3}{2} \delta \quad (39.4.29)$$

$$I_{D_{3rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_{demag}} \left(I_3 \frac{t}{t_{demag}} \right)^2 dt} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t_{demag}}{T}} \quad (39.4.30)$$

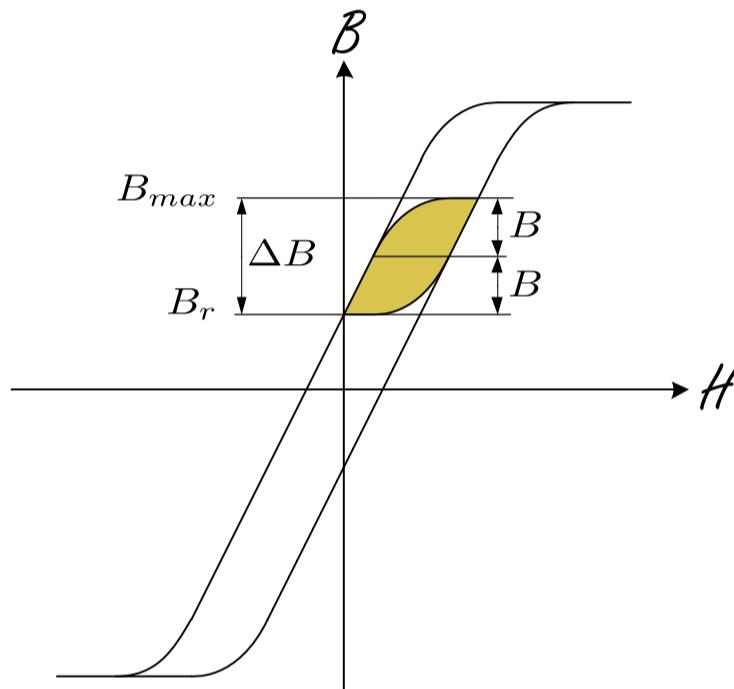
$$U_{D_{3Rmax}} = U_1 + U_1 \frac{N_3}{N_1} \quad (39.4.31)$$

Poznámka 39.4.1. Všimneme si, že funkce tohoto měniče je kromě transformátoru zcela analogická funkci snižujícího měniče z kap. 39.3.2. Horní spínač je zde rozdělen tak, že tranzistor je na primární straně (pro větší podobnost s obr. 39.3.7 lze v obr. 39.4.4 vzájemně zaměnit umístění tranzistoru a primárního vinutí transformátoru, tj. z kladného pólu U_{in} nejprve tranzistor). Dioda D_2 , tvořící s tranzistorem horní spínač, je až na sekundární straně. Dioda D_1 jen odděluje výstupní obvod od sekundárního napětí v době, kdy je záporné, protože toto napětí nemůže mít nenulovou stejnosměrnou složku (stejně tak ani napětí u_1 a u_3).

39.4.1.6. Přehled metod demagnetizace jádra transformátoru

V kapitole 39.4.1.4 byl popsán jeden z možných způsobů, jak demagnetizovat jádro transformátoru, tak aby v dalším pracovním cyklu nedošlo k posunu pracovního bodu magnetického materiálu jádra a následně k jeho přesycení. Velikost magnetizačního proudu je dle vztahu 39.4.7 dána poměrem napěťové plochy $U_{in} \cdot t_{on}$ přiložené na vinutí primární cívky a hodnotou její magnetizační indukčnosti ($L_{mag} = L_1$)

$$i_{mag} = \frac{U_{prim} \cdot t_{on}}{L_{mag}}$$



Obrázek 39.4.6.: Transformátor jednočinného propustného měniče pracuje v prvním kvadrantu hysterezní smyčky

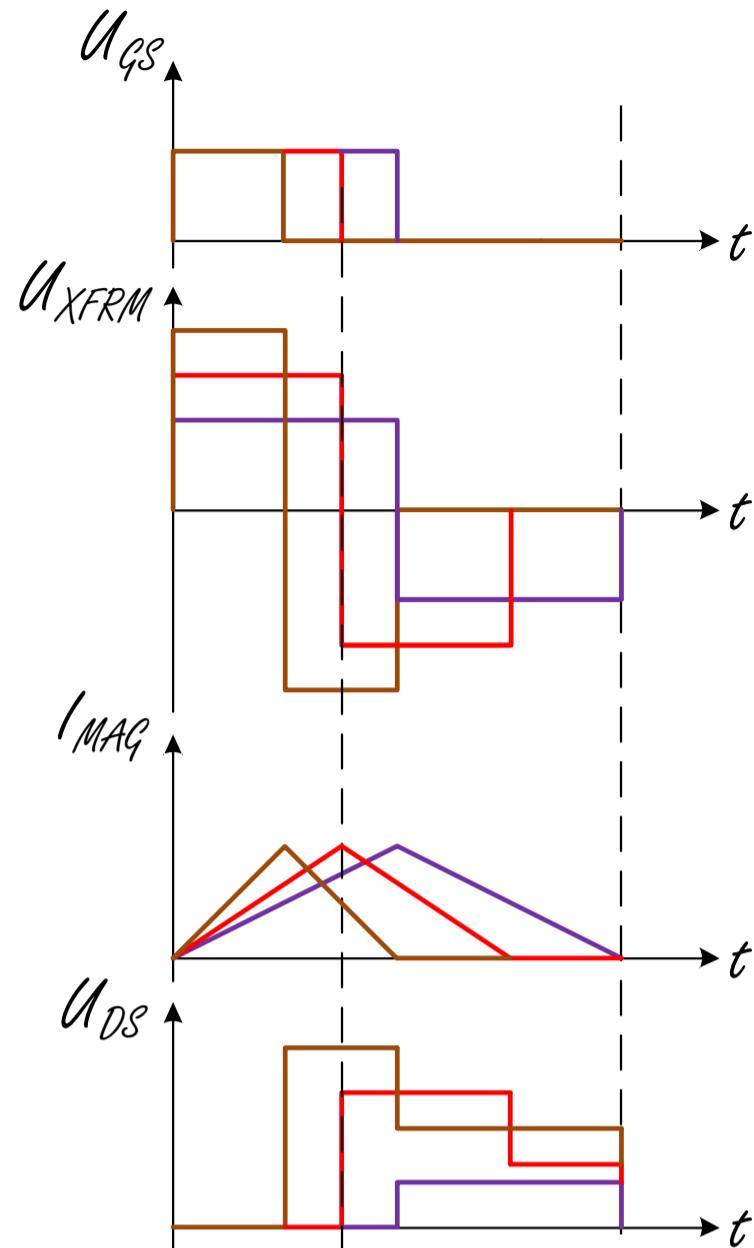
Pracovní oblast transformátoru je v prvním kvadrantu, jak naznačuje obr. 39.4.6, neboť polovodičový spínač přikládá mezi svorky primárního vinutí pouze unipolární pulzy. Měnič se také proto nazývá **jednočinný**, protože energie je ze zdroje předávána do zátěže pouze jedenkrát za periodu, v jednom tzv. aktivním běhu, tj. v době t_{on} , kdy je tranzistor sepnut a magnetická indukce se v jádře zvyšuje z hodnoty remanentní indukce B_r o velikost magnetického zdvihu ΔB .

Pokud bychom měřili magnetizační proud primárního vinutí, dospěli bychom k průběhům na obr. 39.4.7, jenž vykazují stejnou vrcholovou hodnotu pro různé hodnoty vstupního napětí. Je to dáné tím, že pokud měnič během měření pracoval v uzavřené regulační smyčce, bude součin $V_{in} \cdot t_{on}$ konstantní a za předpokladu, že magnetizační indukčnost je též neměnná, pak dle předchozí rovnice dospějeme $i_{mag_{max}} = \text{konst.}$

39.4.1.7. Jednočinný propustný měnič s aktivním clampingem

39.4.1.8. Vlastnosti měniče

Obecně pro všechny varianty propustných měničů s transformátorem lze říci, že jsou vhodné pro přenos velkých výkonu. Je to dáno principem činnosti, kdy proud podílející se na přenosu výkonu se nepodílí na magnetizaci jádra transformátoru (teče v době t_{on} a to jak na sekundární straně tak i na primární – kompenzace magnetických účinků). Může se proto zvyšovat, aniž by rostlo sycení jádra transformátoru. Toto sycení je



Obrázek 39.4.7.: Vrcholová hodnota magnetizačního proudu je konstantní pro jakékoli velikosti vstupního napětí, neboť regulační smyčka zajistí, aby napěťová plocha $V_{in} \cdot t_{on}$ byla konstantní

určeno pouze integrálem primárního napětí a počtem primárních závitů. Lze proto zvýšením pracovního kmitočtu docílit zmenšení velikosti transformátoru, jak to bylo vysvětleno na konci kap. 31.6.

39.4.2. Jednočinný blokující měnič

Základem tohoto měniče je „invertující měnič se společnou tlumivkou“ z kapitoly 39.3.4. Všimneme si, že z původního schématu (obr. 8.12) vymizela tlumivka, jejíž funkci nyní zastane transformátor. Princip činnosti je vlastně úplně stejný, pokud si uvědomíme, že jádro nynějšího transformátoru je magnetováno stejně jako jádro tlumivky na obr. 8.12, viz. průběh $i_L(t)$ v obr. 8.12 a průběh $\Phi_\mu(t)$ v obr. 9.8. Jediný rozdíl je v tom, že stejných magnetických poměrů je nyní dosaženo pomocí dvou vinutí místo původního jednoho (v době t_1 pomocí L_1 a v době t_2 pomocí L_2). Tím se dosáhne galvanického oddělení. Vznikl tak transformátor, ovšem režim jeho činnosti je takový, že magnetické účinky v jádře se podobají tlumivce. Režim je zcela odlišný od režimu transformátoru v propustných měničích.

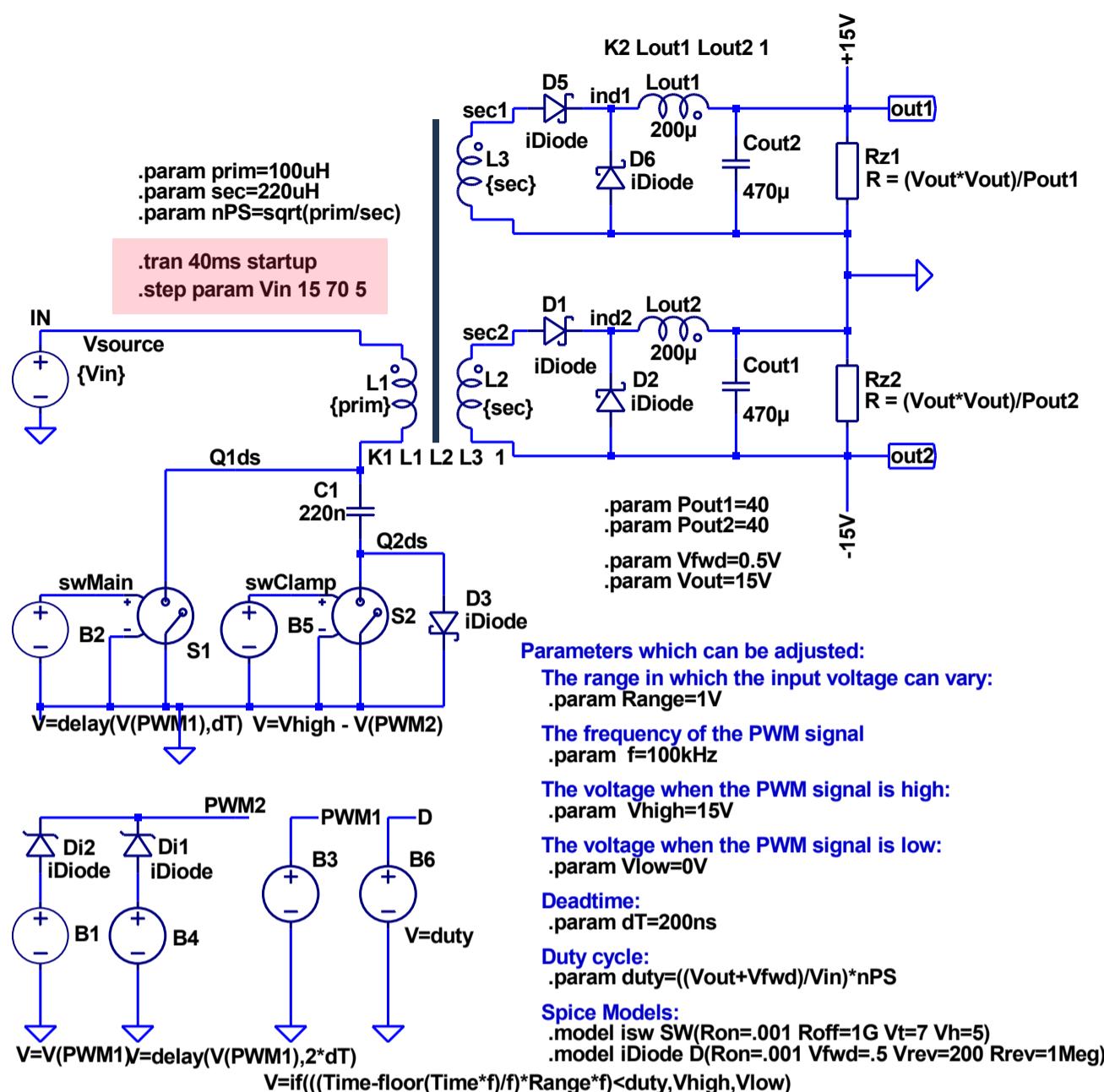
39.5. Metody regulace spínaných zdrojů

39.5.1. Základy impulzní regulace

Základním principem a současně odlišností impulsní regulace od regulace klasické je její nespojitost. To v zásadě znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí U_{out} stabilizováno zásahy regulačního členu pouze v určitých, časově omezených intervalech T_a . [Ham96]

Srovnajme pro názornost klasický a impulsní regulátor na úrovni blokových schémat. (obr. 4.1 a obr. 5.9). Vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál U_{REF} , zesilovač reg-

Model of the forward converter with active clamping technique



Obrázek 39.4.8.: Propustný měnič s aktivním clampingem

ulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprosto odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojitě okamžitý odpor výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní.

39.5.2. Regulační smyčka

39.5.2.1. Porovnání regulátoru s napěťovým a proudovým řízením

The current mode control method uses two control loops –an inner, current control loop and an outer loop for voltage control. Figure 1 shows a forward converter (buck family) using current mode control. When the switching transistor is on, current through Rsense is proportional to the upward ramping filter inductor current. When the ramp voltage Vs reaches Ve (the amplified output voltage error), the switching transistor turns off. Thus, the outer voltage control loop defines the level at which the inner loop regulates peak current through the switch and through the filter inductor. [SLUP075]

Výhody:

- Input voltage feed-forward, resulting in good open-loop line regulation.
- Simplified loop –inductor pole and 2nd order characteristic eliminated.
- Optimum large-signal behavior.
- No conditional loop stability problems.

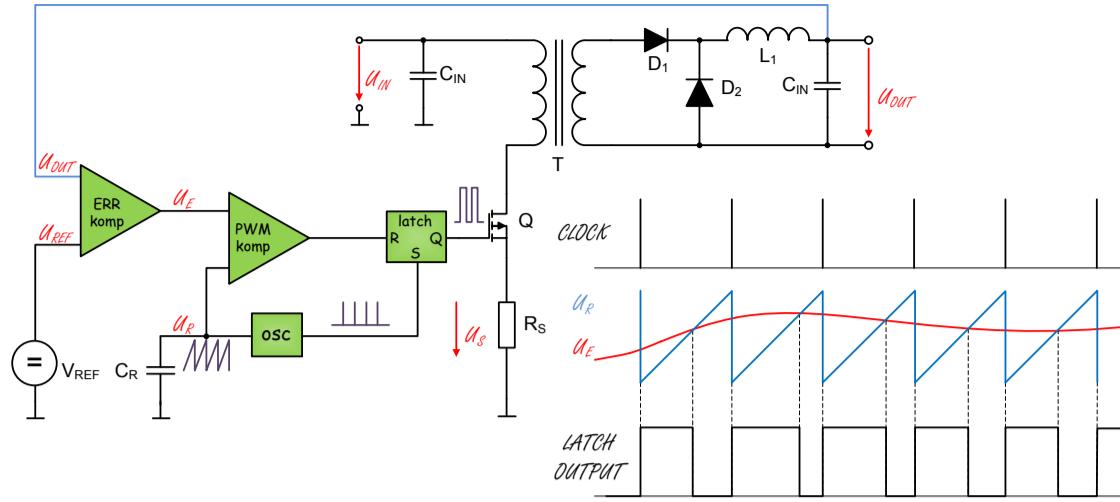
- Flux balancing (symmetry correction) in push-pull circuits.
- Automatic pulse-by-pulse current limiting.
- Current sharing of paralleled supplies for modular power systems.
- Less complexity/cost (current sense/amp is not an added complication).

Nevýhody (continuous mode only):

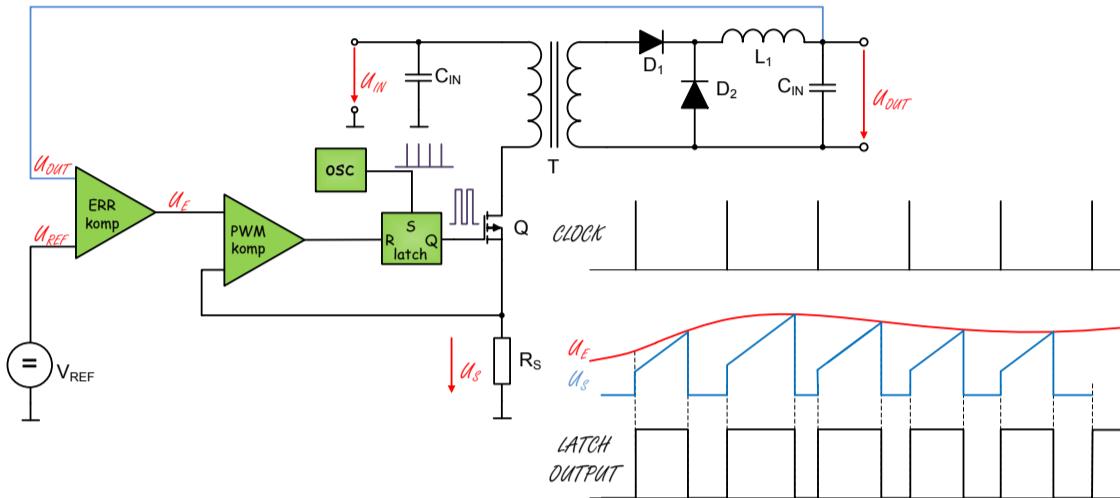
- Peak/avg. current error and instability –slope compensation
- Noise immunity is worse because of shallower ramp.
- Half Bridge runaway
- DC open loop load regulation is worse.
- (1-D) current error in Boost or Flyback circuits.
- Loop irregularities with multiple output buck circuits.

39.6. Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů

Existují dvě možnosti, jak provádět řízení pomocí PWM odlišující se typem zpětné vazby, která je buď čistě **napěťovou vazbou** (*voltage mode control*), nebo **napěťovou vazbou s vnitřní proudovou smyčkou** (*current mode control*). V následující diskusi se pokusíme konzistentním způsobem vysvětlit vlastnosti obou řídících algoritmů (slua119)



Obrázek 39.5.1.: Regulátor s napěťovým řízením - Voltage mode control [[Mam99]]

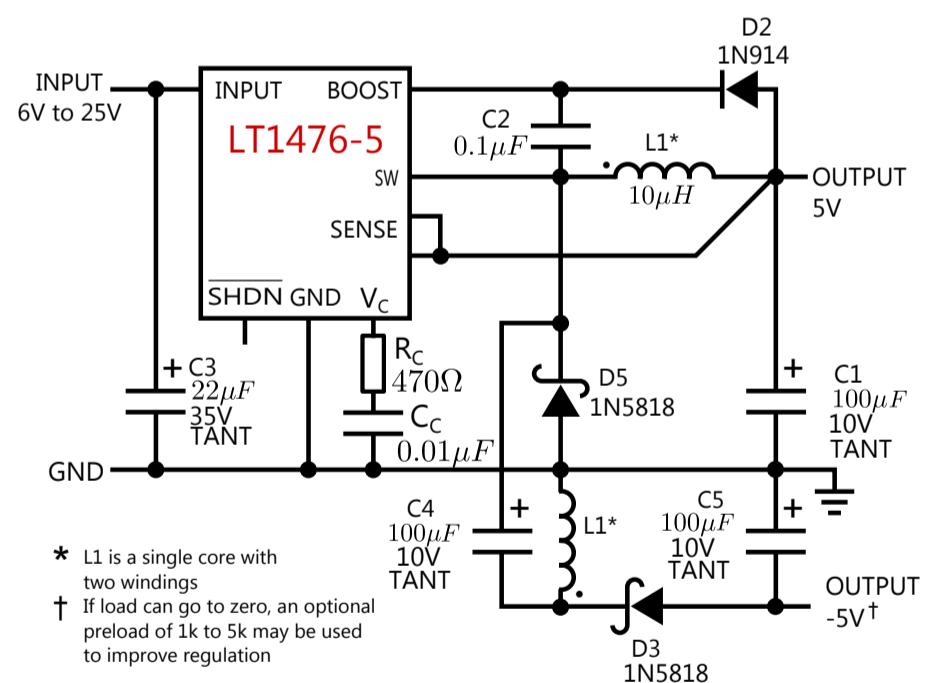


Obrázek 39.5.2.: Regulátor s proudovým řízením - Current mode control [[Mam99]]

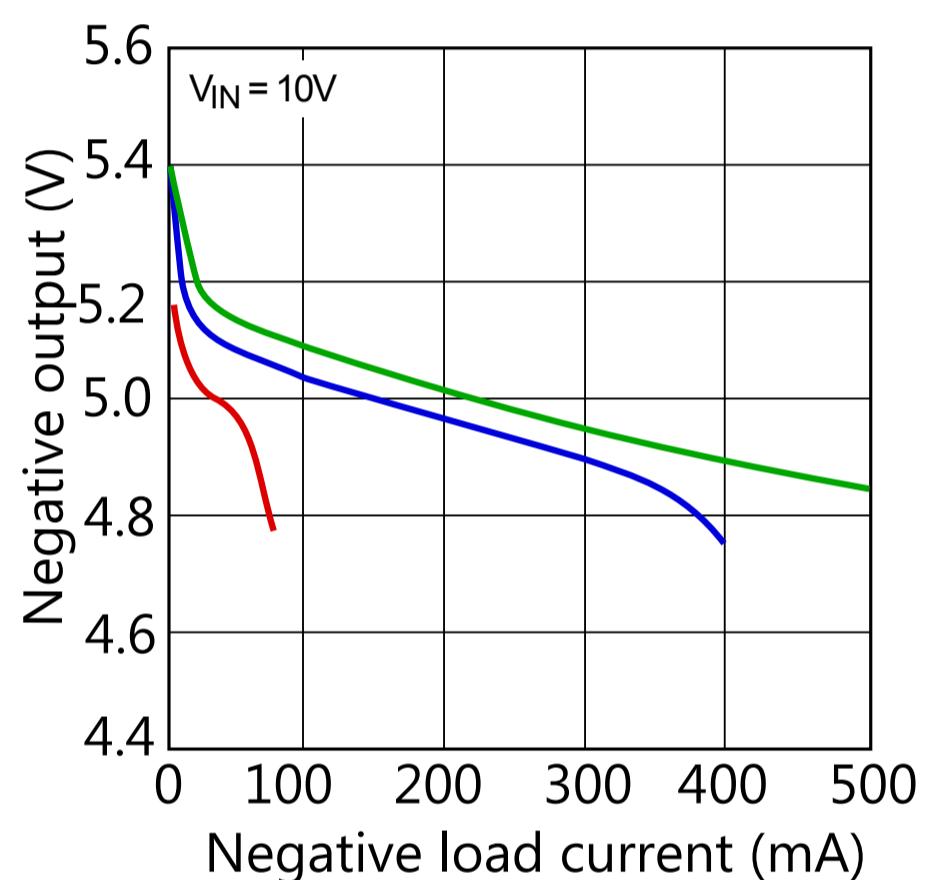
39.6.1. Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem

Toto řešení na obr. 39.6.1 nabízí spínaný zdroj symetrického napětí za použití několika dalších součástek a induktoru s dvojím vinutím. Základní části zdroje je napěťový regulátor snižující vstupní kladné napětí založený na obvodu LT1376-5 se spínacím kmitočtem 500 kHz a možností zatížení proudem až 1,5 A.

Druhá polovina induktoru L_1 společně s D_3 , C_5 a C_4 je určena pro tvorbu záporného napětí pomocí **SEPIC topologie** - Single Ended Primary Inductance Converter. Kondenzátor C_4 vnucuje oběma vinutím stejné napětí. Bez něho pracuje tato část jako blokující měnič (**flyback**), která by sice poskytla -5V, ale jen naprázdno se značnou závislostí na zátěži (nedokonalá vazba mezi vinutími).



Obrázek 39.6.1.: Spínaný zdroj napětí ±5V vystačí s jedinou indukčností s dvojím vinutím. [Nelo8]. Linear Technology Corp. (Dual Output Regulator Uses Only One Inductor)



Obrázek 39.6.2.: Zatěžovací charakteristika záporné větve.

Část XV.

Číslicové elektronické systémy

40. Číslicové systémy a signály

Obsah

40.1. Co je číslicový systém	211
40.1.1. Dvojstavové signály	211
40.2. Kombinační logické funkce	211
40.2.1. Realizace kombinačních logických funkcí	211
40.2.2. Základní pravidla Booleovy algebry	212
40.2.3. Zjednodušování zápisu logické funkce	212

40.1. Co je číslicový systém

V číslicovém systému se pracuje se signály, které mají jen konečný počet diskrétních hodnot. Tím se liší od systémů analogových, u kterých jsou signály spojité, tj. mohou ve vymezeném rozsahu nabývat nekonečný počet hodnot. V číslicovém systému může i čas být veličinou diskrétní, tj. signály se mohou měnit jen v určitých okamžicích. Takovéto číslicové systémy se pak nazývají **synchronní** - na rozdíl od systémů **asynchronních**, u kterých ke změnám signálů může docházet kdykoliv. Synchronní systémy jsou podstatně častější, neboť existence přesně stanovených okamžiků změn signálů zavádí "pořádek" do časování signálů v systému a tím usnadňuje jeho konstrukci i výrobu v podobě integrovaných obvodů. Přesné časování je zajištěno hodinovými (taktovacími) impulsy, což je velmi významný signál systému [Pino6, s. 14].

Číslicové systémy se dělí na dvě skupiny

- **kombinační systémy**,
- **sekvenční systémy**.

U kombinačních systémů jsou výstupní signály závislé pouze na momentálních vstupních signálech. U sekvenčních systémů jsou výstupní signály závislé nejen na momentálních vstupních signálech, ale i na vstupních signálech v minulosti. Systém tedy má *vnitřní paměť*.

40.1.1. Dvojstavové signály

Jak již bylo řečeno, číslicové signály mají jen konečný počet diskrétních hodnot. V naprosté většině jrou to právě jen dvě hodnoty. Dvouhodnotové nebo dvoustavové signály snižují nároky na výrobní tolerance. Bylo tak možné zavést výrobní postupy, které umožňují hromadnou a levnou výrobu součástek.

Předpokládejme, že číslicové součástky jsou napájeny kladným napětím $+U_{CC}$. Jedna hodnota bude vyjádřena nižším napětím, druhá vyšším napětím. Dvě možné hodnoty signálu označíme jako '0' a '1' (v souladu se značením v [Boolově algebře](#)).

40.2. Kombinační logické funkce

Základním pojmem při úvahách o kombinačních systémech představuje pojem kombinační logická funkce. *Kombinační logická funkce* je pravidlo přiřazující každé kombinaci hodnot 0 a 1 přiřazených vstupním proměnným z definičního oboru funkce jedinou hodnotu výstupní proměnné. Pro daný počet vstupních proměnných je těchto funkcí konečný počet. Kombinační logické funkce mohou být úplně nebo neúplně určené. *Úplně určená kombinační logická funkce* je taková funkce, jejíž definiční obor zahrnuje všechny kombinace vstupních proměnných. U *neúplně určené kombinační logické funkce* její definiční obor nezahrnuje některé tyto kombinace. Kombinací se zde rozumí kombinace hodnot 0 a 1 přiřazených jednotlivým vstupním proměnným. Úplně určeným funkcím se někdy říká úplné funkce, funkcím neúplně určeným pak neúplné funkce.

40.2.1. Realizace kombinačních logických funkcí

Nejčastěji se v digitální technice setkáme s těmito způsoby realizace kombinační logické funkce:

- pomocí digitálních integrovaných obvodu typu NAND, NOR (popř. AND, OR) a dalších obvodů realizujících základní kombinační logické funkce - např. AND-OR-INVERT, EX-OR atd.,
- pomocí multiplexeru a demultiplexeru,

- pomocí speciálních kombinačních integrovaných obvodu (převodníky kódu, generátory parity, sčítáky, násobičky a podobně - sem patří i použití multiplexeru a demultiplexeru),
- pomocí pamětí (např. PROM a EEPROM),
- pomocí programovatelných logických obvodu (PLD).

Grayova kódu je to, že sousední slova konstantí délky se liší pouze v jedné proměnné. Tuto vlastnost splňuje i první a poslední kódové slovo (kód je uzavřen sám do sebe) viz 40.2.2. Právě tato vlastnost je využita při konstrukci Karnaughovy mapy - souřadnice polí jsou uspořádány tak, že u sousedních polí se liší jen v jedné proměnné. Tudíž geometricky sousedící pole jsou sousední i v algebraickém smyslu (liší se v jediné proměnné).

40.2.1. Použití multiplexerů a demultiplexerů k realizaci kombinačních logických funkcí

40.2.2. Základní pravidla Booleovy algebry

Nejdůležitější postuláty:

$$x + 0 = x \quad x \cdot 0 = 0 \mid x + 1 = 1 \quad x \cdot 1 = 1 \quad \text{Univerzální vazba} \quad (40.2.1)$$

$$x + \bar{x} = 1 \mid x \cdot \bar{x} = 0 \quad \text{Doplňek} \quad (40.2.2)$$

$$x + x = x \mid x \cdot x = x \quad \text{Idempotence} \quad (40.2.3)$$

40.2.3. Zjednodušování zápisu logické funkce

Logická funkce vyjádřená úplnou součtovou (disjunktivní) nebo součinovou (konjunktivní) formou z pravdivostní tabulky není jediným možným zápisem logické funkce. Dá se většinou nalézt jednodušší algebraický zápis, z něhož můžeme předpokládat, že povede na realizaci méně složitého číslicového obvodu. Který ze zápisů logické funkce povede na minimální složitost obvodu závisí nejen na použitych logických členech, ale též na dalších kritériích: zpoždění, spotřeba obvodu, jeho spolehlivost, potlačení hazardních stavů, atd. První metodou je *algebraická minimalizace*,

40.2.3.1. Karnaughova metoda minimalizace pomocí mapy

Jednou z možností grafického zápisu logické funkce je mapa. Nejpoužívanější je **Karnaughova mapa** (čti "karnau"). Mapa je uspořádána do čtverce či obdélníka a to tak, že *sousední pole* se liší vždy jen v jedné proměnné.

Mapu chápame jako uspořádaný zápis pravdivostní tabulky vzniklou transformací řádku tabulky na jedno pole mapy [PS94, s. 25]. Tedy, každé pole mapy jednoznačně odpovídá určité kombinaci všech proměnných. Nalézá-li se pole pod pruhem vyznačeným u proměnné, bude tato proměnná nenegovaná. Nalézá-li se mimo pruh, bude proměnná negovaná. Tak např. pole označené jako x v mapě pro tři proměnné bude odpovídat kombinaci $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Jak je názorně vidět, z pravdivostní tabulky funkce lze snadno sestavit její mapu a naopak. Řádkům pravdivostní tabulky, ve kterých je funkční hodnota 1, odpovídají pole mapy s vepsanou jedničkou; obdobně to platí i pro nuly. V mapě lze znázornit i neurčené stavy prázdným políčkem (nebo pomlčkou) [Wak99, s. 219].

Přiřazení kombinací hodnot vstupních proměnných (součinů) jednotlivým polím mapy se označuje jako **kódování**. Řádky i sloupce Karnaughovy mapy jsou kódovány **Grayovým kódem**. Základní vlastností

Číslo	Binární kód x_1, x_2, x_3	Grayův kód
		x_1, x_2, x_3
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Tabulka 40.2.2.: Binární a Grayův kód pro tři proměnné

Každé pole s hodnotou 1 odpovídá **mintermu** z pravdivostní tabulky. Sousední pole tedy odpovídají mintermům lišícím se jen jednou proměnnou, a ty lze spojovat do **implikantů**. Sousední jsou i pole na okrajích mapy, neboť i ta se liší jen v jedné proměnné (konce řádek, konce sloupců a rohy mapy). Spojováním výrazů sousedních políček provádíme minimalizaci, která díky jasnému geometrickému postupu vyhýbá problematickému hledání těchto součtů nebo součinů.

Spojování polí se vyznačí **smyčkou**. Pole po dvojicích sousední lze spojovat do větších myšek, ty opět do větších atd. Každá myška tedy musí mít stranu dlouhou právě 2^k polí, kde k je celé kladné číslo. Myšky zahrnují 2 pole, 4 pole, 8 polí, atd. Každá myška v mapě odpovídá implikantu funkce. Princip minimalizace spočívá v pokrytí všech jedniček¹ (a libovolných neurčených stavů) soustavou myšek pro součtovou formu, přičemž:

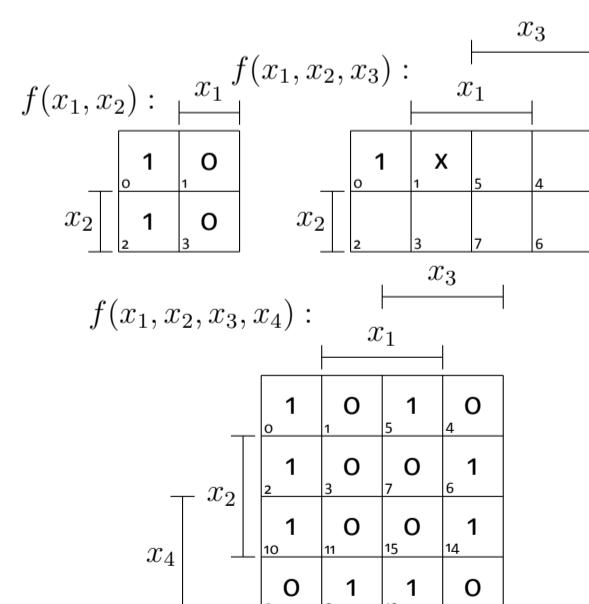
- myšky musí být co možná největší,
- myšek musí být co nejmenší počet.

Tento princip je ilustrován na následující mapě funkce čtyř proměnných. Jako příklad vezmeme funkci definovanou pravdivostní tabulkou 40.2.1. Odpovídající Karnaughova mapa pro čtyři proměnné je na obrázku 40.2.1.

¹nul pro součinovou formu

Index	x_4	x_3	x_2	x_1	f	Index	x_4	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

Tabulka 40.2.1.: Pravdivostní tabulka logické funkce čtyř proměnných, kterou se pokusíme vyjádřit také pomocí Karnaughovy mapy

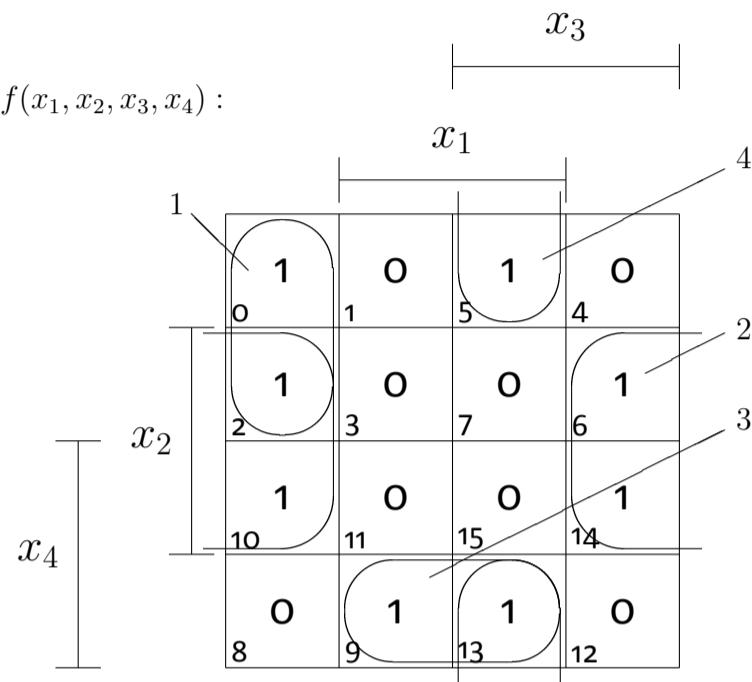


Obrázek 40.2.1.: Příklad Karnaughovy mapy pro dvě, tři a čtyři proměnné

Základní součtový tvar této funkce je dán rovnicí:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 \overline{x_3} x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \\ & + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4. \end{aligned} \quad (40.2.4)$$

V mapě můžeme vytvořit celkem čtyři smyčky, kterými spojíme sousední políčka. Všimněme si, že některé smyčky se částečně překrývají. To však nevadí, protože k logické funkci můžeme na základě postulátu 40.2.3 (*idempotence*) přidat tentýž součin několikrát.



Obrázek 40.2.2.: Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy. Zakreslené smyčky byly vytvořeny tak, aby každá zahrnovala co největší počet polí s vepsanou jedničkou.

Smyčka ze dvou políček označená na mapě 40.2.2 jako č. 1, může být vyjádřena:

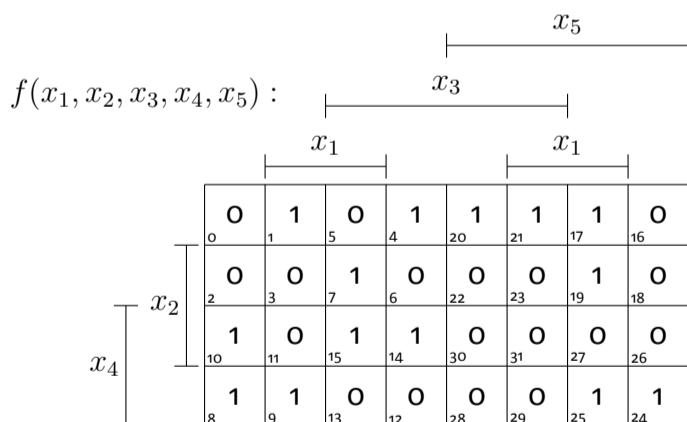
$$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 \overline{x_3} x_4} = \overline{x_1 x_3 x_4}(\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_1 x_3 x_4} \quad (40.2.5)$$

Smyčka ze čtyř polí na pravé a levé straně (označená č. 2):

$$\begin{aligned} \overline{x_1 x_2 \overline{x_3} x_4} + \overline{x_1 x_2 \overline{x_3} x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3 \overline{x_4}} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} = & \quad (40.2.6) \\ \overline{x_1 x_2 \overline{x_3}}(\overline{x_4} + x_4) + \overline{x_1 x_2 x_3}(\overline{x_4} + x_4) = & \\ \overline{x_1 x_2}(\overline{x_3} + x_3) = \overline{x_1 x_2} & \end{aligned}$$

Smyčka ze dvou polí v poslední řadce (označená č. 3):

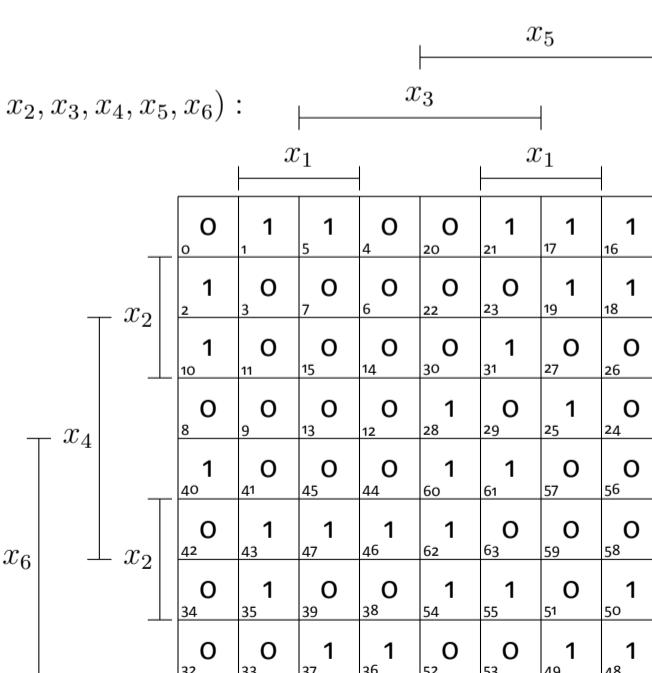
$$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 = \quad (40.2.7)$$



Obrázek 40.2.3.: Příklad Karnaughovy mapy pro pět proměnných

[PS94] J. Podlešák and P. Skalicky. *Spínací a číslicová technika*. ČVUT, 1994 (cit. on p. 212).

[Wak99] J. F. Wakerly. *Digital Design Principles and Practices*. PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. 212).



Obrázek 40.2.4.: Příklad Karnaughovy mapy pro šest proměnných

References

[Pino06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on p. 211).

41. Číslicové součástky a technologie

Obsah

41.1. Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	215
41.1.1. Vlastnosti logických hradel	215
41.2. Bipolární digitální obvody	215
41.3. Unipolární digitální obvody	215
41.4. Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	216
41.4.1. 3.3V → 5V	216
41.4.2. 5V → 3.3V	217

41.1. Rozdělení číslicových integrovaných obvodů

Logické integrované obvody zpracovávají nespojité signály, které nabývají jen konečného malého počtu úrovní. Naprostá většina dnes vyráběných logických IO využívá pouze dvou logických úrovní pracujících s dvojkovou číselnou soustavou. Jejich funkci a vzájemné spojování do soustav lze popsat pomocí Booleovy algebry (viz kap. 40.2.2) [MKPO2, p. 8].

Digitální IO se vyrábějí v technologii *bipolární* (kap. 41.2) i *unipolární* 41.3 (především MOS). Základní kriteria, podle kterých posuzujeme kvalitu (vhodnost pro danou aplikaci) jednotlivých druhů (tříd) digitálních obvodů jsou:

- rychlosť,
- příkon,
- odolnost proti rušení,
- široký rozsah pracovních teplot,
- nízké rušení generované vlastním obvodem (proudové špičky při změnách stavu),
- snadnost realizace složitějších logických funkcí,
- dosažitelná hodnota základních hradel a možnosti velké integrace,
- nízká cena.

Tyto požadavky splňuje každá třída digitálních obvodů pouze částečně. Proto se ve výrobě udržuje několik různých tříd digitálních obvodů, z nichž každá má zdůrazněnou některou z výše uvedených vlastností tak, jak to odpovídá její fyzikální podstatě.

41.1.1. Vlastnosti logických hradel

41.2. Bipolární digitální obvody

V bipolární technologii jsou skupiny logických obvodů charakterizovány z hlediska režimu činnosti tranzistorů a tvoří dvě základní skupiny. Jsou to logické IO - s tranzistory pracujícími:

- v saturaci: tranzistor spínán z vypnutého stavu do saturace,
- v nesaturačním - aktivním režimu: tranzistor přepínán mezi stavem vypnutým (nebo slabě sepnutým) a aktivním (nesaturačním) modelem.

V obou skupinách je přepínanou součástkou *tranzistor NPN*. Komplementární *tranzistor PNP* je využíván pouze jako zatěžovací prvek nebo jako proudový zdroj; pro tyto účely se rovněž využívá i rezistor.

41.3. Unipolární digitální obvody

41.4. Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd

Vyskytne-li se v číslicovém návrhu potřeba použít logická hradla z odlišných napěťových tříd, budeme postaveni před problém jejich vzájemného propojení zachovávající jejich funkčnost. Pro správnou volbu vhodného napěťového přizpůsobení logických hradel z různých rodin, je nutné znát nejen jejich rozhodovací napětí, ale také následující parametry, které jsou uvedeny v tabulce 41.4.1 [Mico6, p. 22]:

- maximální úroveň logické '0' na vstupu hradla - $V_{IL\max}$
- minimální úroveň logické '1' na vstupu hradla - $V_{IH\min}$
- maximální úroveň logické '0' na výstupu hradla - $V_{OL\max}$
- minimální úroveň logické '1' na výstupu hradla - $V_{OH\min}$

	$V_{OH\min}$	$V_{OL\max}$	$V_{IH\min}$	$V_{IL\max}$
5V TTL	2.4V	0.5V	2.0V	0.8
3.3V LVTTL	2.4V	0.4V	2.0V	0.8
5V CMOS	4.7V ($V_{CC}-0.3V$)	0.5V	3.5V ($0.7xV_{CC}$)	1.5V ($0.3xV_{CC}$)
3.3V LVCMOS	3.0V ($V_{CC}-0.3V$)	0.5V	2.3V ($0.7xV_{CC}$)	1.0V ($0.3xV_{CC}$)

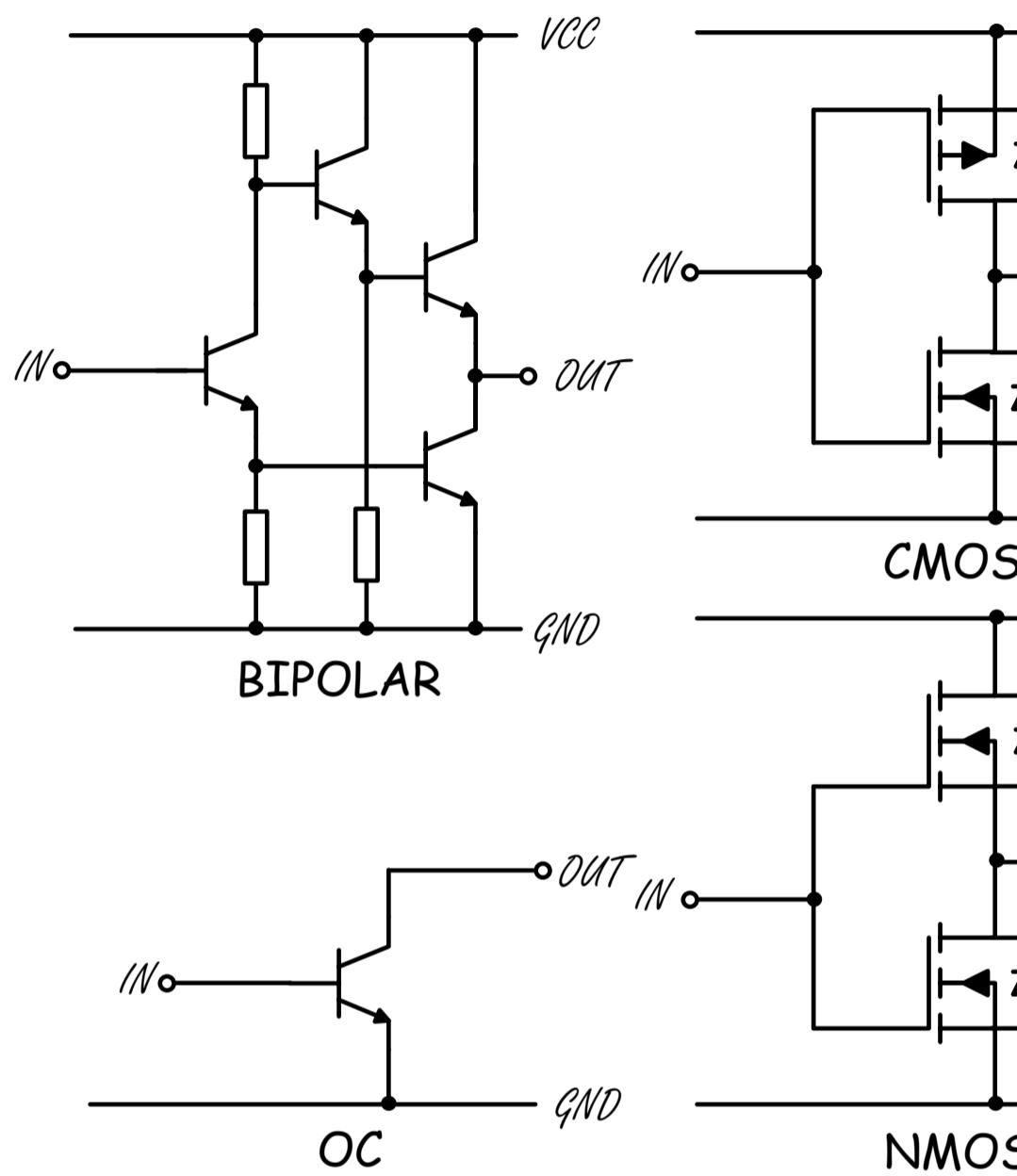
Tabulka 41.4.1.: Rozhodovací úrovně napěťových tříd: 5V TTL, 3.3V LVTTL, 5V CMOS, 3.3V LVCMOS

Úroveň logické nuly a jedničky na výstupu určuje konstrukce koncové části digitálního obvodu. Nejčastější provedení jsou na obr. 41.4.1. Jsou-li různé digitální obvody připojeny na společnou sběrnici, může dojít k situaci, kdy některý z výstupních vývodů bude buzen vyšším napětím než je napájecí napětí příslušného obvodu. I v tomto případě výstupní část digitálního obvodu rozhoduje o výsledném chování. Shrňme základní vlastnosti technologií číslicových obvodů uvedených na obr. 41.4.1:

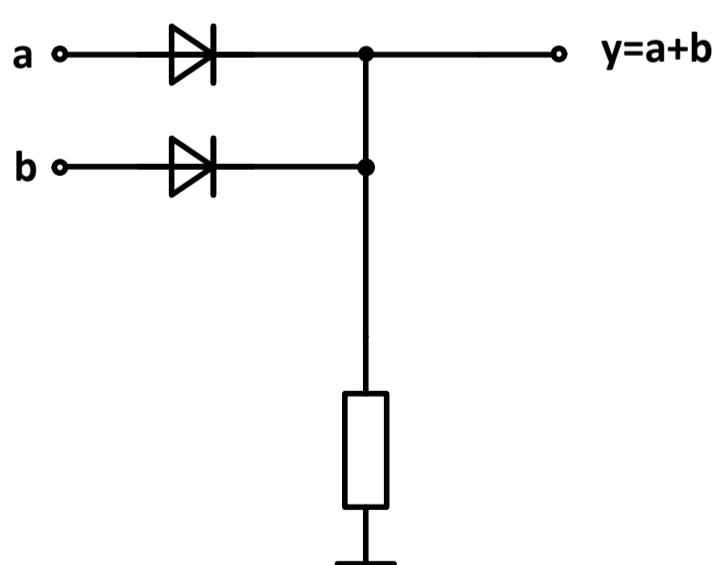
- Bipolární koncový stupeň nedovoluje plný rozkmit výstupního signálu. Je-li obvod napájen 5 V, je výstup při úrovni H limitován na $V_{CC} - 2 \times V_{BE}$ (cca 3.6V). To je hodnota, která na rozhraní 3 V systému nezpůsobuje příliš velký napěťový rozdíl, a tedy proudu, tekoucímu z napájecího zdroje 5 V systému do zdroje 3 V systému.
- Výstupní napětí typické CMOS součástky se prakticky pohybuje v rozsahu GND - VCC.
- Některé součástky mají výstup typu *open collector* - OC resp. *open drain* - OD, tj. neexistuje vnitřní obvod, jenž by uvedl výstup do

stavu H. K tomu je zapotřebí *pull-up* rezistoru, který připojí výstup k napětí, které může být i vyšší než je napájecí - VCC. Očividně, tento způsob umožnuje relativně snadné rozhraní, ale pro dosažení vyšších rychlostí je nutné volit relativně malý odpor, což zvyšuje spotřebu.

- U NMOS stupně je podobně jako u bipolárního stupně výstupní napětí logické úrovně H omezeno úbytkem na kanálu horní NMOS tranzistoru na $V_{CC} - V_{TH} \approx 3.5$ V. Obvykle je tedy možné přímé řízení 3V systému.



Obrázek 41.4.1.: Koncové stupně bipolárních, CMOS, NMOS obvodů s otevřeným kolektorem [Tin95, p. 2]



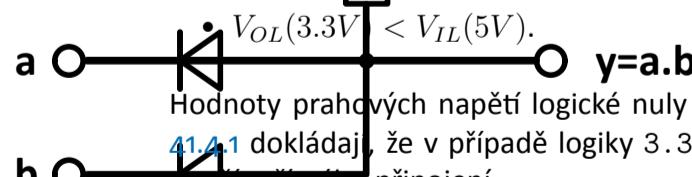
(a) Součetový člen

Obrázek 41.2.1.: Diodová logika

41.4.1. 3.3V → 5V

Nejjednodušším a nejvíce žádoucím způsobem je přímé připojení 3.3V výstupu k 5V vstupu, což lze provést pouze v případě, že jsou splněny následující požadavky:

- $V_{OH}(3.3V) > V_{IH}(5V)$,
- $V_{OL}(3.3V) < V_{IL}(5V)$.



Hodnoty prahových napětí logické nuly a jedničky v předchozí tabulce 41.4.1 dokládají, že v případě logiky 3.3V LVCMOS a 5V TTL je možné použít přímého připojení.

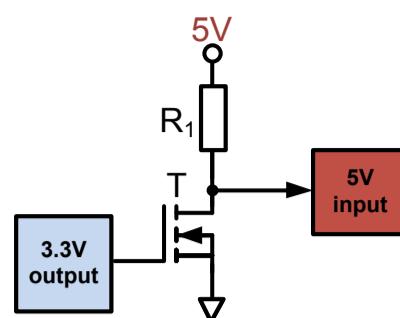
Pokud oba tyto požadavky nejsou splněny, je třeba použít na rozhraní obou logik přizpůsobovací obvody, popsané v následujících textu.

(b) Součinový člen

41.4.1.1. MOSFET Translator

Levné a jednoduché řešení problému vzájemného přizpůsobení logických obvodů odlišných napěťových tříd, pro které platí $V_{OH}(3.3V) < V_{IH}(5V)$ nabízí použití MOSFETu s prahovým napětím

$$V_{GS_{th_{max}}} < V_{OH_{min}}.$$



Obrázek 41.4.2.: 3.3V → 5V: N-MOSFET

Při výběru hodnoty R_1 je třeba vzít v úvahu:

- spínací rychlosť vstupu,
- zvýšení spotřeby díky proudu přes rezistor R_1 .

Při změně logické úrovně '0' → '1' na vstupu 5V logiky je nutné počítat se zpožděním, které je dáno časovou konstantou RC článku, tvořeného rezistorem R_1 a celkovou kapacitou na vstupu hradla. Důsledkem je tedy určitá minimální spínací perioda:

$$T_{SW_{min}} = 3 \cdot R_1 \cdot C_{IN},$$

která je vyšší, čím nižší spotřeby se návrhář snaží dosáhnout ($R_1 \uparrow$). Zpoždění při spínání '1' → '0' má příznivější hodnotu, neboť $R_{dsON} \ll R_1$.

41.4.1.2. Diodový Offset

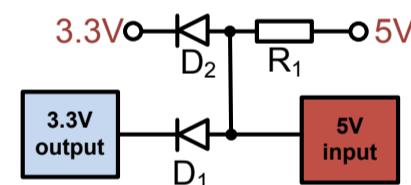
Hodnoty vstupního prahového napětí 5V CMOS a výstupní prahová napětí pro 3.3V LVTTL a LVCMOS jsou uvedeny v tabulce 41.4.2

Threshold	5V CMOS IN	3.3V LVTTL OUT	3.3V LVCMOS OUT
High	> 3.5V	> 2.4V	> 3.0V
Low	< 1.5V	< 0.4V	< 0.5V

Tabulka 41.4.2.: Přehled vstupní a výstupních prahových napětí různých logik, chceme-li ke vstupu 5V CMOS připojit 3.3V LVTTL nebo 3.3V LVCMOS. [Tin95]

Všimněme si, že obě prahová napětí vstupu 5V CMOS logiky jsou o volt vyšší než u výstupu 3.3V logiky. Zapotřebí je tedy obvod, který zvyšuje vysokou a nízkou úroveň prahového napětí.

Pokud bychom vytvořili posunutí o alespoň o 0.7V pro obě úrovně prahového napětí, dosáhli bychom vzájemného přizpůsobení. Obvod na obr. 41.4.3, posuneme hodnotu nízké úrovně výstupního prahového napětí o úbytek v propustném směru diody D_1 (typicky 0.7V), na 1.1V až 1.2V. Úroveň vysokého prahového napětí se nastavuje pomocí pull-up rezistoru a diody D_2 vázané na 3.3V napájení. Výstupní napětí je tedy také posunuto přibližně 0,7V nad 3.3V napájení, tj. na 4,0 až 4.1V, což je vysoko nad 3,5V prahem vstupu 5V CMOS logiky.



Obrázek 41.4.3.: 3.3V → 5V: Diodový offset

Poznámka 41.4.1. Aby obvod fungoval správně, musí být pull-up rezistor podstatně menší než vstupní odpor 5V CMOS logiky, aby se zabránilo snížení výstupního napětí díky efektu vstupního odporového děliče a také musí být dostatečně velký, aby proud tekoucí do 3.3V napájení a výstupu hradla byl v mezích specifikace.

41.4.1.3. Komparátor

Základní funkce komparátoru je následující:

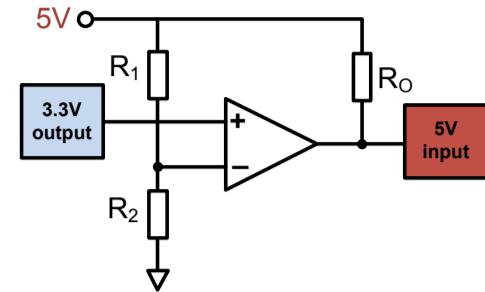
- napětí na invertující (-) vstupu je větší než na neinvertujícím vstupu (+), výstup komparátoru se nastaví do nízké úrovně,

- je-li napětí na neinvertujícím vstupu (+) větší než na invertujícím vstupu (-), výstup komparátoru se nastaví do vysoké úrovně.

Výpočet hodnoty odporu R_1 a R_2 :

Poměr R_1 a R_2 je závislý na napětí logické nuly a jedničky na výstupu hradla 3.3V logiky. Invertující vstup by měl být nastaven do poloviny mezi prahovými hladinami V_{OL} a V_{OH} . Pro LVCMOS je toto napětí rovno

$$1.75V = \frac{3V + 0.5V}{2}$$



Obrázek 41.4.4.: 3.3V → 5V: Komparátor; $R_1 = 1,8k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$

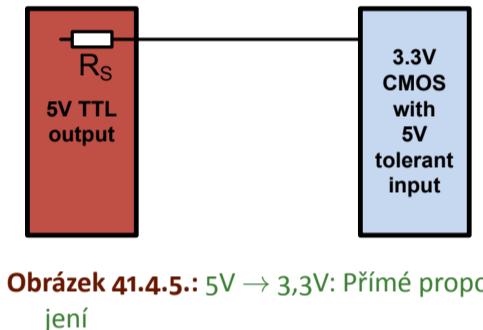
Budeme-li volit velikost R_2 , pak hodnotu odporu R_1 snadno dopočítáme dle následující rovnice:

$$R_1 = R_2 \left(\frac{5V}{1.75V} - 1 \right).$$

41.4.2. 5V → 3.3V

41.4.2.1. Přímé propojení

Hradla napěťové třídy 5V mají výstupy s typickými prahovými hodnotami $V_{OH} = 4,7V$, $V_{OL} = 0,4V$ zatímco hradla 3.3V LVCMOS mají výstupy s prahovými hodnotami $V_{IH} = 0,7 \times V_{DD}$, $V_{IL} = 0,2 \times V_{DD}$. Je-li tedy na 5V výstupu logická nula, bude také správně interpretována 3V vstupem, neboť platí $V_{OL} = 0,4 < V_{IL} = 0,8$.



Obrázek 41.4.5.: 5V → 3.3V: Přímé propojení

Ani v případě logické jedničky nevzniká žádný konflikt, neboť $V_{OH} = 4,7 > V_{IH} = 2,1$. Pokud je tedy 3V vstup 5V tolerantní, je možné přímé propojení, v opačném případě je třeba použít některou z následujících technik.

41.4.2.2. Diodový omezovač

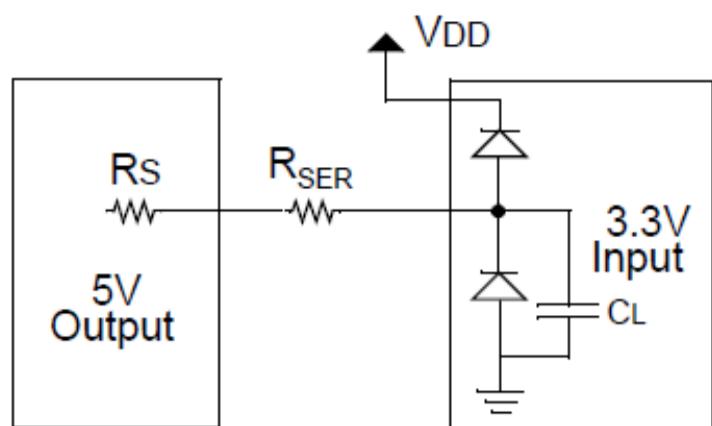
Některé digitální obvody mají své vstupy chráněny vnitřními omezovacími diodami tzv. diode clamp (obr. 41.4.6a). Proteče-li těmito diodami větší proud než udávají katalogové hodnoty, může dojít k poškození vstupu, nebo v lepším případě k efektu latching-up. Typický 5V výstup má kolem 10Ω , proto chceme-li využít těchto diod, musíme přidat sériový odpor, jenž limituje velikost propustného proudu. Nepřijemným důsledkem je ovšem vzniklý RC článek se vstupní kapacitou hradla C_L , který snižuje rychlosť. Není-li vstup takto chráněn je možné jej doplnit externí diodou dle obr. 41.4.6b.

Dalším problémem je proud, injektovaný z 5V výstupu skrz omezovací diodu do 3.3V napájení. Tento proud může způsobit zvýšení napájecího napětí 3.3V obvodů, což může vést k jejich zničení. Proto lze s výhodou použít PNP tranzistor zapojený dle obr. 41.4.7.

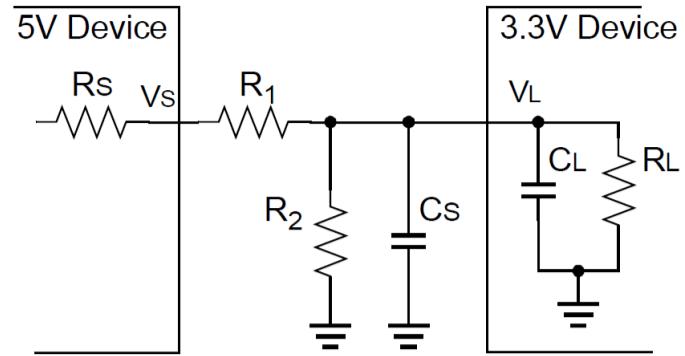
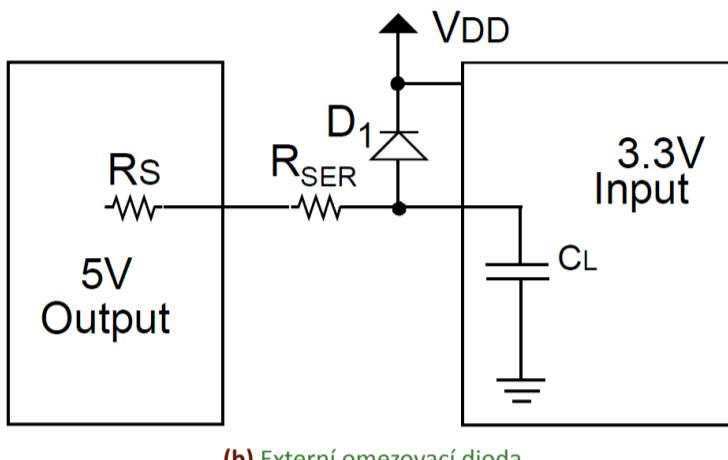
41.4.2.3. Napěťový dělič

A simple resistor divider can be used to reduce the output of a 5V device to levels appropriate for a 3.3V device input. An equivalent circuit of this interface is shown in Figure 41.4.8. Typically, the source resistance, R_S , is very small (less than 10 ohms) so its affect on R_1 will be negligible provided that R_1 is chosen to be much larger than R_S . At the receive end, the load resistance, R_L , is very large (greater than 500 k ohms) so its affect on R_2 will be negligible provided that R_2 is chosen to be much less than R_L .

There is a trade-off between power dissipation and transition times. To keep the power requirements of the interface circuit at a minimum, the



(a) Vnitřními omezovací diody

Obrázek 41.4.8.: $5V \rightarrow 3.3V$: napěťový dělič

(b) Externí omezovací dioda

Obrázek 41.4.6.: $5V \rightarrow 3.3V$: Použití omezovacích diod pro ochranu vstupu integrovaného obvodu

series resistance of R_1 and R_2 should be as large as possible. However, the load capacitance, which is the combination of the stray capacitance, C_S , and the 3.3V device input capacitance, C_L , can adversely affect the rise and fall times of the input signal. Rise and fall times can be unacceptably long if R_1 and R_2 are too large.

Neglecting the affects of R_S and R_L , the formula for determining the values for R_1 and R_2 is given by Equation 41.4.1.

$$\frac{V_S}{R_1 + R_2} = \frac{V_L}{R_2} \quad (41.4.1)$$

$$R_1 = \frac{(V_S - V_L)}{V_L} R_2 \quad (41.4.2)$$

$$R_1 = 0,515 \cdot R_2 \quad (41.4.3)$$

The formula for determining the rise and fall times is given in Equation 41.4.4. For circuit analysis, the Thevenin equivalent is used to determine the applied voltage, V_A , and the series resistance, R . The Thevenin equivalent is defined as the open circuit voltage divided by the short circuit current. The Thevenin equivalent, R , is determined to be $0.66 \cdot R_1$ and the Thevenin equivalent, V_A , is determined to be $0.66 \cdot V_S$ for the circuit shown in Figure 41.4.8 according to the limitations imposed by

Equation 41.4.4.

$$t = -R \cdot C \cdot \ln \left(\frac{V_F - V_A}{V_I - V_A} \right) \quad (41.4.4)$$

kde t = Rise or Fall time, $R = 0.66 \cdot R_1$, $C = C_S + C_L$, V_I = Initial voltage on C (V_L), V_F = Final voltage on C (V_L), V_A = Applied voltage ($0.66 \cdot V_S$).

Příklad 41.4.1. As an example, suppose the following conditions exist:

- Stray capacitance = 30 pF ,
- Load capacitance = 5 pF ,
- Maximum rise time from $0.3V$ to $3V \leq 1 \mu\text{s}$
- Applied source voltage $V_S = 5V$

Solve Equation 41.4.4 for R :

$$R = -\frac{t}{C \cdot \ln \frac{V_F - V_A}{V_I - V_A}}$$

Substitute values:

$$R = -\frac{10 \cdot 10^{-7}}{35 \cdot 10^{-12} \cdot \ln \frac{3 - 0.66 \cdot 5}{0.3 - 0.66 \cdot 5}}$$

Thevenin equivalent maximum R :

$$R = 12408$$

(41.4.1) Solve for maximum R_1 and R_2 :

$$R_1 = 0.66 \cdot R \quad R_2 = \frac{R_1}{0.515} \quad (41.4.5)$$

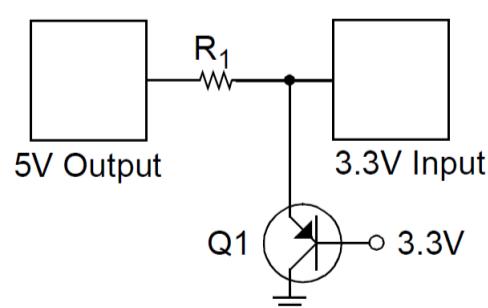
$$R_1 = 8190 \quad R_2 = 15902 \quad (41.4.6)$$

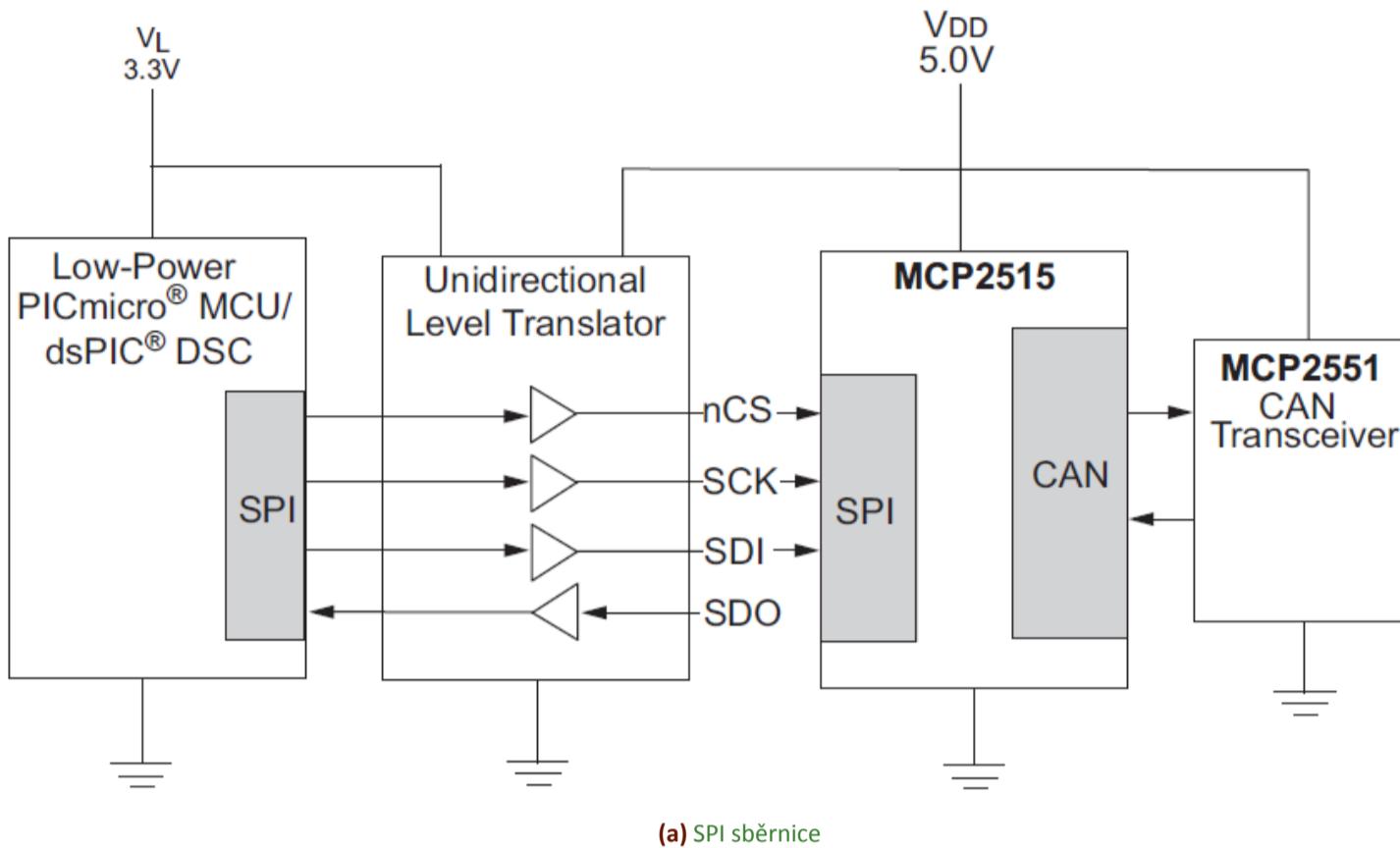
41.4.2.4. Level translator

While level translation can be done discretely, it is often preferred to use an integrated solution. Level translators are available in a wide range of capabilities. There are unidirectional and bidirectional configurations, different voltage translations and different speeds, all giving the user the ability to select the best solution.

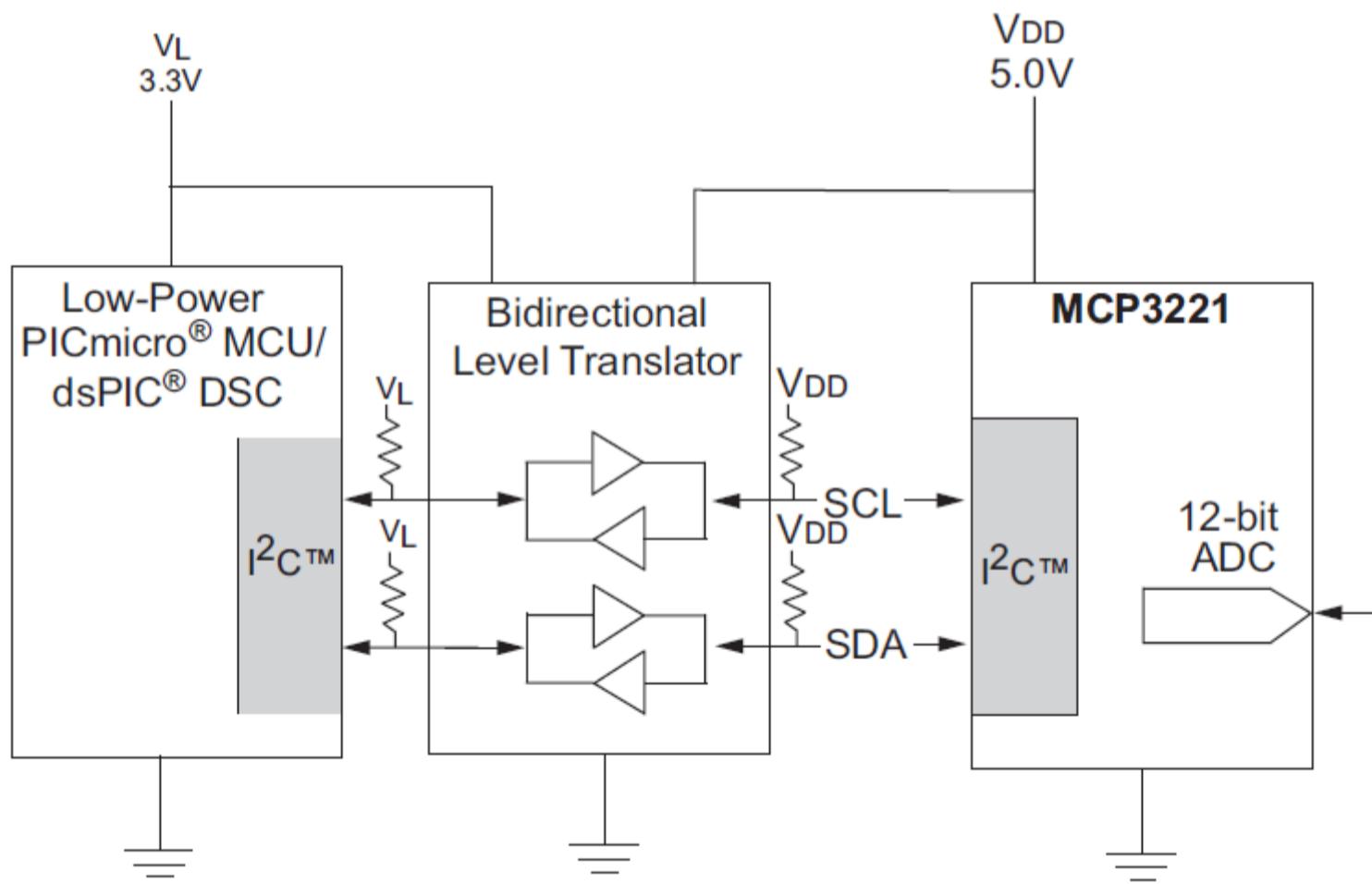
References

- [Mico6] Microchip. "3V Tips 'n Tricks". In: *Microchip DS41285A* (2006), p. 56 (cit. on p. 216).
- [MKPo2] V. Musil, J. Kolouch, and R. Prokop. *Návrh digitálních integrovaných obvodů a jazyk VHDL*. Ed. by V. Brno. VUT Brno, 2002 (cit. on p. 215).
- [Tin95] T. A. Tinus van de Wouw. "Interfacing 3V and 5V applications". In: *Philips Semiconductors AN240* (Sept. 1995), p. 11 (cit. on pp. 216, 217).

Obrázek 41.4.7.: $5V \rightarrow 3.3V$: Active clamp - Přechod báze-emitor funguje jako omezovací dioda, ovšem s tím rozdílem, že jen malé procento celkového proudu z 5V výstupu teče do 3.3V napájení. Převážná část teče kolektorem do země. Poměr bázového a kolektorového proudu je určen proudovým zesílením tranzistoru, které je typicky 10 až 400



(a) SPI sběrnice

(b) I²C sběrnice

Obrázek 41.4.9.: 5V → 3,3V: Board-level communication between devices (e.g., MCU to peripheral) is most often done by either SPI or I²C. For SPI, it may be appropriate to use a unidirectional level translator and for I²C, it is necessary to use a bidirectional solution.

Část XVI.

Mikroprocesorová technika

42. Procesory AVR

Obsah

42.1. AVR Architektura	223
42.1.1. Strojový cyklus	223
42.1.2. Prefetch a pipelining	223

42.1. AVR Architektura

AVR architektura vychází z koncepce rychle přístupného registrového pole, které obsahuje 32 obecně použitelných registrů délky 8 bitů. Přístup do registrového pole je proveden v jediném strojovém cyklu. To znamená, že během jednoho strojového cyklu lze vykonat jednu aritmeticko-logicou operaci¹

Tato technika, umožňuje vyšší výkon ve srovnání s mikrokontroléry řady 8051, které disponují instrukcemi o délce od 12 do 48 hodinových cyklů, navíc se pro výpočty musí používat akumulátor, který je jen jeden. Registrové pole lze v tomto smyslu chápat jako skupinu akumulátorů.

42.1.1. Strojový cyklus

Strojový cyklus mikrokontrolérů AVR přímo odpovídá hodinovému cyklu. Nedochází k žádnému dělení hodinových cyklů jako například u mikrokontrolérů řady 8051²

42.1.2. Prefetch a pipelining

Mikrokontroléry AVR používají jednoduchý *předvýběr instrukce* (**prefetch**) umožňující *jednofázové zřetězení instrukcí* (**pipelining**)

¹oba operandy aritmeticko-logické operace jsou načteny z registrového pole, operace je provedena a výsledek směruje opět do registrového pole v jediném strojovém cyklu

²jeden strojový cyklus obsahuje 12 hodinových cyklů

43. ANSI-C pro mikrokontroléry

43.1. Stručný úvod

Obsah

43.1. Stručný úvod	225
----------------------------------------------	-----

Část XVII.

Programovatelné logické obvody

44. Architektura

Obsah

44.1. Typy struktur programovatelných logických obvodů	229
44.1.1. Historie	229
44.1.2. Obvody typu Simple Programmable Logic Device	231
44.1.3. Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD	233
44.1.4. Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA	234
44.1.5. Terminologie	234
44.2. Dynamické parametry PLD	235

44.1. Typy struktur programovatelných logických obvodů

Programovatelný logický obvod nebo programovatelné logické zařízení, často také PLD (*programmable logic device*) nebo FPD (*Field-Programmable Device*), je elektronická součástka (obvod) používaná pro vytváření digitálních obvodů. Na rozdíl od hradel, registrů a jiných digitálních obvodů není funkce zařízení tohoto druhu v době výroby ještě definovaná. Než může být PLD použito, musí být nejprve naprogramováno.

44.1.1. Historie

Historické kořeny moderních programovatelných polí jsou v prvních programovatelných pamětech typu PROM (*firma Radiation, 1970*) a jejich zákaznický programovatelných verzích EPROM (*Intel, 1971*) a EEPROM (*Intel, 1978*). Paměť PROM lze využít pro realizaci kombinačních logických funkcí tak, že paměť využijeme jako tzv. *vyhledávací tabulku LUT* (angl. *Lookup Table*). V tomto případě přivádíme na adresové vodiče PROM paměti vstupní signály (proměnné). Obsah paměti PROM vytvoříme tak, že na adresy jejichž hodnota je tvořena vektorem hodnot vstupních proměnných uložíme hodnoty, které jsou tvořeny vektory požadovaných výstupních hodnot. Výstupní datové signály paměti PROM pak reprezentují výstupy kombinanční logiky. Tímto způsobem můžeme např. paměti PROM o velikosti 2 Kb s organizací 256x8 bitů (8 adresových vodičů, 8 datových vodičů), vytvořit programovatelný logický obvod, kterým lze realizovat 8 kombinačních funkcí s 8 vstupními signály (proměnnými). Výhodou takovéto realizace je, že všechny realizované funkce mají stejně zpoždění ze vstupu na výstup a to pro všechny možné kombinace vstupních hodnot. Na principu generátorů logických funkcí pomocí pamětí (LUT) je založena funkce obvodů FPGA.

Permanentní paměti, jako takové, ale neumožňovaly úspornou realizaci logické funkce. Mezi první programovatelné logické obvody lze zařadit obvody PLA (angl. *Programmable Logic Array*), neboť v roce 1970 společnost Texas Instruments - TI podařilo vyvinout masku programovatelný integrovaný obvod TMS2000, založený na paměti ROM (angl. *Read Only Associative Memory*) společnosti IBM. TMS2000 disponoval 17 vstupy, 18 výstupy s 8 JK klopnými obvodami. Obvod byl možné programovat modifikací vodivé propojovací masky během výroby (tj. koncový uživatel jej nemohl programovat). Obvody PLA obsahovaly pole hradel AND následované polem hradel OR. Logická funkce tedy vznikala v disjunktivní formě, tj. jako součet součinů. Tento způsob tvorby logické funkce se uchytil a na tomto principu je založena funkce dnešních obvodů architektur SPLD a CPLD. Nicméně se tyto obvody na trhu příliš neprosadily.

Vývoj však pokračoval dál a v roce 1975 přišla na trh firma Signetics Corporation s obvody nazvanými FPLA - (*Field Programmable Logic Array*), konkrétně se jednalo o obvod 82S100. Po převzetí firmy Signetics firmou Philips byl tento obvod označován také jako PLS100. Obvody FPLA tvořila programovatelné pole AND následované programovatelným polem hradel OR. Tyto obvody však měly poměrně dlouhou dobu přenosu signálu ze vstupu na výstup. Pro návrh obvodů neexistoval žádný jazyk, a tak musel návrhář nastavovat přímo hodnoty jednotlivých programovatelných buňek. Tyto nevýhody spolu s poměrně vysokou cenou způsobili malé rozšíření téhoto obvodů.

Dalším významným krokem bylo uvedení obvodů PAL - (*Programmable Logic Array*). Tyto obvody navrhla firma MMI - Monolithic Memories, Inc v roce 1978. Obvody PAL vycházeli z obvodů FPLA a obsahovaly programovatelné pole hradel AND, které bylo následováno pevným neprogramovatelným polem hradel OR. Ke každému hradlu OR tak bylo možno připojit pouze omezený počet výstupů hradel AND (součinů). Díky tomuto zjednodušení došlo ke snížení doby přenosu signálu ze vstupu na výstup. Oba tyto typy obvodů FPLA i PLA byly totiž založeny na bipo-

lární PROM technologií s programovatelnými pojistkami tzv. *fusible-link*. Programování bylo realizováno vstříknutím důstatečně velkého náboje, který způsobil přepálení vybrané vnitřní pojistky. Zbývající neporušené pojistky se staly součástí implementovaného číslicový obvodu. Pojistky ovšem zvyšují zpoždění signálu v obvodu, zvětšují složitost a ve výsledku i cenu. Počet součinů, které byly připojeny na vstup hradla OR, byl na základě praktických zkušeností stanoven na osm. Velkou výhodou těchto obvodů bylo, že se daly programovat v tehdy již běžných programátorech paměti PROM. Mezi první obvody řady PAL patří například PAL16L8 (komboinační výstupy) a PAL16R8 (výstupy s registry).

Firma MMI dále napsala pro tyto obvody návrhový software, který umožňoval popsat číslicový systém pomocí velmi jednoduchého jazyka ve formě booleovských rovnic a z něj pak vygenerovat výstup, jímž bylo možné obvody PAL naprogramovat. Tím došlo k významnému zjednodušení vlastního návrhu obsahu těchto obvodů. Tento software se jmenoval PALASM (*PAL Assembler*) a firma MMI ho zveřejnila ve formě zdrojového kódu napsaného v jazyce FORTRAN. Program PALASM umožňoval dokonce softwarovou simulaci navrženého obvodu. Díky funkcím návrhu a simulace lze PALASM označit za první návrhový systém pro PLD obvody. Všechny zmíněné obvody dnes řadíme do první generace PLDobvodů. Za zmínu ještě stojí, že firmy Signetics Corporation a MMI již mezi dnešními výrobcí programovatelných obvodů nenajdeme.

Vývoj v oblasti PLD obvodů pokračoval a postupně se začaly objevovat nové PLD obvody, které řadíme již do druhé generace. V roce 1983 uvedla firma AMD (*Advanced Micro Devices*) obvod PAL22V10. Tento obvod byl založen na obvodech PAL popsaných v předchozím odstavci, přinesl však jedno významné vylepšení, a to tzv. **výstupní makrobuňku** (OLMC - angl. *Output Logic Macro Cell*). Tyto obvody bývají označovány jako obvody PAL s makrobuňkou. Výstupní makrobuňka byla umístěna na každém výstupu obvodu. Každou makrobuňku bylo možné naprogramovat buď jako kombinační nebo registrový výstup. Dále bylo možné u jakékoliv makrobuňky programovat, zda má být výstup v přímé nebo negované formě. Výstup makrobuňky byl třístavový, ovládaný jedním logickým součinem, což umožňovalo přepnutí makrobuňky z výstupního režimu do funkce vstupu. Tento typ obvodu vyrábělo svého času kromě firmy AMD mnoho dalších firem, např. Cypress Semiconductor, Lattice Semiconductor a Texas Instruments.

Všechny dosud zmíněné obvody měly jednu nevýhodu - byly programovatelné pouze jednou (OTP - *One Time Programmable*). Díky rozvoji technologie u paměti EPROM se dostala tato technologie i do oblasti PLD obvodů a tudíž se na trhu objevili PLD obvody, jejichž obsah bylo možné smazat pomocí ultrafialového záření - obvody lze opakováně mazat a znova programovat.

V roce 1984 vstoupila na scénu firma DATA I/O se svým návrhovým systémem **ABEL**, jenž disponoval jazykem vyšší úrovně, určený pro popis číslicových systémů (HDL - *Hardware Description Language*), který byl nazván stejně jako návrhový systém, tj ABEL - *Advanced Boolean Expression Language*. Jazykem ABEL lze popsat číslicový systém pomocí booleovských rovnic, pravdivostní tabulky a stavových automatů, přičemž tyto způsoby je možné kombinovat. Práva na jazyk ABEL získala po několika akvizicích firma XILINX. Tento jazyk již sedmou revizi a dodnes ho některé současné návrhové systémy podporují (např. Xilinx a Lattice Semiconductor). Pro návrh nových číslicových systémů založených na PLD obvodech se však doporučuje používat některý z novějších HDL jazyků, např. jazyk VHDL nebo jazyk Verilog.

Další vývoj PLD obvodů pokračoval s nástupem technologie pamětí EEPROM a jejím využití v PLD obvodech. Této nové technologie bylo využito zejména u PLD obvodů označovaných jako GAL - *Generic Array Logic*. Obvody GAL lze zařadit do třetí generace PLD obvodů. Obvody typu GAL jsou také zařazovány do třídy jednoduchých programovatelných obvodů (SPLD).

Na konci osmdesátých let minulého století nastává v oblasti PLD obvodů bouřlivý vývoj. Vývojem a výrobou PLD se na konci osmdesátých a začátkem devadesátých let již zabývá mnoho firem a vývoj PLD obvodů již nelze od této doby přehledně rozdělit ani stručně popsat. V průběhu tohoto období vznikají nové řady PLD obvodů, nazývané CPLD - *Complex Programmable Logic Device*. Jmenujme např. alespoň obvody MACH firmy AMD a dále vznik první řady obvodů MAX, kterou společně vyvinula

firma ALTERA a Cypress Semiconductor. Nové obvody v této době na trhu uvádí také firma XILINX (řady XC7200 a XC7300), QuickLogic, Lattice Semiconductor a tak by bylo možné pokračovat dál a dál. Z uvedeného je vidět, že cesta vývoje PLD obvodů nebyla a není ani dnes nijak přímočará a byla navíc od svých počátků provázena soudními sporami o patentová práva a tato situace trvá dodnes.

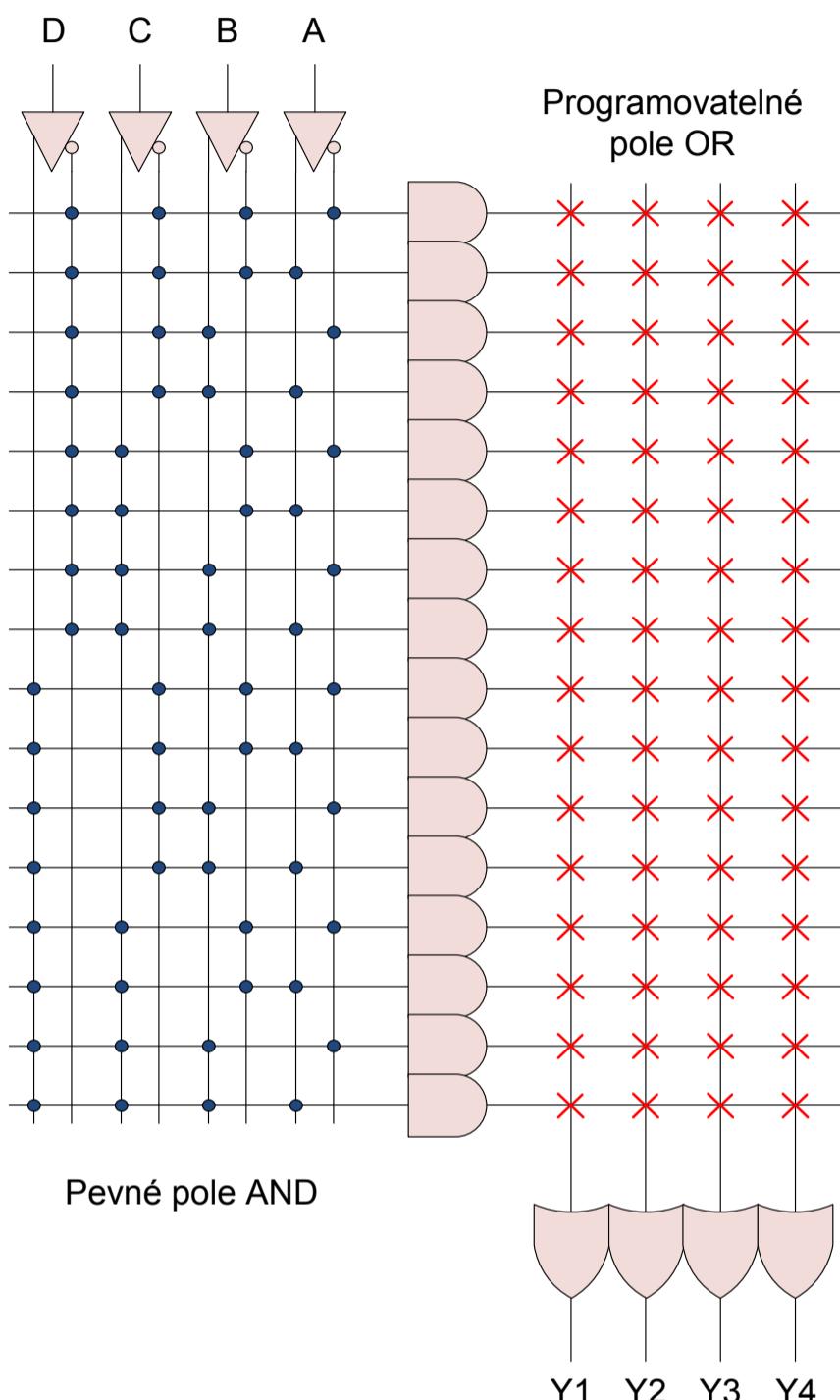
Lze však říci, že od začátku devadesátých let vyvíjí většina firem dvě od sebe velmi odlišné architektury PLD obvodů. První je architektura CPLD obvodů, založená na programovatelné matici hradel AND, hradlech OR a makrobuňkách (vychází tedy z původní koncepce obvodů PAL) a na programovatelných místech používá buňky EEPROM nebo FLASH.

Kvůli rostoucí velikosti obvodů se začalo později místo rozširování logických funkcí užívat spíše skládání více matic PLD obvodů do jednoho pouzdra. Vznikly tak obvody, které dnes nazýváme CPLD (*Complex Programmable Logic Device, Altera, 1988*). Od CPLD byl už pak jen malý krok k prvním FPGA obvodům (*Xilinx, 1984*). Dnes dostupná FPGA se ovšem od architektur z poloviny osmdesátých let významně odlišují. Trendem je pozvolný příklon k hrubozrnným architekturám; obvodům, které kromě elementárních programovatelných logických bloků obsahují také další komplexní podpůrné bloky.

44.1.2. Obvody typu Simple Programmable Logic Device

44.1.2.1. Programmable Read Only Memory (PROM)

Po mnoho let nebyly obvody PROM *Programmable Read Only Memory* zařazovány do skupiny programovatelných logických obvodů, ačkoliv většina nejmenších PROM (např. 32x8) byly používány jako logické prvky (dekodéry, převodní tabulky kódů, znakové generátory).

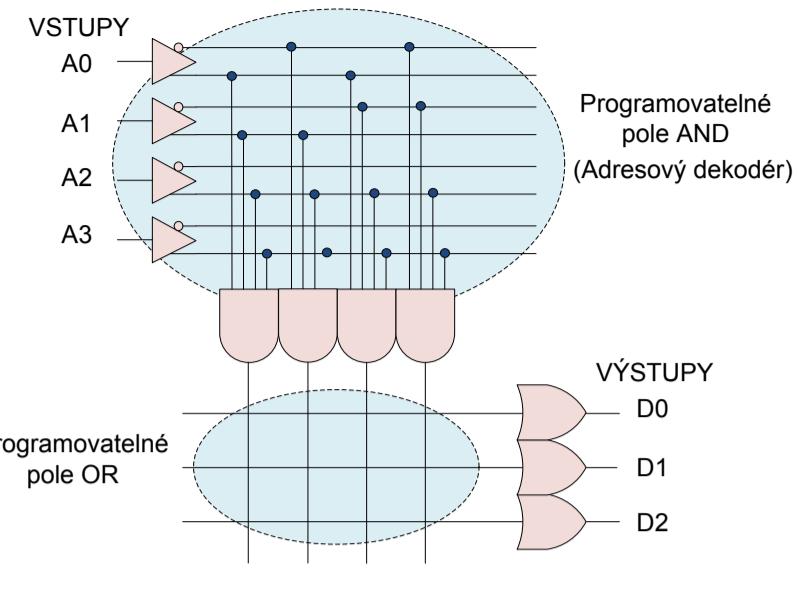


Obrázek 44.1.1.: PLD typu Programmable Read Only Memory (PROM)

Obvody PROM představuje matici paměťových buněk, jejíž řádky jsou adresovatelné vstupní signály a datové sloupce představují výstupní signály. Počet adresových a datových signálů determinuje rozměr matice. Např. 4 vstupní signály umožňují adresaci 16 řádků, 4 datové signály indikují, že každý řádek se skládá ze 4 paměťových buněk. Z pohledu architektury obvodů PLD obsahují PROM pevné propojovací pole hradel AND, následované programovatelným polem hradel OR (viz obr. 44.1.1)

Všeobecně platí, že obvody PROM jsou nevhodnějším kandidátem implementace takových aplikací, které vyžadují, aby na každou kombinaci vstupních signálů byla jiná odezva výstupních signálů. Překážkou je omezení počtu vstupních signálů, eventuálně je limitující také velikost programovatelné matice. Její velikost se přidáním nového vstupu vždy zdvojnásobí (omezení počtu vstupních signálů jistým způsobem řeší obvody typu PAL viz kap. 44.1.2.3) [LŠS93, s. 59].

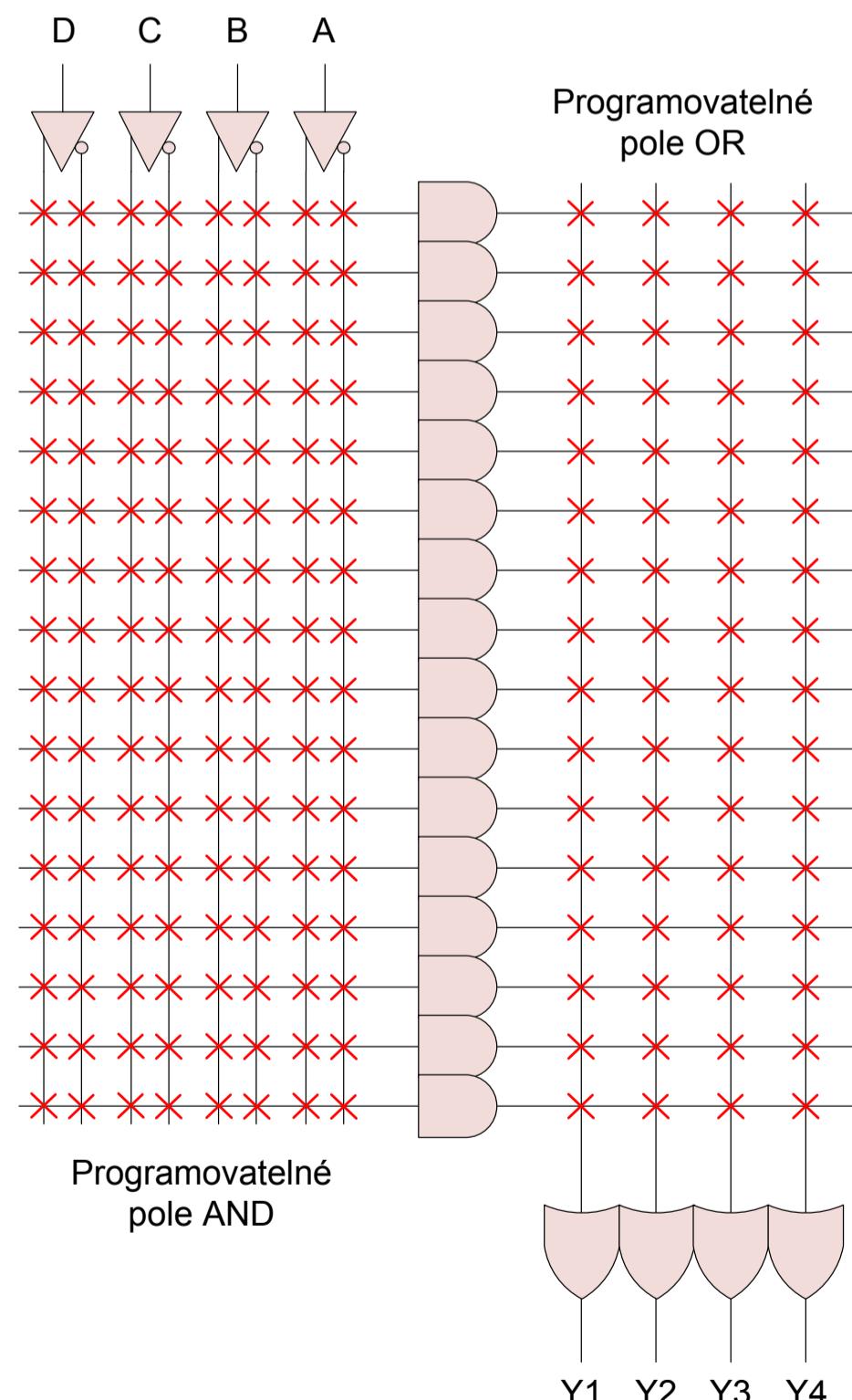
Na obr. 44.1.2 je uvedena architektura obvodu PROM prostřednictvím symboliky obvodů PLD. Každý term odpovídá jedné z jeho adres. Programovatelná hradlo OR odpovídají datovým bitům obvodu PROM (výstupní slovo). Např. PROM velikosti 32x8 představuje obvod PLD s 5 vstupy, 32 součinovými termy ($32 = 2^5$) a 8 programovatelnými výstupními OR hradly.



Obrázek 44.1.2.: Schéma obvodu PROM

44.1.2.2. PLD typu Programmable Logic Array (PLA)

Obvody PLA(*Programmable Logic Array*) patří k průkopníkům v oblasti programovatelných logických polí. Obsahují programovatelné pole hradel AND a zároveň i programovatelné pole hradel OR (viz obr. 44.1.3.). Vstupní signály jsou přivedeny v přímém i invertovaném stavu do pole AND hradel.



Obrázek 44.1.3.: Architektura obvodů PLA

Oproti obvodům PROM, mají obvody PLA toto pole programovatelné, takže je možné snadno vytvořit součinové termy z libovolné kombinace vstupních (přímých i negovaných) signálů. Součinové termy jsou přivedeny do programovatelného pole OR hradel, které umožňuje připojení libovolného termu k libovolnému hradlu OR. Jeden term může být přiveden na vstup i několika hradel OR. Na jejich výstupu je formována požadovaná logická funkce ve tvaru "součtu součinů".

Je-li obvod PLD vybaven programovatelným polem AND, jako je tomu u obvodů PLA (a i např. u PAL kapitola 44.1.2.3), může být využita pouze polovina programovatelných spínačů propojovacího pole. Tato skutečnost je zřejmá, protože vstupní signály jsou do pole přivedeny v přímém i invertovaném tvaru a v žádném součin se nemůže současně vyskytovat přímý i invertovaný signál (součin by vždy nabýval hodnoty logická nula). Takže nejméně polovina (a v praxi i více, protože všechny součiny vždy neobsahují všechny veličiny) není při konstrukcích logických funkcí využita. Je tedy zřejmé, jak neefektivně je využita plocha křemíkového čipu, na kterém je obvod typu PLA realizován. Tato skutečnost stimuluje další vývoj a vznik nových architektur obvodů PLD [LŠS93, s. 63].

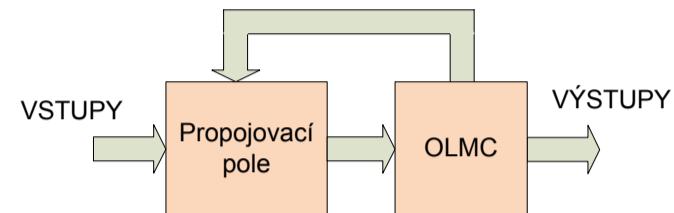
44.1.2.3. PLD typu Programmable Array Logic (PAL)

Obvody typu PAL jsou dalším z typů programovatelných logických obvodů. Jsou to PLD obvody s programovatelným polem hradel AND a pevným polem hradel OR. K jednomu hradlu OR lze připojit pouze omezený počet součinových termů, přičemž nelze současně jeden term připojit k několika hradlům OR.

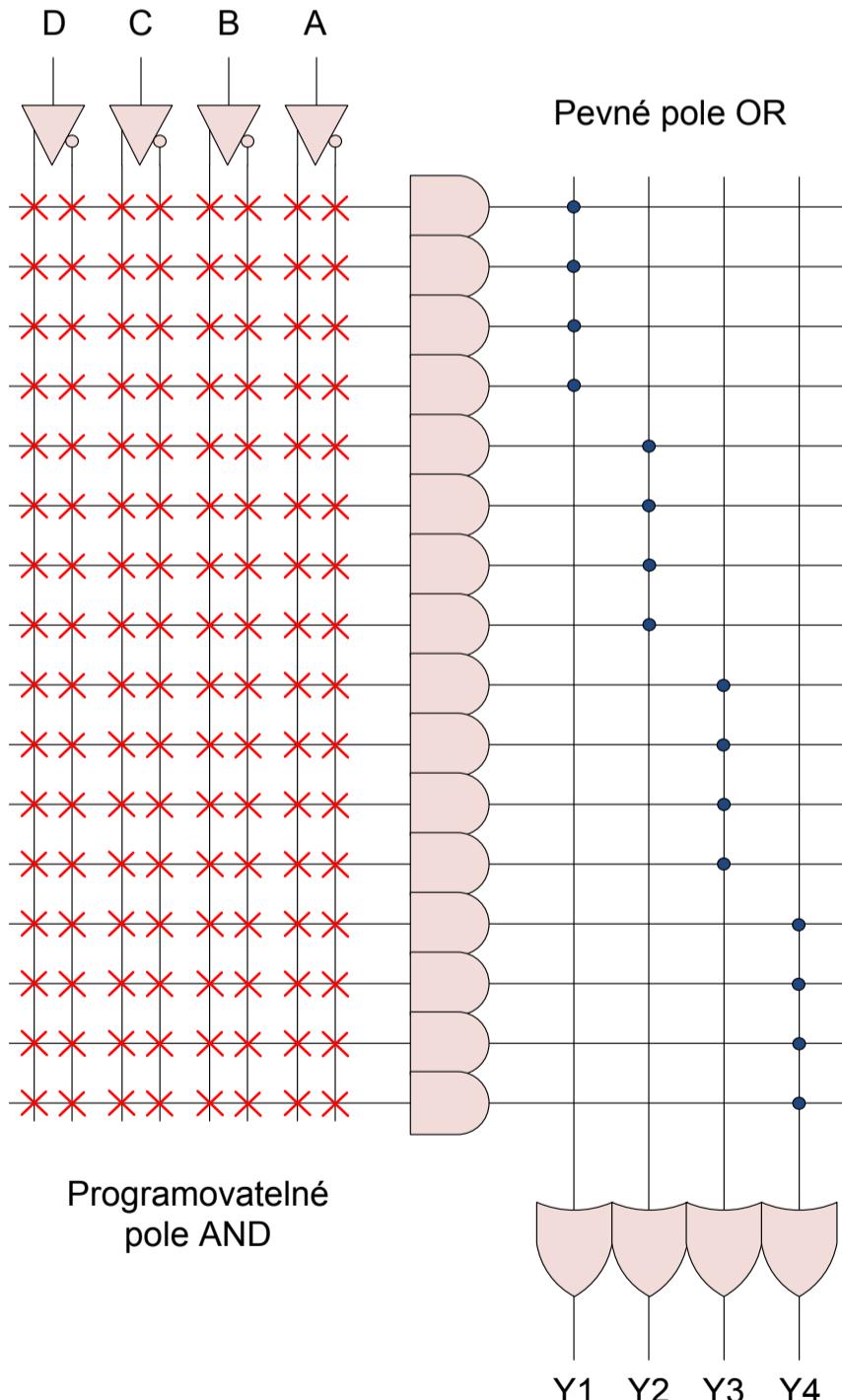
umožnila zkrácení doby přenosu signálu. Obvody PAL byly navrženy tak, aby "vypadaly" jako standardní obvody PROM a mohly tak být programovány standardními programátory obvodů PROM. Tím se výrobci obvodů PAL vyvarovali požadavků na dodatečné vývojové prostředí, jak tomu bylo v době uvedení na trh v případě FPLA obvodů.

44.1.2.4. PLD typu Simple Programmable Logic Device - SPLD

Obvody typu GAL (Generic Array Logic) patří do skupiny elektricky reprogramovatelných obvodů PLD (EPLD - Electrically Erasable Programmable Logic Device). Z hlediska klasifikace PLD obvodů lze obvody GAL charakterizovat jako obvody s programovatelným polem AND hradel a pevným polem hradel OR. Významná odlišnost od obvodů PAL spočívá v možnosti elektrického reprogramování a využití makrobuňky (Output Logic Macro-cell) na výstupech obvodu.



Obrázek 44.1.5.: Obecná struktura obvodu GAL



Obrázek 44.1.4.: Architektura obvodů PAL

Jednodušší architektura oproti v té době existujícím FPLA obvodům,

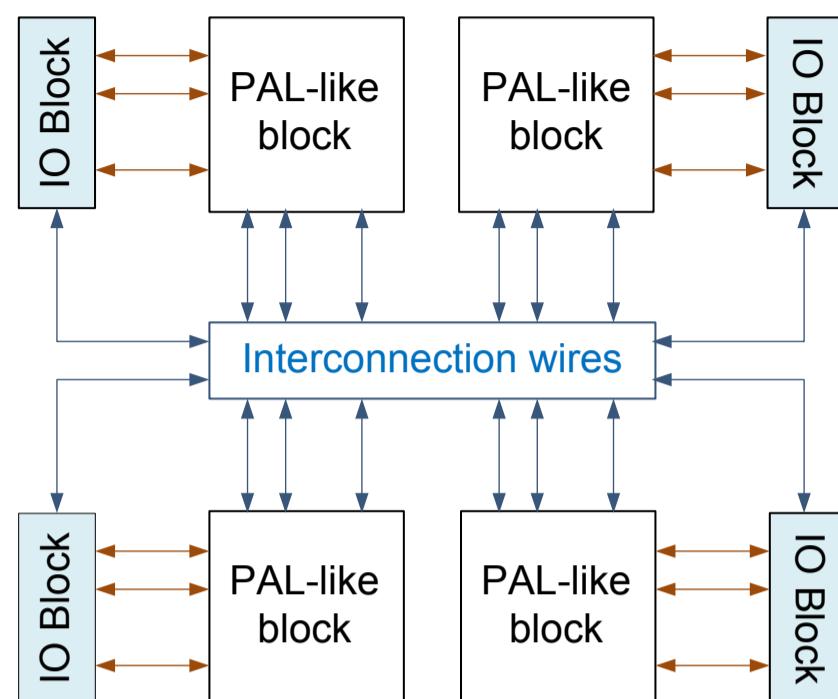
44.1.3. Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD

Obvody typu CPLD patří podobně jako obvody SPLD do skupiny elektricky reprogramovatelných PLD obvodů (EPLD). Většina CPLD obvodů je programovatelná v cílovém systému, nesou tedy i označení ISP (*In-system programming*). Tyto obvody jsou typické, podobně jako obvody GAL, svou programovatelnou maticí hradel AND následovanou hradlem OR a makrobuňkou. Na výstupu hradla OR je tak stejně jako u obvodů GAL formována pořadovaná logická funkce ve tvaru součtu součinů. Od obvodů GAL se však obvody CPLD liší hlavně velkým centrálním propojovacím polem. Makrobuňky jsou sdruženy do větších skupin a tvoří tzv. **funkční bloky** [Pino6, p 279]. Pro architekturu obvodu CPLD jsou charakteristické tyto čtyři struktury:

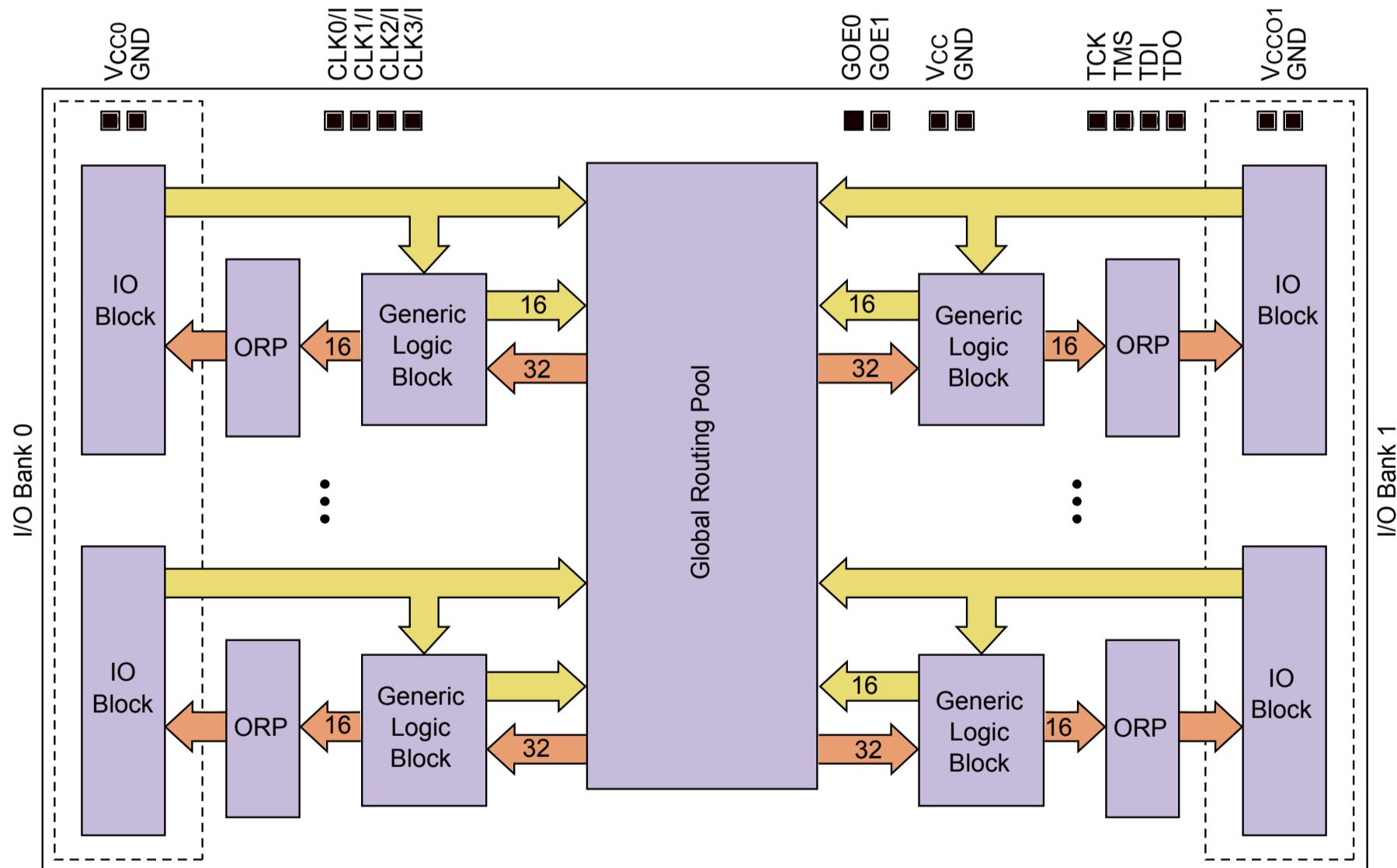
- velké centrální propojovací pole (*Global Routing Pool*),
- programovatelné funkční bloky (*Generic Logic Block - GLB*), uspořádané kolem propojovacího pole, sestávající z:
 - programovatelné matici AND,
 - několika makrobuňek,
 - alokátoru součinů,
- výstupní propojovací pole (*Output Routing Pool - ORP*),
- vstupní/výstupní bloky (*I/O Blocks*).

propojovací pole. Tím se všeobecně zlepší využití jak makrobuňek, tak výstupních obvodů.

Všechny vstupní/výstupní bloky a všechny makrobuňky lze spolu vzájemně propojit pomocí **centrálního programovatelného propojovacího pole**.



Obrázek 44.1.7.: Obecná struktura obvodu CPLD



Obrázek 44.1.6.: Architektura CPLD ispMACH4000 společnosti Lattice

Všechny výše uvedené stavební prvky mají u různých výrobců různá označení, jejich význam a funkce je však velmi podobná. Pomocí makrobuňek lze realizovat různě složité kombinační a sekvenční logické či paměťové funkce. Přes programovatelné **vstupní/výstupní bloky** lze přivádět vstupní signály z vývodů obvodu nebo naopak vyvádě výstupní signály. Na rozdíl od jednodušších SPLD, kde vstupní/výstupní obvody jsou přímo spojeny s makrobuňkou, jsou však u CPLD zásadně od makrobuňek odděleny a tvoří samostatný I/O blok, do kterého mohou výstupní signály z makrobuňek vstupovat přes programovatelné **výstupní**

44.1.4. Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA

44.1.5. Terminologie

- **PLA** — *Programmable Logic Array* nebo také **FPLA** *Field Programmable Logic Array*: Obvod obsahuje matici AND za nímž následuje matici OR, jež jsou obě programovatelné.
- **PAL** - *Programmable Array Logic*¹: Relativně jednoduchý PLD obvod obsahující programovatelnou matici AND, za níž následuje pevná matici OR (obr.44.1.4).
- **SPLD** — *Simple programmable logic device*: Označení je společné pro PLA a PAL struktury.
- **CPLD** — *Complex programmable logic device*: Název zahrnuje obvody jejichž složitost je někde mezi architekturami obvodů PAL a FPGA a nese rysy obou těchto architektur. Základním stavebním blokem je tzv. *makrobuňka*, která realizuje logický výraz ve tvaru normální disjunktivní formy.
- **FPGA** — *Field-Programmable Gate Array*: Obvody mají z programovatelných obvodů nejobecnější strukturu a obsahují nejvíce logiky. Základním stavebním blokem jsou logické buňky (logic elements; Altera), nebo také řezy (*slices*; Xilinx), jež jsou zpravidla sdruženy do větších logických bloků² (*logic array block*, LAB; Altera) resp. (*configurable logic block*, CLB; Xilinx). Logické buňky obsahují tzv. vyhledávací tabulku (*Look-up table*, LUT), která dovoluje realizovat jednoduché kombinační funkce. LUT má obvykle čtyři vstupní signály, které mají význam indexu (pointeru) do této tabulky. K propojení CLB slouží programovatelná propojovací struktura PI (*programmable interconnect*).

¹obchodní známka je v současnosti ve vlastnictví společnosti Lattice Semiconductor

²Výrobci FPGA obvodů používají vlastní názvosloví k popisu jejich architektur.

44.2. Dynamické parametry PLD

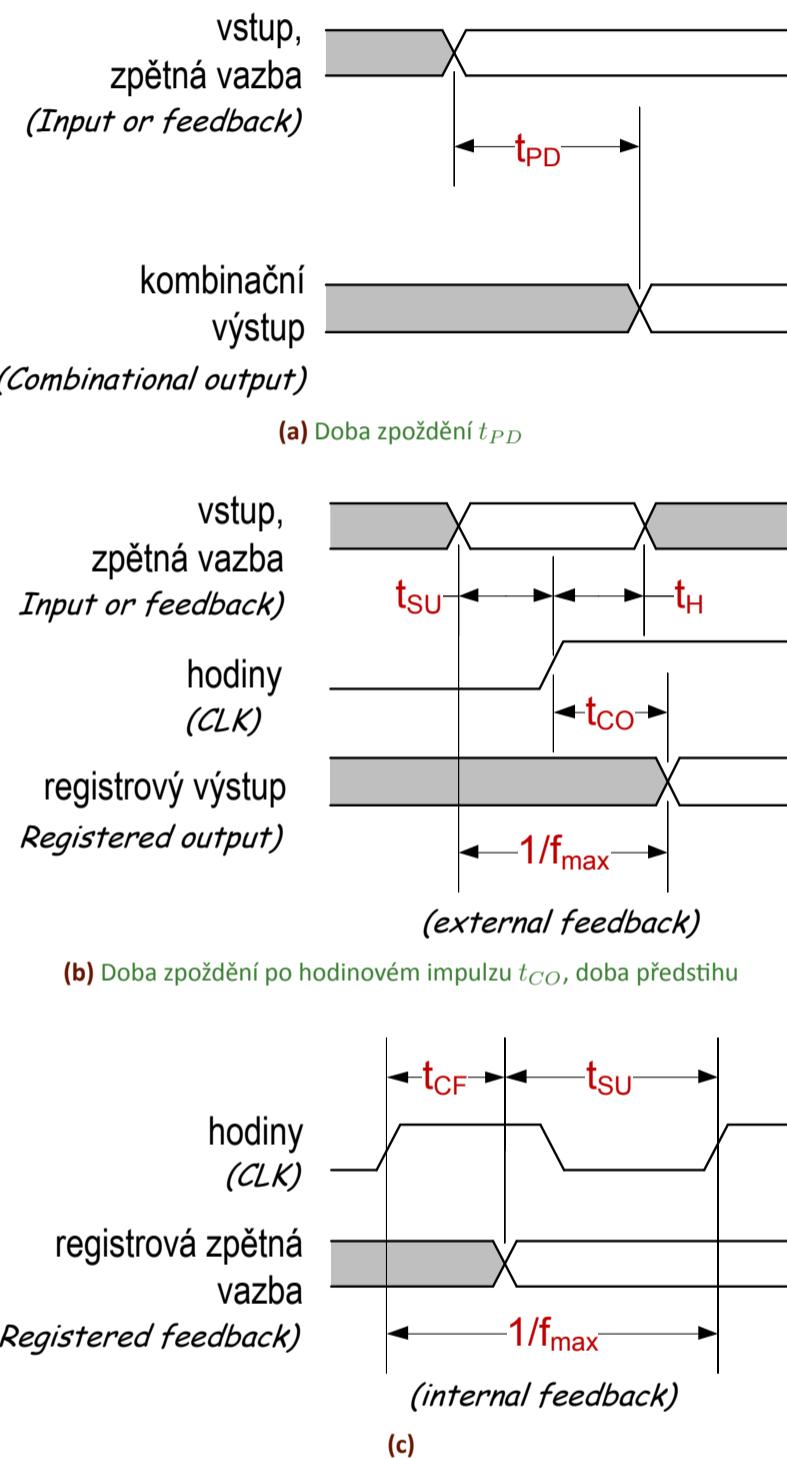
Programovatelné logické obvody mohou pracovat jako obvody kombinační, nebo častěji jako obvody sekvenční [Wak99, p 593]. Symboly pro doby jenž jsou dále popsány, se v různých firemních publikacích liší, význam však zůstáva.

- t_{PD} - *doba zpoždění* - ve funkci kombinačního obvodu t_{PD} je doba od změny signálů na vstupech obvodu do změny signálů na jeho výstupech. Je podstatná pro režim bez hodinových impulzů u ryze kombinačního obvodu. U sekvenčního obvodu *Mealyho* typu je to zpoždění obvodu v době mezi hodinovými impulzy,
- t_{CO} - *doba zpoždění po hodinovém impulzu* - doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu,
- t_{CF} - opět se jedná o zpoždění jako v předchozím případě, tj. je to doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu registru, jenž je ovšem veden jako zpětnovazební vstup. Běžně platí, že $t_{CF} < t_{CO}$ a pokud jej výrobce neuvádí, lze předpokládat $t_{CF} = t_{CO}$
- t_{SU} - *doba předstihu* - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní až do aktivní hrany hodinového impulzu,
- t_H - *doba přesahu* - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní po aktivní hraně hodinového impulzu,
- f_{max} - *maximální kmitočet hodinových impulzů* - Je to nejvyšší frekvence, na které zařízení může pracovat spolehlivě a je ekvivalentní k převrácené hodnotě minimální periody hodinových impulzů.

Dynamické parametry u programovatelných logických obvodů jsou závislé na vnitřních cestách signálů. U obvodů CPLD je situace jednodušší, neboť cesty signálů jsou do jisté míry pevně dány a jedná se jen o jejich výběr. Výrobci uvádějí korektní vztahy pro výše uvedené doby, kterými jsou respektovány logické zátěže a způsob využití vnitřních bloků. Složitější situace je u obvodů FPGA, kde cesty signálů nejsou předem definovány a v procesu návrhu budou teprve vyvtařeny. Jednotlivé doby proto musí dodatečně dopočítat návrhový systém [Pino6, p 288].

References

- [LŠS93] M. Líška, V. Šula, and J. Strelec. *Programovatelná logická pole*. Grada Publishing, spol. s.r.o., 1993, p. 456. ISBN: 80-85623-26-9 (cit. on pp. 231, 232).
- [Pino6] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on pp. 233, 235).
- [Wak99] J. F. Wakerly. *Digital Design Principles and Practices*. PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. 235).



Obrázek 44.2.1.: Základní dynamické parametry PLD: t_{PD} , t_{CO} , t_{CF} , t_{SU} , t_H , f_{max}

45. Jazyk VHDL

Obsah

45.1. Návrh číslicového obvodu	237
45.1.1. Popis číslicové funkce	237
45.2. Úvod	238
45.3. Základní vlastnosti jazyka VHDL	238
45.4. Logické úrovně	238
45.5. Souběžné příkazy	239
45.6. Sekvenční příkazy	239
45.7. Technologicky nezávislá část návrhu	239
45.7.1. Dynamicky řízené sekvenční obvody	239
45.7.2. Staticky řízené sekvenční obvody	239
45.7.3. Kombinační obvody	239
45.8. Knihovna LPM	239
45.8.1. Posuvný registr - lpm shiftreg	240

45.1. Návrh číslicového obvodu

45.1.1. Popis číslicové funkce

Máme-li představu o funkci a struktuře budoucího číslicového obvodu, nastupuje proces *zachycení návrhu* (design entry, design capture), při kterém je nutné naše představy přenést do počítačem zpracovatelné formy. Tuto úlohu, lze splnit na různých úrovních abstrakce [Šta10, s. 19]:

- **hradlové/schématické** - navrhujeme přímo kreslením schématu budoucího obvodu. Výhodou tohoto postupu je jeho srozumitelnost a zachycení skutečné podoby návrhu - co máme ve schématu je to, co se realizuje. Nevýhody nicméně převyšují výhody. Kreslení schéma je obvykle specifické pro zvolený obvod, protože často používáme struktury, které jsou k dispozici jen na příslušném PLD obvodu. Konverze do jiného obvodu, znamená překleslení schématu. Vlastní proces kreslení je pomalý a únavný, protože pracujeme na nízké úrovni abstrakce - kreslíme obvod hradlo po hradle. Chceme-li například realizovat stavový automat, musíme nejprve zminimalizovat jeho přechodovou a výstupní funkci a pak nakreslit schéma. Snadno se můžeme dostat do situace, kdy je nutné kompletní překreslení.
- **meziregistrových přenosů** - tzv. RTL (*Register Transfer Level*). RTL popis je dnes standardním prostřekdem pro popis číslicové funkce. Číslicové synchronní obvody se skládají ze dvou základních typů logických bloků: paměťových prvků (registru) a kombinačních funkcí. Na úrovni abstrakce, číslicový obvod popisujeme tak, že jednotlivé struktury popišme pomocí těchto dvou typů logiky a doplníme informaci o jejich vzájemném propojení (odkud, kam a přes jaké kombinanci logické funkce jsou přelévána data mezi registry). Popis obvodu je realizován v textové podobě pomocí zápisu ve speciálním programovacím jazyku (HDL - *Hardware Description Language*). Pro popis se používají nejčastěji jazyk VHDL a Verilog. Použití RTL úrovně má nesporné výhody: získáme technologicky nezávislý popis obvodu na relativně vysoké úrovni abstrakce, přičemž jeden řádek zdrojového kódu je v hardware reprezentován typicky desítkami/stovkami hradel. To zvyšuje produktivitu práce, zpřehledňuje vlastní návrh, zjednoduší přenos návrhu mezi různými technologiemi a zrychluje jak vlastní návrh, tak pozdější opravy. Jedinou nevýhodou je nevhodnost pro ryze asynchronní návrh, to ale není při práci s hradlovými poli omezující, neboť hradlová pole jsou určena právě pro synchronní číslicové obvody.
- **algoritrické** - neustále se zkracující délka návrhového cyklu spolu s rostoucí komplexitou navrhovaných systémů nutí návrháře používat stále vyšší úrovně abstrakce. Architektura na RTL úrovni je navrhována vždy s ohledem ke skutečnému časování obvodu a použití paralelizmu. Systém je na této úrovni narvržen s odpovídajícím počtem výpočetních jednotek, řídicích bloků, sběrnic, apod. Problém nastává v okamžiku, kdy v pozdějších fázích návrhu zjistíme, že navržená architektura nesplňuje očekávání. Právě odstranění informace o paralelismu a časování ze zdrojového kódu je přínosem *algoritrické syntézy*. Funkce bloku je popsána v některém z jazyků na "vyšší úrovni" - např. ANSI C, Handel-C, SystemC, nebo System Verilogu. Příslušný syntézní nástroj pak dostane informaci o počtu funkčních jednotek a časování ve formě jednoduchých omezení (například povolíme použití nejvýše dvou násobiček a dvou sčítáček) a na základě předloženého algoritmu vygeneruje RTL kód výsledného systému (datových cest i řídicích bloků). Každá změna v architektuře je triviální - zjistíme-li, že výpočetní výkon systému je příliš nízký, stačí jen znova spustit syntézní proces s jiným počtem aritmetických jednotek. Rychlosť celého procesu umožňuje vyzkoušet celou řadu alternativ architektury a najít nejhodnější kompromis mezi

plochou a rychlostí obvodu. Zjednodušuje se i verifikace. Použitelnost algoritmické syntézy zatím omezuje fakt, že výsledek není tak dobrý v porovnání s návrhem od profesionála.

45.2. Úvod

Název VHDL představuje akronym — VHSIC Hardware Description Language. Samo označení VHSIC je další akronym představující název projektu, v rámci něhož byl jazyk VHDL zpracován, a znamená Very High Speed Integrated Circuits. I když označení VHDL v tomto kontextu není příliš příležitostné, vžilo se a obecně se používá. Jazyk VHDL byl původně vyvinut především pro modelování a simulaci rozsáhlých systémů. Na mnoha jeho konstruktech je to znát, některé z nich nemají pro syntézu vůbec význam. Zde se však budeme zabývat především použitím jazyka VHDL k vytváření modelů určených pro syntézu číslicových systémů. České termíny budou v prvním výskytu zapsány tučně. Často tyto termíny nejsou ustálené, a proto budeme uvádět i jejich anglické ekvivalenty, které již většinou mají ustálenou podobu.

45.3. Základní vlastnosti jazyka VHDL

- Je to otevřený standard (*open standard*). K jeho použití pro sestavení návrhových systémů není třeba licence jeho vlastníka, jako je tomu u jiných jazyků HDL (například u jazyka ABEL). To je jeden z důvodů, proč je tento jazyk v návrhových systémech často používán.
- Umožňuje pracovat na návrhu, aniž je předtím zvolen cílový obvod. Ten může být zvolen až v okamžiku, kdy jsou známy definitivní požadavky na prostředí, v němž má navrhovaný systém pracovat, a je možno cílový obvod měnit podle potřeby při zachování textu popisujícího systém, může být zvolen obvod PLD nebo FPGA (*Device-independent design*).
- Je možno provést simulaci navrženého obvodu na základě téhož zdrojového textu, který pak bude použit pro syntézu a implementaci v cílovém obvodu. Zdrojový text je možno zpracovávat v různých simulátorech a v syntetizérech různých výrobců. Odsimulovaný text může být použit v dalších projektech s různými cílovými obvody, což je podporováno hierarchickou strukturou jazyka. Této vlastnosti jazyka se říká *přenositelnost (portability)* kódů.
- V případě úspěšného zavedení výrobku na trh lze popis modelu systému v jazyku VHDL použít jako podklad pro jeho implementaci do obvodů ASIC vhodných pro velké série.

Některé námitky proti VHDL:

- Jazyk VHDL je dosti „upovídáný“, jazykové konstrukty nejsou navrženy tak, aby zdrojový text byl stručný a při popisu modelu určitého systému se setkáme s opakováním bloků stejného znění. Ty je však možno snadno vytvářet využitím kopírování a podobných možností současných editorů.
- V jazyku VHDL je možno vytvořit neefektivní konstrukce, efektivnost nebo její nedostatek nemusí být na první pohled ze zdrojového textu patrné. To je však vlastnost i jiných jazyků vyšší úrovně a výsledná efektivnost konstrukce závisí nejen na kvalitě programových návrhových prostředků, ale také na zkušenosti konstruktéra (návrháře).

Základní verze jazyka VHDL byla přijata jako standard IEEE číslo 1076 v roce 1987. Konstrukty odpovídající tomuto standardu se označují jako konstrukty jazyka VHDL-87. Podobně jako další standardy IEEE, i tento standard se v pravidelném pětiletém intervalu aktualizuje. Upravená verze standardu byla přijata v roce 1993, odkazuje se na ni jako na standard VHDL-93.

Vedle jazyka VHDL se setkáme také s jazykem Verilog, který má podobné použití. Uvádí se, že jazyk VHDL je rozšířený zejména v Evropě, zatímco Verilog se používá hlavně v asijských zemích. V USA se používají oba tyto jazyky.

Vyjadřovací schopnosti jazyku VHDL jsou dány příkazy, jenž mají souběžný nebo sekvenční charakter. Některé příkazy jsou jen jednoho druhu, jiné mohou být obojího druhu. Toto rozlišení se týká toho, ve které části popisu se příkazy mohou používat. Pro stručnost budeme dále mluvit o souběžných a o sekvenčních příkazech, i když jde spíše o to, kde se tyto příkazy nacházejí či mohou nacházet. V následujících kapitolách jsou příkazy rozděleny do dvou velkých skupin:

- **Souběžné příkazy (concurrent statements):** zapisují se v textu jazyka mimo procesy, definice funkcí a procedur.
- **Sekvenční příkazy (sequential statements):** slouží k algoritmickému vyjádření popisu. Tyto příkazy mohou být zapsány jen v procesech, v definicích funkcí a procedur.

45.4. Logické úrovně

Od jazyka určeného k návrhu a modelování integrovaných obvodů očekáváme schopnost modelovat základní logické úrovně - *log. 0 a log. 1*. Ty jsou pro jednoduché simulace postačující, ale již například pro návrh a

modelování třístavových budičů sběrnic potřebujeme mít možnost pracovat se stavem vysoké impedance Z. Dalším jednoduchým příkladem může být modelování zkratu na sběrnici, který může vzniknout v situaci, kdy dva budiče budí jeden spoj opačnými logickými úrovněmi. Balíček `std_logic_1164` knihovny IEEE pro tyto účely zavádí *devítistavovou logiku*.

- 'U': uninitialized. This signal hasn't been set yet.

- 'X': unknown. Impossible to determine this value/result.

- '0': logic 0

- '1': logic 1

- 'Z': High Impedance

- 'W': Weak signal, can't tell if it should be 0 or 1.

- 'L': Weak signal that should probably go to 0

- 'H': Weak signal that should probably go to 1

- '-': Don't care.

Všimněme si, že tato knihovna je připojena všemi ukázkovými kódů. Logický signál, který má popsaných hodnot nabývat, je pak definován jako signál typu `std_logic`, nebo `std_logic_vector` pokud se jedná o sběrnici. Pomocí nich modelujeme standardní propojení logických prvků, tj. "obyčený kus drátu". [Šťa10, s. 51]

45.5. Souběžné příkazy

45.6. Sekvenční příkazy

45.7. Technologicky nezávislá část návrhu

V následujícím textu jsou uvedeny základní způsoby popisu chování sekvenčních (např. klopné obvody) a kombinačních obvodů. Klopné obvody jsou rozdělovány na **hranově citlivé** a **úrovňově citlivé**. Je možné je popsat jako *jednobitové paměti*. Hranově citlivý klopny obvod je obvod řízený změnou na vstupu synchronizace (*clock input*). Bývá označován "flip-flop". Úrovňově citlivý klopny obvod je nazýván v české terminologii **zdrž**. Obvykle je však srozumitelný anglický název "*latch*".

45.7.1. Dynamicky řízené sekvenční obvody

Obvody řízené změnou signálu na vstupu synchronizace jsou ve VHDL popisovány použitím příkazu `process` a podmíněného příkazu `if`. V podmíněném příkazu jsou rozlišovány události (events), které znamenají vzestupnou hranu nebo sestupnou hranu signálu na vstupu synchronizace. Při popisu je možné použít dvou různých zápisů, ve kterých se objevuje atribut události synchronizačního signálu `clk` `clk'event` nebo volání funkce.

- `(clk'event and clk='1')` vzestupná hraná signálu
- `(clk'event and clk='0')` sestupná hraná signálu
- `rising_edge(clk)` volání funkce vzestupné hrany
- `falling_edge(clk)` volání funkce sestupné hrany

Uvedené příklady ukazují možnosti vyjádření vzestupné a sestupné hrany ve VHDL. Vyjádření pomocí atributu je častěji používané, protože tento konstrukt je rozeznatelný při syntéze obvodového řešení. Nicméně použití volání funkce je výhodnější při simulaci, protože nastává pouze při změně signálu `clk` z $0 \rightarrow 1$ a z $1 \rightarrow 0$, ale ne z $X \rightarrow 1$ nebo z $0 \rightarrow X$, které nepředstavují platný přechod z jednoho stavu do druhého. Devět hodnot signálu, které jsou označovány jako `std_logic` jsou určeny k modelování poruchových stavů logické sítě. Jsou to hodnoty '`U`', '`X`', '`0`', '`1`', '`Z`', '`W`', '`L`', '`H`', '-'.

45.7.2. Staticky řízené sekvenční obvody

V následujících odstavcích jsou popisovány klopné obvody řízené úrovní synchronizačního signálu, které jsou známé pod názvem **zdrž** (*latch*).

45.7.3. Kombinační obvody

45.8. Knihovna LPM

Knihovna **LPM** (angl. *Library of Parametrized module*) obsahuje parametrisovatelné moduly jako jsou hrada, čítače, multiplexory, klopné obvody, aritmetické a paměťové funkce.

Standard LPM byl navržen v roce 1990 jako jedna z monžností pro efektivní návrh číslicových systémů do odlišných technologií, jako jsou např. obvody PLD, hradlová pole a standardní buňky. Předběžná verze standardu vyšla v roce 1991, další úprava předběžné verze pak v roce 1992. Standard byl přijat organizací EIA (angl. *Electronic Industries Alliance*) v dubnu roku 1993 jako doplněk do standardu EDIF.

EDIF je formát pro přenos návrhu mezi návrhovými nástroji různých výrobců. Formát EDIF popisuje syntaxi, která reprezentuje logický netlist. LPM do něj pak přidává množinu funkcí, která popisuje logické operace netlistu. Před rozšířením o LPM musel každý EDIF netlist typicky obsahovat technologicky specifické logické funkce, které zabraňovaly tomu, aby byl návrh ve větší míře nezávislý na cílové technologii [Pino6, s. 72].

Jméno	Popis	komentář	
data[]	Data input to the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM _W 33	31
clock	Positive-edge-triggered clock	Vstup hodinového signálu. 35 36	34
enable	Clock enable input	Blokuje hodinový signál. 37 38	
shiftin	Serial shift data input	Pro funkci je nutné použít alespoň signálů data[], asset, aclr, 49 se a/nebo shiftin. 41	30 39
load	Synchronous parallel load	(1) load operation (podmínka: enable) shift operation (výchozí). 44	42 43
aclr	Asynchronous clear input	Signál aclr má vyšší prioritu než signál 45 46 47	45
asset	Asynchronous set input	Naplní registr g[] hodnotou LPM _{AV} 48 49	48
sclr	Synchronous clear input	Signál sclr má vyšší prioritu než signál 50 51	50
sset	Synchronous set input	Naplní registr g[] hodnotou LPM _{SV} 52 53	52
q[]	Data output from the shift register	Šířku registru určuje parametr LP Vyžaduje shiftout. 54	54
shiftout	Serial shift data output	Vyžaduje registr q[]. 55 56	55

Tabulka 45.8.1.: Popis portů komponenty lpm_shiftreg.

45.8.1. Posuvný registr - Ipm shiftreg

```

operation; low (o): shift operation.
load : in std_logic := '0';
-- Asynchronous clear input.
aclr : in std_logic := '0';
-- Asynchronous set input.
aset : in std_logic := '0';
-- Synchronous clear input.
sclr : in std_logic := '0';
-- Synchronous set input.
sset : in std_logic := '0';
-- Data output from the shift register.
q : out std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0);
-- Serial shift data output.
shiftout : out std_logic
;
LPM_SHIFTREG;

hitecture LPM_SYN of LPM_SHIFTREG is
FUNCTION DECLARATION
ction conv_STR_to_VECT (str : string) return
std_logic_vector is
-- conversion string to std_logic_vector
variable len      : integer := str'length;
variable ivalue : std_logic_vector(lpm_width+4
downto 0) := (others => '0');
variable digit   : std_logic_vector(3 downto 0) :=
(others => '0');
variable ten     : std_logic_vector(3 downto 0) :=
"1010";
begin
if (str /= "UNUSED") then
for i in 1 to len loop
case str(i) is
when '0' => digit := "0000";
when '1' => digit := "0001";
when '2' => digit := "0010";
when '3' => digit := "0011";
when '4' => digit := "0100";
when '5' => digit := "0101";
when '6' => digit := "0110";
when '7' => digit := "0111";
when '8' => digit := "1000";
when '9' => digit := "1001";
when others =>
    ASSERT FALSE
    REPORT "Illegal character "& str(i) & " in string parameter!"
    SEVERITY ERROR;
end case;
ivalue(lpm_width+3 downto 0) :=
unsigned(ivalue(lpm_width-1 downto 0)) *
unsigned(ten) + unsigned(digit);
end loop;
end if;
return ivalue(lpm_width-1 downto 0);
conv_STR_to_VECT;

SIGNAL DECLARATION
inal i_q : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0)
:= (OTHERS => '0');
inal init          : std_logic := '0';
inal tmp_init       : std_logic := '0';
inal i_shiftout_pos : natural := lpm_width-1;

begin
PROCESS DECLARATION
-- basic error checking for invalid parameters
MSG: process
begin
if (lpm_width <= 0) then
    ASSERT FALSE
    REPORT "Value of lpm_width parameter must be greater than 0!";
end if;
end process;
end;

```

```

94      SEVERITY ERROR;
95      end if;
96      wait;
97  end process MSG;
98
99 process (tmp_init)
100 begin
101   if (tmp_init = '1') then
102     init <= '1';
103   end if;
104 end process;
105
106 process (clock, aclr, aset, init)
107   variable avalue : std_logic_vector(lpm_width-1
108                                         downto 0):= conv_STR_to_VECT(lpm_avalue);
109   variable svalue : std_logic_vector(lpm_width-1
110                                         downto 0):= conv_STR_to_VECT(lpm_svalue);
111   variable pvalue : std_logic_vector(lpm_width-1
112                                         downto 0):= conv_STR_to_VECT(lpm_pvalue);
113 begin
114   -- INITIALIZE TO PVALUE --
115   if (init = '0') then
116     if (lpm_pvalue /= "UNUSED") then
117       i_q <= pvalue;
118     end if;
119     if ((lpm_direction = "LEFT") or (lpm_direction
120                                     = "UNUSED")) then
121       i_shiftout_pos <= lpm_width-1;
122     elsif (lpm_direction = "RIGHT") then
123       i_shiftout_pos <= 0;
124     else
125       ASSERT FALSE
126       REPORT "Illegal lpm_direction property value"
127           for LPM_SHIFTREG!";
128       SEVERITY ERROR;
129     end if;
130     tmp_init <= '1';
131   elsif (aclr = '1') then
132     i_q <= (OTHERS => '0');
133   elsif (aset = '1') then
134     if (lpm_avalue = "UNUSED") then
135       i_q <= (OTHERS => '1');
136     else
137       i_q <= avalue;
138     end if;
139   elsif (rising_edge(clock)) then
140     if (enable = '1') then
141       if (sclr = '1') then
142         i_q <= (OTHERS => '0');
143       elsif (sset = '1') then
144         if (lpm_svalue = "UNUSED") then
145           i_q <= (OTHERS => '1');
146         else
147           i_q <= svalue;
148         end if;
149       elsif (load = '1') then
150         i_q <= data;
151       else
152         if (lpm_width < 2) then
153           i_q(0) <= shiftin;
154         elsif (lpm_direction = "LEFT") then
155           i_q <= (i_q(lpm_width-2 downto 0) &
156                   shiftin);
157         else
158           i_q <= (shiftin & i_q(lpm_width-1
159                               downto 1));
160         end if;
161       end if;
162     end if;
163   end if;
164 end process;
165
166 q <= i_q;

```


Část XVIII.

Elektromagnetická kompatibilita

46. Vlastnosti plošných spojů

Část XIX.

C

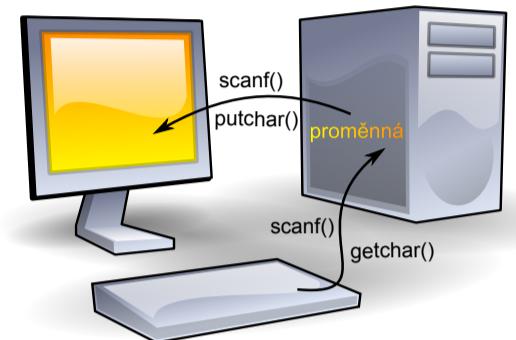
47. Terminálový vstup a výstup

Obsah

47.1. Hlavičkový soubor stdio.h	249
47.2. Standardní vstup a výstup znaku	249
47.3. Standardní vstup a výstup řetězců	250
47.4. Formátovaný standardní vstup a výstup	250
47.5. Souhrnné cvičení	250

Jazyk C, narodil od Pascalu, nedefinuje žádnou I/O (vstup-ně/výstupní -Input/Output) operaci jako část jazyka. Nezbytné vstupy a výstupy jsou řešeny tak, že standardní knihovna obsahuje několik funkcí, které I/O zajišťují.

Nejvíce strojově závislé akce jsou I/O operace a tímto způsobem se tedy důsledně oddělují strojově závislé a strojově nezávislé části jazyka. Tato skutečnost je pak významným přínosem při vytváření komplikátoru pro jiný počítač.



Obrázek 47.0.1.: Operace pro terminálový vstup a výstup

47.1. Hlavičkový soubor stdio.h

Aby bylo možno správně používat všechny funkce pro vstupu a výstupu, je nutné na začátku programu připojit "popis" těchto funkcí. Ten se nachází v hlavičkovém (*header*) souboru stdio.h:

`#include <stdio.h> //zde není středník`

Od tohoto okamžiku je pak možné používat dále popsané funkce.

47.2. Standardní vstup a výstup znaku

Výstup jednoho znaku zajišťuje putchar() a vstup jednoho znaku funkce getchar().

- `int putchar(int c);`
- `int getchar(void);`

Obě funkce pracují s proměnnými `int` a ne `char`.

```
1  ****  
2  /* Cteni_tisk_znaku.C */  
3  /* Cteni a tisk znaku */  
4  /* P. Herout 10.1991 */  
5  ****  
6  #include <stdio.h>  
7  
8  main()  
9  {  
10    int c;  
11  
12    printf ("\nZadej znak: ");  
13    c = getchar () + 1;  
14    printf ("%c (ASCII %d)\n", c, c);  
15 }
```



Výpis 47.1: Cteni_tisk_znaku.c Čtení a tisk znaku ze standardního vstupu na standardní výstup.

Příklad 47.2.1. Čtení znaku ze standardního vstupu a jejich zápis na standardní výstup ukazuje následující program, představující jednoduchou variantu příkazu kopírování souboru (nutno ovšem přesměrovat vstup a výstup).



```

1  /*************************************************************************/
2  /* CPY.C
3  /* Copy character
4  /*************************************************************************/
5
6 #include <stdio.h>
7
8 int main(void)
9 {
10    int c;
11
12    while ((c = getchar()) != EOF)
13        putchar(c);
14    return 0;
15 }

```

```

28    task = BASE + index + i;
29    printf("%c\t%d\t", task, task);
30    }
31    printf("\n");
32    index += 2;
33 } /* end while */
34
35 while (!kbhit());
36 return 0;
37 }

```

Výpis 47.3: ASCII.c Generuje ASCII tabulkou na terminálu.

Výpis 47.2: CPY.c Kopíruje znak ze standardního vstupu na standardní výstup.

47.3. Standardní vstup a výstup řetězců

Standardní vstup a výstup řetězců je jednoduchou nadstavbou nad čtením znaku. Obě funkce,

- `char *gets(char *s);`
- `int puts(const char *s);`

pracují s řetězci. gets() načte do znakového pole vstupní řetězec az do konce řádku, symbol '\n' není do znakového pole zapsán. Ukazatel na pole (načtený řetězec) je rovněž návratovou hodnotou. Chybu signalizuje návrat NULL. puts() zapíše řetězec na výstup a přidá přechod na nový řádek '\n'. Chybu představuje návratové EOF, jinak vrací kladné cele číslo.

Jednoduchost použití skrývá velké nebezpečí. Funkce gets() nemá informaci o délce oblasti vymezené pro čtený řetězec. Je-li oblast kratší, než vstupní řádek, dojde jeho načtením velmi pravděpodobně k přepsání paměťové oblasti související s vyhrazenou pamětí. A to se všemi důsledky z toho vyplývajími.

47.4. Formátovaný standardní vstup a výstup

47.5. Souhrnné cvičení

Příklad 47.5.1. Vytvořte program, který vygeneruje ASCII tabulkou se čtyřmi sloupcí ve formátu [znak/kód/znak/kód]. Rozsah tabulky definujte pomocí dvou symbolických konstant MIN_ASCII, MAX_ASCII.

```

1  /*************************************************************************/
2  /* ASCII.C
3  /* Generate ASCII table
4  /*************************************************************************/
5 #include <stdio.h>
6 #include <conio.h>
7
8 #define MIN_ASCII 32
9 #define MAX_ASCII 127
10#define BASE      '_'
11#define TABLE_HEADING \
12     "\tASCII\tASCII\nChar\tCode\tChar\tCode\n"
13
14 char ascii_table_tittle []= "uuuuuuASCIIUCODEUTABLE";
15
16 main()
17 {
18    int index = 0, i, task = 0;
19    printf("%s\n", ascii_table_tittle);
20    printf("-----\n");
21    printf("%s", TABLE_HEADING);
22    printf("=====\\n");
23
24    while (task < MAX_ASCII)
25    {
26        for (i = 0; i < 2; i++)
27        {

```



48. Pointery

Obsah

48.1. Základy práce s pointery 251

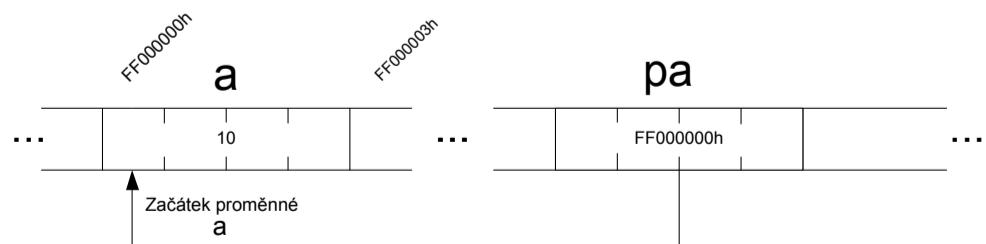
Pointery (též ukazatele nebo směrníky) jsou "srdce a duše jazyka C". Pointer je proměnná, jako každá jiná, pouze hodnota uložená v této proměnné má jiný význam. Pointer představuje *adresu paměti* a na této adrese se teprve ukrývá příslušná hodnota. Pointer je tedy proměnná uchovávající paměťovou adresu.[[Her94](#)]



48.1. Základy práce s pointery

Příklad 48.1.1. Vytvořte funkce kopírující prvky jednoho pole do druhého pomocí indexu i ukazatele.

```
1  /*************************************************************************/
2  /* soubor CPYARRY.C */
3  /*
4  * na funkciích kopirujicich prvky jednoho pole do druheho
5  */
6  /* ukazatele, tedy pointerovou aritmetiku
7  */
8
9 #include <stdio.h>
10
11 #define N      6
12
13 void copy_array1(int *a, int *b, int n)
14 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
15 {
16     register int i = 0;
17     for (; i < n; i++)
18         b[i] = a[i];
19 }
20
21 void copy_array2(int *a, int *b, int n)
22 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
23 {
24     while (n-- > 0)
25         *b++ = *a++;
26 }
27
28 void print_array(int *p, int n)
29 // vytiskne celociselné pole o n prvcích
30 // zacne a skonci na novem radku
31 {
32     puts("");
33     while (n-- > 0)
34         printf("\t%d", *p++);
35     puts("");
36 }
37
38 int main()
39 {
40     int pole1[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
41         pole2[N], dim1;
42     dim1 = sizeof(pole1) / sizeof(int);
43     print_array(pole1, dim1);
```



Obrázek 48.1.1.: Princip ukazatele v paměti

```
43 copy_array1(pole1, pole2, N);
44 print_array(pole2, N);
45 copy_array2(pole1 + 3, pole2, N);
46 print_array(pole2, N);
47 return 0;
48 }
```

Výpis 48.1: CPYARRY.C Kopíruje prvky jednoho pole do druhého.

Výstup programu:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6
4 5 6 7 8 9
```

49. Preprocesor jazyka C

Obsah

49.1. Připojení externích souborů	253
49.2. Definice makra	253
49.2.1. Symbolické konstanty	253
49.2.2. Makra	253
49.3. Podmíněný překlad	253

Preprocesor interpretuje jednoduché direktivy pro vložení zdrojového kódu z jiného souboru (`#include`), definice makra (`#define`) a podmíněné vložení kódu (`#if`). C preprocesor přijímá tyto direktivy:

```
#define #elif #else #endif  
#error #if #ifdef #ifndef  
#include #line #pragma #undef
```

Tabulka 49.0.1.: Seznam platných direktiv jazyka C

49.1. Připojení externích souborů

49.2. Definice makra

Definice makra ve významu rozsahů polí je typickým příkladem použití preprocesoru. Ve zdrojovém textu se neodvoláváme na magická čísla, ale na vhodně symbolicky pojmenovaná makra, která zvýší čitelnost programu.

Pro větší přehlednost rozdělme makra na

- symbolické konstanty,
- makra

Klíčem nechť je skutečnost, že makro na rozdíl od symbolické konstanty má argumenty.

49.2.1. Symbolické konstanty

49.2.2. Makra

49.3. Podmíněný překlad

Preprocesor může během své činnosti vyhodnocovat, je-li nějaké makro definováno, či nikoliv. Při použití klíčového slova preprocesoru `defined` pak může spojovat taková vyhodnocení do rozsáhlejších logických výrazů. Argument `defined` nemusí být uzavřen do závorek. Může se však vyskytnout jen za `#if` nebo `#elif`. Například si ukažme složitější podmínku:

Část XX.

ANSI/C++

50. Přehled jazyka C++

Obsah

50.1. Objektově orientované programování	257
50.1.1. Třídy: první nahlédnutí	257
50.1.2. Některé rozdíly mezi C a C++	259
50.1.3. Úvod do přetěžování funkcí	260
50.1.4. Práce s ukazateli	261

C++ je rozšířená verze jazyka C. C++ zahrnuje vše, co je součástí jazyka C, a přidává podporu objektově orientovaného programování (zkráceně OOP). C++ navíc obsahuje mnohá vylepšení, a prvky, které z něj jednoduše dělají "lepší C", nezávisle na objektově orientovaném programování. Kromě několika málo zanedbatelných výjimek platí, že C je podmnožinou jazyka C++.

Poněvadž byl C++ vytvořen pro podporu OOP, začne následující podkapitola popisem OOP. Je důležité si uvědomit, že jazyka C++ může být použito i pro psaní programů, které nejsou objektově orientovány. Tato kapitola, kromě představení nejdůležitějších vlastností jazyka C++, diskuuje především o rozdílech mezi způsoby programování v C a v C++ [[Sch01](#), p. 20].

50.1. Objektově orientované programování

Objektově orientované programování je výkonný způsob jak přistupovat k úloze programování. Již od raných začátků bylo programování spojováno s rozličnými metodologiemi. V každém kritickém momentě během vývoje programování byly vytvářeny nové přístupy, které pomohly programátorům zvládat stále složitější programy. První programy byly vytvářeny pouhým nastavením přepínačů na panelu počítače. Tento postup byl vhodný pouze pro velmi malé programy. Později vytvořený jazyk symbolických instrukcí již umožňoval psaní delších programů. K dalšímu vývoji došlo v roce 1955, kdy byl vytvořen první programovací jazyk vysoké úrovně - FORTRAN.

S využitím programovacího jazyka vysoké úrovně byl programátor schopen psát programy o délce několika tisících řádků. Nejstarší metodou použitou pro programování byl *ad hoc* přístup "všechno jde". Jestliže to bylo přípustné pro relativně krátké programy, pak u rozsáhlých programů to vedlo k vytváření nečitelných a nezvládnutelných "špagety kódů"

Eliminaci "špagety kódů" umožnil až vznik *strukturovaných programovacích jazyků* v šedesátých letech. Byly to jazyky Algol a Pascal. Volně lze interpretovat, že je-li jazyk C strukturovaný, pak typ programování, které v něm provádíme, by se mohl označit jako strukturované programování. Strukturované programování se opírá o dobře definované řídící struktury, bloky kódů, vyloučení příkazů GOTO, lokální (stand-alone) podprogramy, které podporují rekurzi, a lokální proměnné.

Přestože strukturované programování přinášelo výborné výsledky, když bylo použito pro středně složité programy, v mnoha bodech zklamalo, když program přesáhl určitou velikost. K tomuto účelu bylo vytvořeno objektově orientované programování. OOP vzalo nejlepší myšlenky včleněné do strukturovaného programování a zkombinovalo je s výkonnými novými koncepty, které dovolují organizovat programy mnohem efektivněji.

Obecně všechny OOP jazyky sdílejí tři definované vlastnosti:

- zapouzdření (encapsulation),
- polymorfismus (polymorphism),
- dědičnost (inheritance).

50.1.1. Třídy: první nahlédnutí

Snad nejdůležitějším samostatným prvkem jazyka C++ je **třída**. Je to mechanismus používaný pro vytváření objektů. Jako taková, je třída srdcem mnoha prvků jazyka C++. Třídy jsou pro programování v C++ tak významné, že je vhodné předložit na tomto místě jejich stručný přehled.

Definice 50.1.1 (Třída). Třída je základním obecným pojmem klasifikace, jak při návrhu uspořádávat informace do smysluplné entity. Základním

pojmém je objekt, **instance třídy**, jako konkrétní případ realizace předpisu. Objekt si „pamatuje“ svůj stav (v podobě **dat** čili **atributů**) a zveřejněním některých svých operací (nazývaných **metody**) poskytuje rozhraní, jak s ním pracovat. Při používání objektu nás zajímá, jaké operace (služby) poskytuje, ale ne, jakým způsobem to provádí - to je princip zapouzdření. Jestli to provádí sám nebo využije služeb jiných objektů, je celkem jedno. Vlastní implementaci pak můžeme změnit (např. zefektivnit), aniž by se to dotklo všech, kteří objekt používají.

Abstrakce objektu, která v architektuře programu podchycuje na obecné úrovni podstatu všech objektů podobného typu, se nazývá **třída**. Třída je předpis, jak vyrobit objekt daného typu.

Příklad 50.1.1. Nechť má sousedka (chápejme ji jako objekt) má nějaké jméno, je nějak vysoká, umí chodit a umí mluvit. Totéž platí i pro mne. Mohu tedy při modelování těchto dvou objektů, sousedky a mě, abstrahovat od nepodstatných dílčích odlišností a díky této abstrakci vytvořit obecnou třídu Člověk, která bude mít atributy jméno a příjmení (obojí je nějaký řetězec znaků) a metody chodit a mluvit.

Třída je deklarována klíčovým slovem **class**. Syntaxe deklarace **class** je podobná její struktuře. V obecné formě vypadá takto

```
class jméno-řídy {
    // privátní-funkce a členy
public:
    // veřejné funkce a členy
} seznam-úobjekt
```

Seznam objektů je v deklaraci třídy nepovinný. Stejně jako struktura, se mohou objekty třídy deklarovat později. Zatímco jméno třídy je také nepovinné, z praktického hlediska je vlastně vždy potřeba. Je to proto, že se jméno třídy stává novým typem jména použitého k deklaraci objektů třídy.

Funkce a proměnné deklarované uvnitř třídy jsou označeny jako **členy této třídy**. Znamená to, že jsou přístupné pouze pro ostatní členy třídy. Pro deklaraci členů veřejné třídy se použije klíčové slovo **public** s dvojtečkou. Všechny funkce a proměnné deklarované za tímto specifikátorem jsou přístupné jak pro členy třídy, tak i pro další části programu, které obsahují třídu.

Toto je jednoduchá deklarace třídy:

```
class myclass{
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};
```

Tato třída má pouze jednu privátní proměnnou nazvanou a a dvě veřejné funkce **set_a()** a **get_a()**. Tyto funkce jsou deklarovány uvnitř třídy pomocí jejich **prototypů**. Funkce, které jsou deklarovány jako součásti třídy se nazývají **členské funkce**.

Jelikož je a privátní, není dostupné pro žádný kód vně **myclass**. Ovšem funkce **set_a()** a **get_a()** jsou členy **myclass**, takže mají k a přístup. **set_a()** a **get_a()** jsou deklarovány jako veřejné členy **myclass** a mohou být volány každou částí programu, která **myclass** obsahuje.

Ačkoliv jsou funkce **set_a()** a **get_a()** deklarovány v **myclass**, nejsou ještě definovány. Aby jsem definoval členskou funkci, musím spojit typové jméno třídy se jménem funkce. To se udělá uvozením jména funkce jménem třídy se dvojicí dvojteček. Dvojice dvojteček se nazývá **operátor rozlišení oblasti** (scope resolution operator). Následující příklad ukazuje, jak jsou členské funkce **set_a()** a **get_a()** definovány:

```
void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}
```

Jak **get_a()**, tak i **set_a()** mají přístup k a, které je privátní v **myclass**. Poněvadž **get_a()** i **set_a()** jsou členy **myclass**, mohou přímo přistupovat k jejím soukromým datům.

Obecně se pro definici členské funkce musí použít následující tvar:

```
re-type jméno-řídy :: jméno-funkce (seznam-úparametr)
{
    // tato funkce
}
```

Deklarace **myclass** nedefinuje žádný objekt typu **myclass**. Definuje pouze typ objektu, který bude vytvořen, když bude deklarován. Pro vytvoření objektu se použije jako specifikátor jméno třídy. Například tento řádek deklaruje dva objekty typu **myclass**:

```
myclass ob1, ob2; //toto jsou objekty typu myclass
```

Jakmile je vytvořen objekt třídy, může se program odkazovat na jeho veřejné členy pomocí tečkových operátorů bezmála takovým způsobem, jímž jsou prvky struktury zpřístupněny. Dle předcházející deklarace objektů volají následující příkazy **set_a()** pro objekty **ob1** a **ob2**:

```
ob1.set_a(10); // nastaví verzi ob1 na 10
ob2.set_a(99); // nastaví verzi ob2 na 99
```

Každý objekt obsahuje vlastní kopii všech dat deklarováných uvnitř třídy. Znamená to, že a náležející **ob1** je odlišné a různé od a navázaného na **ob2**.

Příklad 50.1.2. Tento program předvádí **myclass**, popsanou výše v textu. Nastavuje hodnoty a pro ob1 a ob2, a pak zobrazuje hodnotu a pro každý objekt.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass {
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};

void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}

int main()
{
    myclass ob1, ob2;
    ob1.set_a(10);
    ob2.set_a(99);

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}
```

Program by měl na obrazovce zobrazit hodnoty 10 a 99.

Příklad 50.1.3. V **myclass** z předchozího příkladu je a privátní. Znamená to, že k ní mohou přímo přistupovat pouze členské funkce z **myclass**. (To je důvodem, proč je vyžadována veřejná funkce **get_a()**). Tedy při pokusu o přístup k privátnímu členu třídy z některé části programu, která není členem třídy, objeví se při překladu chyba. Pokud je **myclass** definována tak, jak bylo předvedeno v předešlém příkladě, pak následující volání funkce **main()** zapříčiní chybu:

```
// Toto je fragment obsahující chybu.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
```



```

{
    myclass ob1, ob2;
    ob1.a = 10; // ERROR! Úžneme řistupovat
                 // k privátnímu členu
    ob2.a = 99; // dle čnelenských funkcí.

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}

```

Příklad 50.1.4. Stejně jako mohou existovat funkce veřejného členu, mohou existovat i proměnné veřejného členu. Jestliže například *a* bylo deklarováno ve veřejné části *myclass*, lze se na ně odkazovat z kterékoliv části programu, jak je předvedeno dále:

```

#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
public:
// nyní je a řvejně
int a;
// a nyní není řpoteba set_a() a get_a()
};

int main()
{
myclass ob1, ob2;

ob1.a = 10;
ob2.a = 99;

cout << ob1.a << "\n";
cout << ob2.a << "\n";

return 0;
}

```

Protože je v tomto příkladě *a* deklarováno jako veřejný člen *myclass*, je přímo přístupné z *main()*. Pro přístup k *a* je použit tečkový operátor. Obvykle, když se volá členská funkce nebo se přistupuje k členské proměnné z vnějšího prostředí mimo třídu, je nutná plná specifikace daná jménem objektu i s tečkovým operátorem následovaným jménem člena, aby bylo jasné, na kterého člena objektu se odkazuje.

Příklad 50.1.5. Aby byla ukázána síla objektů, následující program vytváří třídu pojmenovanou *stack*, která implementuje zásobník použitelný například pro uchování znaků:

```

#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklaruje třídu stack pro znaky
class stack{
    char stck[SIZE]; // uklada zásobník
    int tos; // index vrcholu zásobníku
public:
    void init(); // inicializace stack
    void push(char ch); // vložení znaku do stack
    char pop(); // vyjmout znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::init()
{
    tos = 0;
}

// Vložení znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }
}

```

```

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmout znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    stack s1, s2; // vytvoření dvou zásobníku
    int i;

    // inicializace zásobníku
    s1.init();
    s2.init();

    // vložení znaku do zásobníku
    s1.push('a');
    s2.push('x');
    s1.push('b');
    s2.push('y');
    s1.push('c');
    s2.push('z');

    // vyjmout znaku ze zásobníku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s1:" << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s2:" << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}
\end{lstlisting}

```

Program zobrazí následující výstupy:

```

Pop s1: c
Pop s1: b
Pop s1: a
Pop s2: z
Pop s2: y
Pop s2: x

```

Podívej se na program ještě jednou. Třída *stack* obsahuje dvě privátní proměnné: *stck* a *tos*. Pole *stck* uchovává znaky umístěné v zásobníku a *tos* obsahuje index horní úrovně zásobníku. Veřejné funkce zásobníku jsou *init()*, *push()* a *pop()* a slouží k inicializaci zásobníku, vkládání hodnoty a k vyjmání hodnoty. Uvnitř *main()* jsou vytvořeny dva zásobníky *s1* a *s2* a do každého z nich jsou vloženy tři znaky. Je důležité uvědomit si, že každý zásobníkový objekt je oddělený od druhého. To znamená, že znaky vložené do *s1* nemohou žádným způsobem ovlivnit znaky vložené do *s2*. Každý objekt obsahuje vlastní kopii *stck* a *tos*. To je základní princip pro pochopení objektů. Ačkoliv všechny objekty třídy sdílejí své členské funkce, každý objekt vytváří a udržuje svá vlastní data.

50.1.2. Některé rozdíly mezi C a C++

Ačkoliv je jazyk C++ rozšířenou množinou jazyka C, existují mezi nimi drobné rozdíly a bylo by dobré se s nimi na začátku seznámit. Předeším, když v C nemá funkce žádné parametry, její prototyp má v seznamu parametrů funkce slovo *void*. Například když v "céčku" funkce nazvaná *f1()* nemá parametry (a vrací *char*), pak její prototyp bude vypadat následovně:

```
char f1(void);
```

Přestože v C++ zůstává *void* stále jako volitelný, bude se prototyp pro *f1()* psát běžně takto:

```
char f1();
```

C++ se odlišuje od C tím, že je v něm specifikován prázdný seznam parametrů. Kdyby se předchozí prototyp objevil v programu C, pak se

to bude chápat, že o parametrech nebylo řečeno nic. V C++ to znamená, že funkce nemá parametry. Proto tedy v předchozím příkladě nebyl využit k deklaraci prázdného seznamu explicitně parametr void. (Použití parametru void k deklaraci prázdného seznamu parametrů není zakázáno; je to pouze nadbytečné. Jelikož většina programů C++ usiluje o téměř posvátném zanícením o výkonnost, neuvidíš témař nikdy, že by bylo void tímto způsobem použito.) Zapamatuj si, že v C++ jsou následující dvě deklarace zcela rovnocenné:

```
char f1();
char f1(void);
```

Další drobná diference mezi C a C++ spočívá v tom, že v programech C++ musí mít všechny funkce prototypy. Zapamatuj si, že v C jsou prototypy doporučeny, ale technicky jsou nepovinné. V C++ jsou však vyžadovány. Jak je patrné z příkladu v předchozí části, prototyp členské funkce obsažený v třídě slouží rovněž jako její obecný prototyp a žádný další samostatný prototyp již není požadován. Třetím rozdílem mezi C a C++ je, když je funkce deklarována aby vracela hodnotu, musí hodnotu opravdu vracet. Jestliže má totiž funkce jiný návratový typ než void, musí pak každý příkaz return uvnitř funkce obsahovat hodnotu. V C není vyžadováno, aby vracely hodnotu funkce, které nejsou void. Jestliže hodnota neexistuje, "vrací se" jakási nahodilá hodnota.

Jestliže v C nespecifikujete explicitně návratový typ funkce, předpokládá se návratový typ integer. V C++ bylo toto pravidlo potlačeno, a proto musíš explicitně deklarovat všechny návratové typy funkcí. Další rozdíl mezi C a C++ je, že v programech C budeš muset brát ohled na to, kde mohou být lokální proměnné deklarovány. V C mohou být lokální proměnné deklarovány pouze na začátku bloku před vsemi "výkonnými" příkazy. V C++ mohou být lokální proměnné deklarovány kdekoli. Výhodou tohoto přístupu je, že lokální proměnné mohou být deklarovány ta, kde budou poprvé použity, což může napomoci v prevenci před nechtěnými vedlejšími účinky.

Konečně také v C++ definuje datový typ **bool** pro uložení hodnot Boolean (popř. pravda/nepravda). C++ rovněž definuje klíčová slova **true** a **false**, která jsou jedinými hodnotami, které může hodnota typu Boolean nabývat. V C++ je výstupní hodnotou relačních a logických operátorů hodnota typu **bool** a všechny podmíněné příkazy musí hodnotu **bool** využívat. V C je hodnota **true** nenulová a hodnota **false** odpovídá nule. Tak je to i v C++, poněvadž při použití v booleánských výrazech je každá nenulová hodnota automaticky převedena na **true** a každá nulová hodnota je převedena na **false**. Funguje to i opačným směrem. Když je booleánská hodnota použita ve výrazech **integer**, pak se **true** převádí na 1 a **false** na 0. Přidání **bool** umožňuje důkladnější ověřování typů a poskytuje způsob, jak navzájem rozlišovat Boolean a **integer**. Využívání je samozřejmě nepovinné, ale **bool** je nejpohodlnější.

50.1.3. Úvod do přetěžování funkcí

Po třídách je snad nejdůležitější a vše postupující vlastností C++ přetěžování funkcí. Přetěžování funkcí nejen poskytuje mechanismus jímž C++ poskytuje jeden typ polymorfismu, ale také utváří základ, na němž může být programovací prostředí dynamicky rozšiřováno. Kvůli důležitosti přetěžování je v následujících odstavcích předložen stručný úvod.¹

V C++ mohou dvě nebo více funkcí sdílet stejné jméno, pokud se liší typy jejich argumentů nebo jejich počet anebo se liší obojí.

Je velmi snadné přetížit funkci: jednoduše deklaruješ a definuješ všechny požadované verze. Správnou verzi překladač automaticky vybere dle počtu nebo typu argumentů použitych při volání funkce.

Příklad 50.1.6. Následující program definuje tři funkce pro výpočet absolutní hodnoty nazvané **abs()** - pro každý typ dat jednu.

```
#include <iostream>
using namespace std;

// Přetízení abs() třemi způsoby
int abs(int n);
```

¹V C++ lze přetěžovat i operátory.

```
long abs (long n);
double abs (double n);

int main()
{
    cout << "Absolute value of -10" << abs(-10) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10L" << abs(-10L) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10.01" << abs(-10.01) << "\n";

    return 0;
}

// abs() pro hodnoty int
int abs(int n)
{
    cout << "In integer abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty long
long abs (long n)
{
    cout << "In long abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty double
double abs (double n)
{
    cout << "In double abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}
```

Překladač automaticky volá správně jednu ze tří verzí **abs()** dle typu dat, která jsou uvedena v argumentu. Program vytvoří následující výstup:

```
In integer abs() Absolute value of -10: 10
In long abs() Absolute value of -10L: 10
In double abs() Absolute value of -10.01: 10.01
```

Uvedený příklad je velmi jednoduchý, nicméně ukazuje význam přetěžování funkcí. Jelikož lze jediné jméno použít k popisu obecné třídy činností, je umělá složitost, která vyplývá z použití tří mírně odlišných jmen - v tomto případě **abs()**, **labs()** a **fabs()** - snadno eliminována.

Příklad 50.1.7.

```
#include <iostream>
using namespace std;

void date(char *date) // datum jako retezec
void date(int month, int day, int year) // datum jako cisla

int main()
{
    date("11/22/2010");
    date(11, 22, 2010 );
}

// Datum jako retezec.
void date(char *date)
{
    cout << "Date:" << date << "\n";
}

// Datum jako integer
void date(int month, int day, int year)
{
    cout << "Date:" << month << "/";
    cout << day << "/" << year << "\n";
}
```

Příklad 50.1.7 ilustruje jak může přetěžení funkce zajistit mnohem přirozenější přístup k funkci. Protože je poměrně běžné, že je datum reprezentováno buď řetězcem, nebo třemi celočíselnými hodnotami obsahující den, měsíc a rok, záleží jen na uživateli, aby vybral tu nejpohodlnější formu, dle dané situace

50.1.4. Práce s ukazateli

Příklad 50.1.8. Práce s ukazateli:

```
// Demonstrates the use of pointer declarations
// and operators.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int num=123;           // A regular integer variable.
    int *p_num;            // Declares an integer pointer.
    cout << "num is " << num << "\n"; // Prints value of
                                         // num.
    cout << "The address of num is " << &num << "\n";
                                         // Prints num's location.
    p_num = &num;           // Puts address of num in p_num,
                           // in effect making p_num point
                           // to num.
                           // No * in front of p_num.
    cout << "*p_num is " << *p_num << "\n"; // Prints value
                                         // of num.
    cout << "p_num is " << p_num << "\n"; // Prints
                                         // location
                                         // of num.

    return 0;
}
```

Výstup programu:

```
num is 123
The address of num is 0x28ff44
*p_num is 123
p_num is 0x28ff44
```

Příklad 50.1.9. Napište funkci swap která prohodí hodnoty dvou proměnných typu int. Výsledek funkce swap vytiskněte na výstupu terminálu.

```
// Program that includes a function that swaps
// any two integers passed to it
#include <iostream>
using namespace std;
void swap(int &num1, int &num2);
int main()
{
    int i=10, j=20;
    cout << "\n\nBefore swap, i is " << i << " and j is "
        << j << "\n\n";
    swap(i, j);
    cout << "\n\nAfter swap, i is " << i << " and j is "
        << j << "\n\n";
    return 0;
}

void swap(int &num1, int &num2)
{
    int temp;           // Variable that holds
                       // in-between swapped value.
    temp = num1;         // The calling function's variables
    num1 = num2;         // (and not copies of them) are
    num2 = temp;         // changed in this function.
    return;
}
```

Výstup programu:

```
Before swap, i is 10 and j is 20
```

```
After swap, i is 20 and j is 10
```

Příklad 50.1.10. Následující příklad ukazuje použití **ukazatele na funkci**. Program se nejprve zeptá, zda se má provádět sčítání nebo násobení. Podle této odpovědi vloží do proměnné operation ukazatel na funkci add nebo na funkci multiply. Dále zadáme dvě čísla, která se použijí jako parametry vybrané funkce.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int add(int a, int b)
{
    return a+b;
}
int multiply(int a, int b)
{
    return a*b;
}
int main()
{
    int (*operation)(int, int);
    int x, y, sel;
    cout << "We will add(1) or multiply(2)?";
    do {
        cin >> sel;
    } while (sel != 1 && sel != 2);
    if (sel == 1) operation = add;
    if (sel == 2) operation = multiply;
    cout << "Enter two integers:";
    cin >> x >> y;
    cout << "Result is " << operation(x, y) << endl;
    return 0;
}
```


51. Úvod do tříd

Obsah

51.1. Funkce konstruktor a destruktur 263

51.1. Funkce konstruktor a destruktur

Je zcela běžné, že některé části programu vyžadují inicializaci. Potřeba inicializace je mnohem častější, když se pracuje s objekty. K ošetření této situace poskytuje C++ funkci konstruktor, která může být vložena do deklarace třídy. Všechny inicializace, které je nutno na objektu provést, může automaticky vykonat konstruktor. Konstruktor má stejné jméno jako třída, jejíž je součástí a nemá návratový typ (není to ani povoleno). Následující příklad ukazuje krátkou třídu, jež obsahuje konstruktor.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

V tomto jednoduchém příkladě je hodnota a inicializována konstruktorem `myclass()`. Konstruktor je volán při vytváření objektu `ob`. Objekt je vytvářen tehdy, když se provádí jeho deklarační příkaz. V C++ je deklarační příkaz proměnné vlastně "příkazem činnosti". Když se programuje v C, lze deklarační příkazy považovat za zavádění proměnných. Ovšem v C++, poněvadž objekt může mít konstruktor, bude ve skutečnosti příkaz pro deklaraci proměnné vyvolávat celou řadu činností.

Pro globální objekty je konstruktor objektu volán jen jednou, když se program začíná poprvé spouštět. Pro lokální objekty je konstruktor volán pokaždé, když je prováděn deklarační příkaz. Doplňkem konstruktoru je destruktur. Tato funkce volána, když je objekt rušen. Když se pracuje s objekty, je běžné, že se musí provést v souvislosti s rušením objektu určité akce (např. uvolnění zabrané paměti). Následující třída již destruktur obsahuje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    ~myclass(); // destruktur
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
```

```

    a = 10;
}

myclass::~myclass()
{
    cout << "Destructing... \n"
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}

```

Destruktor třídy je volán, když je objekt rušen. Lokální objekty jsou rušeny, když odcházejí mimo oblast. Globální objekty jsou rušeny, když program končí.

Není možné získat adresu konstruktoru nebo destruktora.

Příklad 51.1.1. Třída *stack* vytvořená v příkladu 50.1.5 vyžadovala inicializační funkci k nastavení proměnné pro index zásobníku. To je přesně ten druh operací, pro něž byl konstruktor navržen. Zde je vylepšení verze třídy *stack*, která používá konstruktor pro automatickou inicializaci zásobníkového objektu po jeho vytvoření:

```

#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklarace tridy znakového objektu
class stack{
    char stck[SIZE]; // uklada zasobnik
    int tos; // index vrcholu zasobniku
public:
    stack() // konstruktor
    void push(char ch); // vlozeni znaku do stack
    char pop(); // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::stack()
{
    cout << "Constructing a stack\n";
    tos = 0;
}

// Vlozeni znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    // vytvori dva zasobniky, ktere se
    // automaticky inicializuj
}

```

```

    stack s1, s2;
    int i;

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push(a);
    s2.push(x);
    s1.push(b);
    s2.push(y);
    s1.push(c);
    s2.push(z);

    //vyjmuti znaku ze zasobniku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s1:" << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s2:" << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}

```

Je Vidět, že úloha inicializace je konstruktorem provedena automaticky lépe, než pomocí samostatné funkce, která by musela být explicitně volána programem. Když je inicializace provedena automaticky při vytváření objektu, eliminuje to možnost, že by kvůli výskytu chyby inicializace neproběhla. Je to další cesta, jak omezit složitost programu.

Příklad 51.1.2. Tento příklad předvádí nutnost existence nejen konstruktoru, ale i destruktoru. Vytváří se zde jednoduchá řetězová třída, nazvaná *strtype*, která obsahuje řetězec a jeho délku. Když je objekt *strtype* vytvořen, je mu přidělena paměť pro uložení řetězce a jeho počáteční hodnota je nastavena na 0. Když je objekt *strtype* zrušen, je paměť uvolněna.

```

#include <iostream>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
using namespace std;

#define SIZE 255

class strtype{
    char *p;
    int len;
public:
    strtype(); // konstruktor
    ~strtype(); // destruktur
    void set(char *ptr);
    void show();
};

// inicializace retezcového objektu
strtype::strtype()
{
    p = (char *) malloc(SIZE);
    if(!p) {
        cout << "Allocation error\n";
        exit(1);
    }
    *p = '\0';
    len = 0;
}

strtype::~strtype()
{
    cout << "Freeing p\n";
    free(p);
}

void strtype::set(char *ptr)
{
    if(strlen(p) >= SIZE) {
        cout << "String too big\n";
        return;
    }
    strcpy(p, ptr);
    len = strlen(p);
}

void strtype::show()
{
    cout << p << "-length:" << len;
}

```

```
    cout << "\n";
}

int main()
{
    strtype s1, s2;

    s1.set("This is a test.");
    s2.set("I like C++.");

    s1.show();
    s2.show();

    return 0;
}
```

Tento program používá pro přidělení a uvolnění paměti funkce `malloc` a `free`. Přestože to funguje perfektně, dále je ukázáno, že v C++ se používá jiný způsob pro dynamickou správu paměti.

Část XXI.

Elektrické měřicí systémy

52. LabView

Obsah

52.1. Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView	269
52.2. Základní části virtuálního přístroje	270
52.2.1. Čelní panel	270
52.2.2. Blokové schéma	270
52.2.3. Ikona a konektor	270
52.3. Práce s grafy	270
52.3.1. Rozdělení grafů	270
52.3.2. Datové struktury pro indikátory grafů	270

52.1. Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView

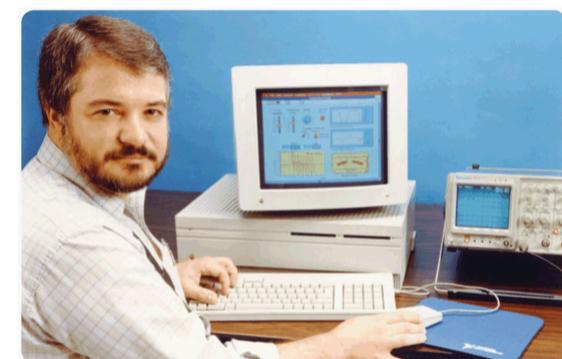
Základním záměrem vývojových pracovníků firmy National Instruments bylo dát do rukou inženýrů nástroj podobné efektivity pružnosti a síly jako je tabulkový procesor v rukou finančního manažera. Myšlenka, na níž stojí efektivita vývojového prostředí LabVIEW I daného na trh v roce 1986 pro platformu počítačů Macintosh je jednoduchá a vznikla původně na půdě Texaské univerzity ve skupince nadšenců kolem duchovního 'otce' tohoto systému Jeffa Kodovského. Vychází se zde z poznatku, že tím, kdo ví, co měřit, jak analyzovat a jak prezentovat data, je technik, který nemusí být sám zkušeným programátorem. Své představy tedy předává programátorovi obvykle v podobě blokového schématu. Programátor toto schéma potom převádí do syntaxe zvoleného programovacího jazyka, což je činnost poměrně zdlouhavá a náročná na přesnost a nepřináší již do procesu měření obvykle žádné další nové informace.

Cílem vývojového prostředí LabVIEW je to, aby blokové schéma bylo koncovým tvarem aplikace, který se již dále nebude převádět do textové podoby. LabVIEW (Laboratory Virtual Instruments Engineering Workbench) je obecným vývojovým prostředím s bohatými knihovnami pro vytváření aplikací zaměřených do oblasti měření ve všech fázích tohoto procesu - tj. sběru, analýzy a prezentace naměřených dat. Podporuje všechny čtyři základní způsoby sběru dat do počítače (z měřicích přístrojů přes rozhraní RS 232 nebo GPIB, ze zásuvných multifunkčních karet a ze systému na bázi VXI sběrnice). Poskytuje uživateli plnohodnotný programovací jazyk se všemi odpovídajícími datovými a programovými strukturami v grafické podobě - tzv. G jazyk (Graphical language)[[Žído2](#), p. 21].

LabVIEW je tedy vývojovým prostředím na úrovni např. C jazyka, ale na rozdíl od něj není orientován textově, ale graficky.. Výsledný produkt tohoto vývojového prostředí se nazývá virtuálním přístrojem (Virtual Instrument), protože svými projevy a činností připomíná klasický přístroj ve své fyzické podobě.

Virtuální přístroj jako základní jednotka aplikace vytvořené v tomto vývojovém prostředí obsahuje:

- interaktivní grafické rozhraní (Graphical User Interface - GUI) ke koncovému uživateli - tzv. čelní panel (Front Panel), který simuluje čelní panel fyzického přístroje. Obsahuje prvky pro ovládání a indikaci (knoflíky, tlačítka, LED indikátory, grafy ...). Tento čelní panel ovládá uživatel myší nebo z klávesnice.
- činnost virtuálního přístroje je dána jeho blokovým schématem (Block Diagram). Toto blokové schéma je vytvořeno ikonami reprezentujícími v koncových blocích ovládací a indikační prvky čelního panelu a ve svých uzlových blocích jsou to bloky zpracovávající procházející data. Tento blokový diagram je zdrojovou podobou každé aplikace.
- virtuální přístroj má hierarchickou a modulární strukturu. Lze jej používat jako celý program nebo jeho jednotlivé podprogramy, které se nazývají podřízenými virtuálními přístroji (SubVI). Součástí každého virtuálního přístroje je jeho ikona, kterou je prezentován v



Obrázek 52.1.1.: Jeff Kodovsky prezentuje ranou verzi programu LabVIEW. Psal se rok 1988. Kredit: National Instruments, [[11](#)]

blokovém schématu a konektor s přípojnými mísť pro vstupní a výstupní signály.

Těmito charakteristickými rysy naplňuje vývojové prostředí LabVIEW podmínky modulárního programování. Svou aplikaci dělí uživatel na jednotlivé úlohy, pro které vytváří dílčí virtuální přístroje (subVI) a z nich potom buduje celou aplikaci jejich spojováním do výsledného virtuálního přístroje. Na závěr lze celou aplikaci přeložit do EXE tvaru a provozovat nezávisle na vývojovém prostředí. Díky možnosti vyzkoušet funkci každého dílčího virtuálního přístroje nezávisle na jiných a díky bohaté škále ladících prostředků je ladění aplikace velmi snadné.

52.2. Základní části virtuálního přístroje

52.2.1. Čelní panel

52.2.2. Blokové schéma

52.2.3. Ikona a konektor

52.3. Práce s grafy

Součástí grafického rozhraní k uživateli tvořeného ve vývojovém prostředí LabVIEW čelním panelem virtuálního přístroje jsou velmi často i grafy. Z hlediska dělení objektů čelního panelu na prvky ovládací (směr toku informace od uživatele k systému) a indikační (směr toku informace od systému k uživateli) se jedná prakticky vždy o objekty indikační. Indikátor grafu tedy představuje dvourozměrný displej určený pro zobrazení jednoho nebo více průběhů.

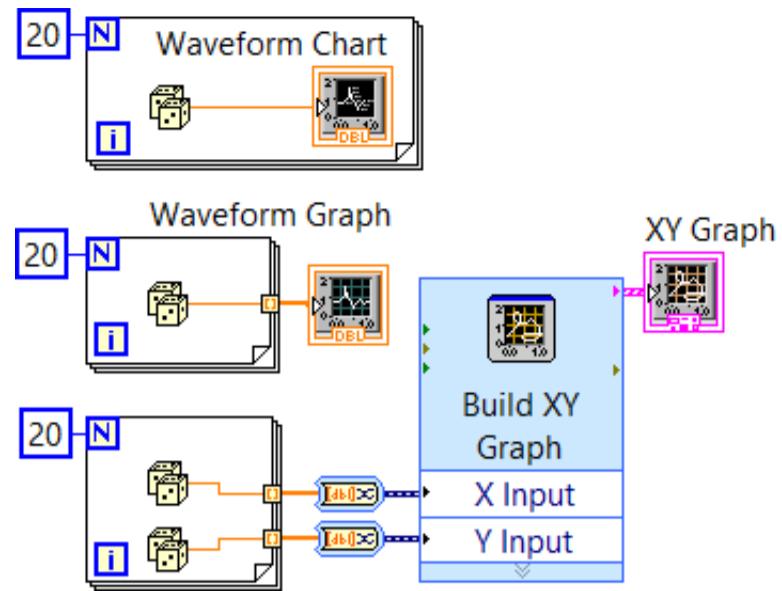
52.3.1. Rozdělení grafů

Ve vývojovém prostředí LabVIEW lze indikátory grafů zásadně rozdělit podle dvou hledisek:

- podle způsobu předávání dat a zobrazení průběhů v grafu:
 - statické indikátory (Graphs), kde pro zobrazení jednoho či více průběhů je nutné předem připravit data popisující celý průběh, popř. průběhy a předat je objektu statického grafu jako celek, graf je zobrazen jednorázově podle zadání dat pro osu nezávisle proměnné se statické grafy dělí na:
 - * průběhové (časové) grafy (waveform graph), u kterých se předpokládá rovnoramenné rozdělení bodů tvořících graf na ose x dané počátkem a přírůstkem - nejčastěji se tento typ grafu používá pro zobrazení časového průběhu veličiny
 - * XY grafy (XY graph), u kterých se předpokládá libovolné rozdělení bodů tvořících graf na ose x - s využitím tohoto typu grafu je možno zobrazit libovolný průběh v kartézských souřadnicích
 - registrační indikátory (CHARTS), kde vstupní data jsou předávána bod po bodu, popř. jako bloky dat představující úseky zobrazeného průběhu. Registrační graf postupně doplňuje průběh tak, jak jsou mu dodávána vstupní data.

- podle počtu dimenzí grafu:
 - grafy dvourozměrné - statické i registrační
 - grafy třírozměrné zobrazované v ploše - statické i registrační
 - grafy třírozměrné zobrazované v axonometrickém pohledu s možností natáčení

Jak již bylo řečeno, Waveform Chart se používá pro zobrazení postupně vznikajících průběhů - data pro zobrazení jsou na indikátor grafu posílána postupně. Pokud bychom VI z obrázku 52.3.1 opakovaně spouštěli, byl by vygenerovaný průběh připojen na konec předchozího průběhu. Tím by se graf postupně zaplňoval. Při definování tohoto typu indikátoru grafu je vhodné aby uživatel mimo jiné určil:



Obrázek 52.3.1.: Demonstrace rozdílu mezi regisračním grafem (Waveform chart) a statickým grafem (Waveform Graph). Pro úplnost je zde zastoupen i XY graph.

- šířku zobrazovaného průběhu v počtu bodů - lze si to představit jako okno dané šířky, přes které se dívám na zobrazovaný průběh – zadává se jako dolní a horní mez při popisu osy x
- šířku zapamatované části grafu v počtu bodů, která je obvykle větší než šířka zobrazovaného průběhu a umožňuje mi tak podívat se i na starší data, která se nevezou do zobrazované části průběhu – zadává se přes roletové menu v položce Chart History Length.

52.3.2. Datové struktury pro indikátory grafů

Podle zvoleného typu grafu je nutno pro něj připravit i vhodnou datovou strukturu odpovídající vybranému typu grafu a počtu požadovaných průběhů v něm zobrazených. V následujícím popisu datových struktur je použita tato konvence:

- $[y]$ představuje jednorozměrné pole prvků y
- $y1, y2, y3$ představuje cluster s prvky $y1, y2$ a $y3$

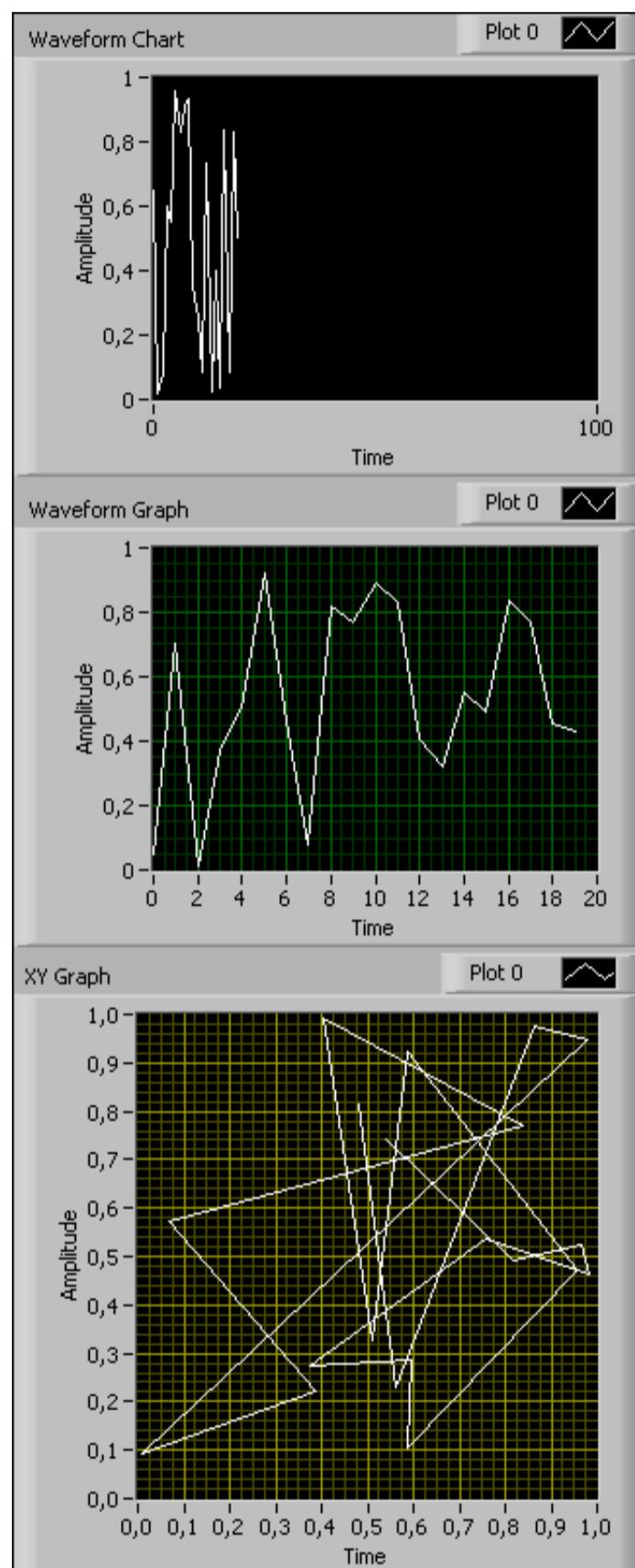
Pro programové vytvoření odpovídajících datových struktur se používá:

- v případě pole funkce Build Array nebo zapnutá indexace na výstupu z programových struktur cyklu typu FOR a typu WHILE.
- v případě clusteru funkce Bundle eventuálně funkce Bundle by Name

V případě složitějších datových struktur se tyto funkce kombinují, přičemž se postupuje od středu definice datové struktury k okrajům.

References

- [11] "Jeff Kodosky Predicts an Exciting Future for LabVIEW". In: NI-Instrumentation Newsletter 1396 (2011), p. 2 (cit. on p. 269).
- [Žídoz] J. Žídek. "Grafické programování ve vývojovém prostředí LabVIEW". In: (2002), p. 215 (cit. on p. 269).



Obrázek 52.3.2.: Demonstrace rozdílu mezi registračním grafem (Waveform chart) a statickým grafem (Waveform Graph). Pro úplnost je zde zastoupen i XY graph

Část XXII.

Výkonová elektronika

53. Měniče s vnější komutací

Obsah

53.1. Takt a komutace 275

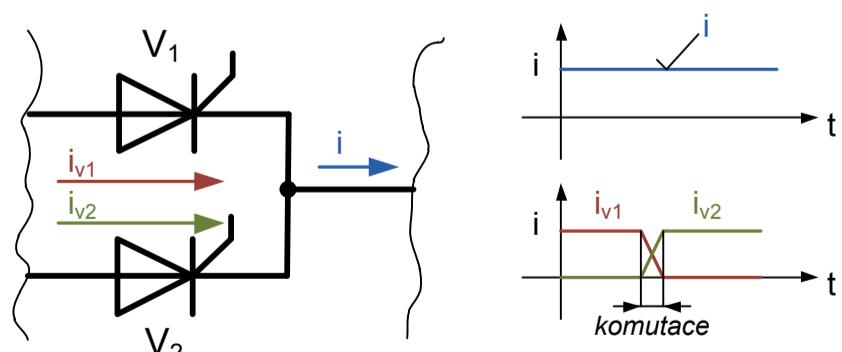
53.1. Takt a komutace

Spínáním hlavních polovodičových součástek v *hlavním obvodu* měniče nebo spínače je realizována žádaná funkce, tj. přeměna parametrů elektrické energie, u měničů, a spínání u spínačů. *Vedlejší obvod*, včetně vedlejších polovodičových součástek, zajišťuje činnost hlavního obvodu (např. vypínání hlavních tyristorů). Každá část hlavního obvodu mezi dvěma uzly je *hlavní větev*. Každá část vedlejšího obvodu mezi dvěma uzly je *vedlejší větev*.

Takt je časový interval mezi dvěma po sobě následujícími změnami vodivosti větví měniče či spínače. Označujeme jej značkami sepnutých součástek. Tak např. takt V1, V2 je časový interval, ve kterém jsou sepnuty součástky V1, V2.

Komutace větví měniče (spínače) je elektromagnetický děj v obvodu měniče (spínače) charakterizovaný přechodem proudu z jedné větve měniče (spínače) na druhou aniž by byl přerušen proud odtékající z (nebo přitékající do) uzlu obou větví. Termín komutace měniče (spínače) nelze zaměňovat s termínem komutace polovodičové součástky. Ke komutaci běžné dochází po sepnutí polovodičové součástky jedné z komutujících větví, *Sepnutí a nárůst proudu v této větvi, pokles proudu a nakonec vypnutí polovodičové součástky ve druhé větvi, umožňuje komutační napětí působící na obě větve*.

- **Vnější komutace** (dříve označována jako přirozená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným vně měniče. Užšími termíny síťová komutace nebo zátěžová komutace je blíže určován původ komutačního napětí.
- **Vlastní komutace** (dříve označována jako nucená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným ve vlastním obvodu měniče.
- **Přímá komutace** probíhá v jednom komutačním taktu (obr. 53.1.1), přímo z jedné hlavní větve na druhou. Přímou komutaci je možno označit též jako jednostupňovou.



Obrázek 53.1.1.: Komutace.

54. Polovodičové součástky výkonové elektroniky

54.1. MOSFET tranzistory

Obsah

54.1. MOSFET tranzistory	277
54.1.1. Odhad ztrátového výkonu tranzistoru	277

54.1.1. Odhad ztrátového výkonu tranzistoru

Odhad ztrátového výkonu bude proveden pro potřeby výběru optimálního MOSFET tranzistoru pro danou výkonovou aplikaci

54.1.1.1. Typy ztrát v MOSFET struktuře a antiparalelní diodě

Celkové ztrát ve spínacím režimu lze rozdělit do tří složek:

- **Vodivostní ztráty** (Conduction losses)
- **Spínací ztráty** (Switching losses)
- **Blokovací ztráty** (Blocking "leakage" losses)

$$P_{TOTAL} = P_C + P_{SW} + P_B \doteq P_C + P_{SW} \quad (54.1.1)$$

55. Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů

55.1. Úvod

Obsah

55.1. Úvod	279
55.2. Výkonové tranzistory MOS	280
55.2.1. Princip funkce tranzistoru MOS	280
55.2.2. Struktury tranzistorů MOS	280
55.2.3. Statické parametry	280
55.2.4. Výkonový tranzistor ve spínacím režimu	280
55.3. Tranzistory IGBT	280
55.3.1. Statické parametry	280
55.3.2. Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT	280
55.4. Metody řízení spínacího procesu	280
55.4.1. Vliv velikosti hradlového odporu	280
55.4.2. Aktivní řízení spínání (Active gate control)	280
55.5. Způsoby detekce nadproudu	280
55.5.1. Uvažované typy zkratových obvodů ve větvi výkonového měniče s indukční zátěží	281
55.5.2. Monitorování velikosti kolektorového napětí	281
55.5.3. Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping	281

V obecném smyslu se pojmem budič výkonové součástky rozumí určité rozhraní mezi řídicí jednotkou a výkonovou součástkou. Základní funkcí je přizpůsobit logické řídicí signály způsobu ovládání hradla výkonové součástky. S rostoucím instalovaným výkonem a spínací frekvencí výkonového elektronického systému jsou na budiče kladený vyšší nároky. Častým požadavkem je spínání výkonové součástky na plovoucím potenciálu vůči řídicímu signálu. Z toho vyplývá nutnost galvanického oddělení řídicích signálů na rozhraní mezi řídicími a výkonovými obvody elektronického systému. Ve většině aplikací jsou také na galvanické oddělení kladený ještě bezpečnostní požadavky. Můžeme se proto setkat s budiči, které mají řídicí signály galvanicky odděleny, ačkoliv výkonový spínač pracuje na stejném potenciálu jako řídicí elektronika, nebo například s budiči s dvojitou izolací.

Při spínání často dochází k potenciálovým skokům mezi hradlem a řídicí elektronikou, což klade mimořádné požadavky na kvalitu galvanického oddělení a odolnost proti rušení vlivem dV/dt . Budič tudíž vyžaduje vlastní, rovněž galvanicky oddělený napájecí zdroj, který je jednoznačně řešen vždy impulsním transformátorem. Velmi důležitou součástí budiče jsou rychlé elektronické ochrany, jejich úkolem je zajistit "nezničitelnost" výkonového spínače. Informaci o nestandardním stavu kterékoliv ochrany je nutno hlásit zpět do řídicího systému.

V následující kapitole se budeme věnovat konstrukci a návrhu budičů pro výkonové spínače typu IGBT pro trakční aplikace. Při provozu nejen trakčních měničů, se během spínacího procesu IGBT prvku generují vysoké strmosti kolektorového napětí a proudu, které vytváří rušení (EMI) a přepěťové špičky při vypínání. Jelikož budič představuje elektronický obvod, pracující ve velmi těsné blízkosti výkonového spínače, existuje vždy elektromagnetická vazba, přes kterou se šíří rušení a je tedy nezbytné zkoumat jeho odolnost. Zpomalení spínacího procesu sice omezuje generované strmosti, ale vede ke zvyšování ztrát. Dosažení optimálního kompromisu mezi úrovní rušení a výkonovou ztrátou vede na konstrukci komplexních budičů, které spínací proces výkonové součástky kontrolují ve všech jeho fázích.

55.2. Výkonové tranzistory MOS

55.2.1. Princip funkce tranzistoru MOS

55.2.2. Struktury tranzistorů MOS

55.2.3. Statické parametry

55.2.4. Výkonový tranzistor ve spínacím režimu

55.2.4.1. Zapínací proces

55.2.4.2. Vypínací proces

55.3. Tranzistory IGBT

55.3.1. Statické parametry

55.3.2. Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT

55.4. Metody řízení spínacího procesu

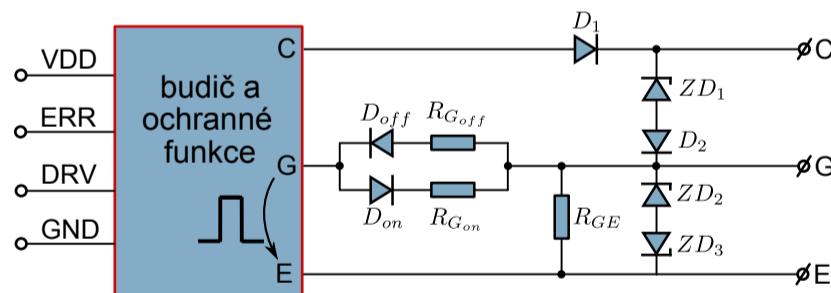
55.4.1. Vliv velikosti hradlového odporu

55.4.2. Aktivní řízení spínání (Active gate control)

Příklad budiče IGBT s čistě odporovým řízením spínacího procesu je na obrázku 55.4.1, z něhož je patrné, že při zapínání tranzistoru je na hradlo připojeno napětí $U_{d_{ON}}$ pěs předřazený zapínací rezistor $R_{G_{ON}}$ a analogickým způsobem při vypínání je předřazen rezistor $R_{G_{OFF}}$. Spínací proces je tedy řízen pouze těmito rezistancemi. Na obrázku 55.4.1 jsou též vyznačeny základní ochrany:

- Gate-Emitter-clamping (ZD2, ZD3),
- desaturation-monitoring (D1),
- overvoltage clamping (ZD1),

které obvykle zajišťují činnost IGBT v bezpečné pracovní oblasti (Safe operating area - SOA) i během vystavení tranzistoru nejhorším pracovním podmínkám, jako jsou například zkrat nebo přepětí.



Obrázek 55.4.1.: Princip budiče s čistě odporovým řízením spínání společně se základními ochranami IGBT

There are some drawbacks of the resistive control. There is no separate influence on collector current and collector-emitter voltage in the switching interval. The switching losses increase relatively strong with higher RG. Varying the gate resistance influences both the switching and delay times. Often it is not possible to control overvoltages at turn-off sufficiently and in case of series connection of IGBTs additional measures are to be taken. To avoid these drawbacks and to adapt and optimize the switching behaviour to the requirements, the gate drive can be controlled actively. A lot of work has been done and published in this field, mostly for IGBTs in series connection or for high power [3, 4]. There are only few investigations aimed at the power range below high power [5], where because of extreme sensitivity to costs only a limited number of additional electronic components are allowed.

55.4.2.1. Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového proudu (dI/dt control)

Je-li $U_{GE} = U_{d_{ON}} > U_{GE_{th}}$ je IGBT spínač ve vodivém stavu a pouze celková parazitní indukčnost v obvodu zkratového proudu omezuje dI/dt kolektorového proudu. Doporučovanou možností jak redukovat maximální kolektorový proud $I_{C_{max}}$ a také maximální $dI_C/dt|_{max}$ je snížení hradlového napětí U_{GE} . Pro odvození závislosti strmosti kolektorového proudu na hradlovém napětí vyjdeme z náhradního schématu dle obr. 55.4.2 a idealizovaných průběhů spínacího a vypínacího procesu výkonového spínače dle obrázku *. Kolektorový proud v saturaci je možné vyjádřit vztahem

$$I_C = g_m \cdot (U_{GE} - U_{GE_{th}}) \quad (55.4.1)$$

kde g_m označuje transkonduktanci, $U_{GE_{th}}$ je prahové napětí (threshold voltage)

$$I_G = C_{GS} \frac{dU_{GS}}{dt} \quad (55.4.2)$$

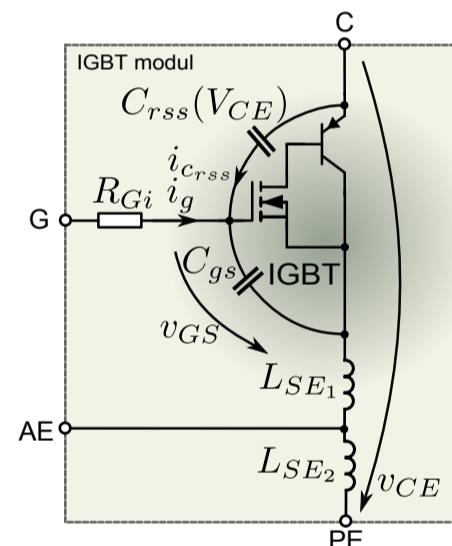
$$\frac{dI_C}{dt} = g_m \frac{dU_{GS}}{dt} = \frac{g_m}{C_{GS}} \cdot I_G \quad (55.4.3)$$

Je-li $U_Z > U_{L_{SE}} + U_{GE}$ pak neprochází proud skrz větev omezovače na obr. 55.4.3 a můžeme sestavit náhradní rovnici dle obr. **. Hradlový proud vyjádříme z rovnice (55.4.3) a dosadíme do rov. 55.4.4.

$$U_{d_{ON}} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) I_G + U_{GS} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (55.4.4)$$

$$U_{d_{ON}} - U_{GS} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} \frac{dI_C}{dt} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (55.4.5)$$

$$\frac{dI_C}{dt} = \frac{U_{d_{ON}} - U_{GS}}{(R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} + L_{SE_1}} \quad (55.4.6)$$



Obrázek 55.4.2.: Náhradní schéma IGBT modulu (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)

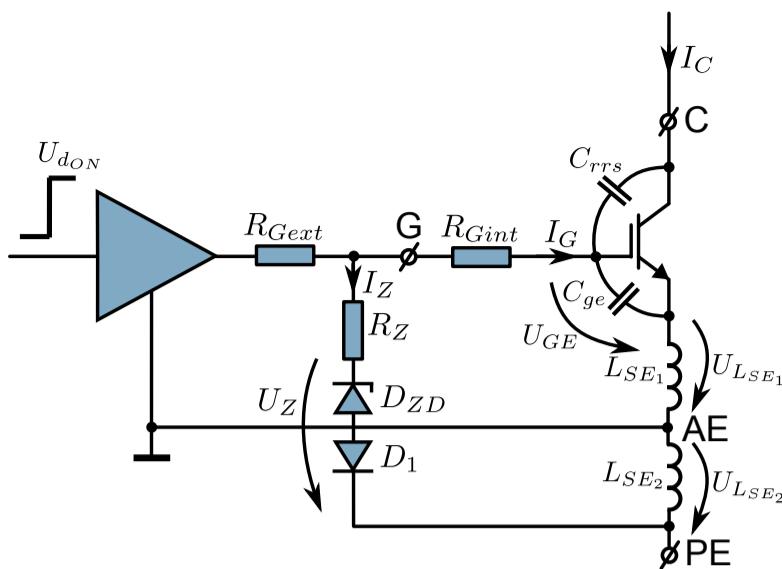
55.4.2.2. Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového napětí (dU/dt control)

Jednoduchý způsob realizace tohoto způsobu řízení

55.5. Způsoby detekce nadproutu

Vysoká spolehlivost provozu výkonového systému, je v současnosti standardním požadavkem moderní komerční aplikace IGBT. Ochrana výkonových prvků před destrukcí v případě nadproutu je tedy nezbytná a bývá řešena následujícími konvenčními metodami:

- hlídání hodnoty kolektorového napětí U_{CE} - collector-emitter voltage monitoring method (viz 55.5.2),
- proudový transformátor - current transformer (CT).

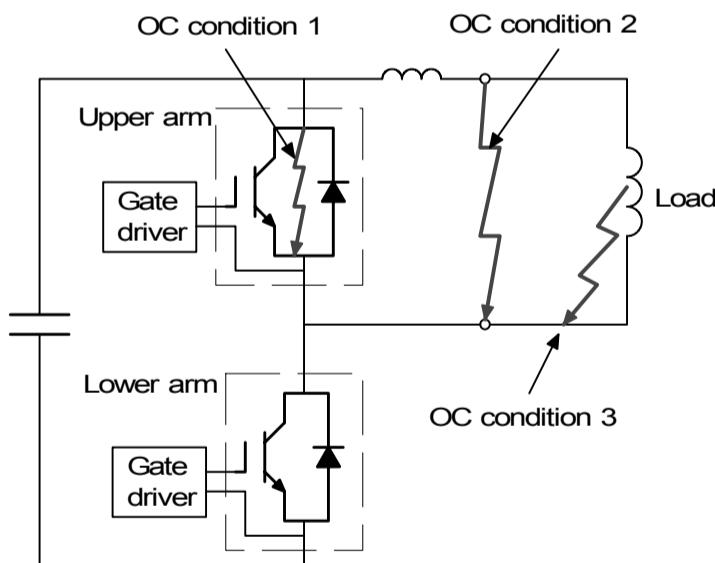


Obrázek 55.4.3.: Obvod budiče se zavedenou zpětnou vazbou od di/dt tvořenou součástkami R_Z , $ZD1$, $D1$ (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)

První metoda je velice jednoduchá a její princip spočívá ve vyhodnocování úbytku mezi kolektorem a emitorem sepnutého tranzistoru. Problém nastává u vysokonapěťových aplikací, kde je nutné použít vysokonapěťovou signálovou diodu a navíc ochrana nefunguje během přechodného děje spínacího procesu, protože napětí U_{CE} klesá pomalu. Je tedy vhodné používat tuto ochranu v kombinaci s jinou. Širokému použití proudových transformátorů jen pro ochranné účely brání především cena spolu s velkým počtem kusů pro pokrytí všech možných kombinací zkratových obvodů, jež v dané aplikaci mohou nastat.

Následující kapitoly budou věnovány metodám detekce poruchového stavu a způsobům bezpečného vypnutí IGBT i v těchto nepříznivých režimech. Nejprve bude nutné kategorizovat možné poruchové režimy podle chování IGBT. Zajištění těchto funkcí je náplní moderního budiče IGBT.

55.5.1. Uvažované typy zkratových obvodů ve větví výkonového měniče s indukční zátěží



Obrázek 55.5.1.: Znázornění třech uvažovaných zkratových obvodů ve věti výkonového měniče s indukční zátěží

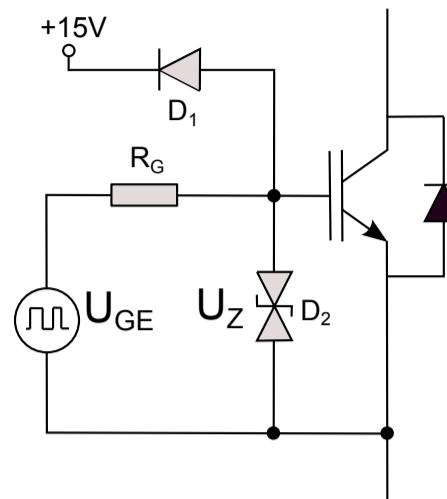
55.5.2. Monitorování velikosti kolektorového napětí

55.5.3. Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping

$$U_{Z_{GE}} = U_Z \cdot (1 + \alpha_T \cdot \Delta\vartheta_j) \cdot (1 + T_V) \leq U_{GE_{peak}}, \quad (55.5.1)$$

$$U_{GE_{max}} \leq U_Z \cdot (1 - T_V) \quad (55.5.2)$$

kde: U_Z ... jmenovité napětí transilu; $U_{GE_{peak}}$... špičková hodnota hradlového napětí - při zkratu: $\leq 17,5V$; α_T ... teplotní koeficient transilu; $\Delta\vartheta_j$... oteplení nad jmenovitou teplotu okolí $25^\circ C$; T_V ... katalogová tolerance transilu



Obrázek 55.5.2.: Jednoduchá realizace omezovače hradlového napětí pomocí Shottkyho diody nebo tranzistoru

Na obrázku 55.5.2 jsou znázorněny dvě jednoduché možnosti. V případě použití transilu je nutné dbát zvýšenou pozornost jeho výběru. Průrazné napětí musí mít co nejnižší rozptyl a při změně teploty okolí nesmí v běžném provozu omezovat budicí signál. Těmto požadavkům nejlépe vyhovuje transil 1.5KE16CA:

- $\alpha_T = 8 \cdot 10^{-4} (12mV/K)$,
- $\Delta\vartheta_j = 50K$ (předpoklad),
- $T_V = 5\%$,

z čehož vyplývají následující kontrolní rovnice

$$U_Z(@ + 75^\circ C; +5\%) = 17,53V \approx U_{GE_{peak}} \quad (55.5.3)$$

$$U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%) = 14,53V \approx U_{GE_{min}} \quad (55.5.4)$$

$$U_Z(@ + 25^\circ C; -5\%) = 15,20V \geq U_{GE_{max}} \quad (55.5.5)$$

V případě krajní hodnoty $U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%)$ dojde při buzení $U_{GE} = \pm 15V$ ke krátkodobé aktivaci ochranného transilu, což způsobí jeho ohřátí a posunutí hladiny U_Z .

Efektivita varianty se Shottkyho diodou (viz obr. 55.5.2) je závislá na velikosti parazitní indukčnosti mezi hradlem a kondenzátorem zdroje budiče. Zdroj budiče musí také zajistit aby napětí na tomto kondenzátoru při funkci ochrany nevzrůstalo.

Část XXIII.

Elektrické přístroje

56. Teorie elektrického oblouku

Obsah

56.1. Teorie spínacího oblouku	285
56.1.1. Plazma elektrického oblouku	285
56.1.2. Charakteristika vypínacího pochodu	285
56.1.3. Elektrický oblouk a jeho zhášení	286
56.1.4. Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového	286

56.1. Teorie spínacího oblouku

56.1.1. Plazma elektrického oblouku

Ve spínací technice se zabýváme plazmatem vznikajícím hořením elektrického oblouku při spínání elektrických obvodů. Dále popisované vlastnosti elektrického oblouku jsou rozpracovány pro druh plazmatu hořící ve vypínací dráze zhášecích komor vypínačů. Toto plazma se charakterizuje jako vysokotlaké (tlaky plynu vyšší než 0,1 MPa) a elektrické proudy řádově kiloampéry. Pozornost bude soustředěna zejména na elektrický oblouk hořící v tlakoplynových zhášecích komorách při vypínání elektrických obvodů. V tlakoplynových zhášecích komorách byl oblouk nejvíce prozkoumán u tlakovzdušného principu a u vypínačů s plynem SF₆ [BV83, s. 3].

56.1.2. Charakteristika vypínacího pochodu

56.1.2.1. Základní uspořádání zhášecích komor

Základním uspořádání zhášecích komor lze rozdělit z hlediska proudění plynu na zhášecí komory:

- s jednostranným prouděním,
- s dvoustranným prouděním.

Na obrázcích je schématicky znázorněn oblouk, který je axiálně ofukován plymem z prostoru zhášecí komory s tlakem p_1 přes zhášecí trysky dutinou kontaktů do výfuku, kde je nižší tlak p_2 .

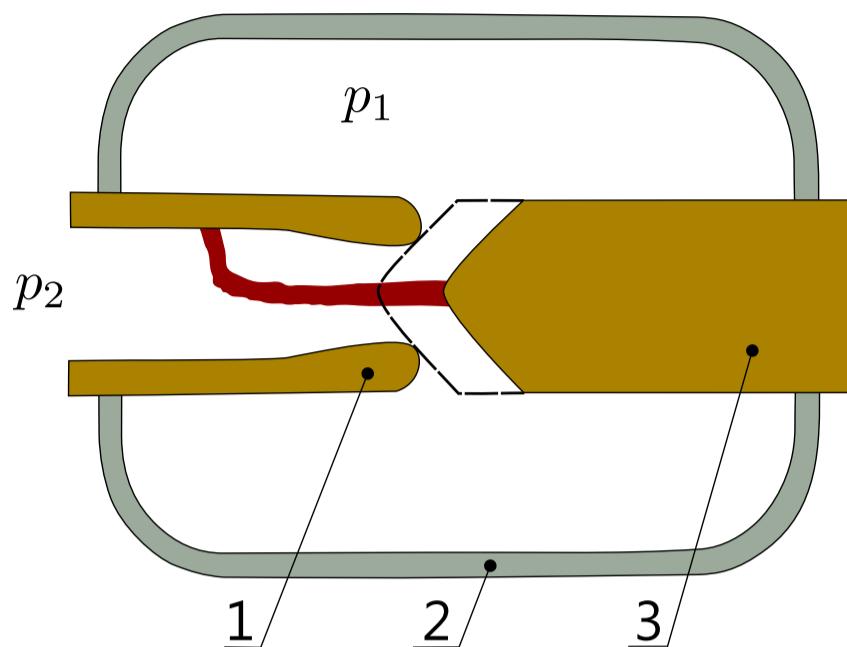
Legenda:

1. Zhášecí tryska
2. Tlaková izolační nádoba
3. Kontakt
 - p_1 ... tlak ve zhášecí komoře
 - p_2 ... tlak ve výfukovém prostoru

56.1.2.2. Tři základní intervaly vypínacího pochodu

Vypínací pochod lze z hlediska zkoušení vypínačů rozdělit do tří základních intervalů:

1. t_s ... **Silnoproudý interval**
2. t_i ... **Interakční interval**
3. t_d ... **Dielektrický interval**
 - t_s ... silnoproudý interval
 - t_i ... interakční interval
 - t_{i1} ... interval výrazné změny obloukového napětí
 - t_{i2} ... interval zbytkového proudu
 - t_d ... dielektrický interval
 - t_a ... doba hoření oblouku
 - $\frac{di}{dt}$... derivace proudu podle času
 - i_r ... zbytkový proud
 - $\frac{di_r}{dt}$... derivace zbytkového proudu podle času



Obrázek 56.1.1.: Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s jednostranným prouděním.

- $u_a \dots$ napětí oblouku
- $U_{zh} \dots$ zhášecí amplituda napětí
- $U_{zn_{max}} \dots$ maximální hodnota zotaveného napětí
- $u_{0b} \dots$ obnovené napětí
- $S \dots$ strmost zotaveného napětí (podle IEC)
- $\Delta t_u \dots$ doba od průchodu proudu nulou do okamžiku protnutí tečny obalující křivku u_{zn} v hodnotě $U_{zn_{max}}$
- $\frac{du}{dt}|_{i=0} \dots$ okamžitá strmost zotaveného napětí v nulové hodnotě proudu

Charakteristické parametry vypínače v intervalech vypínačího pochodu:

- $\mathbf{t}_s : i, I_{max}, u_a$
- $\mathbf{t}_a : \frac{di}{dt}, i_r, \frac{du}{dt}, u_{zn}, U_{zn_{max}}$
- $\mathbf{t}_d : \frac{du}{dt}, S, U_{zn_{max}}$

Rozdělení vypínačího pochodu do těchto intervalů umožňuje snadněji specifikovat základní kritéria, kterým musí zhášecí komora vyhovovat při vypínání. Při vypínání střídavého proudu charakter proudění plynu závisí nejen na časově proměnlivém zdvihu kontaktů, druhu plynu a tlakových poměrech, ale i na předcházejícím proudu, přičemž všechny veličiny jsou vzájemně závislé. Hranice intervalů však lze určit jen přibližně, protože jsou závislé na kmitočtu proudu a na časové konstantě oblouku. Časová konstanta oblouku je proměnlivá nejen s velikostí proudu, ale závisí i na uspořádání zhášecí komory.

56.1.3. Elektrický oblouk a jeho zhášení

56.1.4. Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového

Jak bylo uvedeno v předchozích kapitolách, ve zhášecí komoře výkonových vypínačů po zhasnutí oblouku ještě zůstává po krátkou dobu mezi elektrodami zbytkové plazma, které obsahuje značný počet volných elektronů. Je-li toto množství kolem 10^{14} až 10^{15} elektronů v metru krychlovém, pak je splněna podmínka pro tvorbu *elektronových lavin* nebo *strimérů* a strmě stoupající zotavené napětí může způsobit jiskrový výboj, který přejde okamžitě v obloukový opětný zápal. Protože v plazmě oblouku je hustota elektronů závislá na její teplotě, nemá-li dojít k opětnému zápalu, musí plazmu dobré fungující vypínač rychle ochladit. Chladící pochod je podmíněn vlastností plynu vyjádřenou textbf{teplelnou vodivostí} $[\frac{W}{K \cdot m}]$, kterou způsobují tyto dva dílčí jevy:

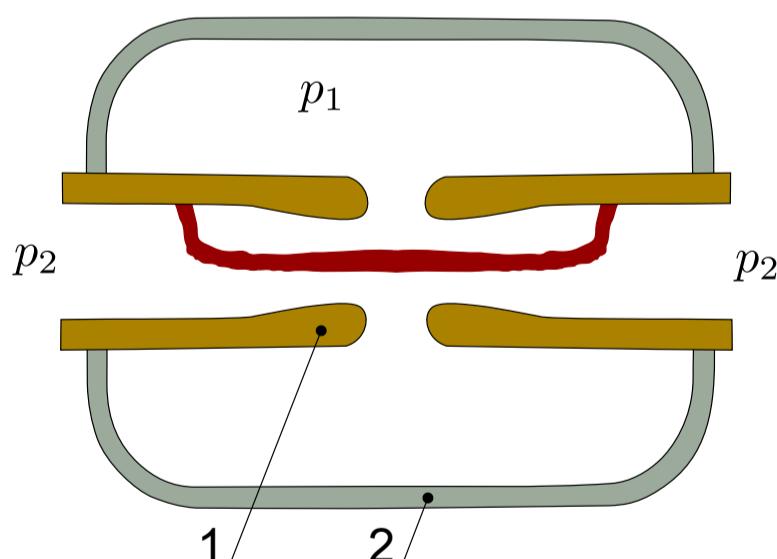
- Odvod kinetické energie plynu, který probíhá při vzájemných srážkách molekul rozkmitaných tepelnou energií plynu,
- Disociace molekul, kdy při rozkladech molekul na základní atomy se při nepružných srážkách pohlcuje disociační energie a tím se kinetická energie molekul přeměňuje na potenciální energii atomů. Tato se odvádí difúzí do oblastí plynu s nízkou teplotou.

Disociace molekul nastává jen v úzkém teplotním intervalu charakterizovaném **disociační teplotou** Θ_d . Proto má křivka tepelné vodivosti plynu kolem teploty Θ_d značně vyjádřené maximum.

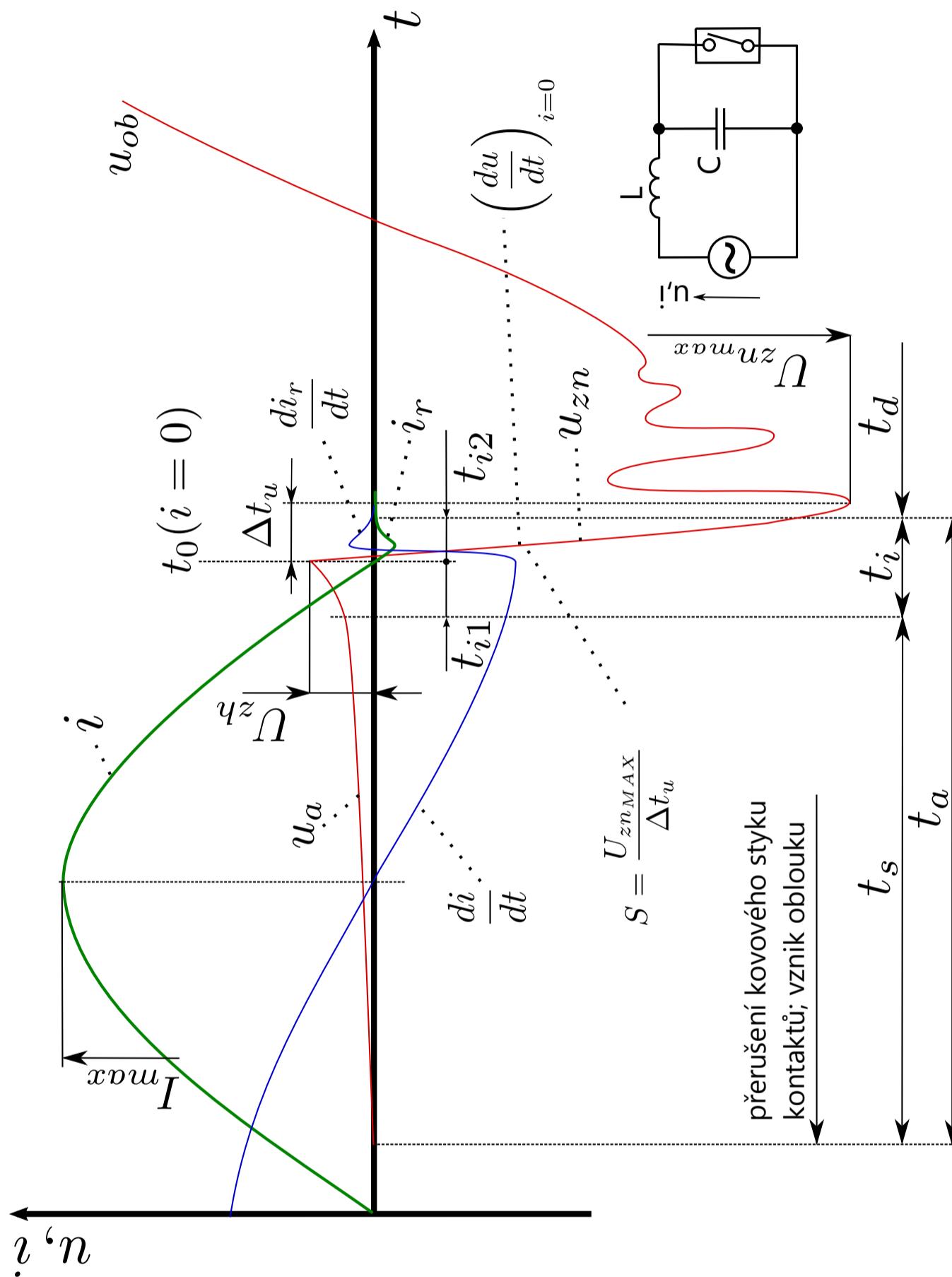
- Plyn SF_6 : $\Theta_d = 2500 K$.
- Plyn N_2 (vzduch): $\Theta_d = 7500 K$.

Rozdílné teploty Θ_d jsou způsobeny tím, že disociační energie molekuly dusíku N_2 je $14.5 eV$, zatímco síra S disociuje z molekuly SF_6 již při energii $10.4 eV$.

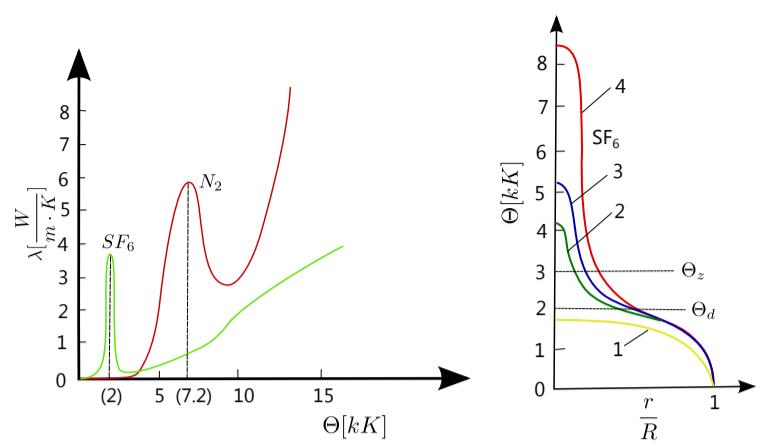
Průběh křivek tepelných vodivostí různých plynů dovoluje současně odhadnout prostorové rozdělení teplot v elektrickém oblouku, neboť v místech s *maximální tepelnou vodivostí* je *minimální teplotní spád (gradient)*. Proto se v křivkách znázorňující rozdělení teploty oblouku v závislosti na jeho poloměru objevují v okolí disociačních teplot pro dusík N_2 a SF_6 znatelné zlomy pro různé velikosti proudů. Z těchto průběhů je také možné určit dvě zcela rozdílné oblasti oblouku:



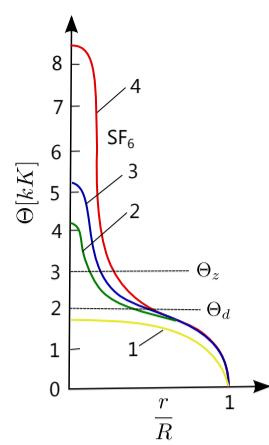
Obrázek 56.1.2.: Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s dvoustranným prouděním.



Obrázek 56.1.3.: Základní intervaly vypínačího pochodu.



(a) Tepelné vodivosti dusíku (N_2) a fluoridu sírového (SF_6)



(b) Křivky rozdělení teplot oblouku v závislosti na poloměru oblouku v SF_6 ; 1 až 4 různé proudy oblouku

Obrázek 56.1.4.: Základní charakteristiky oblouku hořícího v plynech SF_6 a porovnání s dusíkem

- **Trup oblouku:** velmi jasně zářící oblast s vysokými teplotami ležícími nad Θ_d
- **Plášt' oblouku:** difúzně svítivá část oblouku s teplotami dosahujícími maximálně Θ_d

Důležitost disocioční teploty Θ_d molekuly plynu zvlášť vyniká při sledování rychlosti zmenšování hustoty elektronů ve zbytkové plazmě oblouku, která je kritériem vzniku elektrického výboje mezi kontakty. Protože ve žhavém trupu je úbytek hustoty elektronů stokrát rychlejší než ve vnějším pláště oblouku, zaniká po nule proudu nejprve zářivý trup oblouku. *Zotavené napětí* působí již jen na plášt' oblouku, v němž se hustota elektronů zmenšuje jen velmi zvolna. Protože kritickou veličinou pro elektrický výboj v plynném prostředí je hustota elektronů kolem $10^{14}/m^3$, bylo z kinetické teorie plynů odvozeno, že tento stav odpovídá přibližně teplotě kolem **3000 K**.

Část XXIV.

Železniční zabezpečovací technika

57. Úvod

Základním požadavkem na železniční zabezpečovací zařízení je zajištění bezpečného provozu na železnici. Tento požadavek je ohrožen vznikem poruch, čemuž nelze u reálných systémů zabránit absolutně. Jak již bylo řečeno, tyto poruchy se nesmí projevit nebezpečným způsobem, čehož se dosahuje vhodným návrhem systému. Z toho zdánlivě vyplývá, že na bezporuchovost (spolehlivost) systému nemusí být kladený příliš vysoké požadavky, neboť poruchy neohrožují bezpečnost dopravy.

Opak je však pravdou, protože lze očekávat, že vznikající poruchovost zařízení bude doprovázena také vznikem obecné četnosti výskytu hazardních stavů a také četnosti výskytu hazardního stavu v uvažovaném časovém okně (druhá porucha), což je podstatné u redundantních a reakčních systémů.

Navíc případná nefunkčnost systému následkem poruchy znamená, že řízení provozu, který nemůže být zastaven po celou dobu opravy systému, je nutné provádět bez jeho dohledu. Zodpovědnost je přinejmenším částečně opět na člověku, který je navíc v této mimořádné situaci ještě náchylnější k chybám. U zabezpečovacích zařízení tedy musíme požadovat i vysokou spolehlivost! Proto se v následující kapitole budeme stručně věnovat popisu jednotlivých poruch.

57.1. Klasifikace poruch

Chyba je rozdíl mezi správnou a skutečnou hodnotou nějaké veličiny. V zařízení se chyby mohou obecně objevit jako *důsledek (projev) poruchy některé jeho součásti, působením nějakého cizího vlivu nebo selháním lidského činitele*. Za poruchy hardware se považují všechna vybočení z předpokládaných vlastností stavebního prvku (součástky, dílu) zařízení. Předpokládanými vlastnostmi prvků přitom jsou vlastnosti odpovídající příslušným technickým podmínkám popisujícím jeho vlastnosti. Jako omyl lze označit každou lidskou činnost, která může vést k nezamýšlenému chování zařízení. V širším slova smyslu se jako **porucha** označují souhrnně všechny příčiny vedoucí k chybě, tj. poruch součásti, cizí vliv i omyl.

58. Bezpečnost a spolehlivost zabezpečovacích systémů

58.1. Spolehlivost

58.2. Bezpečnost

V různých publikacích je možné najít různé definice bezpečnosti. Například norma EN 61508¹ definuje bezpečnost jako nepřítomnost ne-tolerovaného rizika. Z této definice je zřejmé, že bezpečnost je úzce spjatá s rizikem, a je nutné bezpečnost třeba chápát relativně. Když se řekne, že řídicí systém je bezpečný, neznamená to jeho absolutní bezpečnost (ta je prakticky nedosažitelná vzhledem na existenci objektivních faktorů, jako je například úroveň poznání, technologická úroveň a limitované finanční prostředky), ale taková úroveň bezpečnosti, která zodpovídá definovaným bezpečnostním požadavkům na tento řídicí systém.

Relativnost v pojímání bezpečnosti znamená posun od kvalitativního ke kvantitativnímu chápaní bezpečnosti.

Kvalitativně je bezpečnost chápána jako schopnost řídicího systému zajistit omezení důsledků poruch řídicích systémů v daných podmínkách a v daném časovém intervalu. Matematicky je možné kvalitativní bezpečnost řídicího systému vyjádřit jako

$$E_H = 0, \quad (58.2.1)$$

kde E_H je množina nebezpečných stavů, které jsou důsledkem výskytu pravděpodobných poruch řídicího systému. Pravděpodobná porucha je taková porucha z množiny všech poruch, jejichž výskyt během provozu řídicího systému je nutné předpokládat (vzhledem na požadovanou úroveň bezpečnosti řídicího systému).

Kvantitativně je bezpečnost řídicího systému chápána jako pravděpodobnost nepřítomnosti jakéhokoliv nebezpečného stavu v řídicím systému v daných podmínkách a v daném časovém intervalu. Je zřejmé, že i když pravděpodobnost nebezpečného stavu řídicího je malá, neznamená to, že se nebezpečný stav nemůže vyskytnout v nejbližším časovém intervalu. Matematicky je možné kvantitativní bezpečnost vyjádřit tak, že

$$P_{HT}(t) \geq P_{HR}(t) > 0, \quad (58.2.2)$$

kde $P_{HT}(t)$ je pravděpodobnost tolerovaného nebezpečného stavu řídicího systému a $P_{HR}(t)$ je reálná pravděpodobnost nebezpečného stavu řídicího systému.

Na kvantitativním hodnocení bezpečnosti řídicího systému je v podstatě možné uplatnit stejné teoretické postupy, jako při hodnocení spolehlivosti technických systémů. Zásadní rozdíl je v tom, že při hodnocení spolehlivosti standardních řídicích systémů se obvykle rozliší dva stav - bezporuchový stav a poruchový stav, a k těmto dvěma stavům se vztahují také kvantitativní ukazatele spolehlivosti. Při hodnocení bezpečnosti řídicích systémů musíme uvažovat s dvěma druhy poruchových stavů - bezpečným a nebezpečným poruchovým stavem. Bezpečnost řídicího systému se potom vyjadřuje pomocí ukazatelů bezpečnosti (například pravděpodobnost výskytu nebezpečné poruchy, intenzita nebezpečných poruch, ...).

Při kvantitativním hodnocení důsledků poruch na bezpečnost řídicího systému se obvykle k hodnoceným řídicím systémům přistupuje jako k neobnovovaným objektům, protože z pohledu bezpečnosti jsou důležité dva stav (bezpečný, nebezpečný) a analýza končí výskytem nebezpečné poruchy (může jít o jednu poruchu, nebo o kombinaci více poruch, které nejsou individuálně nebezpečné). To znamená, že od uvedení řídicího systému do provozu, až po výskyt nebezpečné poruchy, se může řídicí systém střídavě nacházet ve funkčním, nebo nefunkčním stavu (nefunkční

¹Funkční bezpečnost elektrických/elektronických/programovatelných elektronických systémů souvisejících s bezpečností (Functional safety of electrical/ electronic/programmable electronic systems), obecná norma funkční bezpečnosti, která se opírá o dvě základní koncepcie - životní cyklus bezpečnosti a úroveň integrity bezpečnosti (SIL)

ještě neznamená nebezpečný). Z tohoto důvodu ukazatele bezpečnosti jsou podobné ukazatelům bezporuchovosti neobnovovaných objektů.

58.2.1. Základní legislativa

- **EN 61508** - základní všeobecná norma pro SRCS; pojednává o funkční bezpečnosti elektrických/elektronických/programovatelných elektronických systémů souvisejících s bezpečností (Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic systems), obecná norma funkční bezpečnosti, která se opírá o dvě základní koncepcie - životní cyklus bezpečnosti a úroveň integrity bezpečnosti (SIL)
 - EN 61508-1: Všeobecné požadavky
 - EN 61508-2: Požadavky na elektrické / elektronické / programovatelné elektronické systémy související s bezpečností
 - EN 61508-3: Požadavky na SW
 - EN 61508-4: Definice a zkratky
 - EN 61508-5: Příklady metod určování úrovně integrity bezpečnosti
 - EN 61508-6: Metodické pokyny na používání EN 61508-2, STN EN 61508-3
 - EN 61508-7: Přehled technik a opatření
- **EN 50126**: Railway applications – The specification and demonstration of reliability, availability, maintainability and safety (RAMS)
 - Part 1: Basic requirements and generic process. 1999
 - Part 2: Guide to the application of EN 50126-1 for safety. 2007
 - Part 3: Guide to the application of EN 50126-1 for rolling stock RAMS. 2008Zabývá se specifikací parametrů RAMS (spolehlivost, pohotovost, udržovatelnost, a bezpečnost) obecně pro všechny železniční systémy, reaguje na skutečnost, že naléhavost požadavků na bezpečnost funkce jednotlivých železničních systémů je různá a lze je tedy splňovat s různou pravděpodobností jejich selhání. Také zavádí pojem *integrita bezpečnosti* (*safety integrity - celistvost, úplnost, neporušenost bezpečnosti*), který definuje jako pravděpodobnost, s níž systém uspokojivě splní požadované bezpečnostní funkce, za všech stanovených podmínek a ve stanoveném časovém období. Jde o to, do jaké míry může být pro bezpečnost relevantní funkce narušena např. poruchami vlastního zařízení, omyly obsluhy, vnějším rušením atd.
- **EN 50128**: Railway applications – Communication, signalling and processing systems – Software for railway control and protection systems. 2003
- **EN 50129**: Railway applications – Communication, signalling and processing systems – Safety-related electronic systems for signalling. 2011 Modifikovaně byl pojem integrita bezpečnosti přenesen i do této normy pro železniční zabezpečovací systémy. I klasická zabezpečovací technika bez velkého zdůrazňování respektovala, že nejsou na všechna zařízení kladený stejně důrazné bezpečnostní požadavky (kategorie zařízení, vedlejší tratě/hlavní tratě, zařízení pro ČD/zařízení pro vlečky, staniční zařízení/spádoviště atd.). Uvidíme dále, že pojmu integrita bezpečnosti je pro zabezpečovací zařízení dominantně obsažena oblast, kterou běžně v této technice označujeme(a také normá EN 50129 ji tak označuje ve své základní části) termínem technická bezpečnost. Úvahy okolo integrity bezpečnosti zde sledujeme odděleně od úvah o technické bezpečnosti (přes jejich podobnost) pro jejich výhodnost zejména v úvodních fázích projektu nového systému (zařízení, výrobku, atd.)

- EN 50159: Railway applications – Communication, signalling and processing systems - Safety-related communication in transmission systems. 2010

Vyjmenované normy se poněkud liší v definici termínu *bezpečnost*:

- Bezpečnost (Safety) – nepřítomnost nepřijatelných úrovní rizika poškození (EN50129)
- Bezpečnost (Safety) – nepřítomnost nepřijatelného rizika. (EN61508)
- Bezpečnost při poruše (Fail Safe) – vlastnost konstrukce objektu zabraňující, aby jeho poruchy způsobili nebezpečné poruchové stavy. (IEC 60 (191))
- Kvalitativní bezpečnost – schopnost systému zajistit omezení důsledku poruch systému v daných podmínkách a v daném časovém intervalu.
- Kvantitativní bezpečnost – pravděpodobnost nepřítomnosti jakéhokoliv nebezpečného stavu v systému v daných podmínkách a v daném časovém intervalu.

58.2.2. Ukazatel bezpečnosti

Pravděpodobnost bezpečného provozu je pravděpodobnost, že objekt může bezpečně plnit požadovanou funkci v daných podmínkách v časovém intervalu t_1, t_2 .

$$R_S(t_1, t_2) = 1 - F_H(t_1, t_2), \quad (58.2.3)$$

kde $F_H(t_1, t_2)$ je distribuční funkce, která naopak vyjadřuje pravděpodobnost, že objekt nemůže bezpečně plnit požadovanou funkci k daným podmínkám v časovém intervalu t_1, t_2 .

$$F_H(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_H(t) \cdot dt, \quad (58.2.4)$$

kde $f_H(t)$ je hustota pravděpodobnosti nebezpečné poruchy objektu.

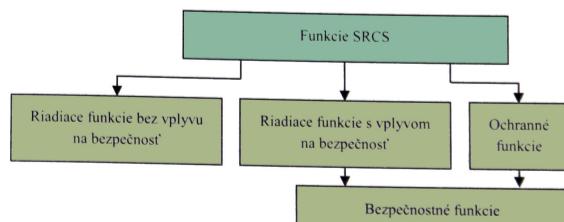
Intenzita nebezpečných poruch $\lambda_H(t)$ definujeme jako limitu poměru podmíněné pravděpodobnosti, že časový okamžik vzniku nebezpečné poruchy objektu T padne do daného časového intervalu $t, t + \Delta t$, přičemž délka časového intervalu $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lambda_H = \frac{f_H(t)}{R_S(t)}. \quad (58.2.5)$$

Protože nebezpečné poruchy jsou méně časté, zkoušky na určení požadovaných ukazatelů bezpečnosti by bylo třeba provádět dlouhodobě, což je prakticky nemožné.

58.3. Integrita bezpečnosti

Všeobecně je možné konstatovat, že SRCS realizuje řídící i ochranné funkce (obr. 58.3.1). Jelikož selhání řídící funkce může způsobit ohrožení bezpečnosti, je třeba i tyto funkce považovat za bezpečnostní. Bezpečnostní funkce jsou definované na základě analýzy rizik jako tech-



Obrázek 58.3.1.: Vztah mezi bezpečnostními funkcemi a moduly SRCS

nická opatření na snížení rizika spojeného s konkrétními nebezpečí na tolerovatelnou úrovni. Účinnost bezpečnostní funkce se určuje pomocí úrovni integritu bezpečnosti (SIL - safety integrity level).

Norma EN 61508 definuje integritu bezpečnosti jako pravděpodobnost, že SRCS bude plnit požadované bezpečné funkce za všech stanovených podmínek v rámci stanoveného operačního prostředí a během stanoveného časového období. Všeobecně lze konstatovat, že čím je integrita bezpečnosti SRCS větší, tím je menší pravděpodobnost selhání bezpečnostní funkce realizovaných SRCS.

Integrita bezpečnosti se skládá ze dvou částí a to:

- integrity bezpečnosti proti systematickým poruchám: jde o nekvantifikovatelnou část integrity bezpečnosti, která souvisí s nebezpečnými systematickými poruchami hardware a software; integrity bezpečnosti proti systematickým poruchám se dosahuje především opatřeními na předcházení chybám a poruchám; vzhledem k tomu, že jde o nekvantifikovatelnou část integrity bezpečnosti, je vhodnější chápat integritu bezpečnosti jako vlastnost a né jako pravděpodobnost; hodnocení integrity bezpečnosti proti systematickým chybám a poruchám se realizuje kontrolou dodržování opatření předcházejících chybám a poruchám, mezi které patří také důsledné testování korektní realizace bezpečnostních funkcí;
- integrity bezpečnosti proti náhodným poruchám: jde o kvantifikovatelnou část integrity bezpečnosti, která se týká náhodných poruch hardware vyplývajících z konečné bezporuchovosti použitých součástek; hodnocení integrity bezpečnosti proti náhodným poruchám se realizuje prostřednictvím pravděpodobnostních výpočtů.

Aby se dosáhla požadovaná integrita bezpečnosti, musí být splněny požadavky na integritu proti systematickým poruchám i náhodným poruchám.

58.3.1. Úroveň integritu bezpečnosti

Úroveň integritu bezpečnosti (Safety Integrity Levels - SIL) se dělí podle EN 50129 do čtyř kategorií - úroveň 4 (SIL 4) je nejvyšší, úroveň 1 (SIL 1) je nejnižší. Pokud se objevuje úroveň SIL 0, značí to, že se jedná o systém na které nejsou kladen žádné bezpečnostní požadavky (ve smyslu zabezpečovací techniky)

Proto, aby SRCS mohl být zařazen do odpovídající úrovně bezpečnosti SIL, musí vyhovovat těmto faktorům:

- naplnění podmínek řízení kvality,
- naplnění podmínek řízené bezpečnosti,
- splnění požadavků na technickou bezpečnost,
- dosažení kvantitativního cíle

Jak patrné, splnění kvantitativního ukazatele samo o sobě neznamená, že bylo dosaženo odpovídající úrovně bezpečnosti. To platí ovšem i naopak - splnění tří předchozích podmínek (řízení kvality, řízení bezpečnosti a technické bezpečnosti) nezaručuje, že bylo dosaženo kvantitativních cílů a nelze tedy tvrdit, že zařízení lze zařadit do odpovídající skupiny SIL (58.3.2).

Žádná z norem CENELEC nepředepisuje, které zařízení musí být jaké úrovně. Toto určení je ponecháno na provozovateli, resp. regulátorovi, vyplýne také z provedených analýz rizik a hazardů.

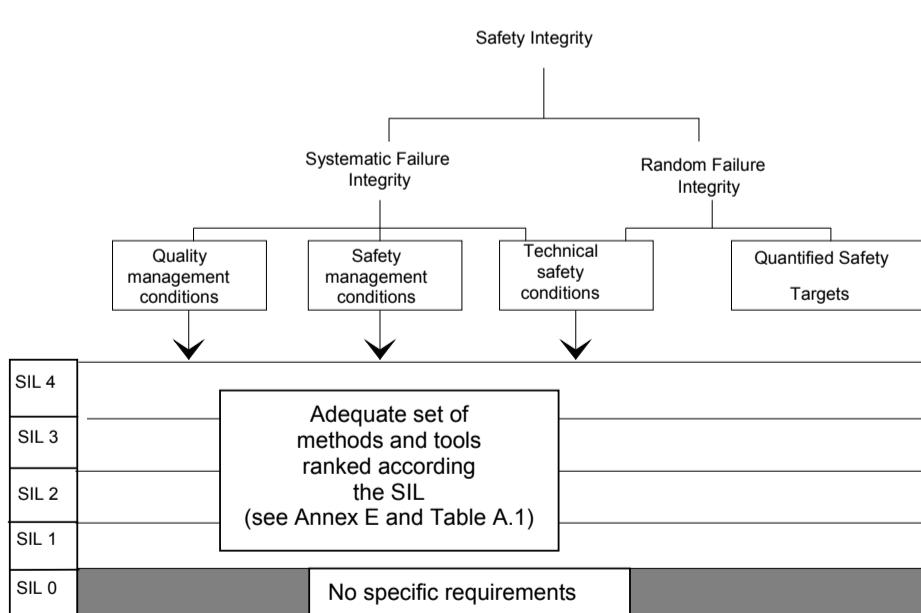
Následující tabulka shrnuje definované úrovně integritu bezpečnosti a zároveň dává do souvislosti s tolerovatelnými četnostmi hazardů. SIL jsou tedy prostředkem přiřazení kvalitativních přístupů (pro vyloučení systematických poruch) ke kvantitativnímu přístupu (pro řízení náhodných poruch), neboť systematické poruchy nelze kvantifikovat.

- Z normy jasně vyplývá rozdělení na dvě skupiny SIL 1,2 vs. SIL 3,4, u nichž je výrazný rozdíl v požadavcích, které je potřeba splnit, aby SRCS mohl patřit do dané skupiny. To je velmi dobré patrné z tabulek v příloze E normy EN 50129, která se zabývá technikami a opatřeními pro řízení náhodných a systematických poruch.

Úroveň integrity bezpečnosti SIL	Tolerovatelná četnost hazardu THR [za hodinu a funkci]
4	$10^{-9} \leq THR < 10^{-8}$
3	$10^{-8} \leq THR < 10^{-7}$
2	$10^{-7} \leq THR < 10^{-6}$
1	$10^{-6} \leq THR < 10^{-5}$

Tabulka 58.3.1.: SIL tabulka: Funkce, jejichž kvantitativní požadavky by převyšovaly hranici 10^{-9} , která se zdánlivě nelogicky objevuje u SIL4, vyžaduje podle normy EN 50129 zvláštní technická nebo provozní opatření pro dosažení tak mimořádného cíle.

2. Druhým důležitým faktorem je poněkud odlišná definice chápání úrovní SIL v EN 61508. *Funkční bezpečnost elektrických, elektronických, programovatelných elektronických systémů souvisejících s bezpečností*. Tato norma je obecnou normou pro průmyslové elektronické systémy, z níž vychází normy EN 50126, EN 50 129 atd. jakožto specifické normy pro železniční aplikace. Důležitou odlišností ve specifikaci SIL, viz tab. 2 a 3 v první části této normy (EN 61508-1). Nicméně tabulka 3 pro režim provozu s vysokým, resp. nepřetržitým vyžádáním odpovídá tabulce v normě EN 50129. Avšak i pro tyto systémy se zde jeví určitá odlišnost v požadavcích na zajištění dané SIL. Norma EN 61508 je zaměřena pouze na *funkční bezpečnost*, není zde zahrnutý požadavek na bezpečnou reakci na ojedinělé náhodné poruchy. S poruchami se samozřejmě pracuje, mají být provedena opatření k jejich maximálnímu potlačení - četnosti i následku, nicméně může stačit, když systém je schopen poruchy detektovat a dát o nich vědět (např. obsluze). Závěrem nutno dodat, že je potřeba určité obezřetnosti k tvrzení, že systém splňuje daný SIL. Tento údaj musí být doplněn specifikací, která norma byla při klasifikaci použita.



Obrázek 58.3.2.: Vztah mezi SIL úrovní a technikami jejich dosažení

