

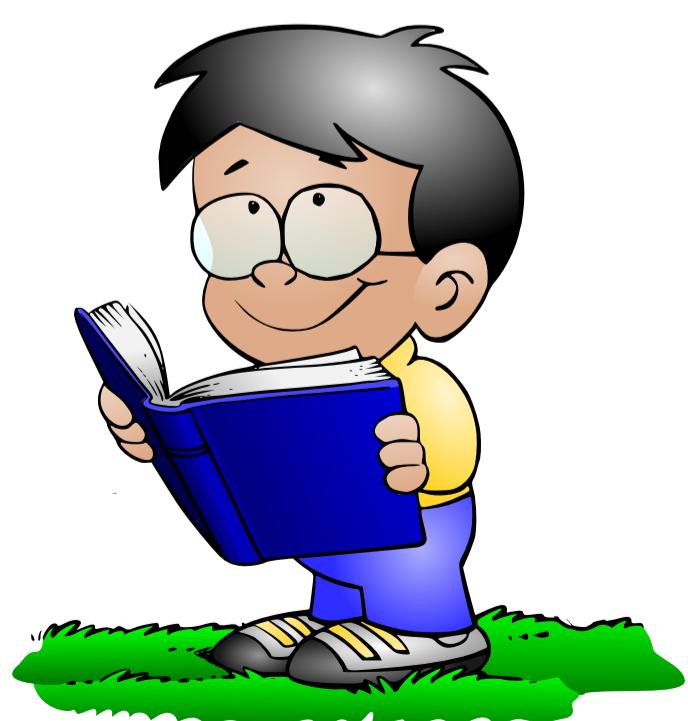
# WIKING





ZÁPADOČESKÁ  
UNIVERZITA  
V PLZNI

*My school notes*



Studijní notes

---

# Wiking

---



# Obsah

<b>I. Lineární algebra</b>	<b>1</b>
1. Základy lineární algebry	3
1.1. Matice . . . . .	3
1.2. Determinanty . . . . .	3
1.3. Vlastní čísla a vlastní vektory . . . . .	5
1.4. Polynomy . . . . .	6
1.5. Vektorové prostory se skalárním součinem . . . . .	7
1.6. Vektory . . . . .	7
Seznam literatury . . . . .	7
<b>II. Matematická analýza I</b>	<b>9</b>
2. Historie matematické analýzy	11
Seznam literatury . . . . .	11
3. Reálná a komplexní čísla	13
Seznam literatury . . . . .	13
4. Limita a spojitost funkce	15
4.1. Reálná funkce . . . . .	15
4.2. Limita funkce . . . . .	18
4.3. Spojitost funkce . . . . .	18
Seznam literatury . . . . .	18
5. Derivace funkce	19
5.1. Základní věty diferenciálního počtu . . . . .	19
Seznam literatury . . . . .	20
6. Aplikace diferenciálního počtu	21
6.1. Průběh funkce . . . . .	21
Seznam literatury . . . . .	22
7. Primitivní funkce	23
7.1. Motivace . . . . .	23
7.2. Tabulka neurčitých integrálů . . . . .	23
7.3. Metody určení primitivní funkce . . . . .	24
Seznam literatury . . . . .	27
8. Určitý integrál	29
8.1. Motivace . . . . .	29
8.2. Vlastnosti určitého integrálu . . . . .	30
Seznam literatury . . . . .	30
9. Řady	31
Seznam literatury . . . . .	31
<b>III. Obyčejné diferenciální rovnice</b>	<b>33</b>
10. Elementární metody řešení diferenciálních rovnic	35
10.1. Diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .	35
Seznam literatury . . . . .	35
<b>IV. Numerické metody</b>	<b>37</b>
11. Úvod do numerických metod	39
11.1. Úvodní slovo . . . . .	39
11.2. Reprezentace čísel ve výpočetní technice . . . . .	39
11.3. Chyby při numerických výpočtech . . . . .	40
11.4. Řešení nelineárních rovnic . . . . .	40
<b>V. Fyzika</b>	<b>43</b>
12. Historie fyziky	45
12.1. Hlavní etapy vývoje . . . . .	45
13. Práce a potenciální energie	47
13.1. Potenciály a pole . . . . .	47

<b>14. Elektromagnetizmus</b>	<b>49</b>
14.1. Elektrické síly . . . . .	49
14.2. Elektrická a magnetická pole . . . . .	50
14.3. Charakteristiky vektorových polí . . . . .	50
14.4. Zákony elektromagnetismu . . . . .	51
14.5. Co jsou pole? . . . . .	53
14.6. Působení na dálku versus teorie pole . . . . .	54
14.7. Elektromagnetizmus ve vědě a technice . . . . .	54
<b>15. Diferenciální počet vektorových polí</b>	<b>57</b>
15.1. Chápání fyziky . . . . .	57
15.2. Vektorový počet . . . . .	57
15.3. Skalární a vektorová pole . . . . .	58
15.4. Derivace polí - gradient . . . . .	58
15.5. Operátor $\nabla$ . . . . .	60
15.6. Operace s $\nabla$ . . . . .	60
15.7. Diferenciální rovnice proudění tepla . . . . .	61
15.8. Druhé derivace vektorových polí . . . . .	61
15.9. Nástrahy . . . . .	62
<b>16. Integrální počet vektorových polí</b>	<b>63</b>
16.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$ . . . . .	63
16.2. Tok vektorového pole . . . . .	64
16.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta . . . . .	64
16.4. Cirkulace vektorového pole . . . . .	66
16.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta . . . . .	67
16.6. Pole s nulovou rotací a divergencí . . . . .	68
16.7. Shrnutí . . . . .	68
16.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury . . . . .	69
<b>17. Elektrostatika</b>	<b>71</b>
17.1. Statika . . . . .	71
17.2. Coulombův zákon, superpozice . . . . .	72
17.3. Elektrický potenciál . . . . .	72
17.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . . . . .	74
17.5. Tok pole $\vec{E}$ . . . . .	74
17.6. Gaussův zákon. Divergence pole $\vec{E}$ . . . . .	75
17.7. Pole nabité koule . . . . .	76
17.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy . . . . .	77
<b>18. Speciální teorie relativity</b>	<b>79</b>
18.1. Princip relativity . . . . .	79
18.2. Lorentzova transformace . . . . .	80
<b>19. Geometrická optika</b>	<b>81</b>
19.1. Úvod . . . . .	81
<b>VI. Astrofyzika</b>	<b>83</b>
<b>20. Úvod</b>	<b>85</b>
20.1. Historie astrofyziky . . . . .	85
20.2. Základní vztahy . . . . .	85
<b>VII. Mechanika</b>	<b>87</b>
<b>21. Kinematika částice</b>	<b>89</b>
21.1. Kinematický popis pohybu částice . . . . .	89
<b>22. Dynamika částice</b>	<b>95</b>
<b>VIII. Teorie elektromagnetického pole</b>	<b>97</b>
<b>23. Spojité matematické modely polí</b>	<b>99</b>
23.1. Elektrický náboj . . . . .	99
23.2. Elektromagnetické pole . . . . .	99
23.3. Elektrostatické pole . . . . .	100
23.4. Stacionární proudové pole . . . . .	101
23.5. Stacionární magnetické pole . . . . .	104
<b>IX. Signály a soustavy</b>	<b>109</b>
<b>24. Číslicové signály - posloupnosti</b>	<b>111</b>
24.1. Základní typy posloupností . . . . .	111
24.2. Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu . . . . .	111
24.3. Základní operace s posloupnosti . . . . .	113

<b>25. Vlastnosti a popis lineárních systému</b>	<b>115</b>
25.1. Linearita, časová invariance a kauzalita . . . . .	115
25.2. Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce . . . . .	117
<b>X. Teorie elektrických obvodů</b>	<b>121</b>
<b>26. Základy elektrických obvodů</b>	<b>123</b>
26.1. Metody řešení lineárních elektrických obvodů . . . . .	123
26.2. Klasická metoda uzlových napětí (MUN) . . . . .	123
26.3. Modifikovaná metoda uzlových napětí . . . . .	124
26.4. Napěťový dělič . . . . .	125
<b>27. Přechodné děje</b>	<b>127</b>
27.1. Fyzikální podstata přechodných dějů . . . . .	127
27.2. Přechodný jev kmitavého obvodu . . . . .	129
<b>28. Harmonické obvody</b>	<b>131</b>
28.1. Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty . . . . .	131
28.2. Obvody s nastavitelnými parametry . . . . .	132
<b>XI. Elektronické součástky</b>	<b>133</b>
<b>29. Základní zákony elektromagnetismu</b>	<b>135</b>
29.1. Magnetická indukce . . . . .	135
29.2. Zákon elektromagnetické indukce . . . . .	135
29.3. Spřažený tok vzduchové cívky . . . . .	138
29.4. Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem . . . . .	138
<b>30. Topologické vlastnosti elektromagnetického pole</b>	<b>139</b>
30.1. Topologie diskrétních útvarů . . . . .	140
<b>31. Teorie transformátoru</b>	<b>141</b>
31.1. Transformátor jako lineární pasivní dvojbran . . . . .	141
31.2. Matematické modely lineárního transformátoru . . . . .	142
31.3. Klasifikace a názvosloví transformátoru . . . . .	142
31.4. Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou . . . . .	142
31.5. Princip činnosti, základní konstrukční provedení . . . . .	143
31.6. Zjednodušený rozbor funkce transformátoru . . . . .	143
31.7. Ztráty v reálném transformátoru . . . . .	144
31.8. Rozptyl transformátoru . . . . .	145
31.9. Cívky s feromagnetickým jádrem . . . . .	145
31.10. Efektivní hodnoty proudů typických průběhů . . . . .	146
<b>32. Optoelektronika</b>	<b>149</b>
32.1. Optoelektronické systémy . . . . .	149
<b>XII. Senzory a akční členy</b>	<b>153</b>
<b>33. Snímače tepelných veličin</b>	<b>155</b>
33.1. Základní pojmy . . . . .	155
<b>XIII. Analogové elektronické systémy</b>	<b>157</b>
<b>34. Počítacová simulace v elektrotechnice</b>	<b>159</b>
34.1. Historie . . . . .	159
34.2. Simulace a analýza v programu LTspice IV . . . . .	159
<b>35. Zesilovače</b>	<b>161</b>
35.1. Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače . . . . .	161
<b>36. Operační zesilovače</b>	<b>163</b>
36.1. Úvod . . . . .	163
36.2. Parametry operačního zesilovače . . . . .	163
36.3. Ideální operační obvod . . . . .	164
<b>37. Konverze mezi digitálním a analogový signálem</b>	<b>167</b>
37.1. Konverze mezi digitálním a analogový signálem . . . . .	167
37.2. Principy A/D převodníků . . . . .	169
37.3. Převod číslicového signálu na analogový . . . . .	170
<b>38. Kmitočtové filtry</b>	<b>173</b>
38.1. Základní vlastnosti kmitočtových filtrů . . . . .	173
38.2. Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky . . . . .	175
38.3. Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů . . . . .	175
38.4. Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu . . . . .	175
38.5. Filtry RLC vyšších řádů . . . . .	175
38.6. Filtry ARC 2. řádu . . . . .	175
38.7. Filtry ARC vyšších řádů . . . . .	175

38.8. Filtry se spínanými kapacitami . . . . .	175
38.9. Zvláštní typy a aplikace kmitočtových filtrů . . . . .	175
<b>XIV. Elektronické napájecí zdroje</b>	<b>177</b>
<b>39. Impulzně regulované napájecí zdroje</b>	<b>179</b>
39.1. Úvod . . . . .	179
39.2. Impulzní regulace ve výkonové elektronice . . . . .	179
39.3. DC/DC měniče bez transformátoru . . . . .	180
39.4. DC/DC měniče s transformátorem . . . . .	182
39.5. Metody regulace spínaných zdrojů . . . . .	188
39.6. Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů . . . . .	189
<b>XV. Číslicové elektronické systémy</b>	<b>191</b>
<b>40. Číslicové systémy a signály</b>	<b>193</b>
40.1. Co je číslicový systém . . . . .	193
40.2. Kombinační logické funkce . . . . .	193
<b>41. Číslicové součástky a technologie</b>	<b>197</b>
41.1. Rozdělení číslicových integrovaných obvodů . . . . .	197
41.2. Bipolární digitální obvody . . . . .	197
41.3. Unipolární digitální obvody . . . . .	197
41.4. Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd . . . . .	198
<b>XVI. Mikroprocesorová technika</b>	<b>201</b>
<b>42. Procesory AVR</b>	<b>203</b>
42.1. AVR Architektura . . . . .	203
<b>43. ANSI-C pro mikrokontroléry</b>	<b>205</b>
43.1. Stručný úvod . . . . .	205
<b>XVII. Programovatelné logické obvody</b>	<b>207</b>
<b>44. Architektura</b>	<b>209</b>
44.1. Typy struktur programovatelných logických obvodů . . . . .	209
44.2. Dynamické parametry PLD . . . . .	214
<b>45. Jazyk VHDL</b>	<b>215</b>
45.1. Návrh číslicového obvodu . . . . .	215
45.2. Úvod . . . . .	215
45.3. Základní vlastnosti jazyka VHDL . . . . .	216
45.4. Logické úrovně . . . . .	216
45.5. Souběžné příkazy . . . . .	216
45.6. Sekvenční příkazy . . . . .	217
45.7. Technologicky nezávislá část návrhu . . . . .	217
45.8. Knihovna LPM . . . . .	217
<b>XVIII. Elektromagnetická kompatibilita</b>	<b>219</b>
<b>46. Vlastnosti plošných spojů</b>	<b>221</b>
<b>XIX. C</b>	<b>223</b>
<b>47. Terminálový vstup a výstup</b>	<b>225</b>
47.1. Hlavíčkový soubor stdio.h . . . . .	225
47.2. Standardní vstup a výstup znaku . . . . .	225
47.3. Standardní vstup a výstup řetězců . . . . .	226
47.4. Formátovaný standardní vstup a výstup . . . . .	226
47.5. Souhrnné cvičení . . . . .	226
<b>48. Pointery</b>	<b>227</b>
48.1. Základy práce s pointery . . . . .	227
<b>49. Preprocesor jazyka C</b>	<b>229</b>
49.1. Připojení externích souborů . . . . .	229
49.2. Definice maker . . . . .	229
49.3. Podmíněný překlad . . . . .	229
<b>XX. ANSI/C++</b>	<b>231</b>
<b>50. Přehled jazyka C++</b>	<b>233</b>
50.1. Objektově orientované programování . . . . .	233

<b>51. Úvod do tříd</b>	<b>237</b>
51.1. Funkce konstruktor a destruktur	237
<b>XXI.Elektrické měřicí systémy</b>	<b>239</b>
<b>52. LabView</b>	<b>241</b>
52.1. Filosofie a součásti vývojového pořízení LabView	241
52.2. Základní části virtuálního přístroje	242
52.3. Práce s grafy	242
<b>XXIVYkonová elektronika</b>	<b>245</b>
<b>53. Měniče s vnější komutací</b>	<b>247</b>
53.1. Takt a komutace	247
<b>54. Polovodičové součástky výkonové elektroniky</b>	<b>249</b>
54.1. MOSFET tranzistory	249
<b>55. Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů</b>	<b>251</b>
55.1. Úvod	251
55.2. Výkonové tranzistory MOS	251
55.3. Tranzistory IGBT	251
55.4. Metody řízení spínacího procesu	251
55.5. Způsoby detekce nadproudů	252
<b>XXII.Elektrické přístroje</b>	<b>255</b>
<b>56. Teorie elektrického oblouku</b>	<b>257</b>
56.1. Teorie spínacího oblouku	257
<b>XXIVŽelezniční zabezpečovací technika</b>	<b>261</b>
<b>57. Úvod</b>	<b>263</b>
57.1. Klasifikace poruch	263
<b>58. Bezpečnost a spolehlivost zabezpečovacích systémů</b>	<b>265</b>
58.1. Spolehlivost	265
58.2. Bezpečnost	265
58.3. Integrita bezpečnosti	266



**Část I.**

**Lineární algebra**



# 1. Základy lineární algebry

## Obsah

<b>1.1. Maticy</b>	3
1.1.1. Maticová algebra	3
1.1.2. Označení prvků matic	3
<b>1.2. Determinanty</b>	3
1.2.1. Permutace	3
<b>1.3. Vlastní čísla a vlastní vektory</b>	5
1.3.1. Motivace	5
<b>1.4. Polynomy</b>	6
1.4.1. Rozklad rye racionální funkce na parciální zlomky	6
<b>1.5. Vektorové prostory se skalárním součinem</b>	7
1.5.1. Orthonormální doplňky	7
<b>1.6. Vektory</b>	7
<b>Seznam literatury</b>	7

## 1.1. Maticy

**Definice 1.1.1.** Nechť  $m, n$  jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici  $(m, n)$ . Jestliže každé uspořádané dvojici  $(m, n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  přiřadíme prvek  $a_{i,j} \in \mathcal{R}$  obdržíme reálnou **matici** typu  $(m, n)$  nad  $\mathcal{R}$ . Čísla jsou indexy, i je řádkový a j je sloupcový index.

Matici zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

která má právě  $mn$  prvků  $(a_{ij})$  uspořádaných do  $m$  řádků a  $n$  sloupců. Stručně píšeme  $A = (a_{ij})$

**Příklad 1.1.1.** Matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice velikosti  $4 \times 4$ . Prvek matice  $a_{23}$  je 2.

### 1.1.1. Maticová algebra

**Definice 1.1.2.** Součinem matic  $A \in \mathcal{R}_{m,n}$  a matici  $B \in \mathcal{R}_{n,p}$  v uvedeném pořadí, je matice  $C \in \mathcal{R}_{m,p}$  pro kterou platí:

$$C = AB; C = (c_{ij}); c_{ij} = \sum_n a_{ik} b_{kj}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p. \quad (1.1.2)$$

Součin matic  $A$  a  $B$  je definován právě tehdy, když počet sloupců matice  $A$  je roven počtu řádků matice  $B$ . Obrázek 1.1.1 demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobením druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku  $c_{ij}$  (viz 1.1.2).

### 1.1.2. Označení prvků matic

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **řádek** a **sloupec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice  $A$  se obvykle značí  $a_{ij}$ . Potom i-tý řádek matice obsahuje vodorovnou n-tici prvků  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$  a j-tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ , kde  $j = 1, 2, \dots, n$ .

V tabulce 1.1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální<sup>1</sup>, jednotkové<sup>2</sup>, nulové, transponované a symetrické.

Matici téhož typu  $(m, n)$  nad  $\mathbb{R}$  budeme značit  $\mathbb{R}_{m,n}$ .

**Definice 1.1.3.** (Rovnost matic): Matice  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  je rovna matici  $\mathbf{B} = (b_{kl})$ , jsou-li matici stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě **rovnají**, tj.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{m,n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

## 1.2. Determinanty

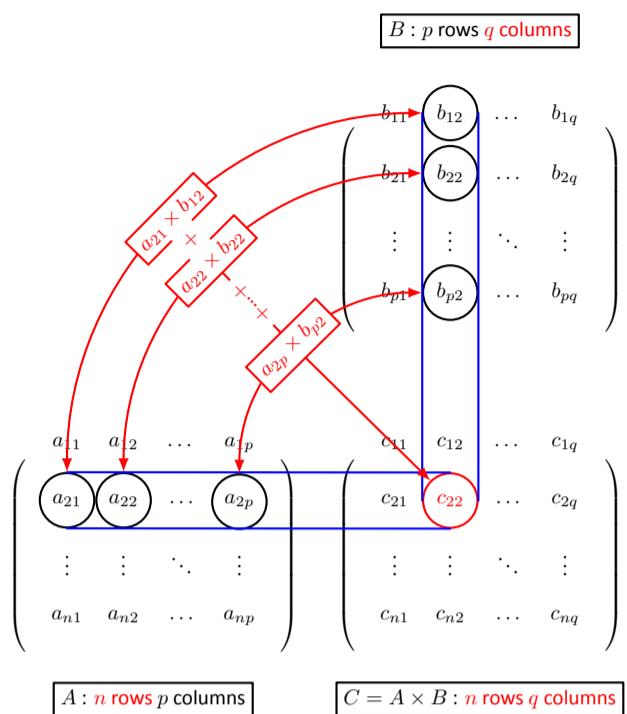
Abychom mohli nadefinovat determinant, budeme muset vědět, jak vypočítat permutaci entice, respektive znaménko permutace.

### 1.2.1. Permutace

**Definice 1.2.1.** Nechť  $M$  je libovolná konečná množina. Permutací množiny  $M$  nazýváme zobrazení  $\pi$  množiny  $M$  na sebe.

<sup>1</sup>Prvky  $a_{ii}$  kde  $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$  tvoří hlavní diagonálu. Matice  $D$  je typu  $(m, m)$ , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

<sup>2</sup>Jestliže  $m = n$ , pak mluvíme o čtvercové matici řádu  $m$ .



Obrázek 1.1.1.: Násobení matic - 1. krok

Maticce	Zápis
řádková	$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
sloupcová	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
diagonální	$a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
jednotková	$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
nulová	$\mathbf{0} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \forall i, j$
transponovaná	$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
symetrická	$\mathbf{S} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

Tabulka 1.1.1.: Speciální typy matic

**Příklad 1.2.1.** Permutace  $\pi$  množiny  $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$  je např. zobrazení  $\pi$ , definované předpisem:

$$\pi(a) = c, \pi(b) = d, \pi(c) = b, \pi(d) = a, \quad (1.2.1)$$

Místo tohoto zápisu se však používá přehlednější zápis ve tvaru matice typu (2, 4):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

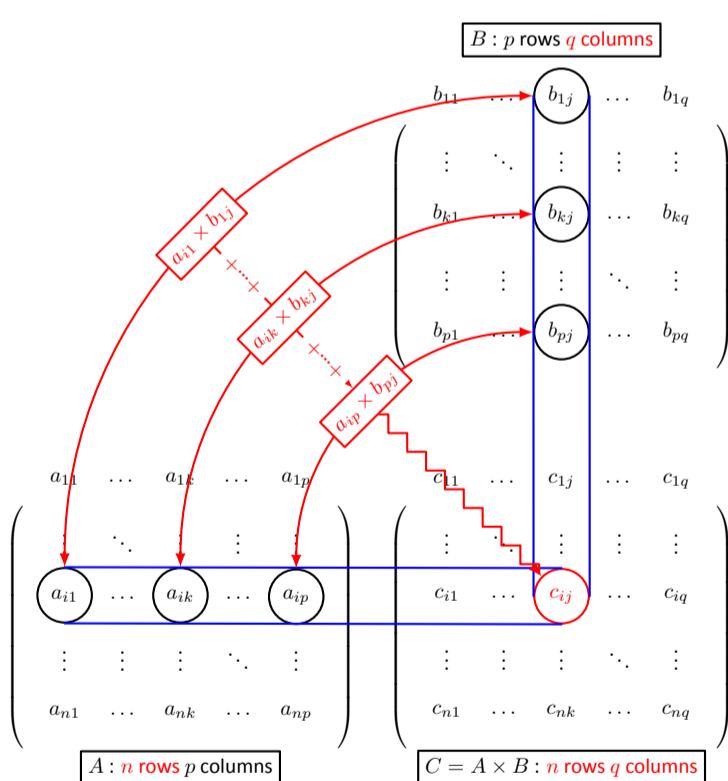
kde v prvním řádku jsou vypsány všechny prvky množiny  $\mathbf{M}$  (v libovolném pořadí) a ve druhém řádku je pod každým prvkem zapsán jeho obraz v permutaci. Tutož permutaci však můžeme zapsat ve tvaru matice několika různými způsoby. Například mohou být zapsány takto:

$$\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & a & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \text{apod.} \quad (1.2.3)$$

Zřejmě všechny čtyři uvedené zápisy permutací rov. 1.2.2 ve tvaru matice se liší navzájem pouze pořadím sloupců. Aby bylo možné zapsat každou permutaci množiny  $\mathbf{M}$  ve tvaru rov. 1.2.2 jediným způsobem, je nutné zvolit pevné pořadí prvků množiny  $\mathbf{M}$  a v zápisu permutace uvádět prvky matice  $\mathbf{M}$  v prvním řádku v tomto pořadí. Avšak známe-li toto pořadí prvků množiny  $\mathbf{M}$ , je pak obvykle zbytečné jej v zápisu permutace uvádět, ale stačí uvést pouze pořadí obrazů, tj. druhý řádek. Zvolíme-li např. v naší množině  $\mathbf{M}$  pevné pořadí prvků  $\{a, b, c, d\}$ , pak permutaci rov. 1.2.1 zapíšeme jako uspořádanou čtveřici  $\{c, d, b, a\}$ .

**Definice 1.2.2.** Když vytváříme uspořádanou  $n$ -tici navzájem různých prvků  $n$ -prvkové množiny  $\mathbf{M}$ , přiřazujeme každému prvku množiny  $\mathbf{M}$  právě jedno přirozené číslo, index příslušného prvku, z množiny prvních  $n$  přirozených čísel.

$$\pi = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (1.2.4)$$



Obrázek 1.1.2.: násobení matic - 2. krok

Proto každé permutaci uspořádané  $n$ -tice prvků množiny  $\mathbf{M}$  odpovídá jednoznačně permutace příslušných indexů tj. permutace množiny 1.2.4 z definice 1.2.2. Stačí se tedy omezit při vyšetřování permutací  $n$ -prvkové množin na vyšetřování permutací množiny 1.2.4. Permutace  $\pi$  množiny 1.2.4 budeme zapisovat jako uspořádané  $n$ -tice

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$$

, kde  $\pi(i)$  je číslo z množiny 1.2.4, které permutace  $\pi$  přiřazuje číslu  $i$ .

**Příklad 1.2.2.** *Spočítejme celkový počet permutací množiny.* V každé uspořádané  $n$ -tici může být na prvním místě kterákoli z  $n$  cifer, na druhém místě kterákoli ze zbývajících  $n - 1$  cifer (kromě té, která je na prvním místě), na třetím místě každá ze zbývajících  $n - 2$  cifer atd. Je tedy celkový počet všech permutací  $n$ -prvkové množiny  $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ . Toto číslo se zapisuje pomocí symbolu  $n!$  (čti  **$n$ -faktoriál**).

**Definice 1.2.3.** *Inverze v permutaci:* Inverzí v permutaci  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

## 1.3. Vlastní čísla a vlastní vektory

### 1.3.1. Motivace

**Poznámka:** Je-li  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  lineární zobrazení z prostoru  $\mathcal{V}$  do prostoru  $\mathcal{V}$  (nikdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít takovou bázi prostoru  $\mathcal{V}$ , že je matici zobrazení  $\mathbf{A}$  v této bázi co nejjednodušší, např. má následující strukturu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & A_k \end{pmatrix},$$

kde  $A_k$  jsou čtvercové matice malého rádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde  $A_k$  jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

**Definice 1.3.1.** Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$  (matice je čtvercová řádu  $n$ ).

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jestliže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (1.3.1)$$

pro jisté komplexní číslo  $\lambda \in \mathbb{C}$  a jistý nenulový vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \Theta$ , potom číslo  $\lambda$  nazýváme **vlastním číslem** matice  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{x}$  **vlastním vektorem** příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme **spektrem matice**

**A.** Pokud rov. 1.3.1 rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

můžeme ji rovněž psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

**Poznámka:** U vlastních čísel studium pouze reálných matic ztrácí smysl, protože i reálná matice může mít komplexní vlastní čísla. Proto se uvažuje obecná komplexní matice.

**Poznámka:** Podmínka existence nenulového vektoru  $\mathbf{u} = \Theta$  v definici vlastního čísla je nezbytná: kdyby bylo připoštěno i  $\mathbf{u} = \emptyset$ , potom by každé komplexní číslo bylo vlastním číslem a definice by ztratila smysl.

**Poznámka:** Odpovídá-li matice  $\mathbf{A}$  matici nějakého zobrazení  $\mathcal{A}$ , pak každý nenulový vektor z jádra zobrazení  $\ker \mathcal{A}$  je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu  $\emptyset$ . Je-li  $\ker \mathcal{A} = \{\Theta\}$  (je-li matice  $\mathbf{A}$  regulární), pak  $\emptyset$  není vlastním číslem matice  $\mathbf{A}$ .

**Příklad 1.3.1.** Je-li  $\mathbf{P}$  matice ortogonální projekce v prostoru  $\mathbb{R}^3$  na nějaký podprostor  $\mathcal{U}$  ( $\mathcal{U}$  je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  platí  $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ , všechny vektory z  $\mathcal{U}$  (s výjimkou nulového vektoru  $\Theta$ ) jsou vlastními vektory matice  $\mathbf{P}$  příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor  $\mathcal{U}^\perp$  je roven jádru

projekce (nulovému prostoru matice  $\mathbf{P}$ ), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku  $\mathcal{U}$  (s výjimkou  $\Theta$ ) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.

Soustava rov. 1.3.3 je **homogenní** a stručně ji můžeme zapsat

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (1.3.4)$$

Homogenní soustava má netriviální řešení, právě když je determinant matice soustavy roven nule, tj. v případě soustavy rov. 1.3.3, resp. rov. 1.3.4 platí

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0} \quad (1.3.5)$$

Determinant  $A(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$  nazýváme **charakteristický polynom** matice  $A$  - jedná se o polynom stupně  $n$  v proměnné  $\lambda$ , který má v oboru komplexních čísel  $n$  kořenů. Rovnice  $A(\lambda) = 0$  nazýváme **charakteristická rovnice matice A** - jejími kořeny jsou **charakteristické hodnoty** (resp. **vlastní čísla**) matice  $A$ .

**Příklad 1.3.2.** Určete spektrum matice a její spektrální poloměr následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$

**Rешení:** Spektrum matice je množina všech jejích vlastních čísel. Spektrální poloměr je maximum z absolutních hodnot vlastních čísel. Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .

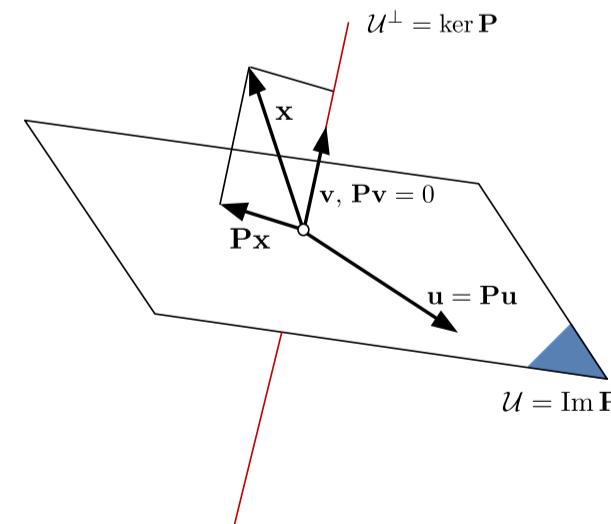
$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -3 - \lambda & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2 - \lambda)^2(-3 - \lambda) + 1.25(2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) &= 0 \\ (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 1.25 + 6] &= 0 \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1.25) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -0.5 + i, \quad \lambda_3 = -0.5 - i$$

- Spektrum matice  $\mathbf{A}$  je  $\sigma(\mathbf{A}) = \{2, -0.5 + i, -0.5 - i\}$ .

- Spektrální poloměr  $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| = 2$ .



Obrázek 1.3.1.

**Příklad 1.3.3.** Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic: Vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  pro  $\lambda_2 = \frac{7-3i}{2} : (\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

**Řešení:** Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice:  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ . Vlastní vektory  $\mathbf{x}_i$  odpovídající vlastním číslům  $\lambda_i$ , jsou řešením homogenní soustavy rovnic  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$ .

$$\begin{pmatrix} 3 - \frac{7-3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7-3i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -(1+3i) \\ 5 & (1+3i) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1-3i \\ 5 \end{pmatrix}, r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0$$

- Vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0.5 \\ -3.5 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (1-\lambda)(4-\lambda) - \frac{7}{4} &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + \frac{9}{4} &= 0 \\ \lambda_1 &= 4.5, \quad \lambda_2 = 0.5 \end{aligned}$$

```

1 % example:
2 % Determine the spectrum of a matrix and its spectral radius:
3 % write the matrix A
4 A = [2 2 0; -3 -3 5; 0 -0.25 2]
5 % solutions:
6 % d = eig(A) Returns the vector of the matrix's own numbers.
7 vlastni_cisla = eig(A)
8 spektralni_pomer = max(abs(vlastni_cisla))
9 =====
10 % example:
11 % Specify your own numbers and corresponding own vectors
12 % of the following matrices:
13 A1 = [1 0.5; 3.5 4]
14 A2 = [3 -1; 2.5 4]
15 % solutions:
16 [vl_vektory_mA1, vl_cisla_mA1] = eig(A1)
17 [vl_vektory_mA2, vl_cisla_mA2] = eig(A2)
18 % notes:
19 % vlastni cisla jsou na diagonale
20 % 1. sloupec vl_vektoru odpoveda vl_cislu v 1. sloupce

```

- Vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2.5 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (3-\lambda)(4-\lambda) + \frac{5}{2} &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + \frac{29}{2} &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{7+3i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7-3i}{2} \end{aligned}$$

**Výpis 1.1:** Výpis programu pro ověření výpočtu vlastních čísel matic programem Matlab.

**Příklad 1.3.4.** Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$ , kde  $\mathbf{A}$  je matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** (z předchozího příkladu víme, že  $\lambda_1 = 4.5, \lambda_2 = 0.5$ ) a  $\mathbf{I}$  jednotková matice. Označme symbolem  $\lambda$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  a nechť  $\mathbf{x}$  je příslušný vlastní vektor. Pak platí:

- Matrice  $\mathbf{A}^2$  má vlastní čísla rovna  $\lambda^2$ .
- Matrice  $4\mathbf{A}$  má vlastní čísla rovna  $4\lambda$ .
- Matrice  $9\mathbf{A}^{-1}$  má vlastní čísla rovna  $\frac{9}{\lambda}$ .

Matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$  má vlastní čísla ve tvaru  $\lambda^2 - 4\lambda + \frac{9}{\lambda} - 1$ , vlastní vektory jsou stejné jako vlastní vektory odpovídající vlastním číslům matice  $\mathbf{A}$ . Tedy:

$$\sigma(B) = \{4.5^2 - 4 \cdot 4.5 + \frac{9}{4.5} - 1, \quad 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + \frac{9}{0.5} - 1\} = \{3.25, 15.25\}$$

**Definice 1.3.2. Rovnost dvou polynomů:** Řekneme, že dva polynomy  $f(x) = a_n x^n + a^{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_1 + a_0$  a  $g(x) = b_m x^m + b^{(m-1)} x^{(m-1)} + \dots + b_1 + b_0$  stupňů  $n$  a  $m$  se sobě rovnají právě tehdy, když  $m = n$  a  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_{(n-1)} = b_{(m-1)}, a_n = b_m$ . V tomto případě také říkáme, že mnohočleny  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou **totožné**.

**Věta 1.3.1.** Jestliže mnohočleny  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou dva polynomy stupně  $n$ -tého a jestliže pro  $n+1$  různých reálných nebo komplexních čísel  $x$  platí  $f(x) = g(x)$ , potom jsou polynomy **totožné**.

## 1.4. Polynomy

### 1.4.1. Rozklad rye racionální funkce na parciální zlomky

**Příklad 1.4.1.** Rozložte na parciální zlomky lomenou racionální funkci

$$f(x) : y = \frac{7x+8}{x^2+x-2}$$

Nejprve vypočteme nulové body jmenovatele:

$$x^2 + px + q = (x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv \rightarrow p = -(u+v), \quad q = uv$$

Kořenové činitele  $x^2 + x - 2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$  zvolíme za jmenovatele parciálních zlomků a rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{7x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  pro  $\lambda_1 = 4.5 : (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-4.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4-4.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3.5 & 0.5 \\ -3.5 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  pro  $\lambda_2 = 0.5 : (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-0.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4-0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 3.5 & 3.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  pro  $\lambda_1 = \frac{7+3i}{2} : (\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 - \frac{7+3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7+3i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -(1-3i) \\ 5 & (1-3i) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1+3i \\ 5 \end{pmatrix}, r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0$$

kde  $A, B$  jsou neznámé konstanty. Tyto konstanty určíme tak, aby rozklad platil pro každé  $x \in \mathcal{R} - \{1, -2\}$ . Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost dvou polynomů

$$7x + 8 = (A + B)x + 2A - B$$

Podle 1.3.1 se musí rovnat koeficienty u  $x$  a absolutní členy obou stran poslední rovnice  $\Rightarrow$  dostaneme soustavu rovnic pro určení  $A$  a  $B$  ve tvaru:

$$\begin{aligned} 7 &= A + B \\ 8 &= 2A - B \\ A &= 5, \quad B = 2 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

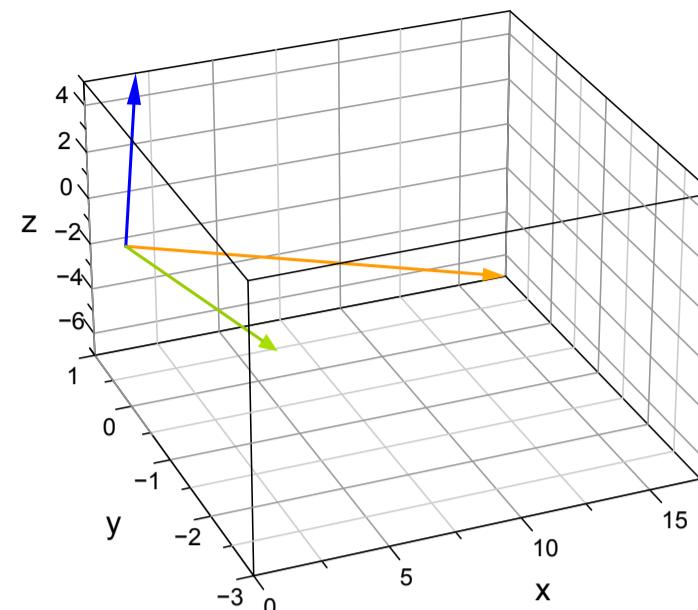
Postup, který jsme užili, nazýváme **Metodou neurčitých koeficientů**.

Pozn: Pro určení koeficientů  $A, B$  se užívají také jiné postupy, např. dosazování kořenů jmenovatele, která je výhodná zejména v případech, kdy jmenovatel lomené racionální funkce má jednoduché kořeny. Postupujeme tak, že rov. 1.4.1 násobíme součinem kořenových činitelů  $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$  a dostaneme rovnici

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

pro určení koeficientů  $A, B$  dosazováním kořenů.

$$\begin{aligned} x = -2 \rightarrow \quad -14 + 8 &= B(-2 - 1) \rightarrow B = 2 \\ x = +1 \rightarrow \quad +7 + 8 &= A(1 + 2) \rightarrow A = 5 \end{aligned}$$



**Obrázek 1.5.1.:** Vizualizace vektorového prostoru a jeho ortogonálního doplňku pomocí sw MatLab - MuPAD příkazem:  
`plot(plot::Arrow3d([1,-3,2]),plot::Arrow3d([2,1,5]),  
plot::Arrow3d([17,1,-7]))`

## 1.5. Vektorové prostory se skalárním součinem

### 1.5.1. Ortogonální doplňky

Nechť  $U$  je podprostor vektorového prostoru  $V$ . Ortogonální doplněk  $U^\perp$  obsahuje všechny vektory, které jsou kolmé ke každému vektoru z  $U$ , neboli

$$\forall \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

což lze vyjádřit pomocí skalárního součinu  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ortogonální doplněk  $U^\perp$  k podprostoru  $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$  tedy hledáme jako řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left( \begin{array}{c|c} \vec{u}_1 & 0 \\ \dots & \vdots \\ \vec{u}_k & 0 \end{array} \right),$$

nuly na pravé straně při výpočtu zpravidla vynescháváme. Připomeňme také vztah

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \tag{1.5.1}$$

#### Příklad 1.5.1. Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle (1, -3, 2), (2, 1, 5) \rangle^\perp$$

(Zdroj: [Mošo7, s. 3])

**Řešení:** Hledáme vektor  $(x, y, z)$ , jehož skalární součin je se zadánymi vektory roven nule. Budeme tedy řešit (úpravou na Gaussův tvar pomocí elementárních úprav) homogenní soustavu rovnic zadanou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odtud dostáváme

$$z = \alpha, \quad 7y + z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}\alpha, \quad x + \frac{3}{7}\alpha + 2\alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{17}{7}\alpha$$

neboli

$$(x, y, z) = \alpha \left( -\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right) = \alpha = (17, 1, -7).$$

V dalších příkladech budeme nuly na pravé straně soustavy vyneschávat a upravovat na výhodnější tvar

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc} 7 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

Odtud již snadno zjistíme, že vektor  $(x, 1, -7)$  jistě vyhovuje druhé rovnici. Dosadíme-li ho do první rovnice, dostaneme  $7x + 17 \cdot (-7) = 0$  a  $x = 17$ .

Hledaný ortogonální doplněk je tedy lineární obal

$$\langle (17, 1, -7) \rangle^\perp.$$

Výsledek předchozího příkladu 1.5.1 lze interpretovat tak, že jsme našli všechny vektory, které jsou kolmé na rovinu určenou vektory ze zadání. Rovina je útvary dvojrozměrný a protože prostor všech vektorů je trojrozměrný, musí nutně mít podprostor ortogonálních vektorů ve shodě se vztahem 1.5.1 pouze jednu dimenzi. Vše je dobře patrné z obr. 1.5.1

## 1.6. Vektory

Zadejte složky vektoru  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}$$

a vektoru  $\vec{b}$ :

$$\vec{b} = \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}$$

Operace s vektory:

$$\vec{a} + \vec{b} = \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\theta = \quad \circ$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \quad \vec{x} + \quad \vec{y} + \quad \vec{z}$$

## Seznam literatury

- [Mošo7] F. Mošna. "Řešené příklady z Matematiky III". In: XXX (Oct. 2007). příklady (cit. on p. 7).



**Část II.**

**Matematická analýza I**



## 2. Historie matematické analýzy

### Obsah

Seznam literatury . . . . .	11
-----------------------------	----

Analýza jako nezávislý předmět byla vytvořena v 17. stol. během vědecké revoluce. Kepler, Galilei, Descartes, Fermat, Huygens, Newton a Leibniz, když zmíníme jen několik důležitých jmen těch, kteří přispěli k jejímu vzniku. Otázky z mechaniky, optiky a astronomie hrály roli v jejím raném období, tak jako vnitřní problémy matematiky, jako výpočet obsahů, objemů a analýza komplikovaných křivek. Pohyb po zakřivených drahách působením proměnných sil, které se staly předmětem důkladného zájmu po studiu volně padajících těles Galilea, vedl k počátečnímu úspěchu. Z velké rozmanitosti snah, které se objevily na konci 17. stol. v práci Newtona a Leibnize, se zrodila nová matematická disciplína, jejiž některé poznatky jsou v této studijních zápisích.

Základní myšlenka použití diferenciálních rovnic k získání pohledu na globální chování proměnných kvantit z jejich (infinitezimálních) změn prokázala základní a plodné výsledky daleko za hranicemi matematiky a fyzika a formovala náš souhrnný vědecký pohled na svět, zvláště na představu o kauzalitě. Na konci 18. stol., však, největší vědci došli ke shodě, že procesy v přírodě (a společnosti) jsou determinovány a podřízeny zákonům, které mohou být popsány v podobě diferenciálních rovnic. Laplace, tento mistr matematické fyziky, naznačil obraz nějaké fiktivní vševedoucí inteligence, užívající úplnou znalost zákonů a stavu světa v daný časový okamžik, by mohla předpovídat další vývoj světa navždy a hned. Myšlenka *přirodních zákonů* byla kmotrem při vytvoření matematického pojmu funkce a naopak nebyla by to myšlenka nikdy tak vlivná, kdyby matematická analýza nevyvíjela úspěšné metody pro výzkum funkčních závislostí.



### 3. Reálná a komplexní čísla

#### Obsah

Seznam literatury . . . . .	13
-----------------------------	----

---



## 4. Limita a spojitost funkce

### Obsah

4.1. Reálná funkce . . . . .	15
4.1.1. Pojem funkce . . . . .	15
4.1.2. Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce . . . . .	15
4.1.3. Některé zvláštní vlastnosti funkcí . . . . .	16
4.1.4. Operace s funkcemi. Uspořádání . . . . .	17
4.1.5. Elementární funkce . . . . .	17
4.1.6. Zobrazení v jiných strukturách . . . . .	18
4.1.7. Cvičení . . . . .	18
4.2. Limita funkce . . . . .	18
4.3. Spojitost funkce . . . . .	18
Seznam literatury . . . . .	18

### 4.1. Reálná funkce

#### 4.1.1. Pojem funkce

#### 4.1.2. Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce

Každé funkci můžeme přiřadit její graf. **Grafem funkce**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, jejíž souřadnice  $x, y$  v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovuje rovnice

$$y = f(x). \quad (4.1.1)$$

Grafem funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné „představy“. Grafy některých funkcí jsou „křivky“ (intuitivním smyslu tohoto slova). Avšak u některých funkcí názorná představa grafu selhává. Vezmeme-li např. Dirichletovu funkci z odst. \*\*, snadno zjistíme, že její graf nemůžeme sestrojit (byly by to „dvě rovnoběžné přímky  $y = 0$  a  $y = 1$  s nekonečným množstvím mezer“).

Zadat funkci znamená udat její definiční obor a „zobrazovací předpis“, tj. pravidlo (formulované slovně či v používaném matematickém jazyku), podle něhož můžeme jednoznačným způsobem rozhodnout, jaká funkční hodnota odpovídá libovolně zvolenému číslu z definičního oboru. Definičním oborem bývá často interval nebo sjednocení intervalů. Není-li definiční obor udán, rozumíme jím množinu všech reálných čísel, pro něž je příslušný předpis definován. Tuto množinu nazýváme **přirozeným (též maximálním) definičním oborem funkce**. Je to tzv. *existenční obor* výrazu, jímž je funkce definována [BMR89, s. 84].

Například funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , můžeme vyjádřit bez udání definičního oboru  $\mathbb{R}$  vztahem

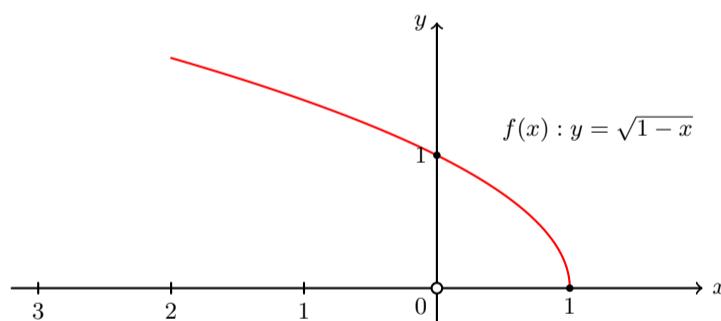
$$f : y = x^2,$$

neboť předpis  $y = x^2$  má smysl pro každé reálné číslo  $x$ . Avšak u funkce  $g : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$ , je nutné v zápisu funkce definiční obor  $\langle 0, 1 \rangle$  uvést, píšeme tedy

$$g : y = x^2, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zobrazovací předpis, kterým je funkce zadána, může být rozmanitý. Nejčastěji a pro účely matematické analýzy nevhodnější je *analytické zadání vzorcem*, tj. rovnicí tvaru  $y = f(x)$  nebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru. Přitom v rovnici  $y = f(x)$  je na pravé straně nějaký správně definovaný výraz obsahující nejvýše poměnnou  $x$  a nabývající jednoznačné hodnoty pro danou hodnotu proměnné  $x$ .

**Příklad 4.1.1.** Vzorcem  $f(x) = \sqrt{1-x}$  je dána funkce, jejímž přirozeným oborem je interval  $(-\infty, 1]$  (uvážme, že výraz  $\sqrt{1-x}$  je definován v reálném oboru, je-li  $1-x \geq 0$ ). Graf této funkce je část paraboly, jejíž osou je osa  $x$ , viz obr. 4.1.1.



Obrázek 4.1.1.: Graf funkce  $y = \sqrt{1-x}$  je část paraboly, jejíž osou je osa  $x$

**Příklad 4.1.2.** Funkce je dána vzorcem

$$f(x) : y = |x|.$$

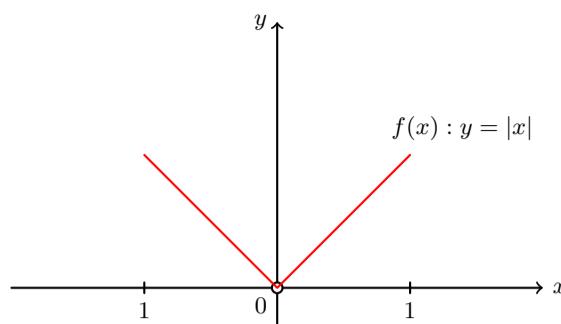
Přirozeným definičním oborem této funkce je množina  $\mathbb{R}$ . Táž funkce může být dána i vzorcem

$$f(x) : y = \sqrt{x},$$

nebo dvěma rovnicemi

$$f(x) : y = \begin{cases} x & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

což je zřejmé, uvědomíme-li si jak je definována absolutní hodnota. Graf funkce je na obr. 4.1.2.

Obrázek 4.1.2.: Graf funkce  $y = |x|$ 

Funkce může být analyticky zadána i jinak než vzorcem  $y = f(x)$ . časté je **parametrické vyjadřování**, tj. vyjádření dvojicí rovnic

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J, \quad (4.1.2)$$

kde  $\varphi, \psi$  jsou funkce definované na množině  $J$  ( $J$  bývá obvykle interval). Proměnná  $t$  se nazývá **parametr**: má zde pomocný význam. Zajímá nás totiž vztah mezi  $x$  a  $y$ . Rovnice 4.1.2 definuje relaci  $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ :

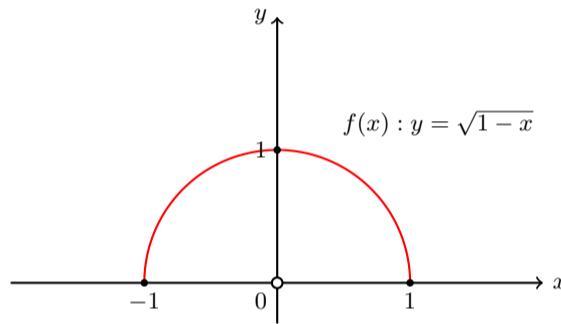
$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{ existuje } t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t), y = \psi(t)\}. \quad (4.1.3)$$

Tato relace může být za určitých podmínek jednoznačná tj. je funkcií z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ . V tomto případě říkáme, že funkce  $f$  je **definována parametricky rovnicemi 4.1.2**.

**Příklad 4.1.3.** Rovnice  $x = \cos t, y = \sin t \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$ , definuje parametricky funkci

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (4.1.4)$$

jejíž grafem je polokružnice, ležící v horní polorovině  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$ .

Obrázek 4.1.3.: Graf funkce  $y = \sqrt{1 - x^2}$  je polokružnice

Blíže se parametrickým zadáním funkce budeme zabívat v kapitole 6 (Aplikace diferenciálního počtu).

Funkce může být někdy zadána též rovnicí tvaru

$$F(x, y) = 0. \quad (4.1.5)$$

Přitom  $F$  je funkce dvou proměnných, tj. zobrazení z  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Kromě rovnice 4.1.5 může být dána ještě podmínka, aby bod  $(x, y)$  patřil k některé množině  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Rovnicí 4.1.5 je definován opět jakási relace  $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = 0\} \quad (4.1.6)$$

(případně  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0, (x, y) \in M\}$ ), zajímá nás, kdy tato relace je funkcií z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ . Říkáme pak, že funkce  $f$  je dána **implicitně** uvedenou rovnicí 4.1.5 (příp. rovnici 4.1.5 a podmírkou  $(x, y) \in M$ ). Naproti tomu zadání funkce ve tvaru  $y = f(x)$  nazýváme **explicitním**.

**Příklad 4.1.4.** Rovnicí  $x + 2y - 3 = 0$  je implicitně definována funkce  $f : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

**Příklad 4.1.5.** Rovnicí  $x^2 + y^2 = 1$  a podmírkou  $y \geq 0$  je definována implicitní funkce z příkladu 4.1.3. Relace  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  není ovšem jednoznačná, každé hodnotě  $x \in (-1, 1)$  odpovídají dvě hodnoty  $y$ :  $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ . Podmírkou  $y \geq 0$  druhou hodnotu vylučujeme. Místo podmíny  $y \geq 0$  bychom mohli uvést i jiné podmíny, aby rovnice  $x^2 + y^2 = 1$  určovala implicitní funkci.

Vyšetřování podmínek, při nichž rovnice  $F(x, y) = 0$  je definována funkce  $f$ , se obvykle provádí metodami matematické analýzy funkce více proměnných.

Funkce může být někdy dána tabulkou, tj. dvojicemi hodnot argumentu a funkce, což bývá obvyklé při zjišťování závislosti veličin měřením. Proměnná  $x$  se v tomto

případě mění "diskrétně". Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme definovat úplně jen tehdy, je-li definiční obor konečná množina. Tabulkou však používáme i v jiných případech, zejména chceme-li vyznačit pomocí ní, některé hodnoty, které nás z nějakého důvodu přednostně zajímají.

V technických aplikacích bývá funkce dána graficky. Z grafu můžeme ovšem funkční hodnoty určit pouze přibližně. Pro další matematické zpracování je grafické zadání nejméně vhodné, i když jeho praktický význam nelze popřít.

Speciálním případem reálných funkcí jedné reálné proměnné jsou *posloupnosti reálných čísel*.

### 4.1.3. Některé zvláštní vlastnosti funkcí

#### 4.1.3.1. Omezená funkce

**Definice 4.1.1.** Funkci  $f$  nazýváme shora (zdola) omezenou na množině  $A \subset D(f)$ , je-li shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot  $f(A)$ . Je-li funkce  $f$  omezená shora i zdola na množině  $A$ , pak ji nazýváme omezenou na množině  $A$ . Je-li  $A = D(f)$ , nazýváme funkci omezenou. Viz kniha [BMR89, s. 87]

Funkce  $f$  je omezená na množině  $A$ , právě když existuje číslo  $K > 0$  tak, že platí

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pro každé } x \in A$$

neboli

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pro každé } x \in A.$$

**Příklad 4.1.6.** Funkce  $f : y = \frac{1}{x^2+1}$  je omezená. Platí totiž

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| = \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zdola je tato funkce omezena dokonce číslem 0.

- Je-li funkce  $f$  shora omezená na množině  $A$ , existuje konečné supremum  $\sup f(A)$ . Toto číslo nazýváme supremem funkce  $f$  na množině  $A$  a označujeme je též  $\sup_{x \in A} f(A)$  nebo  $\sup\{f(x), x \in A\}$ .

- Je-li funkce  $f$  zdola omezená na množině  $A$ , existuje konečné infimum  $\inf f(A)$ , které nazýváme infimum funkce  $f$  na množině  $A$  a označujeme je též  $\inf_{x \in A} f(A)$  nebo  $\inf\{f(x), x \in A\}$ .

- Není-li funkce  $f$  shoda (zdola) omezená na množině  $A$ , pak je ovšem  $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$  ( $\sup_{x \in A} f(x) = -\infty$ ).

- Má-li množina  $f(A)$  největší (nejmenší) prvek, pak toto číslo nazýváme největší (nejmenší) hodnotou funkce  $f$  na množině  $A$  (je-li  $A = D(f)$ , též absolutním maximem, resp. absolutním minimem funkce  $f$ ) a značíme je  $\max_{x \in A} f(x)$  ( $\min_{x \in A} f(x)$ ). V tomto případě existuje takové číslo  $x_0 \in A$ , že  $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$  ( $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$ ). Pro všechna  $x \in A$  tedy platí  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ). Je zřejmé, že největší (nejmenší) hodnota funkce  $f$  na množině  $A$ , pokud existuje je současně supremem (infimum) funkce  $f$  na  $A$ .

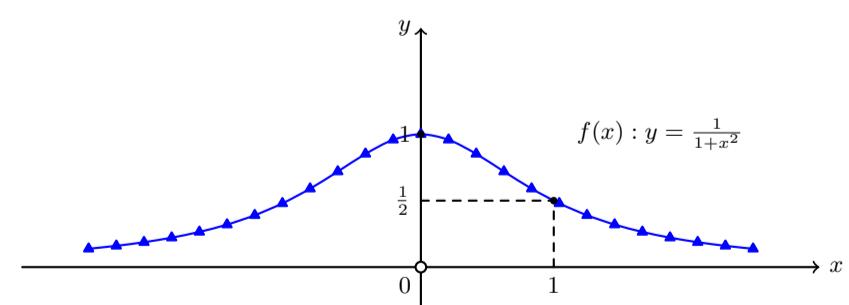
**Příklad 4.1.7.** Pro funkci z příkladu 4.1.6 platí:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{x^2+1} = \max_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{x^2+1} = 1; \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{x^2+1} = 0, \quad (4.1.7)$$

tato funkce však nenabývá v definičním oboru  $\mathbb{R}$  nejmenší hodnoty, neboť je stále  $\frac{1}{x^2+1} > 0$ . To, že infimum je 0, dokážeme takto: Zvolíme-li libovolně  $\varepsilon > 0$ , pak snadno zjistíme, že existuje  $x$ , pro něž  $\frac{1}{x^2+1} < \varepsilon$ :

$$1 < \varepsilon(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < x^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < x$$



Obrázek 4.1.4.

Neexistuje tedy kladné číslo, jíž by bylo dolnímezí množiny funkčních hodnot, takže infimum je 0. Graf funkce  $f$  je na obr. 4.1.4.

#### 4.1.3.2. Monotonní funkce

**Definice 4.1.2.** Funkci  $f$  nazýváme **rostoucí (klesající)** na množině  $A \subset D(f)$ , jestliže pro každé dva body  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 < x_2$ , platí  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ). Funkci  $f$  nazýváme **neklesající (nerostoucí)** na množině  $A \subset D(f)$ , jestliže pro každé dva body  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 < x_2$ , platí  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ). Rostoucí a klesající funkce (na množině  $A$ ) se nazývají **ryze monotónní** (na množině  $A$ ), neklesající a nerostoucí funkce (na množině  $A$ ) se nazývají **monotónní** (na množině  $A$ ).

Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí. Ryze monotónní funkce tvoří tedy podmnožinu množiny monotónních funkcí.

**Příklad 4.1.8.** Funkce  $y = 2x + 1$  je **rostoucí** na intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Platí totiž:  $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$ .

**Příklad 4.1.9.** Funkce  $y=[x]$  je **neklesající** na intervalu  $(-\infty, \infty)$  (viz příklad \*\*).

**Příklad 4.1.10.** Heavisideova funkce (viz příklad \*\*) je **neklesající** na intervalu  $(-\infty, \infty)$  (viz příklad \*\*).

**Příklad 4.1.11.** Funkce  $y = |x|$  je **klesající** na intervalu  $(-\infty, 0)$  a **rostoucí** na intervalu  $(0, \infty)$ .

**Definice 4.1.3.** Funkci  $f$  nazýváme **konstantní** na množině  $A$ , jestliže pro každé dva body  $x_1, x_2 \in A$ , platí  $f(x_1) = f(x_2)$ . V tom případě existuje reálné číslo  $k$  takové, že pro každé  $x \in A$  je  $f(x) = k$ . Je-li  $k = 0$ , mluvíme o **nulové funkci** na množině  $A$ .

Výrok "funkce  $f$  je konstantní na množině  $A$ " zapisujeme též  $f(x) = \text{konst}$  na  $A$ . Funkci konstantní na  $\mathbb{R}$  budeme stručně nazývat **konstantní funkci** nebo krátce **konstantou**. Z textu bude obvykle patrné, interpretujeme-li symbol  $k$  jako reálné číslo nebo jako konstantní funkci. Je zřejmé, že konstantní funkce na množině  $A$  je zároveň neklesající i nerostoucí na množině  $A$ . Toto tvrzení se dá obrátit. Lze snadno dokázat i tuto větu:

**Věta 4.1.1.** Funkce  $f$  je **rostoucí** na množině  $A$ , právě když je **neklesající** na množině  $A$  a na žádné dvoubodové podmnožině  $B \subset A$  není konstantní.

Obdobná tvrzení platí i pro klesající funkce.

#### 4.1.3.3. Sudé a liché funkce

**Definice 4.1.4.** Funkce  $f$  se nazývá **sudá** jestliže pro každé  $x \in D(f)$  je též  $-x \in D(f)$  a platí  $f(x) = f(-x)$ . Funkce  $f$  se nazývá **lichá** jestliže pro každé  $x \in D(f)$  je též  $-x \in D(f)$  a platí  $f(-x) = -f(x)$ .

Graf sudé funkce je souměrný podle osy  $y$  (osy funkčních hodnot), graf liché funkce je souměrný podle počátku.

**Příklad 4.1.12.** Funkce  $f : y = x^2$  je **sudá**, funkce  $g : y = x^3$  je **lichá**.

Daná funkce nemusí být ovšem ani sudá, ani lichá. Snadno se dokáže tvrzení:

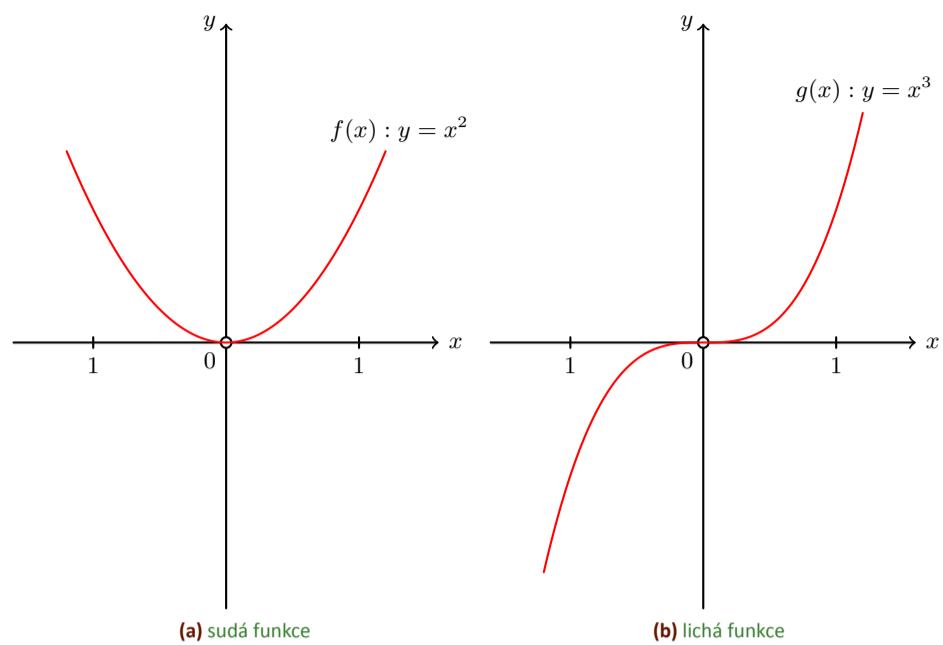
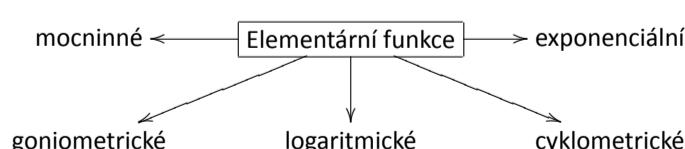
- Je-li sudá funkce  $f$  na množině  $D(f) \cap (0, \infty)$  rostoucí (klesající), je na množině  $D(f) \cap (-\infty, 0)$  klesající (rostoucí).
- Je-li lichá funkce na množině  $D(f) \cap (0, \infty)$  rostoucí (klesající), je též na množině  $D(f) \cap (-\infty, 0)$  klesající (rostoucí).

#### 4.1.3.4. Periodická funkce

#### 4.1.4. Operace s funkcemi. Uspořádání

#### 4.1.5. Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme [Pol98, s. 10]:



Obrázek 4.1.5.: Příklad sudé a liché funkce

#### 4.1.5.1. Goniometrické funkce

##### • Základní vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.8)$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.9)$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.10)$$

##### • Součtové vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.11)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.12)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.13)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.14)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (4.1.15)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \quad (4.1.16)$$

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

##### • Vzorce pro dvojnásobný úhel $2\alpha$

Pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.1.17)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (4.1.18)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (4.1.19)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad (4.1.20)$$

##### • Vzorce pro poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.21)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.22)$$

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (4.1.23)$$

$$\left| \cot \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (4.1.24)$$

Vzorce 4.1.21 a 4.1.22 odvodíme pomocí vzorců 4.1.18 a 4.1.8:

$$\cos \alpha = \cos 2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

a dále užijeme vztahu  $\sqrt{a^2} = |a|$  (platí pro každé  $a \in \mathbb{R}$ ). Užitím součtových vzorců a toho že,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \pi = 0$  a  $\cos \pi = -1$  lze snadno odvodit, že pro každé  $\alpha \in R$  platí

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{array}$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užívaných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha.$$

#### 4.1.6. Zobrazení v jiných strukturách

#### 4.1.7. Cvičení

### 4.2. Limita funkce

### 4.3. Spojitost funkce

### Seznam literatury

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on pp. [15](#), [16](#)).
- [Pol98] J. Polák. *Matematická analýza I*. ZČU - FAV, 1998. ISBN: 80-7082-466-2 (cit. on p. [17](#)).

## 5. Derivace funkce

### Obsah

5.1. Základní věty diferenciálního počtu . . . . .	19
5.1.1. Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce . . . . .	19
5.1.2. Věty o střední hodnotě . . . . .	19
5.1.3. Některé důsledky Lagrangeovy věty . . . . .	20
Seznam literatury . . . . .	20

### 5.1. Základní věty diferenciálního počtu

#### 5.1.1. Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce

V tomto článku uvedeme významné věty, zvané souhrně věty o *střední hodnotě diferenciálního počtu*, a dále pak ukázky jejich užití v matematické analýze. Avšak dříve než budeme tyto věty formulovat, uvedeme jedno důležité tvrzení, které sice bude mít v dalších úvahách tohoto článku pomocnou úlohu, ale v teorii extrémů má i samostatný význam. [BMR89, s. 186]

**Věta 5.1.1.** Nechť funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá na množině  $A$  své největší (nejmenší) hodnoty na vnitřním bodě  $c$  množiny  $A$ . Máli funkce  $f$  v bodě  $c$  derivaci, potom  $f'(c) = 0$ .

**Důkaz.** Nechť např.  $f(c)$  je největší hodnota funkce  $f$  na množině  $A$ , takže  $f(x) \leq f(c)$  pro  $\forall x \in A$ . Potom pro  $x \in A, x < c$ , je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

a tedy

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Dále pro  $x \in A, x > c$ , je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

a proto

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Platí tedy

$$f'_+(c) \leq f'_-(c) \geq f'_-(c).$$

Avšak  $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$ . Odtud plyne  $f'(c) = 0$ . ■

#### 5.1.2. Věty o střední hodnotě

**Věta 5.1.2. Rolleova věta<sup>1</sup>** Nechť funkce  $f$  má tyto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ ;
2. má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu  $(a, b)$ ;
3. platí  $f(a) = f(b)$ .

Potom v otevřeném intervalu  $(a, b)$  existuje aspoň jeden bod  $\xi$  takový, že  $f'(\xi) = 0$ .

**Důkaz.** Protože je funkce  $f$  na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitá, nabývá v tomto intervalu své největší hodnoty  $M$ , své nejmenší hodnoty  $m$ . Přitom ovšem platí:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (5.1.1)$$

Nyní mohou nastat dva případy:

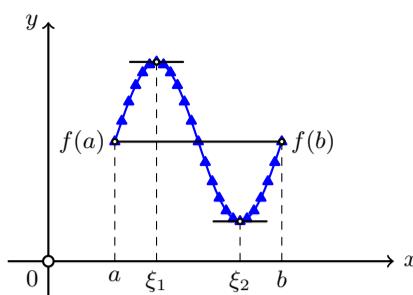
1. funkce  $f$  nabývá  $M$  i  $m$  právě v krajních bodech intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Podle předpokladu 3 věty 5.1.2 však potom platí  $f(a) = f(b) = m = M$ . Vzhledem ke vztahu 5.1.1 odtud plyne, že funkce  $f$  je konstantní na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a tedy  $f'(x) = 0$  dokonce v každém bodě  $x \in (a, b)$
2. Funkce  $f$  nabývá apsoň jedné z hodnot  $M, m$  v některém vnitřním bodě  $\xi$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom podle věty 5.1.1 je  $f'(\xi) = 0$ . ■

**Poznámka 5.1.1.** Rolleova věta sama zaručuje jen existenci aspoň jednoho bodu  $\xi \in (a, b)$ , ve kterém je  $f'(\xi) = 0$ . Neumožnuje však ani určení tohoto bodu (nebo bodů), ani stanovení jejich počtu

**Poznámka 5.1.2.** Na obr. 5.1.1 je ilustrován geometrický význam Rolleovy věty. Graf funkce na tomto obrázku má v bodech  $\xi_1, \xi_2$ , v nichž je  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$  tečny rovnoběžné s osou  $x$ .

Z Rolleovy věty plyne důležitá věta:

<sup>1</sup>Michel Rolle [Mišel Rol] (1652-1719) Francouzský matematik



Obrázek 5.1.1.: K výkladu Rolleovy věty

**Věta 5.1.3. (Cauchyova věta).** Nechť funkce  $f$  a  $g$  mají tyto vlastnosti:

1. Jsou spojité na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,
2. v každém bodě  $x \in (a, b)$  existuje derivace  $f'(x)$  (vlastní či nevlastní) a vlastní derivace  $g'(x)$ ,
3.  $g'(x) \neq 0$  na  $(a, b)$ .

Potom v otevřeném intervalu  $(a, b)$  existuje aspoň jeden bod  $\xi$ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (5.1.2)$$

**Důkaz.** Poznamenejme především, že z předpokladu 3.  $g'(x) \neq 0$  pro  $x \in (a, b)$  a z předpokladu spojitosti funkce  $g$  na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  ihned vyplývá vztah  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Kdyby totiž bylo  $g(b) = g(a)$ , potom by podle Rolleovy věty 5.1.2 existoval aspoň jeden bod  $\eta \in (a, b)$  takový že  $g'(\eta) = 0$ . To však by byl spor s předpokladem  $g'(x) \neq 0$  pro každý bod  $x \in (a, b)$ . Proto má smysl podíl na levé straně rovnosti 5.1.2

K vlastnímu důkazu Cauchyovy věty zavedeme takovou pomocnou funkci  $F$ , aby splňovala podmínky Rolleovy věty. Definujme ji pro  $x \in \langle a, b \rangle$  předpisem

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]. \quad (5.1.3)$$

Snadno ověříme, že tato funkce skutečně splňuje podmínky Rolleovy věty na intervalu  $\langle a, b \rangle$ :

- Je spojitá na intervalu  $x \in \langle a, b \rangle$ , což je důsledkem spojitosti funkce  $f$  a  $g$  na intervalu  $x \in \langle a, b \rangle$ ,
- má derivaci  $F'$  na otevřeném intervalu  $(a, b)$ , což plyne z existence derivace  $f'$  a  $g'$  funkce  $f$  a  $g$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- $F(a) = F(b) = 0$

Platí tedy i závěr Rolleovy věty pro funkci  $F$ , tj. na intervalu  $(a, b)$  existuje aspoň jeden bod  $\xi$ , pro který  $F'(\xi) = 0$ . Zderivujeme-li funkci  $F$ , dostaneme (dosadíme-li  $x = \xi$ ):

$$F'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - f'(\xi)[g(b) - g(a)] = 0$$

Odtud již plyne rovnost 5.1.2 ■

Významným zvláštním případem Cauchyovy věty je další věta, která se častěji používá.

**Věta 5.1.4. (Lagrangeova věta)<sup>2</sup>.** Nechť funkce má tyto vlastnosti:

- Je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,
- má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu  $(a, b)$ .

Potom existuje v otevřeném intervalu  $(a, b)$  aspoň jeden bod  $\xi$ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad (5.1.4)$$

či-li

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad (5.1.5)$$

**Důkaz.** Tvrzení této věty je důsledkem tvrzení Cauchyovy věty, a to pro případ  $g(x) = x$ . Protože  $g'(x) = 1$  dokonce všude, jsou splněny všechny tři podmínky Cauchyovy věty. Proto platí i závěr této věty, z něhož pro nás případ již plyne vzorec 5.1.4 a tedy i vzorec 5.1.5. ■

**Poznámka 5.1.3.** Podobně jako je Lagrangeova věta zvláštním případem věty Cauchyovy, je Rolleova věta zvláštním případem Lagrangeovy věty, a to případ, že  $f(a) = f(b)$ .

<sup>2</sup>Joseph Louis Lagrange [lagrénž] (1736-1813), francouzský matematik

**Poznámka 5.1.4.** Lagrangeova věta se často nazývá větou o přírůstku funkce, protože vzorcem 5.1.5 se vyjadřuje přírůstek funkce, tj. rozdíl  $f(b) - f(a)$ . Všechny tři uvedené věty, tj. věta Rolleova, Cauchyova a Lagrangeova, se v literatuře nazývá souhrnně věty o střední hodnotě diferenciálního počtu.

**Poznámka 5.1.5.** Na obr. \*\* je ilustrován geometrický význam Lagrangeovy věty. Podíl na levé straně rovnosti 5.1.4, tj. číslo  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  je směrnice sečny  $s$ , spojující body  $A, B$  grafu funkce  $f$ , které odpovídají krajním bodům intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Podle tvrzení Lagrangeovy věty existuje v otevřeném intervalu  $(a, b)$  aspoň jeden bod  $\xi$  tak, že tečna grafu funkce  $f$  v příslušném jeho bodě je rovnoběžná s přímkou  $s$ .

**Poznámka 5.1.6.** Z Lagrangeovy věty vyplývá toto tvrzení: Nechť funkce  $f$  vyhovuje na intervalu  $\langle a, b \rangle$  podmínkám Lagrangeovy věty a  $x_1, x_2$  jsou dva libovolné různé body intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom v otevřeném intervalu s krajními body  $x_1, x_2$  existuje aspoň jeden bod  $\xi$ , pro který platí Lagrangeův vzorec:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (5.1.6)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (5.1.7)$$

Potom bod  $\xi$  lze vyjádřit takto:

$$\xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), \quad \text{kde } \vartheta \in (0, 1). \quad (5.1.8)$$

Označíme-li  $x_2 - x_1 = h$ , můžeme vzorec 5.1.6 napsat ve tvaru

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = f'(x_1 + \vartheta h)h, \quad \text{kde } \vartheta \in (0, 1). \quad (5.1.9)$$

### 5.1.3. Některé důsledky Lagrangeovy věty

Lagrangeova věta, má některé významné důsledky, které nyní uvedeme [BMR89, s. 189]:

**Věta 5.1.5.** Nechť funkce  $f$  vyhovuje podmínkám Lagrangeovy věty a navíc nechť  $f'(x) = 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ . Potom funkce  $f$  je prostá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

**Důkaz.** Nechť  $x_1, x_2$  jsou libovolné dva různé body intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom podle Lagrangeova vzorce 5.1.3 platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \neq 0$$

neboť  $f'(\xi) \neq 0$  dle předpokladu. ■

**Věta 5.1.6.** Funkce  $f$  je konstantní na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , právě když má na tomto intervalu derivaci a platí  $f'(x) = 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ .

**Důkaz.** Tedy

- Je-li funkce  $f$  konstantní na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak je  $f'(x) = 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ , jak již víme.
- Nechť  $f'(x) = 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ ,  $x_1 \neq x_2$ , platí  $f(x_1) = f(x_2)$ . Z existence derivace vyplývá spojitost funkce a jsou tedy splněny podmínky Lagrangeovy věty na každém intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (a, b)$ . Podle vzorce 5.1.3 tedy platí  $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ ,  $\xi \in (x_1, x_2)$ . Protože podle předpokladu je  $f'(x) = 0$  pro  $\forall x \in (a, b)$ , platí  $f(x_1) - f(x_2) = 0$ , tj.  $f(x_1) = f(x_2)$ . ■

### References

[BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on pp. 19, 20).

# 6. Aplikace diferenciálního počtu

## Obsah

6.1. Průběh funkce . . . . .	21
6.1.1. Monotonie funkcí . . . . .	21
Seznam literatury . . . . .	22

Diferenciální počet má rozsáhlou oblast užití. V této kapitole ukážeme použití výsledků předchozích kapitol k vyšetřování průběhu funkce a vlastnosti rovinných křivek.

## 6.1. Průběh funkce

Pomocí derivace můžeme studovat vlastnosti funkce, které usnadní vyšetřování jejího průběhu.

### 6.1.1. Monotonie funkcí

Jednou z důležitých vlastností funkce je její "monotonie", kterou jsme definovali již v odst. 4.1.3 kap. 4. Proto je při vyšetřování průběhu funkce důležité určit množiny (často jsou to intervaly), na nichž je funkce monotonní, jinak řečeno, najít "intervaly monotonie funkce" (viz [BMR89], s. 208).

1. Zjistíme **definiční obor funkce**, vyjádříme jej v intervalech a z nich poznáme, kde je funkce **spojitá**. Funkce je spojitá v  $(a, b)$  pro každý bod tohoto intervalu, když  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ , kde  $\varepsilon > 0$  je libovolně zvolené číslo, a pro všechna  $x$  z okolí bodu  $c$  je  $|x - c| < \delta$ , kde  $\delta > 0$  je na  $\varepsilon$  nezávislé.
2. Určíme, je-li funkce **lichá**  $f(-x) = -f(x)$  nebo **sudá**  $f(-x) = f(x)$ . Je-li funkce lichá, je souměrná podle středu souměrnosti (obyčejně to bývá počátek souřadnic  $xy$ ), je-li sudá, je souměrná podle osy  $y$ .
3. Určíme **průsečíky křivky s osami pravoúhlých souřadnic**. Body, ve kterých křivka protíná osu  $x$  spolu s body, ve kterých není křivka spojitá, rozlišují intervaly, v nichž je graf křivky nad osou  $x$  od intervalů, ve kterých je graf křivky pod osou  $x$ .
4. V krajních bodech definičních intervalů, ve kterých je funkce spojitá, stanovíme **limity funkce** a dále

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

5. Vypočítáme  $f'(x)$  a  $f''(x)$ , abychom zjistily, kde je funkce **rostoucí**  $f'(x) > 0$ , **klesající**  $f'(x) < 0$  a kde jsou **lokální extrémy**. Dostaneme-li dosazením kořenů rovnice  $f'(x) = 0$  do  $f''(x)$  hodnotu  $f''(x) > 0$ , má funkce lokální minimum, při  $f''(x) < 0$  má funkce lokální maximum. V intervalech, kde  $f''(x) > 0$ , je křivka **konvexní (vypuklá)**, kde  $f''(x) < 0$ , je křivka **konkávní (vydutá)**. Body, v nichž  $f''(x)$  mění znaménko, jsou **inflexní body**. Najdeme je tak, že stanovíme hodnoty  $x$ , pro které je  $f''(x) = 0$  nebo neexistuje. Číslo  $c$  je inflexní bod, když existuje takové okolí bodu  $c$ , že pro  $x > c$  je oblouk křivky konvexní a pro  $x < c$  konkávní. Je nutné si uvědomit, že když má  $f'(x)$  konečnou derivaci, je inflexní bod  $c$  taky nulovým bodem druhé derivace čili kořenem rovnice  $f''(x) = 0$ . Obrácená věta neplatí, tj. z  $f''(x) = 0$  nevyplývá, že v bodě  $c$  má  $f'(x)$  extrém a že bod  $c$  je inflexním bodem.

6. **Asymptota** je tečna křivky  $f(x)$ , jejíž bod dotyku je v nekonečnu. Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

je přímka  $x = a$  její asymptotou. Jinak asymptoty mají rovnici  $y = kx + q$ , kde  $x$  a  $y$  jsou souřadnice bodů na asymptotách. Existují-li konečné limity

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q$$

pak je asymptotou přímka  $y = kx + q$ . Můžeme-li rovnici křivky rozložit (tj. rozložit její pravou stranu, obyčejně dělením čitatele jmenovatelem, má-li tvar zlomku) na dvě části, z nichž jedna má tvar  $kx + q$  a druhá zbytek  $\varphi(x)$ , tj.  $f(x) = kx + q + \varphi(x)$  a  $\varphi(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ , je přímka  $y = kx + q$  asymptotou.

7. Zpřesnění grafu křivky provedeme sestavením tabulky souřadnic dalších bodů křivky, tj. ke zvoleným hodnotám  $x$  (z definičního oboru funkce) vypočítáme hodnoty  $y$ . Do dalších řádků tabulky zapíšeme hodnoty  $f'(x)$  a  $f''(x)$ , ve kterých intervalech je funkce **rostoucí**, ve kterých **klesá**, kde je **vypuklá**, kde je **dutá**, kde jsou **lokální extrémy**, **inflexní body** apod., případně sestavíme dílčí tabulky pro jednotlivé **charakteristické vlastnosti** vyšetřované funkce.

**Příklad 6.1.1.** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

1. Definiční obor  $D_f = \mathcal{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

2. Funkce je sudá

$$f(-x) = f(x) : \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}.$$

Funkce není periodická.

3. Stanovíme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru  $1, -1$  a v nevlastních bodech  $-\infty, +\infty$ . Protože je funkce **sudá**, omezíme se jen na vyšetřování nezáporné části. Nejprve vlastnosti funkce v okolí bodu 1. Ten nepatří do  $D_f$  a proto určíme limity funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Pro výpočet limity použijeme substituci  $y = 1 - x^2$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2-y}{y} = +\infty$$

<sup>1</sup>proto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Obdobně dojdeme k

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

A konečně v nevlastních bodech  $\pm\infty$  je limita

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = 0 - 1 = -1.$$

Výpočtem limit jsme zároveň určili dva absolutní (globální) extrémy a jeden lokální:

- v intervalu  $(-1, 1)$  má funkce maximum  $\infty$  a minimum 1,
- v intervalech  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  má funkce minimum  $-\infty$  a maximum  $-1$ .

4. Nyní vyšetříme zda, případně kolik a jaké, má funkce  $f(x)$  průsečíky s osami souřadnic. S osou  $x$  nemá funkce žádné průsečíky, protože pro  $y = 0$  není definována  $H_f = \mathcal{R} - \{-1, 1\}$ . Pro  $x = 0$  je  $y = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$ , proto má  $f(x)$  právě jeden průsečík s osou  $y$  a to  $[0, 1]$ .

5. Zatím jsme zjistili, že naše funkce není definována v bodech 1 a  $-1$  a proto není spojitá v  $\mathcal{R}$ . Nevíme však, jaký je její průběh v jednotlivých intervalech definičního oboru. Abychom získali názornější představu o průběhu funkce, zjistíme má-li derivaci.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+x^2)'(1-x^2) - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

Protože má vlastní derivaci<sup>2</sup>, můžeme určit její vlastnosti v intervalech  $(0, 1)$  a  $(1, \infty)$ . V těchto intervalech je  $y' > 0$  a proto jede o funkci rye monotónní, rostoucí<sup>3</sup> v daných intervalech<sup>4</sup>. Výpočtem zjistíme druhou derivaci funkce. Ta nám pomůže určit další extrém v intervalu  $(0, 1)$  a zároveň vyšetřit **konkavnost** a **konvexnost**.

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x)'(1-x^2)^2 - (4x)(1-2x^2+x^4)'}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(1-2x^2+x^4) - 4x(-4x+4x^3)}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

Abychom mohli určit lokální extrém funkce  $f(x)$  v intervalu  $(0, 1)$ , pomocí druhé derivace, musíme najít kořeny rovnice  $f''(x) = 0$ . V našem případě

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x_0 = 0,$$

<sup>1</sup> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

<sup>2</sup> $f(x)$  je spojitá v intervalech  $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$  věta s spojité funkci

<sup>3</sup>Plyne z věty o postačujících podmínkách rye monotónnosti funkce na intervalu

<sup>4</sup>V intervalech  $(-\infty, -1), (-1, 0)$  je funkce klesající.

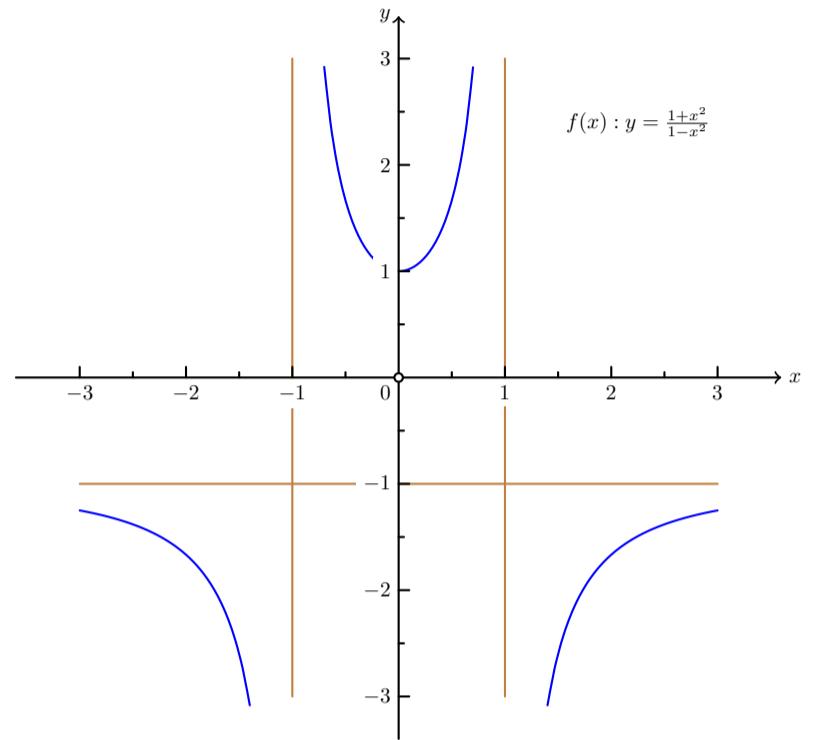
tento kořen<sup>5</sup> pak dosadíme do druhé derivace, tj.

$$y''(0) = \frac{4(3 \cdot 0^2 + 1)}{(1 - 0^2)^3} = 4,$$

protože je  $f''(x) > 0$ , má v bodě  $x_0$  lokální minimum. Můžeme rovněž konstatovat, že funkce nemá inflexní body<sup>6</sup>. Konkavnost a konvexnost funkce v intervalech  $(0, 1)$  a  $(1, \infty)$  vyšetříme pomocí vlastností druhé derivace funkce. Tedy

- $(0, 1) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0 \Rightarrow$  funkce je v tomto intervalu **konvexní**,
- $(1, \infty) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0 \Rightarrow$  funkce je v tomto intervalu **konkavní**.

6. Z předchozích výpočtů plyne, že křivka má asymptoty  $y = -1, x = \pm 1$ .



Obrázek 6.1.1.: Graf funkce  $f(x)$

## References

[BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on p. 21).

<sup>5</sup>stacionární bod

<sup>6</sup>Pro existenci inflexního bodu je nutné splnění jedné z podmínek a to buď  $f''(x_0) = 0$ , nebo  $f''(x_0)$  neexistuje.

# 7. Primitivní funkce

## Obsah

7.1. Motivace . . . . .	23
7.2. Tabulka neurčitých integrálů . . . . .	23
7.3. Metody určení primitivní funkce . . . . .	24
7.3.1. Integrování součtu, úprava integrandu a integrování rozkladem . . . . .	24
7.3.2. Integrace racionální funkce . . . . .	25
Seznam literatury . . . . .	27

## 7.1. Motivace

Zavedením pojmu derivace funkce jsme motivovali důležitým požadavkem definovat okamžitou rychlosť pohybu bodu po přímce. Existuje přirozeně i požadavek opačný, tj. nalézt zákon dráhy pohybu bodu po přímce, je-li dána jeho okamžitá rychlosť jako funkce času. [BMR89, s. 253]

**Příklad 7.1.1.** Je dána okamžitá rychlosť v pohybu bodu po přímce (ose)  $x$  rovnici  $v(t) = 2t + 1$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Najděte zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase  $t = 0$  měl bod polohu  $x = x_0$ .

**řešení:**

Označme-li  $x(t)$  polohu bodu v okamžiku  $t$ , pak  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ . Hledáme tedy funkci  $x = x(t)$ , pro níž platí

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad x(0) = x_0.$$

Je ihned patrné, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$x(t) = t^2 + t + C, \quad (7.1.1)$$

kde  $C$  je libovolná konstanta. Funkce, která splňuje i druhou podmínu (říkáme ji též počáteční podmínu), najdeme z rovnice 7.1.1 dosazením dané podmínky  $t = 0$ ,  $x = x_0$ . Dostaneme  $x_0 = C$ . Dosazením do 7.1.1 za  $C$  plyne hledaný zákon dráhy

$$x(t) = t^2 + t + x_0.$$

Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě dané podmínky a zároveň vidíme, že hledaná primitivní funkce daných vlastností je jediná.

Každé takové funkci, jejíž derivací je daná funkce, budeme říkat **primitivní funkce** k dané funkci. Na uvedeném příkladě je patrné, že k dané funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Množinu všech primitivních funkcí se často nazývá **neurčitým integrálem**. Po tomto názorném uvedení do problému přejdeme k přesné formulaci základních pojmu.

**Definice 7.1.1.** Funkce  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $J \subset \mathbb{R}$  je interval, se nazývá **primitivní funkce** k funkci  $f$  na intervalu  $J$  právě když, pro všechna  $x \in J$  je  $F'(x) = f(x)$  (v krajních bodech intervalu  $J$ , pokud k němu patří, jde o derivace jednostrané).

**Příklad 7.1.2.** K funkci  $\sin x$  je primitivní funkci na libovolném intervalu  $J \subset (-\infty, +\infty)$  funkce  $-\cos x$ , protože  $(-\cos x)' = \sin x$ . Ale též funkce  $3 - \cos x$  je primitivní funkci k funkci  $\sin x$ , protože  $(3 - \cos x)' = \sin x$  pro všechna  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Je vidět, že rozdíl dvou primitivních funkcí k téže funkci je konstanta. To není náhoda, jak potvrzuje následující věta:

**Věta 7.1.1.** a) Je-li funkce  $F$  primitivní funkci k funkci  $f$  na intervalu  $J$  a  $c$  reálná konstanta, pak i funkce  $G = F + c$  je primitivní funkci k funkci  $f$  na intervalu  $J$ .  
b) Jsou-li funkce  $F$  a  $G$  primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $J$ , pak funkce  $F - G$  je na intervalu  $J$  konstantní.

**Důkaz.** Tvrzení a) plyne z definice protože  $G'(x) = [F(x) + c] = F'(x) = f(x)$  pro všechna  $x \in J$ . Tvrzení b) je důsledek věty 5.1.6. ■

## 7.2. Tabulka neurčitých integrálů

Pokud není nic uvedeno, platí vzorce pro všechna  $x$  a pro všechny hodnoty uvedených konstant. Místo platí pro  $x$  z intervalu  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  příšeme sturčně  $x \neq 0$  apod. Literatura: [Rek63, p. 396].

$$\int 0 \, dx = c \quad (7.2.1)$$

$$\int a \, dx = ax + c \quad (7.2.2)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ pro } & n \in \mathbb{Z}, n > 0, \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ pro } & n \in \mathbb{Z}, n < -1, \\ \forall x > 0, \text{ pro } n \in \mathbb{R} \text{ pro } & n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (7.2.3)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \forall x \neq 0 \quad (7.2.4)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (7.2.5)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c \quad \forall x > 0 \quad (7.2.6)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \forall a > 0, a \neq 1 \quad (7.2.7)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad (7.2.8)$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad (7.2.9)$$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c \quad (7.2.21)$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c \quad (7.2.22)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad (7.2.23)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad (7.2.24)$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (7.2.25)$$

$$\int \frac{a}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \quad (7.2.26)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (7.2.27)$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sec^{-1} \frac{x}{a} \quad (7.2.28)$$

### 7.3. Metody určení primitivní funkce

Procesu hledání primitivní funkce se často říká integrování nebo integrace (od slova "integrál"), což z matematického hlediska znamená provést inverzní operaci k operaci derivování. Smutnou zprávou je, že na rozdíl od derivování neexistuje obecný vzorec pro integrování součinu či podílu, ani obecný vzorec pro integrování složených funkcí. Při hledání integrálů složitějších funkcí se využívá např. *linearita, metoda per partes, substituční metoda*, popř. některé další speciální metody. Řešitel v mnoha případech musí projevit důvtip a intuici, která mu pomůže nalézt primitivní funkci k dané funkci.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c \quad \forall x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (7.2.10)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c \quad \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (7.2.11)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad \forall x \in (-1, 1) \quad x \in \mathbb{R} \quad (7.2.12)$$

#### 7.3.1. Integrování součtu, úprava integrandu a integrování rozkladem

**Příklad 7.3.1.** Zdroj [Kni+O4], s. 29].

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx \quad (7.3.1)$$

Dělením čitatele integrantu jmenovatelem dostaneme rozklad integrantu na součet funkcí, jejichž integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x) : (x^2 + 1) = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \\ -x^4 -x^2 \\ \hline 3x^3 - 4x^2 + 3x \\ -3x^3 -3x \\ \hline -4x^2 \\ 4x^2 + 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c \quad (7.2.13)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c \quad (7.2.14)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c \quad (7.2.15)$$

Tedy

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Pro uvedený integrál dostaneme

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx =$$

$$\int \left( x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \operatorname{arctan} x + C.$$

**Příklad 7.3.2.**

$$\int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx = 2x^2 + 2x + 1 \pm \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\} \quad (7.3.2)$$

Dělením čitatele integrantu jmenovatelem dostaneme rozklad integrantu na součet funkcí, jejichž integrály najdeme snadno:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c = \sinh^{-1} x + c \quad (7.2.16)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c = \cosh^{-1} x + c \quad x \in (1, +\infty) \quad (7.2.17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad (7.2.18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 2a^2}) - \frac{5x^2 + 14x + 13}{2x^4 + 2x^3 + 4x^2} \quad (7.2.19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \begin{cases} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c & \text{pro } |x|^3 > \pm x^2 + 14x \\ \cosh^{-1} x + c & \text{pro } -2x^3 + 2x^2 + 4x \\ & \frac{x^2 + 18x + 13}{x^2 + x + 2} \\ & \frac{-x^2 + x + 2}{19x + 15} \end{cases} \quad (7.2.20)$$

Zbytek po dělení představuje integrál, jež je počítán v příkladu 7.3.18 a proto ho vynecháme.

$$\begin{aligned} &= 2 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx + \int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} \ln|x+1| - \frac{53}{3} \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

**Příklad 7.3.3.** Zdroj [Kni+O4], s. 29].

$$\int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx \quad (7.3.3)$$

Integrand upravíme přičtením a odečtením výrazu  $3x^2$  v čitateli zlomku takto:

$$\frac{3}{(1+x^2)x^2} = \frac{3+3x^2-3x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{1+x^2}$$

Tedy v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod  $x = 0$ , platí

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{3}{x} - 3 \arctan x + C. \end{aligned}$$

**Příklad 7.3.4.** Zdroj [Kni+O4, s. 30].

$$\int \sqrt{1+\cos 2x} dx$$

Funkci  $\sqrt{1+\cos 2x}$  upravíme na základě goniometrické identity 4.1.18

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

takto

$$\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} |\cos x| = \varepsilon \sqrt{2} \cos x,$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi), \\ -1, & x \in (\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi), \end{cases}$$

$n$  je přirozené číslo. Proto pro  $x$  ležící v uvedených intervalech je

$$\int \sqrt{1+\cos 2x} dx = \varepsilon \sqrt{2} \int \cos x dx = \varepsilon \sqrt{2} \sin x + C.$$

**Příklad 7.3.5.** Zdroj [Kni+O4, s. 30].

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

Integrand upravíme na součet dvou tabulkových integrálů použitím vzorce

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

takže

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

**Příklad 7.3.6.** Zdroj [Kni+O4, s. 30].

$$\int \tan^2 x dx$$

funkci napíšeme ve tvaru

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

takže

$$\int \tan^2 x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

$\forall x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

**Příklad 7.3.7.**

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx, \quad (\sin^2 x \cos^2 x \neq 0; x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z})$$

Integrand upravíme pomocí vzorce pro dvojnásobný úhel 4.1.22:

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C.$$

**Příklad 7.3.8.**

$$\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} dx, \quad (\sin x \cos x \neq 0; x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z})$$

Integrand rozšíříme o funkci  $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}} dx = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\tan x}} dx = \ln |\tan x| + C.$$

### 7.3.2. Integrace racionální funkce

Některé příklady v předchozím odstavci, (viz např. 7.3.1 a 7.3.2) jsme dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostali rozklad integrandu na součet racionální funkce (polynomu) a ryze lomené racionální funkce. Integrování polynomu je snadné, neboť jde o součet integrálů tvaru  $\int c_k x^k dx$ , kde  $k$  je celé nezáporné číslo. Omezíme se tedy na integrování ryze lomené racionální funkce, tj. funkce ve tvaru  $P(x)/Q(x)$ , kde  $P(x), Q(x)$  jsou polynomy, přičemž stupeň polynomu  $P(x)$  je menší než stupeň polynomu  $Q(x)$ . Taková funkce může vzniknout součtem několika jednoduchých zlomků.

**Příklad 7.3.9.** Upravte

$$\begin{aligned} (7.3.4) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+3} &= \frac{x^2+x+3+x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+3)} \\ &= \frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x-3} \end{aligned}$$

Jsme tedy vedeni myšlenkou, zda naopak každá ryze lomená racionální funkce se dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru - budeme jim říkat parciální zlomky, které umíme integrovat. Tím se budeme zabývat v dalších odstavcích.

**Příklad 7.3.10.**

$$\int \frac{1}{x^2-x+1} dx, \quad x \in R \quad (7.3.9)$$

Kvadratický polynom ve jmenovateli upravíme na čtverec  $f(x) = (x+m)^2 + n$ :

$$\begin{aligned} (7.3.5) \quad \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + C \end{aligned}$$

**Definice 7.3.1.** Parciální (částečným) zlomkem, budeme nazývat zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (7.3.10)$$

$A, M, N, \alpha, p, q$  reálné  $p^2 - 4q < 0$ ,  $k$  celé nezáporné.

Integrál prvního zlomku, tj.  $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx$ , vypočeme substitucí  $x - \alpha = t$ , odtud plyne  $dx = dt$ ,

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \int \frac{A}{t^k} dt. \quad (7.3.11)$$

Tento integrál se rovná

$$-\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C. \quad (7.3.12)$$

je-li  $k > 1$ , a rovná se  $A \ln|x-\alpha| + C$ , je-li  $k = 1$ . Výsledek platí na každém intervalu neobsahujícím bod  $\alpha$ .

U integrálu druhého zlomku uvedeme postup výpočtu pro  $k = 1$ .

$$\begin{aligned} (7.3.7) \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx}{x^2+px+q} dx + \int \frac{N}{x^2+px+q} dx \\ &= \int \frac{Mx}{x^2+px+q} dx + N \int \frac{1}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q} dx + N \int \frac{1}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx. \end{aligned}$$

Z naznačeného postupu je vidět hlavní myšlenka: upravit integrál na lineární kombinaci dvou integrálů, z nichž první má v čitateli integrandu derivaci jmenovatele a je podle příkladu \*\*\* roven  $\ln|x^2+px+q|$  kde  $x^2+px+q > 0$  pro  $x \in R$  a integrand druhého integrálu má čitatel konstantní.

Výpočet druhého integrálu probíhá takto:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx; \quad (7.3.13)$$

substučí  $x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$  dostáváme dále

$$\int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)(t^2 + 1)} dt$$

po úpravě dostaneme tabulkový integrál

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1}, \quad (7.3.14)$$

jehož řešení je

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan t = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

Z postupu je opět vidět hlavní myšlenka: úprava integrandu na tvar  $\frac{1}{t^2 + 1}$ . Jmenovatel  $x^2 + px + q$  jsme doplnili na úplný čtverec a užili uvedenou substituci (uvažme, že  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ , protože diskriminant  $\frac{p^2}{4} - q$  trojčlenu  $x^2 + px + q$  je podle předpokladu záporný). Výsledek platí u obou integrálů v intervalu  $(-\infty, +\infty)$ .

### 7.3.2.1. Substituční metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

**Věta 7.3.1.** Jestliže

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad (7.3.15)$$

a  $u = \varphi(x)$ , pak

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C \quad (7.3.16)$$

Základem úspěchu při aplikacích věty je správný výběr funkce  $\varphi(x)$ . Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schématicky veden od rov. 7.3.16 ke vzorci rov. 7.3.15.

**Příklad 7.3.11.**  $\int e^{x^2} dx$

$$\int e^{x^2} dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

**Příklad 7.3.12.**  $\int x^3 e^{x^4} dx \quad x \in R$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^4} dx &= \begin{bmatrix} u = x^4 & du = 4x^3 dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{e^u}{4} = \frac{e^{x^4}}{4} + C \end{aligned}$$

**Funkce typu**  $f(x) = \sqrt{ax + b}$ :

Funkci, jež je dána rovnicí, jež obsahuje polynomy proměnné  $x$  ve výrazu  $\sqrt{ax + b}$ , v němž  $ax + b > 0$ ,  $a > 0$ , integrujeme pomocí substituce:

$$u = \sqrt{ax + b}, \quad du = \frac{1}{2} \frac{a}{u} dx, \quad dx = 2 \frac{u}{a} du \quad (7.3.17)$$

Je-li potřeba dosadit do integrované funkce také za  $x$ , vyjádříme ze substituční rovnice  $x = \frac{u^2 - b}{a}$ .

**Funkce typu**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ ,  $a \neq 0$ :

**Příklad 7.3.13.**  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$ :

**Řešení:** Užijeme Eulerovu substituci

$$u = x + \sqrt{x^2 + a}, \quad du = \frac{u}{\sqrt{x^2 + a}} dx, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

### 7.3.2.2. Integrace goniometrických funkcí

#### 7.3.2.3. Integrace po částech - per partes

Ze vztahů pro nalezení diferenciálů  $d(uv) = udv + vdu$  a  $udv = d(uv) - vdu$  vyplývá vzorec pro metodu integrace per partes:

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (7.3.18)$$

Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenosť pro výběr funkcí  $u$  a  $v$ . Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím se myslí dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně  $\int vdu$  lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

**Příklad 7.3.14.**  $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

**Příklad 7.3.15.**  $\int \sqrt{x^2 + a} dx$ , kde  $a \neq 0$ ,  $x^2 + a > 0$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \begin{bmatrix} u = \sqrt{x^2 + a} & dv = 1 \\ du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} & v = x \end{bmatrix} \\ x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \right] \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně vyjádříme podle příkladu 7.3.13  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$  a výsledek dostaneme ve tvaru

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| \right]$$

**Příklad 7.3.16.**  $\int \arctan x dx \quad x \in R$

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= \begin{bmatrix} u = \arctan x & dv = 1 \\ du = \frac{1}{x^2 + 1} & v = x \end{bmatrix} = \\ x \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \begin{bmatrix} x^2 + 1 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \\ x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|t| \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C \end{aligned}$$

### 7.3.2.4. Rozklad ryze lomené funkce v parciální zlomky

Nechť je dána racionální funkce  $R = \frac{P}{Q}$  s reálnými koeficienty. Můžeme předpokládat, že je *ryze lomená*<sup>1</sup>. Pokud by tomu tak nebylo, dostaneme dělením čitatele jmenovatelem zlomku součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

**Příklad 7.3.17.**  $\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx$  [Kni+O4, s. 90]

Kořeny polynomu ve jmenovateli  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 7$  jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 7}.$$

Členy mnohočlenu na pravé straně seřadíme podle mocnin  $x$

$$8x - 31 = x(A + B) + (7A - 2B).$$

<sup>1</sup>tj. stupeň polynomu  $P$  je menší než stupeň polynomu  $Q$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 8 &= A + B \\ -31 &= -7A - 2B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je  $A = 3, B = 5$ . Platí tedy (pro všechna  $x \neq 2$  a  $x \neq 7$ )

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x - 7}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx &= \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{5}{x - 7} dx \\ &= 3 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 7| + C. \end{aligned}$$

Výsledek platí v každém intervalu, který neobsahuje body  $x = 2, x = 7$ .

**Příklad 7.3.18.**  $\int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\}$

Kořeny polynomu ve jmenovateli  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$  jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen:

$$\begin{aligned} \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} \\ 19x + 15 &= A(x - 2) + B(x + 1) \\ 19x + 15 &= x(A + B) - 2A + B \\ 19 &= A + B \\ 15 &= -2A + B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je  $A = \frac{4}{3}, B = \frac{53}{3}$ .

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{53}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx = \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \frac{53}{3} \ln|x - 2| + C$$

**Příklad 7.3.19.**  $\int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx$  [Kni+o4, s. 90]

Polynom  $Q(x) = x^3 - 4x^2 - x - 4$  má kořeny  $\alpha_{1,2} = \pm 1, \alpha_3 = -4$ , které jsou jednoduché tj.  $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 4}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici společným jmenovatelem zlomků pravé strany (polynomem  $Q(x)$ ), dostaneme

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x + 1)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x + 1)$$

čili

$$\begin{aligned} 2x^2 + 34x + 14 &= A(x^2 + 5x + 4) + B(x^2 + 3x - 4) + C(x^2 - 1) \\ 2x^2 + 34x + 14 &= (A + B + C)x^2 + (5A + 3B)x + (4A - 4B - C) \end{aligned}$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů u stejných mocnin  $x$  dostaneme pro neznámé koeficienty  $A, B, C$  soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ 5A + 3B &= 34 \\ 4A - 4B - C &= 14 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je  $A = 5, B = 3, C = -6$  a tedy

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{5}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} - \frac{6}{x + 4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx &= \int \frac{5}{x - 1} dx + \int \frac{3}{x + 1} dx + \int \frac{6}{x + 4} dx \\ &= 5 \ln|x - 1| + 3 \ln|x + 1| - 6 \ln|x + 4| + C. \end{aligned}$$

**Příklad 7.3.20.**  $\int_a^{\infty} \frac{2x + 3}{2x^3 + 2} dx \quad x \in R - \{-1\}$

## References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on p. 23).

- [Kni+o4] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on pp. 24–27).  
[Rek63] K. Rektorys. *Přehled užité matematiky*. 1. vydání. SNTL, 1963 (cit. on p. 23).



## 8. Určitý integrál

### 8.1. Motivace

#### Obsah

<b>8.1. Motivace</b> . . . . .	<b>29</b>
8.1.1. Výpočet integrálu	29
<b>8.2. Vlastnosti určitého integrálu</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>Seznam literatury</b> . . . . .	<b>30</b>

#### 8.1.1. Výpočet integrálu

**Příklad 8.1.1.** Metodou per partes spočítejte integrály:  $\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx$

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x dx &= \int e^x dx + \int x \cdot e^x dx \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x \\ \int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx &= [xe^x]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - e\end{aligned}$$

kde integrál

$$\int xe^x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

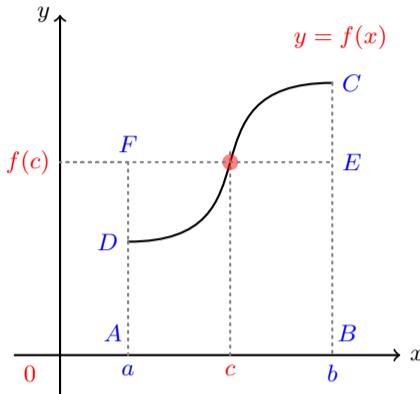
## 8.2. Vlastnosti určitého integrálu

V této kapitole mluvíme o spojité funkci  $f(x)$  ⇒ příslušné integrály tedy vždy existují.  
Čerpáno z knihy: [Kni+04].

**Věta 8.2.1. První věta o střední hodnotě integrálního počtu:** Je-li funkce  $f(x)$  spojita v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , existuje alespoň jeden takový bod  $c \in (a, b)$ , že platí

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c). \quad (8.2.1)$$

**Důkaz.** Použitím Lagrangeovy věty napsané pro funkci  $F(x)$ , primitivní na intervalu  $\langle a, b \rangle$  k dané funkci  $f(x)$ . Podmínky věty jsou zřejmě splněny:  $F(x)$  je spojita na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má všechny derivace  $F'(x) = f(x)$ . Tedy existuje alespoň jeden bod  $c \in (a, b)$ ,



Obrázek 8.2.1.

že

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(c),$$

čímž je věta dokázána, neboť  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$  a  $F'(c) = f(c)$ . Funkční hodnotu  $f(c)$ , danou podle (8.2.1) rovnici

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (8.2.2)$$

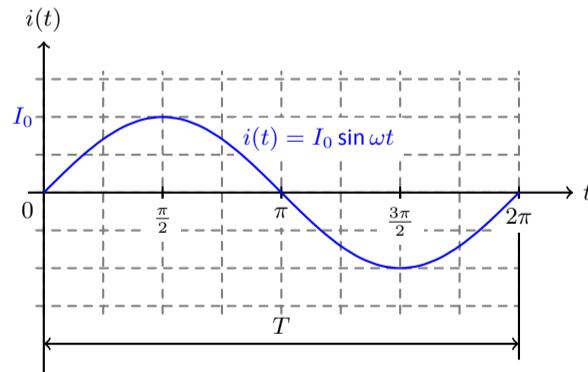
nazýváme střední hodnotou.

Pro spojitu nezápornou funkci  $f(x)$ , lze větu o střední hodnotě jednoduše geometricky interpretovat dle (obr. 8.2.1). Levá strana (8.2.1) určuje obsah křivočárového lichoběžníka  $ABCD$ , pravá strana obsah obdélníku  $ABEF$ . Podle této věty nabývá funkce  $f(x)$  alespoň v jednom bodě intervalu  $(a, b)$  takové hodnoty  $f(c)$ , že uvažovaný křivočárový lichoběžník má stejný obsah jako obdélník o základně  $b-a$  a výšce  $f(c)$  (str. 155 knihy [Kni+04]).

**Příklad 8.2.1.** Určete střední hodnotu  $i_s$  střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

v časovém intervalu  $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$  (v průběhu jedné poloviny periody).  $I_0$  je maximální hodnota proudu (obr. 8.2.2), perioda  $T$  je dána vztahem  $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Obrázek 8.2.2.

Podle 8.2.2 bude

$$\begin{aligned} i_s &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \omega t dt = \frac{2I_0}{T} \left[ -\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2I_0}{T} \frac{1}{\omega} \left( -\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) \\ &= \frac{2I_0}{2\pi} \left( -\cos \pi + \cos 0 \right) = \frac{2}{\pi} I_0 \doteq 0,637 I_0. \end{aligned}$$

Tato hodnota se rovná intenzitě elektrického proudu, při kterém by vodičem v průběhu uvažované poloviny periody prošel stejný elektrický náboj jako při proudu střídavém.

**Příklad 8.2.2. Efektivní hodnota  $i_{ef}$  střídavého proudu**

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

(viz předchozí příklad) je definována jako odmocnina ze střední hodnoty funkce  $i^2(t)$  v průběhu jedné periody  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Tedy

$$\begin{aligned} i_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{I_0^2}{2T} \left[ t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{I_0^2}{2} \end{aligned}$$

neboť  $\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$ . Odtud

$$i_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Střídavý proud  $i(t) = I_0 \sin \omega t$  má na témže odporu stejný výkon jako stejnosměrný proud o intenzitě  $i = 0,707 I_0$ .

Následující věta může být využita k odhadu některých integrálů

**Věta 8.2.2. Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu:** Jsou-li funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  spojité v intervalu  $\langle a, b \rangle$  a je-li funkce  $g(x)$  v  $\langle a, b \rangle$  nezáporná a nerostoucí, existuje alespoň jeden bod  $c \in \langle a, b \rangle$  tak, že platí

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx. \quad (8.2.3)$$

Zcela obdobnou větu lze vyslovit pro případ, že  $g(x)$  je v intervalu  $\langle a, b \rangle$  nezáporná a neklesající, tj. na pravé straně 8.2.3 je pak integrál  $g(b) \int_c^b f(x) dx$

**Příklad 8.2.3. Odhadněte hodnotu integrálu**

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (8.2.4)$$

**Řešení:** Funkce  $f(x) = \sin x$  a  $g(x) = \frac{1}{x}$  jsou v uvažovaném intervalu  $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$  spojité a funkce  $g(x)$  je kladná a nerostoucí.

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^c \sin x dx = \frac{1}{100\pi} (\cos 100\pi - \cos c)$$

kde  $c$  je kladné číslo z intervalu  $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ . Dále pro všechna  $c \in \langle 100\pi, 1000\pi \rangle$  platí  $0 \leq 1 - \cos c \leq 2$ , takže

$$0 \leq \int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{50\pi}.$$

## References

[Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on p. 30).

## 9. Řady

### Obsah

---

Seznam literatury . . . . .	31
-----------------------------	----

---



**Část III.**

**Obyčejné diferenciální rovnice**



# 10. Elementární metody řešení diferenciálních rovnic

## 10.1. Diferenciální rovnice 1. řádu

### Obsah

10.1. Diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .	35
Seznam literatury . . . . .	35

Řada fyzikálních principů má tvar výroku, resp. vztahu mezi jistými veličinami (funkcemi) a jejich změnami, vztaženými ke zvoleným nezávisle proměnným parametru (čas, souřadnice). Změny (okamžité, lokální) se nejlépe vystihují pomocí derivací. Takový zákon má pak charakter vztahu mezi uvažovanými veličinami a jejich derivacemi. Nejčastěji bývá vztah vyjádřen formou rovnosti:

- Newtonův zákon: okamžitá změna hybnosti  $p(t) = m(t) \cdot v(t)$  pohybujícího se objektu je úměrná působící síle  $F(t)$  v každém okamžiku  $t$  zvoleného časového rozmezí

$$\frac{d}{dt} (m(t) \cdot v(t)) = F(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

- Kirchhoffův zákon pro LR – obvod: v okamžiku  $t$  je součet napětí na cívce s indukčností  $L$  a na rezistoru o odporu  $R$  roven napětí  $U(t)$  na svorkách zdroje. Tuto rovnost pak zapisujeme ve tvaru (pro L,R = konst)

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri = u(t), \quad (10.1.1)$$

kde  $i = i(t)$  ... funkce popisující závislost proudu na čase.

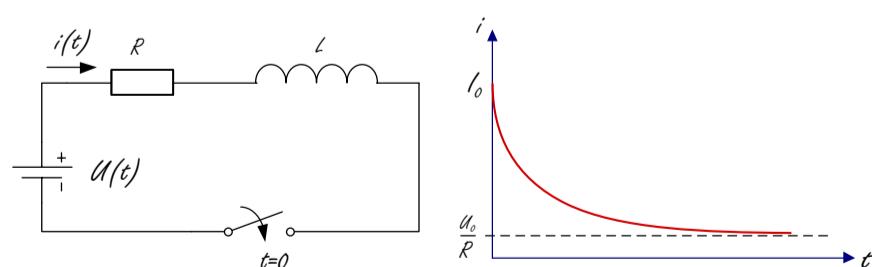
Chceme-li určit funkci  $i = i(t)$  popisující průběh proudu v obvodu tak, aby byl splněn příslušný K.z. a současně, aby byl splněn požadavek na počáteční stav:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U, \quad i(0) = I_0, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (10.1.2)$$

Metodami uvedenými později stanovíme právě jednu funkci  $i = i(t)$ , která je řešením dané tzv. **počáteční úlohy**.

$$i(t) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad (10.1.3)$$
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{U_0}{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} i(t) = I_0 = i(0)$$

- tedy obvykle formulujeme úlohu najít jistou funkci tak, aby zákon byl splněn tj. Kirchhoffův zákon užijeme k tomu, abychom nalezli funkci  $i(t)$
- užijeme-li rovnosti vyjadřující takový zákon k tomu, abychom určili funkci, která v takovém vztahu vystupuje spolu s derivacemi, stává se tento požadavek úlohou, která má charakter rovnice s derivacemi, neboli diferenciální rovnice. Funkce, která požadavek splňuje, se pak nazývá řešení diferenciální rovnice.



Obrázek 10.1.1.: Graf průběhu proudu  $i(t)$  po sepnutí spínače v době  $t = 0$ .



**Část IV.**

**Numerické metody**



# 11. Úvod do numerických metod

## Obsah

11.1. Úvodní slovo . . . . .	39
11.2. Reprezentace čísel ve výpočetní technice . . . . .	39
11.2.1. Zaokrouhlování . . . . .	40
11.3. Chyby při numerických výpočtech . . . . .	40
11.3.1. Zdroje a typy chyb . . . . .	40
11.3.2. Definice chyb, šíření chyb při výpočtu . . . . .	40
11.3.3. Absolutní a relativní chyba . . . . .	40
11.4. Řešení nelineárních rovnic . . . . .	40
11.4.1. Motivace . . . . .	40
11.4.2. Metoda bisekce . . . . .	41

## 11.1. Úvodní slovo

Numerické metody jsou metody, které na rozdíl od metod analytických poskytujících spojité řešení na určité předem definované oblasti, dávají číselné řešení v předem zvolených diskrétních bodech této oblasti. Na rozdíl od analytických metod toto řešení většinou nebývá přesné, ale představuje pouze jeho approximaci, která je zatížena určitou chybou.

Možnosti analytických metod se již asi třicet let pokládají prakticky za vyčerpané. Drtivá většina problémů (a to zdaleka nejen v oblasti technických věd), které bylo možno analyticky vyřešit, již tehdy byla vyřešena. Při vyčíslování výsledků ovšem v mnoha případech nastávaly značné problémy; spojité řešení bylo například popsáno kombinací vyšších funkcí (Besselovy, Legendrové atd.) v podobě nekonečných řad, přičemž bylo třeba načítat dostatečný počet jejich členů k dosažení požadované přesnosti. A zde se již začaly uplatňovat různé numerické techniky, které ovšem bylo v té době možno realizovat jen na kalkulačkách nebo ze současného pohledu na primitivních počítačích.

Ačkoli základy sofistikovaných numerických metod byly položeny již před více než šedesáti lety, jejich intenzivní a široký rozvoj je spojen teprve s vývojem a zdokonalováním výpočetní techniky v posledních asi čtyřiceti letech a lze říci, že v poslední době s řešením čím dál tím složitějších problémů ze všech vědních oblastí (nestacionární a nelineární úlohy ve 2D a 3D) stále nabývají na významu.

Výsledkem aplikace převážné většiny numerických metod je sestavení velkého systému lineárních či nelineárních algebraických rovnic, který je nutno nějakým způsobem vyřešit existují ovšem numerické techniky i pro jiné účely, jako je například součet různých řad, výpočet určitých integrálů atd., jejich počet však není příliš velký). A v popředí zájmu jsou především dvě otázky:

- jak sestavit onen systém tak, aby počet zmíněných rovnic byl co nejmenší (přičemž ale informace o rozložení hledané veličiny v oblasti je maximální a co nejpřesnější) a
- jak tento systém vyřešit co nejrychleji a s nejmenší možnou chybou.

Na tomto místě je nutno podotknout, že i malá vylepšení stávajících postupů mohou při řešení složitých úloh vedoucí na řešení soustav milionů či desítek milionů rovnic (aktuální stav) zajistit velmi výrazné časové úspory. Samotná realizace jakékoli numerické metody sestává z několika kroků:

- Sestavení matematického modelu dané úlohy. Tento krok je sám o sobě často nesmírně komplikovaný; reálný fyzikální problém musíme mnohdy zjednodušit tak, aby byl vůbec dostupnými prostředky řešitelný, aniž by však vzniklé chyby přesáhly přijatelné hodnoty. Takový matematický model zpravidla sestává z různých rovnic (algebraických, diferenciálních, integrálních, smíšených), neurčitých nebo určitých integrálů a podobně.
- Výběr konkrétní metodiky, jakou tento model budeme řešit. Uvedená metodika by měla být co nejvhodnější z celé řady hledisek, jako je rychlosť výpočtu, spolehlivost, robustnost, přesnost, konvergence, stabilita atd. O těchto pojmech jistě už většinou máme jakousi intuitivní představu, v dalším textu však některé z nich upřesníme. Na základě zvolené metody vypracujeme algoritmus, což je konečné množství instrukcí, které musíme provést, aby se celý výpočet bezezbytku provedl.
- Navržený algoritmus musíme nyní naprogramovat. Přitom lze využít buď nějakého programovacího jazyka (FORTRAN, C++ a další), nebo nějakého prostředí s již předprogramovanými operacemi nebo celými bloky výpočtů (MatLab, Mathematica). V některých případech lze využít i již existujících profesionálních programů, které takový algoritmus obsahují (freeware tohoto typu je velmi řídké). Ty jsou ovšem velmi drahé a uživatel do nich zpravidla nemůže zasahovat za účelem například optimalizace výpočtu.
- Dalším krokem je realizace výpočtu. Zde je kromě provedení samotného výpočtu nutné ověřit, že výsledky jsou korektní. K tomu používáme buď experiment, nebo jinou metodu, která je již pro úlohu daného typu spolehlivě prověřená. Dále ověřujeme celou řadu aspektů, jako je například geometrická konvergence řešení (závislost výsledků na hustotě diskretizační sítě) a popřípadě jiná kritéria, o nichž se více dozvídáme později.
- Posledním krokem je vyhodnocení a posouzení získaných výsledků, zpravidla na vizuálním základě, porovnáním, ale i jinak.

## 11.2. Reprezentace čísel ve výpočetní technice

Při realizaci numerických algoritmů na počítači se lze setkat se dvojí reprezentací čísel, a to pomocí **pevné** nebo **plovoucí desetinné tečky**. Pevná desetinná tečka

8675	8675.0000
3.24	3.2400
-0.000006	-0.0000

Tabulka 11.2.1.: Reprezentace čísel v pevné desetinné tečce

znamená vždy předem definovaný počet desetinných míst. Pracujeme-li se čtyřmi desetinnými mísť, interpretují se následující čísla takto:

Zatímco první dvě čísla jsou zobrazena přesně, třetí číslo nikoli, je zaokrouhleno. Proto je tento způsob nepraktický, při vedeckotechnických výpočtech se neužívá a v dalším textu se jím už nebude zábavat.

Daleko pružnejší je proto počítání s plovoucí desetinnou tečkou, kdy se v každém čísle respektuje předepsaný počet prvních číslic. V tomto případě se uvedená čísla zobrazují takto:

8675	+0.8675E+04	nebo	+8.675E+03
3.24	+0.3240E+01	nebo	+3.240E+00
-0.000006	-0.6000E-05	nebo	-6.000E-06

Tabulka 11.2.2.: Reprezentace čísel v plovoucí desetinné tečce

Každé nenulové číslo a lze reprezentovat jako  $a = +m \cdot 10^e$ , kde  $0.1 < m < 1$  a  $e$  je celé číslo. Samozřejmě, číslo  $m$  může obsahovat nekonečnou řadu číslic a celé číslo  $e$  se může pohybovat od minus nekonečna do nekonečna. To ale v počítačové reprezentaci není možné; zde je číslo  $m$  omezeno na konečný počet  $n$  číslic a právě tak je omezen i exponent. Číslo  $a$  je tedy počítačem approximováno jako  $a = \pm m \cdot 10^e$ , kde  $m = 0.d1d2\dots dn$ . Toto číslo  $m$  se nazývá **mantisa** a  $e$  **exponent**.

V jednoduché přesnosti má v počítačích e velikost  $|e| < 38$ , ve dvojitě přesnosti  $|e| < 308$ . Jsou-li tyto hodnoty překročeny, vzniká chyba známá jako **underflow** nebo **overflow**.

### 11.2.1. Zaokrouhlování

Čísla jsou v počítačové interpretaci často zaokrouhlována (mají-li v mantise velký počet číslic), poněvadž mantisa  $m$  zde může těchto číslic obsahovat pouze  $n$ . Pravidla zaokrouhlování jsou jasné. Zopakujeme zde jen to, že čísla typu 7.65 nebo 7.75 (chceme-li zrušit jedno desetinné místo) zaokrouhlíme tak, že poslední číslice je sudá. Takže zatímco 7.65 zaokrouhlíme na 7.6, 7.75 zaokrouhlíme na 7.8.

Chybu při zaokrouhlování můžeme určit jako ( $n$  je počet číslic v mantise  $m$ )

$$\left| \frac{m - \hat{m}}{m} \right| \leq \frac{0.5}{10^{n-1}} \quad (11.2.1)$$

## 11.3. Chyby při numerických výpočtech

Protože základem numerických metod je získávání přibližných výsledků, je nutné mít vždy představu, jaký rozdíl může být mezi přesným řešením dané úlohy a řešením získaným použitou numerickou metodou.

### 11.3.1. Zdroje a typy chyb

Pomíname-li jako zdroj chyb člověka dopouštějícího se omylů, můžeme chyby rozdělit na několik základních druhů.

- Chyby matematického modelu** - vznikají nahrazením reálné fyzikální situace matematickým modelem. Může se jednat například o popis nějakého fyzikálního děje pomocí diferenciální rovnice.
- Chyby vstupních dat** - jsou způsobeny nepřesnostmi při měření fyzikálních veličin
- Chyby numerické metody** - vznikají při nahrazení původní matematické úlohy jednodušší numerickou. Často se jedná o nahradu nekonečného procesu procesem konečným, např. při výpočtu hodnoty některé elementární funkce pomocí součtu několika prvních členů její nekonečné Taylorovy řady nebo při approximaci určitého integrálu součtem konečného počtu funkčních hodnot. Odhad této chyby je důležitou součástí řešení každé numerické úlohy.
- Chyby zaokrouhlovací** - vznikají tím, že při výpočtech pracujeme s čísly zaokrouhlenými na určitý, relativně nevelký počet mísť. Tyto chyby se při výpočtu mohou kumulovat, nebo navzájem rušit. Při velkém počtu operací je posouzení jejich vlivu velmi náročné.

### 11.3.2. Definice chyb, šíření chyb při výpočtu

#### 11.3.3. Absolutní a relativní chyba

Je-li hodnota  $\underline{c}$  approximace přesné hodnoty  $c$ , je **absolutní chyba** definována jako  $\varepsilon = c - \underline{c}$  a **relativní chyba**  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{c}, c \neq 0$ . Tato definice se může zdát neužitečná, poněvadž  $c$  neznáme. Lze-li však říci, že pokud se approximace  $\underline{c}$  blíží k  $c$ , můžeme psát  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\underline{c}}, \underline{c} \neq 0$ . Bohužel, většinou neznáme ani hodnotu  $\varepsilon$ . Někdy však její hodnotu můžeme odhadnout vztahem  $|\varepsilon| \leq \sigma$  a podobně lze odhadnout pro relativní chybu  $|\varepsilon_r| \leq \sigma_r$ .

#### 11.3.3.1. Šíření chyb

Mezi absolutních chyb při sčítání a odečítání se rovnají součtu příslušných mezí. Mezi relativních chyb při násobení a dělení se rovnají součtu mezí jednotlivých relativních chyb.

- Nechť  $|x_i - \hat{x}_i| = |\varepsilon_i| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, n$ . Pak je

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \hat{x}_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (11.3.1)$$

- Nechť dále  $\left| \frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right| = |\varepsilon_{ri}| \leq \sigma_{ri}, i = 1, \dots, n$ . Pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n \hat{x}_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i - \varepsilon_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| \doteq \\ \left| \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i} \right| \\ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} \right| \end{aligned}$$

kde jsme ale při rozdílu součinů v druhém výrazu zanedbali všechny násobky různých absolutních chyb, tedy členy druhého a vyšších řádů.

#### 11.3.3.2. Podmíněnost numerických úloh a numerická stabilita algoritmů

Při numerickém řešení různých úloh musíme zkoumat, jaký vliv na výsledek mají malé změny ve vstupních hodnotách a zaokrouhlování během výpočtu. Řešení numerických úloh můžeme považovat za postup, kterým přiřazujeme vstupním údajům výstupní data. Je-li toto přiřazení spojité zobrazení, pak říkáme, že numerická úloha je **korektní úloha**, v opačném případě se jedná o úlohu **nekorektní**.

Pro tyto úlohy má zásadní význam relativní citlivost výsledku na malé změny ve vstupních parametrech úlohy. Korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malým relativním změnám vstupních údajů odpovídají malé relativní změny výstupních údajů. Číslo

$$C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}, \quad (11.3.2)$$

nazýváme **číslo podmíněnosti úlohy**. Pro dobré podmíněné úlohy je číslo  $C_p$  blízké číslu 1. Pokud malé relativní změny na vstupu způsobí velké relativní změny na výstupu, pak mluvíme o **špatně podmíněné úloze**. Řešení špatně podmíněných úloh je nejlépe se vyhnout, protože výsledky jakéhokoliv algoritmu jsou velmi nespolehlivé. Podobně řekneme, že je algoritmus **dobře podmíněný**, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech. Kromě nepřesnosti ve vstupních údajích ovlivňuje výsledek použitého algoritmu i zaokrouhlování čísel během výpočtu. Je-li vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek malý, mluvíme o **numericky stabilním algoritmu**. Algoritmus dobré podmíněný a numericky stabilní se nazývá **stabilní**.

## 11.4. Řešení nelineárních rovnic

### 11.4.1. Motivace

Kořeny nelineárních rovnic  $f(x) = 0$  obecně neumíme vyjádřit explicitním vzorcem. K řešení nelineární rovnice proto používáme iterační metody: z jedné nebo několika počátečních approximací hledaného kořene  $\hat{x}$  generujeme posloupnost  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , která ke kořenu  $\hat{x}$  konverguje. Pro některé metody stačí, když zadáme interval  $(a, b)$ , který obsahuje hledaný kořen. Jiné metody vyžadují, aby počáteční approximace byla k hledanému kořenu dosti blízko; na opak takové metody konvergují mnohem rychleji. Často proto začínáme s "hrubou", avšak spolehlivou metodou, a teprve když jsme dostatečně blízko kořene, přejdeme na "jemnější", rychleji konvergující metodu.

Abychom naše úvahy zjednodušili, omezíme se na problém určení reálného jednoduchého kořene  $\hat{x}$  rovnice  $f(x) = 0$ , tj. předpokládáme, že  $f'(\hat{x}) = 0$ . Budeme také automaticky předpokládat, z funkce  $f(x)$  je spojitá a má tolik spojitých derivací, kolik je jich v dané situaci zapotřebí.

Počáteční approximaci kořenů rovnice  $f(x) = 0$  můžeme zjistit z grafu funkce  $f(x)$ : ručně, nebo raději pomocí vhodného programu na počítači, vykreslíme funkci  $f(x)$  a vyhledáme její průsečíky s osou  $x$ .

Jinou možností je sestavení tabulky  $[x_i, f(x_i)]$  pro nějaké dělení:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

**Příklad 11.4.1.** Získejme hrubý odhad kořenů rovnice  $f(x) = 0$ , kde

$$f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$$

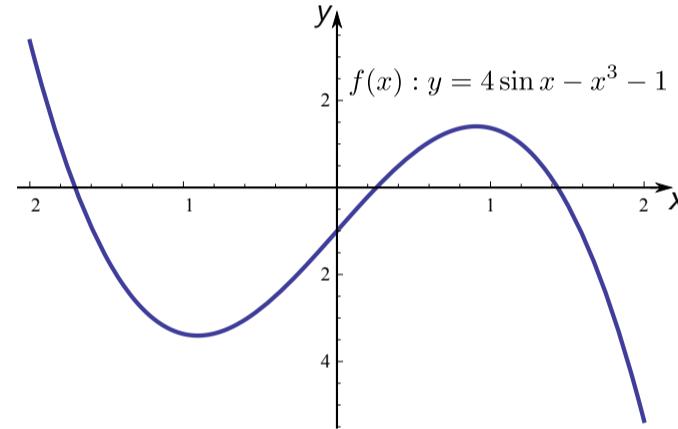
Z obrázku 11.4.1 zjistíme, že existují tři kořeny:  $x_1^* \in (-2, -1)$ ,  $x_2^* \in (-1, 0)$  a  $x_3^* \in (1, 2)$ .

Z obrázku zjistíme, že existují tři kořeny:  $x_1^* \in (-2, -1)$ ,  $x_2^* \in (0, 1)$ ,  $x_3^* \in (1, 2)$ . Zkusme najít kořeny v těchto intervalech pomocí numerických metod popsaných v následujících odstavcích.

#### 11.4.2. Metoda bisekce

Metoda známá také jako **metoda půlení intervalů**, je založena na principu znaménkových změn. Předpokládejme, že funkce  $f(x)$  má v koncových bodech intervalu  $(a_0, b_0)$  opačná znaménka, tj. platí  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ . Sestrojíme posloupnost intervalů  $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$ , které obsahují kořen. Intervaly  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , určíme rekursivně způsobem, který si nyní popíšeme.

Střed intervalu  $(a_k, b_k)$  je bod  $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ . Když  $f(x_k) = 0$ , pak  $x_{k+1} = x^*$  je kořen a dál nepokračujeme.



Obrázek 11.4.1.: Graf funkce  $f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$ .



**Část V.**

**Fyzika**



## 12. Historie fyziky

### Obsah

12.1. Hlavní etapy vývoje	45
---------------------------	----

### 12.1. Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již stáří Sumerové, Babyloňané, Egyptané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodonědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimedovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovaný základní pojmy (rychllosť, zrychlení, síla apod.). Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich drahách kolem Slunce je táz jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a též elektromagnetické povahy. V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galilejho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, již vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoručasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlosť světla ve vakuu a při slabých gravitačních

polích v teorii Newtonovu. Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádřech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrín. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou též podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou též povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozšíření vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

## 13. Práce a potenciální energie

### 13.1. Potenciály a pole

#### Obsah

13.1. Potenciály a pole . . . . . 47

$$K_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (13.1.1)$$



# 14. Elektromagnetismus

## Obsah

14.1. Elektrické síly . . . . .	49
14.2. Elektrická a magnetická pole . . . . .	50
14.3. Charakteristiky vektorových polí . . . . .	50
14.4. Zákony elektromagnetizmu . . . . .	51
14.5. Co jsou pole? . . . . .	53
14.6. Působení na dálku versus teorie pole . . . . .	54
14.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice . . . . .	54

## 14.1. Elektrické síly

[FLMoo, s. 13] Představme si sílu, která se podobá gravitaci a mění se převážně nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti, ale asi miliardu miliard miliard miliard-krát větší. A ještě s jedním rozdílem. Nechť existují dva druhy „látky“, které nazývejme kladná a záporná. Nechť na rozdíl od gravitace, v níž existuje pouze přitažování, se stejné druhy odpuzují a odlišné druhy přitahují. Co by se stalo?

Chomáč kladné látky by se ohromnou silou odpuzoval a rozptýlil by se na všechny strany. S chomáčem záporné by se stalo totéž. Ale směs stejněho množství kladné a záporné látky by se chovala zcela odlišně. Ohromná přitažlivá síla by přitáhla opačné kousky k sobě. V konečném důsledku by se tyto úžasné síly navzájem téměř dokonale vykompenzovaly vytvořením hutných jemných směsí kladného a záporného, přičemž mezi dvěma oddělenými chomáči takových směsí by neexistovalo téměř žádné přitažování nebo odpuzování.

Taková síla existuje - je to elektrická síla! A každá látka je směsí kladných protonů a záporných elektronů, které se touto velkou silou přitahují a odpuzují. Ale vyvážení je tak dokonalé, že když stojíte blízko někoho jiného, necítíte sílu vůbec žádnou. Kdyby existoval jen malý zbytek nerovnováhy, poznali bychom to. Kdybyste stáli od někoho na vzdálenost paže a každý z vás by měl o jedno procento víc elektronů než protonů, byla by odpudivá síla mezi vámi neuvěřitelná. Jak velká? Dost na to, aby zvedla obrovský mrakodrap? Ne! Aby zvedla Mount Everest? Ne! Odpuzování by stačilo na zvednutí břemene s hmotností celé zeměkoule!

S ohledem na tak perfektní vyvážení ohromné síly, působící v této směsi, není těžké pochopit, že látka s tendencí udržet své kladné a záporné náboje v nejjemnější rovnováze může mít velkou tvrdost a pevnost. Mrakodrap Empire State Building se například vychyluje ve větru jen o necelé tři metry, neboť elektrické síly udržují každý elektron a proton víceméně ve stálé poloze. Na druhé straně, když se podíváme na tak malé množství látky, že uvidíme jen několik atomů, libovolná malá část látky obvykle nebude mít stejný počet kladných a záporných; nábojů, takže budou existovat velké zbytkové elektrické síly. I kdyby byly počty obou druhů nábojů ve dvou sousedních malých částech stejně, pravděpodobně ještě zůstanou mezi oběma částmi elektrické síly, neboť síly mezi jednotlivými náboji se mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti. Zbytková síla může vzniknout, nachází-li se záporný náboj jedné části blíž kladnému náboji než kladný náboj zápornému v části jiné. Pak mohou být přitažlivé síly větší než odpudivé a může dojít k výslednému přitažování i dvou částí bez nadbytečných nábojů. Síla, která „udržuje“ pohromadě atomy, a chemická síla, která drží molekuly, jsou ve skutečnosti elektrickými silami působícími v oblastech s nedokonalou rovnováhou nábojů anebo s velmi malými vzdálenostmi.

Samozřejmě víme, že se atomy skládají z kladných protonů v jádře a záporných elektronů v jeho okolí. Můžeme se ptát: Když je tato elektrická síla tak úžasná, proč spolu protony a elektrony nesplynou? Když mají tvořit dokonalou směs, proč tato směs není ještě dokonalejší? Odpověď nacházíme v kvantových jevech. Pokusíme-li se naše elektrony uzavřít do oblasti těsně přiléhající k protonům, musí mít podle principu neurčitosti nenulovou střední kvadratickou hybnost, která je tím větší, čím těsnější je ohraničení. Právě tento pohyb, vyplývající ze zákonů kvantové mechaniky, zabraňuje elektrické přitažlivosti dostat náboje jakýmkoli způsobem blíž k sobě.

Je tu další otázka: Co drží pohromadě atomové jádro? V jádře je několik kladných protonů. Proč se od sebe neoddělí? Ukazuje se, že v jádře existují kromě elektrických i neelektrických sil, které se nazývají jaderné sily. Jsou větší než elektrické sily a jsou schopné držet protony u sebe i přes jejich elektrické odpuzování. Síly jádra však mají malý dosah - jejich velikost klesá mnohem rychleji než  $\frac{1}{r^2}$ . A to má důležitý důsledek. Kdyby jádro obsahovalo velmi mnoho protonů, stalo by se příliš velkým a nezůstalo by pohromadě. Příkladem je uran s 92 protony. Jaderné síly působí převážně jen mezi každým protonem (nebo neutronem) a jeho nejbližším sousedem, ale elektrické síly působí i na větší vzdálenosti a vyvolávají tak odpuzování každého protonu od všech ostatních v jádře. Čím víc je v jádře protonů, tím je elektrické odpuzování silnější, až dokud - jako v případě uranu - není rovnováha tak křehká, že je jádro účinkem elektrické síly téměř připraveno se rozletět. Jestliže takové jádro jen trochu „postrčíme“ (pokud do něj vyšleme pomalý neutron), rozdělí se na dvě části s kladným nábojem. V důsledku elektrického odpuzování od sebe obě části odletí. Energie, která se při tom uvolňuje, je energií atomové bomby. Obvykle se tato energie nazývá jaderná, ale v podstatě je to elektrická energie uvolněná tehdy, když elektrické síly překonaly přitažlivé síly jádra.

Konečně se můžeme ptát, co drží pohromadě záporný elektron (neboť ten nemá žádné jaderné síly). Skládá-li se elektron celý z jednoho druhu látky, každá z jeho částí by měla odpuzovat ty ostatní. Proč se tedy nerozletí? Má však elektron „části“? Asi bychom měli říct, že elektron je jen bod a že elektrické síly působí jen mezi různými dvěma bodovými náboji, takže sám na sebe elektron nepůsobí. Snad. Vše, co můžeme říct, je, že otázka, co drží pohromadě elektron, způsobila v pokusech o vytvoření úplné teorie elektromagnetismu mnoho těžkostí. Tato otázka zatím nebyla zodpovězena. V dalších kapitolách se budeme tomuto tématu věnovat více.

Jak jsme viděli, je třeba čekat, že právě kombinace elektrických sil a kvantově mechanických jevů bude určovat detailní strukturu makroskopických množství látek, a tím i jejich vlastnosti. Některé látky jsou tvrdé, jiné měkké. Některé jsou elektrickými vodiči, protože jejich elektrony se mohou volně pohybovat, jiné jsou izolátory, protože jejich elektrony jsou pevně připoutané k jednotlivým atomům. Později budeme hovořit o tom, jak vznikají některé z těchto vlastností. Je to však složitá otázka, proto nejdřív budeme zkoumat elektrické síly jen v jednoduchých situacích. Začneme s probíráním zákonů elektřiny, včetně magnetizmu, který je vlastně částí téhož předmětu.

Řekli jsme, že elektrická síla podobně jako gravitační klesá nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti mezi náboji. Tento vztah se nazývá Coulombův zákon. Ale neplatí přesně, když se náboje pohybují, protože elektrické síly závisí také na pohybu nábojů, a to komplikovaným způsobem. Jednu část síly mezi pohybujícími se náboji nazýváme *magnetická síla*, která vlastně představuje jeden aspekt elektrického účinku. Právě proto hovoříme o „elektromagnetismu“.

Existuje důležitý obecný princip, který umožňuje zacházet s elektromagnetickými silami poměrně snadno. Experimentálně se zjistilo, že síla působící na náboj závisí pouze na poloze tohoto náboje, jeho rychlosti a velikosti, bez ohledu na to, kolik dalších nábojů existuje a jak se pohybují. Sílu  $\vec{F}$  působící na náboj  $q$ , který se pohybuje rychlostí  $\vec{v}$ , můžeme vyjádřit takto:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (14.1.1)$$

kde  $\vec{E}$  je *elektrické pole* a  $\vec{B}$  *magnetické pole* v místě, kde se nachází náboj. Důležité je, že elektrické síly všech nábojů ve vesmíru lze složit právě z těchto dvou vektorů. Jejich hodnoty závisí na tom, kde se uvažovaný náboj nachází, a mohou se v čase měnit. Kromě toho, nahradíme-li tento náboj jiným, změní se síla působící na nový náboj v poměru velikostí obou nábojů, nezmění-li všechny ostatní náboje na světě svou polohu nebo pohyb. (Samozřejmě že v reálné situaci každý náboj působí na všechny ostatní ve svém okolí a může je uvést do pohybu. A tak když v některých případech nahradíme náboj jiným nábojem, mohou se pole změnit.)

Z 1. dílu víme, jak se určuje pohyb částice, známe-li sílu, která na ni působí. Dosadíme-li výraz (14.1.1) do pohybové rovnice, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (14.1.2)$$

Známe-li  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ , můžeme určit pohyby nabitéch čistic. K tomu už jen potřebujeme vědět, jak  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  vznikají.

Jeden z nejdůležitějších zjednodušujících principů vytváření elektrických polí závisí na tomto: Předpokládejme, že určitý počet nábojů pohybujících se libovolným způsobem vytvoří pole  $\vec{E}_1$  a jiná množina nábojů vytvoří pole  $\vec{E}_2$ . Působí-li obě množiny nábojů současně (při zachování stejných pohybů a poloh, které měly, když jsme o nich uvažovali odděleně), vytvoří pole, které je dáno součtem

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (14.1.3)$$

Tento fakt se nazývá *princip superpozice polí*. Platí také pro magnetická pole.

Z tohoto principu vyplývá, že budeme-li vědět, podle jakého zákona vytváří elektrická a magnetická pole jediný náboj pohybující se libovolným způsobem, zákony elektrodynamiky už budou úplné. Chceme-li znát sílu působící na náboj  $A$ , je třeba spočítat pouze  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ , které vytváří každý náboj  $B, C, D$  atd., pak vypočítat vektoru  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  všech nábojů, a tak najít pole a síly působící z nich na  $A$ . Kdyby se ukázalo, že zákon, podle kterého se vytváří pole jediného náboje, je jednoduchý, byla by to nejšikovnější cesta, jak popsat zákony elektrodynamiky. My už jsme uvedli tento zákon (kapitola 28, díl 1), který je, bohužel, dost složitý.

Ukazuje se, že tvar, ve kterém jsou zákony elektrodynamiky nejednodušší, není tím tvarem, který byste zde mohli očekávat. Není totiž vůbec jednoduché udat vzorec síly, kterou působí jeden náboj na druhý. Je pravda, že pokud jsou náboje v klidu, je výraz pro Coulombovo sílu ještě jednoduchý, ale když se náboje pohybují, vztahy se komplikují kromě jiného i časovým zpožděním a zrychlením. Z tohoto důvodu nehodláme prezentovat elektrodynamiku pouze prostřednictvím zákonů síly působící mezi náboji; pokládáme za vhodnější jiné hledisko - při něm jsou zákony elektrodynamiky zvládnutelné snáze.

## 14.2. Elektrická a magnetická pole

Nejdříve si musíme trochu rozšířit naši představu o elektrickém vektoru  $\vec{E}$  a magnetickém vektoru  $\vec{B}$ . Definovali jsme je pomocí sil působících na náboj. Nyní chceme hovořit o elektrických a magnetických polích v bodě, i v tom případě, kdy se v něm nenachází žádný elektrický náboj. Tvrdíme: jestliže existují síly působící na náboj, existuje tam „něco“ i tehdy, je-li náboj odstraněn. Když na náboj umístěný v bodě  $(x, y, z)$  působí v čase  $t$  síla  $\vec{F}$  daná výrazem (14.1.1), přiřazujeme bodu  $(x, y, z)$  v prostoru vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ . O vektorech  $\vec{E}(x, y, z, t)$  a  $\vec{B}(x, y, z, t)$  si můžeme myslit, že určují síly, které by působily v čase  $t$  na náboj umístěný v bodě  $(x, y, z)$  za podmínky, že umístění náboje do bodu  $(x, y, z)$  neporuší polohy nebo pohyby žádných jiných nábojů vytvářejících i pole  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ .

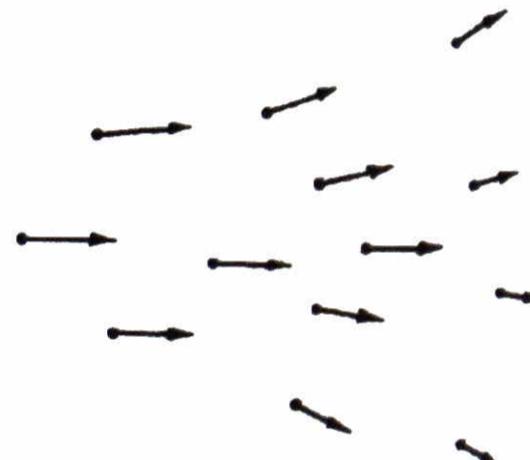
Podle této představy připíšeme každému bodu  $(x, y, z)$  v prostoru dva vektoru  $\vec{E}$

a  $\vec{B}$ , které se mohou měnit v čase. Elektrická a magnetická pole pak chápeme jako vektorové funkce proměnných  $x, y, z$  a  $t$ . Protože vektor je určen svými složkami, každé z polí  $\vec{E}(x, y, z, t)$  a  $\vec{B}(x, y, z, t)$  představuje tři reálné funkce proměnných  $x, y, z$  a  $t$ .

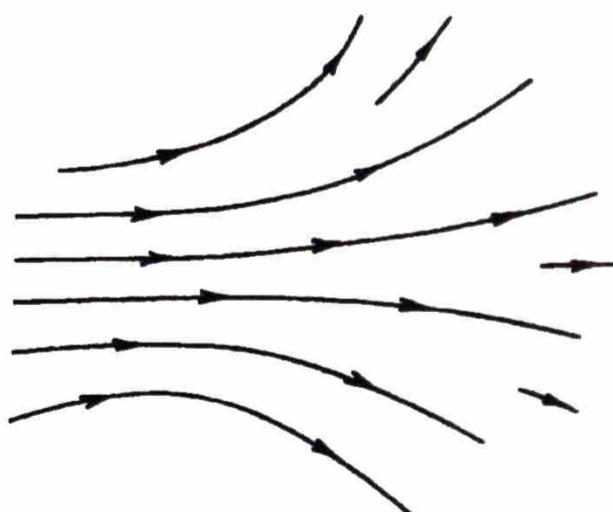
Právě proto, že  $\vec{E}$  (nebo  $\vec{B}$ ) je možné určit v každém bodě v prostoru, nazývá se pole. Pole je jakákoliv fyzikální veličina, která nabývá různé hodnoty v různých bodech prostoru. Například teplota je polem - v tomto případě skalárním polem, které zapisujeme jako  $T(x, y, z)$ . Teplota se může také měnit v čase, říkáme, že je závislá na čase a zapisujeme ji jako  $T(x, y, z, t)$ . Jiným příkladem je „rychlostní pole“ tekoucí kapaliny. Rychlosť kapaliny v každém bodě prostoru v čase  $t$  zapisujeme jako  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . Je to vektorové pole.

Vraťme se k elektromagnetickým polím. Ačkoliv se jejich závislost na nábojích, které je vytvořily, vyjadřuje složitými vzorci, mají důležitou následující vlastnost: vztahy mezi hodnotami polí v jednom bodě a hodnotami polí v bodech sousedních jsou velice jednoduché. Pole lze zcela popsat pomocí několika vztahů, které mají tvar diferenciálních rovnic. Právě pomocí takových rovnic se zapisují zákony elektrodynamiky nejjednodušejší.

Existují rozmanité nápady, jak si vytvořit představu o chování polí. Nejsprávnější z nich je i nejabstraktnější: pole chápeme prostě jako matematické funkce polohy a času. Můžeme se pokusit získat představu pole také tím, že si v mnoha bodech prostoru nakreslíme vektry, z nichž každý bude udávat intenzitu a směr pole v daném bodě. Takové zobrazení pole vidíme na obr. 14.2.1a. Můžeme však jít dál a nakreslit křivky, které mají všude vektory ve směru tečny, tj. jakoby šly za šipkami a sledovaly směr pole. Když postupujeme takto, ztrácíme znázornění délky vektoru. Intenzitu pole můžeme však znázornit tak, že křivky vykreslíme daleko od sebe, když je pole slabé, a blízko sebe, když je silné. Domluvíme se přitom, že počet křivek připadající na jednotku plochy postavenou kolmo na křivky bude přímo úměrný intenzitě pole. Toto je ovšem jen zjednodušení a vyžaduje, aby se tu a tam objevily nové křivky tak, aby jejich počet vždy souhlasil s intenzitou pole. Pole z obr. 14.2.1a je znázorněno pomocí těchto siločar na obr. 14.2.1b.



(a) šipkami, jejichž velikostí a směry udávají hodnoty vektorového pole v bodech, ze kterých vycházejí.



(b) siločar, jejichž tečny mají v každém bodě směr vektoru pole a jejichž hustota je úměrná velikosti vektoru pole.

Obrázek 14.2.1.: Znázornění vektorového pole

## 14.3. Charakteristiky vektorových polí

[FLMoo, s. 16] V našem popisu zákonů elektřiny, který se opírá o pojem pole, budeme používat dvě matematicky důležité vlastnosti vektorového pole. Předpokládejme, že máme nějakou uzavřenou plochu, a ptáme se, zda se „něco“ ztrácí z jejího nitra, tj. zda má pole vlastnost „výtoku“. Například v případě rychlostního pole

bychom se mohli ptát, zda rychlosť smieňuje vždy ven z plochy, nebo obecneji, zda víc kapaliny (za jednotku času) vytéká než vtéká. Výsledné množství kapaliny, vytékajúci z určité plochy za jednotku času, se nazývá tok rychlosťi plochou. Tok elementárnej ploškou je roven složce rychlosťi kolme na plošku, násobené velikosťi plošky. Pro libovolnou uzavřenou plochu je čistý výtok, nebo krátce tok, roven součinu jejho plošného obsahu a strední normálové složky rychlosťi, orientované ven z objemu uzavřeného plochou:

$$\text{Tok} = (\text{Strední normálová složka}) \cdot (\text{plošný obsah}) \quad (14.3.1)$$

I v prípadě elektrického pole môžeme matematicky definovať hodnotu analogickou k toku. Opäť ju nazveme tokom, ale samozrejme nepôjde o tok niejaké látky, protože elektrické pole není rychlosť něčeho. Ukažuje sa však, že i tak je matematická hodnota udávajúca strední normálovou složku pole veľice užitečná. Pak hovoríme o elektrickom toku, definovanom taktéž podľa (14.3.1). Pribom je užitečné zaviesť tok nejen zcela uzavřenou plochou, ale ajakoľko ohraničenou plochou. Podobne ako predtím sa tok takovouto plochou definuje ako součin jejho plošného obsahu a strední normálové složky vektoru. Tento pojmy ilustruje obr. 14.3.1.

Druhá vlastnosť vektorového pole se týka spíše křivky než plochy. Opäť si predstavme rychlosťi pole, ktoré popisuje tok kapaliny. Mohli bychom si položiť tu zájimavou otázku: Cirkuluje kapalina? Myslíme tím toto: existuje výsledný rotačný pohyb kapaliny podél niejaké uzavřenej křivky? Pribom sa, že jsme v jeden okamžik zmrazili všechnu kapalinu s výjimkou vnitřku trubice s konstantním prúžením a tvarem uzavřenej křivky, ako na obr. 14.3.2. Mimo trubici se kapalina zastaví, ale uvnitř sa môže udržovať v pohybe, a to v závislosti na hybnosti kapaliny zachycenej v trubici, tj. podle toho, zda hybnost kapaliny v jednom smere podél trubice je väčšia než hybnost v opačnom smere.

Hodnotu nazvanou cirkulaciu definujeme ako výslednou rychlosť kapaliny v trubici a násobenou dĺžkou trubice. Naše pojmy môžeme nyní opäť rozšíriť a cirkulaci definovať pre jakékoliv vektorové pole (i keď tam není nic, co by se pohybovalo). Pro libovolné vektorové pole sa cirkulacia podél libovolné myšlené uzavřenej křivky definuje ako strední tangenciálni složka vektoru (s ohľadom na smere obehu po křivke) násobená dĺžkou křivky (obr. 14.3.3).

$$\text{Cirkulace} = (\text{strední tangenciálni složka}) \cdot (\text{dĺžka křivky}). \quad (14.3.2)$$

Uvidíme, že z této definicie opravdu vyplýva číslo, ktoré je priamo úmerné rychlosťi obehu kapaliny v rychle zamrzlé trubici, popsané predtím.

Práve pomocí týchto dvou pojmu - toku a cirkulace — už môžeme uviesť všechny

zákony elektřiny a magnetizmu. Možná, že význam zákonu hned plne nepochopíme, ale poskytnou nám určitou predstavu o tom, jak sa v konečnom tvaru formuluje fyzika elektromagnetických jevov.

#### 14.4. Zákony elektromagnetizmu

[FLMoo, s. 17] Prvni zákon elektromagnetizmu určuje tok elektrického pole:

$$\text{Tok } \vec{E} \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = \frac{\text{celkový náboj uvnitř plochy}}{\epsilon_0} \quad (14.4.1)$$

kde  $\epsilon_0$  je vhodná konstanta (čte se „epsilon nula“). Není-li uvnitř plochy žiadny náboj, ačkoliv v jejím okolí náboje sú, je strední normálová složka  $\vec{E}$  nulová, takže výsledný tok plochou je nulový. Abychom naznačili hloubku tohto tvrzenia, môžeme ukázať, že vztah (14.4.1) je ekvivalentný s Coulombovým zákonem. Stačí doplniť predpoklad, že pole jednotlivého náboja je kulové symetrické. V prípade bodového náboja opíšeme kolem náboja kulovou plochu. Strední normálová složka vektoru pole je pak dáná práve velkosťou  $\vec{E}$  v libovolnom bodě kúlové plochy, neboť pole má nevyhnutelné radiálne smere a v každom bodě na kúli má stejnú intenzitu. Naše pravidlo tvrdí, že součin pole na povrchu kúle a plošného obsahu jejho povrchu, tj. tok smere ven z kúle, je priamo úmerný náboju uvnitř kúle. Jestliže bychom polomer kúle zvýšili, plošný obsah by vzrostl priamo úmerné druhé mocnině polomera. Ale strední normálová složka elektrického pole vynásobená zvýšeným plošným obsahom sa musí rovnati stejnému náboju uvnitř, a pole sa tedy musí zmeniť nepriamo úmerné druhé mocnině polomera — dostávame výsledok, že pole je nepriamo úmerné čtverci vzdialenosťi.

Vezmeme-li libovolnou pevnou křivku v prostoru a měříme-li podél ní cirkulaci elektrického pole, zjistíme, že obecně není rovna nule (i keď jde o Coulombovo pole). Pro elektřinu platí totiž i druhý zákon, podle něhož pro jakokoli plochu  $S$  (neuzavřenou) ohraničenou křivkou  $C$  platí

$$\text{Cirkulace } \vec{E} \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt}(\text{tok } \vec{B} \text{ plochou } S). \quad (14.4.2)$$

Zákony elektromagnetického pole môžeme zavŕšiť zapsaním dvou analogických rovnic pro magnetické pole  $\vec{B}$ :

$$\text{Tok } \vec{B} \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = 0. \quad (14.4.3)$$

Pro plochu  $S$  ohraničenou křivkou  $C$  platí

$$c^2 \text{ Cirkulace } \vec{B} \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt}(\text{tok } \vec{E} \text{ plochou } S) + \frac{\text{elektrický proud plochou } S}{\epsilon_0}. \quad (14.4.4)$$

Konstanta  $c^2$ , ktorá vystupuje v rovnici (14.4.4), je druhou mocninou rychlosťi svetla. Vyskytuje sa tu proto, že magnetizmus je v skutečnosti relativistickým efektem elektřiny. Konstanta  $\epsilon_0$  bola vložena proto, aby vhodným způsobem vysly jednotky elektrického proudu.

Rovnice (14.4.1) až (14.4.4) spolu se vztahem (14.1.1) vyjadrují všechny zákony elektrodynamiky<sup>1</sup>. Jak si vzpomínáte, Newtonovy zákony sice bylo možné snadno zapsat, ale mely mnoho velmi složitých důsledků a zabralo nám mnoho času, než jsme se o nich dověděli všechno. Napsat tyto naše zákony tak jednoduché není, z čehož vyplývá, že jejich důsledky budou ještě složitější, a zabere nám opravdu velmi mnoho času, než je všechny objasníme.

Zákony elektrodynamiky môžeme ilustrovat sérií jednoduchých pokusů, které kvalitativně ukazují vzájemné vztahy elektrických a magnetických polí. Prvni člen ve vztahu (14.1.1) jste pocítili, když jste si česali vlasy, a proto ho nebudeme ilustrovat. Druhou část výrazu (14.1.1) lze demonstrovat při průchodu proudu vodičem, který visí nad tyčovým magnetem tak, jako na obr. 14.4.1.

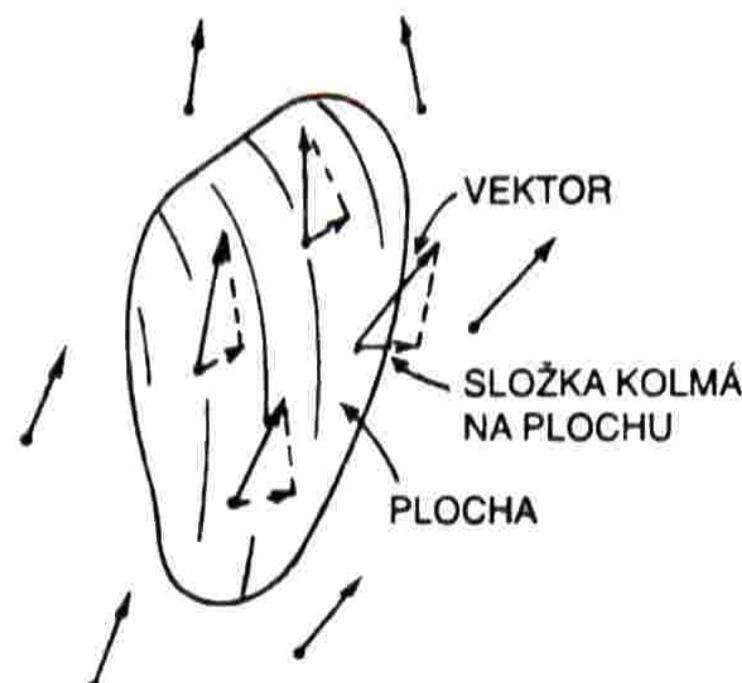
Účinkem síly  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  se při zapnutí proudu vodič pohnie. Po dobu trvání proudu se náboje uvnitř vodiče pohybují, tj. mají rychlosť  $\vec{v}$ , a proto na ně působí magnetické pole magnetu, což se projeví pohybem vodiče do strany.

Když se vodič pohnie doleva, je třeba čekat, že magnet dostane náraz směrem doprava. (V opačném případě bychom mohli celé zařízení umístit na vůz a měli bychom pohonné systém, který nezachovává hybnost!) I když je síla příliš malá na to, aby byl pohyb tyčového magnetu viditelný, jemněji uložený magnet, např. střelka kompasu, by se pohnul.

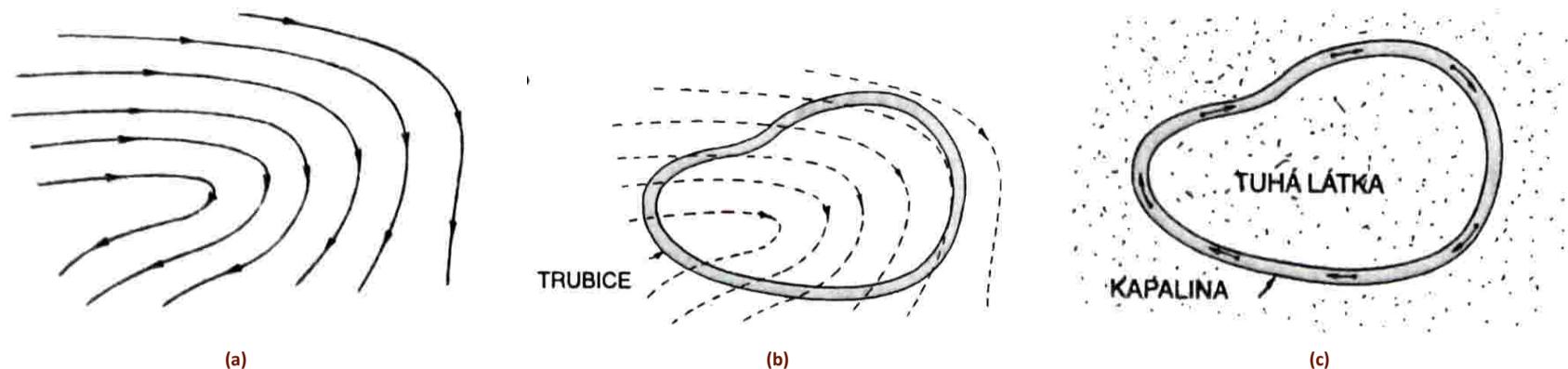
Jak působí na magnet vodič elektrického proudu? Proud ve vodiči vytváří vlastní magnetické pole, které se projeví silovým působením na magnet. Podle posledního člena v rovnici (14.4.4) vyvolá proud nevyhnutelně cirkulaci pole  $\vec{B}$  — v tomto případě křivky pole  $\vec{B}$  (magnetické indukční čáry) jsou uzavřené a obepínají vodič, jak je vidět na obr. 14.4.2. Práve toto pole  $\vec{B}$  je původcem síly působící na magnet.

Podle rovnice (14.4.4) je při stálém proudu cirkulace pole  $\vec{B}$  stejná pro jakokoli křivku, která vodič obepíná. Křivky, např. kružnice, které jsou dále od vodiče, mají obvod větší, takže tangenciálni složka  $\vec{B}$  musí být menší. Vidíte, že podle očekávání

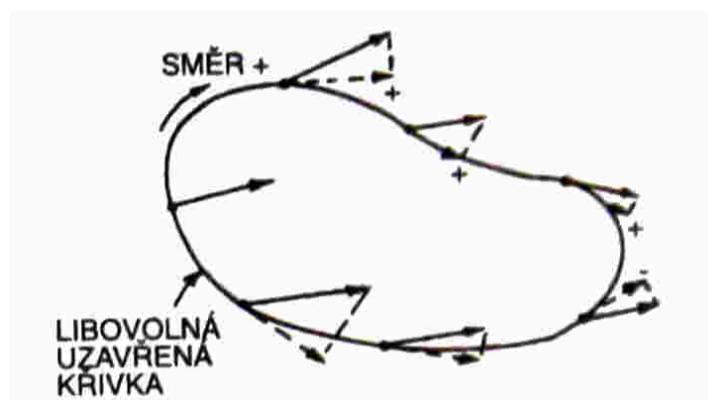
<sup>1</sup>Už se potrebujeme jen dohodnout na konvencích pro výber znaménka cirkulace.



Obrázek 14.3.1.: Tok vektorového pole plochou se definuje ako součin strední hodnoty normálové složky vektoru a obsahu plochy.



Obrázek 14.3.2.: Cirkulace vektorového pole: a) Pole rychlosti v kapalině. b) Představme si trubici s konstantním průřezem a tvarem nějaké uzavřené křivky. c) Kdyby kapalina všude s výjimkou vnitřku trubice náhle zmrzla, v trubici by cirkulovala.



Obrázek 14.3.3.: Cirkulace vektorového pole je rovna součinu střední tangenciální složky vektoru (vzhledem ke směru pohybu po křivce) a délky uzavřené křivky.

bude pole  $\vec{B}$  klesat nepřímo úměrně vzdálenosti od dlouhého přímého vodiče.

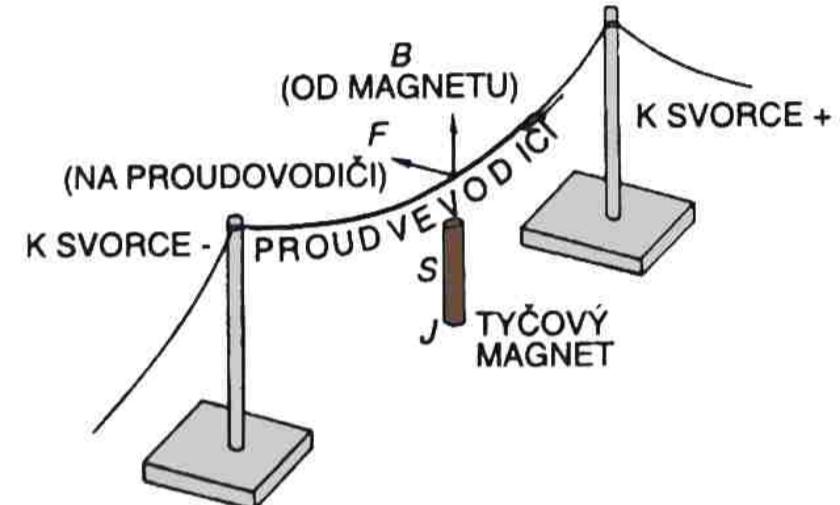
Řekli jsme, že proud ve vodiči vytváří magnetické pole a že v magnetickém poli působí na vodič, kterým prochází proud, síla. Pak bychom měli také očekávat, že vytvoříme-li magnetické pole proudem v jednom vodiči, bude působit silou na jiný vodič, kterým také prochází proud. Můžeme si to ukázat na dvou visících vodičích, jako na obr. 14.4.3. Mají-li proudy stejný směr, vodiče se přitahují, jsou-li proudy opačného směru, vodiče se odpuzují.

Krátké řečeno elektrické proudy vytvářejí magnetická pole právě tak jako magnety. Ale počkejte, co je vlastně magnet? Jestliže pohybující se náboje vyvolávají magnetická pole, není možné, že magnetické pole kousku železa je ve skutečnosti také důsledkem proudů? Ukazuje se, že ano. Tyčový magnet z našeho pokusu můžeme nahradit cívou navinutou z drátu, stejně jako na obr. 14.4.4. Prochází-li cívou proud (jakož i přímým vodičem nad ní), pozorujeme pohyb vodiče přesně jako předtím, kdy jsme měli místo cívky magnet. Jinak řečeno, proud v cívce imituje magnet. Ukazuje se tedy, že kus železa působí tak, jako kdyby obsahoval ustavičně obíhající proud. Magnety opravdu můžeme objasnit pomocí permanentních proudů v atomech železa. Sílu účinkující na magnet na obr. 14.4.2 vyvolává tedy druhý člen ve vztahu (14.1.1).

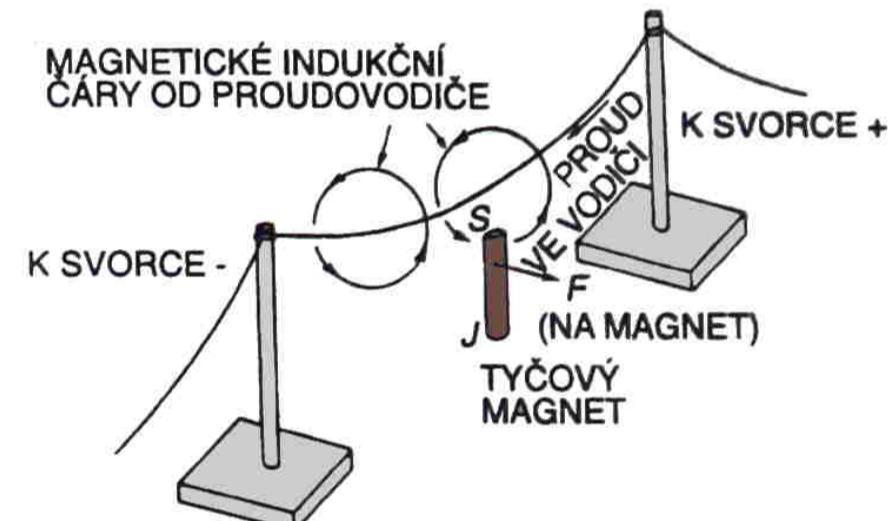
Odkud se tyto proudy berou? Jednou z možností je, že z pohybu elektronů v atomových orbitách. To však není případ železa, třebaže to tak v některých látkách je. Kromě oběhu v atomu se elektron otáčí i kolem své vlastní osy (nějak podobně jako vlastní rotace Země) a právě tento pohyb, tzv. spin elektronu, vytváří magnetické pole v případě železa. (Ríkáme, že je to „něco podobného“ jako vlastní rotace Země, protože tento problém zasahuje tak hluboko do kvantové mechaniky, že klasické představy opravdu příliš dobře nevystihují tyto poměry.) Ve většině látek se některé elektrony otáčejí jedním směrem, kdežto jiné směrem opačným, takže jejich magnetizmus se vyruší. Ale v železe - ze záhadného důvodu, o němž budeme hovořit později - jsou osy otáčení mnoha elektronů uspořádány jedním směrem, a to je zdrojem magnetizmu.

Protože pole magnetů pocházejí z proudů, nemusíme do rovnice (14.4.4) nebo (14.4.4) přidávat žádný zvláštní člen zohledňující magnety. Stačí zahrnout všechny proudy včetně těch, které souvisejí se spiny elektronů, a zákon bude správně. Také byste si měli všimnout, že podle rovnice (14.4.4) neexistují magnetické „náboje“ analogické s elektrickými, vystupující na pravé straně rovnice (14.4.2). Žádné se nenašly.

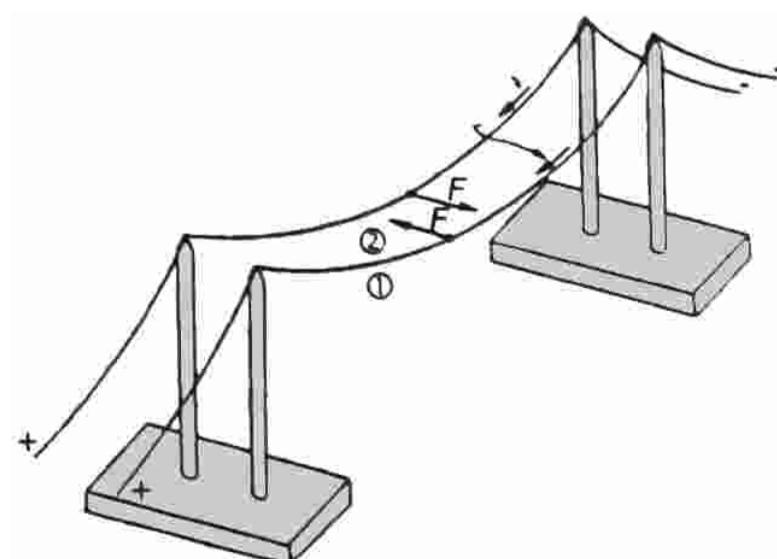
První člen na pravé straně rovnice (14.4.4) objevil Maxwell čistě teoreticky a je velmi důležitý. Podle něj mají proměnlivá elektrická pole magnetické účinky. Pravda je, že bez tohoto člena by rovnice neměla smysl, protože bez něho by neexistovaly elektrické proudy v obvodech, které netvoří uzavřené smyčky. Ale, jak uvidíme na následujícím příkladě, takové proudy existují. Představme si kondenzátor skládající se ze dvou roviných desek. Nechť se nabijí proudem směřujícím k jedné desce a vycházejícím z druhé z nich (obr. 14.4.5). Opišme okolo jednoho z přívodů křivku  $C$ , jejíž vnitřek vyplníme plochou  $S_1$ , která přetíná vodič (viz obrázek). Podle (14.4.4) je cirkulace  $\vec{B}$  podél  $C$  určena proudem ve vodiči. Ale co když vnitřek křivky  $C$  vyplníme jinou plochou  $S_2$ , která má tvar mísy a prochází mezi deskami



Obrázek 14.4.1.: Tyčový magnet vyvolává ve vodiči pole  $\vec{B}$ . Když vodičem prochází proud, působením síly  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  se vodič pohne.



Obrázek 14.4.2.: Magnetické pole vodiče působí silou na magnet.



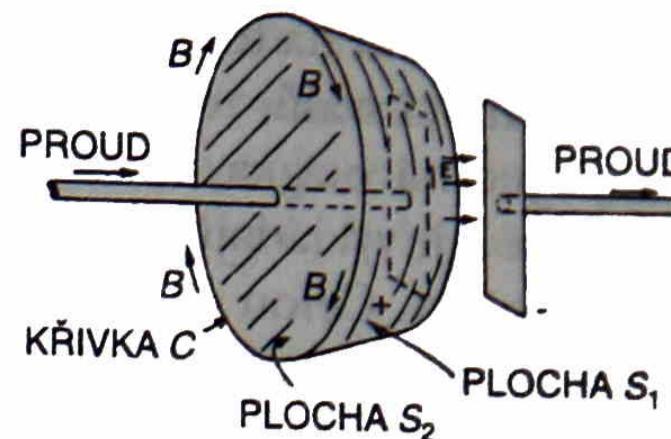
Obrázek 14.4.3.: Dva vodiče, kterými prochází proud, na sebe navzájem působí silami.

kondenzátoru, přičemž se nikde nedotýká vodiče. Touto plochou jistě neprochází žádny proud. A zajisté změna umístění myšlené plochy nezmění reálné magnetické pole! Cirkulace pole  $\vec{B}$  se tedy nesmí změnit. První člen na pravé straně rovnice (14.4.4) se ve skutečnosti kombinuje s druhým členem tak, aby složením daly shodné výsledky pro obě plochy  $S_1$  a  $S_2$ . V případě  $S_2$  se cirkulace  $\vec{B}$  udává pomocí rychlosti změny toku pole  $\vec{E}$  mezi deskami kondenzátoru. Vychází, že změna  $\vec{E}$  je právě v takovém poměru k proudu, aby rovnice (14.4.4) byla správná. Maxwell viděl tu potřebu a byl prvním, kdo napsal úplnou rovnici.

Zařízením znázorněným na obr. 14.4.5 můžeme demonstrovat další ze zákonů elektromagnetismu. Odpojme konce zavřeného vodiče od akumulátoru a připojme je ke galvanometru, který nám ukazuje, jestli vodičem protéká proud. Když vodič postrčíme do strany v magnetickém poli magnetu, zaznamenáme proud. Takový jev je opět dalším důsledkem vztahu (14.1.1) — na elektrony ve vodiči působí síla  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Elektrony mají příčnou rychlosť, neboť se pohybují s vodičem. Rychlosť  $v$  v kombinaci se svislým  $\vec{B}$  magnetu vyvolává sílu působící na elektrony v podélném směru (vzhledem k vodiči) a uvádí je do pohybu ke galvanometru.

Předpokládejme však, že vodič necháme v klidu a pohybujeme magnetem. Na základě principu relativity se domníváme, že by v tom neměl být žádny rozdíl. A opravdu, na galvanometru pozorujeme podobný proud. Jak působí magnetické pole na náboje, které se nepohybují? Podle vztahu (14.1.1) tam musí být elektrické pole. Pohybující se magnet musí vytvořit elektrické pole. Jak k tomu dojde, popisuje kvantitativně rovnice (14.4.2). Tato rovnice popisuje mnoho prakticky důležitých úkazů, např. ty, které se vyskytují v elektrických generátorech a transformátorech.

Nejpozoruhodnějším důsledkem našich rovnic je, že spojením rovnic (14.4.2) a (14.4.4) lze vysvětlit vyzařování elektromagnetických vln na velké vzdálenosti. Příčina spočívá zhruba v tomto. Předpokládejme, že někde máme vznikající magnetické pole, třeba proto, že jsme např. najednou zapnuli proud ve vodiči. Potom se podle rovnice (14.4.2) musí objevit cirkulace elektrického pole. Když elektrické pole postupně vzniká a vytváří svou cirkulaci, bude se podle rovnice (14.4.4) generovat magnetická cirkulace. Ale nárůst tohoto magnetického pole způsobí vznik nové cirkulace elektrického pole atd. Takto si pole razí svou cestu prostorem, aniž by potřebovala náboje nebo proudy někde jinde než ve svém zdroji. Tím způsobem jeden druhého vidíme! To všechno obsahují rovnice elektromagnetických polí.



Obrázek 14.4.5.: Cirkulace vektoru  $\vec{B}$  po křivce  $C$  je určena buď proudem procházejícím plochou  $S_1$  nebo rychlosťí změny toku vektoru  $\vec{E}$  plochou  $S_2$ .

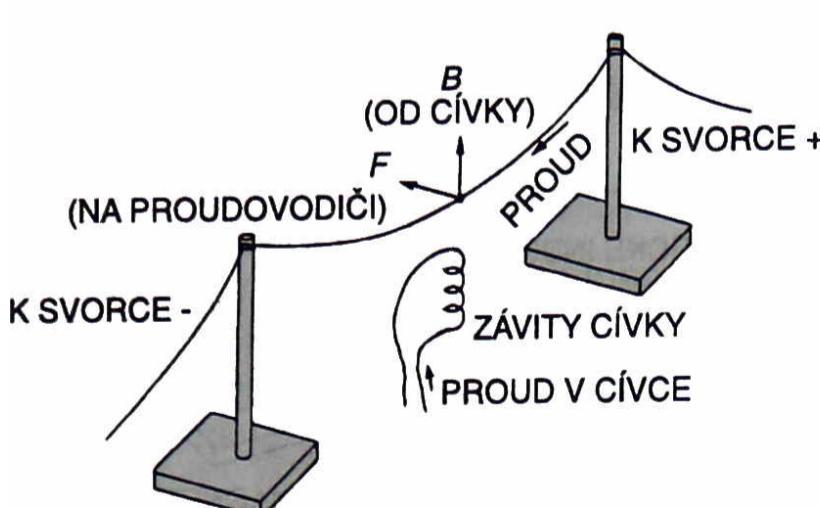
## 14.5. Co jsou pole?

[FLMoo, s. 23] Nyní uděláme několik poznámek o našem způsobu náhledu na tuto otázku. Mohli byste namítat: „Celá ta záležitost s toky a cirkulacemi je velmi abstraktní. V každém bodu prostoru existují elektrická pole, kromě toho platí určité zákony. Ale co se opravdu děje? Proč to nemůžete vysvětlit např. tím, ať už je to cokoliv, co prochází mezi náboji?“ Problém je ve vašich předsudcích. Mnozí fyzici říkají, že přímé působení bez něčeho mezi působícími objekty je nemyslitelné. (Jak to mohli označit za nemyslitelnou ideu, když už byla vymyslena?) Říkají: „Podívejte se, jediné síly, které známe, jsou přímým působením jednoho kousku látky na jiný. Je nemožné, aby existovala síla, jejíž přenos nic nezprostředkuje.“ Ale co se ve skutečnosti děje, když zkoumáme „přímé působení“ jednoho kusu látky na druhý? Zjistíme, že nejde o bezprostřední dotyk obou kusů, kusy jsou od sebe trochu vzdálené a uplatňují se mezi nimi elektrické síly, působící v malém měřítku. Tak docházíme k tomu, že působení ve formě přímého dotyku máme vysvětlovat pomocí elektrických sil. Zajistě by nebylo rozumné trvat na tom, že elektrická síla má vypadat jako staré známé odtlačování nebo přitahování pomocí svalů, zejména když se ukazuje, že svalové účinky je třeba vykládat jako elektrické síly! Jediná otázka, která má smysl, je, jaký způsob popisu elektrických sil je nevhodnější. Někteří lidé si je vykládají jako působení nábojů na dálku a používají přitom složitý zákon. Jiní si oblíbili siločáry. Celou dobu kreslí siločáry a psát vektoru  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  je podle nich příliš abstraktní. Siločáry jsou však jen hrubým způsobem popisu pole a je velmi těžké podat správné kvantitativní zákony bezprostředně pomocí siločar. Kromě toho pojmenování siločar neobsahuje nejhlbší princip elektrodynamiky - princip superpozice, i když víme, jak vypadají siločáry pro jednu množinu nábojů a jak vypadají pro jinou množinu nábojů, neuděláme si z toho žádnou představu o obraze siločar v případě, že množiny působí najednou. Naproti tomu z matematického hlediska je superpozice jednoduchá - prostě se sečteme dva vektoru. Určitou předností siločar je, že poskytují názorný obraz, ale mají také nevýhody. Způsob uvažování pomocí přímé interakce má velké výhody, když se uvažuje o elektrických nábojích v klidu, ale má také velké nevýhody, jde-li o náboje v rychlém pohybu.

Nejlepším způsobem je používat abstraktní pojem pole. To, že je abstraktní, je nepříjemné, ale nevyhnutelné. Pokusy popisovat elektrické pole jako pohyb nějakých ozubených koleček, pomocí siločar nebo napětí v nějaké látce si vyžádaly větší úsilí fyziků, než by stačilo na samotné nalezení správných odpovědí na problémy elektrodynamiky. Je zajímavé, že, správné rovnice o chování světla v krystalech vypracoval McCullough už r. 1843. Lidé mu však říkali: „Dobrě, ale taková reálná látka, jejíž mechanické vlastnosti by mohly vyhovovat těmto rovnicím, neexistuje, a protože světlo je vlnění, které musí kmitat v něčem, nemůžeme těmto abstraktním rovnicím věřit.“ Kdyby lidé byli bývali méně zaujati, mohli by uvěřit správným rovnicím chování světla o mnoho dříve.

Co se týče magnetického pole, můžeme udělat následující poznámku: Předpokládejme, že jste nakonec úspěšně vytvořili obraz magnetického pole pomocí nějakého druhu siločar nebo koleček rychle se otáčejících v prostoru. Pokuste se potom vysvětlit, co se stane se dvěma náboji pohybujícími se v prostoru rovnoběžně stejnou rychlosťí. Protože se pohybují budou se chovat jako dva proudy a každý z nich bude mít svoje magnetické pole (podobně jako proudy ve vodičích na obr. 14.4.3). Pozorovatel, který by se pohyboval spolu s náboji, by je však vnímal jako stojící a tvrdil by, že magnetické pole není. Ozubená kolečka anebo siločáry tedy zmizí, když se pohybujete spolu s objektem! Jediné co jsme udělali je, že jsme vytvořili nový problém. Jak mohou ozubená kola zmizet? Lidé, kteří kreslí siločáry, se dostávají do podobných těžkostí. Nejen, že není možné říci, zda se siločáry s náboji pohybují anebo ne, ale můžou v určitých souřadnicových soustavách zcela zmizet.

To, co bychom ještě chtěli říct, je, že magnetismus je skutečně relativistickým efektem. V právě uvažovaném případě dvou rovnoběžně se pohybujících nábojů lze očekávat, že bude třeba udělat relativistické korekce k jejich pohybu pomocí členů řádu  $\frac{v^2}{c^2}$ . Tyto korekce musí odpovídat magnetické síle. Ale co se silou mezi dvěma vodiči v našem pokusu (obr. 14.4.3)? Tam je magnetická síla jedinou působící silou. Nevypadá jako „relativistická korekce“. Kromě toho, odhadneme-li rychlosť elektronů ve vodiči (to můžete udělat sami), zjistíme, že jejich střední rychlosť podél vodiče je asi  $0,01 \text{ cm s}^{-1}$ . Takže  $\frac{v^2}{c^2}$  je asi  $10^{-25}$ . Určitě zanedbatelná „korekce“.



Obrázek 14.4.4.: Tyčový magnet na obr. 14.4.1 je možné nahradit cívou s elektrickým proudem. Na vodič přitom působí podobná síla.

Ale není! Ačkoli magnetická síla je v tomto případě  $10^{-25}$  „normální“ elektrické síly mezi pohybujícími se elektronami, vzpomeňme si, že „normální“ elektrické síly vymizely v důsledku téměř dokonalého vyrovnaní - neboť vodiče mají stejný počet protonů i elektronů. Rovnováha je mnohem přesnější než  $1/10^{-25}$  a malý relativistický člen, který nazýváme magnetickou silou, je jediným členem, který zůstal, a stává se tak dominantním.

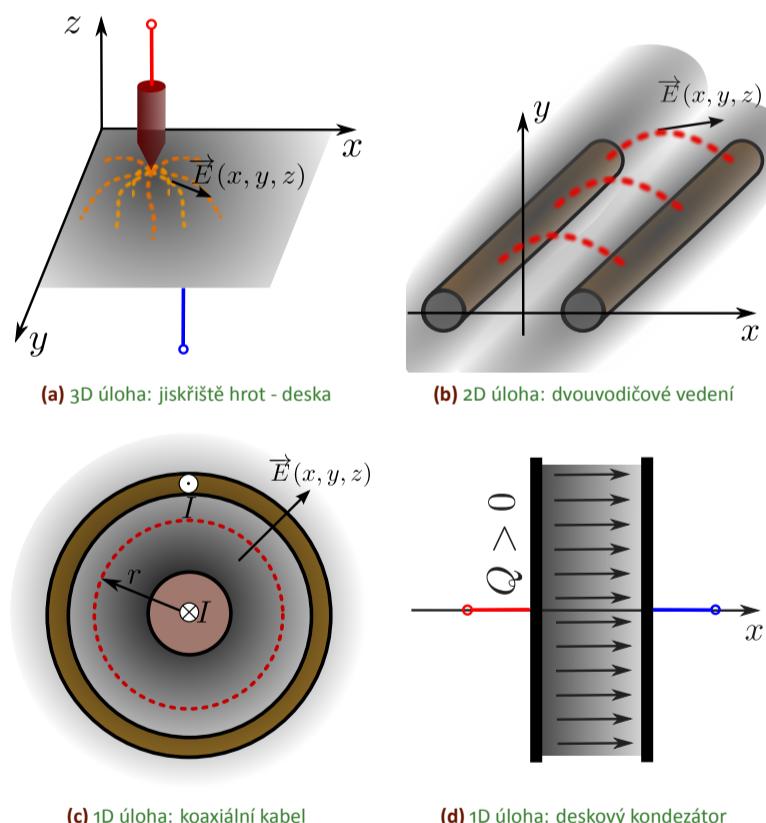
Právě téměř dokonalé vzájemné vyrušení elektrických sil umožnilo zkoumat relativistické efekty, tj. magnetizmus, a objevit správné rovnice s přesností  $\frac{v^2}{c^2}$ , i když fyzici nevěděli, co se ve skutečnosti děje. A právě proto, když byla objevena teorie relativity, elektromagnetické zákony se nemusely měnit. Na rozdíl od mechaniky už byly správné s přesností  $\frac{v^2}{c^2}$ .

Elektromagnetické pole je rozloženo v prostoru a může se měnit s časem. Veličiny, které toto pole popisují jsou obecně funkce času a tří geometrických souřadnic. Podle časového průběhu rozlišujeme:

1. **pole časově neproměnné**: jsou-li náboje v klidu, budeme hovořit o poli *statickém*, jsou-li v rovnoměrném pohybu (tj. tvorí-li stejnosměrný proud), jde o pole *stacionární*.
2. **pole časově proměnné čili nestacionární**: jestliže se elektromagnetické pole mění s časem relativně pomalu, nazýváme jej *kvazistacionárním*. Jestliže se mění s časem periodicky, říkáme, že je v *ustáleném stavu*. Speciální případy jsou:
  - *harmonický ustálený stav*: pole se časem mění podle sinové nebo kosinové funkce
  - *neustálený (přechodný) stav*: pole přechází z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tento případ nastane tehdy, když zdroje pole změní své parametry, resp. svou polohu v prostoru.

Podle prostorového průběhu rozlišujeme:

1. **trojrozměrné**: (trojdimentzionální, prostorové pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi tří geometrických souřadnic (např.  $x, y, z$ ). Označení: *3D pole*.
2. **dvojrozměrné**: (dvojdimentzionální pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi dvou geometrických souřadnic. Dvojrozměrné pole je např. pole rovinné (je funkcií souřadnic  $x, y$ ), nebo pole rotačně souměrné (je funkcií  $r, z$ ). Označení: *2D pole*.
3. **jednorozměrné**: (jednodimentzionální pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi jedné geometrické souřadnice (např.  $x$ , nebo  $r$ ). Označení: *1D*.
4. **homogenní**: veličiny charakterizující pole jsou v kterémkoliv bodě uvažované oblasti prostoru týž (tj. jsou nezávislé na geometrických souřadnicích).



Obrázek 14.5.1: Příklad trojdimentzionálního a), dvojdimenzionálního b) a jednodimentzionálního c), d) pole

## 14.6. Působení na dálku versus teorie pole

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci Jamese Clerka Maxwella „Pojednání o elektřině a magnetismu“.

Maxwell založil svoji teorii z větší části na intuitivních úvahách Michaela Faradaye. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovatelem interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu „působení na dálku“, který předcházel teorii pole.

Co je „působení na dálku“? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše díky svojí přítomnosti. Jakékoli vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlosť šíření zprostředkovávaného přenosu. To je známo jako „silové působení na dálku“, protože kromě objektů působících na sebe „silou“ a „vzdálenosti“ mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námítky proti modelu „působení na dálku“, protože odpovídaly jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícího se v prostoru mezi objekty.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (média) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlostí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled „teorie pole“ se tak vyhýbá pojmu „působení na dálku“ a nahrazuje jej pojmem „působení nepřetržitým kontaktem“. Tento „kontakt“ je způsoben tlakem nebo „polem“ indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetismu byla první teorií pole. Na závěr uvedeme definici pojmu „pole“, vystihující předchozí ideje

**Definice 14.6.1. Fyzikální pole** jsou vesměs zprostředkovateli vzájemného působení (interakcí) mezi hmotnými objekty. Např. elektromagnetické pole je specifická forma hmoty. Základní vlastnosti má společně s ostatními formami hmoty: je objektivní realitou existující nezávisle na našem vědomí, přísluší mu určitá energie, hmotnost a hybnost, přičemž pro tyto veličiny platí zákony zachování, má kvantovou strukturu (elementární částice elektromagnetického pole se nazývají fotony) a stejně jako ostatní elementární částice mohou projevovat též vlnový charakter. Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem elektromagnetických interakcí v makroskopickém i mikroskopickém měřítku a přitom však může existovat i mimo látkové objekty samostatně ve formě elektromagnetického vlnění.

## 14.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice

[FLMoo, s. 25] Tuto kapitolu zakončíme poukázáním na to, že mezi mnohými jevy, které zkoumali Řekové, byly dva velmi neobvyklé. Když třete kousek jantaru, můžete jím zvednout malé kousky papyru. Dále to byl podivný kámen z okolí města Magnesia v Malé Asii, který přitahoval železo. Je těžké si představit, že toto byly jediné dva Řekům známé úkazy, v nichž se projevují elektrické a magnetické účinky. Důvod, že to opravdu byly jediné dva úkazy, které byly tehdy známy, spočívá především ve fantastické přesnosti vyrovnaní nábojů, o níž jsme se zmínili dříve. Práce vědců, kteří přišli po Řecích a kteří objevovali jeden nový jev za druhým, byly vlastně jen různými aspekty těchto vlastností jantaru a magnetovce. Dnes si uvědomujeme, že i jevy chemické interakce a konec konců i samotného života je třeba objasňovat pomocí elektromagnetismu.

Současně s tím, jak se vyvíjelo chápání elektromagnetismu, se objevily také technické možnosti, o nichž se lidem dříve nesnilo. Stalo se možným posílat zprávy telegrafem na velké vzdálenosti, mluvit s člověkem, který je na kilometry vzdálený, bez jakýchkoliv spojů v meziprostoru. Vznikly obrovské energetické soustavy. Velká vodní turbína spojená stovkami kilometrů drátů se vzdáleným elektromotorem udržuje jeho otáčky ve svém rytmu, tisíce a tisíce vodičů se rozvětvují, desítky tisíc motorů na desetitisících místech poháně stroje v průmyslu i domácnostech, to vše se otáčí a funguje díky poznání zákonů elektromagnetismu.

Dnes prakticky využíváme i nejjemnější efekty. Elektrické síly, jakkoliv mohutné, mohou být i velmi slabé a můžeme je řídit a mnoha způsoby využívat. Naše přístroje jsou tak citlivé, že to, co člověk dělá, můžeme rozpoznat podle toho, jak ovlivňuje elektrony v tenké kovové tyči vzdálené stovky kilometrů od něj. Jediné co potřebujeme, je použít tyč jako anténu televizního přijímače.

Z dlouhodobého pohledu historie lidstva, tak, jak se bude jevit, například, za deset tisíc let, lze sotva pochybovat, že Maxwellův objev zákonů elektrodynamiky bude hodnocen jako nejvýznamnější událost 19. století. V porovnání s touto

důležitou vědeckou událostí upadne americká občanská válka z téhož desetiletí do provinční bezvýznamnosti.

## References

- [FLMoo] R. Feynman, R. Leighton, and S. Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Ed. by I. Štoll. Nakladatelství Fragment, 2000, p. 806. ISBN: 80-7200-420-4 (cit. on pp. [49–51](#), [53](#), [54](#)).



# 15. Diferenciální počet vektorových polí

## 15.1. Chápání fyziky

### Obsah

15.1. Chápání fyziky . . . . .	57
15.2. Vektorový počet . . . . .	57
15.3. Skalární a vektorová pole . . . . .	58
15.4. Derivace polí - gradient . . . . .	58
15.5. Operátor $\nabla$ . . . . .	60
15.6. Operace s $\nabla$ . . . . .	60
15.7. Diferenciální rovnice proudění tepla . . . . .	61
15.8. Druhé derivace vektorových polí . . . . .	61
15.9. Nástrahy . . . . .	62

[FLMoo, s. 27] Fyzik potřebuje mít schopnost zkoumat problémy z několika hledisek. Exaktní analýza reálných fyzikálních problémů je obvykle velmi složitá. Jakákoliv konkrétní fyzikální situace se může ukázat příliš spletitou na to, aby bylo možné ji analyzovat přímo řešením diferenciální rovnice. Přesto lze získat velmi dobrou představu o chování systému, má-li fyzik určitou schopnost vycítit charakter řešení v různých situacích. Přitom jsou velice prospěšné takové představy jako siločáry, kapacita, odpor a indukce. Proto strávime mnoho času při jejich analýze. Tím získáme cit pro to, co se v různých situacích děje. Na straně druhé ani jeden z heuristických modelů, takových, jako jsou siločáry, není adekvátní skutečnosti a přesný ve všech situacích. Existuje pouze jediný způsob formulace zákonů, a to pomocí diferenciálních rovnic. Předností rovnic je jejich fundamentálnost, a pokud je nám známo, i přesnost. Jestliže jste se naučili diferenciální rovnice, vždy se k nim můžete vrátit. Neexistuje přitom nic, co by bylo třeba se odnaučit.

Pochopit, co se v různých situacích děje, nám zabere určitý čas. Budeme muset řešit rovnice. Pokaždé, když řešíme rovnice, se něco dozvím o charakteru řešení. Aby jsme si tato řešení zapamatovali, bude také užitečné zkoumat, co znamenají z hlediska siločar a dalších pojmu. To je cesta, kterou rovnicím opravdu „porozumíme“. V tom je rozdíl mezi matematikou a fyzikou. Matematici, anebo lidé s vyvinutým matematickým myšlením, často při „studiu“ fyziky sejdou s cestou, protože fyziku ztrácejí ze zřetele. Říkají: „Podívejte se, tyto diferenciální rovnice - Maxwellovy rovnice - představují vše, co se v elektrodynamice vyskytuje; samotní fyzikové přiznávají, že není nic, co by nebylo obsaženo v těchto rovnicích. Jsou to složité rovnice, ale jde konec konců jen o matematické rovnice, a když jim porozumí matematicky, budu chápávat i jejich fyziku.“ Tak tomu však není. Matematici, kteří studují fyziku s tímto přístupem, a takoví jsou mnozí z nich, obvykle přispívají fyzice málo a opravdu málo i matematice. Selou, protože skutečné fyzikální situace v reálném světě jsou tak složité, že je nevyhnutelné je chápát v mnohem širším kontextu.

Co opravdu znamená pochopit rovnici, tj. více než ve striktně matematickém smyslu, vyjádřil Dirac. Řekl: „Rozumím tomu, co rovnice znamená, umím-li určit vlastnosti jejího řešení, aniž bych ji ve skutečnosti řešil.“ Ovládáme-li tedy způsob, jak se dovědět, co se děje v daných situacích, aniž bychom rovnice skutečně řešili, „chápeme“ rovnice v aplikaci na tyto situace. Fyzikální chápání je naprostě nematematičké, nepřesné a neexaktní, ale pro fyzika naprosto nevyhnutelné.

Kurz, jako je tento, bývá obvykle založen na postupném budování fyzikálních představ - začíná jednoduchými situacemi a pokračuje situacemi stále složitějšími. Vyžaduje to, abyste neustále zapomínali věci, které jste se naučili dříve - věci, jež platí v určitých situacích, ale neplatí obecně. Například „zákon“, že elektrická síla se mění s druhou mocninou vzdálenosti, neplatí vždy. My dáváme přednost opačnému postupu. Raději napřed probereme úplné zákony a pak budeme postupovat zpět a aplikovat je na jednotlivé situace, se souběžným rozvíjením fyzikálních představ. A to je to, co se chystáme dělat nyní.

Náš přístup je úplným opakem historického přístupu, při němž se předmět podává na základě experimentů, které o něm poskytly informaci. Předmět fyziky však budovalo velmi mnoho bystrých lidí během uplynulých více než 200 let, a protože my máme na nabytí informací jen omezenou dobu, není v našich silách probrat vše, co udělali oni. Bohužel, jedno z toho, co přitom bude zřejmě chybět v těchto přednáškách, je historický, experimentální postup. Je naděje, že je možné nahradit tento nedostatek v určité míře laboratorními cvičeními. Vše, co musíme pustit ze zřetele, si můžete také doplnit čtením encyklopédii, v nichž se občas vyskytují historické články o elektřině a o jiných oblastech fyziky. Historickou informaci najdete také v mnoha učebnicích elektřiny a magnetizmu.

## 15.2. Vektorový počet

[FLMoo, s. 28] Nyní začneme s abstraktním, matematickým pohledem na teorii elektřiny a magnetizmu. Základní myšlenkou je vysvětlit význam zákonů formulovaných v kapitole 14. Ale abychom to udělali, musíme nejdříve vysvětlit novou a zvláštní symboliku, kterou chceme použít. Takže na chvíli zapomeňme na elektromagnetismus a věnujme se matematice vektorových polí. Je velmi důležitá nejen pro elektromagnetismus, ale pro všechny druhy fyzikálních situací. Diferenciální počet vektorů je pro všechna odvětví fyziky stejně důležitý jako obyčejný diferenciální a integrální počet. Tak se do toho pusťme.

Dále uvádíme několik faktů z vektorové algebry, přičemž předpokládáme, že je již znáte: V pravoúhlém kartézském systému je každý bod prostoru určen polohovým vektorem  $\vec{r}$ , který má složky  $x, y, z$ , což budeme zapisovat takto:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (15.2.1)$$

kde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru osy  $x, y, z$ . Velikost vektoru  $\vec{r}$  určíme

ze vztahu

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (15.2.2)$$

Pro osvězení pár faktů z vektorové algebry pro vektory  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  uvádíme následující vztahy: Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \cdots \text{skalár} \quad (15.2.3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdots \text{vektor} \quad (15.2.4)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \quad (15.2.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (15.2.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (15.2.7)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (15.2.8)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad (15.2.9)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (15.2.10)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (15.2.11)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (15.2.12)$$

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (15.2.13)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (15.2.14)$$

Rovnost (15.2.11) platí samozřejmě pouze v limitě, když  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  se blíží nule. Vektorový součin vektorů  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  je definován jako vektor kolmý k vektorům  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  s velikostí rovnou ploše kosoúhelníku, který oba vektory definují:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |A| |B| \sin \theta \quad (15.2.15)$$

kde  $\theta$  je úhel svíraný vektory  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) a  $\vec{n}$  je jednotkový vektor kolmý k nim. Takové jednotkové vektory však existují dva; volba závisí na tom, jestli souřadný systém definován jako pravotočivý nebo levotočivý. V pravotočivém souřadném systému lze použít pravidlo jako na obr. 15.2.1.

### 15.3. Skalární a vektorová pole

[FLMoo, s. 29] Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty veličiny. Řečeno jinými slovy, polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru.

Nejjednodušší možné fyzikální pole je **skalární pole**. Skalárním polem chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit.

Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá určité představy myšlených ploch, proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě *teplotního pole* se tyto plochy nazývají *izotermickými hladinami* nebo *izotermami*. Obrázek 15.3.1 zobrazuje teplotní pole a ukazuje závislost  $T$  na  $x$  a  $y$  při  $z = 0$ . Je nakresleno několik izoterm.

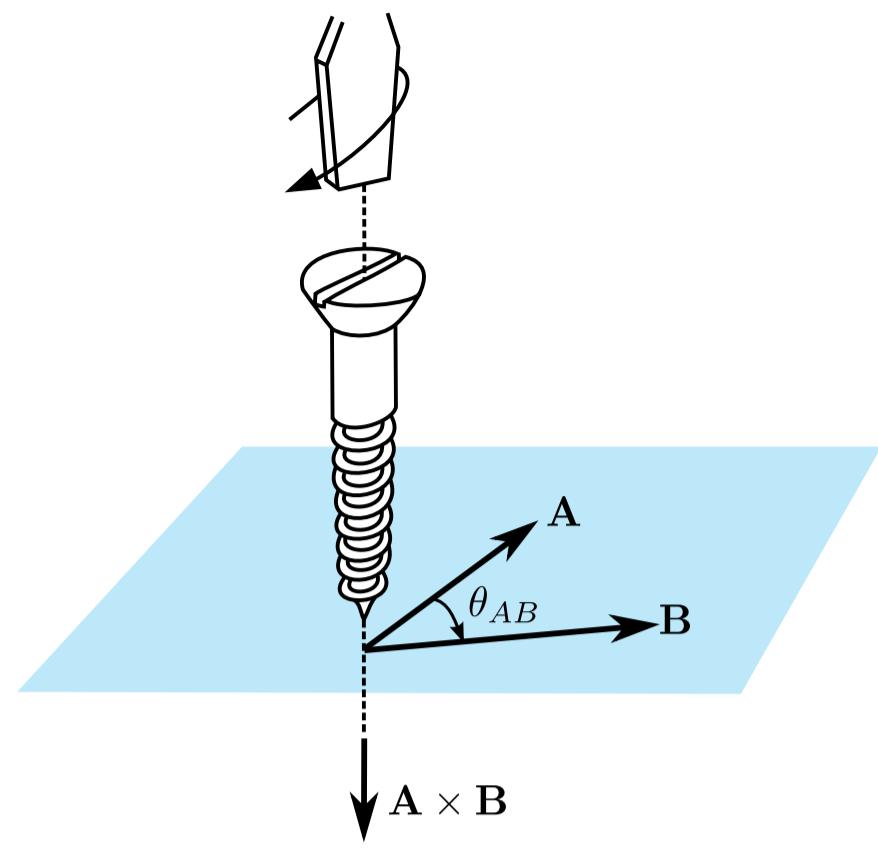
U **vektorových polí** je v každém bodě prostoru dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlosť látky, tvořící těleso je v každém bodě vektor, který je funkčí polohy. V druhém případě uvažujeme proudění tepla z teplicích míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. Hustota tepelného toku je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji  $\vec{h}$ . Její velikost je mírou prouděního tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 15.3.1. Definujeme  $\vec{h}$  přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde infinitesimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 15.3.3a). Vyjádříme to v symbolech: je-li  $\Delta P$  tepelná energie, která projde za jednotku času

$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t \quad \vec{e}_t \dots \text{jednotkový vektor ve směru toku} \quad (15.3.1)$$

Vektor  $\vec{h}$  je možno definovat i jiným způsobem – pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obrázek 15.3.3b znázorňuje plošku  $\Delta S_2$  skloněnu pod úhlem  $\vartheta$  k ploše  $\Delta S_1$  kolmé na tok. Jednotkový vektor  $\vec{n}$  je kolmý na plošku  $\Delta S_2$ . Vektory  $\vec{n}$  a  $\vec{h}$  svírají úhel  $\vartheta$  (neboť  $\vec{h}$  je kolmý  $\Delta S_1$ ). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou  $\Delta S_2$ ? Tok ploškou  $\Delta S_2$  je stejný jako ploškou  $\Delta S_1$ , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to  $\Delta S_1 = S_1 \cos(\vartheta)$ . Hustota toku ploškou  $\Delta S_2$  je

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (15.3.2)$$

Tuto rovnici interpretuje tak, že hustotu tepelného toku  $\vec{h}$  (teplo prošlé za jed-



Obrázek 15.2.1.: Určení směru vektoru  $\vec{A} \times \vec{B}$  pomocí pravotočivého šroubu

notku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je  $\vec{n}$ , udává výraz  $\vec{h} \cdot \vec{n}$ . Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku  $\Delta S_2$  je  $\vec{h} \cdot \vec{n}$ . Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za definice  $\vec{h}$ . Stejné představy můžeme použít i pro jiná vektorová pole.

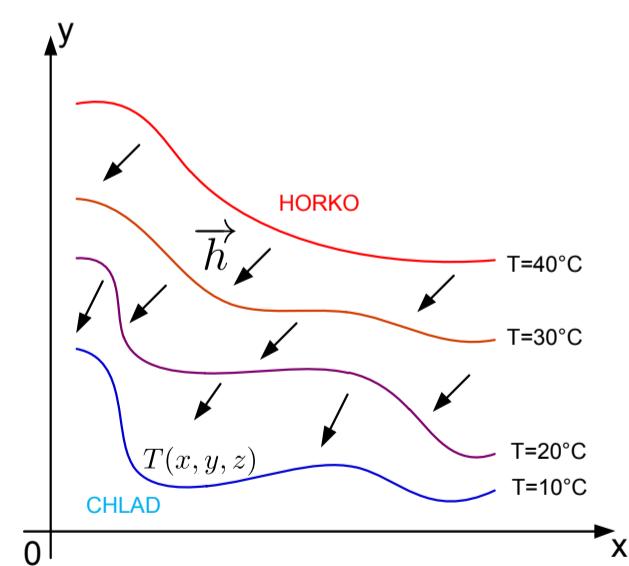
### 15.4. Derivace polí - gradient

[FLMoo, s. 31] Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle  $x$ ? Nebo podle  $y$ , nebo  $z$ ?

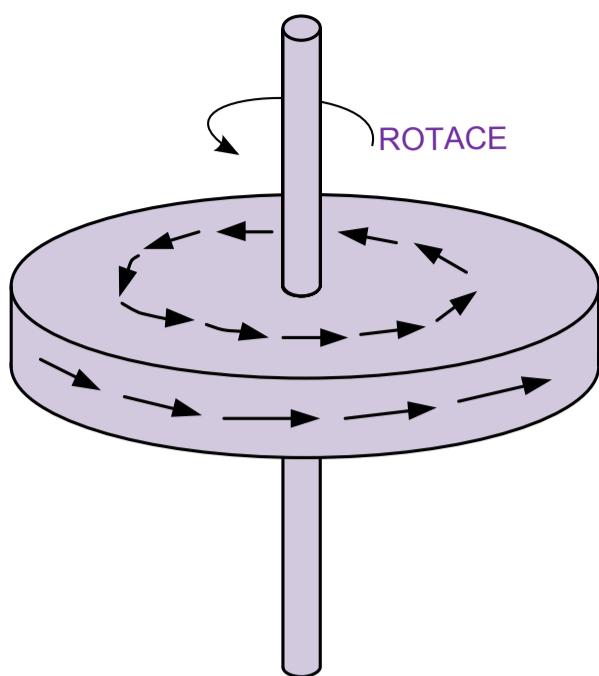
Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry, nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ? Je to skalár nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu  $x$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x}$  se jistě změní. Ale všimněme si, že máme tři možné derivace:  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z}$ . Protože existují tři derivace a víme, že tři čísla tvoří vektor, tyto tři derivace by mohly představovat složky jednoho vektoru:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) ? \text{ vektor} \quad (15.4.1)$$

Samozřejmě, ne každá tři čísla obecně tvoří vektor. Je tomu tak pouze tehdy, když při pootočení souřadnicové soustavy se složky vektoru správně transformují. Proto je



Obrázek 15.3.1.: Teplota je příkladem skalárního pole. Každému bodu  $(x, y, z)$  v prostoru je přiřazeno číslo  $T(x, y, z)$ . Všechny body na ploše označené  $T = 20^\circ\text{C}$  (zobrazené jako křivka při  $z = 0$ ) mají stejnou teplotu. Šipky jsou ukázkami hustoty tepelného toku  $\vec{h}$ .



Obrázek 15.3.2.: Rychlosť v rotujúcom tlese je príkladom vektorového pole.

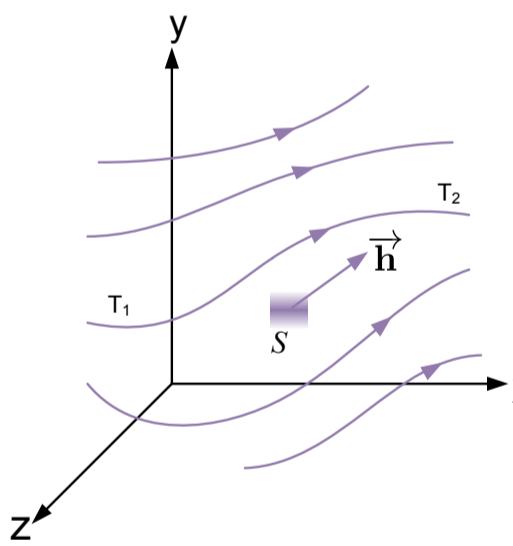
nevyhnuteľné prozkoumat, jak se naše tři derivace změní při otočení souřadnicové soustavy. Ukážeme, že rov. 15.4.1 je skutečně vektorem. Při otáčení souřadnicové soustavy se derivace transformují správně.

Můžeme se o tom přesvědčit několika způsoby. Jeden způsob je položit si takovou otázkou, na níž lze odpovědět nezávisle na souřadnicové soustavě, a pokusit se vyjádřit odpověď v "invariantním" tvaru. Například jsou-li  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  vektory a  $S = \vec{A} \cdot \vec{B}$ , víme, že  $S$  je skalárem. I bez zjišťování víme, zda se  $S$  mění se změnou souřadnicových soustav. Nemůže, neboť jde o skalární součin dvou vektorů. Podobně, víme-li, že  $\vec{A}$  je vektorem a mám tři čísla  $B_1, B_2$  a  $B_3$ , o kterých zjistíme že

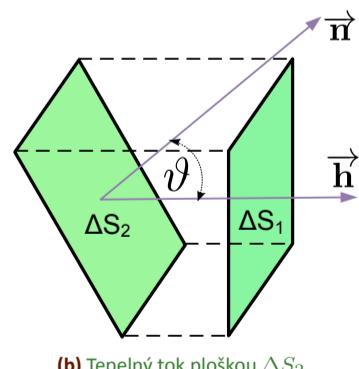
$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (15.4.2)$$

kde  $S$  je totéž pro libovolnou souřadnicovou soustavu, pak tři čísla  $B_1, B_2$  a  $B_3$  jsou nutně složkami  $B_x, B_y$  a  $B_z$  nějakého vektoru  $\vec{B}$ .

Zvažme případ teplotního pole. Vezměme dva body  $P_1$  a  $P_2$  v malé vzdálenosti  $\Delta\vec{r}$  od sebe. Teplota v  $P_1$  je  $T_1$  a v  $P_2$  je  $T_2$  s rozdílem  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Teploty v těchto reálných, fyzikálních bodech určitě nezávisí na volbě os souřadnic. Konkrétně  $\Delta T$  je číslo nezávislé na souřadnicové soustavě. Je to skalár.



(a) Hustota tepelného toku představuje vektorové pole.



(b) Tepelný tok ploškou  $\Delta S_2$

Obrázek 15.3.3.: a) Vektor hustota tepelného toku  $\vec{h}$  ukazuje směr proudění. Jeho velikost je rovna energii, která za jednotku času projde elementární ploškou postavenou kolmo na směr proudění, vydělené obsahem této plošky. b) Tepelný tok ploškou  $\Delta S_2$  je stejný jako tepelný tok ploškou  $\Delta S_1$ .

Zvolíme-li nějakou vhodnou soustavu souřadnicových os, můžeme napsat  $T_1 = T(x, y, z)$  a  $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , kde  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  jsou složky vektoru  $\Delta\vec{r}$  (obr. 15.4.1). Vzhledem k rovnosti rov. 15.2.11 můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \quad (15.4.3)$$

Levá strana rovnosti (15.4.3) je skalárem. Pravá je součtem tří součinů obsahujících jako součinitele  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , které jsou složkami vektoru. Z toho vyplývá, že tři čísla

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Představují také  $x$ -ovou,  $y$ -ovou a  $z$ -ovou složku nějakého vektoru. Pro tento nový vektor použijeme symbol  $\nabla T$ . Symbol  $\nabla$  (nazývaný "nabla") je převrácený  $\Delta$  a má připomínat derivování.  $\nabla T$  se čte různě: "nabla  $T$ " nebo "gradient  $T$ " nebo "grad  $T$ ".

$$\text{grad } T = \nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^T \quad (15.4.4)$$

Použitím této nové symboliky se můžeme pokusit rovnost (15.4.3) přepsat na kompaktnější tvar

$$\Delta T = \nabla T \cdot \vec{r} \quad (15.4.5)$$

Tento vztah, vyjádřený slovy, říká, že rozdíl teplot ve dvou sousedních bodech je roven skalárnímu součinu gradientu  $T$  a rozdílu polohových vektorů obou bodů. Tvar rov. 15.4.5 také ilustruje již uvedený důkaz, že  $\nabla T$  je opravdu vektorem.

Stále ještě nejste přesvědčeni? Ukážeme, že složky  $\nabla T$  se transformují stejně jako složky  $\vec{r}$ . Pokud ano,  $\nabla T$  je vektor podle naší původní definice vektoru. Abychom si to trochu zjednodušili, položme  $z = z'$ , takže souřadnice  $z$  již nemusíme brát v úvahu.

Uvažujme o soustavě  $x', y'$  pootočené o úhel  $\vartheta$  vzhledem k soustavě  $xy$  (obr. 15.4.2). Souřadnice bodu  $(x, y)$  vyjádřené v čárkovanej soustavě jsou

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ y' &= -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \\ \text{vyjádříme-li } x \text{ a } y \\ x &= x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \\ y &= x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (15.4.6)$$

Transformují-li se nějaká dvojice čísel podle těchto rovnic stejně jako  $x$  a  $y$ , jde o složky vektoru.

Nyní si všimněme rozdílu teplot ve dvou sousedních bodech  $P_1$  a  $P_2$ , zvolených tak, jak to znázorňuje obr. 15.4.2b. Při výpočtu v souřadnicích  $x$  a  $y$  můžeme psát

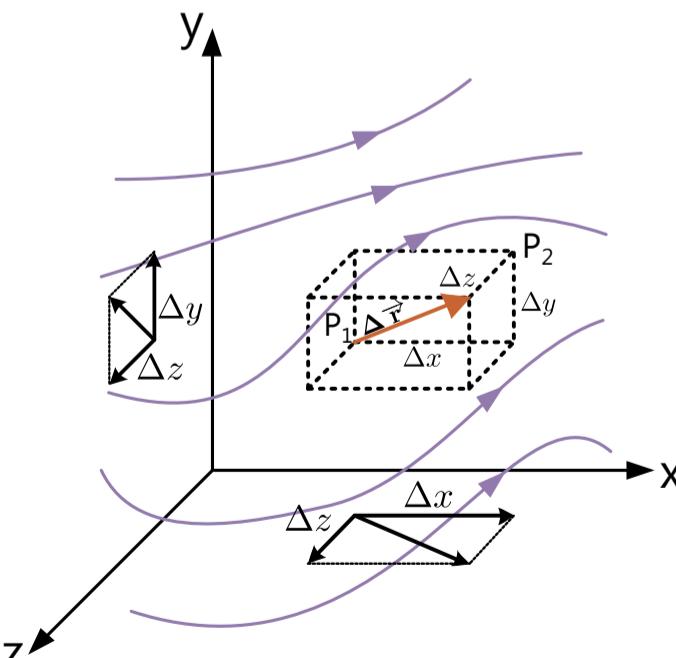
$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad \text{nebo } \Delta y = 0. \quad (15.4.7)$$

A výpočet v čárkovanej soustavě? Tam bychom psali

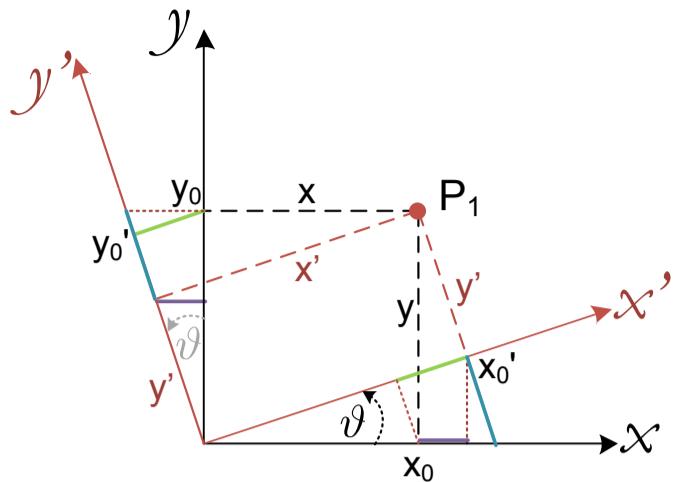
$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y' \quad (15.4.8)$$

<sup>1</sup>V naší symbolice představuje výraz  $(a, b, c)$  vektor se složkami  $a, b, c$ . Použijeme-li jednotkové vektory  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , můžeme psát

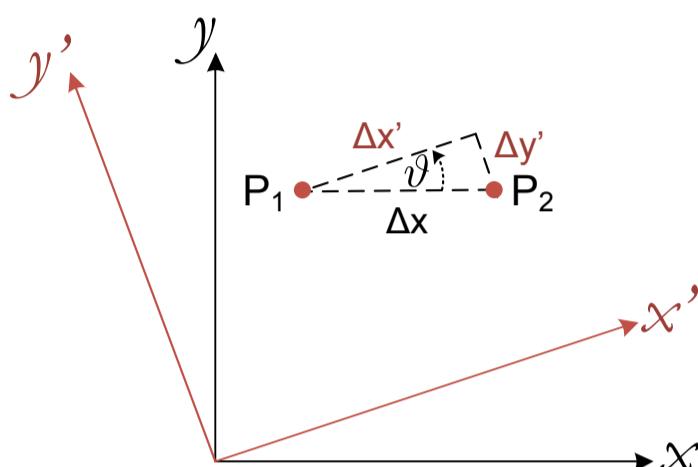
$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$



Obrázek 15.4.1.: Vektor  $\vec{r}$ , jehož složky jsou  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .



(a) Transformace do pootočené souřadnicové soustavy

(b) Speciální případ, v němž je vektor  $\vec{r}$  rovnoběžný s osou  $x$ .

**Obrázek 15.4.2.:** Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy.  
Dokažme to!

Podíváme-li se na obr. 15.4.2b, vidíme, že

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad \Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta$$

neboť  $\Delta y'$  je záporné při kladném  $\Delta x$ . Dosazením těchto výrazů do rov. 15.4.8 dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta \\ &= \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial x'} \sin \vartheta \right) \Delta x \end{aligned} \quad (15.4.9)$$

Porovnáním rov. 15.4.9 s rov. 15.4.7 zjistíme, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (15.4.10)$$

Podle tohoto vztahu  $\frac{\partial T}{\partial x}$  dostaneme z  $\frac{\partial T}{\partial x'}$  a  $\frac{\partial T}{\partial y'}$  právě tak jako  $x$  z  $x'$  a  $y'$  (rov. 15.4.6).  $\frac{\partial T}{\partial x}$  je tedy  $x$  – ovou složkou vektoru. Podobné úvahy by ukázaly, že  $\frac{\partial T}{\partial y}$  je  $y$  – ová a  $\frac{\partial T}{\partial z}$  jeho  $z$  – ová složka.  $\nabla T$  je zajisté vektorem. Jde o vektorové pole odvozené ze skalárního pole  $T$ .

## 15.5. Operátor $\nabla$

[FLMoo, s. 34] Důkaz, že  $\text{grad } T$  nebo  $\nabla T$  je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejné i tehdy, kdyby se  $T$  zaměnilo za jakékoli jiné skalární pole. Transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom  $T$  vynechat a nahradit rovnici (15.4.10) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (15.5.1)$$

Ponecháme přitom operátory "hladové po derivování".

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme jej nazvat složkami **vektorového operátoru**. Můžeme psát

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (15.5.2)$$

což samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (15.5.3)$$

Gradient jsme abstrahovali od  $T$ .

Musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od  $\nabla$ .  $T\nabla$  je stále operátorem, zatímco  $\nabla T$  už není "hladovým" operátorem, neboť se nasytí. Je to opravdový fyzikální vektor, představující rychlosť změny  $T$  v prostoru. Víme, že rychlosť změny  $T$  v nějakém směru udává složku vektoru  $\nabla T$  v tomto směru (viz vztah 15.4.5). Z toho vyplývá, že  $\nabla T$  směřuje tam, kde má největší možnou složku – jinými slovy, směrem, v němž se  $T$  mění nejrychleji. **Gradient  $T$  má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny  $T$ .**

## 15.6. Operace s $\nabla$

[FLMoo, s. 35] Je možné s vektorovým operátorem  $\nabla$  provádět nějaké jiné algebraické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vyjádřením skalárního součinu. Mohly bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}) \quad (15.6.1)$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. ( $(\vec{A} \cdot \vec{B})$  je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru  $\nabla$  s vektorovým polem, které známe, např.  $\vec{h}$ . Vypíšeme-li ho ve složkách

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x \cdot h_x + \nabla_y \cdot h_y + \nabla_z \cdot h_z \quad (15.6.2)$$

nebo

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (15.6.3)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali bychom<sup>2</sup>

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \quad (15.6.4)$$

což je totéž číslo, které bychom dostali z (rov. 15.6.3), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h} \quad (15.6.5)$$

pro každý bod prostoru. Tedy  $\nabla \cdot \vec{h}$  je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíme si uvědomit, že kombinace derivací  $\nabla \cdot \vec{h}$  je dost specifická. Existují rozmanité kombinace, např.  $\frac{\partial h_y}{\partial x}$ , které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina  $\nabla \cdot (\text{vektor})$  je ve fyzice neobyčejně užitečná. Byla nazvána **divergencí** (div  $\vec{h}$ ). Například

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{divergence } \vec{h}. \quad (15.6.6)$$

Podobně jako v případě  $\nabla T$  můžeme najít fyzikální význam i pro  $\nabla \times \vec{h}$ . Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru  $\nabla$ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (15.6.7)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz rov. 15.2.6).

$$(\nabla \times \vec{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (15.6.8)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (15.6.9)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (15.6.10)$$

Kombinace  $\nabla \times \vec{h}$  se nazývá **rotace**  $\vec{h}$  (rot  $\vec{h}$ ). O příčině tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

<sup>2</sup>Na  $\vec{h}$  se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je  $\vec{h}$  "derivováno" podle  $x, y$  a  $z$  nebo podle  $x', y'$  a  $z'$ , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro  $\vec{h}$  jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme  $\vec{h}$  čárkou.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor  $\nabla$ :

$$\begin{aligned}\nabla T &= \text{grad } T = \text{vektor} \\ \nabla \cdot \vec{h} &= \text{div } \vec{h} = \text{skalár} \\ \nabla \times \vec{h} &= \text{rot } \vec{h} = \text{vektor}\end{aligned}$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislém na nějaké souřadnicové soustavě.

Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru  $\nabla$  napíšeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetismu - Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

kde  $\rho$  (ró) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu,  $\vec{j}$  je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

## 15.7. Diferenciální rovnice proudění tepla

[FLMoo, s. 37] Uvedeme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Vezmeme-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahrzejeme na teplotu  $T_2$ , zatímco protilehlou stranu ochladíme na odlišnou teplotu  $T_1$ , materiélem bude proudit teplo ve směru od  $T_2$  k  $T_1$  (obr. 15.7.1).

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu  $S$  stěn i rozdílu teplot  $T_2 - T_1$  a nepřímo úměrný vzdálenosti  $d$  mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok). Nechť  $P$  je tepelná energie, která projde desku za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda(T_2 - T_1) \frac{S}{d} \quad (15.7.1)$$

Konstanta úměrnosti  $\lambda$  (lambda) se nazývá *součinitel teplotní vodivosti*.

Co se stane ve složitějším případě, rekněme v tělesu nepravidelném tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 15.7.1a, ale v miniaturním měřítku. Nasmerujeme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami obr. 15.7.1b, takže pro destičku bude platit rov. 15.7.1.

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky  $\Delta S$ , je tepelný tok

$$P = \lambda(\Delta T) \frac{\Delta S}{\Delta d} \quad (15.7.2)$$

kde  $\Delta d$  je tloušťka destičky.  $\frac{\Delta P}{\Delta S}$  jsme definovali jako velikost vektoru  $\vec{h}$  ležícího ve směru tepelného toku.

Teplo bude proudit od  $T_1 + \Delta T_1$  k  $T_1$  a tudíž kolmo na izotermy (obr. 15.7.1b).  $\frac{\Delta P}{\Delta d}$  udává dále právě rychlosť změny  $T$  při změně polohy. Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše  $\frac{\Delta P}{\Delta d}$  udává maximální rychlosť změny  $T$ , a tedy velikost vektoru  $\nabla T$ . Protože směr  $\nabla T$  je opačný než směr<sup>3</sup>  $\vec{h}$  rov. 15.7.2 zapsaná pomocí vektorů bude vypadá takto

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (15.7.3)$$

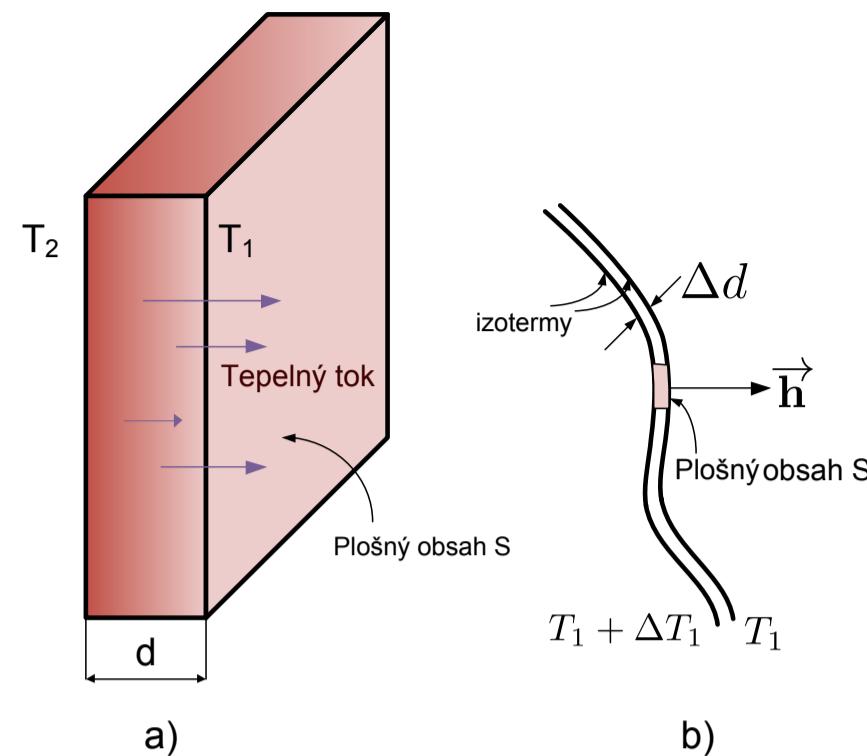
Rovnice 15.7.3 je diferenciální rovnici vedení tepla v masivních tělesech. Jde o skutečnou vektorovou rovnici. Každá její strana je vektor, je-li  $\lambda$  jen číslo. Je zobecněním speciální rov. 15.7.2 pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Tato symbolika je užitečný nejen proto, že v ní rovnice vypadají jednodušeji, ale i proto, že nejjasněji ukazuje fyzikální obsah rovnic bez odvolání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.

## 15.8. Druhé derivace vektorových polí

[FLMoo, s. 39] Dosud jsme měli pouze první derivace. Proč se však nezabývat i druhými derivacemi? Mohli bychom sestavit několik kombinací:

- a)  $\nabla \cdot (\nabla T)$
- b)  $\nabla \times (\nabla T)$
- c)  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h})$
- d)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$
- e)  $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

<sup>3</sup>Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.



Obrázek 15.7.1.: a) Tepelný tok deskou. b) Infinitezimální destička rovnoběžná s izotermickou hladinou ve velkém kuse látky

Můžeme se přesvědčit, že to jsou všechny možné kombinace.

Podívejme se nejdříve na druhou z nich, tj. na b). Má stejný tvar jako  $\nabla \times (\nabla T)$ : má stejný tvar jako  $\vec{A} \times (\vec{h}T) = (\vec{A} \times \vec{A}) = 0$ , neboť  $\vec{A} \times \vec{A}$  je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

$$\text{rot grad } T = \nabla \times \nabla T = 0. \quad (15.8.1)$$

Jak dochází k této rovnosti, můžeme vidět, když si výraz b) napíšeme ve složkách:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

což je nula podle rovnosti (15.2.12). Stejně je to pro další složky.  $\nabla \times (\nabla T) = 0$  tedy platí pro jakékoli rozdělení teploty - dokonce pro jakoukoliv skalární funkci.

Vezměme si jiný příklad. Podívejme se, zda se podaří dostat i jiný výraz rovný nule. Skalární součin vektoru s vektorovým součinem obsahující tentýž vektor dává nulu

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

neboť  $(\vec{A} \times \vec{B})$  je kolmý na  $\vec{A}$  a jeho složka ve směru  $\vec{A}$  je tedy nulová. Stejná kombinace se vyskytuje v rovnici d), a tak dostáváme

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \text{div}(\text{rot } \vec{h}) = 0. \quad (15.8.2)$$

Snadno se opět ukáže, že je to 0, zapíši-li se naznačené operace ve složkách.

Nyní zformulujeme dvě matematické věty, které nebudeme dokazovat. Jsou to velice zajímavé věty a je pro fyziku užitečné je znát.

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, rekněme vektorového pole  $\vec{A}$ , je nula. Viděli jsme (rovnost 15.8.1), že rotace gradientu je rovna nule, což se vzhledem k vlastnostem vektorů dobře pamatuje. Bylo by tedy dobré možné, aby bylo  $\vec{A}$  gradientem nějaké veličiny; jeho rotace by pak byla nutně nulová. Platí zajímavá věta, podle které, je-li  $\text{rot } (\vec{A})$  rovna nule, je  $\vec{A}$  vždy gradientem něčeho, a tedy existuje určité skalární pole  $\Psi$  (psí) takové, že  $\vec{A}$  je rovno  $\text{grad } \Psi$ . Jinými slovy platí následující věta

**Věta 15.8.1.** Je-li  $\nabla \times \vec{A} = 0$ , existuje  $\psi$  takové, že  $\vec{A} = \nabla \psi$

Podobná věta platí i v případě, že  $\text{div } A$  je rovna nule. Rovnost (15.8.2) říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáme-li se s vektorovým polem  $\vec{D}$ , přičemž  $\text{div } \vec{D}$  je rovna nule, můžeme z toho usoudit, že  $\vec{D}$  je rotací nějakého vektorového pole  $\vec{C}$ .

**Věta 15.8.2.** Je-li  $\text{div } \vec{D} = 0$ , existuje  $\vec{C}$  takové, že  $\vec{D} = \nabla \times \vec{C}$ .

Při zkoumání možných kombinací dvou operátorů  $\nabla$  jsme zjistili, že dvě z nich dávají vždy nulu. Podívejme se nyní na ty, které nejsou nulové. Vezměme kombinaci  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$ , která byla v našem záznamu napsaná jako první. Obecně nulu nedává. Vypíšeme složky:

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T).$$

Potom

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla T) &= \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_x(\nabla_z T) + \nabla_z(\nabla_z T) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

z čehož v obecném případě dostaneme nějaké číslo. Jde o skalární pole.

Vidíme, že není třeba ani dávat závorky a aniž bychom rizikovali záměnu, můžeme psát  $\nabla \cdot (\nabla T) = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T$ . Na  $\nabla^2$  se díváme jako na nový operátor - **Laplaceův operátor**:

$$\text{Laplaceův operátor } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (15.8.3)$$

Protože Laplaceův operátor je skalárním operátorem, můžeme jím působit i na vektor - myslíme tím tutéž operaci na každou složku vektoru v pravoúhlé souřadnicové soustavě:

$$\nabla^2 \vec{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

Podívejme se na další možnost, kterou je rovnice e), tj.  $\nabla \times \nabla \times \vec{h}$ . Vzhledem k vektorové rovnosti (15.2.10) můžeme rotaci vyjádřit jinak. Při použití výše této rovnice musíme  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  nahradit operátorem  $\nabla$  a položit  $\vec{C} = \vec{h}$ .

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \vec{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Okamžik! Něco je špatně. První dva členy jsou totiž vektory, jak to má být (operátory v nich jsou „nasycené“), ale poslední člen není v pořadku. Má stále charakter operátoru. Chyba je v tom, že jsme nebyli dost pozorní při dodržování pořadí symbolů v zápisech našich členů. Když si znova všimnete rovnosti (15.2.10), zjistíme, že bychom ji mohli stejně dobře napsat ve tvaru:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Pořadí členů teď vypadá lip. Provedme naši substituci do této rovnice. Dostáváme

$$\nabla \times (\nabla \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h}$$

Tento tvar se zdá být v pořadku. Skutečně je správný, o tom se můžete přesvědčit výpočtem složek. Poslední člen je Laplaceův operátor a tak můžeme stejně dobře napsat

$$\nabla \times (\nabla \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{h}.$$

Již jsme se zmínili o všech kombinacích v našem seznamu výrazů v úvodu kapitoly 15.8 s dvojitým operátorem  $\nabla$  s výjimkou případu c), tj.  $\nabla(\nabla \cdot \vec{h})$ . To je přípustné vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm říci nedá. Jde pouze o určité vektorové pole, které se může příležitostně vyskytnout.

Bude vhodné, když naše závěry shrneme:

$$\begin{array}{lll}\nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla^2 T & \dots \text{skalární pole} \\ \nabla \times (\nabla T) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) &= & \dots \text{vektorové pole} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} \\ (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{h} &= \nabla^2 \vec{h} & \dots \text{vektorové pole}\end{array}$$

Všimněme si, že jsme se nepokusili zavést nový operátor  $\nabla \times \nabla$ . Víme proč?

## 15.9. Nástrahy

[FLMoo, s. 41] Naši znalost obvyklé vektorové algebry jsme aplikovali na algebru operátoru  $\nabla$ . Musíme přitom však být opatrní, neboť se můžeme dostat na scestí. Zmíníme se o dvou nástrahách. V tomto kursu se však nevyskytnou. Co byste řekli následujícímu výrazu, který obsahuje dvě skalární funkce  $\psi$  a  $\varphi$  (fí):

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi)?$$

Abyste chtěli prohlásit: musí to být nula, protože je to stejně jako

$$(\vec{A}a) \times (\vec{B}b),$$

což je rovno nule, neboť vektorový součin dvou stejných vektorů  $\vec{A} \times \vec{A}$  je vždy nula. Ale v našem případě dva operátory  $\nabla$  nejsou stejné. První působí na jednu funkci, a to  $\psi$ , zatímco druhý působí na jinou funkci, tj.  $\varphi$ . Proto ačkoliv je označujeme tímto symbolem  $\nabla$ , je třeba o nich uvažovat jako o odlišných operátorech. Je to pochopitelné, vždyť směr  $\nabla \psi$  závisí na funkci  $\psi$ , a proto asi nebude rovnoběžný s  $\nabla \varphi$ .

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi) \neq 0 \text{ (obecně).}$$

My, naštěstí, nebudeme muset takové výrazy použít. (Co jsme právě řekli, nemění nic na faktu, že  $\nabla \times \nabla(\psi) = 0$  pro jakékoli skalární pole, neboť zde působí oba operátory  $\nabla$  na stejnou funkci.)

Nástraha číslo dvě (které se opět v kurzu vynemene) spočívá v tomto: Pravidla,

která jsme tu uvedli, jsou jednoduchá a pěkná, když se použijí pravoúhlé souřadnice. Máme-li například  $\nabla^2 \vec{h}$  a potřebujeme složku  $x$ , hned příme

$$(\nabla^2 \vec{h})_x = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Stejný výraz se však nedá napsat, když bychom se ptali na radiální složku  $\nabla^2 \vec{h}$ . Radiální složka  $\nabla^2 \vec{h}$  není rovna výrazu  $(\nabla^2 \vec{h})_r$ . Příčina je v tom, že máme-li co dělat s vektorovou algebrou, jsou směry všech vektorů plně určeny. Ale pokud jde o vektorová pole, jsou jejich směry v různých místech různé. Pokusíme-li se popsat vektorové pole, řekněme v polárních souřadnicích, to, co nazýváme radiálním směrem, se od bodu k bodu mění. Proto se můžeme dostat do velkých těžkostí, když začneme derivovat složky. Například i pro konstantní vektorové pole se radiální složka bod od bodu mění.

Obvykle je nejbezpečnější a nejjednodušší držet se pravoúhlých souřadnic a vyhnout se těžkostem. Je tu však jedna výjimka, která stojí za zmínu: Protože Laplaceův operátor  $\nabla^2$  je skalár, můžeme jej psát v souřadnicové soustavě jaké jen chceme (např. v polárních souřadnicích). Ale protože je to diferenciální operátor, smíme jej použít pouze na vektory, jejichž složky mají pevný směr, tj. na složky dané v pravoúhlé souřadnicové soustavě. Proto budeme-li naše vektorové diferenciální rovnice sáť ve složkách, budeme všechna vektorová pole vyjadřovat pomocí jejich x-ových, y-ových a z-ových složek.

## References

- [FLMoo] R. Feynman, R. Leighton, and S. Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Ed. by I. Štoll. Nakladatelství Fragment, 2000, p. 806. ISBN: 80-7200-420-4 (cit. on pp. 57, 58, 60–62).

# 16. Integrální počet vektorových polí

## 16.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$

### Obsah

16.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$ . . . . .	63
16.2. Tok vektorového pole . . . . .	64
16.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta . . . . .	64
16.3.1. Tepelná vodivost, rovnice difúze . . . . .	65
16.4. Cirkulace vektorového pole . . . . .	66
16.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta . . . . .	67
16.6. Pole s nulovou rotací a divergencí . . . . .	68
16.7. Shrnutí . . . . .	68
16.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury . . . . .	69

V kapitole 15 jsme viděli, že existují různé způsoby derivování polí. Některé vedou k vektorovým polím, jiné dávají pole skalární. Ačkoliv jsme odvodili mnoho různých vzorců, vše, co je v kapitole 15, lze shrnout do jediného pravidla: operátory  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  a  $\frac{\partial}{\partial z}$  představují tři složky vektorového operátoru  $\nabla$ . Rádi bychom nyní trochu vnikli do významu derivací polí. Potom získáme lepší cit pro to, co znamená vektorová rovnice pole.

Již jsme se zmínili o významu operace gradient ( $\nabla$  působí na skalár). Teď se budeme zajímat o význam operací divergence a rotace. Interpretovat tyto veličiny je možné nejlépe pomocí určitých vektorových integrálů a rovnic, které uvádějí tyto integrály do souvislosti. Bohužel, tyto rovnice nelze získat z vektorové algebry nějakou snadnou substitucí. Proto se je budete muset učit jako něco nového. Jeden z těchto integrálních vztahů je prakticky triviální, ale další dva nejsou. Odvodíme je a objasníme, co z nich vyplývá. Rovnice, které budeme studovat, představují vlastně matematické věty. Užitečné budou nejen při interpretování významu a obsahu divergence a rotace, ale i při vypracování obecných fyzikálních teorií. Tyto matematické věty jsou pro teorii polí tím, čím je zákon zachování energie pro mechaniku částic. Takové obecné věty, jako jsou tyto, jsou důležité pro hlubší porozumění fyziky. Uvidíme však, že při řešení úloh z nich mnoho užitku není (s výjimkou nejjednodušších případů). I tak je potěšující, že na začátku našeho výkladu se setkáme s mnoha jednoduchými úlohami, řešitelnými pomocí těchto tří integrálních vzorců, které budeme nyní probírat. Uvidíme však, že sotva se úlohy stanou těžšími, nebudeme moci tyto jednoduché metody použít.

Nejdříve si vezměme integrální vzorec s gradientem. Obsahuje velmi jednoduchou myšlenku: Protože gradient představuje rychlosť změny veličiny mající charakter pole, integrujeme-li tuto rychlosť změny, dostaneme celkovou změnu. Předpokládejme, že máme skalární pole  $\Psi(x, y, z)$ . Funkce  $\Psi$  bude mít v nějakých dvou bodech (1) a (2) hodnoty  $\Psi(1)$ , resp.  $\Psi(2)$  (Používáme pohodlnou symboliku, ve které (2) představuje bod  $x_2, y_2, z_2$  a  $\Psi(2)$  znamená totéž jako  $\Psi(x_2, y_2, z_2)$ .) Je-li  $\Gamma$ (gama) nějaká křivka spojující body (1) a (2) (obr. 16.1.1), platí následující

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\Psi) \cdot d\vec{s} \quad (16.1.1)$$

Jde o křivkový integrál z (1) do (2) skalárního součinu  $\nabla\Psi$  (vektor) a  $d\vec{s}$  (jiný vektor — infinitesimální element křivky  $\Gamma$ , orientovaný ve směru postupu z (1) do (2) po křivce  $\Gamma$ ).

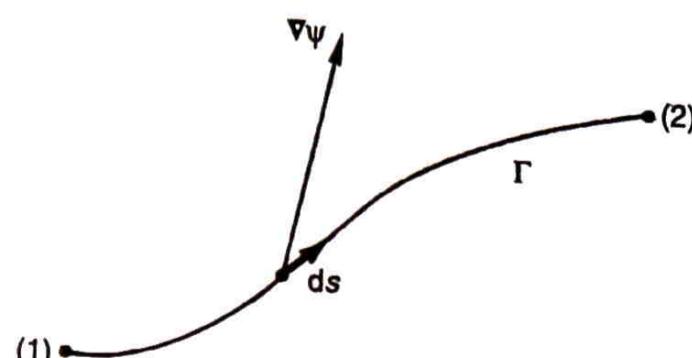
Nejdříve bychom měli vysvětlit, co rozumíme křivkovým integrálem. Uvažujme skalární funkci  $(x, y, z)$  a křivku  $\Gamma$  spojující dva body (1) a (2). Vyznačme na křivce nějaký počet bodů a sousední body spojujeme tak, jak ukazuje obr. 16.1.2. Délku jednotlivých úseček označme  $\Delta s_i$  kde  $i$  je index, který nabývá hodnot 1, 2, 3, ... Křivkovým integrálem  $\int_{(1)}^{(2)} f ds$  rozumíme limitu součtu  $\sum_i f_i \Delta s_i$ , kde  $f_i$  je hodnota funkce pro  $i$ -tou úsečku. Limitní hodnota je to, čemu se součet blíží, přidáváme-li víc a víc úseček (takovým způsobem, aby největší  $\Delta s_i \rightarrow 0$ ).

Integrál v naší větě (vztah 16.1.1) znamená totéž, ačkoliv vypadá trochu jinak. Namísto  $f$  máme jiný skalár - složku  $\Delta\Psi$  ve směru  $\Delta\vec{s}$ . Označíme-li tuto tangenciální složku  $(\Delta\Psi)_t$ , je jasné, že

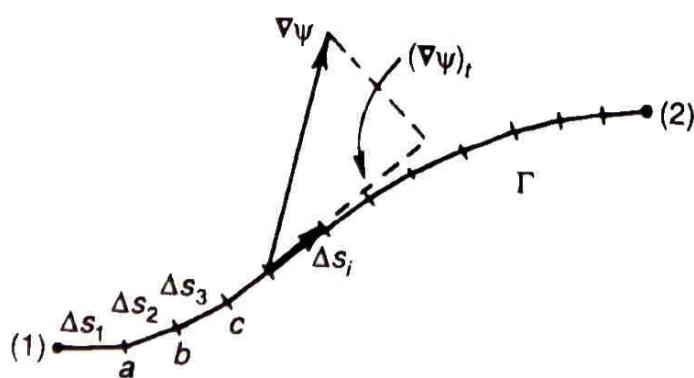
$$(\Delta\Psi)_t = (\Delta\Psi) \cdot \Delta\vec{s} \quad (16.1.2)$$

Integrál v (16.1.2) představuje sumu takovýchto členů.

Nyní se podívejme na to, proč rovnost (16.1.2) platí. V kapitole 14 je ukázáno, že složka  $\Delta\Psi$  ve směru malého posunutí  $\Delta\vec{r}$  udává rychlosť změny  $\Psi$  v tomto směru  $\Delta\vec{r}$ . Uvažujme o úsečce  $\Delta\vec{s}$  z bodu (1) do bodu a na obr. 16.1.2. Podle naší definice



Obrázek 16.1.1.: Význam veličin vystupujících v rovnosti 16.1.1. Vektor  $\nabla\Psi$  se vztahuje k elementu  $d\vec{s}$ .



Obrázek 16.1.2.: Křivkový integrál je limitou součtu.

$$\Delta\Psi = \Psi(a) - \Psi(1) = (\Delta\Psi)_1 \cdot \vec{s}_1. \quad (16.1.3)$$

Takže

$$\Psi(b) - \Psi(a) = (\Delta\Psi)_2 \cdot \vec{s}_2. \quad (16.1.4)$$

kde  $(\Delta\Psi)_1$ , znamená, samozřejmě, gradient počítaný na úsečce  $\Delta\vec{s}_1$  a  $(\Delta\Psi)_2$  gradient počítaný na úsečce  $\Delta\vec{s}_2$ . Výpočtem rovností (16.1.3) a (16.1.4) dostaneme

$$\Psi(b) - \Psi(1) = (\Delta\Psi)_1 \cdot \vec{s}_1 + (\Delta\Psi)_2 \cdot \vec{s}_2 \quad (16.1.5)$$

Můžeme se přesvědčit, že postupným přidáváním takového členů dostaneme

$$\Psi(b) - \Psi(a) = \sum_i (\Delta\Psi)_i \Delta\vec{s}_i \quad (16.1.6)$$

Levá strana nezávisí na tom, jak volíme naše intervaly (zůstávají-li body (1) a (2) stejně) takže můžeme vzít limitu druhé strany. Tím jsme dokázali rovnost (16.1.1). Z našeho důkazu můžete vidět, že tato rovnost nezávisí ani na tom, jak zvolíme body a, b, c..., ani na volbě křivky  $\Gamma$  spojující (1) a (2). Naše věta platí pro jakoukoliv křivku vedenou z (1) do (2).

Ještě jedna poznámka o označování: Uvidíme, že nevznikne žádný zmatek, budeme-li pro pohodlí psát

$$(\Delta\Psi) \cdot d\vec{s} = \Delta\Psi \cdot d\vec{s} \quad (16.1.7)$$

V tomto označení má naše věta tento tvar:

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\Psi \cdot d\vec{s} \quad (16.1.8)$$

jakákoliv křivka od (1) do (2)

## 16.2. Tok vektorového pole

Definovali jsme vektor  $\vec{h}$  jako teplo procházející jednotkovou plochou za jednotkový čas. Předpokládejme, že uvnitř tělesa vyplňeného látkou máme nějakou uzavřenou plochu  $S$ , která ohraničuje objem  $V$ . Chtěli bychom zjistit, kolik tepla vytéká z tohoto objemu.

Označme plošný obsah elementu plochy  $S$  jako  $dS$ . Tento symbol nahrazuje dvojrozměrný diferenciál

$$ds = dx dy. \quad (16.2.1)$$

Tok tepla elementární ploškou  $dS$  je roven jejímu plošnému obsahu vynásobenému složkou  $\vec{h}$  kolmou na  $dS$ . Už jsme definovali  $\vec{n}$  jako jednotkový vektor směrující pod pravým úhlem ven z plochy (obr. 16.2.1). Složka  $\vec{h}$ , kterou potřebujeme, je

$$h_n = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (16.2.2)$$

Tok ploškou  $dS$  pak je

$$\vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (16.2.3)$$

Celkový tepelný tok jakoukoliv plochou dostaneme, sečteme-li příspěvky všech elementárních plošek vytvářející plochu  $S$ . Jinými slovy, integrujeme-li 16.2.3 přes celou plochu: Celkový tepelný tok plochou  $S$  se rovná

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS \quad (16.2.4)$$

Tento plošný integrál<sup>1</sup> budeme také nazývat *tokem plochou*. Můžeme to chápout tak, že  $\vec{h}$  je hustota proudu tepelného toku a plošný integrál z ní je celkový proud tepla směrující ven z plochy za jednotku času (v joulech za sekundu).

Rádi bychom tuto ideu zobecnili na případ, kdy vektor nepředstavuje tok něčeho konkrétního, mohlo by jít například o elektrické pole. Kdybychom chtěli, jistě bychom mohli integrovat normálovou složku elektrického pole plochou. Ačkoliv tu nejde o tok něčeho, nazýváme tuto veličinu tokem. Říkáme tok vektoru  $\vec{E}$  plochou

<sup>1</sup>Malý kroužek na znaku integrálu znamená, že integrujeme přes uzavřenou plochu.

$S$  se rovná  $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ . Slovo tok zde používáme v obecném významu jako, *plošný integrál normálové složky vektoru*.

Vraťme se k případu tepelného toku a uvažujme situaci, v níž se teplo zachovává. Například si představíme nějakou látku, ve které se po počátečním ohřevu tepelná energie dále ani negeneruje, ani neabsorbuje. Existuje-li pak tok tepla uzavřenou plochou, musí tepelný obsah objemu vymezeného plochou klesat. Tedy v podmínkách, ve kterých se teplo zachovává, tvrdíme, že

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (16.2.5)$$

kde  $Q$  je teplo uvnitř plochy. Tok tepla plochou  $S$  je roven rychlosti změny celkového tepla  $Q$  uvnitř  $S$  za čas, vzaté se záporným znaménkem. Takováto interpretace je možná, neboť hovoříme o tepelném toku a kromě toho jsme udělali předpoklad, že teplo se zachovává. O celkovém teple uvnitř objemu bychom nemohli hovořit, kdyby se v tomto objemu teplo generovalo.

Nyní poukážeme na zajímavou vlastnost toku jakéhokoliv vektoru. Můžeme mít na mysli stále vektor tepelného toku, ale vše bude platit i pro jakékoliv vektorové pole  $\vec{C}$ . Představme si, že máme uzavřenou plochu  $S$ , která ohraničuje objem  $V$ . Rozdělme nyní objem  $V$  jakýmsi řezem na dvě části (obr. 16.2.2). Dostaneme tím dvě uzavřené plochy a dva objemy. Objem  $V_1$  ohraničuje plocha  $S_1$ , která se skládá ze zbytku původní plochy  $S_a$  a plochy řezu  $S_{ab}$ . Objem  $V_2$  ohraničuje plocha  $S_2$ , která se skládá ze zbytku původní plochy  $S_b$  doplněné řezem  $S_{ab}$ . Položme si nyní otázku: Předpokládejme, že vypočítáme tok z plochy  $S_1$  a přičteme ho k toku z plochy  $S_2$ . Je roven tento součet toku z celé plochy  $S$ , s níž jsme původně začínaly? Odpověď zní ano. Tok z částí ploch  $S_{ab}$ , společnou oběma plochám  $S_1$  a  $S_2$  se přesně vyruší. Pro tok vektoru  $\vec{C}$  z objemu  $V_1$  můžeme psát:

- tok plochou  $S_1$  je roven:

$$\int_{S_a} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS \quad (16.2.6)$$

- tok plochou  $S_2$  je roven:

$$\int_{S_b} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (16.2.7)$$

Všimněme si, že v druhém integrálu jsme psali  $\vec{n}_1$ , pro vnější normálu k  $S_{ab}$ , patří-li tato k  $S_1$  a  $\vec{n}_2$  patří-li k  $S_2$ , jak ukazuje obr. 16.2.2. Zřejmě  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$  takže

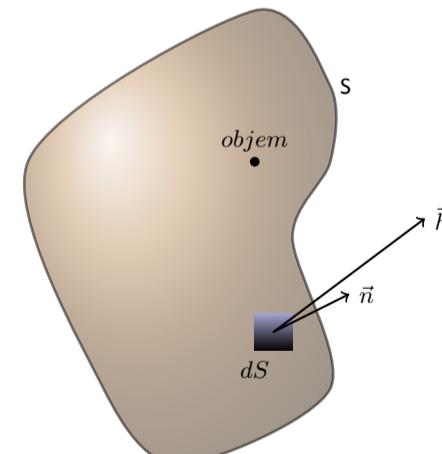
$$\int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (16.2.8)$$

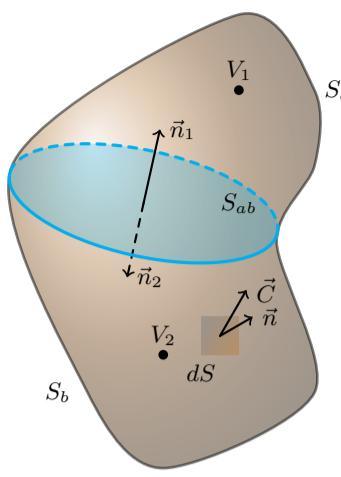
Sečteme-li rovnosti 16.2.6 a 16.2.7 přesvědčíme se, že součet toku přes  $S_1$  a  $S_2$  je dán součtem dvou integrálů, které spolu dávají tok původní plochy  $S = S_a + S_b$ .

Vidíme, že o toku úplnou vnější plochou  $S$  je možné uvažovat jako o součtu toků dvou částí, na které se objem  $V$  rozdělil. Tako pro jakýkoliv způsob dělení původního objemu musí obecně platit, že tok vnější plochou, daný původním integrálem, je roven součtu toků ze všech jeho malých vnitřních částí.

## 16.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta

Uvažujme krychli jejíž hrany mají směr souřadnicových os tak, jako na obr. 16.3.1. Předpokládejme, že souřadnice jednoho z vrcholu krychle je totožný se začátkem souřadnicové soustavy  $x, y, z$ . Nechť  $\Delta x$  je délka hrany krychle ve směru osy  $x$ ,  $\Delta y$  je délka hrany ve směru osy  $y$  a  $\Delta z$  délka hrany ve směru osy  $z$ . Chceme najít tok vektorového pole  $\vec{C}$  povrchem krychle. Dostaneme jej sečtením toků každou ze šesti stěn. Nejdříve uvažujeme stěnu na obrázku 16.3.1 označenou jako 1. Tok směrující touto stěnou ven z krychle je dán integrálem záporně vzaté  $x$ -ové složky  $\vec{C}$  plochou stěny: Protože máme malou krychli můžeme tento integrál

Obrázek 16.2.1.: Uzavřená plocha  $S$  vymezuje objem  $V$ . Jednotkový vektor  $\vec{n}$  udává vnější normálovou složku vektoru  $\vec{h}$  a  $dS$  je vektor hustoty tepelného toku pro uvažovaný plošný element.



**Obrázek 16.2.2.:** Objem  $V$  uvnitř plochy  $S$  je řezem  $S_{ab}$  rozdělen na dvě části. Dostáváme tím objem  $V_1$  vymezený plochou  $S_1 = S_a + S_{ab}$  a objem  $V_2$  vymezený plochou  $S_2 = S_b + S_{ab}$ .

aproximovat hodnotou  $x$  ve středu stěny (označíme jej jako bod 1) vynásobenou plošným obsahem stěny, tj.  $\Delta y \Delta z$ :

$$\text{tok z 1} = -C_x \Delta y \Delta z \quad (16.3.1)$$

Podobně napíšeme tok stěnu 2:

$$\text{tok z 2} = C_x \Delta y \Delta z \quad (16.3.2)$$

Obecně se  $C_x(1)$  a  $C_x(2)$  trochu liší. Je-li dostatečně malé, můžeme psát

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x. \quad (16.3.3)$$

Na pravé straně tohoto vztahu bychom ve skutečnosti měli uvést více členů. Všechny však budou obsahovat vyšší mocniny  $\Delta x$ , a proto, uvažujeme-li limitní případ malého  $\Delta x$ , budou zanedbatelné. Takovým způsobem pro tok stěnu 2 vychází

$$\text{tok z 2} = \left( C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z. \quad (16.3.4)$$

Sečtením toků stěnami 1 a 2 dostaneme

$$\text{tok z 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (16.3.5)$$

Derivace by se měla počítat ve skutečnosti ve středu stěny 1, tj. v bodu  $[x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}]$ . Ale v limitním případě infinitezimální krychle uděláme pouze zanedbatelnou chybu, počítáme-li je ve vrcholu  $(x, y, z)$ .

Provedeme-li stejné úvahy pro každý z dvou párů stěn, dostaneme

$$\text{tok z 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{tok z 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Celkový tok všemi stěnami je součtem těchto členů. Dostáváme tedy

$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (16.3.6)$$

Součtem derivací je právě  $\nabla \cdot \vec{C}$  a dále  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ , tj. objem krychle. Takovýmto způsobem můžeme pro infinitezimální krychli psát

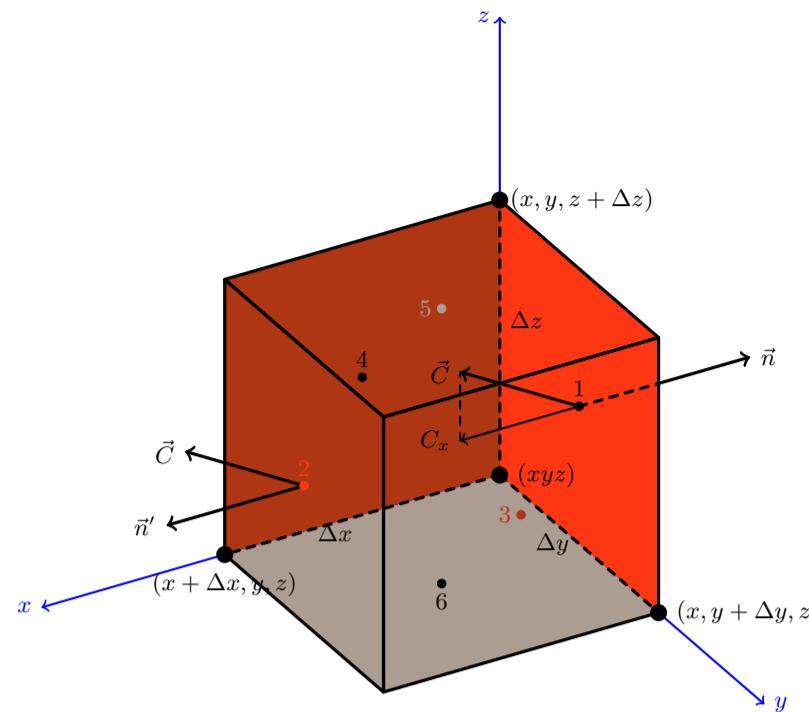
$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V. \quad (16.3.7)$$

Ukázali jsme, že tok z povrchu infinitezimální krychle ven je roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. Nyní vidíme význam divergence vektoru. Divergence vektoru v bodě  $P$  je tok - vycházející „proud“ vektoru  $\vec{C}$  - připadající na jednotkový objem v okolí  $P$ .

Divergenci  $\vec{C}$  jsme uvedli do souvislosti s tokem  $\vec{C}$  z každého infinitezimálního objemu. V případě konečného objemu můžeme využít fakt, který jsme už dokázali, že celkový tok z objemu je součtem toků z každé jedné části. To znamená, že divergenci můžeme integrovat přes celý objem. Z toho vyplývá věta, že integrál normálové složky každého vektoru přes jakoukoliv uzavřenou plochu je možné zapsat jako integrál z divergence tohoto vektoru přes objem uzavřený touto plochou. Tato věta byla pojmenována po Gaussově.

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad \dots \text{Gaussova věta} \quad (16.3.8)$$

kde  $S$  je jakákoli uzavřená plocha a  $V$  je objem jí vymezený.



**Obrázek 16.3.1.:** Výpočet toku pole  $\vec{C}$  z malé krychle

### 16.3.1. Tepelná vodivost, rovnice difúze

Abychom se lépe seznámili s *Gaussovo větou*, uveďme nějaký případ jejího použití. Vezměme opět případ tepelného toku, například v kovu. Předpokládejme, že máme jednoduchou situaci, kdy všechno teplo bylo o přivedeno už dříve a těleso se nyní pouze ochlazuje. Žádné zdroje tepla už nejsou, takže teplo se zachovává. Kolik je potom tepla uvnitř určitého zvoleného objemu v libovolném čase? Množství tepla se musí zmenšovat, a to právě o množství, které vytéká z objemu jeho povrchem. Kdyby byl náš objem malou krychlí, pak podle vztahu 16.3.7 bychom napsali

$$\text{tok tepla} = \int_{\text{krychle}} \vec{h} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{h}) \Delta V. \quad (16.3.9)$$

Tato hodnota však musí být rovna rychlosti, kterou se teplo ztrácí z vnitřku krychle. Je-li  $q$  teplo připadající na jednotkový objem,  $q \Delta V$  je teplo v krychli a rychlosť jeho úbytku je

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (16.3.10)$$

Z porovnání rov. 16.3.9 a 16.3.10 vidíme, že

$$\nabla \cdot \vec{h} = -\frac{dq}{dt}. \quad (16.3.11)$$

Podotkněme, že rovnice tohoto tvaru se ve fyzice vyskytuje velmi často. Vyjadřuje *Zákon zachování*, v tomto případě *Zákon zachování tepla*. Ve vztahu 16.2.5 jsme tentýž fyzikální jev vyjádřili jiným způsobem. Zde máme *diferenciální* tvar zákona zachování zatímco rovnost 16.2.5 představuje jeho *integrální* tvar.

Rovnici (16.3.11) jsme odvodili použitím vztahu (16.2.5) na infinitezimální krychli. Můžeme postupovat i obráceně. Pro velký objem  $V$  ohrazený plochou  $S$  vyplývá z Gaussovy věty

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{h} dV. \quad (16.3.12)$$

Dosadíme-li sem z (16.3.11), zjistíme, že integrál na pravé straně je právě  $-\frac{dQ}{dt}$  a opět dostaneme vztah (16.2.5).

Nyní uvažujme jiný případ. Představme si, že máme těleso vyplňené látkou s malou dutinou uvnitř. Nechť v ní dochází k nějaké chemické reakci generující teplo. Nebo bychom si to mohli představit tak, že tam jsou nějaké vodiče vedoucí k miniaturnímu odporu, který je zahříván elektrickým proudem. Budeme předpokládat, že teplo se generuje prakticky v jednom bodě. Nechť  $P$  označuje energii uvolněnou v tomto bodě za jednu sekundu. Dále budeme předpokládat, že ve zbytku objemu se teplo zachovává a že generování tepla probíhalo velmi dlouho, takže se teplota už nikde nemění. Otázka zní: Jak vypadá tepelný vektor  $\vec{h}$  na různých místech kovu? Jaká je hustota tepelného toku v každém bodě?

Víme, že integrujeme-li normálovou složku vektoru  $\vec{h}$  po uzavřené ploše, která obklopuje zdroj, vždy dostaneme  $P$ . Všechno teplo, které se generuje v bodovém zdroji, musí vyjít povrchem, neboť jsme předpokládali, že tok je stálý. Máme těžkou úlohu najít vektorové pole, které integrováno přes jakoukoliv plochu, dá vždy  $P$ . Toto pole však můžeme najít docela snadno, vezmeme-li speciálnější plochu. Vezmeme kulovou plochu s poloměrem  $R$  a se středem ve zdroji a budeme předpokládat, že proudění tepla je radiální (obr. 16.3.2). Intuice nám napovídá, že vektor  $\vec{h}$  by měl směřovat radiálně, jde-li o velké těleso a nejsme-li blízko stěn, a že ve všech bodech kulové plochy by měl mít stejnou velikost. Vidíte, že na to, abychom našli odpověď, přidáváme k naší matematice jisté množství dohadů - obyčejně nazývané „fyzikální intuice“.

Když je pole  $\vec{h}$  radiální a kulově symetrické, je integrál normálové složky vektoru  $\vec{h}$  kulovou plochou velmi jednoduchý, protože tehdy je normálová složka vektoru rovna velikosti vektoru  $\vec{h}$  a je konstantní. Obsah plochy, přes kterou integrujeme, je  $4\pi R^2$ . Potom dostaneme

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = h \cdot 4\pi R^2 \quad (16.3.13)$$

kde  $h$  je velikost vektoru  $\vec{h}$ . Tento integrál má být roven  $P$ , tedy rychlosti, se kterou teplo ve zdroji vzniká. Dostáváme

$$h = \frac{P}{4\pi R^2}$$

nebo

$$\vec{h} = \frac{P}{4\pi R^2} \vec{e}_r \quad (16.3.14)$$

kde, jako obvykle,  $\vec{e}_r$  představuje jednotkový vektor v radiálním směru. Podle našeho výsledku je  $\vec{h}$  přímo úměrné  $P$  a mění se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti od zdroje.

Výsledek, který jsme právě dostali, se hodí na proudění tepla v blízkosti bodového zdroje tepla. Pokusme se nyní najít rovnici pro nejobecnější případ proudění tepla, platí-li jediná podmínka, že teplo se zachovává. Budeme se zabývat pouze tím, co se stane v prostoru bez jakýchkoliv zdrojů nebo absorbátorů tepla.

Diferenciální rovnice pro vedení tepla byla odvozena v kapitole 15. Podle rovnice (15.7.3) platí

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (16.3.15)$$

(vzpomeňte si, že tento vztah platí sice přibližně, ale pro takové látky jako jsou kovy, docela dobře.) Dá se použít, samozřejmě, jen v těch oblastech látky, ve kterých nedochází ke generování nebo absorpcii tepla. Už jsme odvodili jiný vztah, rovnici (16.3.11), který platí, když se teplo zachovává. Když v (16.3.11) vektor  $\vec{h}$  vyjádříme podle (16.3.15), dostaneme

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \vec{h} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

nebo

$$\frac{dq}{dt} = \lambda \nabla \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T \quad (16.3.16)$$

je-li  $\lambda$  konstanta. Vzpomínáte si, že  $q$  je množství tepla v jednotkovém objemu a  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  je Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Uděláme-li ještě jeden předpoklad, můžeme dostat velmi zajímavou rovnici. Budeme předpokládat, že teplota látky je přímo úměrná tepelnému obsahu jednotkového objemu, tj. že látka má určitou měrnou tepelnou kapacitu. Platí-li tento předpoklad (což bývá často), můžeme psát

$$\Delta q = c_V \Delta T$$

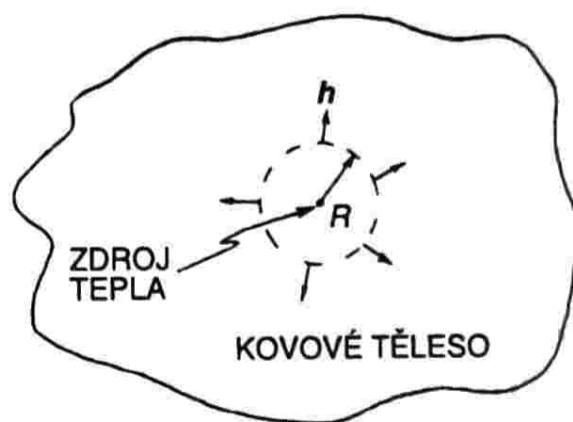
nebo

$$\frac{dq}{dt} = c_V \frac{dT}{dt} \quad (16.3.17)$$

Rychlosť změny teplaje přímo úměrná rychlosť změny teploty. Součinitel úměrnosti  $c_V$  je tu měrná tepelná kapacita jednotky objemu látky. Ze vztahů (16.3.17) a (16.3.16) dostáváme

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c_V} \nabla^2 T \quad (16.3.18)$$

Zjištujme, že časová rychlosť změny  $T$  v každém bodě je přímo úměrná Laplaceovu operátoru teploty  $T$ , tj. druhé derivaci její závislosti na poloze v prostoru.



Obrázek 16.3.2.: V oblasti blízko bodového zdroje proudí teplo radiálně směrem ven.

Dostáváme diferenciální rovnici s proměnnými  $x, y, z$  a  $t$  pro teplotu  $T$ .

Diferenciální rovnice (16.3.18) se nazývá rovnici difúze tepla. Často je psána ve tvaru

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T \quad (16.3.19)$$

kde  $D$  je koeficient difúze tepla a zde je roven hodnotě  $\frac{\lambda}{c_V}$ .

Rovnice difúze se objevuje v mnoha fyzikálních úlohách - při difúzi plynů, neutronů a v dalších případech. Nyní však máme úplnou rovnici, která popisuje difúzu v nejobecnější možné situaci. Později probereme způsoby řešení rovnice difúze, abychom našli, jak se v konkrétních případech mění teplota. Nyní se vrátíme zpět k výkladu dalších vět o vektorových polích.

## 16.4. Cirkulace vektorového pole

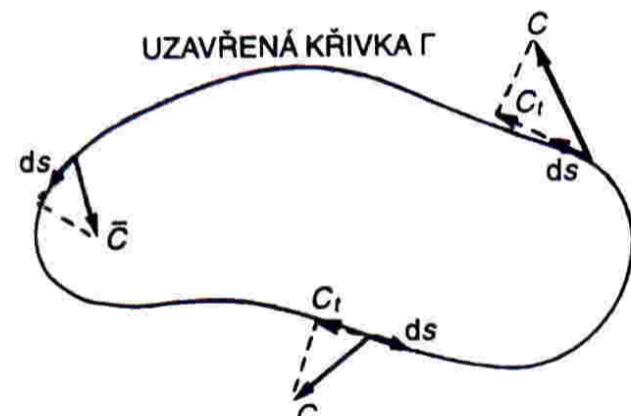
Podobným způsobem, jakým jsme to udělali v případě divergencie, chceme nyní prozkoumat rotaci. Gaussovu větu jsme odvodili analýzou plošného integrálu, ačkoliv zpočátku nebylo zřejmé, že se chystáme zabývat divergencí. Jak jsme věděli, že máme integrovat přes celou plochu, abychom dostali divergenci? Vůbec nebylo jasné, že vyjde tento výsledek. A právě bez zjevného opodstatnění teď vypočítáme pomocí vektoru ještě cosi a ukážeme, že to souvisí z rotací. Tentokrát budeme počítat to, co se nazývá cirkulace vektorového pole. Je-li  $\vec{C}$  nějaké vektorové pole, vezmeme jeho složku podél nějaké křivky a vypočítáme integrál této složky po celé uzavřené křivce. Tento integrál se nazývá cirkulace vektorového pole po (uzavřené) křivce. Už dříve v této kapitole jsme uvažovali křivkový integrál vektoru  $\nabla \Psi$ . Nyní provedeme totéž pro jakékoli vektorové pole  $\vec{C}$ .

Nechť je  $\Gamma$  nějaká uzavřená křivka v prostoru - pouze myšlená (obr. 3.7). Křivkový integrál tangenciální složky vektoru  $\vec{C}$  po této křivce bude

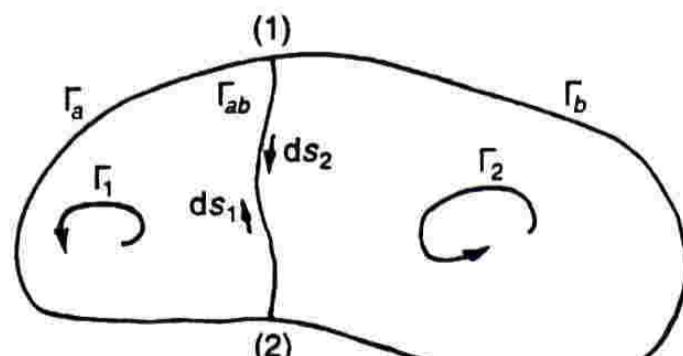
$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s}. \quad (16.4.1)$$

Je nutné, abyste si všimli, že integrujeme po celé křivce kolem dokola, nejen z jednoho bodu do druhého, jako jsme to dělali předtím. To, že je třeba integrovat po celé dráze dokola, nám má připomenout malý kroužek na znaku integrování. Tento integrál se nazývá cirkulace vektorového pole po křivce  $\Gamma$ . Název se převzal ze zkoumání cirkulace kapaliny a podobně jako tok se rozšířil a použil na jakékoli pole, i když tam není žádná „cirkulující“ látka.

Stejnou hrou, jakou jsme předvedli v případě toku, můžeme ukázat, že cirkulace po křivce je součtem cirkulací po dvou dílčích křivkách. Předpokládejme, že jsme naši křivku na obr. 16.4.1a rozdělili na dvě uzavřené křivky spojením dvou bodů (1) a (2) na původní křivce nějakou čarou napříč (obr. 16.4.1b). Nyní existují dvě uzavřené křivky a  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ .  $\Gamma_1$  je vytvořena z  $\Gamma_a$ -té části původní křivky, která je vlevo od (1) a (2) plus zkratka  $\Gamma_{ab}$ . Křivku  $\Gamma_2$  vytváří zbytek původní křivky plus zkratka.



(a) Cirkulace vektorového pole  $\vec{C}$  po křivce  $\Gamma$  je křivkový integrál  $\vec{C}$  (tj. tangenciální složky vektoru  $\vec{C}$ ).



(b) Cirkulace po celé křivce  $\Gamma_a + \Gamma_b$  je rovna součtu cirkulací po dvou křivkách:  $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$  a  $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$ .

Obrázek 16.4.1.: Cirkulace vektorového pole  $C$

Cirkulace po  $\Gamma_1$ , je součtem integrálů po  $\Gamma_a$  a po  $\Gamma_{ab}$ . Podobně cirkulace po  $\Gamma_2$  je součtem dvou částí, jedné související s  $\Gamma_a$  a druhé související s  $\Gamma_{ab}$ . Integrál po  $\Gamma_{ab}$  bude mít v případě křivky  $\Gamma_2$  opačné znaménko než v případě  $\Gamma_1$ , protože směr oběhu bude opačný - vždyť oba naše křivkové integrály musíme počítat ve stejném smyslu oběhu.

Toutéž úvahou, jakou jsme provedli dříve, se můžete přesvědčit, že součet obou těchto cirkulací dá právě křivkový integrál po původní křivce  $\Gamma$ . Příspěvky pocházející od  $\Gamma_{ab}$  se ruší. Cirkulace po jedné části plus cirkulace po druhé části je rovna cirkulaci po vnější křivce. S procesem rozdělování původní křivky můžeme pokračovat do jakéhokoliv počtu menších uzavřených drah. Sečteme-li cirkulace po menších dráhách, dojdeme vždy k rušení příspěvků od jejich společných částí, takže součet je ekvivalentní s cirkulací po původní křivce.

Nyní předpokládejme, že původní uzavřená křivka ohraničuje nějakou plochu. Ve skutečnosti existuje nekonečně mnoho ploch, jež všechny mají původní křivku jako svoji hranici. Naše výsledky však nebudou záviset na tom, kterou plochu zvolíme. Nejdříve rozdělíme naši původní křivku na mnoho malých uzavřených křivek, jež všechny budou ležet na námi zvolené ploše, jak je vidět na obr. 16.4.2. Zvolíme-li naše křivky dostatečně malé, můžeme, bez ohledu na tvar plochy, předpokládat, že každá z nich utváří v podstatě rovinou plošku. Kromě toho můžeme křivky vybrat tak, že každá bude velmi blízká obvodu čtverce. Cirkulaci po velké křivce nyní můžeme vypočítat tak, že najdeme cirkulace po obvodech všech malých čtverců a ty sečteme.

## 16.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta

Jak najít cirkulaci pro každý z malých čtverečků? Závisí to na tom, jak je čtvereček orientovaný v prostoru. Kdyby měl speciální orientaci, například kdyby ležel v některé ze souřadnicových rovin, bylo by možné výpočet provést snadno. Protože jsme dosud o orientaci souřadnicových os neudělali žádný předpoklad, můžeme si osy dobré zvolit tak, aby ten čtvereček, na který je v té chvíli soustředěna naše pozornost, ležel v rovině  $xy$  (obr. 16.5.1).

Vyjádříme-li náš výsledek ve vektorové symbolice, můžeme tvrdit, že bude pro všechny konkrétní orientace roviny tentýž.

Nyní chceme najít cirkulaci pole  $\vec{C}$  po obvodu našeho malého čtverce. Křivkový integrál se snadno vypočte, uděláme-li čtvereček tak malý, že podél jakékoliv jeho strany se vektor  $\vec{C}$  moc nemění. (Tento předpoklad platí tím lépe, čím menší je čtvereček, takže v podstatě mluvíme o infinitezimálních čtverečcích.) Vyjdeme z bodu  $(x, y)$  - levého dolního rohu obrázku - a budeme postupovat ve směru vyznačeném šipkami. V případě první strany, označené 1, nechť je tangenciální složka  $C_x(1)$ , délka dráhy nechť je  $\Delta x$ . První příspěvek k integrálu tedy bude  $C_x(1)\Delta x$ . V případě druhé strany dostaneme  $C_y(2)\Delta y$ , v případě třetí  $-C_x(3)\Delta x$  a v případě čtvrté strany to bude  $-C_y(4)\Delta y$ . Záporná znaménka jsou nutná, neboť tangenciální složku musíme vyjadřovat vzhledem ke směru postupu po obvodu. Celý křivkový integrál pak bude

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y. \quad (16.5.1)$$

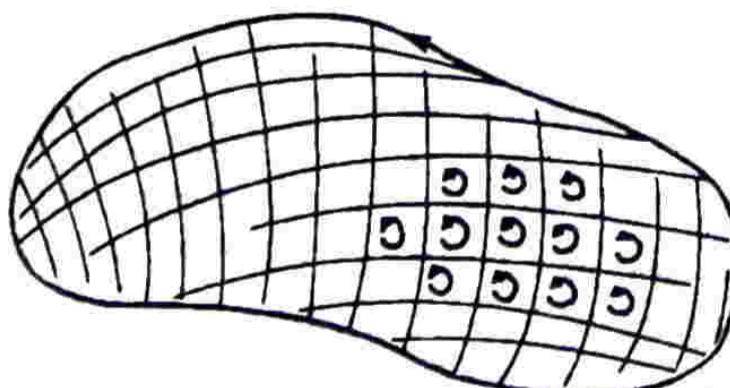
Všimněme si prvního a třetího člena na pravé straně. Spolu dávají

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x. \quad (16.5.2)$$

Mohli byste se domnívat, že podle naší approximace je rozdíl v hranaté závorce roven nule. Je to tak, ale pouze v nulovém přiblížení. Můžeme však být přesnější a vzít v úvahu i rychlosť změny  $C_x$ . Když to uděláme, můžeme psát

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} dy. \quad (16.5.3)$$

Kdybychom zahrnuli následující přiblížení, vystoupily by v něm i členy obsahující  $\Delta y^2$ . Protože však nakonec přejdeme k limitě pro  $\Delta y \rightarrow 0$ , je možno takové členy



**Obrázek 16.4.2.:** Je zvolena nějaká plocha ohraničená uzavřenou křivkou  $\Gamma$ . Plocha se rozdělí na množství malých přibližně čtvercových plošek. Cirkulace po  $\Gamma$  je rovna sumě cirkulací po malých uzavřených křivkách.

zanedbat. Dosadíme-li (16.5.3) do (16.5.2), jistíme, že

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} dx dy. \quad (16.5.4)$$

Souhlasně s naší approximací je možno tuto derivaci počítat v bodě  $(x, y)$ .

Podobně můžeme vyjádřit zbývající dva členy ve výrazu (16.5.1) pro cirkulaci

$$[C_y(2) - C_y(4)]\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} dx dy. \quad (16.5.5)$$

Cirkulace po obvodu čtverečku pak bude

$$\left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.5.6)$$

což je zajímavé, neboť rozdíl závorkách představuje právě  $z$ -ovou složku rotace. Kromě toho si všimněme, že  $\Delta x \Delta y$  je plošný obsah našeho čtverečku. Takovýmto způsobem můžeme naši cirkulaci (16.5.6) psát jako

$$(\nabla \times \vec{C})_z dz. \quad (16.5.7)$$

Ale  $z$ -ová složka ve skutečnosti znamená normálovou složku vzhledem k plošnému elementu. Cirkulaci po obvodu diferenciálního čtverečku proto můžeme vyjádřit v invariantním vektorovém tvaru:

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = (\nabla \times \vec{C})_n dS = (\nabla \times \vec{C}) \cdot n dS. \quad (16.5.8)$$

Náš výsledek zní: cirkulace jakéhokoliv vektoru  $\vec{C}$  po obvodu infinitezimálního čtverečku je rovna normálové (vzhledem k rovině, v níž leží čtvereček) složce vektoru rot  $\vec{C}$  vynásobené plošným obsahem čtverečku.

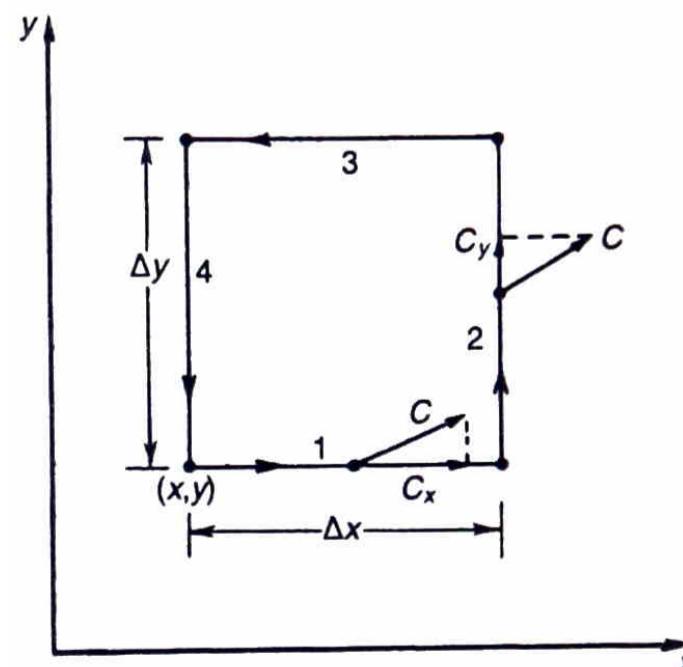
Cirkulaci po jakékoliv uzavřené křivce  $\Gamma$  je možné nyní lehce uvést do souvislosti s rotací vektorového pole. Křivku „vyplníme“ nějakou vhodnou plochou  $S$  (obr. 16.5.2) a vypočítáme cirkulace po obvodech množiny infinitezimálních čtverečků tvořících tuto plochu. Tento součet je možno zapsat jako integrál. Naším výsledkem je velmi užitečná věta, nazvaná Stokesova věta (podle G. G. Stokese).

$$\text{Stokesova věta: } \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{C})_n dS. \quad (16.5.9)$$

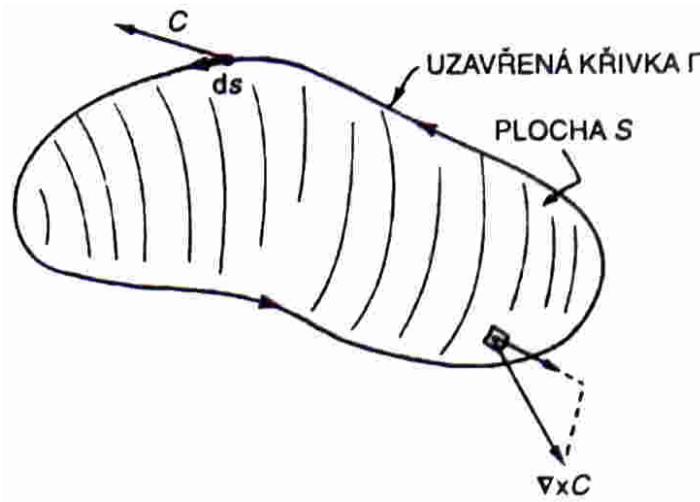
kde  $S$  je jakákoli plocha ohraničená křivkou  $\Gamma$ .

Nyní musíme něco říci o znaménkové konvenci. Na obr. 16.5.1 směřuje osa  $z$  k vám v „obyčejné“, tj. pravotočivé soustavě. Kdybychom náš křivkový integrál počítali při kladné orientaci oběhu, zjistili bychom, že cirkulace je rovna  $z$ -ové složce vektoru  $\nabla \times \vec{C}$ . Kdybychom postupovali opačným směrem, dostali bychom opačné znaménko. Jak tedy budeme obecně vědět, který směr zvolit za kladný pro normálovou složku vektoru  $\nabla \times \vec{C}$ ? Kladná normála musí souvisej se smyslem rotace vždy tak, jak je to na obr. 16.5.1. Obecný případ je vyznačen na obr. 16.5.2.

Jedním ze způsobů, jak si tento vztah zapamatovat, je *pravidlo pravé ruky*. Přiložíte-li pravou ruku podél křivky  $\Gamma$  tak, že prsty ukazují kladný smysl  $d\vec{s}$ , palec ukazuje směr kladné normály k ploše  $S$ .



**Obrázek 16.5.1.:** Výpočet cirkulace  $C$  po obvodu malého čtverečku



**Obrázek 16.5.2.:** Cirkulace  $\vec{C}$  po  $\Gamma$  je rovna plošnému integrálu normálové složky vektoru  $\nabla \times \vec{C}$

## 16.6. Pole s nulovou rotací a divergencí

Nyní bychom se rádi zabývali některými důsledky našich nových vět. Nejdřív vezmeme příklad vektoru, jehož rotace je všude rovna nule. Pak je podle Stokesovy věty jeho cirkulace po každé křivce také rovna nule. Z toho vyplývá, že zvolíme-li na uzavřené křivce dva body (1) a (2) (obr. 16.6.1), křivkový integrál tangenciální složky z (1) do (2) nezávisí na tom, po které ze dvou možných druh se vypočítá. Můžeme udělat závěr, že integrál z (1) do (2) bude záviset pouze na poloze těchto bodů, tj. je pouze nějakou funkcí polohy. Stejnou logiku jsme použili v kapitole 13, když jsme dokázali, že když je integrál nějaké veličiny po uzavřené dráze vždy roven nule, lze jej vyjádřit jako rozdíl funkce polohy dvou bodů. Tento fakt nám umožnil zavést pojmenování potenciálu. Dále jsme dokázali, že vektorové pole je gradientem této potenciálové funkce (viz vztah 13.1.1).

Z toho vyplývá, že každé vektorové pole s nulovou rotací je rovno gradientu nějaké skalární funkce. To je užitečný poznatek: je-li  $\nabla \times \vec{C} = 0$ , existuje skalární pole  $\Psi$  (psí), že  $\vec{C} = \nabla \Psi$ . Tento zvláštní druh vektorového pole tedy můžeme, chceme-li, popsat pomocí skalárního pole.

Ukážeme ještě něco. Předpokládejme, že máme libovolné skalární pole  $\varphi$  (fí). Vytvoříme-li jeho gradient  $\nabla \varphi$ , musí být integrál tohoto vektoru po jakémkoliv uzavřené křivce roven nule. Jeho křivkový integrál z bodu 1 do bodu 2 bude  $\varphi(2) - \varphi(1)$ . Představují-li 1 a 2 tentýž bod, bude podle věty 1 (vztah 16.1.8) křivkový integrál roven nule:

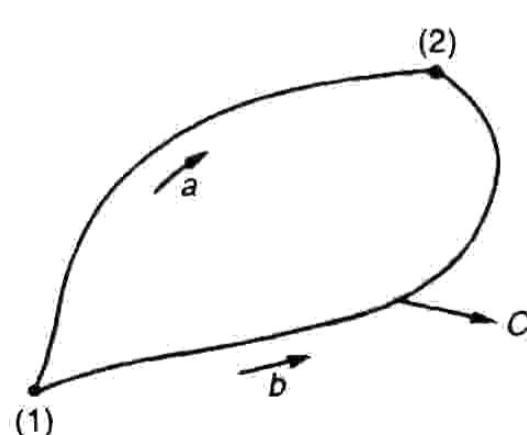
$$\int_{\text{jakákoliuzavřená křivka}} \nabla \times (\nabla \varphi) dS = 0 \quad (16.6.1)$$

pro jakoukoliv plochu. Je-li tento integrál roven nule pro každou plochu, musí být roven nule i jeho integrand. Vždy tedy platí

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (16.6.2)$$

Tentýž výsledek jsme dokázali v článku 15.8 pomocí vektorové algebry.

Nyní se podívejme na zvláštní případ, kdy malou uzavřenou křivku  $\Gamma$  vyplníme velkou plochou  $S$ , jako na obr. 16.6.2. Rádi bychom se vlastně dozvěděli, co se stane, když se uzavřená křivka „scvrkně“ na bod, takže ohrazení plochy zmizí, tj. plocha se stane uzavřenou. Je-li vektor  $\vec{C}$  všude konečný, musí se při „scvrkávání“ křivky  $\Gamma$  křivkový integrál po  $\Gamma$  blížit nule (integrál je přibližně přímo úměrný délce  $\Gamma$  která se blíží nule). Podle Stokesovy věty se musí plošný integrál veličiny  $(\nabla \times \vec{C})_n$  také blížit nule. Když plochu uzavíráme, jako bychom přidávali příspěvky, které postupně



**Obrázek 16.6.1.:** Je-li  $\nabla \times \vec{C}$  rovno nule, cirkulace po uzavřené křivce  $\Gamma$  je také rovna nule. Křivkový integrál  $\vec{C} \cdot d\vec{s}$  z (1) do (2) po křivce  $a$  proto musí být stejný jako tentýž křivkový integrál po křivce  $b$ .

vyrůší to, co bylo předtím. Dospěli jsme k nové větě

$$\oint_{\text{jakákoliuzavřená křivka}} (\nabla \times \vec{C})_n d\vec{S} = 0 \quad (16.6.3)$$

Nyní je to zajímavé, neboť jednu větu o plošném integrálu uzavřenou plochou už máme. Takový plošný integrál je podle Gaussovy věty (vztah 16.3.8) roven objemovému integrálu divergence vektorového pole. Z Gaussovy věty použité na vektor  $\nabla \times \vec{C}$  vyplývá

Z toho usuzujeme, že druhý integrál musí být též roven nule:

$$\int_{\text{jakákoliobjem}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) dV = 0 \quad (16.6.4)$$

To také platí pro každé vektorové pole  $\vec{C}$ . Protože však rovnost (16.6.4) je správná pro každý objem, musí platit, že v každém bodě prostoru je integrand roven nule. Dostáváme, že vždy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0. \quad (16.6.5)$$

To je však stejný výsledek, jaký jsme dostali v článku 15.8 z vektorové algebry. Nyní začínáme chápát, jak jedno souvisí s druhým.

$$\int_{\text{uzavřená plocha}} (\nabla \times \vec{C})_n d\vec{S} = \int_{\text{objem uvnitř plochy}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) dV. \quad (16.6.6)$$

## 16.7. Shrnutí

Shrňme, co jsme se dozvěděli o vektorovém počtu. Skutečně významné výsledky kapitol 15 a 16 jsou tyto:

1. Operátory  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  a  $\frac{\partial}{\partial z}$  možno považovat za tři složky vektorového operátoru:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (16.7.1)$$

Zachází-li se s tímto operátorem jako s vektorem, vzorce, které pro něj vyplývají z vektorové algebry, jsou správné.

2. Rozdíl hodnot skalárního pole ve dvou bodech je roven křivkovému integrálu tangenciální složky gradientu tohoto skaláru po jakémkoliv křivce spojující oba body:

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla \Psi \cdot d\vec{s} \quad (16.7.2)$$

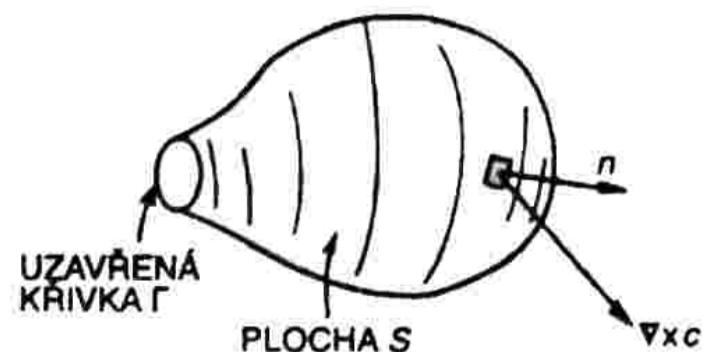
jakákoli křivka od (1) do (2)

3. Plošný integrál normálové složky libovolného vektoru po uzavřené ploše je roven integrálu divergence tohoto vektoru přes vnitřní objem ohraničený plochou:

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad (16.7.3)$$

4. Křivkový integrál tangenciální složky libovolného vektoru po uzavřené křivce je roven plošnému integrálu normálové složky rotace tohoto vektoru po jakémkoliv ploše, která je touto křivkou ohrazena:

$$\int_S \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int (\nabla \times \vec{C}) \cdot \vec{n} dS. \quad (16.7.4)$$



**Obrázek 16.6.2.:** Přechodem k limitnímu případu uzavřené plochy zjistíme, že plošný integrál veličiny  $(\nabla \times \vec{C})_n$  musí konvergovat k nulové hodnotě.

## 16.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury

Záměrem této „názorné exkurze“ do teorie pole je poskytnout náhled s využitím animací. Zopakujme že, vektor je veličina, která určuje nejen velikost, ale i směr v prostoru. Vektory tedy používáme k popisu fyzikálních veličin, jako je např. rychlosť, hybnosť, zrychlení nebo síla působící na objekt. Nicméně, pokud se pokoušíme popsat systém, který se skládá z velkého počtu objektů (např. pohybující se voda, sníh, děšť,...), musíme přiřadit vektor každému samostatnému objektu. Například v každém okamžiku můžeme jakékoli sněhové vločce přiřadit vektor rychlosti, který charakterizuje její pohyb. Padající sníh je příkladem diskrétního, tj. nespojitého prostředí.

Na druhou stranu, jestliže chceme analyzovat pohyb tekutiny, musíme vektor rychlosti přiřadit v každém okamžiku každé částečce tekutiny. Tako budou vektory popisovat směr a velikost rychlosti v každém čase a v každém bodě prostoru. Soubor všech vektorů rychlosti nazveme *vektorovým polem rychlostí*. Nyní je jasné podstatný rozdíl mezi vektorovým a skalárním polem tj., že vektorové obsahuje informaci jak o velikosti, tak i o směru veličiny v každém časovém okamžiku pro každý bod v prostoru, zatímco skalární pouze udává velikost dané veličiny v každém čase a v každém bodě prostoru. Příkladem spojitého prostředí je např. proudění vzduchu.

Obecné vektorové pole  $\vec{F}(x, y, z)$  můžeme napsat ve tvaru:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (16.8.1)$$

kde jednotlivé komponenty jsou *skalární pole*. Pro ilustraci vlastností vektorových polí použijeme tekutinové pole, protože vizualizace takových typů vektorových polí jsou nejjednodušší.

Zobrazení vektorových polí je provedeno pomocí šumové textury, která je lokálně korelována se směrem vektorového pole. Obdobné zobrazení lze přirozeným způsobem realizovat i experimentálně. Rozházíme-li semínka trávy v silném elektrickém poli, začnou se orientovat delší osou rovnoběžně se směrem silokřivek pole. Poskytnou nám tím hustý soubor vzorků zobrazujících směry a tedy i tvar pole. Platí tedy, že lokální směry polí jsou v souhlase se směry šumové textury diagramu. Šumová textura umí poskytnout mnoho informací o prostorové struktuře pole.

První animace 16.8.1 znázorňuje *divergující tok* tekutiny, šumovou texturou, jejíž směr je v korelace se směrem tohoto toku. Animace na obr. 16.8.2 zobrazuje jinou třídu chování toku tekutiny - *cirkulaci, víření*. Kapalina se pohybuje jednoduše v kruzích, nic zde nevzniká ani nezaniká (nemá zdroj ani propad).

Na animaci 16.8.3 je zřídko v blízkosti menší výpusti (propadu), zatímco animace 16.8.4a znázorňuje dvě zřídla nestejně síly. Tekutinové pole může mít více než jeden střed vříjení.

Na animaci 16.8.4b je ukázán tok pole se dvěma víry, cirkulacemi. Toky víří v opačných směrech a jeden je silnější než druhý. Na animaci 16.8.4c máme stejnou situaci, ale směry obou vírů jsou stejné.

Na animaci 16.8.5a je ukázán konstantní tok klesající dolů, který se vzájemně ovlivňuje se zřídlem. Zdroj je částečně schopen téci vzhůru proti proudu padající tekutiny, ale nakonec je také stržen a otočen směrem dolů.

Podobně na animaci 16.8.5b je znázorněn homogenní tok směrující dolů, interagující s tokem cirkulujícím proti směru hodinových ručiček. Otáčivý tok je schopen téci kousek proti proudu, ale nakonec je stržen silnějším tokem směrem dolů.

Konečně na animaci 16.8.5c jsou ukázány oba toku pole, jak vír, tak i zdroj (jak rotace, tak také divergence vektorového pole jsou nenulové). Jakékoli vektorové pole lze zapsat jako součet nevírových částí (nulová rotace) a nedivergujících (nezřídlových, nezdrojových) částí (zádná zřídla ani propady částic). V našem studiu elektromagnetismu uvidíme, že statické elektrické pole je nevírové (tj. vypadá jako na animacích 16.8.1, 16.8.3, 16.8.4a a 16.8.5a) a statické magnetické pole je nedivergující, nezdrojové (tj. podobá se animacím 16.8.2, 16.8.4b, 16.8.4c a 16.8.5b). Jenom v případech časově proměnného elektrického pole můžeme pozorovat, že má elektrické pole obě vlastnosti, tj. je jak zdrojové, tak i vírové, také vypadá jako na animaci 16.8.5c. Narozdíl od pole elektrického je pole magnetické vždy nezdro-

**Obrázek 16.8.2.:** Proudové pole je vytváreno pouze výrem; je bez zřídla, tekutina se pohybuje po kružnicích a nedochází ani ke vzniku, ani k zániku částic tekutiny

**Obrázek 16.8.3.:** Proudové pole je složeno ze zřídla a z propadu (tzv. proudový dipól); v okolí zřídla a propadu směřují proudnice vždy od zřídla směrem k propadu

jové (nedivergentní), a to i v časově proměnných situacích. To znamená, že magnetické pole se vždy podobá modelům z animacím 16.8.2, 16.8.4b, 16.8.4c a 16.8.5b.

(a) Tok tekutiny s dvěma různě silnými zřídly

(b) Tok tekutiny s dvěma opačně orientovanými víry

**Obrázek 16.8.4.:** Znázornění proudového pole pomocí animací využívající šumové textury, která je v reálném čase deformačně deformována, aby znázornila tok tekutiny v různých místech. Ze dvou různě silných zřídel v různých místech vznikají proudnice, které se pohybují směrem od zřídla. V místech, kde proudnice se stýkají, se proudnice mimo sebe vymezují. Směr rotace jednoho víru je v opačném směru než druhého. Směr rotace obou vírů je v tomto případě shodný

**Obrázek 16.8.1.:** Proudové pole má zřídko v počátku souřadnic a proudnice od něho směřují radiálně

(a) Zřídkání a homogenní tok

(b) Víření a homogenní tok

(c) Tok tekutiny s vírem a zřídlem

**Obrázek 16.8.5.:** Znázornění proudového pole pomocí animací využívající šumové textury, která je v reálném čase deformována ve směru rychlostního pole: a) proudové pole je vytvářeno zřídlem umístěným v homogenním konstantním toku, který míří shora dolů (tzv. Rankinovo polotělo, Rankinův ovál); b) proudové pole je složeno z víru a homogenního toku směřujícího shora dolů; c) proudové pole je vytvářeno kombinací víru a zřídla

# 17. Elektrostatika

## Obsah

17.1. Statika . . . . .	71
17.2. Coulombův zákon, superpozice . . . . .	72
17.3. Elektrický potenciál . . . . .	72
17.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . . . . .	74
17.5. Tok pole $\vec{E}$ . . . . .	74
17.6. Gaussův zákon. Divergence pole $\vec{E}$ . . . . .	75
17.7. Pole nabité koule . . . . .	76
17.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy . . . . .	77

## 17.1. Statika

[FLMoo, s. 63] Nyní začneme s podrobným studiem teorie elektromagnetismu. Celý elektromagnetismus je obsažen v Maxwellových rovnicích.

Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17.1.2)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \quad (17.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (17.1.4)$$

Situace popsané těmito rovnicemi mohou být velice složité. Nejdříve budeme uvažovat o poměrně jednoduchých situacích a učit se, jak s nimi zacházet. Složitější situace probereme až potom. Nejsnáze se pracuje ve statickém případě<sup>1</sup>, kdy nic nezávisí na čase. Tehdy mají všechny náboje trvale pevnou polohu v prostoru anebo, pohybují-li se, pak pouze jako ustálený proud v obvodu (takže se  $\rho$  a  $\vec{j}$  v čase nemění). V těchto podmírkách všechny členy, které jsou časovými derivacemi pole, jsou rovny nule a Maxwellovy rovnice získají tento tvar:

Elektrostatika:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.1.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.1.6)$$

Magnetostatika:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (17.1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (17.1.8)$$

Na soustavě těchto čtyř rovnic si všimněte zajímavé věci. Soustavu lze rozdělit na dva páry rovnic. Přitom elektrické pole  $\vec{E}$  se objevuje pouze v prvních dvou a magnetické pole  $\vec{B}$  pouze v druhých dvou rovnicích soustavy. Obě pole spolu vzájemně nesouvisí. Znamená to, že *dokud jsou proudy a náboje statické, jsou elektřina a magnetizmus oddělené jevy*. Vzájemná závislost  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  se neobjeví, pokud nedochází k takovým změnám nábojů a/nebo proudů jako při nabíjení kondenzátoru a/nebo při pohybu magnetu.  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  budou na sobě navzájem záviset pouze v případě dostatečně rychlých změn, když v Maxwellových rovnicích dostanou význam časové derivace.

Podíváte-li se na rovnice statiky, uvidíme, že studium obou těchto předmětů, které nazýváme elektrostatika a magnetostatika, je ideální pro seznámení se s matematickými vlastnostmi vektorových polí. Elektrostatika je čistým příkladem vektorového pole s *nulovou rotací a nenulovou divergencí*. Magnetostatika je čistým příkladem pole s *nulovou divergencí a nenulovou rotací*. Častější, a snad si myslíte, že i lepší, způsob přednášení teorie elektromagnetismu je začít nejdřív elektrostatikou, a tak se použít o divergenci. Magnetostatika a rotace budou probrány později. Poté se elektřina a magnetizmus spolu zkombinují. My jsme se rozhodli, začít úplnou teorií vektorového počtu. Nyní ji budeme aplikovat na speciální případ, na elektrostatiku, tj. na pole  $\vec{E}$  dané prvním párem rovnic (17.1.5) a (17.1.6).

Začneme nejjednoduššími situacemi, tedy těmi, v nichž jsou dány polohy všech nábojů. Kdybychom měli studovat elektrostatiku pouze na této úrovni (což budeme dělat ve dvou následujících kapitolách), bylo by to velmi jednoduché, téměř banální. Jak uvidíte, vše je možné získat z Coulombova zákona a několika integrací. V mnoha reálných elektrostatických úlohách však zpočátku nevíme, kde náboje jsou. Víme pouze, že se mezi sebou rozdělily podle vlastnosti látky. Polohy, jež náboje zaujaly, závisí na poli  $\vec{E}$ , a to zase závisí na polohách nábojů. Tím se věci značně komplikují. Umístíme-li například do blízkosti vodiče nebo izolátoru nabité těleso, elektrony a protony ve vodiči nebo v izolátoru se přemístí. Hustota náboje  $\rho$  v rovnici (17.1.5) pak bude mít jednu část, kterou určíme z velikosti přeneseného náboje, ale i další části, pocházející od nábojů, které se přemístily ve vodiči. Je nutné započítat všechny náboje. Přitom je možné dospět k některým závludným a zajímavým problémům. Ačkoli se má tato kapitola zabývat elektrostatikou, její hezčí a náročnější partie neobsahne. Budeme v ní rozebírat situaci, kdy polohy všech nábojů můžeme pokládat za známé. Přirozeně, měli byste být schopni zvládnout tuto situaci dřív, než se pokusíte řešit složitější problémy.

<sup>1</sup>Vlastně stacionární případ. O elektrostatice mluvíme obyčejně tehdy, když jsou náboje nehybné.

## 17.2. Coulombův zákon, superpozice

[FLMoo, s. 65] Bylo by logické vyjít z rovnic (17.1.5) a (17.1.6). Jednodušší však bude, začneme-li někde jinde a vrátíme se k této rovnici. Výsledky budou ekvivalentní. Začneme zákonem, o němž jsme již hovořili dříve, tzv. *Coulombovým zákonem*. Podle něho působí mezi dvěma nepohybujícími se náboji síla, která je přímo úměrná součinu nábojů a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti mezi nimi. Síla má směr přímky spojující oba náboje.

$$\text{Coulombův zákon} \quad \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = \vec{F}_2, \quad (17.2.1)$$

kde  $\vec{F}_1$  je síla působící na náboj  $q_1$ ,  $\vec{e}_{12}$  je jednotkový vektor směrující od  $q_2$  k  $q_1$  a  $r_{12}$  je vzdálenost mezi  $q_2$  k  $q_1$ . Síla  $\vec{F}_2$  působící na náboj  $q_2$  je stejně velká jako  $\vec{F}_1$ , ale má opačný směr.

Konstanta úměrnosti se z historických důvodů píše jako  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ . V soustavě jednotek SI, kterou používáme, je rovna přesně  $10^{-7} c^2$  ( $10 \cdot 10^{-7}$ -krát druhá mocnina rychlosti světla ve vakuu). Protože rychlosť světla ve vakuu je přibližně  $10 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ , konstanta má hodnotu zhruba  $9 \cdot 10^9 \text{ N F}^{-1}$  (metr/farad) a její rozdíl vzhledem k základním veličinám soustavy SI je  $\text{m}^3 \text{kgs}^{-4} \text{A}^{-2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} &= 10^{-7} c^2 && \dots \text{z definice} \\ &= 9,0 \cdot 10^9 && \dots \text{z experimentu} \end{aligned}$$

Možné způsoby vyjádření rozdílu konstanty jednotky:

- $\text{m F}^{-1}$ ,
- nebo  $\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$ ,
- nebo  $\text{m}^3 \text{kgs}^{-4} \text{A}^{-2}$ ,
- nebo  $\text{V m C}^{-1}$ .

Jde-li o víc než dva náboje - a pouze takové případy jsou opravdu zajímavé - musíme Coulombův zákon doplnit ještě jedním přirodním zákonem: síla působící na jakýkoliv náboj je vektorovým součtem Coulombových sil pocházejících od všech ostatních nábojů. Tento zákon se nazývá *princip superpozice*. To je vše, co se týká elektrostatiky. Kombinujeme-li Coulombův zákon a princip superpozice, není nic víc třeba. Rovnice (17.1.5) a (17.1.6) - rovnice elektrostatiky - neříkají nic více, nic méně.

Při používání Coulombova zákona je vhodné zavést pojem elektrického pole. Říkáme, že pole  $\vec{E}(1)$  je rovno síle působící na náboj  $q_1$  (ze strany všech ostatních nábojů) a připadající *na jednotku náboje* (tj. vektor působící síly, dělený velikostí náboje ( $q_1$ )). Vydělíme-li rovnost (17.2.1) ( $q_1$ ), dostaneme pro účinek nábojů jiných než ( $q_1$ ), že

$$\vec{E}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} \quad (17.2.2)$$

Chápeme to tak, že  $\vec{E}(1)$  udává cosi pro bod 1 i tehdy, kdyby tam náboj  $q_1$  nebyl - za předpokladu, že všechny ostatní náboje zachovají své původní polohy. Říkáme, že  $\vec{E}(1)$  je elektrické pole v bodě 1.

Elektrické pole  $\vec{E}(1)$  je vektor, takže rovnici (17.2.2) myslíme ve skutečnosti tři

rovnice pro každou složku jednu. Explicitně vypíšeme x-ovou složku, pro kterou z rovnice (17.2.2) vyplývá, že

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (17.2.3)$$

Podobně pro ostatní složky.

Je-li víc nábojů, je pole  $\vec{E}$  v nějakém bodě 1 součtem příspěvků od každého z ostatních nábojů. Každý člen součtu bude mít tvar (17.2.2), resp. (17.2.3). Bude-li  $q_j$  označovat velikost  $j$ -tého náboje a  $\vec{r}_{1j}$  je vektor posunutí z polohy  $q_j$  do bodu 1, píšeme

$$\vec{E}(1) = \sum_{j=1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \vec{e}_{1j} \quad (17.2.4)$$

což, samozřejmě, znamená, že

$$E_x(x, y, z) = \sum_{j=1} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x_1 - x_j}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (17.2.5)$$

a analogicky pro další složky.

Často je pohodlnější nebrát v úvahu fakt, že náboje existují jako diskrétní objekty - protony a elektrony - a pokládat je za rozptýlené v nějakém spojitém útvaru anebo, jak se to nazývá, v nějakém „rozdelení“. Tento přístup je v pořádku, pokud nás nezajímá, co se děje ve velmi malých rozmezích. Rozdelení náboje charakterizujeme „*husotou náboje*“  $\varrho(x, y, z)$ . Nachází-li se v malém objemu  $\Delta V_2$  v okolí bodu 2 množství náboje  $\Delta q_2$ , pak je  $\varrho$  definováno vztahem

$$\Delta q_2 = \varrho(2) \Delta V_2. \quad (17.2.6)$$

Při používání Coulombova zákona při takovém přístupu nahradíme sumy ve vztazích (17.2.4) a (17.2.5) integrály přes všechny objemy obsahující náboje. Pak bude platit

$$\vec{E}(1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho(2) \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2 \quad (17.2.7)$$

Někteří lidé píšou raději

$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

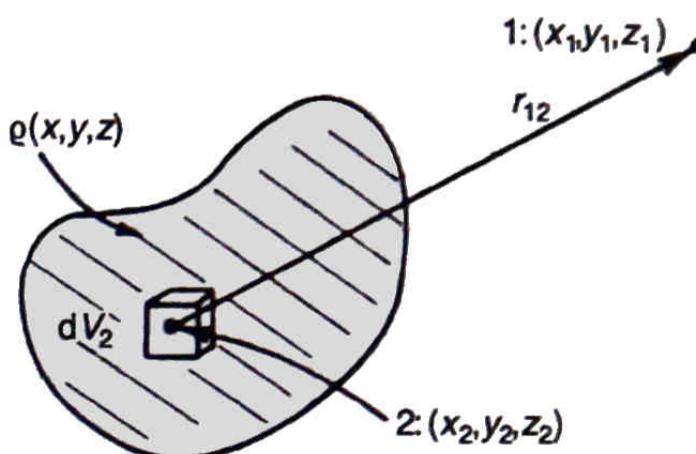
kde  $\vec{r}_{12}$  je vektor posunutí z 2 do 1 (obr. 17.3.1). Integrál udávající  $\vec{E}$  je pak zapsán takto

$$\vec{E}(1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho(2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dV_2 \quad (17.2.8)$$

Chceme-li pomocí těchto integrálů něco vypočítat, musíme je obvykle podrobně rozepsat. Pro x-ovou složku rovností (17.2.7) nebo (17.2.8) bychom pak psali

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{celý prostor}} \varrho(x_2, y_2, z_2) \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}} dx_2 dy_2 dz_2 \quad (17.2.9)$$

Tento vzorec nebudeme používat často. Napsali jsme jej sem pouze proto, abychom zdůraznili fakt, že jsme úplně vyřešili všechny ty elektrostatické úlohy, ve



Obrázek 17.2.1.: Elektrické pole  $\vec{E}_v$  bodě 1 nějakého rozdelení nábojů získáme integrálem přes toto rozdelení. Bod 1 se může nacházet i uvnitř rozdelení

kterých známe polohy všech nábojů. Jsou dány náboje. Jaká jsou pole? Odpověď: vypočtěte tento integrál. Nic víc k tomu není potřeba; pouze výpočet složitých trojrozměrných integrálů - přesně vztato, je to práce pro počítač.

Pomocí našich integrálů můžeme najít pole vytvářená nabitym rovinným nebo lineárním útvarem, nabité kulovou plochou anebo jiným udaným rozdelením náboje. Je důležité uvědomit si, že i když budeme kreslit siločáry, hovořit o potenciálech nebo počítat divergence, výsledek už máme. Závisí pouze na tvaru tohoto integrálu. Někdy je snadnější jej vypočítat nějakým důvtipným trikem než jeho skutečným výpočtem. Ovládat takovéto postupy však vyžaduje naučit se mnohé neobvyčejné věci. V praxi je možná jednodušší nesnažit se dělat chytrého, a namísto toho vypočítat vždy integrál přímo. I přesto se však nyní pokusíme být v této záležitosti důvtipnými a budeme pokračovat analýzou některých jiných vlastností elektrického pole.

## 17.3. Elektrický potenciál

[FLMoo, s. 66] Nejdříve probereme pojem elektrického potenciálu, který souvisí s prací vykonanou při přenášení náboje z jednoho bodu do druhého. Mějme nějaké rozdelení náboje, které vytváří elektrické pole. Ptejme se, kolik práce je třeba vynaložit na přenos malého náboje z jednoho místa na druhé. Práce, která se

vykonává přenášením náboje po nějaké dráze proti elektrickým silám, je rovna záporně vzátečnému integrálu po této dráze ze složky elektrické síly ve směru pohybu.

Přenášíme-li náboj z bodu  $a$  do bodu  $b$ , bude platit

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde  $\vec{F}$  je elektrická síla působící na náboj v každém bodě a  $d\vec{s}$  je diferenciální vektor posunutí podél dráhy (obr. 17.3.1).

Pro naše účely je zajímavější uvažovat práci, která by se konala při přenášení jedné jednotky náboje. Tehdy síla působící na náboj je číselně rovna intenzitě elektrického pole. Označíme-li práci vykonanou proti elektrickým silám v tomto případě  $W_{jedn}$  můžeme psát

$$W_{jedn} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (17.3.1)$$

To, co dostaneme pomocí takového integrálu, obecně závisí na dráze, po které integrujeme. Jestliže by integrál (17.3.1) závisel na dráze od  $a$  do  $b$ , mohli bychom z pole získávat práci přenášením náboje do  $b$  po jedné dráze a pak zpět do  $a$  po jiné. Do  $b$  bychom šli po dráze, pro kterou je  $W$  menší, a zpět po jiné dráze, odčerpávající víc práce, než vkládáme.

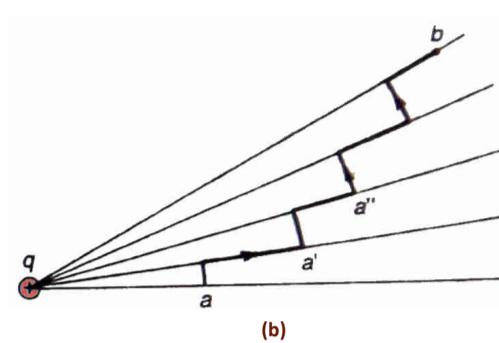
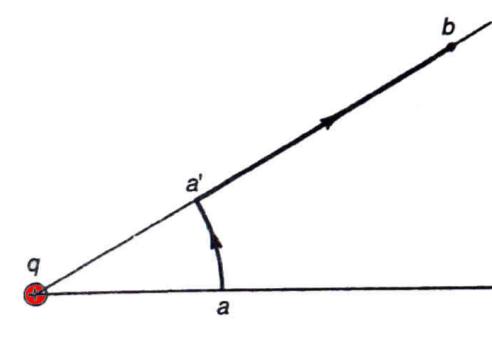
Získávat energii z pole - na tom není v principu nic nemožného. Opravdu se setkáme s poli, kde to možné je. Může se stát, že když pohybujete nábojem, působí silami na jinou část „mechanizmu“. Pohybujete-li se mechanizmus proti síle, ztrácí energii, přičemž celková energie v přírodě se nemění. Avšak v elektrostatice takový „mechanismus“ není. Víme, jaké síly působí zpětně na zdroje pole. Jsou to coulombovské síly působící na náboje, které jsou původci pole. Mají-li ostatní náboje v prostoru pevné polohy, což předpokládáme pouze v elektrostatice, nevykonávají tyto zpětné síly při působení práci. Neexistuje žádný způsob, jak z nich získat energii, samozřejmě za předpokladu, že v elektrostatických situacích platí princip zachování energie. Věříme, že platí, ale teď ukážeme, že to musí vyplývat z Coulombova zákona pro sílu.

Uvažujme nejdříve, co se stane v poli vyvolaném jediným nábojem  $q$ . Nechť je bod  $a$  ve vzdálenosti  $r_1$  od  $q$  a bod  $b$  ve vzdálenosti  $r_2$ . Nyní z  $a$  do  $b$  přenesme jiný náboj, který budeme nazývat „zkušebním“ nábojem a jehož velikost zvolíme rovnou jedné jednotce. Začneme s tou dráhou, která je ze všech možných dráh pro výpočet nejjednodušší. Nás zkušební náboj přeneseme nejdřív po oblouku kružnice a pak podél poloměru, jak to znázorňuje obr. 17.3.2a. Najít práci vykonanou na této speciální dráze je dětskou hrou (jinak bychom ji nebyli zvolili). Především vůbec žádná práce se nevykoná na dráze z  $a$  do  $a'$ . Pole je radiální (podle Coulombova zákona), takže jeho intenzita je kolmá na směr pohybu. Dále na dráze z  $a'$  do  $b$  má intenzita pole směr pohybu a mění se jako  $\frac{1}{r^2}$ . Práce vykonaná přenosem zkušebního náboje z  $a$  do  $b$  bude

$$-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (17.3.2)$$

Vezměme nyní jinou jednoduchou dráhu, např. takovou, jaká je znázorněná na obr. 17.3.2b. Chvíli vede po oblouku kružnice, potom chvíli radiálně, potom opět po oblouku a potom radiálně atd. Předně, když jdeme po oblouku kružnice, práci nevykonáváme. Když jdeme po radiálním úseku, musíme integrovat  $\frac{1}{r^2}$ . Na prvním radiálním úseku integrujeme z  $r_a$  do  $r_{a'}$ , na druhém úseku z  $r_{a'}$  do  $r_{a''}$  atd. Součet všech těchto integrálů dá totéž jako jediný integrál přímo z  $r_a$  do  $r_b$ . Pro tuto dráhu dostáváme stejný výsledek, jaký jsme dostali v případě první dráhy. Je zřejmé, že tentýž výsledek bychom dostali pro jakoukoliv dráhu, která se skládá z libovolného počtu takovýchto úseků.

Jak to bude v případě hladkých drah? Dostali bychom tentýž výsledek? O této otázce jsme hovořili už ve 13. kapitole 1. dílu. Na základě stejných důvodů, které jsme použili tam, můžeme udělat závěr, že práce vykonaná při přenášení



Obrázek 17.3.2.: Přenášením zkušebního náboje z  $a$  do  $b$  po obou těchto dráhách se koná stejná práce

jednotkového náboje z  $a$  do  $b$  nezávisí na dráze.

$$W_{jedn} = - \int_{a-b}^b \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

jakákoliv  
dráha

Protože vykonaná práce závisí pouze na koncových bodech, je možné ji udat jako rozdíl dvou čísel. Přesvědčíme se o tom následujícím způsobem. Zvolme vztažný bod  $P_0$  a domluvme se, že budeme počítat nás integrál použitím dráhy, která bude vždy procházet bodem  $P_0$ . Nechť  $\varphi(a)$  označuje práci vykonanou proti poli při přechodu z  $P_0$  do bodu  $a$  a  $\varphi(b)$  práci vykonanou při přechodu z  $P_0$  do bodu  $b$  (obr. 17.3.3). Práce vykonaná při přechodu z  $a$  do  $P_0$  (cestou do  $b$ ) je záporně vzaté  $\varphi(a)$ , takže bude platit

$$-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (17.3.3)$$

Protože tu bude vždy vystupovat pouze rozdíl hodnot funkce  $\varphi$  ve dvou bodech, ve skutečnosti nepotřebujeme ani specifikovat polohu bodu  $P_0$ . Jakmile jsme však zvolili nějaký referenční bod, hodnota  $\varphi$  je už určena pro každý bod v prostoru;  $\varphi$  je tedy *skalární pole*. Je funkcí  $x, y, z$ . Tuto skalární funkci nazýváme *elektrostatickým potenciálem* v libovolném bodě.

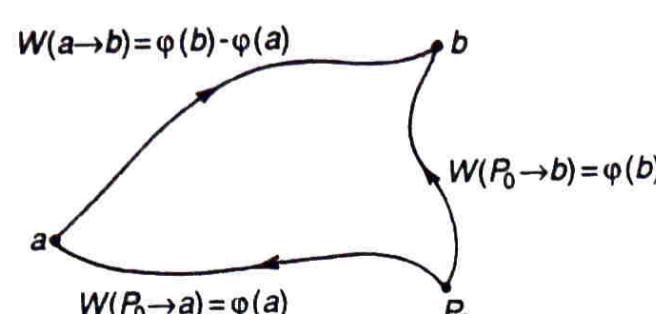
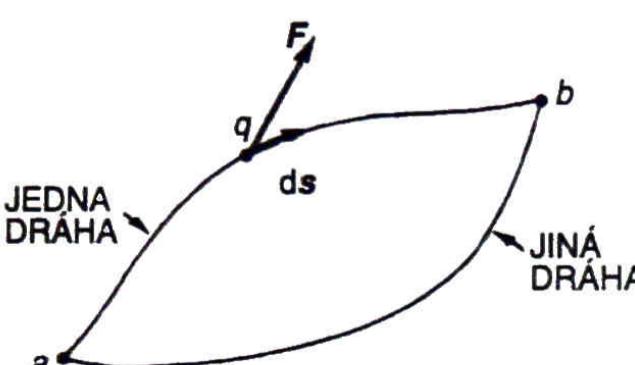
*Elektrostatický potenciál:*

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (17.3.4)$$

Často je pohodlné volit vztažný bod v nekonečnu. V případě jednotlivého náboje nacházejícího se v počátku souřadnicové soustavy pak s ohledem na vztah (17.3.2) pro potenciál  $\varphi$  v nějakém bodě  $(x, y, z)$  dostaneme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (17.3.5)$$

Elektrické pole několika nábojů je možné napsat jako součet elektrického pole



Obrázek 17.3.1.: Práce konaná při přenesení náboje z  $a$  do  $b$  je rovna záporně vzátečnému integrálu ze skalárního součinu  $\vec{F} \cdot d\vec{s}$  po dráze z  $a$  do  $b$

Obrázek 17.3.3.: Práce vykonaná při postupu po jakékoliv dráze z  $a$  do  $b$  je rovna záporně vzaté práci z nějakého bodu  $P_0$  do  $a$  zvětšené o práci z  $P_0$  do  $b$

prvního, druhého, třetího atd. náboje. Integrujeme-li součet, abychom našli potenciál, dostaneme součet integrálů. Každý z těchto integrálů představuje potenciál jednoho z nábojů. Usuzujeme tak proto, že potenciál množiny nábojů je součtem potenciálů jednotlivých nábojů. Princip superpozice platí tedy i pro potenciály. Stejnými úvahami, kterými jsme našli elektrické pole skupiny nábojů a rozdelení nábojů, můžeme dostat úplné vzorce i pro potenciál  $\varphi$  v nějakém bodě, který označíme 1:

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{1j}} \quad (17.3.6)$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2 \quad (17.3.7)$$

Zapamatujte si, že potenciál  $\varphi$  má fyzikální význam: je to potenciální energie, kterou by měl jednotkový náboj, přenesl-li by se z nějakého vzdáleného bodu do daného bodu v prostoru.

#### 17.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$

[FLMoo, s. 70] Kdo potřebuje potenciál  $\varphi$ . Vždyť síly působící na náboje jsou určené hodnotami  $\vec{E}$ -elektrickým polem. Vtip je v tom, že  $\vec{E}$  je možné snadno dostat z  $\varphi$  tak jednoduše jako vypočítat derivaci. Uvažujme dva body, jeden v  $x$  a druhý v  $(x+dx)$ , ale u obou při stejných  $y$  a  $z$ , a ptejme se, jak velká práce se vykoná při přenášení jednotkového náboje z jednoho bodu do druhého. Jde o dráhu podél horizontálně z  $x$  do  $x+dx$ . Vykonaná práce je dána rozdílem potenciálů v obou bodech:

$$\Delta W = \varphi(x+dx, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x.$$

Ale práce vykonaná po téže dráze proti poli je

$$\Delta W = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x \Delta x.$$

Vidíme že,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (17.4.1)$$

Podobně  $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$  - nebo, napsané souborné symbolikou vektorové analýzy,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (17.4.2)$$

Tato rovnice představuje diferenciální tvar vztahu (17.3.4). Jakoukoliv úlohu, v níž jsou dány náboje, je možné řešit výpočtem potenciálu pomocí (17.3.6) nebo (17.3.7) a použitím vztahu (17.4.2) pro výpočet pole. Vztah (17.4.2) souhlasí i s tím, co jsme zjistili o vektorovém počtu: pro každé skalární pole platí

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (17.4.3)$$

Podle vztahu (17.3.7) je skalární potenciál  $\varphi$  dán trojrozměrným integrálem podobným tomu, který jsme měli pro  $\vec{E}$ . Je proto vůbec výhodné počítat  $\varphi$  místo  $\vec{E}$ ? Ano. Pro  $\varphi$  máme jen jeden integrál, zatímco pro  $\vec{E}$  jsou zapotřebí tři integrály, neboť jde o vektor. Kromě toho  $\frac{1}{r}$  je obvykle jednodušší integrovat než  $\frac{x}{r^3}$ . V mnoha praktických případech se ukazuje, že je poněkud jednodušší vypočítat  $\varphi$  a pak najít elektrické pole pomocí gradientu, než počítat tři integrály pro  $\vec{E}$ . Je to čistě praktická záležitost.

Potenciál  $\varphi$  má kromě toho i hlubší fyzikální význam. Ukázali jsme, že  $\vec{E}$  v Coulombově zákoně je odvozeno z  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , když  $\varphi$  je dáno vztahem (17.3.4). Ale z vektorového počtu víme, že je-li  $\vec{E}$  rovno gradientu skalárního pole, pak rot  $\vec{E}$  musí být rovna nule:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.4.4)$$

Toto je však právě naše druhá základní rovnice elektrostatiky (17.1.6). Ukázali jsme tak, že Coulombův zákon definuje pole  $\vec{E}$ , které splňuje tuto podmínu. Dosud je vše v pořádku.

Ve skutečnosti jsme dokázali, že  $\nabla \times \vec{E}$  je rovno nule, dřív než jsme definovali potenciál. Ukázali jsme, že práce vykonaná na uzavřené dráze je rovna nule, tj. že

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

pro každou dráhu. V kapitole 16 jsme se přesvědčili, že pro každé takové pole musí být  $\nabla \times \vec{E}$  všude rovno nule. Elektrické pole v elektrostatice je tedy příkladem pole s nulovou rotací.

Můžeme se pocvičit ve vektorovém počtu tím, že dokážeme tvrzení, že  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , a to výpočtem složek vektoru  $\nabla \times \vec{E}$  pro pole bodového náboje dané vztahem (17.2.2). Bude-li výsledkem výpočtu nula, pak podle principu superpozice bychom dostali nulu pro jakékoli rozdelení náboje.

Je třeba poukázat na důležitou skutečnost. Pro libovolnou radiální sílu nezávisí vykonaná práce na dráze a existuje potenciál. Přemýšlite-li o tom, přesvědčíte se, že všechny úvahy, které jsme provedli výše, abychom ukázali, že integrál práce nezávisí

na dráze, byly postaveny pouze na faktu, že síla jednotlivého náboje je radiální a kulově symetrická. Při těchto úvahách jsme nevyužívali skutečnost, že závislost síly na vzdálenosti je dána vztahem  $\frac{1}{r^2}$ , mohlo by tedy jít o libovolnou závislost na  $r$ . Existence potenciálu a skutečnost, že  $\nabla \times \vec{E}$  je rovna nula, pramení opravdu jen ze symetrie a směru elektrostatických sil. Proto vztahy (17.4.3) nebo (17.4.4), mohou obsahovat pouze část zákonů elektřiny.

#### 17.5. Tok pole $\vec{E}$

[FLMoo, s. 72] Nyní odvodíme rovnici pole, která závisí právě a přímo na skutečnosti, že ve jmenovateli zákona síly vystupuje druhá mocnina vzdálenosti. To, že se pole mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, se někomu zdá být „jedině přirozený“, neboť „je to způsob, kterým se šíří všechno“. Vezměme si světelný zdroj, z něhož vychází světlo: množství světla procházející základnou kužele s vrcholem ve zdroji je stejně bez ohledu na to, jak daleko je základna od zdroje. Tak to musí být, má-li se světelná energie zachovávat. Množství světla připadající na jednotku plochy, tedy intenzita osvětlení, se musí měnit přímo úměrně plošnému obsahu základny kužele, tj. nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Ze stejného důvodu by se zajisté mělo měnit i elektrické pole. Ale nic takového jako „stejný“ důvod neexistuje. Nikdo nemůže říci, že elektrické pole je mírou toku něčeho podobného jako světlo, které se musí zachovávat. Kdybychom měli takový „model“ elektrického pole, v němž by vektor pole udával směr a rychlosť, tj. představoval by tok nějakých drobných vyletujících „kulík“, a kdyby nás model vyžadoval, aby se tyto kulky zachovávaly a žádná by nemohla zmizet, pokud už byla vystřelena, tak bychom řekli, že můžeme nevyhnutelnost zákona nepřímo úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti „pochopit“. Na druhé straně nevyhnutelně musí existovat nějaký matematický způsob, jak tuto fyzikální představu vyjádřit. Kdyby elektrické pole bylo něčím takovým jako zachovávající se vyletující kulky, měnilo by se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, a takové chování bychom byli schopni popsat rovnici - což je čistě matematická záležitost. Není tedy nic špatného na tom, když se této představy podržíme, pokud ovšem nebudeme tvrdit, že elektrické pole se opravdu skládá z kulek, ale budeme si vědomi toho, že používáme model, který nám pomáhá najít správné matematické vyjádření.

Předpokládejme, že jsme si na chvíli představili elektrické pole jako proud něčeho, co se zachovává - všude, tj. mimo místa, kde se nacházejí náboje. (Proudění musí někde začínat.) Představujeme si, že něco, ať už je to cokoliv, vytéká z náboje do okolního prostoru. Byl-li by  $\vec{E}$  vektor takového toku (jako je  $\vec{h}$  v případě tepelného toku), v blízkosti bodového zdroje by se vyznačoval závislostí  $\frac{l}{r^2}$ . Tento model chceme nyní použít k tomu, abychom našli způsob, jak dojít k zákonu nepřímo úměrnosti na druhé mocnině vzdálenosti principiálněji nebo abstraktněji cestou místo toho, aby se prostě konstatovalo: „nepřímo úměrně druhé mocnině“. (Snad se divíte, proč se chceme vyhnout přímému zformulování takového jednoduchého zákona, a místo toho chceme dosáhnout téhož jinou cestou. Ale mějte trpělivost! Ukáže se, že je to užitečné.)

Ptáme se: Jaký je tok pole  $\vec{E}$  ven z libovolné uzavřené plochy v okolí bodového náboje? Nejdříve vezměme jednoduchou plochu, jakou ukazuje obr. 17.5.1.

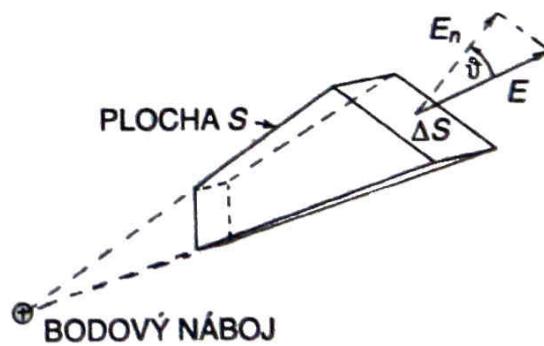
Má-li pole  $\vec{E}$  charakter toku, musí být celkový tok z takové krabičky roven nule. Tento výsledek opravdu dostaneme, rozumíme-li „tokem“ z této plochy plošný integrál normálové složky vektoru  $\vec{E}$ , tj. veličiny, kterou jsme nazvali tokem pole  $\vec{E}$ . V případě radiálních (rovnoběžných se spojnicí k náboji) stěn je normálová složka  $\vec{E}$  nulová. V případě kulových čelních stěn je normálová složka  $E_n$  rovna velikosti vektoru  $\vec{E}$  - se záporným znaménkem u menší a s kladným u větší stěny. Velikost vektoru  $\vec{E}$  klesá jako  $\frac{1}{r^2}$ , ale plošný obsah stěny je přímo úměrný veličině  $r$ , takže jejich součin na  $r$  nezávisí. Tok vektoru  $\vec{E}$  do stěny  $a$  se právě ruší tokem ze stěny  $b$ . Celkový tok z  $S$  je roven nule, což je rovnocenné s tvrzením, že pro tu plochu je

$$\oint_S E_n dS = 0. \quad (17.5.1)$$

Dále ukážeme, že obě koncové plochy mohou být skloněny vzhledem k radiální přímce a integrál (17.5.1) se přitom nezmění. Ačkoli to platí obecně, pro naše účely postačí ukázat, že to platí, jsou-li koncové plochy malé, takže se ze zdroje jeví pod



Obrázek 17.5.1.: Tok vektoru  $\vec{E}$  z plochy  $S$  je roven nule

Obrázek 17.5.2.: Tok vektoru  $\vec{E}$  z plochy  $S$  je roven nule

malým úhlem, přesněji pod infinitezimálním úhlem. Na obr. 17.5.2 vidíme plochu  $S$  s radiálními „stěnami“ a šikmými „konci“. Na obrázku nejsou koncové plochy malé, ale máte si představit podobnou situaci s velmi malými koncovými plochami. Pak bude pole  $\vec{E}$  na každé ploše dostatečně homogenní, abychom mohli pracovat pouze s jeho hodnotou ve středu plochy. Skloníme-li plošku o úhel  $\vartheta$ , její plošný obsah se zvětší  $\frac{l}{\cos \vartheta}$  krát. Ale  $E_n$  složka vektoru  $\vec{E}$  normálová k ploše, se změní úměrně  $\cos \vartheta$ . Součin  $E_n \cdot \Delta S$  se tedy nezmění. Tok z celé plochy  $S$  zůstává nulový.

Nyní se snadno přesvědčíme, že tok z objemu vymezeného jakoukoliv plochou  $S$  musí být roven nule. Každý objem je totiž možné si představit, jako kdyby se skládal z částí, podobných útvaru znázorněnému na obr. 17.5.2. Celá plocha  $S$  se přitom rozdělí do párů koncových plošek, a protože vtoky a výtoky z těchto koncových plošek se v jednotlivých párech navzájem ruší, celkový tok z plochy  $S$  bude roven nule. Tuto představu ilustruje obr. 17.5.3. Dostáváme úplně obecný výsledek, že celkový tok pole  $\vec{E}$  ven z jakékoli plochy  $S$  v poli bodového náboje je roven nule.

Ale pozor! Nás důkaz platí pouze tehdy, neobklopuje-li plocha  $S$  náboj. Co by se stalo, kdyby se bodový náboj nacházel uvnitř plochy? Opět můžeme naši plochu rozdělit na páry plošek, které jsou vymezeny radiálními přímkami procházejícími nábojem tak, jak to ukazuje obr. 17.5.4. Opět jsou tu toky oběma ploškami stejně velké, z týchž důvodů jako dříve, pouze teď mají stejně znaménko. Tok z plochy, která obklopuje náboj, není nulový. Jaký tedy je? Můžeme ho najít malým trikem. Předpokládejme, že náboj „odstraníme“ z „vnitřku“ tím, že ho obalíme malou plochou  $S$  uloženou úplně uvnitř původní plochy  $S$  (obr. 17.5.5a)

Pak se v objemu mezi oběma plochami  $S$  a  $S_1$  žádný náboj nenachází. Celkový tok z tohoto objemu (včetně toku plochou  $S'$ ) je roven nule na základě úvah, jež jsme již uvedli. Z těchto úvah vlastně vyplývá, že tok do objemu plochou  $S_1$  je stejný jako tok z něj ven plochou  $S$ .

Za  $S'$  můžeme zvolit plochu jakéhokoliv tvaru. Zvolme tedy kulovou plochu se středem v náboji (obr. 17.5.5b). Pak dokážeme snadno vypočítat tok touto plochou.

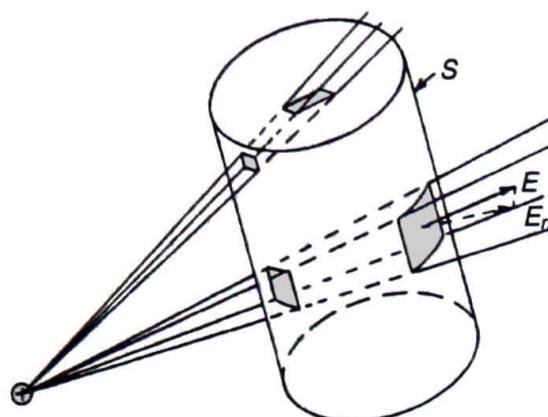
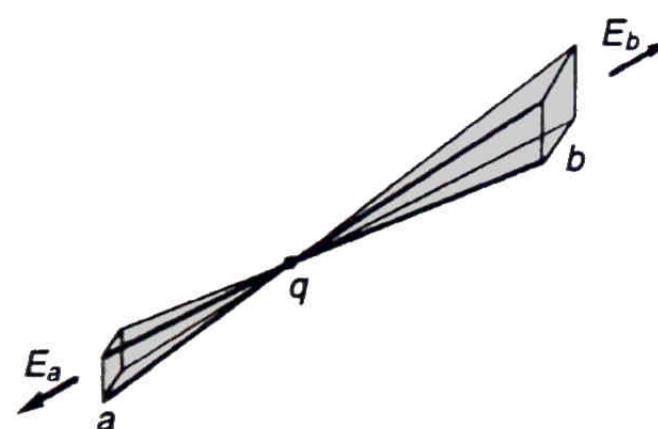
Je-li poloměr malé koule  $r$ , má  $\vec{E}$  všude na jejím povrchu velikost

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

a směr normály k povrchu. Celkový tok  $S'$  dostaneme, vynásobíme-li tuto normálovou složku plošným obsahem plochy  $S'$ :

$$\text{Tok plochou } S' = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (17.5.2)$$

je tedy roven hodnotě, která nezávisí na poloměru koule! Z toho vidíme, že tok ven z plochy  $S$  je také roven  $\frac{q}{\epsilon_0}$  - hodnotě, jež nezávisí na tvaru plochy  $S$ , pokud náboj  $q$  zůstává uvnitř.

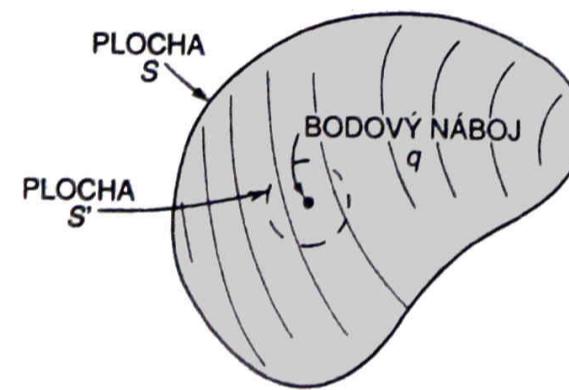
Obrázek 17.5.3.: Každý objem lze považovat za úplně složený z infinitezimálních komolých kuželů. Tok  $\vec{E}$  z jednoho konce kuželového segmentu se rovná zápornému toku z druhého konce. Celkový tok z plochy  $S$  je proto roven nule.

Obrázek 17.5.4.: Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.

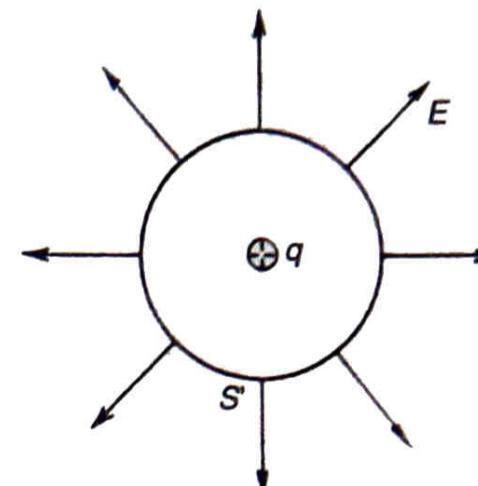
Naše výsledky můžeme napsat takto:

$$\int E_n dS = \begin{cases} 0 & q \text{ vně } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & q \text{ uvnitř } S \end{cases} \quad (17.5.3)$$

Vraťme se k naší analogii s kulkami a podívejme se, zda má smysl. Podle naší věty je celkový tok kulek nějakou plohou roven nule, neobklopuje-li plocha zbraň vystřelující kulky. Je-li zbraň obklopena plochou, atě má jakýkoliv tvar a velikost, počet kulek jí proletující je stejný - určuje jej rychlosť, jakou zbraň kulky vystřeluje. Pro zachovávající se kulky vypadá všechno celkem rozumně. Ale poskytuje nám tento model něco víc, než dostáváme napsáním vztahu (17.5.3)? Nikomu se nepodařilo dosáhnout toho, aby tyto kulky dokázaly něco víc, než zformulovat tento jediný zákon. Kromě toho už nevedou k ničemu, jen k omylům. Proto dnes dáváme přednost čistě abstraktní představě elektromagnetického pole.



(a) Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.

(b) Tok kulovou plochou obsahující uvnitř bodový náboj q je roven  $\frac{q}{\epsilon_0}$ 

Obrázek 17.5.5.

## 17.6. Gaussův zákon. Divergence pole $\vec{E}$

[FLMoo, s. 75] Nás překrásný výsledek, tj. vztah (17.5.3) jsme dokázali pro jediný bodový náboj. Nyní předpokládejme, že jsou dva náboje, náboj  $q_1$  v jednom bodě a náboj  $q_2$  v jiném bodě. Tato úloha vypadá těžší. Elektrické pole, jehož normálovou

složku při toku integrujeme, je polem pocházejícím od obou nábojů, tj. představuje-li  $\vec{E}_1$  elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj  $q_1$  a  $\vec{E}_2$  elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj  $q_2$ , celkové elektrické pole  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Tok každou uzavřenou plochou  $S$  je

$$\oint_S E_{1n} + E_{2n} dS = \oint_S E_{1n} dS + \oint_S E_{2n} dS. \quad (17.6.1)$$

V případě obou nábojů je roven toku vyvolanému prvním nábojem plus tok vyvolaný druhým nábojem. Jsou-li oba náboje na vnější straně  $S$ , tok plochou  $S$  je nulový. Je-li  $q_1$  uvnitř  $S$  a  $q_2$  mimo, první integrál dává  $\frac{q_1}{\epsilon_0}$  a druhý nulu. Obklopuje -li plocha oba náboje, bude každý dávat svůj příspěvek a dostáváme, že tok je  $\frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$ . Obecné pravidlo je zřejmé: celkový tok z uzavřené plochy je roven celkovému náboji uvnitř, dělenému  $\epsilon_0$ .

Nás výsledek představuje důležitý obecný zákon elektrostatického pole, nazvaný **Gaussův zákon**.

$$\int_S E_n dS = \frac{\text{součet nábojů uvnitř}}{\epsilon_0} \quad (17.6.2)$$

jakákoliv  
uzavřená  
plocha  $S$

nebo

$$\int_S E_n dS = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\epsilon_0} \quad (17.6.3)$$

jakákoliv  
uzavřená  
plocha  $S$

kde

$$Q_{\text{uvnitř}} = \sum_{\text{uvnitř } S} q_i. \quad (17.6.4)$$

Popíšeme-li rozmístění nábojů pomocí hustoty náboje  $\rho$ , můžeme to chápout tak, že každý infinitezimální objem  $dV$  obsahuje „bodový“ náboj  $\rho dV$ . Součet všech nábojů pak bude dán integrálem

$$Q_{\text{uvnitř}} = \int_{\substack{\text{objem} \\ \text{uvnitř } S}} \rho dV. \quad (17.6.5)$$

Z našeho odvození vidíme, že Gaussův zákon vyplývá ze skutečnosti, že mocnitél v Coulombově zákoně je roven přesně dvěma. Pole se zákonem  $\frac{1}{r^3}$  nebo jakékoliv pole se zákonem  $\frac{1}{r^n}$ , kde  $n \neq 2$ , by ke Gaussovu zákonu nevedlo. Gaussův zákon tedy není právě ničím jiným než vyjádřením (v odlišném tvaru) Coulombova zákona síly, která působí mezi dvěma náboji. Opravdu, zpětným postupem můžete z Gaussova zákona odvodit Coulombův zákon. Oba tyto zákony jsou zcela ekvivalentní, máme-li na paměti, že síly působící mezi náboji jsou radiální<sup>2</sup>.

Nyní bychom rádi napsali Gaussův zákon pomocí derivací. Abychom to udělali, použijeme Gaussův zákon na povrch infinitezimální krychle. V kapitole 16 jsme ukázali, že tok vektoru  $\vec{E}$  z takového krychle je roven hodnotě  $\nabla \cdot \vec{E}$  vynásobené objemem krychle  $dV$ ! Náboj uvnitř  $dV$  je podle definice roven  $\rho dV$ , takže z Gaussova zákona dostaneme

$$\nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.6.6)$$

Diferenciální tvar Gaussova zákona představuje první z našich fundamentálních rovnic pole v případě elektrostatiky (rovnice 17.1.5). Ukázali jsme tím, že obě rovnice elektrostatiky (rovnice 17.1.5 a 17.1.6) jsou ekvivalentní Coulombovu zákonu síly. Dále se budeme zabývat jedním příkladem použití Gaussova zákona. (Později se dostaneme k mnohem většímu množství takových příkladů.)

## 17.7. Pole nabité koule

[FLMOO, s. 77] Jednou z těžkých úloh, s nimiž jsme se setkali, když jsme studovali teorii gravitace, bylo dokázat, že síla pocházející z pevné koule je na jejím povrchu taková, jako kdyby všechna látka byla soustředěna ve středu koule. Newton po mnoho let svou teorii gravitace nepublikoval, protože si nebyl jistý, zda je toto tvrzení pravdivé. Dokázali jsme jej ve 13. kapitole 1. dílu tak, že jsme vypočítali integrál potenciálu a pak jsme pomocí gradientu našli gravitační sílu. Nyní můžeme tuto větu dokázat jednodušším způsobem. Tentokrát budeme dokazovat jí odpovídající větu pro homogenně elektricky nabité kouli. (Protože zákony elektrostatiky jsou stejné jako zákony gravitace, mohl by být tentýž důkaz proveden i pro gravitační pole.)

Ptáme se: Jaké je elektrické pole  $\vec{E}$  v bodě  $P$ , který se nachází někde mimo kouli s rovnoměrným rozdelením náboje? Protože tam není žádný význačný směr, můžeme předpokládat, že  $\vec{E}$  směřuje od středu koule. Uvažujme myšlenou kulovou plochu, která je koncentrická s nabité koulí a prochází bodem  $P$  (obr. 17.7.1). Tok směrem ven z této plochy je

$$\int E_n dS = E \cdot 4\pi R^2.$$

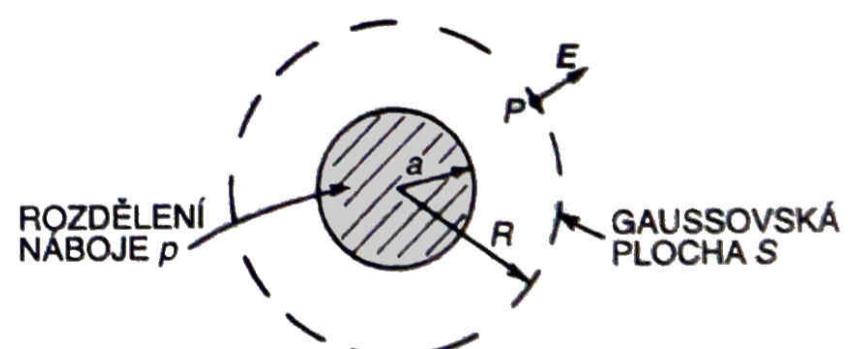
Podle Gaussovy věty je tento tok roven celkovému náboji koule  $Q$  (dělenému  $\epsilon_0$ ):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

neboli

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

což je stejný vzorec, jaký bychom měli pro bodový náboj  $Q$ . Newtonovu úlohu jsme dokázali snáze než pomocí integrálu. To je, pravda, jen zdánlivě jednodušší - nějaký čas vám trvalo, než jste porozuměli Gaussovu zákonu, takže se můžete domnívat, že ve skutečnosti jste ani žádný čas neušetřili. Když však budete používat tuto větu stále častěji, začne se to splácet. Je to otázka efektivnosti.



Obrázek 17.7.1.: Použití Gaussova zákona na odvození pole homogenní nabité koule

<sup>2</sup>A kulové symetrické neboli centrální

## 17.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy

[FLMoo, s. 78] Nyní bychom rádi uvedli geometrický popis elektrostatického pole. Oba zákony elektrostatiky - první, že tok je přímo úměrný náboji uvnitř, a druhý, že elektrické pole je gradiem potenciálu - je rovněž možno interpretovat geometricky. Ilustrujeme to těmito dvěma příklady. Nejdříve mějme pole bodového náboje. Nakreslíme křivky ve směru pole, tj. křivky, jejichž tečny mají všude směr vektoru pole (obr. 17.8.1). Jsou to tzv. siločáry.

V každém bodě ukazují směr elektrického vektoru. Chceme však znázornit i jeho velikost. Můžeme proto zavést pravidlo, že intenzitu elektrického pole bude reprezentovat „hustota“ siločar. Hustotou siločar rozumíme počet siločar připadajících na jednotku plochy v rovině kolmé na siločáry. Pomocí těchto pravidel můžeme vytvořit obraz elektrického pole. V případě bodového náboje se musí hustota siločar zmenšovat podle zákona  $\frac{1}{r^2}$ . Ale plošný obsah kulové plochy kolmé na siločáry při každém poloměru  $r$  vzrůstá s  $r^2$ . Zachováme-li tedy tentýž počet siločar ve všech vzdálenostech od náboje, jejich hustota zůstane přímo úměrná velikosti pole. Stejný počet siločar v každé vzdálenosti můžeme zabezpečit tak, že budeme trvat na tom, aby siločáry byly souvislé, tj. aby siločára, pokud už jednou z náboje vyšla, nikde nekončila. Gaussův zákon vyjádřený jazykem siločar říká, že siločáry mají začínat pouze v kladných nábojích a končit pouze v záporných nábojích. Počet siločar vycházejících z náboje  $q$  musí být roven  $\frac{q}{\epsilon_0}$ .

Podobný geometrický obraz můžeme nyní najít i pro potenciál  $\varphi$ . Nejjednodušší způsob jak znázornit potenciál, je nakreslit plochy, na nichž je  $\varphi$  stálé. Říkáme jim ekvipotenciální plochy (hladiny), tj. plochy se stejným potenciálem. Jaký je geometrický vztah ekvipotenciálních ploch k siločáram? Elektrické pole je gradientem potenciálu. Gradient udává směr nejrychlejší změny potenciálu, a proto je kolmý na ekvipotenciální plochu (v každém bodě). Kdyby totiž  $\vec{E}$  nebylo kolmé na ekvipotenciální plochu, mělo by v ní nenulovou složku. Pak by se potenciál na ploše měnil a nebyla by ekvipotenciální plochou. Ekvipotenciální plochy tedy musí všude svírat se siločárami elektrického pole pravý úhel.

V případě osamoceného bodového náboje jsou ekvipotenciálními plochami kulové plochy se středem v náboji. Na obr. 17.8.1 jsme ukázali řez těmito kulovými plochami procházejícími nábojem.

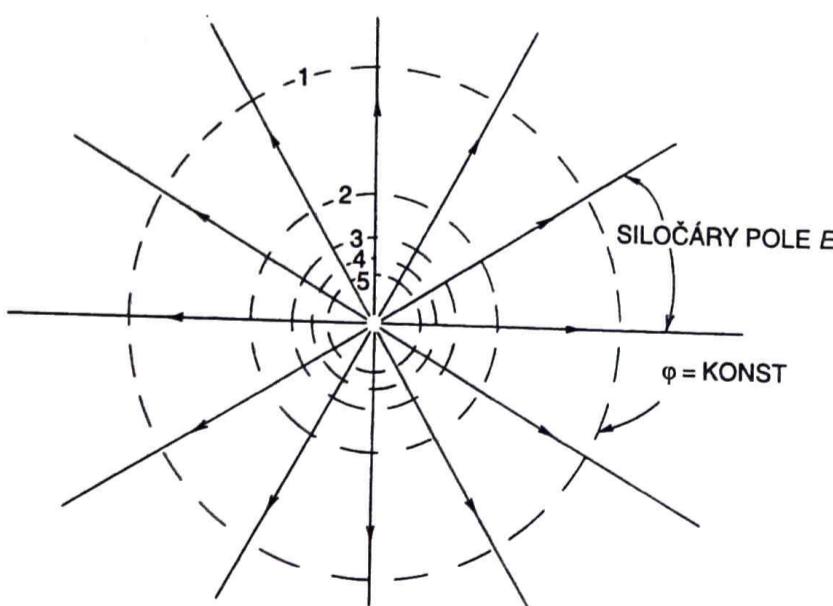
Jako druhý příklad uvažujme pole v blízkosti dvou stejně velkých nábojů, jednoho kladného a druhého záporného. Najít toto pole je snadné. Jde o superpozici polí pocházejících od každého z těchto nábojů. Můžeme tedy dva obrázky, jako je obr. 17.8.1, položit jeden na druhý, ale to nejde. Dostali bychom tak siločáry, které se navzájem protínají, a to není možné, neboť  $\vec{E}$  nemůže mít v jednom bodě dva různé směry. Nevýhoda popisu pole pomocí siločar je nyní očividná. Geometrickými úvahami nelze snadno dospět k tomu, jaký průběh budou mít nové siločáry. Ze dvou nezávislých obrazů siločar nemůžeme dostat jejich složený obraz. Princip superpozice - jednoduchý a zároveň hluboký princip teorie elektrických polí - nemá v popisu pole pomocí siločar jednoduchou reprezentaci.

Představa siločar má však své použití, a proto bychom přece rádi nakreslili jejich obraz pro dvojici nábojů stejné velikosti a opačných znamének.

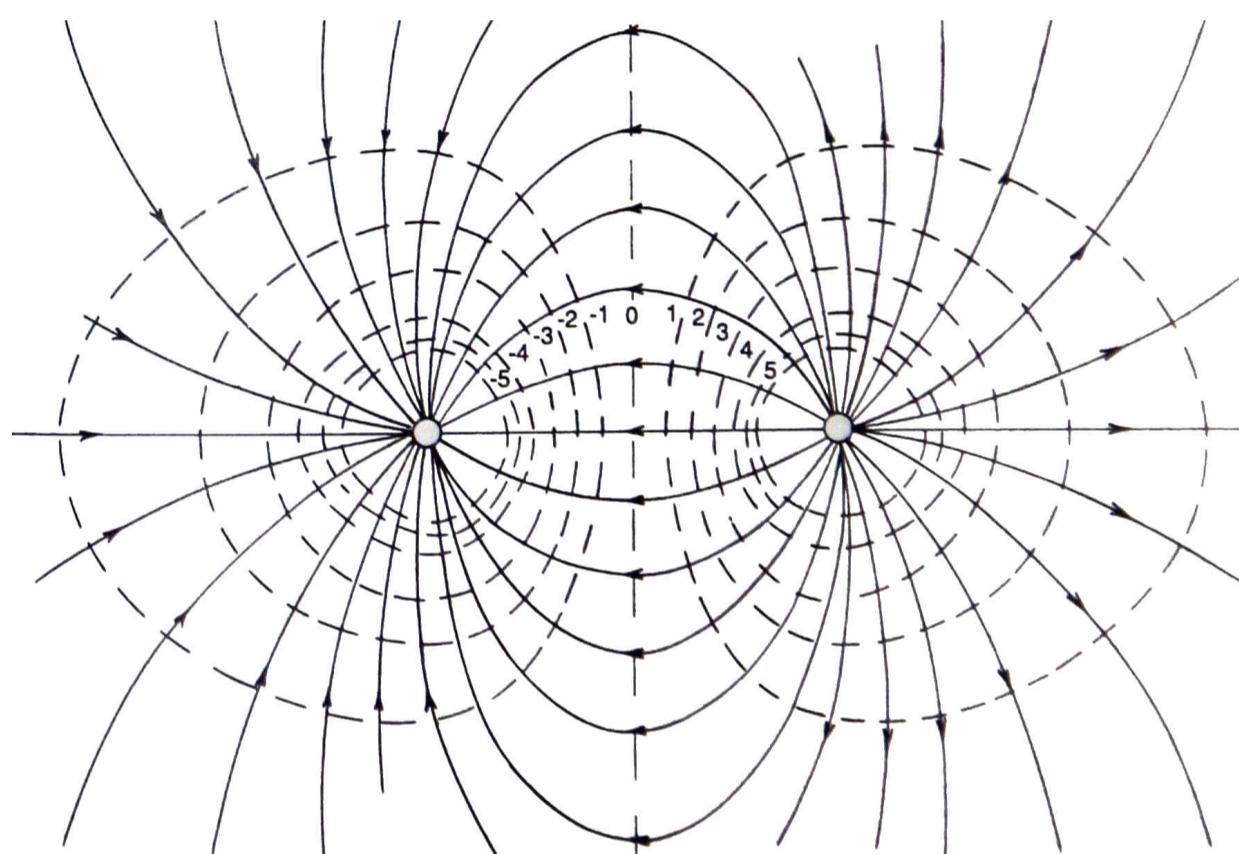
Vypočítáme-li pole ze vztahu (17.2.4) a potenciály z (17.3.5), můžeme siločáry a ekvipotenciální hladiny nakreslit. Výsledkem je obr. 17.2.4. Tuto úlohu však museli řešit nejdříve matematicky.

## References

- [FLMoo] R. Feynman, R. Leighton, and S. Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Ed. by I. Štoll. Nakladatelství Fragment, 2000, p. 806. ISBN: 80-7200-420-4 (cit. on pp. 71, 72, 74–77).



Obrázek 17.8.1.: Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě kladného bodového náboje.



Obrázek 17.8.2.: Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě dvou stejně velkých bodových nábojů s opačným znaménkem

# 18. Speciální teorie relativity

## 18.1. Princip relativity

### Obsah

18.1. Princip relativity . . . . .	79
18.2. Lorentzova transformace . . . . .	80

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy ronice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak jej odstranit. Oboje, chybu i korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že  $m$  je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlosť. V Einsteinově opraveném vztahu má  $m$  hodnotu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18.1.1)$$

kde  $m_0$  je *klidová hmotnost* (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje) a  $c$  je *rychlosť světla*, která je přibližně rovna  $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlostí  $9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  je  $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$  a po dosazení do uvedeného vztahu dostaneme korekci hmotnosti ne větší než dvě až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostačně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosti světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý a proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Proto je zajímavé sledovat, jaké kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona. Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

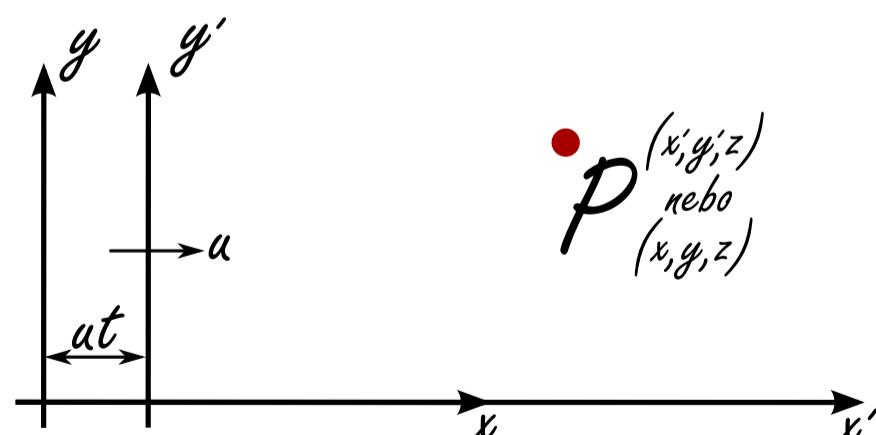
Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o *speciální teorii relativity* z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou *Obecná teorie relativity*. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ *gravitace*.

Newton byl první, kdo vyslovil *princip relativity* jako jeden z důsledků pohybových zákonů: Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejné ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočáre vpřed. To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlosťí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samozřejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je pravda, že ve všech experimentech provedených v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální zákony stejné, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje konstantní rychlosťí  $u$  ve směru osy  $x$ , přičemž měří polohu určitého bodu (obr. 18.1.1). Ve své souřadnicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy  $x$  jako  $x'$ . Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy  $x$  ve své souřadnicové soustavě značí jako  $x$ . Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunu za čas  $t$  o vzdálenost  $ut$ , a jestliže soustavy z počátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (18.1.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetansformovaly do stejných zákonů v čárkováné soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soustavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje či nikoliv.



Obrázek 18.1.1.: Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých x-ových os.

Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumu elektrických, magnetických a světelných jevů, jež vyústilo v *Maxwellovu teorii elektromagnetického pole*, která jednotně popisuje elektřinu, magnetizmus a světlo. Zdálo se však, že Maxwellovy rovnice nevyhovovaly *principu relativity*, neboť přetrasformujeme-li Maxwellovy rovnice pomocí rovnice 18.1.2, nebudou mít stejný tvar. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měli lišit od jevů v nehybné lodi. Těmito jevy by pak bylo možné určit rychlosť lodi, a ve speciálním případě pomocí vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možné určit i absolutní rychlosť lodi. Jedním z důsledků Maxwellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří všemi směry stejnou rychlosťí  $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Dalším důsledkem těchto rovnic je, že pohybuje-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlosťí  $c$ . Tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje vede k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlosť  $u$  a že světlo z reflektorů auta za námi nás míjí rychlosť  $c$ . Zdiferencováním první rovnice 18.1.2 máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u, \quad (18.1.3)$$

což znamená, že podle *Galileovy transformace* by zdánlivá rychlosť světla měřená z auta nemohla být  $c$ , ale  $c-u$ . Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosťi Země, ale všechny selhaly - nedávaly vůbec žádné rychlosťi. Ukázalo se, že někde byla chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

## 18.2. Lorentzova transformace

Když se zjistilo, že s rovnicemi v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileiho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxwellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problému je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si H. A. Lorentz všiml pozoruhodné věci, když použil v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (18.2.1)$$

tvar rovnic se nezměnil. Rovnice 18.2.1 jsou známé jako *Lorentzovy transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že všechny fyzikální zákony, by mely být takové, aby se při Lorentzové transformaci neměnily. Jinými slovy, mely bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak se ukázalo jediné co je třeba, je změnit hmotnost  $m$  v Newtonových rovnicích podle vztahu 18.1.1. Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejné.

Pro pochopení smyslu této nové transformace nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání prostoru a času.

# 19. Geometrická optika

## 19.1. Úvod

### Obsah

19.1. Úvod . . . . .	81
----------------------	----

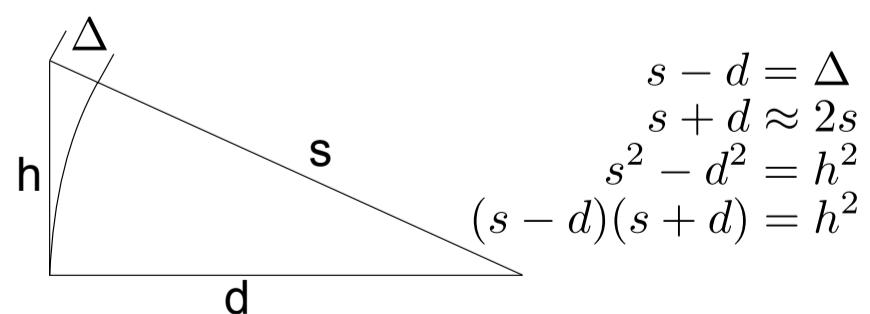
Na několika přístrojích předvedeme approximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější approximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů a přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná.

Abychom mohli pokračovat potřebujeme jeden geometrický vztah a to: máme-li trojúhelník s malou výškou  $h$  a velkou základnou  $d$ , pak přepona  $s$  je delší než základna (viz obr. 19.1.1).

Tedy

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (19.1.1)$$

To je celá geometrie, kterou je třeba znát, aby bylo možné diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch.



Obrázek 19.1.1.: Trojúhelník s malou výškou a velkou základnou



**Část VI.**

**Astrofyzika**



## 20. Úvod

### Obsah

20.1. Historie astrofyziky	85
20.2. Základní vztahy	85

**Astrofyzika** je vědní obor ležící na rozhraní *fyziky* a *astronomie*. Zabývá se fyzikou vesmíru, včetně fyzikálních vlastností (svítivost, hustota, teplota, chemické složení) astronomických objektů jako jsou hvězdy, galaxie a mezihvězdná hmota, jakož i jejich vzájemné působení.

Podle metod výzkumu těchto objektů se dělí na *fotometrii*, *spektroskopii*, *radioastronomii*, *astrofyziku rentgenovou*, *infračervenou*, *ultrafialovou* a *neutrino*. Každý z těchto podoborů se dále dělí na praktickou a teoretickou část. Praktická získává potřebná data. Teoretická s pomocí fyzikálních zákonů vysvětluje pozorované chování vesmírných těles.

### 20.1. Historie astrofyziky

### 20.2. Základní vztahy

- **AU - astronomická jednotka:** průměrná vzdálenost Země od Slunce,  $150 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Vzájemné vzdálenosti planet či jiných objektů sluneční soustavy vyjádřené v AU poskytují relativně názorné měřítko vzdáleností těchto objektů od sebe. Přesná hodnota je

$$1AU = 149\,597\,870\,691 \pm 6 \text{ m}$$

Kvůli vyšší přesnosti *Mezinárodní astronomická unie* (International Astronomical Union, IAU) přijala novou definici, podle které je AU délka poloměru nerušené oběžné kruhové dráhy tělesa se zanedbatelnou hmotností, pohybujícího se okolo Slunce rychlostí  $0,017\,202\,098\,950$  radiánů za den ( $86\,400 \text{ s}$ ).

- Vzdálenost Země od Slunce je  $1,00 \pm 0,02 \text{ AU}$ .
  - Měsíc obíhá kolem Země ve vzdálenosti  $0,0026 \pm 0,0001 \text{ AU}$ .
  - Mars je od Slunce vzdálen  $1,52 \pm 0,14 \text{ AU}$ .
  - Jupiter je od Slunce vzdálen  $5,20 \pm 0,05 \text{ AU}$ .
  - Nejvzdálenější člověkem vyrobené těleso, sonda Voyager 1, bylo 31. prosince 2007 ve vzdálenosti  $104,93 \text{ AU}$  od Slunce.
  - Průměr sluneční soustavy bez *Oortova oblaku* je přibližně  $105 \text{ AU}$ .
  - Průměr sluneční soustavy s Oortovým oblakem se odhaduje na  $50\,000$  až  $100\,000 \text{ AU}$ .
  - Nejbližší hvězda (po Slunci), Proxima Centauri, se nachází přibližně ve vzdálenosti  $268\,000 \text{ AU}$ .
  - Průměr hvězdy Betelgeuze je  $2,57 \text{ AU}$ .
  - Vzdálenost Slunce od středu Galaxie je přibližně  $1,7 \cdot 10^9 \text{ AU}$ .
  - Velikost viditelného vesmíru je asi  $8,66 \cdot 10^{14} \text{ AU}$ .
- **I.y. - světelný rok:** vzdálenost, kterou světlo ulétne za jeden rok,  $9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$ ,
  - **pc - parsek, paralaktická sekunda:** vzdálenost, ze které by poloměr oběžné dráhy Země byl kolmo k zornému paprsku vidět pod úhlem  $1''$ ,  $30,9 \cdot 10^{12} \text{ km}$ .

**Příklad 20.2.1.** Spočtěte, jakou vzdálenost v metrech vyjadřuje jeden parsek [Kčog, s. 3].

**řešení:** 1 pc (paralaktická sekunda) je vzdálenost, ze které vidíme velkou poloosu oběžné dráhy Země kolem Slunce pod úhlem  $\varphi = 1''$ . Úhel  $1''$  je tak malý, že strany VS a VZ na obrázku prakticky splývají a místo pravého trojúhelníka VSZ můžeme použít definiční vztah úhlu v obloukové míře (velikost úhlu je možné určit jako poměr délky oblouku vymezeného rameny na kružnici opsané kolem vrcholu k poloměru této kružnice). Proto

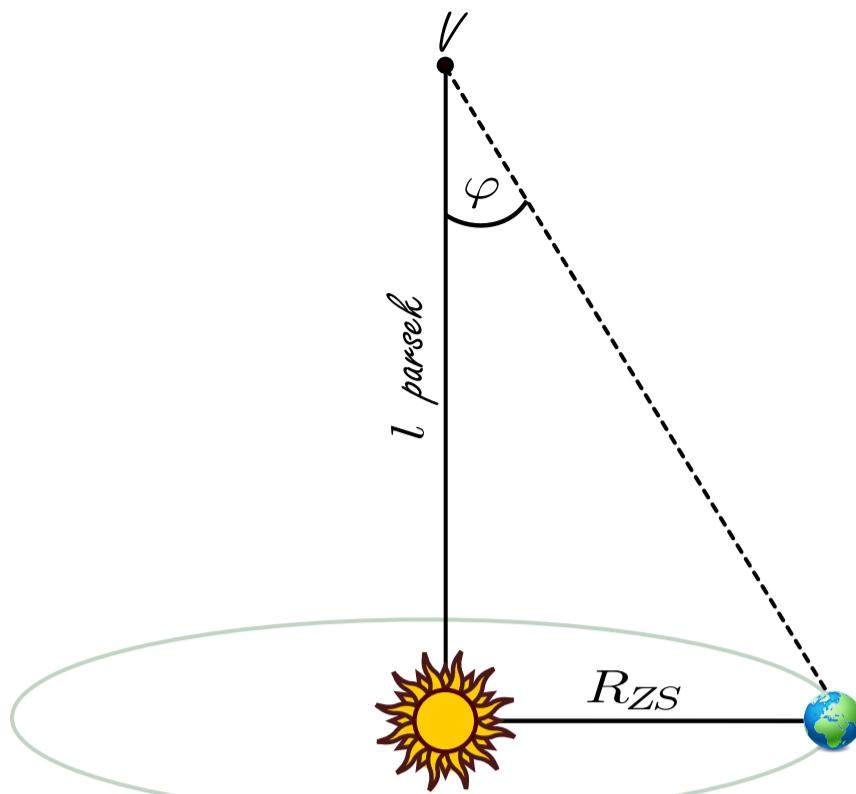
$$\varphi = \frac{R_{SZ}}{l} \rightarrow l = \frac{R_{SZ}}{\varphi},$$

kde  $l$  je vzdálenost 1 pc v metrech,  $R_{SZ}$  je vzdálenost země od Slunce a  $\varphi$  je úhel jedné vteřiny vyjádřený v radiánech.

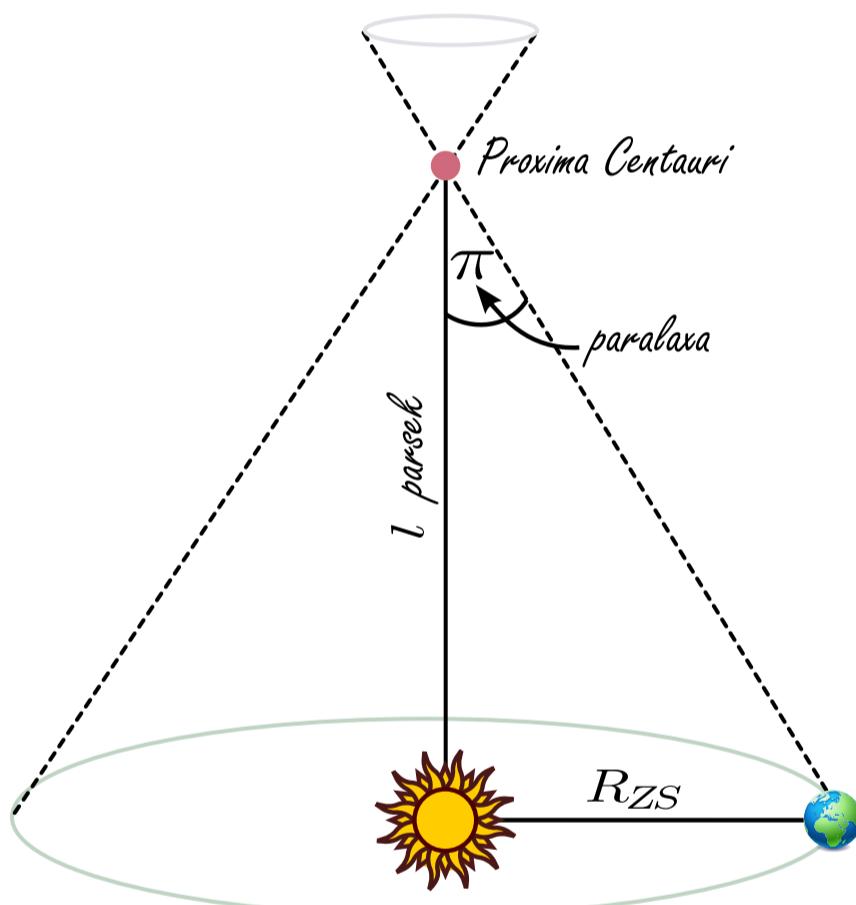
$$l = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60 \cdot 60} \cdot \frac{2\pi}{360}} \cong 3 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$

Další jednotkou, kterou se v astrofyzice měří vzdálenost dvou vesmírných těles, je *parallaxa*. Pozorovací místa musí být od sebe výrazně vzdálena, aby například při měření vzdálenosti naší nejbližší hvězdy - *Proxima Centauri* byla parallaxa vůbec měřitelná. Vzdálenost této hvězdy je 4,2 světelných let (nebo 270 000 AU) od Země.

**Příklad 20.2.2.** Najděte parallaxu *Proximy Centauri*, která je od nás vzdálená asi 4,2 světelného roku [Kčog, s. 4].



Obrázek 20.2.1.: Parsek



Obrázek 20.2.2.: Paralaxa naší nejbližší hvězdy

**Řešení:** Díky pohybu Země kolem Slunce se zdá, že blízké hvězdy opisují oproti vzdáleným elipsy. Úhlový poloměr této elipsy se nazývá paralaxa hvězdy. Lze ji změřit jen pro nejbližší hvězdy. Z definice úhlu (jako v předchozím příkladě) tedy vyplývá, že

$$\pi = \frac{R_{ZS}}{l} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

což je přibližně  $0.76''$ . Vidíme, že i u druhé nejbližší hvězdy po Slunci není paralaxa ani celá  $1''$ .

## References

- [KČ09] P. Kulhánek and M. Červenka. *Astrofyzika v příkladech*. Ed. by F. ČVUT. FEL ČVUT, 2009. 87 pp. (cit. on p. 85).

**Část VII.**

**Mechanika**



# 21. Kinematika částice

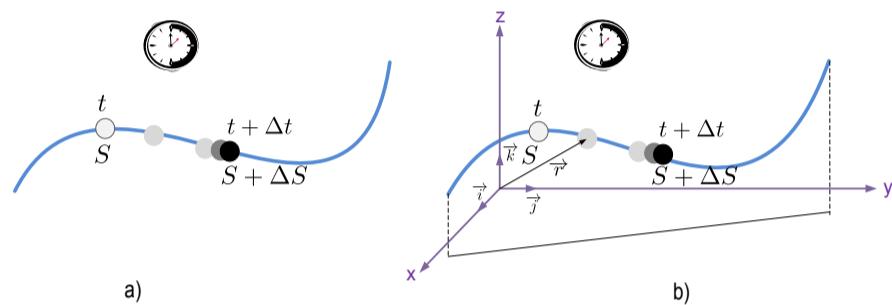
## Obsah

21.1. Kinematický popis pohybu částice . . . . .	89
21.1.1. Základní pohyby a jejich skládání . . . . .	90
21.1.2. Skládání pohybů . . . . .	90

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem hmotný bod je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměru částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

## 21.1. Kinematický popis pohybu částice

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po přičinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, trajektorii, a snažíme se určit jednak tvar této trajektorie a zákon pohybu po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase<sup>1</sup>. Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.



Obrázek 21.1.1.: Příklad trajektorie částice a zavedení kartézské soustavy souřadnic

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit dráhu částice \$s(t)\$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 21.1.1). V okamžiku \$t\$ je částice v bodě daném prošlou dráhou \$s\$, v okamžiku \$t + \Delta t\$ v bodě \$s + \Delta s\$. Dráha \$s\$ tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

Přitom můžeme zavést **střední rychlosť částice** v intervalu \$\Delta t\$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (21.1.1)$$

**okamžitou rychlosť částice** v okamžiku \$t\$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (21.1.2)$$

a **okamžité zrychlení**

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (21.1.3)$$

Takto zavedené rychlosť a zrychlení jsou skalární funkce času a udávají pouze jak se mění dráha a rychlosť při pohybu po zadané trajektorii, ve směru tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu částice v prostoru vzhledem k nějaké vztažné soustavě. Tato soustava, například kartézská, je spojena s nějakým tuhým tělesem a doplněna hodinami umístěnými například v počátku. V místnosti mohou jako kartézské osy sloužit průsečnice stěn a podlahy. Potom udáváme tři kartézské souřadnice částice jako funkce času:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (21.1.4)$$

Soustava tří rovnic (rov. 21.1.4) představuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnici trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rov. 21.1.4 čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (21.1.5)$$

Přitom \$s = s[x(t), y(t), z(t)]\$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalární rychlosť bude

<sup>1</sup>Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrosvětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojmem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrosvětě pohybuje podle zákona kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně přesně stanovit její polohu a rychlosť

### 21.1.1. Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu částice.

#### 21.1.1.1. Pohyb přímočarý

Nechť přímočarý pohyb probíhá podél osy  $x$  s počátečními podmínkami  $x = x_0, v_x = \dot{x} = v_{0x}$  při  $t = t_0$ . Pak rozlišujeme

- Pohyb rovnoměrný s konstantní rychlostí  $v_{0x}$  a nulovým zrychlením  $a_x = 0$ . Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon pohybu:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (21.1.6)$$

- Pohyb rovnoměrně zrychlený s konstantním zrychlením  $a_{0x}$  kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon rychlosti a zákon pohybu:

$$v = v_{0x} + a_{0x}(t - t_0), \quad (21.1.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{0x}(t - t_0)^2. \quad (21.1.8)$$

Je-li při  $t = 0$ ,  $x = 0, v = 0$  dostaneme známé vztahy

$$v = a_{0x}t, \quad x = \frac{1}{2}a_{0x}t^2$$

- Pohyb nerovnoměrný se zrychlením obecně závislým na čase  $a(t)$ . Pak dostaneme zákon rychlosti a zákon pohybu integrováním

$$v = v_{0x} + \int_{t_0}^t a(t)dt \quad (21.1.9)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \int_{t_0}^t v(t)dt \quad (21.1.10)$$

#### 21.1.1.2. Pohyb kruhový

##### 21.1.1.3. Pohyb harmonický

Pohyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového pohybu kolem počátku do jedné z kartézských os. Například v ose  $y$  pak máme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (21.1.11)$$

kde

$y$  ... výchylka (elongace),

$A$  ... amplituda,

$\omega$  ... úhlová rychlosť [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ],

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  ... perioda [s],

$f = \frac{1}{T}$  ... frekvence [Hz],

$\omega t + \varphi_0$  ... fáze,

$\varphi_0$  ... počáteční fáze při  $t = 0$  neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y = \dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (21.1.12a)$$

$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (21.1.12b)$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlosť předbíhá výchylku o  $\frac{\pi}{2}$  a zrychlení o  $\pi$  (je v protifázi).

### 21.1.2. Skládání pohybů

Ačkoliv částice může konat současně několik pohybů, lze je vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skládání pohybu.

#### 21.1.2.1. Skládání kolmých přímočarých pohybů

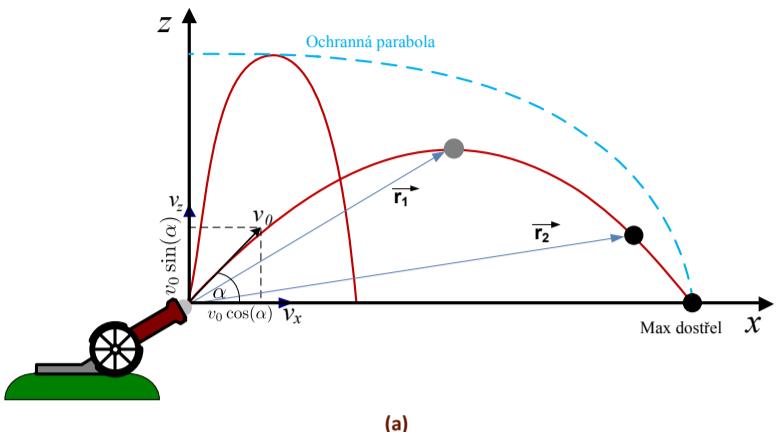
Se skládáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při vrhu těles v homogeném tělovém poli ve vakuu. Uvažujme rovinný pohyb v rovině  $x, z$ , při čemž v záporném směru osy  $z$  má pohyb zrychlení velikosti  $g$ .

**Příklad 21.1.1.** Výstrel z děla (ve vakuu). Dělová koule opouští hlaveň zadanou rychlosťí. Určete:

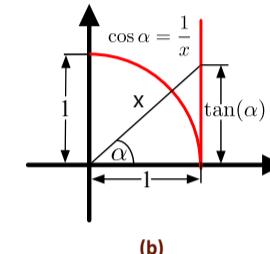
- maximální dostřel pro zadanou ústřívanou rychlosť,

- hranice oblasti, ve kterém lze zasáhnout cíl,

- stanovte velikost potřebného náměru děla pro zasažení libovolného cíle uvnitř ochranné paraboly.



(a)



(b)

**Obrázek 21.1.2.:** K příkladu výpočtu trajektorie projektile. Goniometrický vzorec  $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$  lze snadno odvodit z náčrtu pomocí Pythagorovy věty (Přepona pravoúhlého trojúhelníka je  $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ )

**Řešení:** Uvažujte rovinný pohyb v rovině  $xz$ , při čemž v záporném směru osy  $z$  má pohyb zrychlení velikosti  $g$ . Ve směru osy  $z$  tedy probíhá rovnoměrně zrychlený pohyb podle rov. 21.1.8. Vztáhneme-li počáteční podmínky k okamžiku  $t = 0$ , máme

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_z(t) = v_{0z} - gt \quad (21.1.13)$$

Ve směru osy  $x$  je pohyb rovnoměrný:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad v_x(t) = v_{0x} = \text{konst} \quad (21.1.14)$$

Dělová koule opouští hlaveň pod elevačním úhlem  $\alpha$  za podmínek dle obr. 21.1.2a platí  $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \alpha > 0, v_{0z} = v_0 \sin \alpha > 0$ . Jde tedy o skládání rovnoměrného přímočáreho pohybu s rychlosťí  $v_0 \cos \alpha$  ve směru osy  $x$  a svislého pohybu vzhůru. Získané rovnice

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad x(t) = v_{0x}t \quad (21.1.15)$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas  $t$ , dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}x^2 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 \quad (21.1.16)$$

Nyní aplikujeme goniometrický vzorec

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

odvozený dle náčrtku na obrázku 21.1.2b a dostaváme rovnici

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)x^2 \quad (21.1.17)$$

**Pohyb projektile (dělové koule)** probíhá po stejné trajektorii, jako šíkmý vrh v homogenním tělovém poli ve vakuu, tedy po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, délku doletu a celkovou dobu letu.

- Maximální dolet pro daný elevační úhel:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)x^2 \quad (21.1.18)$$

Netriviální kořen této kvadratické rovnice je námi hledaný dolet dělové koule

$$x_d = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (21.1.19)$$

- Celková doba letu:

$$t_d = \frac{x_d}{v_{0x}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

- Souřadnice vrcholu dráhy: získáme derivováním rov. 21.1.17

$$\begin{aligned} 0 &= \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2(1 + \tan^2 \alpha)} x_v \\ x_v &= \frac{v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{2}{2} \\ x_v &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \end{aligned}$$

Souřadnici  $z_v$  dostaneme dosazením  $x_v$  do rov. 21.1.17

$$\begin{aligned} z_v &= \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \frac{v_0^4}{g^2} \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} & (21.1.24) \\ z_v &= \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & (21.1.25) \\ z_v &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} & (21.1.26) \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu  $\frac{\pi}{4}$  a že obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly  $\frac{\pi}{4} \pm \Delta\alpha$ .

- Stanovení elevačního úhlu pro zasazení zadaných souřadnic  $[X_c, Z_c]$  cíle: Opět vycházíme z rov. 21.1.17, ovšem tentokrát nejsou neznámé  $x$  a  $z$ , ale  $\alpha$ : Použijeme substituci  $\tan \alpha = p$  a vypočítáme kořeny této kvadratické rovnice:

$$0 = gx^2 p^2 - 2v_0^2 xp + (gx^2 + 2zv_0^2) \quad (21.1.27)$$

$$p_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \quad (21.1.28)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \right) \quad (21.1.29)$$

Je-li cíl zadán v polárních souřadnicích  $[r, \varphi]$ , lze potřebný námer stanovit takto:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gr^2 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi v_0^2)}}{gr \cos \varphi} \right) \quad (21.1.30)$$

Pokud ovšem bude diskriminant menší než 0, leží cíl mimo dosah děla. Tj. neexistuje takový námer děla, kterým by bylo možné cíl zasáhnout. Je-li diskriminant roven nule, jedná se o hranici, za kterou již při dané ústředové rychlosti nelze dostřelit. Body ležící na této obálce tzv. ochranná parabola mohou být zasaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu.

- Stanovení rovnice ochranné paraboly: To provedeme tak, že položíme diskriminant rovnice pro  $\tan \alpha$  roven nule a dostaneme rovnici obálky

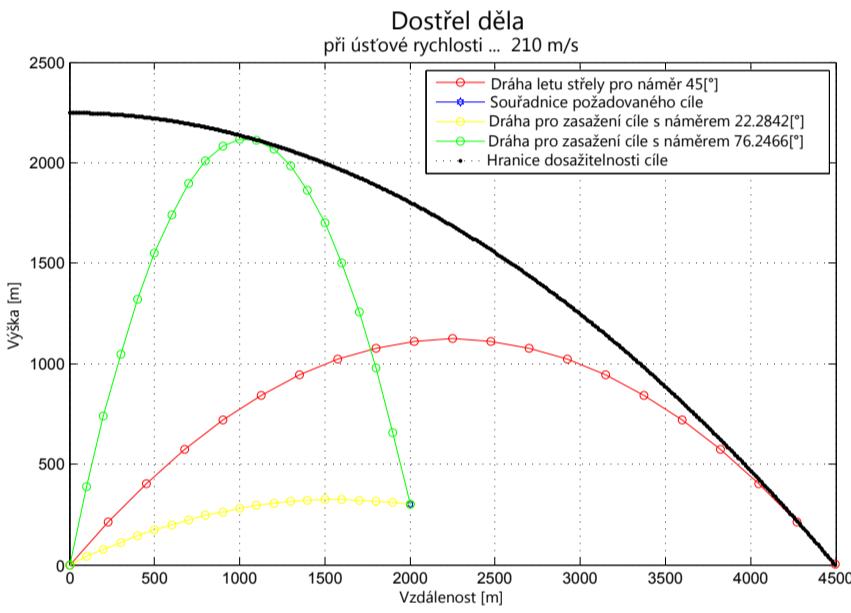
$$v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2) \Rightarrow z = -\frac{v_0^2}{2g^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (21.1.31)$$

```

32          tan( alfa2 ) *vxo*tz - (go/(2*vo^2*cos( alfa2 )^2)) *
33          (vxo*tz).^2];
34 % 3. vypocet hranice dosazitelnosti cile - ochranna parabola
35 vxo_max = vo*cos(45/180*pi);
36 vyo_max = vo*sin(45/180*pi);
37 t_max = (2*vyo_max)/go; % max dostrel pri nameru 45 °
38 dostrel_max = vxo_max*t_max % [m]
39 vyska_max = vo^2/(2*go) % [m]
40 t3 = 0:t_max/500:t_max;
41 r3 = [vxo_max*t3; vo^2/(2*go)-go/(2*vo^2)*(vxo_max*t3).^2];
42 % graficke zpracovani vysledku
43 % figure;
44 plot(r1(:,1), r1(:,2), '-ro', cil(1), cil(2), '-bh', r2(1,:),
45 r2(2,:), '-yo', r2(1,:), r2(3,:), '-go', r3(1,:),
46 r3(2,:), ':k.', 'MarkerSize',6)
47 grid on;
48 title({'\fontsize{16}\Dostrel\del{dela}', '\fontsize{12}\pri\ustove\rychlosti...', num2str(vo), ' [m/s]' })
49 xlabel('Vzdalenost[m]')
50 ylabel('Vyska[m]')
51 string1 = ['Draha\del{u}strel\pro\zadanym\del{u}namer\del{u}', num2str(namer), ' [°]'];
52 string2 = 'Souradnice\pozadovaneho\cile';
53 string3 = ['Draha\pro\zasazeni\cile\us\namerem\del{u}', num2str(namer_alfa1), ' [°]'];
54 string4 = ['Draha\pro\zasazeni\cile\us\namerem\del{u}', num2str(namer_alfa2), ' [°]'];
55 string5 = 'Hranice\dosazitelnosti\cile';
56 legend(string1, string2, string3, string4, string5)

```

Výpis 21.1: kinematika\_deло\_ve\_vakuu.m pro ověření výpočtu balistické dráhy projektu.



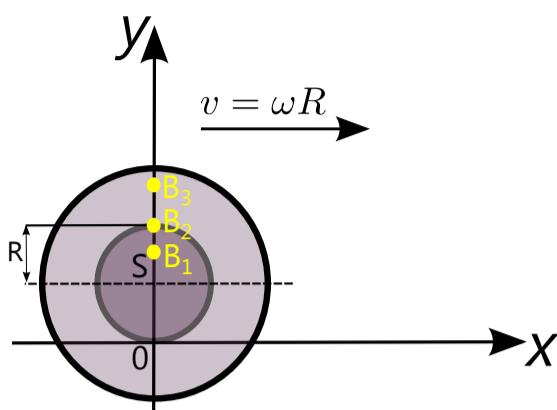
Obrázek 21.1.3.: Výpočet trajektorie projektilu ve vakuu při ústředové rychlosti 210 m/s pomocí MATLAB®.

```

1 % ===== Zadani =====
2 % Delova koule opousti hlaven zadanou rychlosi.
3 % Urcete maximalni dostrel pro zadanou ustovou rychlosi,
4 % hranice oblasti, ve kterem lze zasahnut cil a stanovte
5 % velikost potrebnego namera dela pro zasezeni libovolneho cile
6 % uvnitr ochranne paraboly.
7 namer = 45; % [°] namer dela
8 vo = 210; % [m/s] ustova rychlost
9 go = 9.81; % [m/s-2] gravitacni zrychleni
10 % Angle required to hit coordinate (x,y)
11 cil=[2000,300];
12 % rESENi
13 vxo = vo*cos(namer/180*pi);
14 vyo = vo*sin(namer/180*pi);
15 % 1. Pohybove rovnice
16 t_dopad = (2*vyo)/go;
17 t1= 0:t_dopad/20:t_dopad;
18 r1 = [vxo*t1;
19 vyo*t1 - (1/2)*go*t1.^2];
20
21 % 2. Vypocet namera pro zasazeni zadaneho cile
22 t_trefa = cil(1)/vxo;
23 t2 = 0:t_trefa/20:t_trefa;
24 % namer alfa - dva koreny !!
25 Diskriminant = sqrt(vo^4-(go*(go*cil(1)^2+2*vo^2*cil(2))));
26 alfa1 = atan((vo^2-Diskriminant)/(go*cil(1)));
27 alfa2 = atan((vo^2+Diskriminant)/(go*cil(1)));
28 namer_alfa1 = alfa1*180/pi;
29 namer_alfa2 = alfa2*180/pi;
30 r2 = [vxo*t2;
31 tan( alfa1 ) *vxo*tz - (go/(2*vo^2*cos( alfa1 )^2)) *
(vxo*tz).^2];

```

**Příklad 21.1.2.** Kolo vagónu se valí po vodorovné kolejnici. Uvažujte bod, který je v počátečním okamžiku pod středem kola ve vzdálenosti, která může být menší, rovna nebo větší než vzdálenost středu kola od kolejnice.



Obrázek 21.1.4.: Kolo vagónu a tři možné polohy bodu

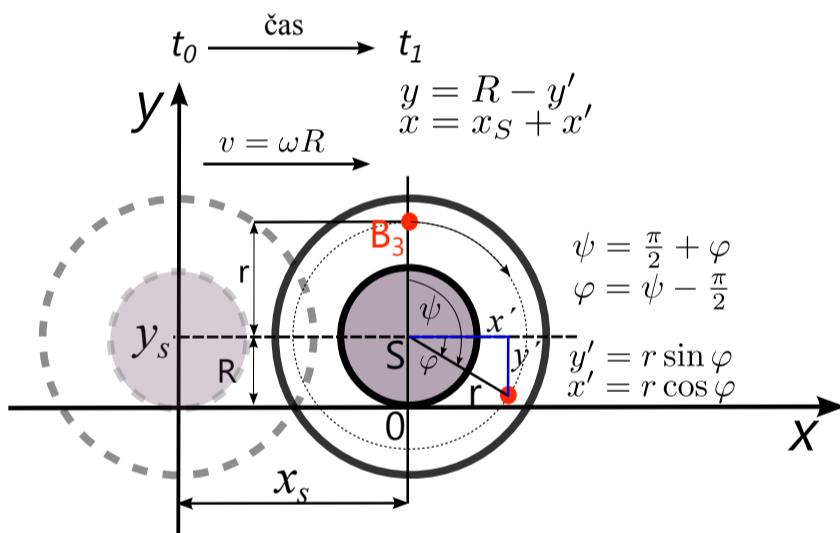
Určete parametrické rovnice dráhy zvoleného bodu, složky rychlosti a její velikost, složky zrychlení a jeho velikost, tečné a normálové zrychlení a poloměr křivosti dráhy. [Sla02, p. 11]

**Rешение:** Obvodová rychlosť v miestě dotyku s kolejnicou je  $v = \omega R$ , což vzhľadom k predpokladu o valení predstavuje posuvnou rychlosť kola. Parametrické rovnice pre stred kola sú také

$$x_S = \omega R t \quad (21.1.32)$$

$$y_S = R \quad (21.1.33)$$

Uvažovaný bod  $B_3$  na obr. 21.1.5 je ve své nové pozici v čase  $t_1$  posunut vůči středu o vzdáenosť  $r \cdot \sin \omega t$  ve směru osy  $x$  a o vzdáenosť  $r \cdot \cos \omega t$  ve směru osy  $y$ . Z obrázku 21.1.5 lze odvodit následující rovnice pro souřadnice libovolného bodu  $B$  na kole vagónu.



Obrázek 21.1.5.: Náčrt pro odvození parametrických rovnic pohybu libovolně zvoleného bodu na kole vagónu

- ve směru osy  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= x_S + x' \\ x &= x_S + r \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ x &= x_S + r \sin \psi \\ x &= \omega R t + r \sin \omega t \end{aligned}$$

takže, parametrické rovnice dráhy mají tvar **cykloidy** viz 21.1.34.

$$x = \omega R t + r \sin \omega t \quad (21.1.34)$$

$$y = R + r \cos \omega t \quad (21.1.35)$$

- Složky rychlosti:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \omega R + r \omega \cos \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -r \omega \sin \omega t \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2} \end{aligned} \quad (21.1.36)$$

- Složky zrychlení:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r \omega^2 \sin \omega t \quad (21.1.37)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r \omega^2 \cos \omega t \quad (21.1.38)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r \omega^2 \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r \omega^2 \quad (21.1.39)$$

Tento výsledek je superpozicí rovnoměrného kruhového a rovnoměrného přímočaráho pohybu.

- Tečné zrychlení dostaneme derivací velikosti rychlosti

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \omega \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \cdot (-1) \cdot 2Rr \omega \sin \omega t \quad (21.1.40)$$

$$a_t = \frac{r \omega^2 \cdot |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \quad (21.1.41)$$

- Normálové zrychlení získáme užitím Pythagorovy věty

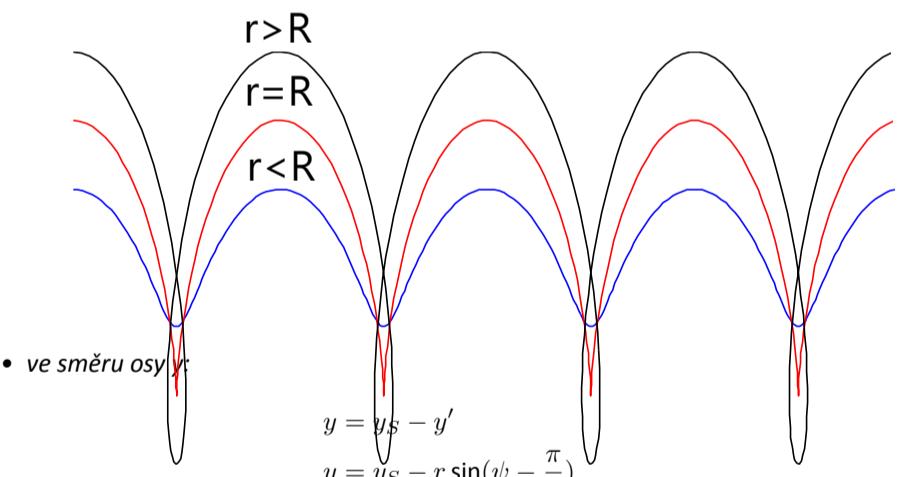
$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \\ a_n &= \sqrt{(r \omega^2)^2 - \left( \frac{R r \omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \right)^2} \\ a_n &= \frac{r \omega^2 |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Poloměr křivosti  $R_0$  dostaneme ze vztahu  $a_n = \frac{v^2}{R_0}$ :

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\omega^2 (R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)}{r \omega^2 |R \cos \omega t - r|} \\ R_0 &= \frac{(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)^{\frac{3}{2}}}{|R \cos \omega t - r^2|} \end{aligned}$$

Poloměr křivosti není roven vzdáenosť od středu kola  $r$ : druhou bodu není kružnice, nýbrž cykloida (viz obr. 21.1.6).

$$\begin{aligned} (x - \omega R t)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t \\ (y - R)^2 &= r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega R t)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t + r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega R t)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \quad \text{kde } t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{y - R}{r} \\ \left( x - R \arccos \frac{y - R}{r} \right)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \end{aligned}$$



Obrázek 21.1.6.: Cykloida: pro  $B_2 \dots r = R$  je cykloida prostá;  $B_3 \dots r > R$  cykloida prodloužená;  $B_1 \dots r < R$  cykloida zkřácená. [cykloida.m]

### 21.1.2.2. Skládání harmonických pohybů v kolmých směrech

Zmínime se ještě o skládání **harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametrický jako

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad y = B \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (21.1.42)$$

Výsledný pohyb vytváří zajímavé geometrické tvary známé pod názvem Lissajousovy obrazce. Jejich vzhled závisí na poměru frekvencí a na fázovém úhlu [SO02].

Označíme fázi kmitů ve směru  $x$  jako  $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ , rozdíl fází obou kmitů jako  $\varphi_0 - \varphi_0 = \delta$ . Dále vyloučíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme  $\sin\varphi$  a  $\cos\varphi$  pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah  $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ . Máme

$$\sin\varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi + \delta) = \sin\varphi \cos\delta + \cos\varphi \sin\delta = \frac{y}{B} \quad (21.1.43)$$

odkud

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sin\delta} \left( \frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos\delta \right) \quad (21.1.44)$$

Sečteme-li nyní  $\sin^2\varphi$  a  $\cos^2\varphi$ , dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos\delta = \sin^2\delta \quad (21.1.45)$$

V závislosti na  $\delta$  může tato rovnice odpovídat rovnici úsečky, nebo elipsy. Je-li  $\delta = n\pi$ , probíhají kmity po úsečce, ježíž přímka má směrnici  $k = \pm\frac{B}{A}$ , je-li  $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$ , je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (21.1.46)$$

Jsou-li amplitudy obou pohybů stejné, přejde pro  $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$  elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých pohybů o stejných frekvencích se setkáváme nejen v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 21.1.7a a obr. 21.1.7b [Što95].

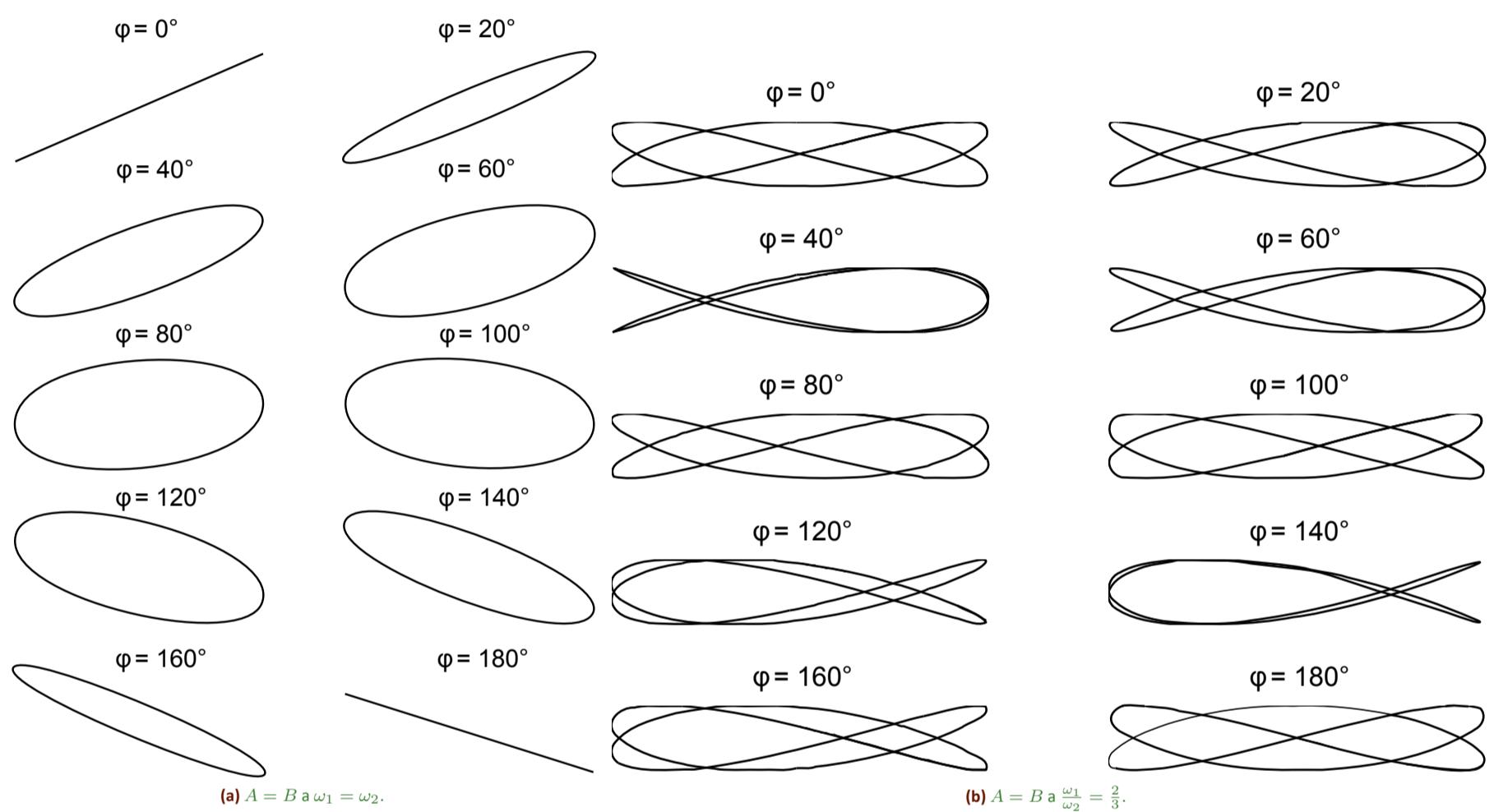
Jsou-li úhlové frekvence kolmých pohybů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce** viz 21.1.7b. Program ukazuje, jak se projevuje změna fázového úhlu při daném poměru frekvencí obou pohybů.

```

1 % Lissajousovy obrazce - vliv fazoveho uhlu
2 %
3 % neni - li pomery frekvenci racionalni cislo
4 % neni krivka uzavrena
5 clear
6 t = 0:0.01:7; i = 0;
7 omega1 = 2; omega2 = 3; % frekvence
8 A = 1; B = 1; % amplitudy
9
10
11 for fi = 0:pi/9:pi
12 x = A*sin(omega1*t); % 1. pohyb
13 y = B*sin(omega2*t + fi); % 2. pohyb
14 i=i+1; fi=fi*180/pi; % prevod na stupne
15 subplot(5,2,i);
16 plot(x,y,'r');
17 axis('off');
18 title(['\phi_i = ', num2str(fi), '°']);
19 end

```

**Výpis 21.2:** Lissajous.m vykreslí skládání harmonických pohybů v kolmých směrech.



Obrázek 21.1.7.: Trajektorie harmonických pohybů  $x = A \sin(\omega_1 t)$  a  $y = B \sin(\omega_2 t + \varphi)$  v kolmých směrech

## 22. Dynamika částice

**Příklad 22.0.3.** Dělová koule o hmotnosti  $m = 24 \text{ kg}$  opustila hlaveň rychlostí  $v = 500 \text{ ms}^{-1}$  v čase  $\tau = 0.008 \text{ s}$  po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavní? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

**Řešení:**

- Délka hlavně:  $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v\tau = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0.008 = 2 \text{ m}$
- Síla působící na kouli:  $F = m\frac{v}{\tau} = 24 \cdot \frac{500}{0.008} = 1.5 \times 10^6 \text{ N}$
- Vykonaná práce při urychlování koule:  $A = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \times 10^6 \text{ J}$

**Příklad 22.0.4.** Dráha střely s ohledem na odpor prostředí.

**Řešení:**



**Část VIII.**

**Teorie elektromagnetického pole**



# 23. Spojité matematické modely polí

## Obsah

<b>23.1. Elektrický náboj</b>	99
23.1.1. Vlastnosti elektrického náboje	99
<b>23.2. Elektromagnetické pole</b>	99
23.2.1. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky	99
23.2.2. Maxwellovy rovnice	100
<b>23.3. Elektrostatické pole</b>	100
<b>23.4. Stacionární proudové pole</b>	101
23.4.1. Elektrický proud v kovových vodičích	101
23.4.2. Práce a výkon elektrického proudu	102
23.4.3. Ohmův zákon	102
23.4.4. Elektromotorické napětí	103
<b>23.5. Stacionární magnetické pole</b>	104
23.5.1. Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí	105
23.5.2. Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru	106
23.5.3. Rovnice pro magnetický potenciál	107

## 23.1. Elektrický náboj

### 23.1.1. Vlastnosti elektrického náboje

Na základě pokusů s elektřinou víme, že některá tělesa (například skleněná či ebonitová tyč po předchozím tření) mohou za určitých podmínek silově působit na jiná tělesa. Toto silové působení se vysvětluje přítomností elektrických nábojů. Elektrický náboj představuje pro nás výchozí fyzikální veličinu, přičemž mírou jejího množství a rozložení na příslušných tělesech je právě silové působení mezi nimi. Elektrický náboj je veličinou skalární, podobně jako hmotnost, a k jeho určení postačí jediná (reálná) číselná hodnota. Skutečnost, že síly elektrického působení mezi tělesy mohou být jak přitažlivé, tak odpudivé vysvětlujeme tím, že elektrický náboj může nabývat kladných i záporných hodnot - tělesa se souhlasným znamením náboje se přitom odpuzují, tělesa s nesouhlasným znamením náboje se přitahují. Tělesa, která nesou elektrický náboj nazýváme *kladně* či *záporně nabité*, tělesa o nulovém náboji jsou elektricky *neutrální*, nenabité. Často se setkáváme s případem, kdy na tělesech jsou odděleně rozloženy kladné a záporné elektrické náboje o téže absolutní hodnotě. Taková tělesa budou také elektricky silově působit, přestože jejich celkový elektrický náboj je nulový. Říkáme jim *polarizovaná*.

O přítomnosti elektrického náboje se přesvědčujeme pouze na základě jeho silového projevu. Znamená to, že existenci jednoho jediného náboje bychom nemohli nijak odhalit. Kdyby existovaly pouze dva náboje, mohli bychom určit, zda jsou souhlasné či nesouhlasné znamení, nemohli bychom však rozhodnout ani o znamení, ani o velikosti těchto nábojů. Teprve jsou-li k dispozici alespoň tři náboje, můžeme jeden z nich vybrat jako jednotkový a kladný a ze silového působení určit velikost a znamení druhých nábojů<sup>1</sup>.

## 23.2. Elektromagnetické pole

### 23.2.1. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

**Elektrický náboj** je *skalární veličinou*. Jednotkou je *coulomb* [C]. Má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$ ), avšak v technických aplikacích k tomu nepřihlídíme. Náboj  $Q$  může být rozložen:

- *prostorově* v objemu  $V$  s objemovou hustotou

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad [C \cdot m^{-3}] \quad (23.2.1)$$

- *plošně* na ploše  $S$ , s plošnou hustotou

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (23.2.2)$$

- *lineárně* na křivce  $l$ , s lineární hustotou

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad [C \cdot m^{-1}] \quad (23.2.3)$$

Rozlišujeme:

- **volné náboje**: mohou se přemisťovat v makroskopických vzdálenostech,
- **vázané náboje**: mohou se přemisťovat jen v mikroskopických vzdálenostech.

Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují); vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

**Elektrický proud** je znám z každodenního života, přesto je velmi důležité umět tento pojem vnímat jak pro označení „jevu“ (kap. 23.4.1), tak jako fyzikální veličinu, která tento jev kvantitativně popisuje (kap. 23.2.1). Elektrický proud je *skalární*

<sup>1</sup>Co je vlastní podstatou elektrického náboje nevíme. Na základě poznatků současné mikrofyziky jej můžeme považovat za jednu z vlastností elementárních částic, která podmiňuje jejich vzájemné působení. Rozlišujeme čtyři základní typy vzájemného působení (*interakce*) mezi elementárními částicemi: gravitační, slané elektromagnetické a silné. Gravitační interakce je univerzální a týká se všech částic. Setkali jsme se s ní v mechanice, její velikost udává Newtonův gravitační zákon a její podstatu se snaží objasnit obecná teorie relativity. Slabá interakce se projevuje u některých typů radioaktivního rozpadu za účasti neutrina. Podobně elektromagnetická interakce se uplatňuje mezi elementárními částicemi a jednou z jejich charakteristik je náboj. Silná interakce existuje mezi částicemi, které nazýváme hadrony, a drží pohromadě atomové jádro, které by se jinak odpudivými elektrickými silami působícími mezi protony můsely rozdělit.

Současný rozvoj mikrofyziky naznačuje, že hadrony, které jsme dříve považovali za elementární, mají svoji strukturu a komponenty. Předpokládáme o nich, že jsou tvořeny tzv. kvarky. Na současné úrovni vystupují tedy jako elementární kvarky a leptony (k nim patří elektron, mion, tauon a odpovídající neutrina), jejich antičástice a dále pak částice, které zprostředkovávají interakci mezi nimi.

fyzikální veličina ozn.  $I$  resp.  $i$ , jejíž jednotkou je základní jednotka soustavy SI: ampér – [A]. V této soustavě jednotek je ampér definován na základě silových účinků mezi dvěma vodiči, kterými prochází elektrický proud. Tato síla je magnetického původu, avšak magnetické pole vzniká jako důsledek pohybu elektrického náboje. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů.

Připojíme-li vodič ke zdroji elektrického napětí, elektrické pole uvnitř působí elektrickou silou na vodivostní elektronky, vyvolávají jejich pohyb a tím vytváří elektrický proud, který je po krátké době *stacionární* (ustálený, nezávislý na čase). Jestliže vodičem projde náboj  $\Delta Q$  resp.  $dQ$  za časový interval  $\Delta t$  resp.  $dt$ , lze definovat *průměrný* resp. *okamžitý* proud ve vodiči:

- **průměrný elektrický proud:**

$$I_{AV} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [A],$$

- **okamžitý elektrický proud** (který je limitním případem proudu průměrného, studujeme-li množství náboje, které projde průřezem vodiče za infinitezimální (nekonečně krátký) časový interval):

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad [A].$$

V ustáleném stavu protéká všemi průřezy vodiče stejně velký proud,

- speciálně pohybuje-li se náboj vodičem rovnoměrně, nazýváme proud **stejnosměrný**,  $I(t) = \text{konst}$ , a platí

$$I_{DC} = \frac{Q}{t} \quad [A]$$

Elektrický proud jako *jev* charakterizuje jednu z forem fyzikálního pohybu, kterou je **uspořádaný pohyb elektricky nabitých částic** v látkce. Přestože jakýkoliv elektrický proud je vždy tvoren pohybujícími se náboji, nemusí všechny pohybující se náboje vytvářet elektrický proud. Ve vodiči dochází k vzniku trvalého elektrického proudu za těchto podmínek:

- vodič se musí nacházet v trvalém elektrickém poli, což je realizováno pomocí tzv. *zdroje* (generátoru) elektrického napětí,
- ve vodiči musí být přítomny volné nosiče elektrického náboje.

Podle charakteru vnějšího elektrického pole lze rozlišit tři základní druhy proudů:

**stejnosměrný** proud vzniká tehdy, jestliže má intenzita elektrického pole konstantní orientaci,

**střídavý** proud ve vodiči vytváří vnější elektrické pole, jehož intenzita periodicky mění svou orientaci na opačnou,

**stacionární** stejnosměrný proud vzniká ve vodiči, je-li intenzita elektrického pole konstantní co do velikosti, směru i orientace.

Nabité částice představující volný náboj ve vodičích jsou v neustálém chaotickém tepelném pohybu (viz molekulová fyzika a termodynamika). Jedná se o *mikroskopický pohyb*, který nemá za následek makroskopicky pozorovatelné přemístění náboje. Pokud ve vodiči vytvoříme elektrické pole, tepelný pohyb nabitých částic neustane, ale k náhodné složce rychlosti přibude ještě složka rychlosti ve směru vloženého pole.

Při studiu elektrického proudu v kovových vodičích se zabýváme ustálenými proudy vodivostních elektronů, které v kovu vytváří tzv. *elektronový plyn*. Tyto vodivostní elektrony jsou téměř volné a pohybují se v poli kladných iontů uspořádaných v krystalové mřížce.

Experimentálně lze elektromagnetické pole prokázat silovým působením na elektricky nabité částice. Celkovou sílu  $\vec{F}$  lze rozložit na elektrickou sílu  $\vec{F}_e$ , nezávislou na tom, zda je nabité částice v klidu nebo v pohybu vůči vztažné soustavě a na magnetickou sílu  $\vec{F}_m$ , působící jen na pohybující se částice. Elektromagnetické pole má tedy dvě složky: **elektrické pole**, působící na náboj silou  $\vec{F}_e$  a **magnetické pole**, působící na pohybující se náboj silou  $\vec{F}_m$  [Mayo1, s. 13].

Intenzita elektrického pole  $\vec{E}$  je vektorovou veličinou charakterizující **elektrické pole**. Je definována jako **síla působící na nepohybující se jednotkový bodový náboj**:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} \quad \left[ \frac{V}{m} \right] \quad (23.2.4)$$

kde  $\vec{F}_e$  je elektrická síla působící na náboj  $Q$ .

Magnetická indukce  $\vec{B}$  je vektorovou veličinou charakterizující **magnetické pole**. Je definována vztahem

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad [T] \quad (23.2.5)$$

kde  $\vec{F}_m$  je magnetická síla působící na náboj  $Q$  pohybující se rychlostí  $\vec{v}$ . Jednotkou je **tesla** [T].

Síla, jež působí elektromagnetické pole na pohybující se náboj se nazývá **Lorentzova síla**

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [N] \quad (23.2.6)$$

### 23.2.2. Maxwellovy rovnice

Makroskopická teorie elektromagnetického pole v klasickém pojetí vychází ze základních zákonů vyjádřených **Maxwellovými rovnicemi (MR)**. Lze je zapsat buď v **integrálním**, nebo **diferenciálním tvaru**. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté prostorové oblasti  $\Omega$ , kdežto v diferenciálním tvaru ve vnitřním bodě této oblasti. Soustavu vlastních MR představují první čtyři páry rovnic; často se k nim připojuje jako další základní rovnice elektromagnetického pole rovnice kontinuity pro vodivý proud. Její integrální a diferenciální tvar reprezentují poslední dvě rovnice.

$$\oint_C \mathbf{H} dl = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot } \vec{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (23.2.7)$$

$$\oint_C \mathbf{E} dl = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (23.2.8)$$

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho_V \quad (23.2.9)$$

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (23.2.10)$$

$$\int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{div } \vec{J} = -\frac{d\rho_V}{dt} \quad (23.2.11)$$

Předpokládá se, že všechny křivky a plochy v integrálním tvaru MR jsou po částech hladké a všechny integrované veličiny jsou po částech spojité funkce. Pak je zaručena existence integrálů v těchto rovnicích. V diferenciálním tvaru MR se předpokládají pouze **regulární body** oblastí, což jsou body, v nichž jsou veličiny  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  spojité a spojite differencovatelné funkce; nejsou jimi tedy např. body rozhraní dvou různých prostředí, v elektrickém poli body v nichž jsou umístěny diskrétní náboje, v magnetickém poli body proudových vláken atd.

### 23.3. Elektrostatické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou elektrické náboje. Náboje se nepohybují (tj. nedochází k elektrickému proudu) a tedy nevzniká magnetické pole. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
3. MR	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	$\text{rot } \vec{D} = \rho$
		$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

Tabulka 23.3.1.: Základní rovnice elektrostatického pole

## 23.4. Stacionární proudové pole

V elektrostatice (tj. elektrickém poli nepohybujících se nábojů) neexistuje trvalý elektrický proud. Zdroje napětí (galvanické články, termočlánky, dynamy aj.) mají tu vlastnost, že na jejich záporné svorce je trvale nadbytek elektronů, a na jejich kladné svorce jejich nedostatek. Těmito zdroji můžeme ve vodiči trvale udržovat elektrické pole a tedy i tok nosičů elektřiny. Jestliže se náboje pohybují konstantní rychlostí, hovoříme o stacionárním elektrickém proudu. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
Zákon kontinuity	$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div } \vec{J} = 0$
Ohmův zákon	$I = GU = \frac{U}{R}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$

Tabulka 23.4.1.: Základní rovnice stacionárního proudového pole

### 23.4.1. Elektrický proud v kovových vodičích

V předchozí kapitole 23.2.1 bylo o elektrickém proudu pojednáváno jako o skalární fyzikální veličině. V této kapitole nás bude zajímat makroskopický pohled na „jev“ známý jako **elektrický proud**.

Zopakujme, že elektrickým proudem je méněn uspořádaný pohyb elektrických nábojů, a aby se tyto náboje mohly pohybovat, musí být volné - jsou přítomny v látkách, které nazýváme **vodiče**. Vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (elektrony v kovech, uhlíku a v polovodičích) anebo obojíh znamének (kladné a záporné ionty v elektrolytech, ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Volné nositele náboje (elektrony, ionty) lze rovněž oddělit od těchto látek (vodičů) a vytvořit elektrický proud ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Z vodičů mají největší význam **kovy**, které jsou polykrystalickými látkami s kovovou vazbou. Každý mikroskopický monokrystal kovu má pevnou krystalovou mříž sestavenou z kladných iontů, mezi nimiž se přetřítě pohybují **volné elektrony** rychlostmi, jejichž velikost je statisticky proměnná (co do velikosti i směru). Střední hodnota rychlosti (jako vektoru) všech elektronů je nulová. Střední hodnota rychlosti určitého elektronu je závislá na teplotě vodiče. Elektrony konají tzv. **termický pohyb**. Rychlosti neuspořádaných termických pohybů dosahují jen o několik řádů větších hodnot, než kmity iontů v krystalech mřížky.

Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. ke galvanickému článku), začne statisticky převládat uspořádaný pohyb nosičů kladného (záporného) náboje ve směru (proti směru) vnějšího pole nad termickým pohybem, což v makroskopickém měřítku pozorujeme jako **makroskopický elektrický proud**. Jsou-li ve vodiči přítomny nosiče náboje obou polarit, dojde k pohybu ve vzájemně opačných směrech, přičemž směr toku nosičů kladného náboje se historicky ztotožňuje se směrem toku elektrického proudu. U kovových vodičů je tedy směr proudu právě opačný, než směr toku elektronů, jenž tento elektrický proud tvorí.

Velikost (intenzitu) proudu posuzujeme podle velikosti náboje obojí polarity, který projde určitým průřezem vodiče ve vzájemně opačných směrech za jednotku času. Projde-li průřezem vodiče celkově náboj  $dQ$  za čas  $dt$ , bude tok náboje vodičem charakterizovat skalární veličina

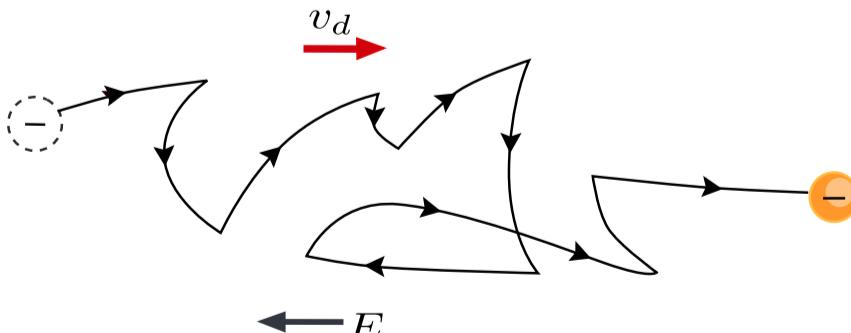
$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A], \quad (23.4.1)$$

která se nazývá **elektrický proud** ( $1C \cdot s^{-1} = 1A$  čteno ampér). Tato jednotka patří mezi základní jednotky SI soustavy.

Pro stacionární (tj. časově neměnný - ustálený) proud můžeme obecný výraz 23.4.1 nahradit rovnicí

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (23.4.2)$$

Jedná-li se o rovnoměrný pohyb bodového náboje  $Q$  po kružnici s periodou  $T$ , resp.



Obrázek 23.4.1.: Pohyb elektronu ve vodiči. Fyzikálně je  $v_d$  průměrná rychlosť nosičů náboje uvnitř vodiče, který je vložen do vnějšího elektrického pole. Ve skutečnosti se ale elektron ve vodiči nepohybuje po přímce, jeho pohyb je chaotický.

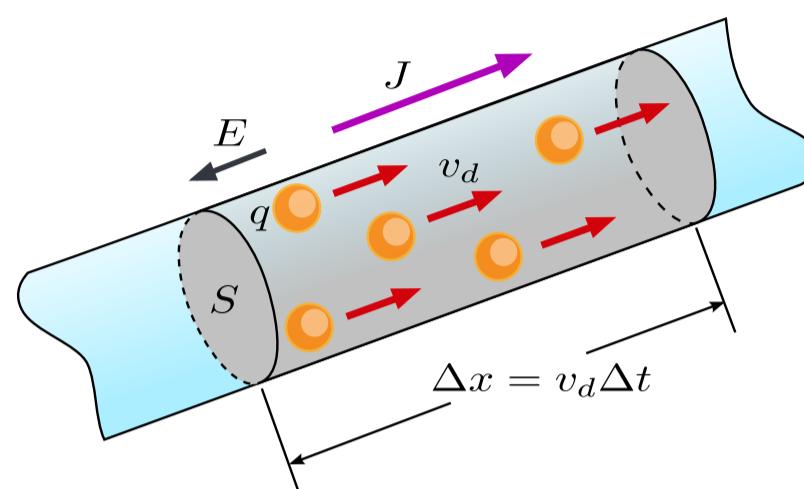
s úhlovou rychlosť  $\omega$ , můžeme vzniklý ustálený proud vyjádřit rovnicí

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}. \quad (23.4.3)$$

Bude-li se element náboje  $dQ$  pohybovat v lineárním útvaru rychlosť  $v = \frac{dQ}{dt}$ , bude po dosazení do rov. 23.4.1 reprezentovat elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl} v = \tau v, \quad (23.4.4)$$

kde  $\tau$  je **délková hustota** náboje a  $v$  je velikost **okamžité rychlosťi** náboje v uvažovaném místě lineárního útvaru.



Obrázek 23.4.2.: Směr elektrického proudu byl implicitně stanoven jako směr pohybu kladných nábojů. Nositeli elektrického náboje uvnitř vodičů jsou ovšem záporně nabité volné elektrony, které se tedy dle konvence pohybují proti směru elektrického proudu. Elektrický proud může protékat pevnými látkami (kovy, polovodiči), kapalinami (elektrolyty) a ionizovanými plyny. Látky, které nevedou elektrický proud, nazýváme nevodiči, izolanty

Elektrický proud je veličina, která obecně popisuje prostorový jev. Omezíme se nyní na běžný případ vodiče, jako je na obr. 23.4.2, který má volné náboje jen jedné polarity (u kovových vodičů jde o elektrony) a označme  $\rho_0$  prostorovou hustotu volného náboje a  $v_d$  velikost usměrněné rychlosťi jejich nositelů (elektronů). Pak za čas  $dt$  projde průřezem o obsahu  $S_0$  ( $S_0 \perp v_d$ ) náboj  $dQ = \rho_0 S_0 v_d dt$ . Elektrický proud vyjádřený rov. 23.4.1 můžeme přepsat do tvaru

$$I = \rho_0 S_0 v_d = -en_0 S_0 v_d, \quad (23.4.5)$$

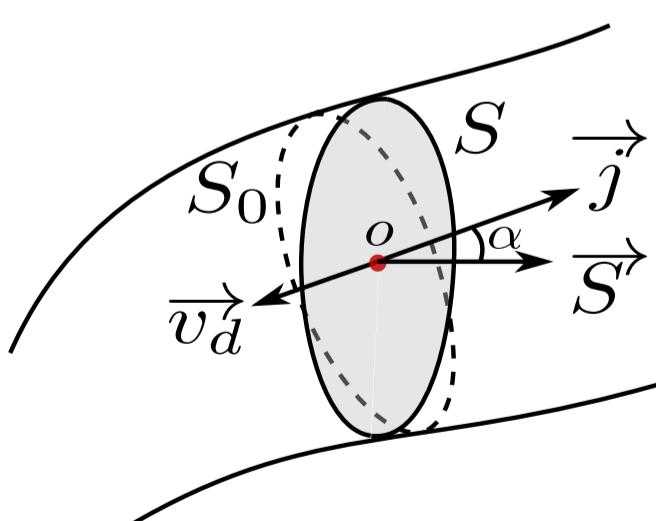
kde  $n_0 = \frac{\rho_0}{-e}$  je počet nositelů volného náboje (tj. v našem případě elektronů, z nichž každý nese náboj  $-e$  v jednotkovém objemu vodiče, přičemž pro elektrony zřejmě je  $\rho_0 < 0$ ).

Rovinnou plochu  $S$  průřezu můžeme zavést jako vektor  $vrS$ , který má směr daný normálou k ploše a pravidlem pravé ruky (ukazují-li prsty pravé ruky směr oběhu po hraniční křivce plochy, ukáže palec směr plochy jako vektoru  $\mathbf{S}$ ). Protože driftová rychlosť  $v_d$  je také vektor, nebudeme obecně uvažovat vektory  $\mathbf{S}, \mathbf{v}_d$  o stejném směru a rovnici 23.4.5 přepíšeme do obecnějšího tvaru

$$I = \rho_0 \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{v}_d = j S \cos \alpha = j S_0, \quad (23.4.6)$$

kde  $S_0 = S$  pro  $\alpha = 0$  (viz obr. 23.4.3) a

$$\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{v}_d, \quad (23.4.7)$$



Obrázek 23.4.3.: Rovinná plocha  $S = S_0 \cos \alpha$

je proudová hustota. Je to vektor o velikosti

$$j = \frac{I}{S \cos \alpha} = \frac{I}{S_0} \quad A \cdot m^{-2}, \quad (23.4.8)$$

obecněji

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (23.4.9)$$

a o směru vektoru driftové rychlosti nositelů kladného náboje. Pro případ nositelů volného náboje - elektronů má proudová hustota opačný směr než driftová rychlosť  $v_d$  (obr. 23.4.3).

Velikost vektoru  $j$  má význam plošné hustoty elektrického proudu v uvažovaném místě průřezu. Jednotkou je  $A \cdot m^{-2}$ .

Nebude-li proudová hustota na uvažovaném průřezu konstantní, bude celkový elektrický proud procházející průřezem o obsahu  $S$  dán integrálem

$$I = \int_S j dS. \quad (23.4.10)$$

**Příklad 23.4.1.** Driftová rychlosť elektronů ve vodiči: Vodičem z jednomocné mědi o průřezu  $S_0 = 1 \text{ mm}^2$  prochází elektrický proud  $I = 5 \text{ A}$ . Vypočtěte:

- počet volných elektronů v jednotkovém objemu Cu,
- úhrnný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu,
- driftovou rychlosť volných elektronů při proudu  $I$ .

Měd má poměrnou atomovou hmotnost  $A_r = 63,54$  a hustotu<sup>2</sup>  $s = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Řešení:**

- Jeden mol mědi o molové hmotnosti  $M = 0,06354 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  a o molovém objemu

$$V_m = \frac{M}{s} = \frac{63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{8,93 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} = 7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

obsahuje  $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23}$  jednoatomových molekul Cu na jeden mol, z nichž každý má volný jeden (valenční) elektron. Tedy počet volných elektronů v jednotkovém objemu je

$$n_0 = \frac{N_A}{V_m} = \frac{s N_A}{M} = \frac{6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

- Úhrnný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu mědi je

$$Q_v = -e \cdot n_0 = -1,36 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

- Velikost driftové rychlosti určíme ze vztahu  $I = -en_0 v_d S_0 = -Q_v v_d S_0$  tj.

$$v_d = \left| \frac{I}{Q_v S_0} \right| = \frac{5}{1,36 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{C} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{C} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2} = 3676 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,3676 \text{ m/s}$$

Z provedených výpočtů si můžeme udělat názor o mikroskopických poměrech v kovových vodičích: počet volných nositelů náboje - elektronů a jejich úhrnný náboj v jednotkovém objemu je značný a proto driftová rychlosť elektronů potřebná k vytvoření proudu běžné velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá (doslova hlemýzdí).

**Příklad 23.4.2.** Elektricky neutrální měděná mince o hmotnosti  $m = 3,11 \text{ g}$  obsahuje stejné množství kladného a záporného náboje. Jaké je velikost kladného (nebo záporného) náboje obsaženého v minci?

**Řešení:**

Neutrální atom má záporný náboj  $Z \cdot e$ , představovaný jeho elektronem a kladný náboj o stejně velikosti představovaný protonem v jádře. Pro měd je atomové číslo  $Z$  rovno 29, tj. atom mědi má 29 protonů, a je-li elektricky neutrální, také 29 elektronů.

Náboj o velikosti  $Q_v$ , který hledáme je roven  $N Z_e$ , kde  $N$  je počet atomů obsažených v jednom molu (Avogadrova konstanta:  $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ). Počet molů mědi v minci  $\frac{m}{M}$ , kde  $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  je molární hmotností mědi:

$$N = N_A \cdot \frac{m}{M} = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \frac{3,11 \text{ g}}{63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2,95 \cdot 10^{22}.$$

Velikost celkového kladného (záporného) náboje v minci je pak

$$Q_v = N Z_e = 2,95 \cdot 10^{22} \cdot 29 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 137039 \text{ C}$$

To je obrovský náboj. Pro srovnání: třeme-li ebonitovou tyč vlněnou látkou, můžeme na tyč přemístit steží náboj o velikosti  $10^{-9} \text{ C}$ .

<sup>2</sup>Pro hustotu budeme používat alternativní značku  $s$ , s ohledem na kolizi značky  $\rho$ , jež označuje hustotu náboje.

### 23.4.2. Práce a výkon elektrického proudu

**Příklad 23.4.3.** Za jakou dobu uvede ponorný vodič o příkonu  $600 \text{ W}$  do varu  $1 \text{ l}$  vody o počáteční teplotě  $20^\circ\text{C}$ . Uvažujte měrnou teplenu kapacitu vody  $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Výměnu tepla s okolím neuvažujte.

**Řešení:**

Pro var vody bude zapotřebí tepla dle rovnice  $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$ . Potřebná elektrická práce je  $Q_e = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$  a tedy dobu ohřevu stanovíme z rovnice:

$$\begin{aligned} P \cdot t &= m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{m \cdot c}{P} \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{1 \cdot 4200}{600} \cdot (100 - 20) \\ t &= 560 \text{ s} \end{aligned}$$

### 23.4.3. Ohmův zákon

Uvažujme vodič u něhož jsou volnými nositeli náboje *elektrony*. Nyní v mezích klasické mechaniky kvantitativně popíšeme mechanismus vedení proudu, který povede k všeobecně známému **Ohmovu zákonu**

Umístíme-li vodič do elektrického pole o intenzitě  $\vec{E}$  (např. připojením ke galvanickému článku), působí na každý volný elektron síla  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , která mu podle Newtonova zákona udělí zrychlení  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}$  proti směru vnějšího pole. Tím získávají chaoticky se pohybující elektrony ještě složku rychlosť v protisměru vloženého elektrického pole  $\vec{E}$  a dojde tedy k usměrnění driftového pohybu volných elektronů a v souladu s kapitolou 23.4.1 pozorujeme, že ve vodiči vznikl makroskopický elektrický proud.

Pohyb elektronu se ovšem neobejde bez sňážek s ionty v krystalové mřížce. Dráhu, kterou se elektron podaří urazit, nazýváme *volnou dráhou*  $d$ . Průměrná doba mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami nechť je  $\tau$  za tu dobu se bude elektron rovnoměrně urychlovat a těsně před následující srážkou jeho rychlosť dosáhne maxima tj.  $\vec{v}_{max} = \vec{a} \cdot \tau$ . Nás ovšem zajímá průměrná rychlosť (*driftová rychlosť*) na volné dráze průměrné velikosti:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{v}_{max}}{2} = -\frac{e\tau}{2m_e} \vec{E} \quad (23.4.11)$$

Proudová hustota 23.4.7 bude

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{v}_d = -en_0 \vec{v}_d = -\frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \vec{E} \quad (23.4.12)$$

Koefficient úměrnosti

$$\gamma = \frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \quad (23.4.13)$$

je závislý na počtu nositelů (elektronů)  $n_0$  v jednotkovém objemu a na době  $\tau$ , neboli na délce volné dráhy. Veličina  $\gamma$  se nazývá *měrná elektrická vodivost* neboli **konduktivita** látky. Protože dobu  $\tau$  nelze přímo měřit, určuje se  $\gamma$  experimentálně. Přitom se zjišťuje, že pro určitou teplotu zkoumané látky je  $\gamma$  konstantní.

*poz* Po zavedení pojmu měrná elektrická vodivost látky 23.4.13, můžeme výraz 23.4.12 přepsat do výsledného tvaru

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (23.4.14)$$

který se v literatuře označuje jako **Ohmov zákon v diferenciálním tvaru** (i když se v pravém slova smyslu o diferenciální tvar nejedná). Výstižnější je označení *lokální tvar Ohmova zákona*, protože výraz 23.4.14 se vztahuje na určité místo, resp. bod, vodivého prostředí. Vztah říká, že proudová hustota v určitém bodě vodivého prostředí je přímo úměrná intenzitě vloženého elektrického pole v tomto bodě (platí pro určitou teplotu prostředí).

Uvažujme nyní lineární homogenní vodič délky  $l$  a příčného průřezu o obsahu  $S_0$ , připojený ke zdroji o napětí  $U$ . Pak intenzita pole uvnitř vodiče bude mít konstantní velikost  $E = \frac{U}{l}$ . Dosadíme-li za velikost proudové hustoty  $j = \frac{I}{S_0}$  do 23.4.14, dostaneme vztah

$$\frac{I}{S_0} = \gamma \frac{U}{l}, \quad (23.4.15)$$

z něhož vyplývá známý vztah

$$U = \frac{l}{\gamma S_0} I = RI, \quad (23.4.16)$$

kde

$$R = \frac{l}{\gamma S_0} = \rho \frac{l}{S_0}, \quad (23.4.17)$$

je **elektrický odpór** uvažovaného lineárního vodiče, přičemž  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  je *měrný elektrický odpór (rezistivita)*<sup>3</sup>. Výraz 23.4.17 představuje klasický Ohmův zákon experimentálně objevený r. 1826 G. S. Ohmem. Jednotky:

- elektrický odpór:  $\text{VA}^{-1}$ ,

<sup>3</sup>Zde je další kolize značky  $\rho$ . Nyní se tomuto problému vyhne využíváním pouze konduktivity, jenž se častěji používá v teorii elektromagnetického pole.

- měrný elektrický odpor:  $\Omega \text{ m}$ ,
- měrná elektrická vodivost:  $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

**Příklad 23.4.4. Zemnicí elektroda:** Uvažujte zemnicí elektrodu ve tvaru koule o poloměru  $a = 200 \text{ mm}$ , uloženou do zeminy v hloubce, která je značně větší než je poloměr  $a$ . Pro jednoduchost řešení dále předpokládejte, že přívodní drát je od zeminy izolován (obr. 23.4.4). Zemina má měrnou vodivost  $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ . Při zkratu teče přívodním drátem proud  $I = 50 \text{ A}$ . Vypočítejte:

a) Závislost potenciálu  $\varphi = \varphi(r)$  elektrického pole, které se vytvoří v zemině při zkratu, kde  $r$  je vzdálenost od středu elektrody. Potenciál normujte volbou  $\varphi(\infty) = 0$ .

b) Zemnicí odpor elektrody, který je definován vztahem

$$R_z = \frac{U_z}{I_z},$$

kde  $U_z = \varphi(a) - \varphi(\infty)$  je zemnicí napětí

c) Ztrátový výkon při zkratu.

**Řešení:** Ekvipotenciální a proudové plochy mají zřejmě kulový tvar se středem totožným s geometrickým středem elektrody. Proudová hustota na kulové ploše obecného poloměru  $r$  (viz. obr. 23.4.4) je

$$\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{n},$$

kde  $\vec{n}$  je jednotkový vektor ve směru normály. Pak v bodech na této ploše musí být elektrické pole o intenzitě  $\vec{E}$ , kterou určíme ze vztahu

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{n}.$$

Závislost potenciálu  $\varphi = \varphi(r)$  tohoto elektrického pole stanovíme pomocí následujícího integrálu

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{r} + C = - \frac{I}{4\pi\gamma} \int \frac{dr}{r^2} + C = \frac{I}{4\pi\gamma r} + C,$$

kde integrační konstantu  $C$  určíme z okrajové podmínky  $\varphi(\infty) = 0$ , odkud  $C = 0$ . Hledaná závislost potenciálu je

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma r}, \quad r \in (a, \infty).$$

Zemina, v níž je uložena elektroda, je vastně rezistorem, jehož jeden okraj tvoří elektroda a druhým okrajem je nekonečně rozlehý vodivý prostor. Potenciální rozdíl mezi těmito okraji je

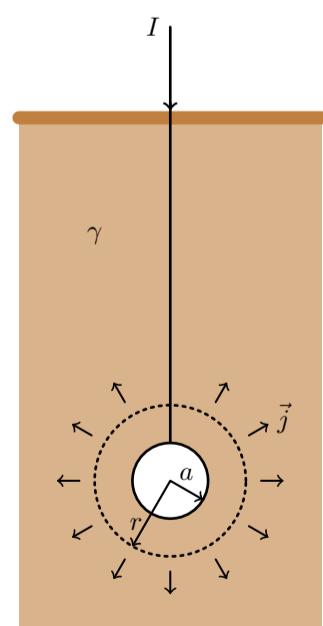
$$U_z = \varphi(a) - \varphi(\infty) = \frac{I}{4\pi\gamma a},$$

odkud zemnicí odpor

$$R_z = \frac{U_z}{I} = \frac{I}{4\pi\gamma a} = 22,1 \Omega$$

a ztrátový výkon

$$P_z = R_z \cdot I^2 = 55,3 \text{ kW}.$$



Obrázek 23.4.4.: Zemnicí elektroda

#### 23.4.4. Elektromotorické napětí

Uzavřený proudový okruh  $C$ , nechť je v dynamické rovnováze - prochází jím ustálený elektrický proud. Uvažujme pro jednoduchost představy kladný náboj - ten se musí pohybovat ve směru klesajícího potenciálu (záporný náboj ve směru stoupajícího potenciálu). Je-li okruh uzavřený, musí kladné náboje opět vystoupit na místo s vyšším potenciálem - musí se tedy pohybovat proti elektrostatickým silám. Proto proti úbytku

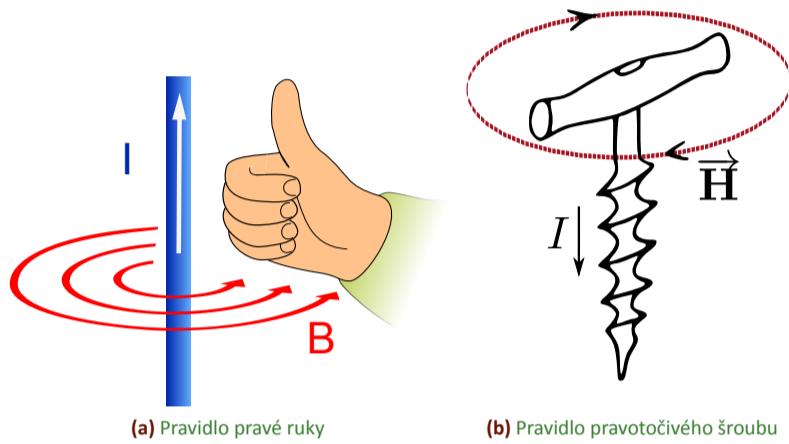
### 23.5. Stacionární magnetické pole

Zdrojem stacionárního magnetického pole jsou stejnosměrné proudy nebo permanentní magnety. Základní rovnice stacionárního magnetického pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
1. MR	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\text{rot } \vec{H} = \mathbf{J}$
4. MR	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
		$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Tabulka 23.5.1.: Základní rovnice magnetického stacionárního pole

Směr vektoru  $\mathbf{H}$  se prakticky určí například *pravidlem pravotočivého šroubu*: vodič nahradíme šroubem (s pravotočivým závitem) a otáčíme jím tak, aby se pohyboval ve směru proudu; směr otáčení pak udává směr vektoru  $\mathbf{H}$ . Vše je názorně vysvětleno na obrázku 23.5.1b. Podobných pomůcek existuje více, např. *pravidlo pravé ruky*: vodič uchopíme do dlaně pravé ruky tak, aby palec ukazoval směr proudu; prsty pak ukazují směr vektoru  $\mathbf{H}$ , obr. 23.5.1a.

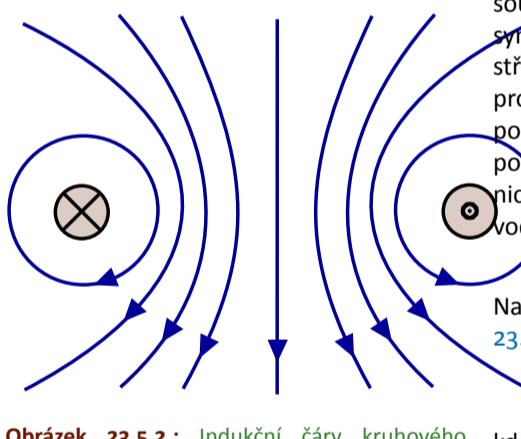


Obrázek 23.5.1.: Určení směru vektoru  $\mathbf{H}$ : a) pravidlem pravé ruky; b) pravidlem pravotočivého šroubu

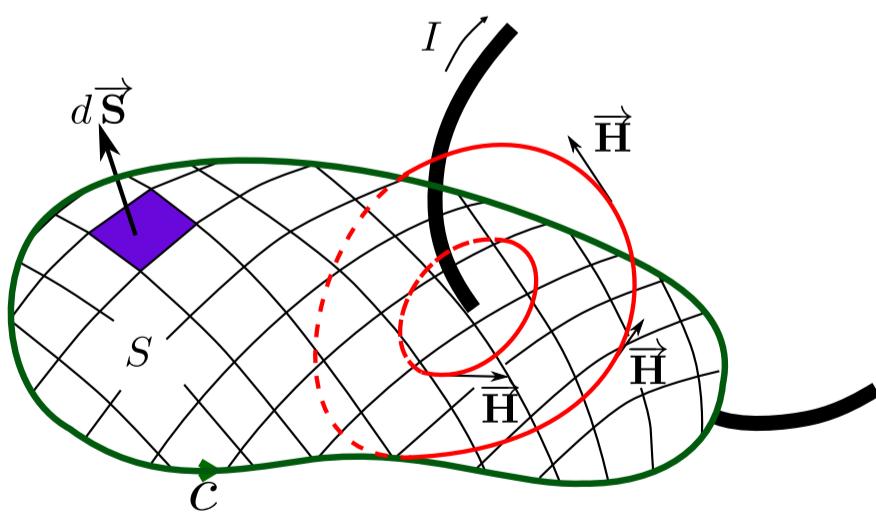
K procvičení téhoto pravidel je na obr. 23.5.2 vyznačen směr indukčních čar kruhového závitu. Označení  $\otimes$  vyjadřuje proud vstupující do nákresny (symbol letícího šípu od pozorovatele) a označením  $\odot$  proud vystupující z nákresny (symbol hrotu šípu).

Rovnice 23.5.1 představuje **zákon celkového proudu** vyjadřující, rovnost oběhového magnetického napětí na libovolné uzavřené orientované křivce  $c$  proudu, který je s křivkou  $c$  spřažen. "Spráženým proudem" rozumíme proud, který prochází libovolnou plochou  $S$ , jež je ohrazena křivkou  $c$ , přičemž plocha  $S$  je orientována vůči křivce  $c$  pravotočivě (obr. 23.5.3). [Mayo1, s. 55].

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (23.5.1)$$



Obrázek 23.5.2.: Indukční čáry kruhového závitu.



Obrázek 23.5.3.: K zákonu celkového proudu

Základní úlohou řešení stacionárních proudových magnetických polí je určení rozložení veličin  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{B}$  v

prostoru, je-li dáno prostorové a materiálové uspořádání a elektrické proudy vybuzují řešené magnetické pole.

V následujících úlohách se omezíme na analýzu jednodušších, souměrných magnetických polí v lineárním izotropním alespoň po částech homogenním prostředí. Pro zjednodušení budeme zanedbávat deformaci magnetického pole v okrajových oblastech a nebudeme uvažovat vliv blízkosti nesymetrického rozhraní a vliv blízkosti druhého zdroje magnetického pole. (Pro přesnější řešení by pak bylo nutné použít tzv. *metodu zrcadlení*.) Některá složitější pole lze rozdělit na několik jednodušších polí souměrného charakteru, resp. typického uspořádání. Vzhledem k tomu, že v předpokládaném lineárním prostředí ( $\mu = \text{konst}$ ) platí pro stacionární magnetické pole *princip superpozice*, lze samostatně vyřešit nejpreve dílčí jednodušší pole jednotlivých proudů  $I_j$  a po jejich superpozici

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j(I_j), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j(I_j) \quad (23.5.2)$$

získáme výsledné pole celkového proudu [Kot99, s. 181].

Metodou přímé aplikace I. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru pro stacionární magnetické pole proudové

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C H \cos \alpha dl = I_c \quad (23.5.3)$$

lze jednoduše použít tehdy, je-li ze zadané úlohy zřejmá taková symetrie pole, že lze z nekonečně mnoha uzavřených křivek, splňující rov. 23.5.3, nalézt takovou integrační dráhu  $c$ , která obepíná proud  $I_c$  vytvázející magnetické pole a v jejíchž bodech platí podmínka

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = \text{konst}, \quad (23.5.4)$$

speciálně

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = 0. \quad (23.5.5)$$

Podmínka  $\alpha = 0$ , tj.  $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{l}$  je identicky splněna na siločáre magnetického pole. Siločáry souměrných stacionárních magnetických polí splňují tedy podmínu 23.5.5 a řešení rovnice 23.5.3 při integraci po takovéto siločáre je jednoduché

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \oint_C dl = I_c \rightarrow H = \frac{I_c}{l_c} \quad (23.5.6)$$

kde  $l_c$  je délka integrační dráhy  $c$  splňující podmínu 23.5.5.

Klasickým případem takovéto úlohy je magnetické pole *dlouhého přímého válce* vedeného vodiče o poloměru  $a$ , délky  $l$  protékaného proudem  $I$  rozloženým po průřezu souměrně kolem osy vodiče, tzn. obecně s hustotou  $J = J(r)$ . Z osové (rotační) symetrie vyplývá, že siločáry magnetického pole mají tvar soustředných kružnic se středem v ose vodiče, ležících v rovině kolmé na osu vodiče (obr. 23.5.5). Úlohy proto řešíme ve válcových souřadnicích s osou  $z$  totožnou s osou vodiče. Za předpokladu, že průměr vodiče je zanedbatelný vůči jeho délce lze zanedbat deformaci pole vlivem konců válcového vodiče a přejít na rovinný problém v polárních souřadnicích. Z důvodu osové souměrnosti je však pole závislé jen na vzdálenosti  $r$  od osy vodiče tj.

$$H = H(r), \quad B = B(r).$$

Na kruhových siločárách je tedy splněna podmínu 23.5.5 a z I. Maxwellovy rovnice 23.5.3

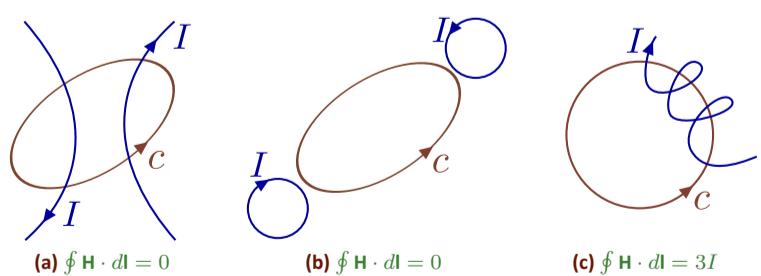
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cos 0 \oint_C dl = I(r), \quad (23.5.7)$$

kde  $c$  je kružnice o poloměru  $r$  a proud  $I(r)$  je dán rovnicí

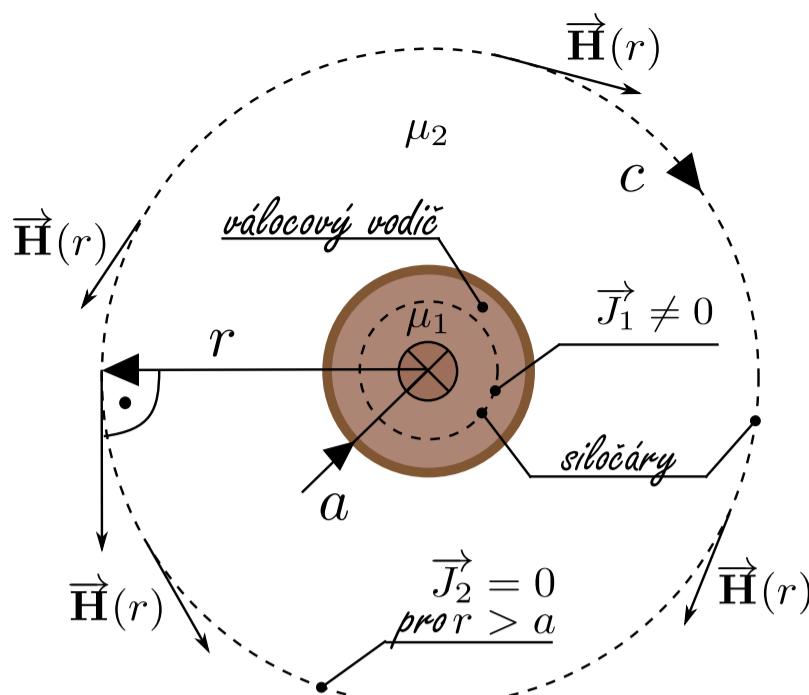
$$I(r) = \int_{S(r)} \mathbf{J}(r) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^r J(r) 2\pi r dr \quad (23.5.8)$$

je proud protékající přes kruhovou plochu  $S(r)$  ohrazenou kružnicí o poloměru  $r$ . Pak intenzita magnetického pole ve vzdálenosti  $r$  od osy vodiče má velikost

$$H = H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r}, \quad (23.5.9)$$



Obrázek 23.5.4.: K pojmu "proud sprážený s křivkou" pro tři různé případy křivky  $c$ .

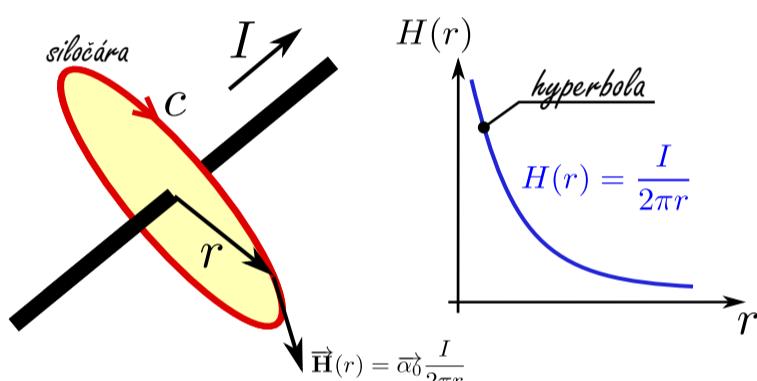


Obrázek 23.5.5.: Pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

a magnetická indukce

$$B = B(r) = \frac{\mu I(r)}{2\pi r}, \quad (23.5.10)$$

přičemž  $\mu$  je *permeabilita* v bodech na poloměru  $r$ . Magnetické pole v okolí kruhového přímého vodiče protékaného proudem  $I$  viz obr. 23.5.6 je tedy v souladu s předchozími úvahami dánou výrazy [Kot99, s. 183 - 185]:



Obrázek 23.5.6.: Průběh intenzity magnetického pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

$$H = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}. \quad (23.5.11)$$

Jelikož 1. MR má nenulovou pravou stranu v magnetickém poli obecně není splněna nutná a postačující podmínka, aby magnetické napětí

$$\int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{m_{MN}} \quad [A] \quad (23.5.12)$$

nezáviselo na tvaru integrační cesty  $l$  z  $M$  do  $N$ . Tedy obecně nelze zavést *skalární magnetický potenciál*. Magnetické pole je tedy obecně **vírové (nepotenciální)**.

Všimněme si však speciálních případů, kdy pravá strana 1. MR je nulová a tedy magnetické pole bude **nevírové (magnetostatické)**. K tomu dochází buď v oblasti kde

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (23.5.13)$$

tj. takové v němž neexistuje uzavřená křivka  $c$  spřažená s nějakým proudem, nebo v takovém bodu, v němž platí

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad (23.5.14)$$

tj. v bodu v němž je  $\mathbf{J} = 0$ .

Analogicky jako v elektrostatice, lze pak zavést magnetický potenciál  $\varphi_m$  vztahem

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (23.5.15)$$

Jednotkou  $\varphi_m$  je *ampér* [A]. Pro magnetické napětí mezi body  $M, N$  platí analogicky

$$U_{MN} = \int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varphi_m(M) - \varphi_m(N), \quad (23.5.16)$$

nezávisle na integrační cestě  $l$ .

### 23.5.1. Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí

Z předchozí kapitoly vyplývá, že intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}$  lze stanovit pomocí vztahu  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$  tehdy, víme-li předem, že daným bodem prochází silová čára, na níž je intenzita pole konstantní,  $H_s = \text{konst.}$  V tomto případě se kříkový integrál změní v pouhý součin intenzity pole a délky silové čáry

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_s \oint_C l = H_s \cdot l_s \quad (23.5.17)$$

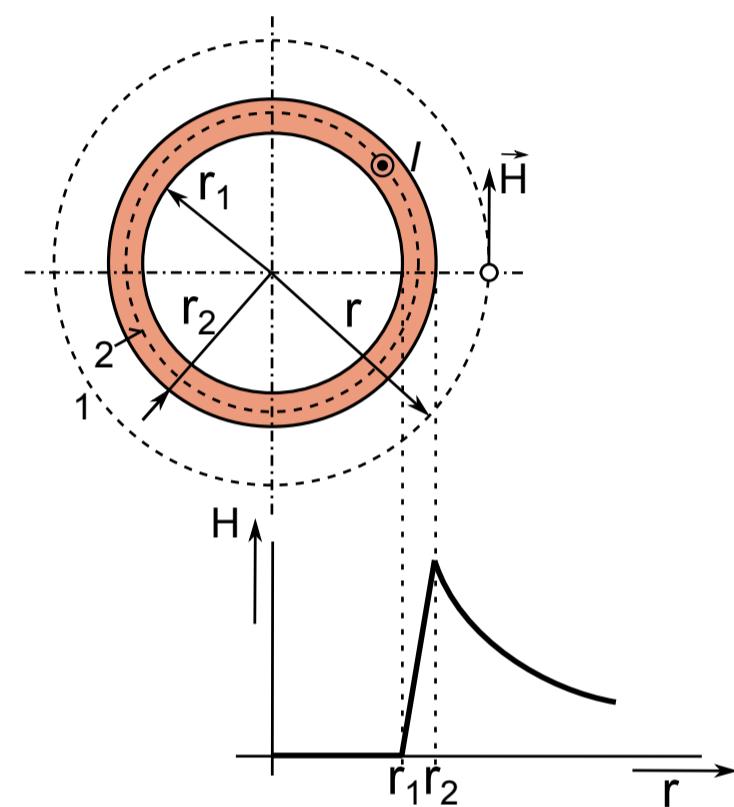
takže lze vypočítat intenzitu pole

$$H_s = \frac{I}{l_s}$$

pro body silové čáry.

Tohoto postupu lze použít i tam, kde uvedená podmínka není splněna, avšak pole lze vyjádřit superpozicí dílčích polí, z nich každé tuto podmínku splňuje, viz příklad 23.5.2.

**Příklad 23.5.1.** Stanovte intenzitu magnetického pole  $H = f(r)$  dlouhého dutého válcového vodiče podle obr. 23.5.7 při rovnoramenném rozložení proudu  $I$  po průřezu.



Obrázek 23.5.7.: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého dutého válcového vodiče protékaného proudem

Vodič s rovnoramenně rozloženým proudem podle obr. 23.5.7 je rotačně souměrný podle své osy a tedy i jeho magnetické pole je souměrné. Silové čáry jsou soustředné kružnice, vektor  $\mathbf{H}$ , jenž má směr tečny ke kružnici, je po celé délce kružnice stejně velký. Lze tedy snadno použít integrálního tvaru 1. MR (zákon celkového proudu)

Pro body ležící vně vodiče obepíná kruhová integrační dráha (vedená po silové čáre 1) celý proud vodiče  $I$  a platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I \quad (23.5.18)$$

takže intenzita pole je

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (23.5.19)$$

Ve stěně dutého magnetického vodiče jsou silové čáry rovněž kružnice, neboť magnetické pole je i zde souměrné. Tyto silové čáry však obepínají jen část proudu  $I'$  vodiče pro oběh silové čáry 2 platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I' = \pi(r^2 - r_1^2)J \quad (23.5.20)$$

kde  $J$  je hustota proudu ve vodiči

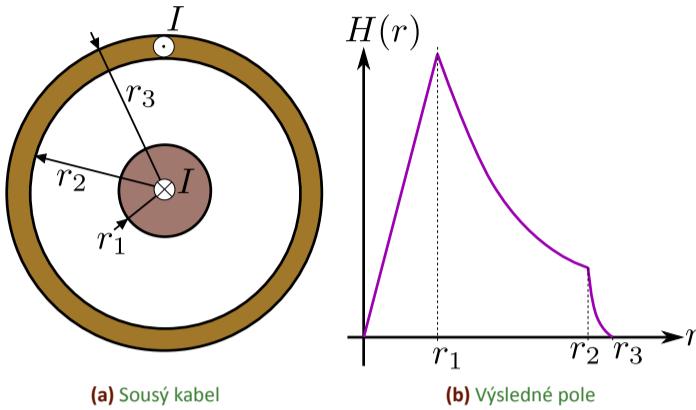
$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \quad (23.5.21)$$

Ve stěně vodiče je tedy intenzita pole

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (23.5.22)$$

V dutině vodiče je intenzita rovna nule. Vzhledem k souměrnosti pole by i zde muselo platit  $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r$ . Protože dráha s poloměrem  $r < r_1$  neobepíná žádný proud, je  $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$  a tedy musí být  $H = 0$ .

**Příklad 23.5.2.** Stanovete intenzitu magnetického pole dlouhého přímého sousého kabelu podle obr. 23.5.8a. Středním vodičem (žilou) prochází proud  $I$  a týž proud opačného smyslu prochází vnějším vodičem (pláštěm). Proud jsou rovnoměrně rozloženy po průzezech vodičů. Nakreslete graf průběhu  $H = f(r)$  [DM70, s. 92], [Kot99, s. 195].



Obrázek 23.5.8.: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého sousošího kabelu protékaného proudem: a) náčrt; b)  $H = f(r)$

**Řešení:** Rovnici 23.5.17 aplikujeme na jednotlivé intervaly osově souměrného starionárního magnetického pole, přičemž se prakticky jedná o superpozici dvou polí. V oblasti  $r < r_2$  se uplatňuje pouze pole vnitřního válcového vodiče (žily), pro  $r > r_2$  přistupuje sousosé pole vnějšího trubkového vodiče.

- Pro oblast  $r < r_1$  je vzhedem k

$$dI = J dS$$

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_S dI = \int_S J dS = \int_S J \cos \beta dS \\ &= \left| \begin{array}{ll} \beta = 0 & H = \text{konst} \\ S = \pi r^2 & dS = 2\pi r dr \end{array} \right| = J \int_0^r 2\pi r dr = J\pi r^2 \end{aligned}$$

hledané řešení 1. MR dáno

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1 2\pi r = I(r) = J\pi r^2$$

kde celková proudová hustota je

$$J = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

a tedy

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r$$

- Pro oblast  $r_2 > r > r_1$  řešíme v podstatě pole vně osamoceného válcového vodiče  $I(r)$  a tedy

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

- Pro  $r > r_3$  je magnetické pole vytvářeno celým proudem žily  $I$  a příslušnou částí proudu pláště  $J\pi(r^2 - r_2^2)$ , kde proudová hustota

$$J = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

má opačnou orientaci oproti proudové hustotě žily.

Pak

$$\begin{aligned} I(r) &= I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\ \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} &= H_3 2\pi r = I(r) \\ H_3 &= \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme superpozicí opačně orientovaných polí

$$H_3 = H'_3 - H''_3 = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \left( \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

Průběh  $H(r)$  je na obr. 23.5.8b.

### 23.5.2. Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru

Nechť je opět magnetické pole vyvoláno konstantním el. proudem  $I = \text{konst}$ . Jak vyplývá z předchozí kapitoly, základním vztahem pro toto pole je Ampérův zákon

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = I$$

Zvolme za integrační dráhu  $c$  obvod malé plošky  $\Delta S$ , jíž prochází proud  $\Delta I = J_n \Delta S$ , kde  $J_n$  je průměr vektoru hustoty proudu do směru normály plošky  $\Delta S$  (předpokládáme, že ploška  $\Delta S$  je dostatečně malá, aby se dalo počítat s konstantní hustotou proudu v celém jejím rozsahu) [Trn72, s. 13]. Pro zvolený případ platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = J_n \Delta S \rightarrow \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = J_n \quad (23.5.23)$$

Pro  $\Delta S \rightarrow 0$  zavedeme označení

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = J_n \quad (23.5.24)$$

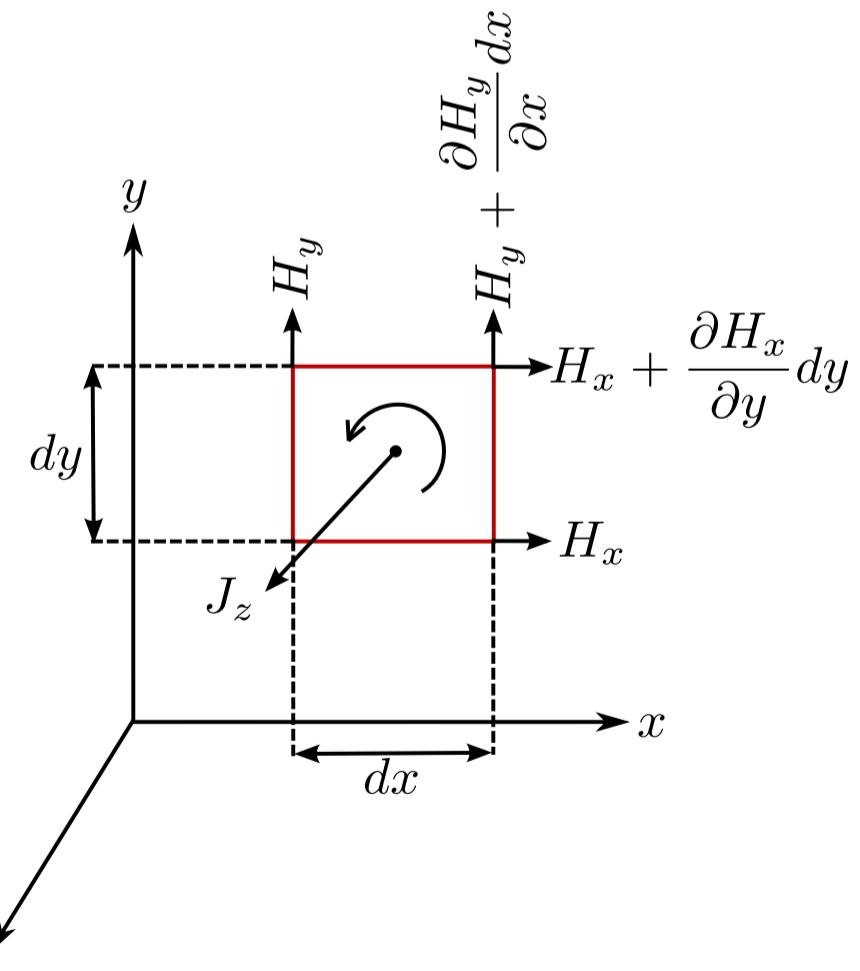
Rovnice 23.5.24 říká, že rotace vektoru  $\mathbf{H}$ , ( $\text{rot } \vec{H}$ ), jehož průměr do určitého směru je roven průměru vektoru hustoty proudu do tohoto směru. Z uvedených vztahů je patrný fyzikální význam rotace vektoru  $\mathbf{H}$ . Je to vektor, jehož velikost je rovna oběhovému magnetickému napětí po dráze v rovině kolmé k vektoru hustoty proudu, vztaveném k ploše obepínané oběhovou drahou (v nehomogenní poli to platí pro případ, že se plocha dráhy blíží k nule).

Při použití pravoúhlé soustavy kartézských souřadnic  $x$ ,  $y$  a  $z$  jsou průměry vektoru  $\text{rot } \vec{H}$  do jednotlivých os

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = J_x, \quad \text{rot}_y \mathbf{H} = J_y, \quad \text{rot}_z \mathbf{H} = J_z \quad (23.5.25)$$

Průměr  $\text{rot}_x \mathbf{H}$  je dán oběhovým magnetickým napětím po obvodu plošky  $dydz$  a platí

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{1}{dydz} \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{dydz} \left[ H_y dy + \left( H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right) dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{dydz} \left[ \left( H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \right) dy - H_z dz \right] \\ &= \frac{1}{dydz} \left[ \frac{\partial H_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz \right] = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z \end{aligned} \quad (23.5.26)$$



Obrázek 23.5.9.: Odvození pojmu  $\text{rot}_z \mathbf{H}$

tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \\ \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \\ \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z\end{aligned}\quad (23.5.27)$$

Pro pravoúhlé souřadnice  $x, y, z$  můžeme tedy vztah  $\text{rot } \vec{H} = \mathbf{J}$  rozepsat na tvar

$$\begin{aligned}\text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} \text{rot}_x \mathbf{H} + \mathbf{j} \text{rot}_y \mathbf{H} + \mathbf{k} \text{rot}_z \mathbf{H} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{i} J_x + \mathbf{j} J_y + \mathbf{k} J_z = \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (23.5.28)$$

Rotaci vektoru  $\text{rot } \vec{H}$  můžeme též symbolicky vyjádřit vektorovým součinem Hamiltonova operátora a vektoru  $\mathbf{H}$

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z) \quad (23.5.29)$$

nebo také determinantu

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (23.5.30)$$

cylindrických souřadnic  $r, \varphi, z$ :

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi \\ \text{rot}_z \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = J_z\end{aligned}\quad (23.5.31)$$

sférických souřadnic  $r, \varphi, \vartheta$

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right] = J_\varphi \\ \text{rot}_\vartheta \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi \sin \vartheta) \right] = J_\vartheta\end{aligned}\quad (23.5.32)$$

Podobně jako v elektrickém poli vyjadřujeme vztah  $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q$  vztahem  $\text{div } \vec{D} = \rho$ , tak i v magnetickém poli vyjadřujeme vztah  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$  vztahem  $\text{div } \vec{D} = 0$ , nebo též v kartézských souřadnicích  $x, y, z$  jako

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

### 23.5.3. Rovnice pro magnetický potenciál

V regulárních bodech lineárního homogenního izotropního magnetika platí pro  $\varphi_m$   
Laplaceova rovnice

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (23.5.33)$$

Důkaz plyně z rovnice  $\text{div } \vec{B} = 0$  a rovnice  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ :

$$\text{div } \vec{B} = \text{div} \mu \vec{H} = \text{div} \mu (-\text{grad} \varphi_m).$$

Pro  $\mu = \text{konst}$  dostáváme  $\text{div} \text{grad} \varphi_m = 0$ , což je rovnice 23.5.33.

Na rozhraní mezi dvěma magneticky různými prostředími neplatí Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru a tedy ani Laplaceova rovnice 23.5.33. Podmínky pro  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{B}$  na rozhraní vyjádříme pomocí skalárního magnetického potenciálu

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (23.5.34)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (23.5.35)$$

kde  $\frac{\partial}{\partial n}$  jsou derivace ve směru normály k rozhraní.

#### 23.5.3.1. Vektorový magnetický potenciál

V elektrostatice jsme pro usnadnění mnohých problémů zavedli skalární elektrický potenciál - lze jej zavést vždy, neboť elektrostatické pole je vždy potenciální. Magnetické pole je však obecně vírové. Lze jej popsat skalárním potenciálem jen ve speciálních případech, tj. jestliže je polem potenciálním. Obecně je však zavedení skalárního potenciálu nepřípustné. Lze i pak zavést nějakou veličinu (analogickou skalárnímu potenciálu), s níž by se pracovalo snáze, než přímo s vektory pole?

Dříve než definujeme vektorový magnetický potenciál, zopakujme zavedení skalárního potenciálu v elektrostatice. Vyjdeme z 2. MR a z rovnice známé z vektorové analýzy:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \text{a} \quad \text{rot grad} \varphi_m = 0.$$

V magnetickém poli vyjdeme ze 4. MR a z jiné identity pro vektorovou funkci  $\mathbf{A}$ , známé z vektorové analýzy:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{a} \quad \text{div rot } \vec{A} = 0$$

odtud

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (23.5.36)$$

### References

- [DM70] M. Dufek and M. Mikulec. *Příklady z teoretické elektrotechniky*. Ed. by K. František. SNTL, 1970, p. 380 (cit. on p. 106).
- [Kot99] J. Kotlan. *Základy teoretické elektrotechniky*. Ed. by F. elektrotechnická. ZČU Plzeň, 1999, p. 258. 258 pp. (cit. on pp. 104–106).
- [May01] D. Mayer. *Teorie elektromagnetického pole*. Ed. by Z. Benešová. Západoceská univerzita v Plzni, 2001. 355 pp. (cit. on pp. 100, 104).
- [Trn72] Z. Trnka. *Teoretická elektrotechnika*. Nakladatelství technické literatury Praha, 1972, p. 410. 410 pp. (cit. on p. 106).



**Část IX.**

**Signály a soustavy**



# 24. Číslicové signály - posloupnosti

## Obsah

24.1. Základní typy posloupností . . . . .	111
24.2. Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	111
24.3. Základní operace s posloupností . . . . .	113

Číslicové signály (matematicky posloupnosti čísel) [USo2] jsou v literatuře označovány symboly  $x_n$ ,  $x(n)$ , nebo  $x[nT]$ , kde  $n$  je celé číslo a označuje pořadí prvku v posloupnosti<sup>1</sup>. Poslední uvedený symbol  $x[nT]$  zdůrazňuje souvislost číslicového signálu se signálem spojitým v čase (analogovým signálem), ze kterého vznikl vzorkováním a kvantováním. Symbol  $T$  označuje použitý vzorkovací krok. Jeho převrácená hodnota je rovna vzorkovací frekvenci  $f_s = \frac{1}{T}$ .

## 24.1. Základní typy posloupností

- Jednotkový impuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (24.1.1)$$

- Jednotkový skok

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (24.1.2)$$

- Reálná exponenciální posloupnost

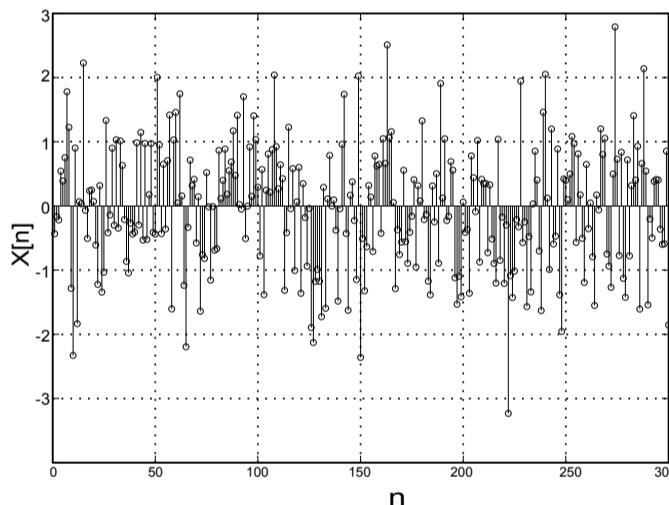
$$x[n] = A\alpha^n, n \geq 0, \quad (24.1.3)$$

- Chirp signál

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi f_{max} n^2}{(N-1)f_s}\right), \quad (24.1.4)$$

kde  $f_{max}$  je maximální požadovaný kmitočet, který musí být menší než polovina vzorkovacího kmitočtu  $f_{max} < \frac{f_s}{2}$  a  $N$  je celkový počet vzorků.

- Pseudonáhodná posloupnost je posloupnost, která nahrazuje ideální bílý šum. Tuto posloupnost lze generovat různými algoritmy, které zaručují velmi dlouhou periodicitu generované posloupnosti. Má-li tato posloupnost approximovat bílý šum, musí co nejlépe splňovat požadavek nekorelovanosti sousedních vzorků (tedy konstantní spektrální výkonové hustoty) a nulové střední hodnoty. Často je požadován i jednotkový rozptyl.



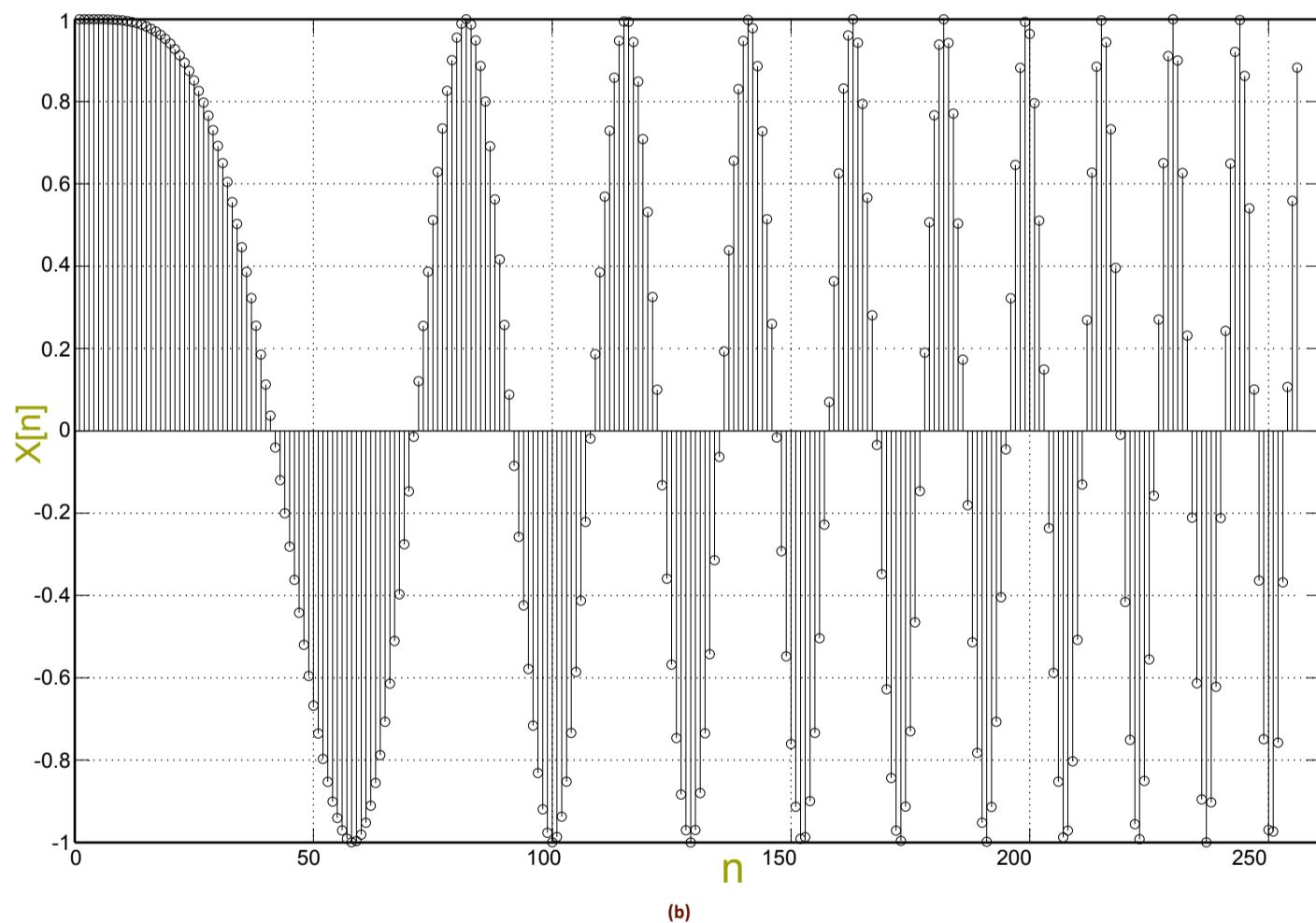
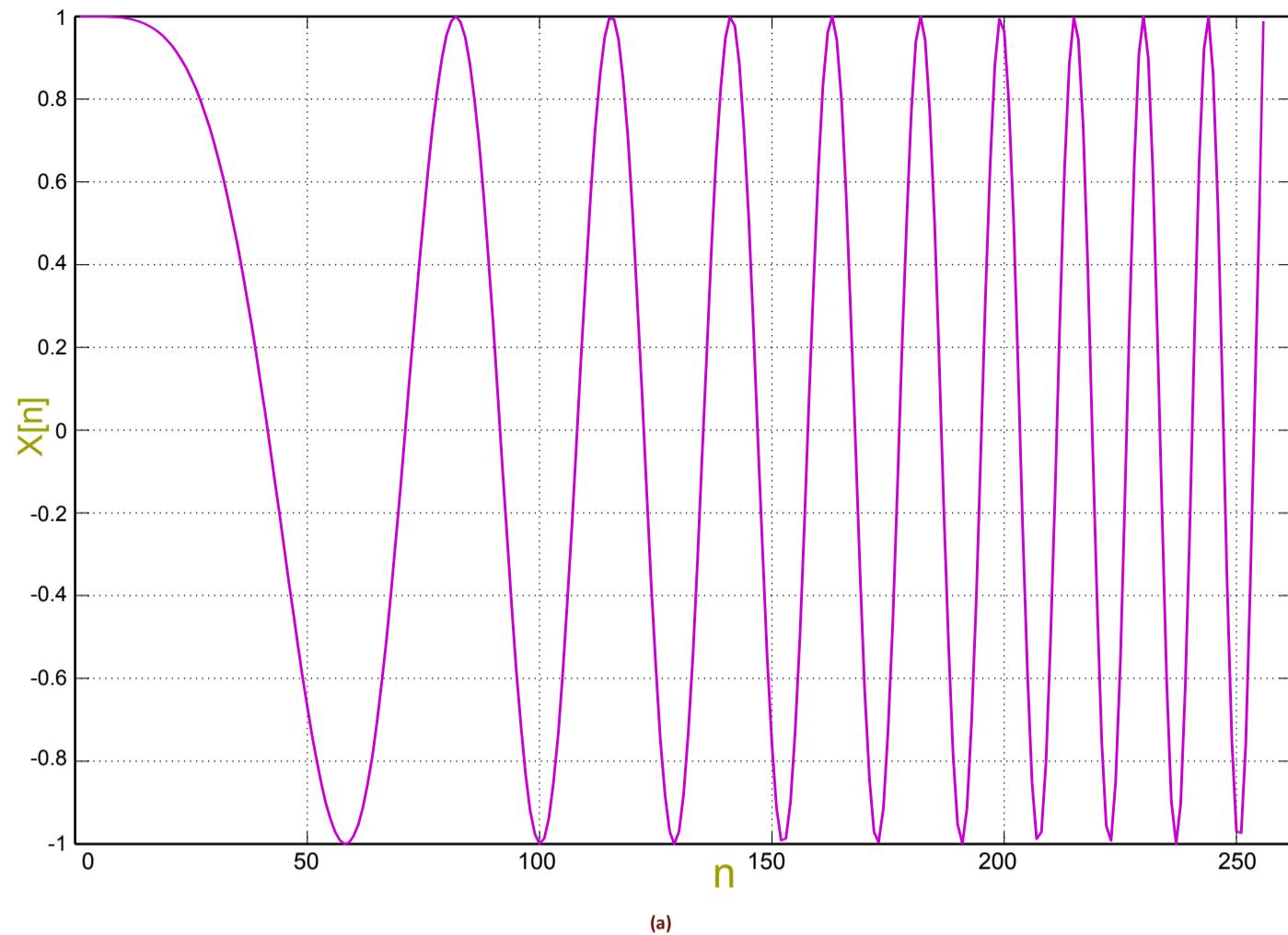
Obrázek 24.1.1.: Příklad pseudonáhodné posloupnosti generované pomocí funkce `randn(1, 300)` v MATLABu

## 24.2. Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu

Příklad 24.2.1. Generujte signál s lineárně rostoucím kmitočtem "chirp signál", maximální kmitočet  $f_{max} = 20\text{Hz}$ , amplituda  $A = 1$ , vzorkovaný kmitočet  $f_s = 64\text{Hz}$ .

```
1 % CHIRP SIGNAL
2 % =====
3 clear all; close all;
4 % generování univerzálního vektoru
5 N = 256; % počet prvků
6 fs = 256; % vzorkovací kmitočet v Hz
7 fmax = 20; % maximální kmitočet v Hz
```

<sup>1</sup>Takto zavedené označení je nejednoznačné, neboť nerozlišuje mezi celou posloupností a jejím jediným prvkem. Posloupnost by měla být správně označena např. symbolem  $\{x[n]\}$ , zatímco symbol  $x[n]$  by měl být vyhrazen pro její jeden prvek. Nicméně uvedené značení je všeobecně používáno.



**Obrázek 24.2.1.:** Chirp signál: Signál s lineárně rostoucím kmitočtem s maximální frekvencí 20 Hz vzorkovaný 254 Hz. Grafická reprezentace číslicových signálů bývá buď ve spojité formě (a) nebo v diskrétní formě (b)

```

8   Amax = 1; % amplituda signálu
9   A2   = 0.5; % amplituda signálu
10  % casovy vektor s N prvky
11  t    = linspace(0, (N-1)*(1/fs), N);
12  % generovani signalu s linearně rostoucim kmitočtem
13  kosinus = chirp(t,0,1,20);
14  %vykresleni
15  figure(1)
16  stem(1:N,kosinus(1:N), 'k'); % diskretni forma
17  plot(1:N,kosinus(1:N), 'k'); % spojita forma
18  xlabel('n')
19  ylabel('X[n]')
20  title(['Chirp signal: fmax=' num2str(fmax), ' Hz, fs=' num2str(fs), ' Hz'])
21  grid on;

```

Výpis 24.1: gen\_chirp\_signal.m. Generuje chirp signál

### 24.3. Základní operace s posloupnosti

V dalším textu budeme používat tři základní lineární operace [USo2] zobrazené na 24.3.1:

- součin signálu  $x[n]$  a reálné konstanty  $b$ :

$$w[n] = bx[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tato operace je v praxi realizována násobičkou a je zdrojem numerických chyb, tedy kvantizačního šumu, který produkuje číslicová zařízení.

- součet signálu  $x[n]$  a signálu  $y[n]$ :

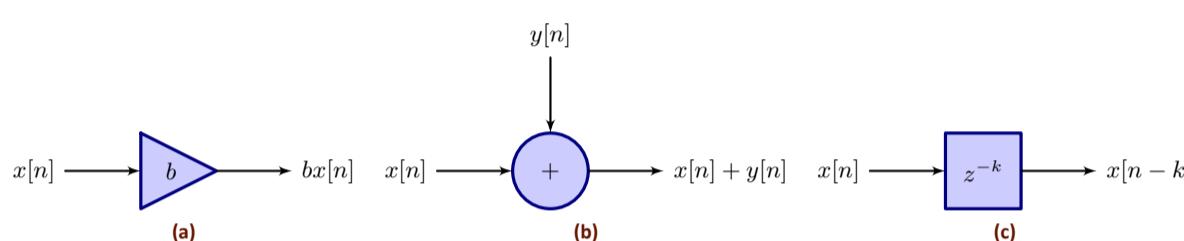
$$v[n] = x[n] + y[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto operaci provádí sčítka. Při neošetření může tato operace generovat hrubé chyby.

- zpoždění signálu  $x[n]$  o  $k$  vzorkovacích kroků:

$$y[n] = x[n - k], n = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, M$$

Hodnoty  $x[-k], k = 1, 2, \dots, M$  se nazývají počáteční podmínky. V digitálních implementacích provádíme operaci zpoždění paměťového registru pro každou jednotku požadovaného zpoždění  $z^{-1}$ .



Obrázek 24.3.1.: Symboly základních operací

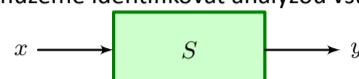


# 25. Vlastnosti a popis lineárních systémů

## Obsah

<b>25.1. Linearita, časová invariance a kauzalita . . . . .</b>	<b>115</b>
25.1.1. Konvoluce v diskrétních a spojitých systémech . . . . .	115
<b>25.2. Popis spojitého a diskrétního systémů, přenosová funkce . . . . .</b>	<b>117</b>
25.2.1. Spojité systémy . . . . .	117

Na soustavu obvodů můžeme nahlížet jako na seskupení (množinu) navzájem souvisejících součástí, ke kterému je určen vstupní signál  $x$ , zvaný buzení a výstupní signál  $y$ , označovaný jako odezva. Z hlediska vlastností jde o systém představující "černou skříňku", jejíž vlastnosti můžeme identifikovat analýzou vstupního a výstupního signálu [BLV07].



Obrázek 25.0.1.: Symbol soustavy s jedním vstupem a jedním výstupem

- Systémy se spojitým časem (na vstupu i výstupu pracují se spojitymi signály) - relace mezi vstupem a výstupem můžeme symbolicky zapsat:

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\} \quad (25.0.1)$$

kde  $S$  je obecný popis systémové funkce, přiřazující vstupní veličině  $x(t)$  odezvu  $y(t)$ . Z rovnice je zřejmé, že u spojité (analogové) soustavy výstupní signál závisí na všech hodnotách vstupního signálu, nikoli jen na některých jeho hodnotách v určitých časových okamžicích.

- Systémy pracující s diskrétním časem lze obdobně symbolicky vyjádřit relací vstup/výstup ve tvaru:

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} \quad (25.0.2)$$

kde  $\mathcal{S}$  je tentokráte systémový operátor přiřazení posloupnosti  $x[n] \rightarrow y[n]$ . U diskrétních systémů se zpracovávají posloupnosti hodnot signálů, získaných vzorkováním spojitého signálu

## 25.1. Linearita, časová invariance a kauzalita

**Linearita systémů** ve spojité diskrétní oblasti má velký význam, neboť dovoluje využívat princip superpozice k zjednodušování úloh jejich analýzy a syntézy.

Předpokládejme, že na vstupu lineárního diskrétního systému jsou přivedeny dva signály  $x_1[n]$  a  $x_2[n]$ . Účinky obou vstupních signálů na výstupní signál lze zkoumat odděleně a podle principu superpozice je na výstupu sečist. Označme dílčí odezvy  $y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$  a  $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$ , potom je

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} \quad (25.1.1)$$

Analogický vztah platí i pro lineární spojité systém, tedy

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \mathcal{S}\{x_1(t) + x_2(t)\} \quad (25.1.2)$$

Jedná-li se o systém časově invariantní, jsou události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí), nikoliv na každém časovém okamžiku samostatně. Systém je časově invariantní, jestliže časový posun ve vstupní signálu vede ke stejnemu posunu výstupního signálu. Odezva diskrétního systému na posunutý vstupní signál  $x[n-m]$  je pak určen vztahem

$$y[n-m] = \mathcal{S}\{x[n-m]\} \quad (25.1.3)$$

a obdobně pro odezvu spojité soustavy na posunutý (zpožděný) vstupní signál  $x(t-\tau)$  platí analogicky rovnice

$$y(t-\tau) = \mathcal{S}\{x(t-\tau)\}. \quad (25.1.4)$$

**Kauzální, přičinný systém** je systém, u kterého výstupní signál závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu.

### 25.1.1. Konvoluce v diskrétních a spojitéch systémech

[BLV07] Významnou charakteristikou lineárních časově invariantních systémů LTI je **impulzní odezva**. Její znalost umožňuje stanovit odezvu systému na obecný signál, lze ji využít i při syntéze systému.

$$h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}. \quad (25.1.5)$$

Mějme diskrétní LTI systém, na jehož vstup je přiveden **jednotkový diskrétní impulz**<sup>1</sup>. Jednotkový impulz je posloupnost  $\delta[n] = 0$  pro všechna  $n$  s výjimkou  $\delta[0] = 1$ . Odezva systému na jednotkový impulz  $\delta[n]$  se nazývá **impulzní odezva** a platí

$$h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (25.1.6)$$

<sup>1</sup>Nesmíme zaměňovat s Diracovým (také jednotkovým) impulzem.

Vzhledem časové invariantnosti, posunutému jednotkovému impulu odpovídá posunutá impulzní odezva, tedy

$$1[n] = \sum_{m=0}^n [n-m] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots . \quad (25.1.7)$$

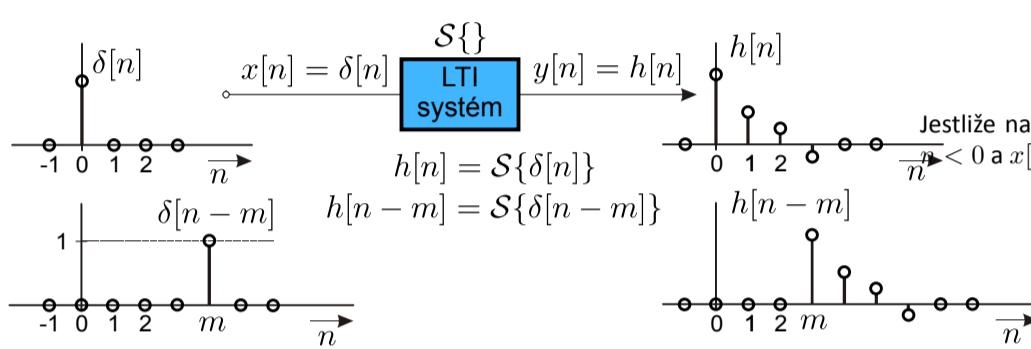
Jednotkový skok  $1[n]$  je posloupnost jedniček od počátku časové osy  $n = 0$ , kterou můžeme zapsat součtem

$$s[n] = \mathcal{S}\{1[n]\} = S\left\{\sum_{m=0}^n [n-m]\right\} = \sum_{m=0}^n S\{\delta[n-m]\}. \quad (25.1.8)$$

Odezva systému na jednotkový skok  $1[n]$  se nazývá **přechodová odezva**  $s[n]$  a platí

$$s[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} = \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (25.1.9)$$

Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz  $\delta[n]$ , resp. na posunutý impulz  $\delta[n-m]$ , bude  $h[n]$  resp.  $h[n-m]$  - viz obr. 25.1.1.

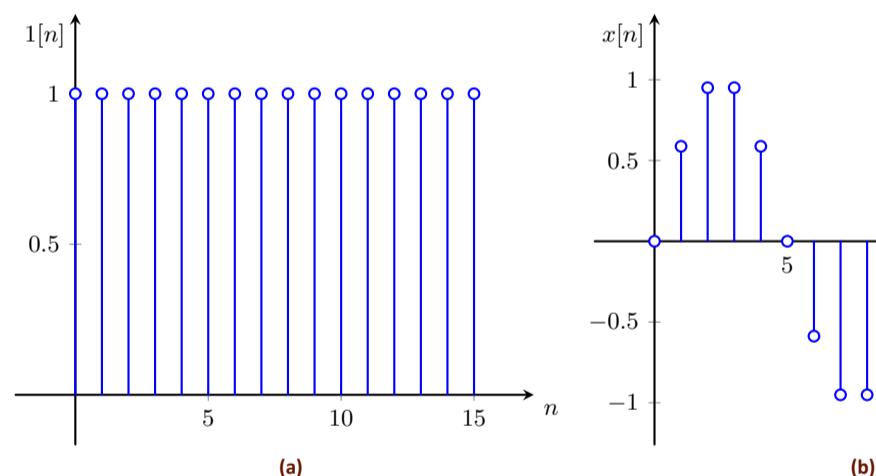


Obrázek 25.1.1.: Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz  $\delta[n]$  a posunutý impulz  $\delta[n-m]$

Postupná úprava rovnice (25.1.9) je umožněna díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]. \quad (25.1.10)$$

Poznamenejme, že formou (25.1.10) lze zapsat každý diskrétní signál.



Obrázek 25.1.2.: Posloupnost jednotkového skoku  $1[n]$  a signálu  $x[n]$

Na obr. 25.1.2 znázorněna souvislost mezi posloupností jedniček a diskrétním signálem. Posloupnost jedniček tvoří bázi pro diskrétní signály. Každá komponenta diskrétního signálu je vyjádřena součinem  $x[m]\delta[n-m]$ . V uvedeném příkladě jde o posloupnost příslušnou jednotkovému skoku

$$1[n] = \sum_{m=0}^{15} \delta[n-m] \quad (25.1.11)$$

a odpovídající posloupnost konečného signálu

$$x[n] = \sum_{m=0}^{15} x[m]\delta[n-m]. \quad (25.1.12)$$

Princip superpozice dovoluje získat odezvu systému jako sumu odezv na jednotlivé dílčí součásti vstupního signálu, které v rovnici (25.1.10) tvoří vážené jed-

notlivé impulzy, ze kterých je signál složen

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (25.1.13)$$

Protože platí (25.1.5) a v důsledku časové invariantnosti vyplývá z rovnice 25.1.13 **konvoluční suma**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (25.1.14)$$

Uvedli jsme, že u kauzálního systému závisí výstupní signál  $y[n]$  pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu  $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$ , takže v konvoluční sumě 25.1.14

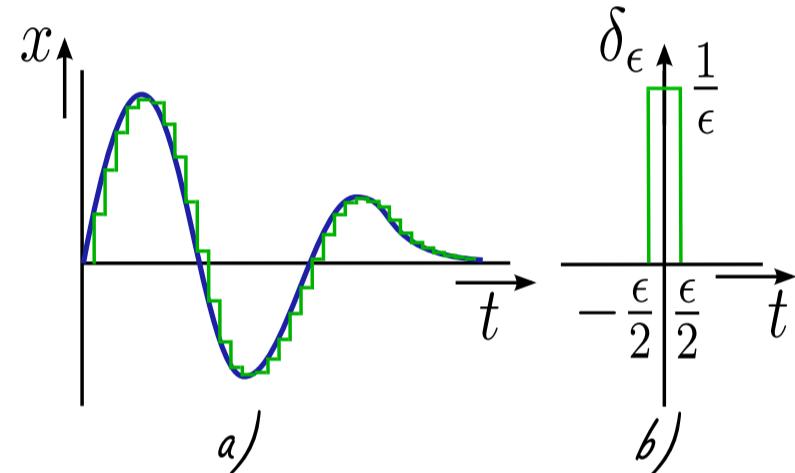
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (25.1.15)$$

musíme položit všechny členy impulzní odezvy  $h[k] = 0$  pro  $k < 0$ . Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má pak tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (25.1.16)$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro  $n < 0$  a  $x[n] \neq 0, y[n] \neq 0$  pouze pro  $n \geq 0$ , potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]. \quad (25.1.17)$$



Obrázek 25.1.3.: a) Aproximace spojitého průběhu signálu, b) K odvození jednotkové impulsní funkce

Podobně můžeme postupovat i v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém **konvoluční integrál**. Vrátme se k výrazu 25.1.10 kterým je vyjádřen libovolný diskrétní signál. Pro případ spojitého signálu vytvořme analogickou formu zápisu využívající jednotkový impuls. Průběh obecného spojitého lze podle obr. 25.1.3 approximovat stupňovitým průběhem, který můžeme vyjádřit jako sumu posunutých (zpožděných) impulsů. Výchozí approximující impuls lze vyjádřit vztahem

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2} > 0 \end{cases} \quad (25.1.18)$$

a je znázorněn na obr. 25.1.3. Jednotkový (Diracův) impuls má jednotkovou plochu. Výrazem

$$\delta_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t). \quad (25.1.19)$$

Aproximaci spojitého průběhu  $x(t)$  impulsy 25.1.18 lze vyjádřit rovnicí

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon)\delta_\epsilon(t-m\epsilon)\epsilon. \quad (25.1.20)$$

Zmenšování šířky impulsů  $\epsilon \rightarrow 0$  se chybou approximace zmenšuje a výraz přejde v limitu

$$x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon)\delta_\epsilon(t-m\epsilon)\epsilon. \quad (25.1.21)$$

V limitě kdy  $\epsilon \rightarrow 0$ , můžeme sumu nahradit integrálem, dále součin  $m\epsilon$  integrační proměnnou  $\tau$  a  $\epsilon$  jejím diferenciálem. Obdržíme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \quad (25.1.22)$$

Vztahem 25.1.22 jsme spojity průběh signálu vyjádřili jako sumu nekonečného počtu posunutých jednotkových impulsů váženou jeho okamžitými hodnotami. Předpokládejme dále, že na vstup lineárního časově invariantního spojitého systému je převeden jednotkový (Diracův) impuls a systém vytvoří odevzdu  $h(t)$ . V případě obecného vstupního spojitého signálu  $x(t)$  approximovaného vztahem 25.1.22, bude odevzda analogového systému

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (25.1.23)$$

Uvedený integrál nazýváme **konvolucí** a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (25.1.24)$$

Funkce  $h(t)$  představuje **impulsní odevzdu**. Jedná se o výstupní signál systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls  $x(t) = \delta(t)$ . Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t). \quad (25.1.25)$$

Z důvodů **kauzality**, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \text{ pro } |t| \geq 0, \quad (25.1.26)$$

$$h(t) = 0 \text{ pro } |t| < 0. \quad (25.1.27)$$

Potom můžeme konvoluční integrál 25.1.23 zapsat ve tvaru

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (25.1.28)$$

## 25.2. Popis spojitéch a diskrétních systémů, přenosová funkce

### 25.2.1. Spojité systémy

Lineární časově invariantní (LTI) spojity systém je obecně popsán soustavou integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, kterou lze postupným derivováním změnit na soustavu diferenciálních rovnic. Předpokládejme budící (nezávislou) veličinu  $x(t)$  a odevzdu (závislou) výstupní veličinu  $y(t)$ , pak eliminací ostatních proměnných bude soustava popsána jedinou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (25.2.1)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  a  $b_0, b_1, \dots, b_m$  jsou konstanty charakterizující lineární systém. Obecné řešení  $y(t)$  rovnice 25.2.1 se sestává ze dvou částí, z řešení **homogenní rovnice** a **partikulárního řešení**. K řešení je třeba znát počáteční podmínky pro  $y(t)$  a jeho derivace ve výchozím okamžiku.

S použitím **Laplaceovy transformace** při nulových počátečních podmínkách má rovnice (25.2.1) tvar

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j X(p), \quad (25.2.2)$$

kde  $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  a  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  jsou Laplaceovy obrazy vstupní a výstupní veličiny,  $p$  je Laplaceův operátor derivace a také komplexní kmitočet  $p = \sigma + j\omega$ . Přenosová funkce  $H(p)$  je definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny  $Y(p)$  ku obrazu vstupní veličiny  $X(p)$ , při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (25.2.3)$$

Vzhledem k rovnici (25.2.2) je  $H(p)$  racionálně lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{j=1}^m (p - p_{0j})}{\prod_{i=1}^n (p - p_{\infty i})} \quad (25.2.4)$$

kde  $p_{0j}$  jsou kořeny polynomu čitatele a představují **nulové body** a kořeny jmenovatele  $p_{\infty i}$  jsou **póly** přenosové funkce,  $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$  je násobná konstanta.

Kmitočtové charakteristiky získáme z přenosové funkce substitucí

$$p = j\omega, \quad (25.2.5)$$

ve které  $\omega$  je úhlový kmitočet. Platí tedy

$$H(p)|_{p=j\omega} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = M(\omega) e^{j\Phi(\omega)}, \quad (25.2.6)$$

kde  $M(\omega)$  je **modulová charakteristika** a  $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$  se nazývá **fázová charakteristika**. Skupinové zpoždění je definováno jako záporně vzatá derivace

fázové charakteristiky podle kmitočtu

$$\tau(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\arg H(j\omega)}{d\omega}. \quad (25.2.7)$$

V předchozí kapitole jsme ukázali, že **relace vstup/výstup LTI systému** souvisí prostřednictvím **konvoluce**

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (25.2.8)$$

Přenosová funkce je **Laplaceova transformace impulzní odevzdy  $h(t)$**

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt, \quad (25.2.9)$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)X(p). \quad (25.2.10)$$

Přechodová odevzda  $s(t)$  je definována jako integrál impulzní odevzdy

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau, \quad (25.2.11)$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}. \quad (25.2.12)$$

Algoritmus výpočtu impulzní odevzdy z přenosové funkce je založen na výpočtu reziduí a rozkladu racionálně lomené funkce  $H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}$  na částečné zlomky. Pokud má tato funkce jednoduché póly, rozklad má tvar<sup>2</sup>.

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{k_{\mu}}{p - p_{\infty \mu}} = \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}} \quad (25.2.13)$$

kde  $k_{\mu}$  se nazývají rezidua v pólech  $p_{\infty \mu}$ ) a platí

$$k_{\mu} = \lim_{p \rightarrow p_{\infty \mu}} (p - p_{\infty \mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (25.2.14)$$

$$= Q(p_{\infty \mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty \mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty \mu}}} = Q(p_{\infty \mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty \mu})} \quad (25.2.15)$$

Impulzní odevzda je pak dána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \sum_{\mu=1}^n k_{\mu} e^{p_{\infty \mu} t} \quad (25.2.16)$$

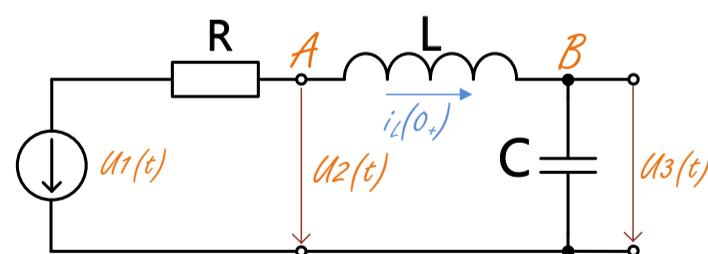
Póly jsou obecně komplexní  $p_{\infty \mu} = \alpha_{\mu} + j\beta_{\mu}$ , nebo reálné  $p_{\infty \mu} = \alpha_{\mu}$ . Jsou to kořeny rovnice  $N(p) = 0$ . Rovnice 25.2.16 je důležitá i proto, že z ní poznáme, zda analogová soustava je stabilní. Je patrné, že soustava bude stabilní, jestliže bude  $\Re\{p_{\infty \mu}\} = \alpha_{\mu} < 0$ , tj. leží-li kořeny  $p_{\infty \mu}$  v otevřené levé polorovině komplexní roviny  $p_{\infty \mu} = \sigma + j\omega$ . Imaginární osa  $j\omega$  je mezi stability, pravá polorovina je oblastí nestability. Polynom, který má kořeny v levé otevřené polorovině se označuje **Hurwitzův polynom**.

**Příklad 25.2.1.** Lineární spojity systém je dán zapojením dle obrázku. Určete:

1. diferenciální rovnici pro odevzdu  $u_2(t)$ , je-li na vstupu buzen napětí  $u_1(t)$ ,

2. přenos napětí  $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ ,

3. impulsní odevzdu  $h(t)$ .



Obrázek 25.2.1.: Zapojení obvodu RLC.

**Řešení:**

Pro zapojení dle obrázku získáme metodou uzlových napětí integrodiferenciální rov-

<sup>2</sup>Násobnost kořenů  $N(p)$  neuvažujeme, protože se v LTI obvodech neuplatňuje

nice pro uzly A a B:

$$\begin{aligned} A : \frac{u_3(t) - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_3(\tau) - u_2(\tau)) d\tau + i_L(0_+) &= 0 \\ B : \frac{1}{L} \int_0^t (u_2(\tau) - u_3(\tau)) d\tau + C \frac{du_c}{dt} - i_L(0_+) &= 0 \end{aligned} \quad (25.2.17)$$

Derivováním a eliminací  $u_3(t)$  z původních rovnic dostaneme pro odezvu  $u_2(t)$  diferenciální rovnici II. řádu

$$\frac{d}{dt}(B) : u_2(t) - u_3(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow u_3(t) = u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}(B) \rightarrow (A):$$

$$\begin{aligned} \frac{u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (LC \frac{d^2 u_2(\tau)}{dt^2}) d\tau + i_L(0_+) &= 0 \\ u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t) + RC \left[ \frac{du_2(t)}{dt} \right]_0^t + Ri_L(0_+) &= 0 \end{aligned}$$

Při nulových počátečních podmínkách:  $\frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} = 0, i_L(0_+) = 0$  dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (25.2.18)$$

V Laplaceově transformaci platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{du_2(t)}{dt} \right] &= pU_2(p) - u_2(0) \\ \mathcal{L} \left[ \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} \right] &= p^2 U_2(p) - pu_2(0) - u_2(0), \text{ kde } u_2(0) = \frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} \end{aligned}$$

při nulových počátečních podmínkách

$$p^2 LCU_2(p) + pRCU_2(p) + U_2(p) = U_1(p) \quad (25.2.19)$$

Odtud vyplývá přenosová funkce  $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (25.2.20)$$

K nalezení impulsní odezvy nejprve určíme póly přenosové funkce řešením rovnice  $N(p) = 0$

$$p_{\infty_{12}} = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (25.2.21)$$

přenosovou funkci pak upravíme do tvaru

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_{\infty_1}) \cdot (p - p_{\infty_2})}, \quad K = \frac{1}{LC} \quad (25.2.22)$$

- Uvažujeme-li jednoduché póly a bude-li  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , potom z rov. 25.2.21 vyplývají dva reálné různé póly. Přenosovou funkci tedy můžeme zapsat obecným tvarem:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a_1} + \frac{k_2}{p + a_2} \quad (25.2.23)$$

kde  $p_{\infty_1} = -a_1, p_{\infty_2} = -a_2$ , Rezidua  $k_1 = \frac{K}{a_2 - a_1}, k_2 = \frac{K}{a_1 - a_2}$  určíme z rov. 25.2.14. Impulsní odezvu pak vypočteme užitím rov. 25.2.16.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \frac{K}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{K}{a_1 - a_2} e^{-a_2 t} \quad (25.2.24)$$

- Když bude  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , obdržíme dvojici komplexně sdružených pólů a přenosovou funkci může obecně zapsat takto:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a - jb} + \frac{k_2}{p + a + jb} \quad (25.2.25)$$

kde  $p_{\infty_1} = -a + jb, p_{\infty_2} = -a - jb$ . Rezidua v pôlech jsou dány výrazy  $k_1 = -\frac{jK}{2b}, k_2 = \frac{jK}{2b}$ . Impulzní odezvu opět určíme užitím rov. 25.2.16.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-e^{jb t} + e^{-jb t})] \\ &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (\underline{-\cos(bt)} - j \sin(bt) + \underline{\cos(bt)} - j \sin(bt))] \\ &= \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) \end{aligned} \quad (25.2.26)$$

Pro stavební prvky:  $R = 1k\Omega, L = 11.5mH, C = 22.5nF$  ukazuje výpis m-file SAS\_exam\_02\_symb\_Hp\_solve.m symbolický způsob řešení operátorových obvodových rovnic pomocí MATLABu. Jde o typ **dolní propust**, jehož přenosová funkce má tvar:

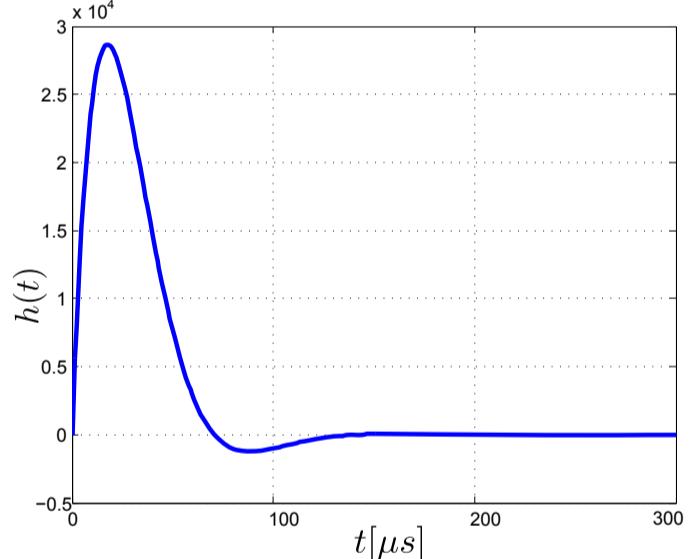
$$H(p) = \frac{3.9506 \cdot 10^9}{p^2 + 8.8889 \cdot 10^4 p + 3.9506 \cdot 10^9}.$$

```
% zdroj : Linearni obvody a systemy
% Jan Bicak - strana 15
3 % Vyreste symbolicky soustavu operatorovych obvodovych
4 % rovnic a vyjadrete prenosovu funkci
5 %
6 f1 = '(U3-U1)/R+U(U3-U2)/(p*L)';
7 f2 = 'p*C*U2+(U2-U3)/(p*L)';
8 % symbolickie reseni rovnic
9 rU = solve(f1, f2, 'U2, U3');
10 % vyber pole U2, resp. U1 z datove struktury rU
11 rU.U2 % uzlove napeti U2
12 rU.U3 % uzlove napeti U3
13 % Prenosova funkce
14 P = rU.U2/'U1'
15 % symbolicka substituce
16 nP = subs(P, {'R', 'C', 'L'}, {1e3, 22.5e-9, 11.25e-3})
17 % nastaveni formatu zobrazeni cisel napr: 3.1416e+000
18 format short e
19 % citatel(numerator) a jmenovatel(denominator)
20 % symbolickeho výrazu
21 [num, den] = numden(nP) % num/den
22 % symbolickie vyjadreni polynomu prevede na vektorove
23 % vyjadreni - A(1): první prvek vektoru (koeficient u
24 % nejvyssi mocniny polynomu)
25 N = sym2poly(num)
26 roots(N)
27 % H(p)=Q(p)/N(p)
28 % koeficient u nejvyssi mocniny ve jmenovateli bude 1
29 Q = sym2poly(num)/N(1)
30 N = N/N(1)
```

**Výpis 25.1:** SAS\_exam\_02\_symb\_Hp\_solve.m

Impulzní charakteristiku obdržíme dosazením do vztahu 25.2.26

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) = 8.8890 \cdot 10^4 e^{-4.4444 \cdot 10^4 t} \sin(4.4444 \cdot 10^4 t).$$



**Obrázek 25.2.2.: Impulzní charakteristika**

Z hlediska analýzy obvodů v kmitočtové oblasti je výhodné sestavovat obvodové rovnice (metodami uzlových napětí a smyčkových proudů) přímo v operátorovém tvaru. Kirchhoffovy zákony pro uzavřenou smyčku a proudu do uzlu pak mají tvar

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

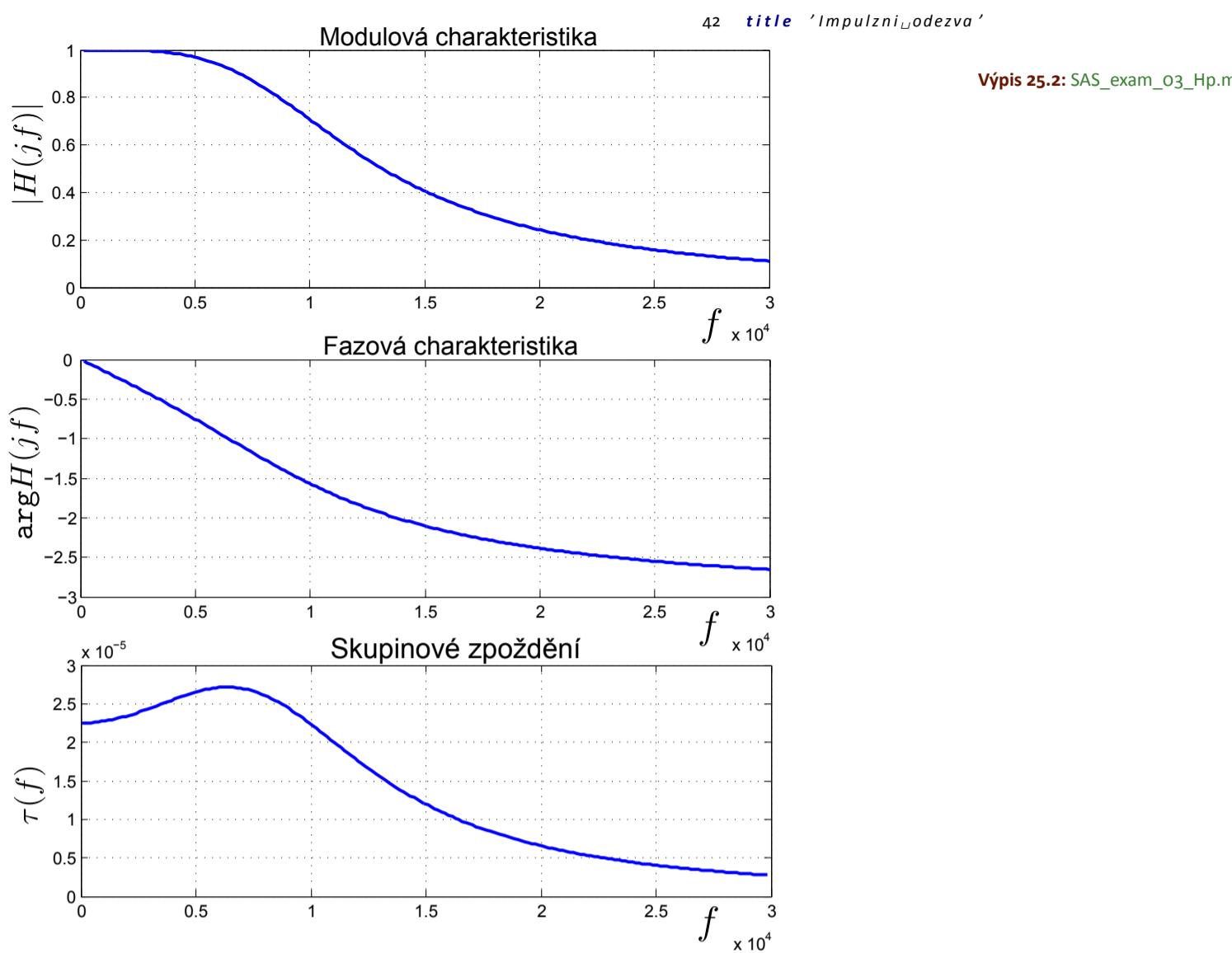
Metodou uzlových napětí pro zapojení na obr. 25.2.1 obdržíme rovnice

$$\frac{U_3(p) - U_1(p)}{R} + \frac{U_3(p) - U_2(p)}{pL} = 0 \quad (25.2.27)$$

$$pCU_2(p) + \frac{U_2(p) - U_3(p)}{pL} = 0 \quad (25.2.28)$$

Na rozdíl od 25.2.17 jde o algebraické rovnice, ze kterých eliminací uzlového napětí  $U_3(p)$  vyplývá přenosová funkce 25.2.20

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$



Obrázek 25.2.3.: Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění filtru

Dosazením za  $p = j\omega$  lze z přenosové funkce vyjádřit modulovou charakteristiku  $H(j\omega)$  a fázovou charakteristiku  $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$ . Skupinové zpoždění vyplývá ze vztahu 25.2.7. Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění jsou na obr. 25.2.3.

Filtr má maximálně plochou modulovou charakteristiku přenosu. Mezní kmitočet propustného pásma je  $f_p = 10\text{kHz}$ , při kterém je  $|H(j\omega_p)| = 0.707$ . Tato hodnota odpovídá poklesu modulové charakteristiky o  $3\text{dB}$ .

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 16
3 % Vykreslete modulovou, fazovou charakteristiku ,
4 % charakteristiku skupinoveho zpozdeni a
5 % impulzni odezvu prenosove fce
6 % Q(p) 3.9506e+009
7 % H(p) = _____
8 % N(p) p^2 + 8.8889e+004p + 3.9506e+009
9 %
10 Q = 3.9506e+009;
11 N = [1, 8.8889e+004, 3.9506e+009];
12 f = linspace(0, 3e4, 200);
13 w = 2*pi*f;
14 %komplexni frekvencki odezva z analogove prenosove fce
15 H = freqs(Q, N, w);
16 figure(1)
17 plot(f, abs(H)); grid;
18 xlabel f
19 ylabel '|H(jf)|'
20 title 'Modulova charakteristika'
21 figure(2)
22 plot(f, phase(H)); grid;
23 xlabel f; ylabel 'arg H(jf)';
24 title 'Fazova charakteristika'
25 % diff(X) - difference prvku vektoru
26 % [X(2)-X(1) X(3)-X(2) ... X(n)-X(n-1)]
27 t = diff(-phase(H))./diff(w); % aproximace derivace
28 figure(3)
29 plot(f(1:199), t); grid;
30 xlabel f; ylabel '\tau(f)';
31 title 'Skupinove zpozdeni'
32 % vektorove vyjadreni prevede na symbolickie vyjadreni
33 P = poly2sym(Q)/poly2sym(N)
34 % inverzni Laplaceova transformace
35 ih = ilaplace(P)
36 % konverze racionalniho cisla na desetinne cislo
37 vpa(ih,.5)
38 figure(4)
39 t = linspace(0, 3e-4, 200);
40 plot(t, subs(ih)); grid
41 xlabel f; ylabel 'h(t)';

```

42 title 'Impulzni uodezva'

Výpis 25.2: SAS\_exam\_03\_Hp.m



**Část X.**

**Teorie elektrických obvodů**



# 26. Základy elektrických obvodů

## Obsah

26.1. Metody řešení lineárních elektrických obvodů . . . . .	123
26.2. Klasická metoda uzlových napětí (MUN) . . . . .	123
26.2.1. Pravidla pro sestavování rovnic . . . . .	124
26.3. Modifikovaná metoda uzlových napětí . . . . .	124
26.3.1. Metoda razítka . . . . .	124
26.4. Napěťový dělič . . . . .	125

Ke každému skutečnému, fyzicky realizovanému, elektrickému obvodu lze nakreslit **obvodové schéma**. Toto schéma je vlastně *obvodovým modelem* skutečného obvodu. Obvodový model je sestaven ze základních obvodových prvků - **dvojpólů**. Název plyne z důležité topologické vlastnosti dvojpólů - mají dvě svorky [PVO4, s. 12].

Základních obvodových prvků je celkem pět: rezistor, cívka, kondenzátor, ideální zdroj napětí, ideální zdroj proudu. Zdůrazněme následující skutečnosti:

- Každý ze základních prvků je uvažován jako **ideální** (nemá žádné jiné parazitní vlastnosti).
- Kombinací základních prvků vznikne **náhradní zapojení** skutečného prvku, včetně jeho parazitních vlastností.
- Z pěti základních prvků je tedy možno sestavit **libovolný obvodový model** (elektrický obvod) **pasivní i aktivní**.
- U **aktivních obvodů** (např. zesilovačů) se uplatňují řiditelné, neboli parametrické prvky. Typickým příkladem je bipolární tranzistor, jenž je řízen proudem do báze.

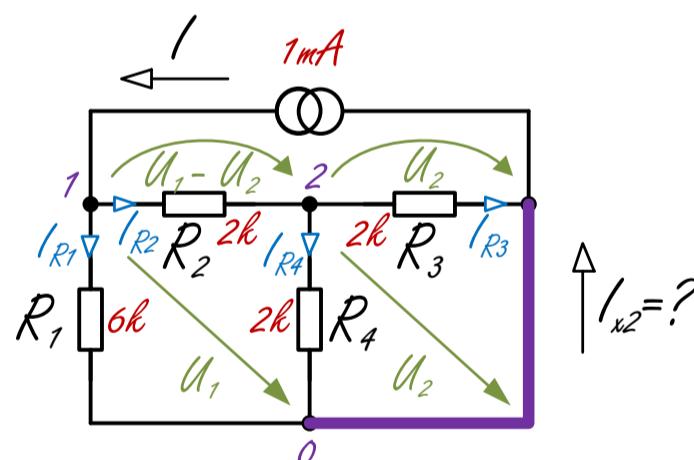
## 26.1. Metody řešení lineárních elektrických obvodů

### 26.2. Klasická metoda uzlových napětí (MUN)

Metoda uzlových napětí je založena na tomto postupu:

- Jeden z uzlů obvodu se prohlásí za tzv. **referenční uzel**. Přiřadí se mu číslo 0, případně v počítačovém simulátoru značka uzemnění. Vzhledem k tomuto uzlu se budou vztahovat napětí ostatních uzlů obvodu. Tato napětí se nazývají **uzlová napětí** a tvoří **soustavu neznámých obvodových veličin** metody. Je vhodné orientovat všechna uzlová napětí tak, aby čítací šipky směrovaly do referenčního uzlu. Uzlová napětí jsou neznámými metody i tehdy, je-li naším konečným cílem počítat jiné obvodové veličiny. Každé napětí a každý proud v obvodu jsou totiž vyjádřitelné jako lineární kombinace uzlových napětí.
- Pro každý uzel obvodu, vyjma referenčního, sestavíme rovnici 1. KZ ve tvaru: *součet proudů tekoucích dovnitř uzlu z vnějších zdrojů proudu = součtu proudů vytékajících větvemi obvodu ven z uzlu*.
- Rovnice vyřešíme, tj. získáme velikosti uzlových napětí. Z nich pak dopočteme požadovaný výsledek analýzy.

Metodu uzlových napětí lze objasnit na příkladu zapojení na obr. 26.2.1. Je třeba určit proud  $I_{x2}$ . Nejprve očíslovujeme uzly. Zvolíme referenční uzel a přiřadíme mu



Obrázek 26.2.1.: Řešení obvodu metodou uzlových napětí - MUN [Bio04, s. 62]

číslo 0. Zde je třeba zdůraznit, že referenční uzel je možno volit zcela libovolně. Většinou se volí tak, aby případné hledané napětí bylo rovno jednomu z napětí uzlových. Dále si všimneme, že uzel, v němž je se spojuje rezistor  $R_3$  a proudový zdroj, je vlastně součástí referenčního uzlu a jako takový se přídavně nečísluje - má již označení 0.

Vyznačená uzlová napětí  $U_1$  a  $U_2$  tvoří soustavu dvou neznámých, k níž musíme sestavit dvě rovnice. Budou to rovnice 1. KZ pro uzly 1 a 2. Protože počítáme proud  $I_{x2}$ , postačí určit uzlové napětí  $U_2$ . Z něj totiž snadno určíme proud rezistorem  $R_3$  a z něj  $I_{x2}$ .

Podle obr. 26.2.1 napišeme 1. KZ pro rovnováhu proudů v uzlech 1 a 2:

$$\begin{aligned} \text{uzel 1: } & I = I_{R1} + I_{R2} \\ \text{uzel 2: } & 0 = -I_{R1} + I_{R2} + I_{R4} \end{aligned}$$

Orientaci čítacích šipek větvových proudů můžeme volit naprosto libovolně. Pokud se v orientaci zmýlíme, vyjde u daného proudu opačné znaménko.

Větvové proudy na pravé straně rovnic vyjádříme pomocí větvových vodivostí a větvových napětí, která závisí na uzlových napětí (viz obr. 26.2.1):

$$\begin{aligned} \text{uzel 1: } & I = G_1 U_1 + G_2(U_1 - U_2) \\ \text{uzel 2: } & 0 = -G_2(U_1 - U_2) + G_3 U_2 + G_4 U_2 \end{aligned}$$

Vytknutím neznámých upravíme rovnice na konečný tvar

$$\begin{aligned} \text{uzel 1: } & I = (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 \\ \text{uzel 2: } & 0 = -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 \end{aligned} \quad (26.2.1)$$

Dosadíme-li vodivosti v [mS], vyjdou proudy na levé straně v [mA]

$$\begin{aligned} \text{uzel 1: } & 1 = \frac{2}{3}U_1 - \frac{1}{2}U_2 \\ \text{uzel 2: } & 0 = -\frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2}U_2 \end{aligned}$$

Tyto rovnice dávají řešení

$$[U_1, U_2] = \left[ 2, \frac{2}{3} \right] \text{ V} \quad (26.2.2)$$

Pohledem na schéma 26.2.1 zjistíme, že při  $U_2 = \frac{2}{3}V$  bude proud  $I_{R3} = \frac{1}{3}mA$  a hledaný proud  $I_{x2}$  vychází z 1. KZ

$$I_{x2} = I - I_{R3} = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \text{ mA.} \quad (26.2.3)$$

### 26.2.1. Pravidla pro sestavování rovnic

Nyní pustíme se do zobecnění poznatků z předchozího příkladu. Rovnice 26.2.1 zaříšíme v maticovém tvaru Porovnáme-li maticovou rovnici s původním schématem

$$\begin{array}{c} \text{uzel 1: } \begin{array}{|c|c|} \hline I & U_1 & U_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline G_1 + G_2 & -G_2 \\ \hline -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U_2 \\ \hline \end{array} \\ \text{uzel 2: } \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

obvodu 26.2.1 dospějeme k následujícím pravidlům:

- Pravidlo o sestavení vektoru budicích proudů na levé straně maticové rovnice:
  - V i-tém řádku je algebraický součet proudů, tekoucích dovnitř i-tého uzlu z vnějších zdrojů proudu.
- Pravidla o sestavení čtvercové vodivostní (admitanční) matice:
  - Prvek  $i, j$  na hlavní diagonále obsahuje součet všech vodivostí (admitancí), které jsou připojeny k uzlu  $i$ .
  - Prvek  $i, j (i \neq j)$  mimo hlavní diagonálu obsahuje záporně vzatý součet všech vodivostí, které jsou připojeny bezprostředně mezi uzly  $i$  a  $j$ .

Základní lineární dvojpóly (R, L, C) jsou reciprocní, tzn. chovají se stejně ve směru obou uzlů. Jinými slovy, jejich impedance je v obou případech stejná. Proto u obvodů s těmito součástkami vykazují admitanční matice *symetrii*, tj. prvky matice  $i, j$  a  $j, i$  jsou totožné.

## 26.3. Modifikovaná metoda uzlových napětí

Výhodou metody uzlových napětí je její snadná algoritmizace: algoritmus pro sestavení soustavy rovnic přímo ze schématu je velmi jednoduchý a lze jej tedy implementovat do počítačových programů pro analýzu a simulaci. Nevýhodou metody ovšem je, že neumožňuje analyzovat obvody se zdroji napětí a součástkami, které nemají admitanční rovnici. Bohužel, k těmto součástkám patří nejen například takové prvky jako je obyčejný transformátor, ale i různé operační zesilovače, konvejory, a další moderní analogové prvky [Bio04, s. 77].

Proto klasická metoda MUN musí být podrobena určité modifikaci, která jednak zachová její výhodu - snadnou algoritmizovatelnost - jednak umožní analyzovat lineární obvody bez výše uvedených omezení. Jsou to metody:

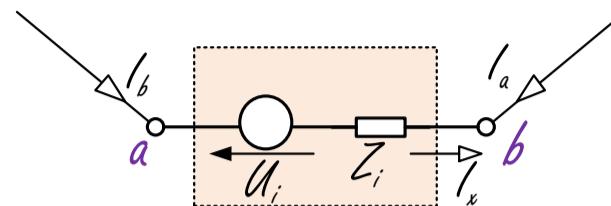
- Metoda razitek
- Metoda zakázaného řádku
- Metoda U/I

### 26.3.1. Metoda razitek

Každý "problémový" prvek je popsán minimálně jednou přídavnou rovnicí a o stejný počet obohatí množinu neznámých. Současně dojde k modifikaci některých původních rovnic 1. KZ. Maticová rovnice pak získá zvláštní strukturu: k původní admitanční matici MUN přibudou řádky a sloupce, jejichž prvky obecně nemají rozdíl admitancí. Jsou to tzv. *razítka* přídavných elektrických prvků. Celá matice se pak nazývá **pseudoadmitanční**. Zvětšení rozměru soustavy rovnic obvykle při

počítačové analýze nemusí být na závadu. Při ručním řešení jde však prakticky vždy o problém [Bio04, s. 78].

Uvažujme obvod popsaný rovnicemi klasické MUN. Mezi uzly  $a$  a  $b$  obvodu do datečně připojíme obecný dvojpól, který je popsán svým Théveninovým modelem podle obr. 26.3.1. Včleněním dvojpólu dojde ke změně napěťových a proudových poměrů v obvodu. Dvojpolem bude protékat proud  $I_x$ , který modifikuje proudové poměry mezi v uzlech  $a$  a  $b$ . Dojde i k změně původních uzlových napětí.



Obrázek 26.3.1.: Začlenění obecného lineárního dvojpólu, popsánoho Théveninovým modelem do obvodu [Bio04, s. 78]

Původní rovnice popisující rovnováhu proudů v uzlu  $a$  musí být na pravé straně doplněna o proud  $I_x$ , vytékající ven z uzlu, a v uzlu  $b$  o proud  $I_x$  se záporným znaménkem, protože vtéká dovnitř uzlu  $b$ . Navíc uzlová napětí  $U_a$  a  $U_b$  jsou nyní vázána podmínkou

$$Z_i I_x + U_b = U_i + U_a, \text{ neboli } U_i = Z_i I_x + U_b - U_a \quad (26.3.1)$$

Všechny tyto modifikace lze zahrnout do nové soustavy rovnic MMUN:

	$U_a$	$U_b$		$I_x$	
$a$	$I_a$	$I_a$	$\dots$	+1	$U_a$
$b$	$I_b$	$I_b$	$\dots$	-1	$U_b$
.	.	.	.	.	.
	$U_i$	$U_i$	$\dots$	$Z_i$	$I_x$

razítka

Obrázek 26.3.2.: Razítka v pseudoadmitanční matici [Bio04, s. 79]

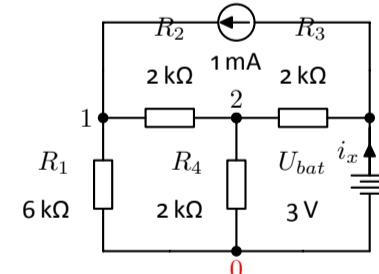
Vektor neznámých uzlových napětí je rozšířen o další neznámou,  $I_x$ . Počet rovnic je rovněž zvětšen o jedničku, a to o výše uvedenou podmínce mezi uzlovými napětími  $U_a$  a  $U_b$ . Přitom napětí  $U_i$  je začleněno do vektoru známých budicích veličin na levé straně. Modifikace rovnice 1. KZ pro uzly  $a$  a  $b$  je provedena zápisem +1 a -1 do sloupce " $I_x$ ".

Právě provedený zápis je návodem, jak pomocí MMUN analyzovat například obvody obsahující zdroj napětí. Impedance  $Z_i$  může být i nulová, pak se bude jednat o ideální zdroj napětí. Při  $U_i = 0$  a  $I_i = 0$  lze modelovat zkrat mezi uzly a počítat proud, tekoucí tímto zkratem. Toho lze využít například při analýze obvodů s proudem řízenými zdroji.

V případě, že se v obvodu nachází více prvků bez admitančního popisu, odpovídá každému z nich samostatné razítce. Pseudoadmitanční matice pak nabývá na rozdíl od obecného rozdílu mezi uzly a proudem řízenými zdroji.

### 26.3.1.1. Pasivní obvody obsahující zdroje napětí a proudu

Pomocí MMUN vyřešme zadání z obr. 26.3.3. Úloha je



Obrázek 26.3.3.: Analyzovaný obvod

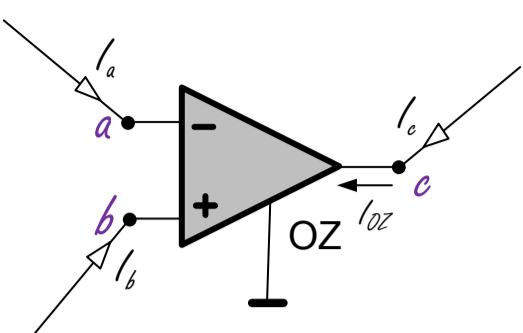
### 26.3.1.2. Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA

Ideální OPAMP, na obr. 26.3.4 po vložení do obvodu způsobí ztotožnění uzlových napětí  $U_a$  a  $U_b$ , a modifikaci proudových poměrů v uzlu  $c$ .

Ve spodním přídavném řádku je zapsána rovnice

$$0 = 1 \cdot U_a - 1 \cdot U_b \quad (26.3.2)$$

Výsledek řešení se nezmění, jestliže obě strany této rovnice vynásobíme libovolným nenulovým číslem. Ve spodním řádku tedy může být namísto  $[1, -1]$  například



Obrázek 26.3.4.: Ideální operační zesilovač typu VFA

[15, -15]. Je-li jeden ze vstupů OZ spojený s referenčním uzlem, neobjeví se

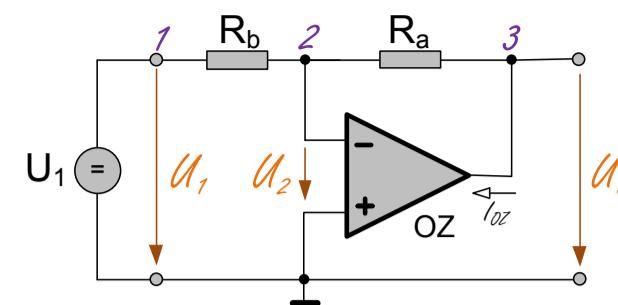
	$U_a$	$U_b$	$U_c$	$I_{OZ}$	
a	$I_a$				
b	$I_b$				
c	$I_c$				
.	.	.	.	.	
	+1	-1			

Obrázek 26.3.5.: MMUN - pro ideální OPAMP typu VFA

příslušné uzlové napětí v rovnicích a proto v posledním řádku bude figurovat jen jedna jednička místo uvedené dvojice.

Jednička v řádku c a sloupci  $I_{OZ}$  reprezentuje připočtení proudu  $I_{OZ}$  do celkové bilance proudů, vytékající z uzlu c.

**Příklad 26.3.1.** Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 26.3.6. Napište rovnice MMUN.



Obrázek 26.3.6.: Invertující zesilovač

Rovnice MMUN budou v maticovém zápisu vypadat takto: Předposlední rovnice

$$\begin{array}{cccccc} U_1 & U_2 & U_3 & I_1 & I_{OZ} & \\ \hline G_b & & -G_b & & -1 & \\ -G_b & & G_a + G_b & -G_a & & \\ & & & G_a & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & & & 1 & & \end{array} * \begin{array}{c} x \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_{OZ} \end{array} = \begin{array}{c} b \\ U_{IN} \\ \dots \\ U_{IN} \\ I_{IN} \\ I_{OZ} \end{array}$$

Tabulka 26.3.1.: Invertující zesilovač

říká, že uzlové napětí  $U_1$  je rovno napětí signálového zdroje  $U_{IN}$ . Jednička v posledním řádku reprezentuje jednoduchou rovnici  $U_2 = 0$ . Ačkoliv je obvod poměrně jednoduchý, je pro ruční řešení neefektivní, neboť jsme získali soustavu o 5 rovnic a 5 neznámých.

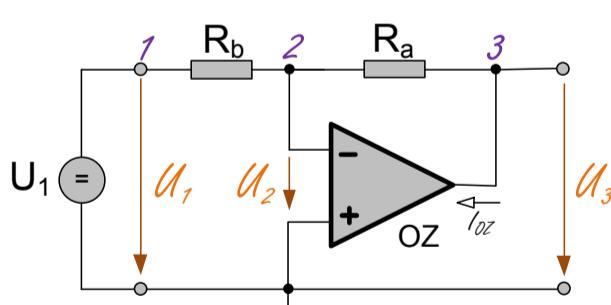
**Příklad 26.3.2.** Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 26.3.7. Napište rovnice MMUN.

**Příklad 26.3.3.** Uvažujme diferenciální zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 26.3.8. Napište rovnice MMUN.

$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$I_1$	$I_2$	$I_{OZ}$
$G_b$			$-G_b$		-1		
	$G_d$			$-G_d$		-1	
		$G_a$	$-G_a$				1
$-G_b$		$-G_a$	$G_a + G_b$				
$-G_d$			$G_c + G_d$				
			-1	1			
1							
	1						

$$\begin{array}{cccccc} x & b \\ U_1 & \\ U_2 & \\ U_3 & \\ U_4 & \\ U_5 & \\ I_1 & \\ I_2 & \\ I_{OZ} & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} U_{IN} \\ U_{IN} \\ U_{IN} \\ U_{IN} \\ U_{IN} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_2 \end{array}$$

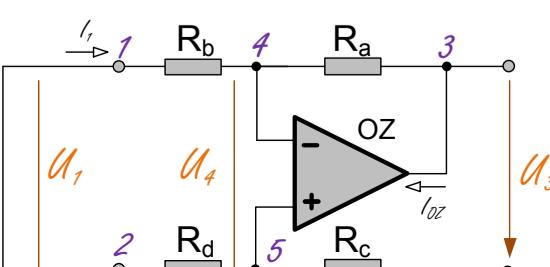
Tabulka 26.3.3.: Diferenciální zesilovač



Obrázek 26.3.7.: Neinvertující zesilovač

$U_1$	$U_2$	$U_3$	$I_1$	$I_{OZ}$	$x$	$b$
	$G_a + G_b$	$-G_a$	-1		$U_1$	
	$-G_a$	$G_a$		1	$U_2$	
1					$U_3$	
	1				$I_1$	

Tabulka 26.3.2.: Neinvertující zesilovač



## 26.4. Napěťový dělič

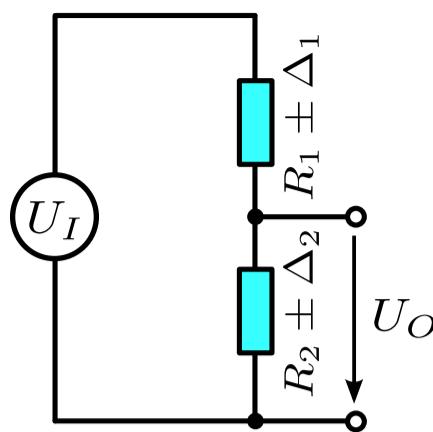
V elektronických soustavách se největších přesností dosahuje u rezistorů, kde je standardně zaručována chyba menší než 1%, u přesných 0.1% a u velmi přesných 0.01%.

Bude nás zajímat jaký vliv má tolerance rezistorů na výsledný poměr výstupního k u vstupnímu napětí a také, zda-li při různě zvoleném poměru těchto rezistorů se bude měnit velikost chyby, ačkoliv budou mít stejnou přesnost. Intuitivně předpokládáme, že nejnepříznivější situace nastane, když hodnoty použitých rezistorů padnou na opačné strany tolerančních pásů, jenž reprezentuje  $\Delta_1$  a  $\Delta_2$  tj.  $R_2 - \Delta_2 R_2$  a  $R_1 + \Delta_1 R_1$  nebo  $R_2 + \Delta_2 R_2$  a  $R_1 - \Delta_1 R_1$ . V obou případech bude chyba stejná, proto si vybereme například první případ a zapíšeme (rov. 26.4.1).

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2 - \Delta_2 R_2}{R_1 + \Delta_1 R_1 + R_2 - \Delta_2 R_2} \quad (26.4.1)$$

a po úpravě

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2}$$



Obrázek 26.4.1.

Polynom ve jmenovateli rozvineme do následující podoby

$$[(1+\Delta_1)+(1-\Delta_2)](R_1+R_2) = (1+\Delta_1)R_1+(1-\Delta_2)R_2+(1+\Delta_1)R_2+(1-\Delta_2)R_1$$

$$(1+\Delta_1)R_1+(1-\Delta_2)R_2 = [(1+\Delta_1)+(1-\Delta_2)](R_1+R_2)-(1+\Delta_1)R_2-(1-\Delta_2)R_1$$

a získáme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1-\Delta_2)R_2}{[(1+\Delta_1)+(1-\Delta_2)](R_1+R_2)-[(1+\Delta_1)R_2+(1-\Delta_2)R_1]}$$

Nyní vydělíme jmenovatel i čitatel ( $R_1 + R_2$ ) a dostaneme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1-\Delta_2)R_2}{R_1+R_2}}{[(1+\Delta_1)+(1-\Delta_2)] - \frac{[(1+\Delta_1)R_2+(1-\Delta_2)R_1]}{R_1+R_2}} \quad (26.4.2)$$

Standardně rezistory volíme se stejnou tolerancí, tedy  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$  a získáme výslednou rovnici pro poměr  $\frac{U_o}{U_i}$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1-\Delta)R_2}{R_1+R_2}}{[(1+\Delta)+(1-\Delta)] - \frac{[(1+\Delta)R_2+(1-\Delta)R_1]}{R_1+R_2}} \quad (26.4.3)$$

Řekněme například, že pro návrh děliče máme k dispozici rezistory s tolerancí 1% a vstupní napětí je 1 V. Obvod, ve kterém je dělič použit, umožňuje volit různé poměry, ale jejich součet je konstantní. Na otázku jaký poměr zvolit, abychom při dané toleranci rezistorů dostali výstupní napětí s největší přesností odpovídá následující tabulka.

$R_1$	1kΩ	10kΩ	19kΩ
$R_2$	19kΩ	10kΩ	1kΩ
$U_{out}$	0,950	0,500	0,050
$U_{out}^*$	0,949	0,495	0,049
$\varepsilon_r [\%]$	0,101	1,000	1,883

Tabulka 26.4.1.

## References

- [Bio04] D. Birolek. *Řešíme elektronické obvody aneb kniha o jejich analýze*. Vol. 1. BEN - technická literatura, 2004, p. 520. ISBN: 80-7300-125-X (cit. on pp. 123, 124).
- [PVo04] M. Patočka and P. Vorel. *Řídicí elektronika - pasivní obvody 1.díl*. Vol. 1. VUT Brno, 2004, p. 106 (cit. on p. 123).

# 27. Dynamické pochody v lineárních obvodech

## 27.1. Fyzikální podstata přechodných dějů

### Obsah

27.1. Fyzikální podstata přechodných dějů . . . . .	127
27.1.1. Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti . . . . .	128
27.2. Přechodný jev kmitavého obvodu . . . . .	129

V obvodu, který je v ustáleném stavu, nechť dojde buďto

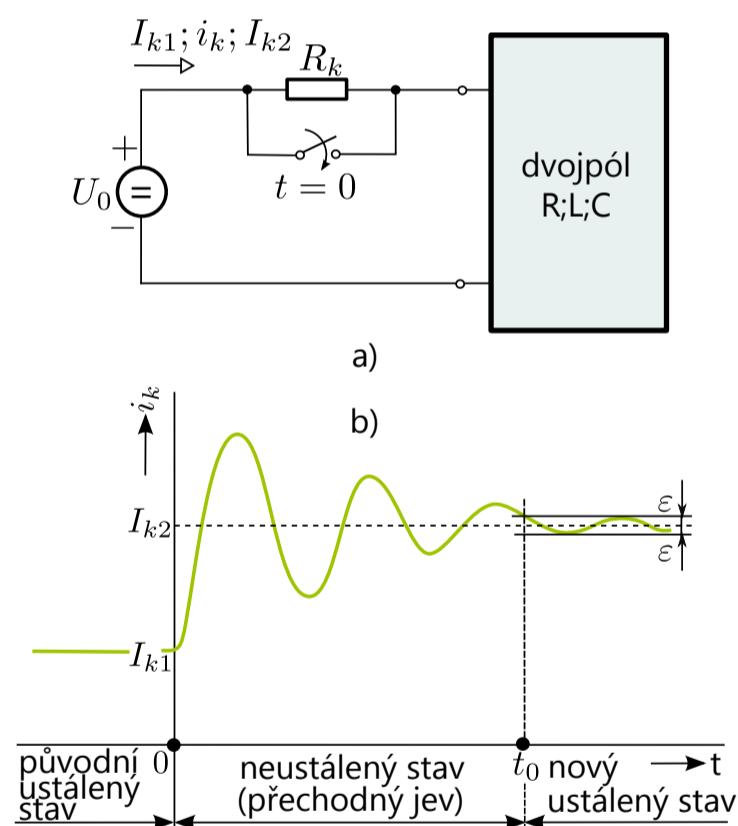
- ke změně parametru aktivního prvku (např. připojení nebo odpojení zdroje napětí nebo proudu),
- ke změně parametru pasivního prvku (např. zvětšení nebo zmenšení odporu, indukčnosti nebo kapacity),
- ke změně topologické struktury (např. přerušení větve, spojení větve nakrátko, připojení další větve).

Kteroukoliv z uvedených změn dostaneme nový obvod jemuž přísluší nový *ustálený stav*; tento stav však nenastane okamžitě. Zmíněná změna přivede obvod do *neustáleného stavu*, v němž odezvy napětí a proudů - nazýváme je **přechodnými jevy** - se postupně přibližují k hodnotám nového ustáleného stavu. Přechodné jevy, ač - přesně vzato - probíhají v nekonečně dlouhé době, jsou v praxi jevy krátkodobými, neboť odezvy se trvale "dostatečně těsně" přiblíží k hodnotám nového stavu již v poměrně krátké době - v běžných případech jsou to mikrosekundy až milisekundy.

Naskýtá se otázka, proč odezvy obvodu obecně nepřecházejí z původního do nového ustáleného stavu skokem a proč dochází k neustálenému stavu obvodu. Obvod má elektromagnetickou energii  $W(t)$ , která je součtem energií elektrického pole kondenzátoru  $W_e(t)$  a energií magnetického pole cívek  $W_m(t)$ . Elektromagnetická energie obvodu

$$W(t) = \sum_k W_{e_k}(t) + \sum_k W_{m_k}(t)$$

je tedy funkcí napětí na jeho kondenzátorech a proudů v jeho cívkách. Protože tyto veličiny určují energetický stav obvodu, nazýváme je **stavovými veličinami**.



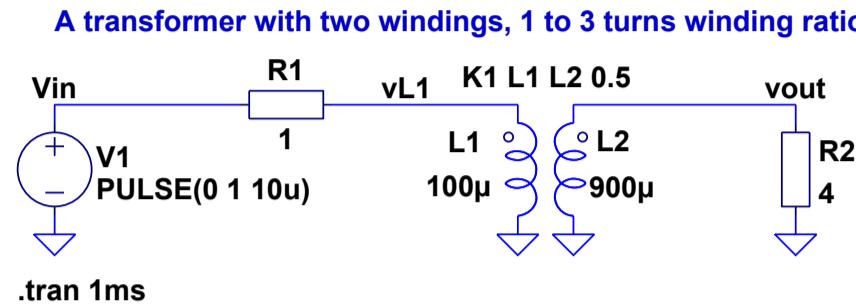
Obrázek 27.1.1.: K objasnění pojmu "neustálený stav" a "přechodný jev"

Elektrické výkony  $P$  v reálném elektrickém obvodu mají z fyzikálních důvodů vždy konečnou hodnotu. U obvodů, které jsou dostatečně adekvátními modely respektujícími tuto skutečnost (nazýváme je obvody s konečnými výkony) je to postačující podmínka pro to, aby jejich energie  $W = W(t)$  byla spojitou funkcí času (neboť  $P = \frac{dW}{dt}$ ). Z uvedených vztahů pro energii obvodu  $W(t)$  je patrné, že  $W = W(t)$  bude spojitou funkcí, jsou-li stavové veličiny **spojitými funkcemi**. To znamená, že hodnota stavových veličin v okamžiku před vznikem přechodného jevu je táz jako v okamžiku po jeho vzniku. Pro přechodný jev v okamžiku  $t = 0$  platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} u_c(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u_c(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} i_L(t) \quad (27.1.1)$$

### 27.1.1. Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti

**Příklad 27.1.1. Transformátor:** Na primární vinutí vzduchového transformátoru s činitelem  $k < 1$  je v čase  $t = 0$  připojen zdroj napětí  $U_1 = \text{konst}$ . Formuluje postup pro výpočet odezv  $i_1(t)$  a  $i_2(t)$  pro obecné parametry zapojení a výsledky ověřte simulací pro následující hodnoty:  $U_1 = 1V$ ,  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ , transformátor má převod  $1 : 3$ .



Obrázek 27.1.2.: Transformer.asc: Zapojení vzduchového transformátoru pro simulaci v programu LTSpice

**Klasické řešení:** Podle II. Kirchhoffova zákona platí soustava rovnic:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_1 \quad (27.1.2)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (27.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + L_1 \lambda & L_{12} \lambda \\ L_{12} \lambda & R_2 + L_2 \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (27.1.4)$$

$$(R_1 + L_1 \lambda) - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (27.1.5)$$

$$R_1 R_2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + L_1 L_2 \lambda - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (27.1.6)$$

$$\lambda^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + R_1 R_2 = L_1 L_2 \quad (27.1.7)$$

$$\lambda^2 \left( \frac{L_1 L_2 - L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) + \left( \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2} \right) \lambda + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0 \quad (27.1.8)$$

Zavedeme-li  $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$ ,  $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$ ,  $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$ ,  $k^2 = \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}$ ,  $\sigma = 1 - k^2$  dostaneme

$$\sigma \lambda^2 + \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = 0 \quad (27.1.9)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\sigma \tau_1 \tau_2} = 0 \quad (27.1.10)$$

Je-li  $\lambda_1 = -\beta + \alpha$  a  $\lambda_2 = -\beta - \alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma} \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (27.1.11a)$$

$$\beta = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)^2 + \frac{4\sigma}{\tau_1 \tau_2}} \quad (27.1.11b)$$

Jelikož  $k < 1$ ; je  $0 < \sigma < 1$ ; rozborem rovnic 27.1.11b plyne, že pak je  $\alpha \neq 0$ , reálné. Soustava rovnic 27.1.2 má tedy obecné řešení

$$i_1(t) = i_{1o} + i_{1p} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{U_0}{R} \quad (27.1.12)$$

$$i_2(t) = i_{2o} + i_{2p} = K_3 e^{\lambda_1 t} + K_4 e^{\lambda_2 t} \quad (27.1.13)$$

Integrační konstanty  $K_1, K_2, K_3$  a  $K_4$  určíme z matematických počátečních podmínek:  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  (což jsou zároveň fyzikální počáteční podmínky) a  $\frac{di_1}{dt}|_{t=0}, \frac{di_2}{dt}|_{t=0}$ , které určíme z rovnic 27.1.2 pro  $t = 0$ :

$$L_1 i'_1 + L_{12} i'_2 = U_0 \implies i'_1 = \left( \frac{U_0 - L_{12} i'_2}{L_1} \right) \quad (27.1.14)$$

$$L_2 i'_2 + L_{12} i'_1 = 0 \quad (27.1.15)$$

Dále postupujeme tak, že do druhé rovnice dosadíme vyjádřenou první derivaci primárního proudu z první rovnice a získáme vztah pro první derivaci sekundárního proudu v čase  $t = 0$ :

$$\frac{di_1}{dt}|_{t=0} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (27.1.16)$$

$$\frac{di_2}{dt}|_{t=0} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (27.1.17)$$

Aplikací těchto počátečních podmínek na obecné řešení 27.1.12 plynou vztahy

$$i_1(0) = K_1 + K_2 + \frac{U_0}{R}; \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \quad (27.1.18)$$

$$i_2(0) = K_3 + K_4; -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_3 + \lambda_2 K_4 \quad (27.1.19)$$

Z první a třetí rovnice vypočítáme  $K_1, K_2$ , ze druhé a čtvrté rovnice  $K_3, K_4$ . Dosazením do rovnice 27.1.12 dostaneme po úpravě odezvy  $i_1(t)$  a  $i_2(t)$ . Speciálně pro  $R_1 = R_2 = R; L_1 = L_2 = L$  je

$$i_1(t) = \frac{U_0}{2R} \left( 2 - e^{-\frac{t}{\tau_3}} - e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (27.1.20)$$

$$i_2(t) = \frac{U_0}{2R} \left( -e^{-\frac{t}{\tau_3}} + e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (27.1.21)$$

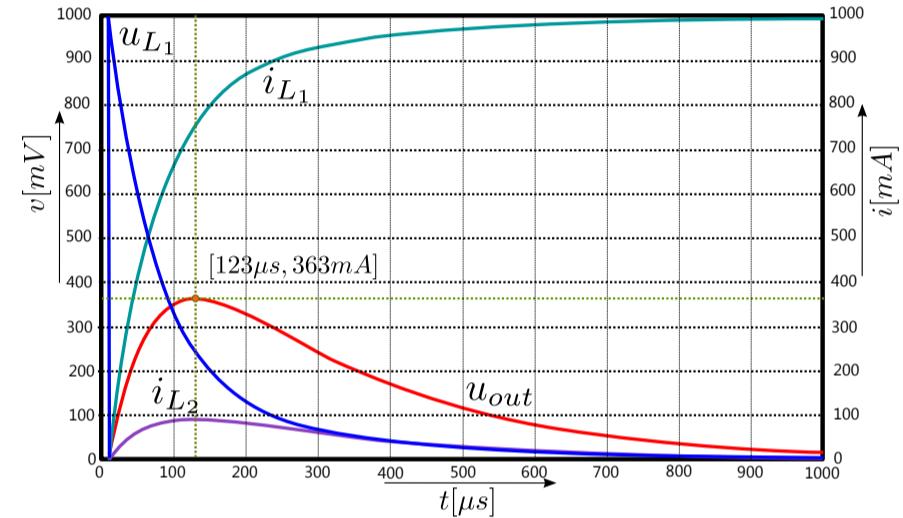
kde je  $\tau_3 = \frac{L+L_{12}}{R}$ ;  $\tau_4 = \frac{L-L_{12}}{R}$

**Operátorové řešení:** Laplaceovou transformací rovnice 27.1.2 dostáváme

$$(R_1 + pL_1) I_1(p) + pL_{12} I_2(p) = \frac{U_0}{p} \quad (27.1.22)$$

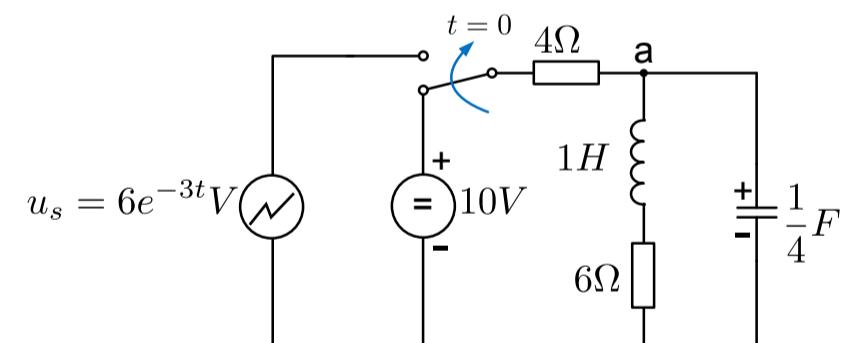
$$pL_{12} I_1(p) + (R_2 + pL_2) I_2(p) = 0 \quad (27.1.23)$$

Zavedeme  $\sigma; \tau_1; \tau_2$ , vypočítáme obrazy proudů a jejich zpětnou transformací dostaneme rovnice pro odezvy  $i_1(t)$  a  $i_2(t)$ .



Obrázek 27.1.3.: Odezva na jednotkový skok transformátoru s parametry:  $k = 0.5, L_1 = 100\mu H, L_2 = 900\mu H$

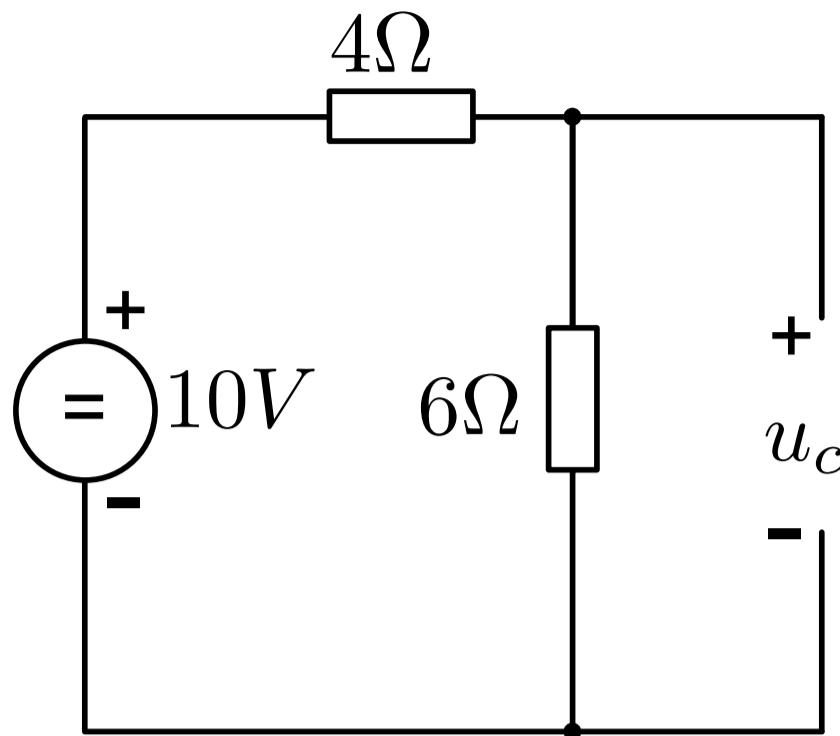
**Příklad 27.1.2.** Najděte odezvu napětí na kondenzátoru  $u_c(t)$  obvodu na obrázku 27.1.4 pro  $t > 0$ . (zdroj [Dorf])



Obrázek 27.1.4.: Obvod k příkladu 27.1.2

**Řešení:** Nejdříve stanovíme počáteční podmínky, které vyplývají z ustáleného stavu v době  $t = 0^-$ . Obvod na obr. 27.1.4 můžeme překreslit do podoby na obr. 27.1.5

$$u_c(t) = \frac{44}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad [V] \quad (27.1.24)$$



Obrázek 27.1.5.: Obvod k příkladu 27.1.2

## 27.2. Přechodný jev kmitavého obvodu

Kmitavým obvodem máme na mysli obvod s jedním stupněm volnosti, složeného z odporu  $R$ , kapacity  $C$  a indukčnosti  $L$ , zapojených v sérii. Je jedním z nejdůležitějších případů elektrotechnické praxe. Dosud probírané případy (obvod  $RL$  a  $RC$ ) jsou vždy určitým zjednodušením úplného obvodu s jedním stupněm volnosti, vzniklé tak, že buď indukčnost obvodu, nebo kapacita jsou zanedbatelné vzhledem k ostatním prvkům. Rozbor přechodného stavu kmitavého obvodu (dále stručně obvodu  $RLC$ ) umožňuje stanovit směrnice pro možnost tohoto zjednodušení a jeho důsledky.

Zopakujme, že přechodný stav, je vždy dán superpozicí nového ustáleného stavu a vlastní přechodné složky, jejíž průběh závisí jen na vlastnostech obvodu a počátečních podmínkách (a nikoliv na průběhu vstupního signálu), proto nejdříve budeme řešit tzv. *volný stav obvodu*, tj. stav, kdy vnější působení na vstupu je nulové. Za těchto okolností může v obvodu existovat přechodný jev, je-li v obvodu (tj. v akumulačních prvcích) na počátku nahromaděna určitá energie. Vzhledem k tomu, že to může být jednou energie elektrického pole v kondenzátoru, jednou energie magnetického pole v cívce, je počáteční stav úplně určen, známe-li hodnoty napětí na kapacitě a proudu v indukčnosti v počátečním okamžiku; matematicky vyjádřeno, stanovíme počáteční podmínky vždy ve tvaru

$$u_C(0) = U_{C_0} \quad i(0) = I_0. \quad (27.2.1)$$

Protože za volného stavu jsou vstupní svorky spojeny *nakrátko*, je rovnice pro proud v obvodu

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (27.2.2)$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + U_{C_0} = 0 \quad (27.2.3)$$

Řešení provedem pomocí Laplaceovy transformace. K přihlédnutí k počátečním podmínkám 27.2.2 dostaneme rovnici

$$I(p)(R + Lp + \frac{1}{pC}) = I_0L - \frac{U_{C_0}}{p}, \quad (27.2.4)$$

a z ní

$$I(p) = \frac{pCLI_0 - CU_{C_0}}{p^2LC + pRC + 1}. \quad (27.2.5)$$



## 28. Lineární obvody v harmonickém ustáleném stavu

### Obsah

28.1. Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty . . . . .	131
28.2. Obvody s nastavitelnými parametry . . . . .	132

V této kapitole se seznámíme se *symbolicko-komplexní metodou* (SKM), jež má základní důležitost pro teorii obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Potom prozkoumáme vlastnosti jednodušších obvodů v tomto stavu a metody jejich analýzy. Posléze pojednáme o elektrickém výkon v obvodech a o nejdůležitějších otázkách přenosu energie [May75, s. 60].

### 28.1. Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty

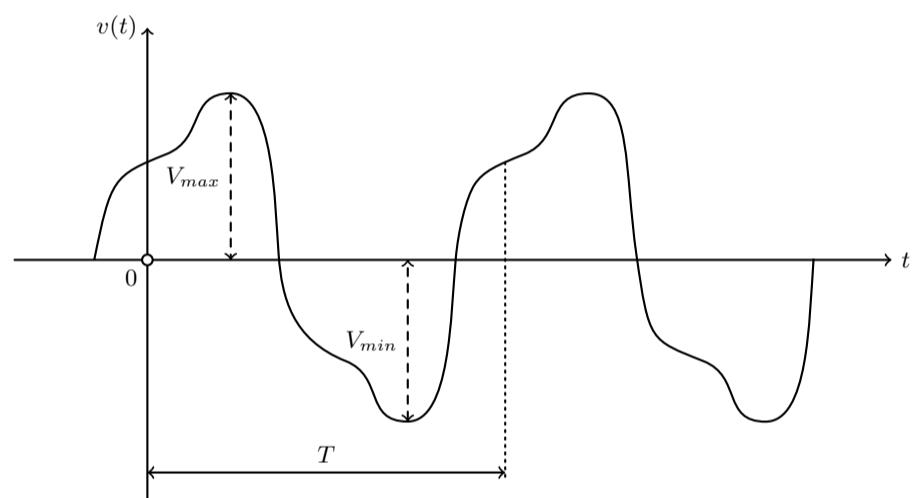
Periodickou veličinou nazýváme takovou veličinu  $v$ , jejíž závislost na čase lze vyjádřit periodickou funkcí, pro níž existuje konstanta  $T > 0$  taková, že pro každé  $t$  platí vztah

$$v(t+T) = v(t), \quad (28.1.1)$$

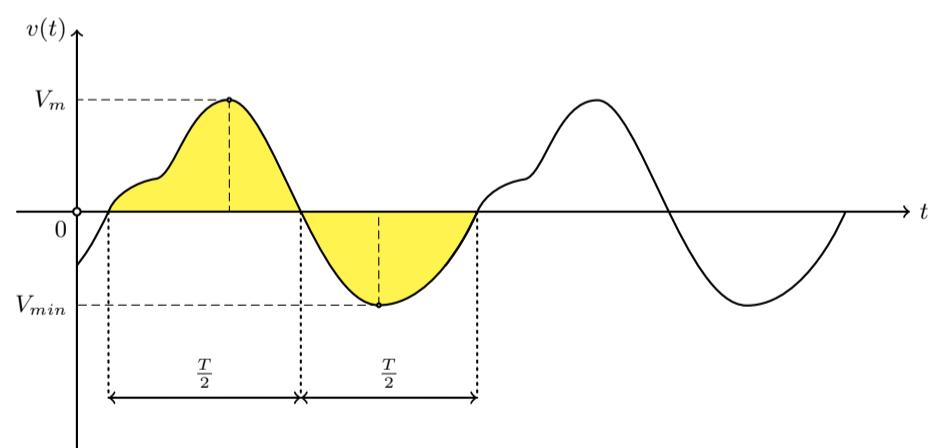
Konstanta  $T$  se nazývá **perioda** resp. *doba kmitu*. V aplikacích se zpravidla používá nejmenší kladná perioda, tzv. *základní perioda*; pro stručnost budeme hovořit pouze o periodě. Je-li dána periodická veličina na jakémkoliv intervalu  $(t_0, t_0 + T)$ , je tím zřejmě definována pro všechna  $t > t_0$ . Průběh veličiny  $v$  na jakémkoliv intervalu délky  $T$  se nazývá **cyklem**. Počet cyklů za jednotku času (za sekundu) udává **kmitočet**, nebo též **frekvenci** periodické veličiny

$$f = \frac{1}{T}, \quad (28.1.2)$$

V elektrotechnice rozdělujeme periodické veličiny do dvou skupin:

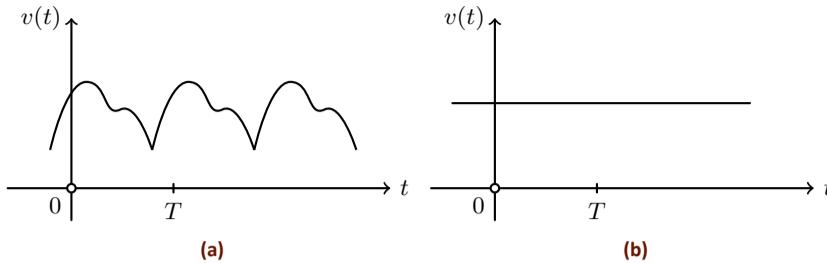


Obrázek 28.1.1.: Příklad periodické veličiny  $v = v(t)$  pro kterou platí  $v(t+T) = v(t)$



Obrázek 28.1.2.: Časový průběh střídavé veličiny  $v = v(t)$ , pro kterou platí, že obsahy ploch v jednom cyklu nad osou  $t$  a pod osou  $t$  jsou totožné

- Veličiny  $v$ , jež během svého cyklu změní znaménko (obr.28.1.1) nazýváme **kmitavé**. Speciálním případem kmitavých veličin jsou **střídavé veličiny**, jež mají tu vlastnost, že po dobu  $T/2$  jsou trvale kladné, po dobu  $T/2$  naopak záporné a obsahy ploch omezených grafem funkce  $v = v(t)$  v jednom cyklu nad osou  $t$  a pod osou  $t$  jsou *totožné* (obr. 28.1.2).
- Veličiny  $v$ , jež nemění své znaménko, tj. jsou trvale kladné nebo trvale záporné (obr.28.1.3) nazýváme **pulzující**. Speciálním případem jsou **stejnosměrné veličiny**, které nemění svou hodnotu, tj.  $v = \text{konst}$  (obr.28.1.3 (b)).



Obrázek 28.1.3.: Časový průběh pulsující periodické veličiny a konstantní veličiny

Praktický význam mají zejména tyto hodnoty periodických veličin:

- *Maximální hodnota*  $V_m$  periodické veličiny  $v$ , tj. největší hodnota, které tato veličina dosahuje  $v_m = \max v(t)$
- *Minimální hodnota*  $V_{min}$  periodické veličiny  $v$ , tj. nejmenší hodnota, které tato veličina dosahuje  $v_m = \min v(t)$

Maximální a minimální hodnoty střídavé veličiny se nazývají též *vrcholovými hodnotami* (kladnými nebo zápornými), obr. 28.1.1 a 28.1.2.

**Střední hodnota** veličiny  $v$  v intervalu  $\langle t_i, t_j \rangle$  je

$$V_s = \frac{1}{t_j - t_i} \int_{t_i}^{t_j} v(t) dt \quad (28.1.3)$$

U periodické veličiny se spravidla počítá střední hodnota v jedno cyklu. U střídavé veličiny je v jednom cyklu  $V_s = 0$ , a proto střední hodnotu vyjadřujeme v takovém intervalu v němž je  $v \geq 0$ .

**Efektivní hodnota** periodické veličiny v intervalu  $\langle 0, T \rangle$  je

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (28.1.4)$$

U periodických napětí a proudů má praktický význam především jejich efektivní hodnota. Efektivní hodnotu periodického proudu  $i = i(t)$  procházejícího konstatním odporem  $R$  lze interpretovat jako stejnosměrný proud  $I$ , při němž se za dobu  $T$  vyvine v odporu  $R$  stejná tepelná energie, jako průchodem proudu  $i$ . Podle Joulova-Lenzova zákona je totiž

$$RI^2T = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt} \quad (28.1.5)$$

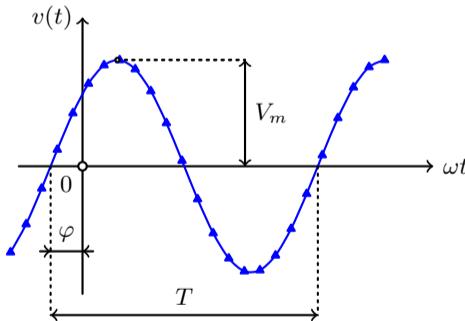
z čehož lze určit  $I$  v souladu s rovnici 28.1.4. Obdobně lze fyzikálně interpretovat efektivní hodnotu napětí.

Střední hodnotu periodického proudu  $i = i(t)$  lze fyzikálně interpretovat jako stejnosměrný proud  $I_s$ , jímž se za dobu  $T$  přenese stejný náboj  $Q$  jako proudem  $i$ :

$$Q = I_s T = \int_0^T i(t) dt \quad (28.1.6)$$

z čehož plyne  $I_s$  v souladu s rovnici 28.1.3.

Efektivní hodnotu napětí (proudů) lze změřit např. feromagnetickým, elektrodynamickým nebo tepelným voltmetrem (ampérmetrem). Střední hodnotu napětí (proudů) magnetoelektrickým voltmetrem (ampérmetrem) a střední hodnotu výkonu elektrodynamickým wattmetrem.



Obrázek 28.1.4.: Harmonická funkce  $v = V_m \cos(\omega t + \varphi)$  resp.  $v = V_m \cos(\omega t + \varphi')$  kde je  $\varphi' = \varphi - \frac{T}{4}$

Střídavou veličinu  $v$  lze též do jisté míry charakterizovat činitelem tvaru  $\beta$ , činitelem výkyvu  $\gamma$  a činitelem plnění  $\alpha$  definovanými vztahy

$$\beta = \frac{V}{V_s}, \quad \gamma = \frac{V_m}{V}, \quad \alpha = \frac{V_s}{V_m} \quad (28.1.7)$$

Je zřejmé, že platí  $\alpha\beta\gamma = 1$ .

V elektrotechnice mají velkou důležitost periodická napětí a proudy, jejichž závislost je dána sinusovou nebo kosinusovou funkcí, tj.

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (28.1.8)$$

nebo

$$v = V_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (28.1.9)$$

kde  $V_m, \omega, \varphi$  jsou konstanty (obr. 28.1.4).

Jelikož, tato napětí, resp. proudy představují *harmonické kmity*, nazýváme je *harmonicky proměnné*, nebo krátce *harmonická napětí* resp. *harmonická proudy*. Konstanta  $V_m$  je maximální hodnota, či-li *amplituda*,  $\omega t + \varphi$  je *fáze*,  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  je *úhlový kmitočet* a  $\varphi$  je *počáteční fáze* harmonické funkce.

Rozdíl fází dvou harmonických veličin (stejného kmitočtu) nazýváme *fázový posun*.

**Příklad 28.1.1.** Pro harmonickou veličinu, určete efektivní hodnotu, střední hodnotu, činitele tvaru, činitele výkyvu a činitele plnění **Řešení:** Efektivní hodnota je:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \doteq 0.707 V_m \end{aligned} \quad (28.1.10)$$

Podrobný výpočet tohoto integrálu pomocí substituce  $\omega t + \varphi = \frac{\alpha}{2}$  je poněkud zdlouhavější:

$$\begin{aligned} \omega t + \varphi &= \frac{\alpha}{2} \rightarrow 2(\omega t + \varphi) = \alpha \\ \omega dt &= \frac{1}{2} d\alpha \rightarrow dt = \frac{1}{2\omega} d\alpha \end{aligned}$$

Nesmíme zapomenout přepočítat meze  $\alpha|_{t=0} = 2\varphi$  a  $\alpha|_{t=T} = 4\pi + 2\varphi$  nového integrálu.

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{V_m}{2T\omega} \int_{\alpha_d}^{\alpha_h} \cos^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha \\ &= \frac{V_m}{4\pi} \int_{\alpha_d}^{\alpha_h} \frac{1 + \cos \alpha}{2} d\alpha = \frac{V_m}{4\pi} \left( \frac{\alpha}{2}|_{\alpha_d}^{\alpha_h} + \frac{1}{2} \sin \alpha|_{\alpha_d}^{\alpha_h} \right) \\ &= \frac{V_m}{4\pi} \left( 2\pi + \varphi - \varphi + \frac{1}{2} \sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) = \frac{V_m}{2}. \end{aligned}$$

Při zjednodušování integrálu je užito goniometrického vzorce  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$  a faktu  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Střední hodnota kladné půlvlny je

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}-\frac{\varphi}{\omega}}^{\frac{T}{4}-\frac{\varphi}{\omega}} V_m \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\varphi}{\omega}}^{-\frac{T}{2}-\frac{\varphi}{\omega}} V_m \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{2}{\pi} V_m \doteq 0,637 V_m \end{aligned}$$

činitele tvaru, výkyvu a plnění jsou

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{V}{V_s} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,111, \\ \gamma &= \frac{V_m}{V} = \sqrt{2} \doteq 1.414, \\ \alpha &= \frac{V_s}{V_m} = \frac{2}{\pi} \doteq 0,637 \end{aligned}$$

## 28.2. Obvody s nastavitelnými parametry

V praxi se setkáváme s obvody, u nichž lze (spojitě nebo stupňovitě) nastavit odpor odporníku, kapacitu kondenzátoru, vlastní nebo vzájemnou indukčnost cívek, amplitudu, fázi nebo kmitočet zdroje (napětí nebo proud). Nazveme je *obvody s nastavitelnými parametry*.

## References

[May75] D. Mayer. *Úvod do teorie elektrických obvodů*. Západočeská univerzita v Plzni, 1975. 355 pp. (cit. on p. 131).

**Část XI.**

**Elektronické součástky**



# 29. Základní zákony elektromagnetismu

## 29.1. Magnetická indukce

### Obsah

29.1. Magnetická indukce . . . . .	135
29.2. Zákon elektromagnetické indukce . . . . .	135
29.3. Spřažený tok vzduchové cívky . . . . .	138
29.4. Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem . . . . .	138

V této teoreticky změřené kapitole budou shrnuti základní fyzikální zákony, kterými se řídí elektromagnetické jevy a jejichž znalost bude nezbytná při studiu následujících praktičtěji zaměřených kapitol. Mízi nejdůležitější patří zákon elektromagnetické indukce. Velký praktický význam má jeho zobecnění i pro případy nejsložitější, jakými jsou *nelineární* a navíc *parametrické* magnetické obody. Důležitým pojmem je *spřažený* magnetický tok cívky. Pro hlubší pochopení všech zákonitostí bude vhodné upozornit na *topologické vlastnosti* elektromagnetického pole. Ukazuje se totiž, že topologický přístup je velice užitečný a silným nástrojem, který významně usnadňuje pochopení **Maxwellových rovnic** se všemi jejich důsledky [Pat11, s. 6]. Topologii elektromagnetického pole je proto věnována celá kapitola 30.

Základní veličinou pro popis magnetických polí a jejich účinků je *vektor magnetické indukce* -  $\vec{B}$ . Dle soustavy SI je jednotkou magnetické indukce *tesla* [ $T$ ] a projevuje se silovými účinky na vodiče protékáné proudy a indukováním napětí při jeho změně.

Je proto dobré měřitelný. První rovnice (Ampérův zákon) ze souboru Maxwellových rovnic určuje rovnost oběhového integrálu magnetické indukce po uzavřené křivce proudem protékající vodiči, jež jsou touto křivkou uzavřeny.

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (29.1.1)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  je magnetická konstanta - **permeabilita vakua**. Elektrické proudy jsou stále obklopeny magnetickými poli. Tato pole se dají zesílit cívou s magnetickým jádrem. Na tomto jevu je založen jeden z elementárních principů elektrotechniky.

Protože je tento zákon stěžejní k pochopení ostatních principů, je vhodné si také uvědomit vztah jednotky magnetické indukce k základním jednotkám soustavy SI:

$$1T = 1 \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1 \frac{kg}{C \cdot s} = 1 \frac{kg}{A \cdot s^2} = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$

## 29.2. Zákon elektromagnetické indukce

Základní laboratorní experimenty, vedoucí k odhalení existence elektromagnetické indukce, uskutečnil Faraday<sup>1</sup> r. 1831. Matematickou formulaci *indukčního zákona* v podobě rovnice

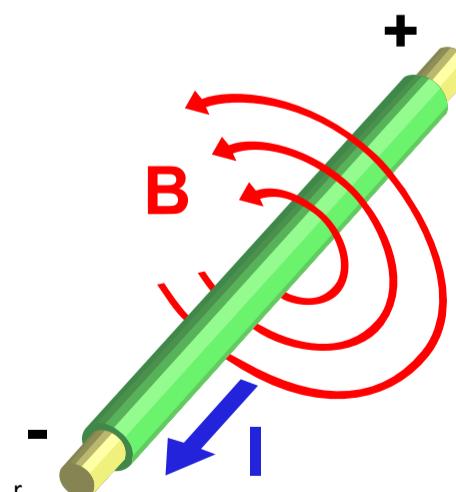
$$u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (29.2.1)$$

stanovil již on sám, postupně význam zákona formálně upřesňovali další badatelé např. Neumann<sup>2</sup> kolem roku 1845. Konečné znění Maxwellovy teorie včetně formulace indukčního zákona do podoby II. Maxwellovy rovnice budoval Maxwell<sup>3</sup> velmi pozvolna, v období 1855 až 1873. Z historického pohledu je zajímavé a důležité, že přesné kvantitativní experimenty s elektromagnetickou indukcí byly v té době uskutečnitelné pouze pomocí *balistického galvanometru*. Lze odhadnout, že nebýt tohoto přístroje, přesná matematická formulace indukčního zákona by se

<sup>1</sup>Michael Faraday (1791 - 1867), samouk, zakladatel klasické elektrodynamiky, vynikající experimentátor: Zavedl pojem fyzikálního prostorového pole pomocí siločar, tzv. "trubic"

<sup>2</sup>Franz Ernst Neumann (1798 - 1895), teoretický fyzik, matematik, mineralog. Definoval pojem magnetický vektorový potenciál, formuloval Neumannův vzorec pro vzájemnost dvou smyček. Učitel G. R. Kirchhoffa.

<sup>3</sup>James Clark Maxwell (1831 - 1879), teoretický fyzik, působil na Trinity College university v Cambridge, na King's College v Londýně, posléze první ředitel Cavendishovy laboratoře na univerzitě v Cambridge. Původně se zabýval teoretickou mechanikou a kinetickou teorií plynů. Soustavu čtyř Maxwellových rovnic odvodil především na základě mechanicko-elektrických analogií.



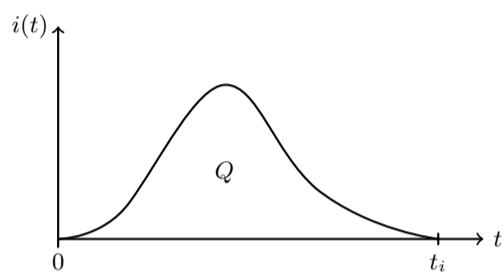
Obrázek 29.1.1.: Elektrický proud ve vodiči způsobuje vznik magnetické pole v jeho okolí.

praděpodobně opozdila o několik let. Kupodivu, z psychologického hlediska je i v současnosti velmi vhodné vysvětlit princip indukčního zákona pomocí historických pokusů s balistickým galvanoměrem.

Jako každý elektromagnetický měnič energie (tj. motor), obsahuje i magnetoelektrické měřící ústrojí galvanoměru dva akumulátory energie: moment setrvačnosti  $J$  otočné části a indukčnost cívky  $L$ . Jedná se tedy o kmitavou soustavu 2. řádu. Každou takovou soustavu lze kriticky, případně nadkriticky tlumit - především zařazením tlumicího odporu vhodné velikosti do série s měřicím systémem (tlumení vlivem mechanického tréjí je úmyslně konstrukčně potlačeno na zanedbatelnou úroveň). Balistický galvanoměr je cíleně konstruován s velkým momentem setrvačnosti  $J$  a s malou tuhostí  $k_d$  direkčních pružin, aby měl dlouhou dobu kmitu  $T_G = 2\pi\sqrt{J/k_d}$  několik sekund. Proteče-li galvanoměrem krátký proudový impuls  $i(t)$  o celkové délce  $t_i$  podle obr. 29.2.1, pak lze snadno dokázat, že za předpokladu  $t_i \ll T_G$  je první maximální výchylka  $\alpha_{max}$  tlumeného pohybu ukazatele přímo úměrná celkovému náboji  $Q$  proudového impulsu podle rovnice

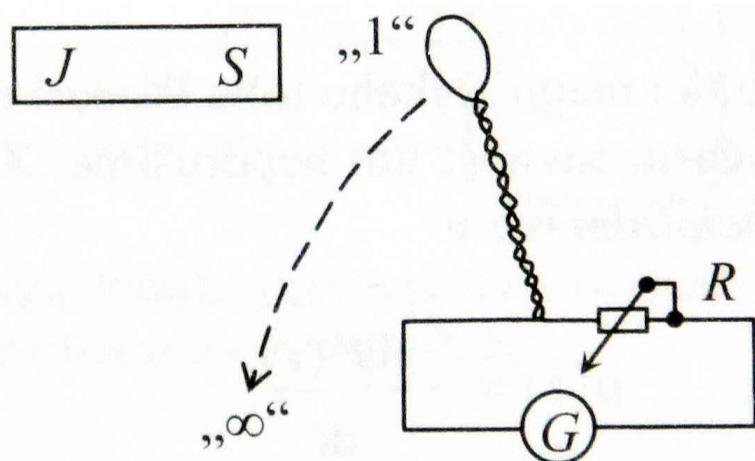
$$\alpha_{max} = k_b Q = k_b \int_0^{t_i} i(t) dt, \quad (29.2.2)$$

kde  $k_b$  je balistická konstanta použitého galvanoměru. Balistický galvanoměr tedy pracuje jako integrátor proudu v přesném matematickém smyslu.



Obrázek 29.2.1.: Příklad krátkého proudového impulsu prošlého balistickým galvanoměrem.

Uvažujme experiment uspořádaný podle obr. 29.2.2. V uzavřeném obvodu galvanoměru se nachází celkový odpor  $R$  a tuhá samonosná cívka v podobě kruhového závitu, připojená na dlouhé ohebné zkroucené přívody. Husté zkroucení zajišťuje, že do samotných přívodů se nemůže indukovat žádné napětí, pohybují se cívka v magnetickém poli permanentního magnetu. Při rychlém přesunu z polohy 1 do vzdálené polohy ∞ klesne v cívce magnetický tok na nulu, časová změna toku zapříčiní vznik indukovaného napětí, napětí protlačí obvodem proudový impuls odpovídající přibližně obr. 29.2.1.



Obrázek 29.2.2.: Uspořádání experimentálního pracoviště s balistickým galvanoměrem

Za předpokladu kritického nebo nadkritického tlumení má odpor  $R$  relativně velkou hodnotu. Proto lze s dobrou přesností zanedbat vnitřní indukčnost měřicího systému galvanoměru a uvažovat, že celé napětí  $u(t)$ , indukované v cívce při jejím pohybu, spočine pouze na odporu. V uzavřeném okruhu o celkovém odporu  $R$  pak platí Ohmův zákon ve tvaru

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}. \quad (29.2.3)$$

Dosadíme-li rovnici 29.2.3 do 29.2.2, po úpravě získáme vztah

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \frac{\alpha_{max} R}{k_b}. \quad (29.2.4)$$

Experimentálně je možno dospět ke dvěma stěžejním poznatkům:

- Při přesunu cívky z polohy 1 do polohy ∞ nezávisí výchylka  $\alpha_{max}$  na rychlosti pohybu. (Za předpokladu  $t_i \ll T_G$ , což je omezení dané nedokonalostí přístroje a nijak nesouvisí se zkoumaným jevem.)
- Při přesunu cívky z polohy 1 do polohy ∞ zůstává součin ( $\alpha_{max} \times R$ ) stále konstantní, měníme-li úmyslně velikost odporu  $R$ . To jest: při k-násobném zvýšení odporu klesne výchylka k-krát a naopak.

V poloze „1“ prochází plochou cívky magnetický tok  $\Psi$ . V poloze „∞“ je zřejmě magnetický tok cívky nulový, tedy  $\Psi_\infty = 0$ . S ohledem na rovnici (29.2.4) lze pak oba experimentální poznatky interpretovat jediným možným způsobem:

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \text{konst} = \Psi - \Psi_\infty = \Psi. \quad (29.2.5)$$

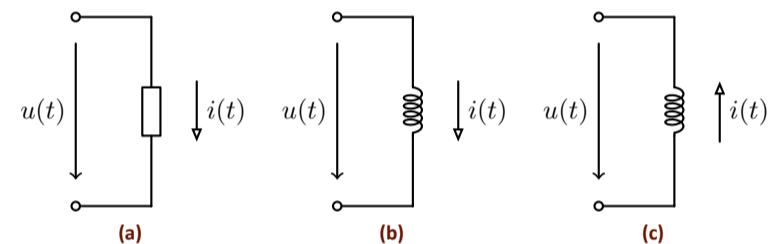
Experiment lze opakovat s cívky libovolných rozměrů, tvarů i počtu závitů. Výsledky budou kvalitativně stejné. Veličina  $\Psi$  se nazývá *spředený magnetický tok cívky*. Je to míra interakce cívky s magnetickým polem, které spojité prostupuje celou plochou cívky. Rovnici (29.2.5) lze vyjádřit slovně: Spřažený magnetický tok cívky je úměrný časovému integrálu svorkového napětí na zkoumané cívce. Je určitě výhodné zvolit jedničku jako konstantu úměrnosti mezi tokem  $\Psi$  a integrálem napětí. Pak bude velikost spřaženého toku přímo rovna integrálu napětí. Určitý integrál v rovnici (29.2.5) lze nahradit integrálem neurčitým, pak je ale nutno přidat obecnou počáteční integrační konstantu  $\Psi_0$  v newtonovském smyslu. Získáme tak zákon elektromagnetické indukce (indukční zákon) v integrálním tvaru

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad [\text{Wb}; \text{V}, \text{s}]. \quad (29.2.6)$$

Z rovnice (29.2.6) plyne, že jednotka magnetického toku Weber<sup>4</sup> má rozdíl [Vs], Budeme-li obě strany rovnice derivovat podle času, rovnost tím neporušíme. Získáme tak ryze matematickou cestou indukční zákon v diferenciálním tvaru

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad \text{resp.} \quad u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (29.2.7)$$

Obě rovnice (29.2.7a), (29.2.7b) se liší znaménkem + nebo – na pravé straně. Volba znaménka souvisí s domluvou, který režim cívky považujeme za základní: zda režim spotřebičový podle rovnice (29.2.7a), nebo režim zdrojový podle rovnice (29.2.7b). Oba režimy jakéhokoli dvojpólu jsou totiž jednoznačně definovány vzájemnou orientací napětí a proudu podle obr. 29.2.3. Odpor nemůže nikdy pracovat jako zdroj, proto slouží jako „normální“ definující spotřebičovou orientaci svorkových veličin. Oba režimy cívky se liší níže popsaným způsobem.



Obrázek 29.2.3.: Vzájemná orientace okamžité hodnoty proudu a napětí ve spotřebičovém a zdrojovém režimu: a) Odpor je vždy spotřebičem. b) Cívka ve spotřebičovém režimu. c) Cívka ve zdrojovém režimu.

#### Spotřebičový režim:

- Orientace svorkového napětí  $u(t)$  je vůči proudu  $i(t)$  souhlasná. Platí rovnice (29.2.7a).
- Cívka je připojena na zdroj napětí  $u(t)$ , odebírá z něj proud  $i(t)$ , tedy odebírá ze zdroje elektrickou energii a chová se jako spotřebič. Tuto energii přeměňuje na energii magnetického pole.
- Mezi směrem proudu a směrem toku platí *pravidlo pravé ruky*, PPR.

#### Zdrojový režim:

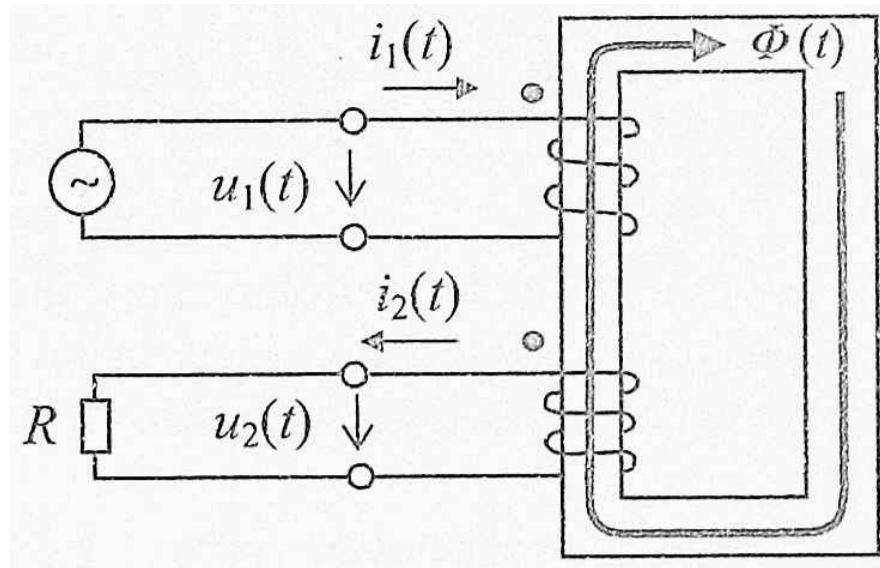
- Orientace svorkového napětí  $u(t)$  je vůči proudu  $i(t)$  nesouhlasná. Platí rovnice (29.2.7b).
- Cívka je vložena do proměnného magnetického pole  $B(t)$ , na jejích svorkách vzniká indukované napětí  $u(t)$  (zastaralý výraz: „elektromotorická síla“). Z cívky se stal zdroj elektrického napětí  $u(t)$ , tj. generátor. Připojíme-li na svorky odporovou zátěž, začne do ní generátor dodávat elektrickou energii.<sup>5</sup>

Z uvedených skutečností lze učinit následující závěr. Volba znaménka v rovnících (29.2.7a, b) je věcí dohody, ale pouze v tom smyslu, zda zvolíme za základní režim spotřebičový či zdrojový<sup>6</sup>. Například při analýze měničů ve výkonové elektronice

<sup>4</sup>Wilhelm Eduard Weber (1804–1891), teoretický fyzik, působil na univerzitách v Gottingenu a v Lipsku. Zakladatel předrelativistické elektrodynamiky. Určil totiž sílu mezi náboji v závislosti nejen na vzdálenosti, ale i na rychlosti a zrychlení, jeho teorie je ale platná pouze pro  $v \ll c$ . Blízký spolupracovník Gausse.

<sup>5</sup>Faraday s Maxwelllem se znali osobně a po dohodě pokládali zdrojový režim cívky za základní, tedy pracovali s rovnicí (29.2.7b). Maxwell navíc pracoval s pojmem „electromotive force P“, který svým významem přesně odpovídá dnešní „intenzitě elektrického pole“. Postupem času byl doslovně přeloženému výrazu „elektromotorická síla“ nešťastně přiřazen v české i zahraniční literatuře význam „napětí“, což ještě více zvýšilo zmatek. Proto je rozumné výraz „elektromotorická síla“ vůbec nepoužívat.

<sup>6</sup>Ojediněle se v literatuře, např. v [5], vyskytne názor, že znaménko v rovnících (29.2.7a, b) je určeno tím, zda je cívka navinuta pravotočivě nebo levotočivě. To je chybné tvrzení. Pravotočivost či levotočivost cívky naprostě nijak nesouvisí se schopností cívky pracovat ve zdrojovém nebo spotřebičovém režimu.

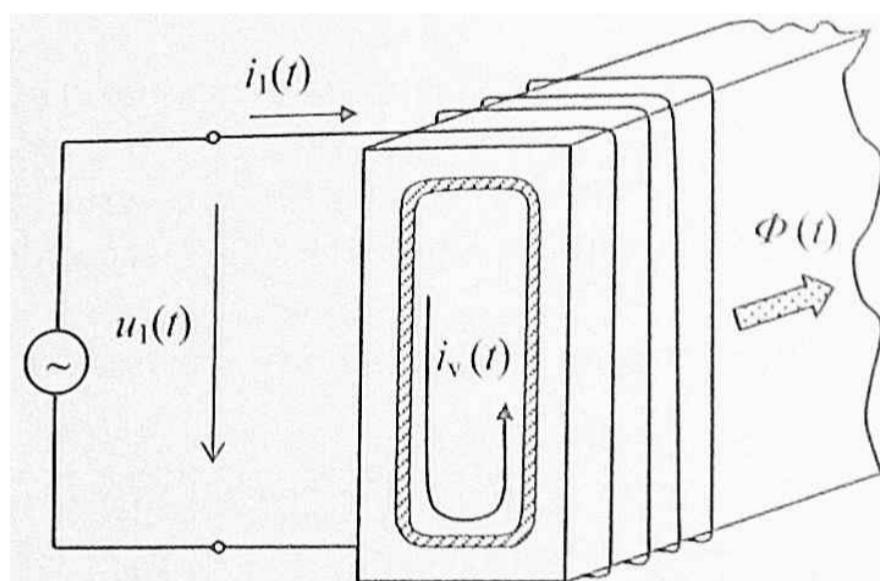


Obrázek 29.2.4.: Princip transformátoru. Primární cívka pracuje ve spotřebičovém režimu (PPR), sekundární cívka ve zdrojovém režimu (PLR)

je ustáleným zvykem zvolit označení proudu a napětí na indukčnosti podle obr. 29.2.3b. Bez ohledu na tuto volbu musíme v konkrétní situaci vždy pečlivě rozlišovat, ve kterém režimu se cívka skutečně nachází. Příklad: primární cívka transformátoru se nachází vždy ve spotřebičovém režimu, sekundární cívka vždy ve zdrojovém režimu. Se zdrojovým či spotřebičovým režimem úzce souvisí *Lenzův princip*<sup>7</sup>. Jedná se o zvláštní případ obecnějšího přírodního principu, vyjádřitelného jako „zákon akce a reakce“. V elektromagnetismu má zákon následující tvar:

Lenzův princip: Proud indukovaný v uzavřené vodivé smyčce vyvolá magnetické pole, které působí vždy proti původnímu budicímu poli, díky němuž indukovaný proud vznikl.

Všimněme si, že zmíněná „uzavřená vodivá smyčka“ se nachází *zdrojovém režimu*: je vložena do magnetického pole, indukuje se v ní napětí  $u(t)$ , které protlačí vodivým obvodem proud  $i(t)$ . Proud má ve *zdrojovém režimu* takový směr, že působí proti budicímu magnetickému poli. Příkladem je již zmíněná sekundární cívka transformátoru podle Obr. 1.1-\*/« nebo uzavřená smyčka vřívého proudu ve vnitřním prostoru transformátorového plechu podle Obr. 1.1-5.



Obrázek 29.2.5.: Vznik vřívého proudu uvnitř elektricky vodivého transformátorového plechu. Budicí cívka pracuje ve spotřebičovém režimu (PPR). Elementární smyčka vřívého proudu odpovídá sekundárnímu vinutí a pracuje ve zdrojovém režimu (PLR).

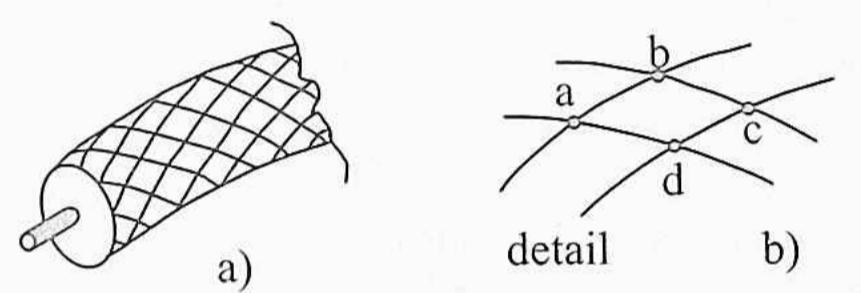
Integrací rovnice (29.2.7a) lze zpětně dojít k integrálnímu tvaru (29.2.6). Je nutno zdůraznit, že obě rovnice jsou naprostě rovnocenné, navzájem převoditelné, obě nesou stejně množství informace, žádná není důležitější než druhá. Je pravdou, že z psychologického pohledu je indukční zákon snáze pochopitelný v *diferenciálním* tvaru (29.2.7). Pro hluboké porozumění magnetickým jevům je však nezbytné uvědomit si především jeho *integrální* podobu (29.2.6) se všemi matematickými důsledky:

- Spřažený tok je roven integrálu napětí. Zákon platí *univerzálně*, bez ohledu na *linearity* či *nelinearity* magnetického obvodu. Rovnice (29.2.6) totiž definuje funkční závislost  $\Psi = \Psi(u)$  mezi tokem a napětím, nikoli závislost  $\Psi = \Psi(i)$  mezi *tokem a proudem*. Případná nelinearity se totiž týká výlučně závislosti  $\Psi = \Psi(i)$ , a tudíž nijak nenarušuje platnost rovnice (29.2.6).
- Z předchozího bodu plyne, že v obecném *nelineárním* případě není tok  $\Psi$  přímo úměrný proudu  $i$ . Přímá úměra  $\Psi = Li$  totiž platí pouze ve zvláštním případě *lineárního* magnetického obvodu.

<sup>7</sup>Heinrich Lenz (1804-1865), estonský fyzik, působil na univerzitě v Petrohradu. Princip po něm pojmenovaný objevil r. 1833.

- Rovnice (29.2.6) platí ve spotřebičovém i generátorovém režimu cívky. Probílém se znaménkem zůstává stejný jako u rovnice (29.2.7).
- V uzavřené *supravodivé* smyčce platí vždy  $u = 0$ , i když jí teče konstantní ss. proud. Neurčitý integrál v rovnici (29.2.6) má pak nulovou hodnotu  $\int 0 dt = 0$ , a zřejmě tedy platí  $\Psi(t) = \Psi_0$ , kde  $\Psi_0$  je *libovolná* počáteční integrační konstanta. Fyzikálně má konstanta význam počátečního toku, který je v cívce naintegrován z předchozích dějů. Případ  $\Psi_0 \neq 0$  odpovídá nabuzenému supravodivému magnetu, jehož tok  $\Psi(t) = \Psi_0$  je konst. se s časem nemění. Nabuzený supravodivý magnet se proto chová jako *permanentní* magnet. Případ  $\Psi_0 = 0$  odpovídá magnetickému stínění pomocí závitu *nakrátko*, např. tzv. Faradayova klec, nebo stínění koaxiálního kabelu podle obr. 29.2.6. Každé oko **a-b-c-d** stínícího pláště tvoří „supravodivý“ závit nakrátko, v němž platí  $u = 0$ , tedy  $\Psi = \int 0 dt = 0$ . Proto se do vnitřního prostoru ohraničeného pláště nemůže zvenčí dostat žádné *střídavé* rušivé magnetické pole (jedině pole *stejnosměrné*  $\Psi_{ss}$ , ale to je neškodné, protože nezpůsobuje vznik rušivého napětí ve středním vodiči kabelu; derivace konstanty je totiž nulová:  $u(t) = \frac{d\Psi_{ss}}{dt} = 0$ ).

Na otázkou „Proč je magnetický tok úměrný integrálu napětí?“ lze odpovědět pouze následujícím způsobem: „Protože je to jeden ze základních zákonů přírody, jehož správnost se nepodařilo experimentálně nikdy vyvrátit, nýbrž vždy pouze potvrdit.“ Deduktivní odvození indukčního zákona z vyšších přírodních zákonitostí není na úrovni klasické fyziky možné, není uskutečnitelné ani na vyšší úrovni *kvantové elektrodynamiky*<sup>8</sup>. Za povídmnutí stojí, že v diferenciální formě (29.2.7) nebylo přesné kvantitativní ověření indukčního zákona v době objevu proveditelné s ohledem na možnosti tehdejšího přístrojového vybavení. Experiment v nehomogenním poli podle obr. 29.2.2 by byl i v současnosti velmi těžko vyhodnotitelný. Naopak, ověření v integrálním tvaru je velmi snadné<sup>9</sup>. To opravňuje k domněnce vyslovené v historickém úvodu kapitoly.

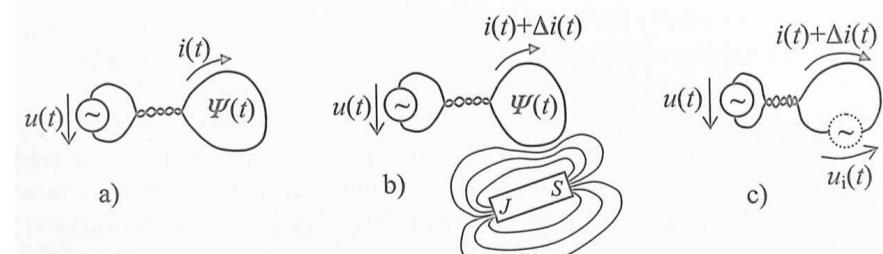


Obrázek 29.2.6.: Plášť koaxiálního kabelu. Každé oko **a-b-c-d** tvoří závit nakrátko.

**Příklad 29.2.1.** Supravodivá cívka podle obr. 29.2.7 začne být v okamžiku  $t = 0$  napájena ideálním zdrojem napětí  $u(t)$ . Později na ni začne působit vnější magnetické pole přibližujícího se permanentnímu magnetu. Jaký vliv bude mít PM na velikost spřaženého toku cívky?

Odpověď plyne přímo z rovnice (29.2.6):  $\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt$ .

Ze zadání příkladu vyplývá, že počáteční integrační konstanta je nulová. Neurčitý integrál je možno nahradit integrálem určitým. Velikost spřaženého toku je tvrdě definována přiloženým napětím, tedy hodnotou určitého integrálu. Proto externí magnetické pole nemůže spřažený tok cívky nijak změnit. Ideální napěťový zdroj má nulový vnitřní odpor. Proto se supravodivá cívka napájená tímto zdrojem stále chová jako supravodivý závit nakrátko, do něhož nemůže vniknout žádná siločára externího magnetického pole.



Obrázek 29.2.7.: K příkladu, a) Supravodivá cívka je napájena ideálním napěťovým zdrojem, b) Později na ni začne působit externí pole pohybujícího se magnetu, c) Náhradní zapojení.

<sup>8</sup>Za objev kvantové elektrodynamiky obdržel Richard P. Feynman (1918-1988) Nobelovu cenu v r. 1965 (Feynmanovy fázorové diagramy a Feynmanův dráhový integrál; nositelé elektromagnetických sil jsou fotony). Vynikající teoretický fyzik, ale i praktik. Celoživotně působil na kalifornském technickém institutu. Během druhé světové války byl členem týmu pracujícího na vývoji americké atomové bomby v Los Alamos (projekt Manhattan).

<sup>9</sup>V současnosti by byl balistický galvanoměr nahrazen operačním zesilovačem zapojeným jako integrační zesilovač. Ten by zpracovával signál ze snímače proudu, např. z proudového bočníku. Po odezvě proudového impulsu by na výstupu zesilovače zůstalo naintegrováno určité konstantní napětí, jehož velikost by analogicky odpovídala maximální výchylce  $\alpha_{max}$  galvanometru.

Jev lze vysvětlit následovně. Pohybující se magnet indukuje v cívce přídavné indukované napětí  $u(t)$ . Toto napětí se přičte k napětí napájecímu a způsobí změnu proudu  $\Delta i(t)$  tekoucího cívkou. Podle Lenzova principu začne tento přídavný proud působit proti poli PM. Přídavný proud  $\Delta i(t)$  má přesně takovou velikost a směr, že uvnitř závitu dokonale vykompenzuje a zruší externí pole magnetu. Vnější pozorovatel tedy vidí, že supravodivý závit se chová jako magnetický izolant, jemuž se siločáry externího pole vyhnou, a celkový tok cívky není přítomností magnetu nikak ovlivněn. Celá soustava se navíc chová jako elektromechanický měnič energie (tj. motor), který je schopen pracovat v motorovém nebo generátorovém režimu. Pohybující se magnet totiž koná nebo spotřebovává mechanickou práci, protože na něj působí síla. Podle vzájemné okamžité orientace vektorů sily a rychlosti pracuje celá soustava buď jako motor (koná mechanickou práci), nebo jako generátor (spotřebovává mechanickou energii a ukládá ji do zdroje napětí).

### 29.3. Spřažený tok vzduchové cívky

Experiment s galvanometrem popsáný v předchozí kapitole lze uskutečnit podrobněji ve čtyřech následujících modifikacích označených čísly 1 až 4. Pro vyšší přehlednost budou těmito čísly systematicky značeny i veličiny v jednotlivých pokusech. Ze čtyř postupně gradujících experimentů vyplýne geometrická interpretace pojmu spřažený tok vzduchové cívky. Poznámka: V následujících experimentech se pokusná cívka nachází v generátorovém režimu. Učiníme však dohodu, že velikost toku budeme pro jednoduchost uvažovat v absolutní hodnotě, tj. bez ohledu na znaménko [Pat11, s. 12].

Experiment č. 1: Podle Obr \*\* je na ohebných zkroucených přívodech umístěna tuhá samonosná cívka, která má jeden závit o ploše  $\Delta S$ . Plocha musí být malá, aby bylo možno předpokládat, že magnetické pole v těsném okolí cívky je homogenní (vektor indukce  $\mathbf{B}_1$ , musí být v rámci cívky konstantní). Malé rovinné ploše závitu je pak možno přiřadit vektor  $d\mathbf{S}_1$ , jehož směr je kolmý na onu rovinu. Opakováním pokusu při různých úhlech  $\alpha_1$ , různě velkých plochách a různě velké indukci lze snadno zjistit, že velikost toku je přímo úměrná:

- veličině  $\cos \alpha_1$ ,
- ploše závitu  $\Delta S_1 \equiv \Delta S$ ,
- magnetické indukce  $B_1$ .

To vede k jednoznačnému závěru, že tok lze vyjádřit jako skalární součin vektoru plochy a vektoru mg. indukce v daném místě „l“:

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \Psi_1 = B_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1 = \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1. \quad (29.3.1)$$

### 29.4. Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem

Principiálně není transformátor nic jiného než soustava vzájemně magneticky vázaných cívek. Pro jednoduchost je v dalším popisu uvažován transformátor s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím, přičemž všechny závěry bude možné později rozšířit i na složitější systémy. Při odvozování matematického modelu transformátoru vyjdeme z Faradayova zákona elektromagnetické indukce (druhá Maxwellova rovnice), který říká, že časová změna magnetického pole vytvoří výrové pole elektrické:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (29.4.1)$$

Vztah platí, uvažujeme-li nulovou velikost posuvného proudu tj. polarizačního a Maxwellova proudu. Tvoří-li smyčku  $l$  tenký vodič, indukuje se v něm napětí:

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (29.4.2)$$

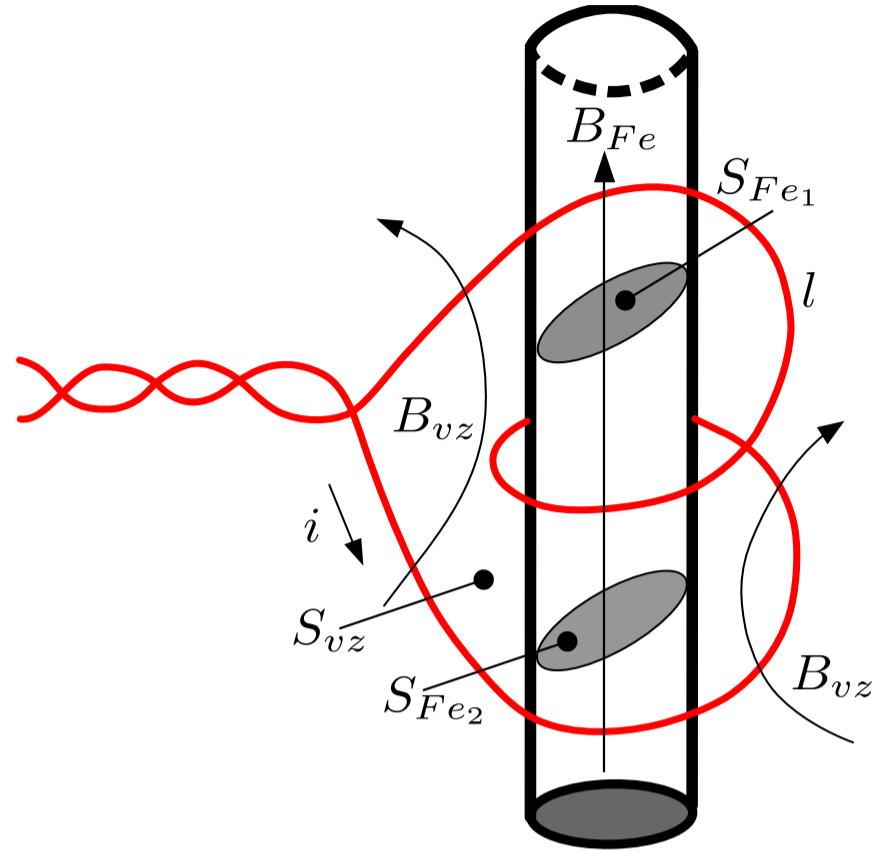
V rov. 29.4.2 je úmyslně vynecháno záporné znaménko na pravé straně rovnice. To platí, je-li na vodič (cívku) pohlíženo jako na spotřebič napájený ze zdroje napětí (což odpovídá funkci primárního vinutí transformátoru). Takováto cívka vytvoří časově proměnné magnetické pole:

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad (29.4.3)$$

Konstanta  $\Psi_0$  představuje Newtonovou počáteční integrační konstantu, funkce  $\Psi(t)$  tzv. **spřažený magnetický tok s cívkou**. Je vidět, že *velikost spřaženého magnetického toku je úměrná pouze velikosti integrálu napětí na cívce, nemusí již být přímo úměrná proudu cívky* (to platí jen ve speciálním případě lineárních magnetických obvodů). Tento poznatek je velice důležitý, magnetický tok bude stejný jak pro vzduchové cívky, tak pro cívky s feromagnetickým jádrem (rozdíl bude spočívat pouze v průběhu a velikosti proudu cívky). Sycení jádra transformátoru napájeného ze zdroje napětí je závislé pouze na průběhu tohoto napětí. Pro spřažený magnetický tok cívky dále platí:

$$\Psi(t) = \oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \quad (29.4.4)$$

kde  $S$  je orientovaná ohraničená plocha, jejíž hranice je tvořena křivkou  $l$ , viz probíhající osou vodiče po celé jeho délce. Tento vztah platí zcela obecně pro jakékoli prostředí, v nichž se magnetické pole nachází a pro libovolné tvary plochy  $S$ . Při návrhu transformátoru obvykle známe průběh spřaženého magnetického toku. Je vidět, že některé indukční čáry  $B_{vz}$  neprocházejí materiálem jádra, jedná se o



Obrázek 29.4.1.: Část magnetického obvodu se dvěma závity primárního vinutí.

tzv. **rozptyl**. Přesný průběh spřaženého magnetického toku bychom získali aplikací rov. 29.4.4, který bychom pro tento konkrétní případ mohli upravit do podoby

$$\Psi(t) = \int \mathbf{B}_{vz}(t) \cdot d\mathbf{S}_{vz} + \sum_{i=1}^N \int \mathbf{B}_{Fe}(t) \cdot d\mathbf{S}_{Fe_i} \quad (29.4.5)$$

Protože vyčíslení tohoto vztahu je velice obtížné, zavedeme určité zjednodušující podmínky:

- zanedbáme rozptyl  $B_{Fe} \gg B_{vz}$ ,
- magnetická indukce  $B_{Fe}$  je ve feromagnetiku rozložena homogenně a siločáry jsou kolmé k průřezu jádra.

Pak pro spřažený magnetický tok můžeme psát

$$\Psi(t) = N \cdot B_{Fe}(t) \cdot S_{Fe} = N \cdot \Phi(t) \quad (29.4.6)$$

Rov. 29.4.6 by platila přesně, pokud by všechny indukční čáry  $\mathbf{B}$  protnuly plochu  $S_{Fe}$  N-krát. Ve skutečnosti ale všechny siločáry neprocházejí všemi závity a vztah platí jen přibližně. Chyba je malá u feromagnetických obvodů (transformátory, cívky s feromagnetickým jádrem), kde je magnetická vodivost materiálu mnohonásobně větší, než magnetická vodivost vzduchu (řádově 1000x) a rozptyl je tudíž zanedbatelný. Velká je tato chyba například u vzduchových cívek, kde je rov. 29.4.6 nepoužitelná.

$$\begin{aligned} \Psi &\cong N\Phi & \text{resp. } \Psi(t) &\cong N\Phi(t), \\ \Phi &= B_{Fe}S_{Fe} & \text{resp. } \Phi(t) &= B_{Fe}(t)S_{Fe}. \end{aligned} \quad (29.4.7)$$

V literatuře bývá někdy spřažený tok cívky  $\Psi$  bez vysvětlení definován pomocí rovnice. To je nutno považovat za neštastné. Za prvé se nejedná o "definici", ale o výsledku značně složitých výpočtů, za druhé tato rovnice *principiálně není přesná*

### References

- [Pat11] M. Patočka. *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektronice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. VUTIUM, 2011, p. 564. ISBN: 9788021440036 (cit. on pp. 135, 138).

# 30. Topologické vlastnosti elektromagnetického pole

## Obsah

<b>30.1. Topologie diskrétních útvarů . . . . .</b>	<b>140</b>
30.1.1. Základní pojmy teorie grafů . . . . .	140

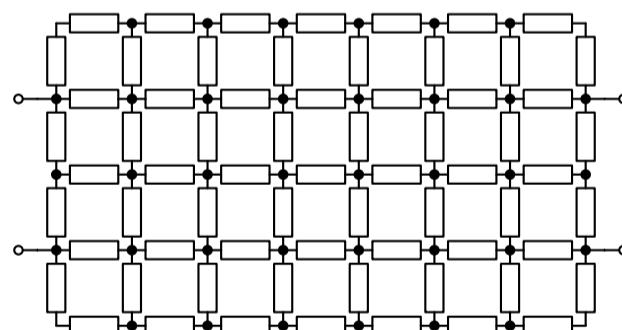
V předchozích kapitolách byly na mnohých místech zdůrazňovány některé topologické souvislosti. Kapitola o topologii je úmyslně zařazena až následně, jednak aby shrnula získané poznatky a vtiskla jim určitý řád, jednak aby čtenář již měl předchozí konkrétní představy o některých abstraktních pojmech [Pat11, s. 40].

Topologie je matematická disciplína, patřící do vyšších pater v hierarchii matematiky. Topologie se zaúvá prostorovými útvary, podobně jako geometrie. Na rozdíl od geometrie ji však nezajímají kvantitativní ukazatele zkoumaných geometrických útvarů, nýbrž určité vyšší obecnější kvalitativní ukazatele. S nadsázkou lze říci, že je to "geometrie, která nic neměří". Topologie se dělí na dvě zdánlivě odlišné disciplíny:

- *Topologie diskrétních útvarů* neboli *teorie grafů* - zabývá se diskrétními prostorovými útvary, tj. *grafy*. Graf sestává z uzelů propojených hranami. Hrany mohou být *orientované* nebo *neorientované*. Všechny diskrétní elektrické obvody jsou *neorientovanými* grafy. Proto i všechny známe metody řešení diskrétních elektrických obvodů (metoda Kirchhoffových zákonů, metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí) podléhají zákonitostem diskrétní topologie.
- *Topologie spojitých útvarů* - zabývá se spojitými prostorovými útvary, tj. *plochami a křivkami* v prostorech libovolné dimenze. Patří sem všechny elektrické obvody s parametry *spojitě rozprostřenými* v 3D prostoru. Takovým útvarem je např. krabice naplněná elektricky vodivým grafitovým práškem, do níž umístíme v libovolných místech dvě nebo více elektrod. Intuitivně tušíme, že v prostoru krabice budeme pracovat s ekvipotenciálami v podobě *ploch* nebo se siločárami v podobě *křivek* atd.

Elektrické obvody se chovají poněkud jinak než obvody magnetické:

- V *elektrických* obvodech je poměr mezi měrnou elektrickou vodivostí *vodičů* a *izolantů* minimálně  $10^{12}$ , obvykle i větší. Proto lze snadno pomocí vodiče obaleného izolantem docílit toho, že elektrický proud teče pouze prostorově vymezenými *diskrétními* cestami. Pak je pochopitelné, že vhodným a *absolutně přesným* nástrojem k analýze elektrického obvodu je *topologie diskrétních útvarů*.
- V *magnetických* obvodech je poměr mezi měrnou magnetickou vodivostí (permeabilitou) *vodičů* a *izolantů* typicky  $10^3$ , což je dáno relativní permeabilitou feromagnetik vůči vakuu. Vakuum je tedy *velmi špatný* magnetický izolant a lepší v přírodě bohužel neexistuje. V této situaci je obtížné realizovat ryze diskrétní magnetický obvod, protože železo neumíme "obalit" kvalitním magnetickým izolantem. U cívky se železným jádrem podle obr. 29.4.1 v kapitole 29.4 jsme ukázali, že rozptylový tok vzdušných cest činí řádově 1 % až 5 % z toku celkového. Takový obvod je sice již řešitelný metodami *diskrétní* topologie, ale pouze přibližně. Je to běžný inženýrský postup, který se v praxi velmi úspěšně používá. Pokud však rozptylový tok nehceme nebo nemůžeme zanedbat, je nezbytné pracovat metodami *topologie spojitých útvarů*<sup>1</sup>. Berme to jako ukázkou, že mezi oběma topologiemi je hluboký vztah, i když není na první pohled patrný.



Obrázek 30.0.1.: Pasivní dvojbran v podobě husté vodivostní sítě

Na první pohled se zdá, že obě topologie využívají natolik odlišných matematických postupů, že spolu tyto disciplíny nijak nesouvisí. Opak je pravdu. Mezi oběma panuje hluboký vztah, obě vycházejí ze stejných základů. Vysvětlení lze hledat na obr. 30.0.1. Je zde nakreslen *přenosový dvojbran* se zcela obecnou vnitřní strukturou, která může mít např. podobu husté vodivostní<sup>2</sup> sítě, ve které mají jednotlivé vodivosti nahodile různé hodnoty. S ohledem na dobře známé analogie je lhostejné, zda se jedná o *elektrický* nebo *magnetický* obvod. Nakreslený obvod je zcela určitě *diskrétní*, bude tedy řešen některou klasickou diskrétní metodou, např. metodou smyčkových proudů nebo metodou uzlových napětí. Výpočtem zjistíme,

<sup>1</sup>Všimněme si ale, že ke združeným výrazům pro výpočet spřaženého toku v *diskrétním* obvodu jsme dospěli pomocí integrálních metod, které používají topologie *spojitých* útvarů

<sup>2</sup>V magnetických obvodech je psychologicky výhodnější pracovat s magnetickými vodivostmi než s magnetickými odpory (reluktancemi). Permeabilita má totiž význam *měrné magnetické vodivosti*.

že z pohledu vstupní a výstupní brány má dvojbran konkrétní přenosové parametry (napěťový přenos naprázdno, proudový přenos nakrátko, vstupní impedanči naprázdno, nakrátko, atd.) Učiňme následující myšlenkový pokus: vodivostní síť budem neustále zjemňovat. Tj., ve smíru vodorovném i svislém budeme zvyšovat počty prvků, ale tak, aby celková vodivost na jednotku délky zůstávala v dané oblasti *konstantní*. Výsledkem zjemňování bude v limitním případě vznik *spojité* vodivé desky (např. izolační podložka nastíkaná elketicky vodivým odporovým lakem). Mezi původním diskrétním obvodem a deskou zřejmě platí následující souvislosti:

- Původní diskrétní vodivosti byly nahodile různé —> deska bude *nehomogenní, anizotropní*.
- Původní diskrétní vodivosti byly stejně velké ve směru  $x$  a stejně velké (ale s jinou hodnotou ve směru  $y$ ) —> deska bude *homogenní anizotropní*.
- Všechny diskrétní vodivosti měly stejnou hodnotu —> deska bude *homogenní, izotropní*.

Intuitivně tušíme, že vytvořená *spojitá* deska<sup>3</sup> bude mít všechny přenosové parametry číselně shodné s původním *diskrétním* obvodem. Přitom ale u desky nelze tyto parametry určit klasickými diskrétními metodami (nelze určit matici obvodu). Je nutný přechod od diskrétních operací k operacím integrálním, tedy od topologie *diskrétních útvarů* k topologii *spojitých útvarů*. Z uvedeného myšlenkového pokusu plyne, že v *limitním případě* velmi jemně sítě musí dát diskrétní i spojité operace stejný kvantitativní výsledek. Na tomto poznatku je založeno přibližné řešení spojitych prostorových polí *metodami konečných prvků*.

Především jsme ovšem chtěli ukázat, že mezi diskrétními a spojitymi topologickými metodami není zásadního rozdílu, obě vycházejí ze stejných základů a v limitním případě spolu splývají.

## 30.1. Topologie diskrétních útvarů

Cílem této kapitoly je především vysvětlit *princip reciprocity* v pasivních elektrických obvodech a pomocí něho odvodit počet stupňů volnosti elektrických obvodů. Zvláštním případem obvodu je *pasivní přenosový dvojbran*, u kterého bude dokázáno, že má vždy *tři stupně volnosti*. Tento poznatek má totiž mimořádný význam v teorii *transformátorů*, který je právě typickým představitelem přenosového dvojbranu. V kapitolách zabývajících se transformátorem - především jeho náhradním zapojením - se budeme odvolávat na výsledky získané v této kapitole.

### 30.1.1. Základní pojmy teorie grafů

Názvosloví a základní pojmy teorie grafů lze shrnout do následujících bodů:

- Základním pojmem je *graf* (graf orientovaný, neorientovaný). Graf je vlastně „schéma“ příslušného obvodu s vynechanými obvodovými prvky.
- Graf sestává z *uzlů* a *hran*.
- Uzel je spojení alespoň tří hran<sup>4</sup>.
- Hrana může být *orientovaná* (je jí přiřazen směr), *neorientovaná* (nemá přiřazen směr). V elektrotechnice se používají výhradně neorientované hrany - tedy i grafy (vlastnosti obvodových prvků R, L, C jsou nezávislé na směru proudu).
- *Úplný strom*: nepřerušená celistvá soustava nejmenšího počtu hran, která spojuje všechny uzly grafu.
- *Nezávislá hrana*: hrana nepatřící do úplného stromu.
- *Nezávislá smyčka*: uzavřená smyčka, která musí obsahovat nezávislou hranu, tj. hranu nepatřící do úplného stromu.
- Nezávislých smyček je tolik, kolik je nezávislých hran.

Označme v grafu:

- Počet uzlů:  $q + 1$
- Počet hran úplného stromu:  $q$
- Počet hran (počet neznámých proudů):  $p$
- Počet nezávislých hran (nezávislých smyček):  $n = p - q$

U složitých obvodů je hledání  $n$  nezávislých smyček obtížné. Proto se k tomuto účelu používá úplný strom, jehož nalezení je snadné. Nezávislé hrany jsou ty, které *nepatří* do úplného stromu. Každou nezávislou hranou pak musí procházet alespoň jedna nezávislá smyčka. Všechny pojmy budou ukázány na konkrétním příkladu.

Řešením obvodu se rozumí: Nalezení všech  $p$  neznámých proudů ve všech  $p$  hranách. Principiálně se vždy jedná o řešení soustavy  $p$  rovnic o  $p$  neznámých proudech.

K řešení lze použít tři metody:

<sup>3</sup>Uvedený příklad se týká dvojrozměrné desky. Příklad lze jistě zobecnit na trojrozměrné objekty (lze si představit krabici naplněnou vodivým grafitovým práškem, do které zavedeme čtyři bodové elektrody).

<sup>4</sup>Spojení dvou hran je elektrický bod, nikoli uzel.

- Metoda založená na přímém použití I. a II. Kirchhoffova zákona<sup>5</sup>. Je nejméně efektivní, vede na nejrozsáhlejší soustavu  $p$  rovnic o  $p$  neznámých.
- Metoda smyčkových proudů (Mesh Currents Matrix Method), Maxwellova metoda. Vede na soustavu pouze  $n$  rovnic o  $n$  neznámých smyčkových proudech<sup>6</sup>. Vezmeme-li v úvahu nejsložitější obvod, ve kterém je každá dvojice uzlů spojena hranou, pak bude:

$$n = p - q = \frac{q(q - 1)}{2}, \quad (30.1.1)$$

což je podstatně méně rovnic než  $p$ .

## References

- [Pat11] M. Patočka. *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektronice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. VUTIUM, 2011, p. 564. ISBN: 9788021440036 (cit. on p. 139).

<sup>5</sup>Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), německý fyzik, působil na univerzitách v Heidelbergu a v Berlíně. I. a II. KZ objevil r. 1845 ještě jako student. Dále se zabýval spektroskopí, tepelnou radiací černého tělesa, spoluobjevitel Cesia a Rubidia. Žák F. E. Neumanna.

<sup>6</sup>Ze smyčkových proudů lze skutečné proudy snadno vyřešit pomocí doplňkových rovnic sestavených pomocí I. KZ.

# 31. Teorie transformátoru

## Obsah

<b>31.1. Transformátor jako lineární pasivní dvojbran</b>	141
31.1.1. Předpoklady analýzy	141
31.1.2. Princíp reciprocity u transformátoru	142
31.1.3. Počet stupňů volnosti transformátoru	142
<b>31.2. Matematické modely lineárního transformátoru</b>	142
31.2.1. Základní model transformátoru ve tvaru impedanční $\mathbb{Z}$ -matice	142
<b>31.3. Klasifikace a názvosloví transformátoru</b>	142
<b>31.4. Souvislost indukovaného napětí a proudu cívky</b>	142
<b>31.5. Princip činnosti, základní konstrukční provedení</b>	143
<b>31.6. Zjednodušený rozbor funkce transformátoru</b>	143
31.6.1. Situace při sekundárním vinutí naprázdno	143
31.6.2. Situace při zatížení sekundárního vinutí	144
<b>31.7. Ztráty v reálném transformátoru</b>	144
31.7.1. Joulové ztráty ve vinutí	144
31.7.2. Hysterezní ztráty v jádře	145
31.7.3. Ztráty vřívými proudy v jádře	145
<b>31.8. Rozptyl transformátoru</b>	145
<b>31.9. Cívky s feromagnetickým jádrem</b>	145
31.9.1. Fyzikální rozbor a příprava pro návrh	145
31.9.2. Důsledky a význam použití vzduchové mezery	145
<b>31.10. Efektivní hodnoty proudů typických průběhů</b>	146

Před zahájením studia této kapitoly je naprosto nezbytné nejdříve pročíst kapitolu 30 a seznámit se s *principem reciprocity* v pasivních přenosových soustavách, s počtem stupňů volnosti pasivních soustav, s popisem přenosového dvojbranu pomocí matic typu  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Y}$  a  $\mathbb{H}$  a konečně se základními *přenosovými parametry* dvojbranu.

Zvláštním a neobvyklým cílem této kapitoly je, kromě jiného, podání dvou nezávislých matematických důkazů, že *přesných* náhradních zapojení transformátoru lze sestrojit *nekonečně mnoho*, přičemž pouze dvě z nich, tj.  $\Gamma$ -článek a obrácený  $\Gamma$ -článek mají mimořádný význam. Bude ukázáno, že používání klasického T-článku je sice možné, ale je zbytečně složité! Bude podán matematický důkaz, že lpění na náhradním zapojení v podobě T-článku postrádá jakýkoli fyzikální i matematický smysl a v žádném případě nepřináší žádné výhody. Stejně výsledky můžeme nalézt ve [22], [23]. Tyto moderní postupy lze porovnat s klasickou teorií, uvedenou např. ve [20], [21].

Problematika transformátoru je rozdělena do dvou základních částí. V první je transformátor představen jako lineární pasivní dvojbran, ve druhé jako nelineární pasivní dvojbran. Postupně bude věnována pozornost následujícím tématům:

### Transformátor jako lineární pasivní dvojbran:

- Princip reciprocity. Počet stupňů volnosti.
- Názvosloví a klasifikace transformátorů.
- Názvosloví a klasifikace přípustných modelů transformátoru.
- Základní fyzikální model ve tvaru impedanční  $\mathbb{Z}$ -matice.
- Model transformátoru *napětí* ve tvaru hybridní  $\mathbb{H}_{\mathbb{U}}$ -matice.
- Model transformátoru *proudu* ve tvaru hybridní  $\mathbb{H}_{\mathbb{I}}$ -matice.
- *Ekvivalentní* zapojení transformátoru. Z něho plynoucí experimentální identifikace parametrů.
- *Náhradní* zapojení transformátoru. Dvě odlišné metody hledání náhradního zapojení:
  - metoda separace rozptylových indukčností,
  - metoda stejně vstupní impedance.

Obě metody vedou k témuž výsledku: přesných náhradních zapojení existuje nekonečně mnoho. Lze je rozdělit do dvou tříd: třída fyzikálně *realizovatelných* třída *nerealizovatelných* zapojení (ale přesto matematicky korektních). Vypovídající schopnost náhradního zapojení.

- Vztah mezi Hopkinsonovými činiteli rozptylu  $\nu$  a činitelem vazby  $k$ .

### Transformátor jako nelineární pasivní dvojbran:

- Matematický model transformátoru napětí a proudu s nelineární magnetizační charakteristikou feromagnetika, bez uvažování hystereze.
- Teoretické zdůvodnění známého experimentálního faktu, že nelinearity magnetizační charakteristiky nemá negativní vliv na linearitu *napěťového přenosu* transformátoru.

## 31.1. Transformátor jako lineární pasivní dvojbran

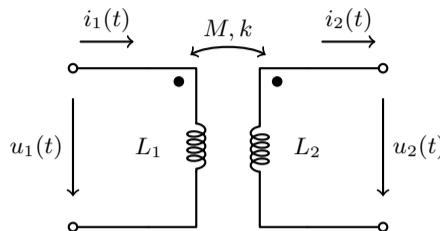
Při řešení drtivé většiny problémů vyskytujících se v technické praxi je možno pohlížet na transformátor jako na lineární přenosový dvojbran.

### 31.1.1. Předpoklady analýzy

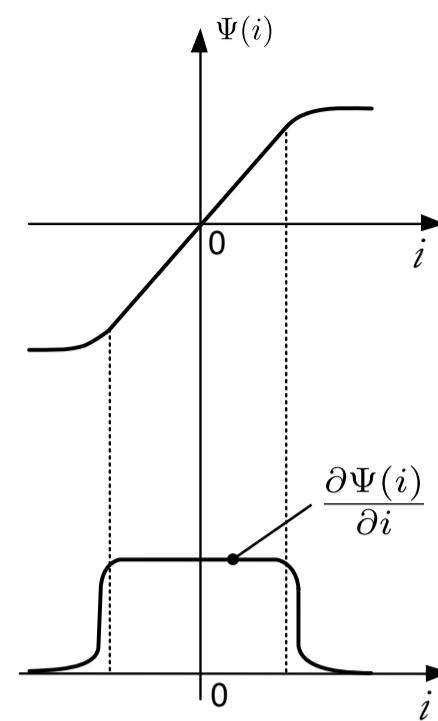
Transformátor podle obr. 31.1 je typickým představitelem pasivního přenosového dvojbranu. Analýza transformátoru bude provedena za následujících předpokladů:

- Magnetizační charakteristika feromagnetického obvodu je lineární.
- Na obrázku je úmyslná odchylka oproti obvyklému značení směru sekundárního proudu. Jeho směr je totiž volen ve shodě s předpokladem, že transformátor je na výstupu zatížen pasivní zátěží pracující ve spotřebičovém režimu, tj. odporem. Jsou-li začátky obou vinutí označeny tečkami, pak pro okamžité hodnoty proudů i napětí jsou orientace všech čtyř šipek správné, tj. ve shodě se skutečností. Toto je důležitý předpoklad, který z psychologického hlediska zvláště studentům velmi usnadňuje analýzu a pochopení činnosti (není pedagogicky vhodné komplikovat analýzu neprůhledným režimem, s aktivní zátěží na sekundáru).
- Neexistují vřívé ztráty ve feromagnetiku. Vřívé ztráty však bude možno na základě získaných výsledků velmi přesně analyzovat a přidat do modelu transformátoru.
- Neexistují hysterezní ztráty ve feromagnetiku. Navíc problém hystereze nepřísluší do oblasti lineárních obvodů.

- Neexistují Jouleovy ztráty v mědi. Klademe tedy předpoklad  $R_{Cu1} = 0$ ,  $R_{Cu2} = 0$ . Tato podmínka však neubírá na obecnosti řešení. Odpor primárního vinutí lze totiž snadno separovat mimo transformátor a myšlenkově zahrnout do vnitřní impedance napájecího zdroje, podobně odpor sekundárního vinutí lze zahrnout do impedance zátěže. Oba odpory je možno do matematického modelu velmi snadno zpětně znova začlenit.
- Nejsou uvažovány parazitní kapacity jednotlivých vinutí ani kapacita mezi oběma vinutími.



Obrázek 31.1.1.: Schématická značka transformátoru. Orientace okamžitých hodnot vstupních a výstupních signálů s respektováním pasivní zátěže ve spotřebičovém režimu.



Obrázek 31.4.1.: Statická magnetizační charakteristika transformátoru s feromagnetickým jádrem a závislost diferenciální indukčnosti na proudu.

### 31.1.2. Princip reciprocity u transformátoru

Princip reciprocity je nejobecnější vlastností všech pasivních přenosových soustav, jak bylo dokázáno v kap. 30. Princip reciprocity souvisí se známým poznatkem, že  $\mathbb{Z}$ -i  $\mathbb{Y}$ -matice každého lineárního pasivního elektrického obvodu je vždy symetrická podle hlavní diagonály. To znamená, že vždy platí  $z_{ij} = z_{ji}$  a současně  $y_{ij} = y_{ji}$ . Všimněme si, že  $\mathbb{Z}$ -matice 31.2.2 transformátoru skutečně vyhovuje principu reciprocity, až na znaménko. Obě záporná znaménka v matici jsou důsledkem změny směru proudu  $i_2(t)$  na opačný (realistický), podle obr. 31.1.1, a nejsou na závadu. Platnost principu reciprocity u transformátoru je velmi důležitá, protože v platnosti principu spočívá jediná možnost jak dokázat, že vzájemná indukčnost a činitel vazby transformátoru jsou pro oba směry přenosu stejné, tj. že platí

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (31.1.1)$$

$$k_{12} = k_{21} = k \quad (31.1.2)$$

Oba vztahy jsou neomylně platné pro „*dva jakkoli libovolně v prostoru tvarované vodiče, a to bud' bez přítomnosti feromagnetika nebo i společně s ním*“. To jest, oba vztahy jsou platné v lineárním prostředí, které však může být magneticky nehomogenní (tj. permeabilita  $\mu$  nemusí být v prostoru konstantní, může být funkcí prostorových souřadnic).

**Poznámka 31.1.1.** Rovnice (17.1.2-1), (17.1.2-2) totiž obecně vůbec nevyplývají z Neumannova vzorce

### 31.1.3. Počet stupňů volnosti transformátoru

## 31.2. Matematické modely lineárního transformátoru

### 31.2.1. Základní model transformátoru ve tvaru impedanční $\mathbb{Z}$ -matice

Pro okamžité hodnoty lze  $\mathbb{Z}$ -matici psát ve tvaru

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - u_{i1}(t) \quad (31.2.1a)$$

$$u_2(t) = u_{i2}(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (31.2.1b)$$

$$\text{neboli: } u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (31.2.2a)$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (31.2.2b)$$

### 31.3. Klasifikace a názvosloví transformátoru

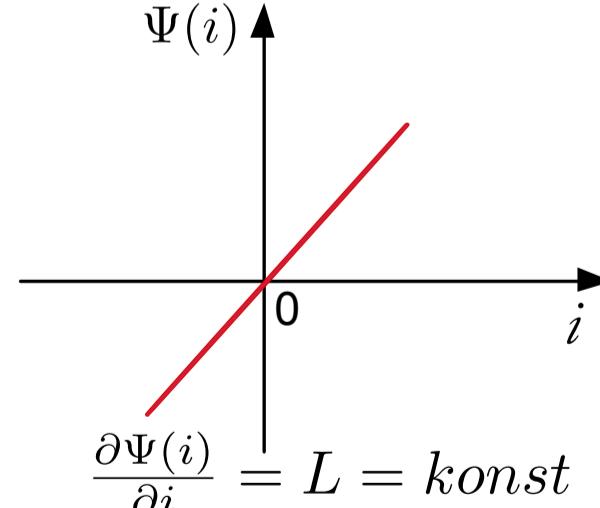
## 31.4. Souvislost indukovaného napětí a proudu cívky

Bylo již řečeno, že časový průběh spřaženého magnetického toku je úměrný integrálu napětí na cívce, nemusí však již být přímo úměrný proudu cívky. Indukované napětí je jednoznačně určeno rov. 29.4.2. Spřažený magnetický tok je obecnou funkcí proudu cívky, přičemž proud je funkčí času:

$$\Psi(t) = f[i(t)] \quad (31.4.1)$$

Dosadíme-li rov. 31.4.1 do rov. 29.4.2 a použijeme-li větu o derivaci složené funkce<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Je-li  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , potom derivace  $y$  podle proměnné  $x$  je rovna derivaci  $y$  podle proměnné  $u$ , násobené derivací  $u$  podle proměnné  $x$



Obrázek 31.4.2.: Linearizovaná magnetizační charakteristika. Směrnice této přímky je právě rovna  $L = konst$

netické indukce - rov. 29.4.2

$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{d}{dt} [L \cdot i] = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (31.4.4)$$

Ve zvláštním případě stejnosměrných veličin, kdy proud má lineární charakter, přejde vztah 31.4.3 do tvaru, který představuje tzv. **statickou definici indukčnosti**.

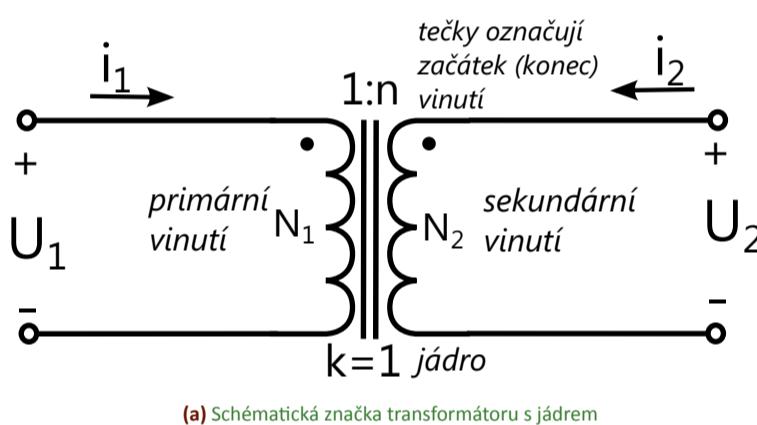
$$\Psi(t) = L \cdot I \quad (31.4.5)$$

Je ale třeba zdůraznit, že rov. 31.4.3, rov. 31.4.4 a rov. 31.4.5 platí pouze pro lineární magnetické obvody. Jestliže jsou použity při matematickém popisu transformátorů nebo cívek s feromagnetickým jádrem, je třeba mít na paměti, že tento linearizovaný model lze použít jen v určitém omezeném rozsahu daným skutečnou magnetizační charakteristikou. Nicméně, lineární model transformátoru je pro svou jednoduchost často používán.

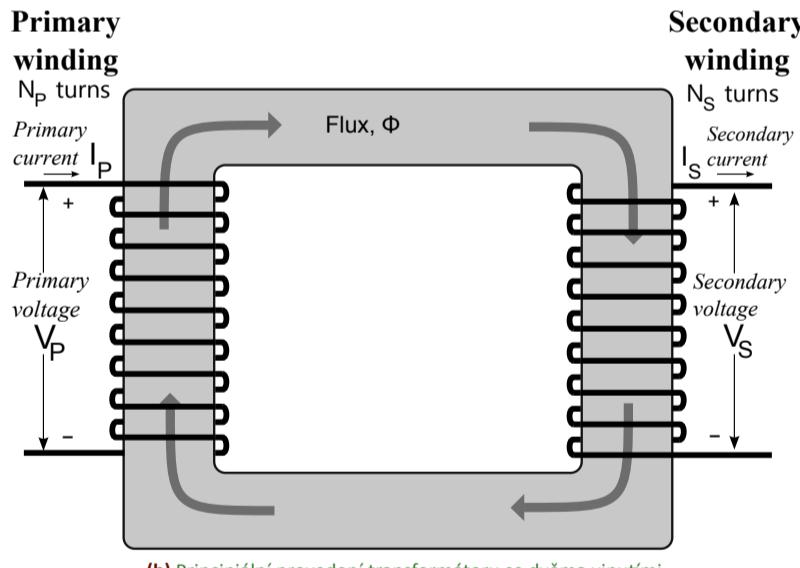
## 31.5. Princip činnosti, základní konstrukční provedení

**Definice 31.5.1.** Transformátor je elektrický netočivý stroj, který umožnuje přenášet elektrickou energii z jednoho obvodu do jiného pomocí vzájemné elektromagnetické indukce. To znamená, že mění její parametry (napětí, proudy), přitom forma energie na vstupu i výstupu zůstává elektrická.

Transformátory jsou nezbytnou součástí řady elektrotechnických zařízení, počínaje vazebními a napájecími transformátory sdělovacích a polovodičových zařízení až k transformátorům blokovým a přenosovým, užívaným v energetice. Jejich výkony se pohybují od zlomků VA do stovek MVA. Podobně je tomu s jejich napětími od malých až po vyn. Zásadně transformátory mohou být jedno nebo vícefázové (obvykle třífázové)



(a) Schématická značka transformátoru s jádrem



(b) Principiální provedení transformátoru se dvěma vinutími

**Obrázek 31.5.1.:** Ideální transformátor s jádrem, s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím. Tečky označují začátky (resp. konec) vinutí. Význam má jejich poloha tečky vůči druhé. Budeme-li je chápout jako začátky vinutí, měl by se drát primáru a sekundáru vinout tak, jak je naznačeno na obrázku

Princip transformátoru je založen na **zákonu elektromagnetické indukce** - tedy magnetický tok vybuzený jedním vinutím indukuje napětí ve vinutí druhém (primář, sekundár). Obrázek 31.5.1b ukazuje, že magnetický tok je z jednoho vinutí do druhého veden prostřednictvím magnetického obvodu. Fyzikální princip vychází z

### 2. Maxwellovy rovnice 29.4.1.

Převod transformátoru

$$n = \frac{N_1}{N_2}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (31.5.1)$$

## 31.6. Zjednodušený rozbor funkce transformátoru

Uvažujme pro začátek transformátor s dokonale těsnou vazbou, tedy s činitelem vazby  $k = 1$ , s nulovým rozptylovým magnetickým tokem a s konečnou velikostí indukčnosti  $L_1$  a  $L_2$  primárního a sekundárního vinutí

### 31.6.1. Situace při sekundárním vinutí naprázdno

Podle indukčního zákona platí pro primární a sekundární napájetí

$$u_1(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (31.6.1a)$$

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (31.6.1b)$$

kde  $\Phi_\mu(t)$  je magnetický tok v jádře. Porovnáním rov. 31.6.1a a rov. 31.6.1b dostaneme následující rovnici:

$$u_2(t) = u_1(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (31.6.2)$$

Je zřejmé, že  $u_1(t)$  a  $u_2(t)$  mohou mít sice různou velikost, ale mají zcela stejný časový průběh. Z rov. 31.6.1a plyne, že magnetický tok je jednoznačně určen časovým integrálem z přiloženého primárního napětí:

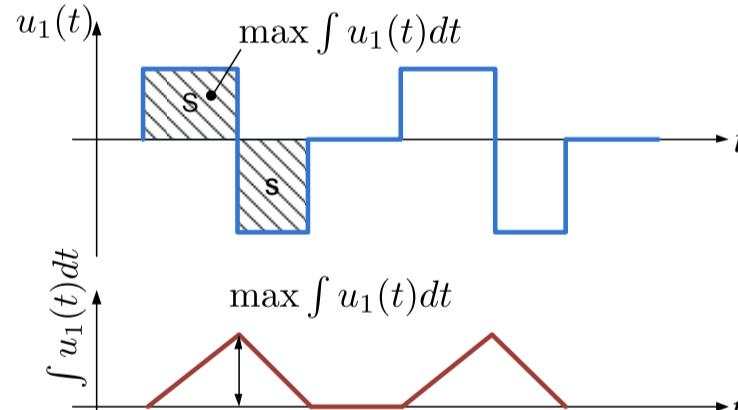
$$\Phi_\mu(t) = \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} + \Phi_{\mu_{poc}} \quad (31.6.3)$$

Primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu, tj. nesmí mít stejnosměrnou složku, jinak by magnetický tok rostl nade všechny meze (v praxi do přesycení). Velikost integrační konstanty  $\Phi_{\mu_{poc}}$  závisí na konkrétním režimu transformátoru. Z rovnice také plyne užitečný vztah:

$$\Delta\Phi_\mu(t) = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1} \quad (31.6.4)$$

Je-li  $u_1(t)$  periodická funkce s nulovou střední hodnotou, pak neurčitý integrál z  $u_1(t)$  je rovněž periodická funkce, ježíž střední hodnota již ovšem nulová být nemusí (viz obr. 31.6.2).  $\Phi_\mu$  je rozkmit magnetického toku v jádře transformátoru. Z rovnice 31.6.3 je patrné, že bez bližší znalosti režimu transformátoru sice nelze přesně stanovit meze, v nichž se magnetický tok periodicky pohybuje, ale dle rov. 31.6.4 umíme přesně stanovit rozkmit toku čili vzdálenost mezí. Pro předpokládané homogenní rozložení pole ve feromagnetickém jádře lze určit rozkmit magnetické indukce:

$$\Delta B_\mu(t) = \frac{\Delta\Phi_\mu(t)}{S} = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1 S} \quad (31.6.5)$$



(b) Znázornění časového integrálu primárního napětí transformátoru

pro lineární magnetické obvody vztah mezi tokem a magnetizačním proudem:

$$N_1 \Phi_\mu(t) = L_1 i_\mu(t) \quad (31.6.6)$$

Proud  $i_\mu(t)$  je primární proud při sekundárním vinutí naprázdno, tzv. **magnetizační proud**. Je tedy přímo úměrný magnetickému toku  $\Phi_\mu(t)$ .

$$i_\mu(t) = \frac{N_1 \Phi_\mu(t)}{L_1} \quad (31.6.7)$$

Dosadíme-li za  $\Phi_\mu(t)$  rov. 31.6.3 uvedené na stránce 143, dostaneme známý vztah mezi proudem a napětím cívky, vyjádřený v integrálním tvaru:

$$i_\mu(t) = i_{\mu_{poc}} + \frac{1}{L_1} \int u_1(t) dt \quad (31.6.8)$$

Opět vidíme, že primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu.

### 31.6.2. Situace při zatížení sekundárního vinutí

Rovnice 31.6.2 až rov. 31.6.8 zůstávají v platnosti. Připojíme-li k sekundárnímu vinutí zátěž, začne téci sekundární proud  $i_2(t)$ . Např. pro odporovou zátěž bude platit

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (31.6.9)$$

Se sekundárním proudem je svázán magnetický tok  $\Phi_2(t)$

$$\Phi_2(t) = \frac{L_2 i_2(t)}{N_2} \quad (31.6.10)$$

Proud  $i_2(t)$ , tedy i tok  $\Phi_2(t)$ , mohou mít bohužel stejnosměrnou složku (zátěž může být např. jednocestný usměrňovač). Stejnosměrnou složku proudu však transformátor obecně neumí přetransformovat na primární stranu a pak dochází ke stejnosměrné předmagnetizaci jádra (sekundární proud stejnosměrnou složku obsahuje, primární proud nikoli). Jedná se o škodlivý jev, který může způsobit, zvláště při větších proudech i přesycení magnetického obvodu. Jev nastává např. při napájení transformátoru ze sítě. Síť se totiž jeví v průběhu celé pracovní periody jako napěťový zdroj s malou vnitřní impedanci. Za zvláštních okolností transformátor stejnosměrnou složku transformovat umí, např. v jednočinném propustném měniči. Zde je transformátor po určitou část periody od primárního zdroje odpojen, v té chvíli se vnitřní impedance primárního zdroje jeví jako nekonečně velká. Oba typy napájení je nutno rozlišovat.

Dále proto uvažujeme pouze takové typy zátěží, které stejnosměrnou složku nevytvářejí (např. zátěž typu dvoucestný můstkový usměrňovač již tuto nečistotu nemá). Pak při uvažování dokonalé vazby, tj. při činiteli vazby  $k = 1$ , je v celém magnetickém obvodu sekundární tok  $\Phi_2(t)$  plně vykompenzován primárním tokem  $\Phi_1(t)$  stejně velikosti, ale opačného znaménka. Tok  $\Phi_1(t)$  je svázán s "přídavným" primárním proudem, tedy proudem přetransformovaným ze sekundáru na primár - nazvaný jako  $i'_1(t)$ . Proud vzniká v primárním vinutí v důsledku Lenzova pravidla. Je zodpovědný za čerpání energie z primárního napájecího zdroje a jeho existence je současně v souladu se zákonem zachování energie

$$\Phi_1(t) = \frac{L_1 i'_1}{N_1} = \Phi_2(t) \quad (31.6.11)$$

Srovnáním rov. 31.6.10 a rov. 31.6.11 obdržíme známý vztah pro transformaci proudů:

$$i'_1(t) = i_2(t) \frac{L_2 N_1}{N_2 L_1} = i_2(t) \frac{N_2^2 N_1}{N_2 N_1^2} = i_2(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (31.6.12)$$

Celkový primární proud  $i_1(t)$  tedy při zatížení transformátoru sestává ze dvou zcela nezávislých složek. Jednou složkou je magnetizační proud  $i_\mu(t)$ , který tekl už i ve stavu naprázdno (a nyní při zatížení se nezměnil) a druhou je výše zmínovaný přetransformovaný proud  $i'_1(t)$ :

$$i_1(t) = i'_1(t) + i_\mu(t) \quad (31.6.13)$$

Z dosud uvedených skutečnosti plyne důležitý závěr: tok v jádře zůstává nezměněn i při zatížení, je tedy stále roven původnímu toku  $\Phi_\mu(t)$ , protože tok  $\Phi_1(t)$  od proudu  $i'_1(t)$  a tok  $\Phi_2(t)$  od proudu  $i_2(t)$  se plně kompenzují. **Sycení jádra u bezrozptylového transformátoru tedy vůbec nezávisí na velikosti zatěžovacího proudu, tedy ani na velikosti přenášeného výkonu!**

Reálné transformátory mají vždy určitý **rozptylový tok**. Ten je svázán s tzv. rozptylovými indukčnostmi (primární a sekundární): Takový transformátor si můžeme představit jako transformátor bezrozptylový s připojenými indukčnostmi  $L_{\sigma 1}$  do série s primárním vinutím a  $L_{\sigma 2}$  do série se sekundárním vinutím. Z hlediska vnějšího chování transformátoru lze uvažovat i jedinou rozptylovou indukčnost  $L_\sigma$ , přepočtenou jen na sekundární stranu (viz obr. 31.6.4).

Tento tok je samozřejmě svázán s úbytkem sekundárního napětí  $\Delta u_2(t)$  na  $L_\sigma$ . Čili rozptylová indukčnost způsobuje nenulovou výstupní reaktanci transformátoru, Transformátor je pak "měkký", zatěžovací proud způsobí úbytek napětí:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_\sigma(t)}{dt} \quad (31.6.14)$$

Skutečný transformátor má navíc nenulové odpory vodičů, na kterých vznikají podle

Ohmova zákona další úbytky napětí a navíc Joulovy ztráty.

Vraťme se nyní znovu k transformátoru bezrozptylovému, s dokonalou vazbou, a předpokládejme, že jeho vinutí mají navíc nulový odpor (suprovodič). Pak na nich nevzniká průchodem proudu žádný ztrátový výkon a proudy  $i_2(t)$  a  $i'_1(t)$  lze libovolně zvyšovat. Jejich magnetické účinky se dokonale zruší, nemají tedy vliv na velikost sycení v jádře a transformátorem lze přenáset "libovolně" velký výkon (ve skutečnosti však omezený tzv. kritickou proudovou hustotou suprovodiče, při níž zaniká suprovodivý jev - pro niob asi 50 A/mm²).

U měděného (hliníkového) vinutí je nutno volit průřez vodičů úměrný proudu, aby nebyla překročena povolená proudová hustota s ohledem na přehřátí vodičů vlivem Joulova tepla. Rovnice 31.6.5 navíc napovídá, že musíme volit určitý počet primárních závitů  $N_1$ , abychom nepřekročili maximální sycení jádra.  $N_1$  je tím větší, čím je větší maximum - amplituda časového integrálu primárního napětí a čím menší průřez má jádro. Má-li se pak vinutí vtěsnat do okénka jádra, nelze zvyšovat průřez vodiče a tím i proudovou zatížitelnost libovolně. Díky tomu lze s daným průřezem magnetického obvodu  $S$  a průřezem okénka  $S_0$  realizovat transformátor schopný přenést jen určitý omezený výkon.

Je tedy zřejmé, že maximální výkon bude přímo úměrný ploše okénka  $S_0$ , protože čím je  $S_0$  větší, tím tlustší vodiče můžeme použít a tím větší proudy (výkon) je možno transformovat. Kromě toho je maximální výkon přímo úměrný i průřezu magnetického obvodu  $S$ , protože čím je  $S$  větší, tím méně závitů  $N_1$  potřebujeme pro dané sycení, viz rov. 31.6.5, a proto mohou být opět tlustší vodiče. Čili lze napsat:

$$P_{max} \approx S \cdot S_0 \quad (31.6.15)$$

Zamyslíme-li se nad rov. 31.6.5, lze úměru rov. 31.6.15 ještě doplnit. Maximální hodnota sycení tj. maximum funkce  $B(t)$  je přímo úměrná maximu funkce časového integrálu primárního napětí. Uvažujme, že napětí neobsahuje stejnosměrnou složku, je periodické s kmitočtem  $f$ , ale jinak libovolného tvaru, tj. libovolného obsahu vyšších harmonických.

Pak je maximum časového integrálu takového primárního napětí (maximum toku, amplituda toku) zcela jistě konečné a nepřímo úměrné kmitočtu. To znamená, že zvýšíme-li kmitočet n-krát při zachování amplitudy a tvaru napětí, klesne maximum integrálu n-krát a bude moci být dle rov. 31.6.5 také n-krát méně závitů  $N_1$ , aby sycení zůstalo stejné. Pak ve stejném poměru n můžeme zvýšit průřez vodičů, aniž bychom se báli, že se vinutí nevejde do okénka. Lze pak přenášet n-krát větší proud a výkon (napětí se nezměnila, pouze vzrostl kmitočet). Čili maximální výkon je přímo úměrný kmitočtu. Rovnici 31.6.15 lze proto doplnit:

$$P_{max} \approx f \cdot S \cdot S_0 \quad (31.6.16)$$

Pro jádra z plechu EI z křemíkové oceli lze pomocí tohoto vztahu s uvažováním přímé úměry mezi  $S_0$  a  $S$ , odvodit vztah

$$P_{max} \approx S^2 \quad [W, cm^2] \quad (31.6.17)$$

Ten předpokládá maximální sycení 1T, proudovou hustotu asi 2,5 A/mm² a kmitočet 50Hz. A týká se opravdu jen EI jáder, protože při jeho odvození byla uvažována konkrétní závislost mezi  $S_0$  a  $S$  pro tato jádra.

Ze vztahu rov. 31.6.16 vidíme, že zvyšování pracovního kmitočtu umožňuje přenášet větší výkon při zachování rozměru jádra. To je základem filosofie všech spínacích zdrojů (měničů) s transformátorem. Kmitočet však nelze u reálného transformátoru zvyšovat nade všechny meze. Omezení představují hysterické a vřivé ztráty v jádře a dále rozptylová indukčnost.

## 31.7. Ztráty v reálném transformátoru

### 31.7.1. Joulovy ztráty ve vinutí

Joulové (ohmické) ztráty vznikají na odporu vinutí průchodem proudu. Tato skutečnost nutí zvyšovat průřez vodičů a způsobuje tak nutné zvyšování plochy okénka jádra  $S_0$  a zvětšování celého transformátoru.

Z hlediska těchto ztrát se primární a sekundární vinutí chovají jako lineární odpory  $R_1$  a  $R_2$ . Joulové ztráty jsou proto úměrné kvadrátu efektivní hodnoty procházejícího proudu a jsou dány vztahem:

$$P_R = R_1 I_{1ef}^2 + R_2 I_{2ef}^2 \quad (31.7.1)$$

Efektivní hodnota proudů procházejících vinutími obecně není úměrná přenášenému činnému výkonu a může být v praxi někdy nečekaně vysoká. Např. u síťového transformátoru se sekundárním usměrňovačem a filtračním kondenzátorem bez vyrovnávací nárazové tlumivky. Zde odebíraný sekundární proud  $i_2(t)$  a tedy přetransformovaná složka primárního proudu  $i'_1(t)$  tvar úzkých nabíjecích impulsů s velkou amplitudou. Jeho celková efektivní hodnota je několikrát větší než efektivní hodnota užitečné 1. harmonické, která se v tomto případě pouze samotná podílí na přenosu činného výkonu. Ten je totiž dán součinem efektivní hodnoty harmonického sekundárního napětí, efektivní hodnoty pouze 1. harmonické sekundárního proudu a  $\cos \phi$  oné 1. harmonické proudu!

Pro omezení ohrevu vinutí na přípustnou mez je nutno omezit odpory vinutí. Při návrhu pracujeme s tzv. dovolenou proudovou hustotou  $J$ . Teče-li proud rovno-

měrně celou plochou průřezu vodiče, platí vztahy:

$$J_1 = \frac{I_{1ef}}{S_1} \quad J_2 = \frac{I_{2ef}}{S_2} \quad (31.7.2)$$

$S_1$  a  $S_2$  jsou průřezy primárního a sekundárního vinutí.

Doporučená hodnota  $J$  se pohybuje v případě měděných vodičů v rozmezí 1,5 až  $7A/mm^2$ . Pro větší transformátory s velkým objemem vinutí je třeba volit vždy hustotu menší. Při konstantní proudové hustotě totiž celkový Joulov ztrátový výkon roste s třetí mocninou lineárních rozměrů cívky, chladící povrch pouze s druhou mocninou. Vinutí těsně pod chladícím povrchem mohou mít větší proudovou hustotu než vinutí vnitřní.

Bez nuceného proudění vzduchu volíme u toroidních transformátorů hustotu  $J$  v rozsahu 2 až  $5A/mm^2$ , podle velikosti a počtu vrstev vinutí. U malých hrnčkových feritových jader lze volit nouzově až  $4,5A/mm^2$ . U běžně užívaných síťových transformátorů s mnohovrstvými cívками vinutými na kostrách se doporučuje hodnota  $1,5A/mm^2$  (pro velké transformátory) až  $3,5A/mm^2$  (pro malé transformátory). Při použití nuceného proudění vzduchu může být hustota  $J$  větší.

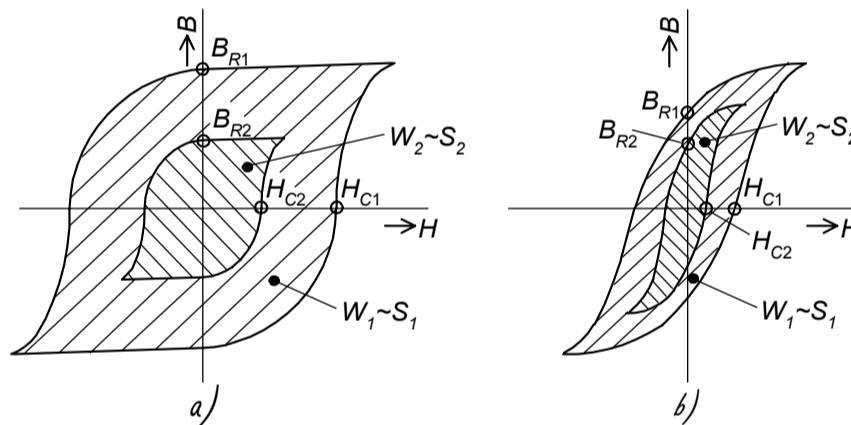
U transformátorů pracujících na vysokém kmitočtu musíme počítat s uplatněním **skinefektu**, díky němuž proud teče jen ve vrstvě pod povrchem vodiče a střední část tlustého vodiče by tak byla nevyužita.

### 31.7.2. Hysterezní ztráty v jádře

Hysterezní ztráty souvisejí s energií  $W$  potřebnou na přemagnetování jádra. Energie  $W$  je úměrná ploše hysterezní smyčky (viz. obr. 3.5). Plocha hysterezní smyčky má fyzikální rozměr  $J/m^3$ , jedná se tedy o objemovou hustotu ztrátové energie. Ta je pak velká pro materiály magneticky tvrdé, se širokou hysterezní smyčkou tj. s velkou remanencí  $B_R$  a koercitivní intenzitou  $H_C$ . Takové materiály proto nejsou pro jádra transformátoru vhodná. Naopak požadujeme materiály magneticky měkké, s co nejužší hysterezní smyčkou a s co nejmenší remanentní indukcí.

Je zřejmé, že velikost plochy hysterezní smyčky  $S$  a tedy i energie  $W$  souvisí nejen s vlastnostmi materiálu  $B_R$  a  $H_C$ , ale i s amplitudou indukce  $B_m$ . Přibližně platí, že plocha  $S$  je úměrná kvadrátu  $B_m$ . (viz. obr. 3.5). Hysterezní ztrátový výkon je dán součinem této energie  $W$  a pracovního kmitočtu  $f$ , v jehož „rytmu“ dochází k přemagnetovávání.

$$P_h = W \cdot f \approx B_m^2 \cdot f^2 \quad (31.7.3)$$



Obrázek 31.7.1.: Hysterezní smyčka feromagnetického materiálu:  
a) magneticky tvrdý materiál,  
b) magneticky měkký materiál.

- Budeme-li měnit kmitočet a současně zachovávat sycení, tzn. budeme udržovat konstantní poměr amplitudy  $u_1(t)$  a kmitočtu  $f$  při proměnném počtu závitů  $N_1$  – viz rozbor vztahu (31.6.5). Pak bude díky konstantnímu sycení  $B_m$  i konstantní energie  $W$ . Ze vztahu (31.7.3) je pak vidět, že hysterezní ztráty budou přímo úměrné kmitočtu.

$$P_h \approx f \quad (31.7.4)$$

Toto je typický případ transformátoru v pulsních měničích, kdy volíme vysoký kmitočet za účelem snížení  $N_1$  (aby se vinutí mohlo vinout tlustším vodičem) při zachování (nepřekročení) dovoleného sycení.

- Měníme-li kmitočet a současně zachovávat týž transformátor (totéž  $N_1$  a  $S$ ) a tutéž amplitudu  $u_1(t)$ . Pak z rozboru vztahu (31.6.5) vyplývá, že indukce bude nepřímo úměrná kmitočtu. Čili ze vztahu (31.7.3) pak vidíme, že hysterezní ztráty budou hyperbolicky, nepřímo úměrně, klesat s rostoucím kmitočtem.

$$P_h \approx \frac{1}{f} \quad (31.7.5)$$

Tento režim transformátoru se nazývá *odbuzovací*, neboť při růstu kmitočtu klesá indukce. V pulsních měničích by ale takový režim neměl žádný význam, protože bychom sice zvýšili kmitočet, ale museli bychom použít stále stejný objemný a těžký transformátor s velkým  $N_1$ , stanoveným pro původní nízký kmitočet.

### 31.7.3. Ztráty vířivými proudy v jádře

## 31.8. Rozptyl transformátoru

Vraťme se nyní k zjednodušenému modelu rozptylu z obr. 31.6.4. Pro velikost rozptylové indukčnosti  $L_\sigma$  platí:

$$L_\sigma = \lambda_\sigma \cdot N^2 \quad (31.8.1)$$

kde  $\lambda_\sigma$  je *magnetická vodivost rozptylového magnetického obvodu*. Rozptylovou indukčnost  $L_\sigma$  (tj. sekundární rozptylovou indukčnost plus primární rozptylovou indukčnost přepočtenou na sekundární stranu) je nutno chápat jako indukčnost určující výstupní reaktanci transformátoru napájeného ovšem z ideálního napěťového primárního zdroje. Lze ji snadno změřit, zkratujeme-li primární vinutí a měříme sekundární indukčnost  $L_{2,k}$ :

$$L_\sigma = L_{2,k} = L_2(1 - k^2) \quad (31.8.2)$$

kde  $k$  má význam činitele vazby a lze jej určit ze známého vztahu:

$$k = \frac{M}{L_1 L_2} \quad (31.8.3)$$

Zajímá nás ovšem výstupní reaktance  $\omega L_\sigma$ , nikoliv samotná indukčnost  $L_\sigma$ , neboť napěťový úbytek je úměrný (při harmonickém průběhu napětí):

$$\Delta u_2(t) \approx \omega L_\sigma \quad (31.8.4)$$

Je zřejmé, že při konstantní rozptylové indukčnosti může být transformátor na vysokých kmitočtech naprostě nepoužitelný (měkký). Pak nezbývá, než velmi úzkostlivě a co nejvíce minimalizovat rozptylovou indukčnost. Je proto nutné podle rov. 31.8.1 minimalizovat rozptylovou magnetickou vodivost  $\lambda_\sigma$ . Ta je přibližně určená rovnicí:

$$\lambda_\sigma = \mu_0 \frac{S_\sigma}{l_\sigma} \quad (31.8.5)$$

kde  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H/m$  je *permeabilita vakua*.  $S_\sigma$  a  $l_\sigma$  jsou **ekvivalentní průřez a délka rozptylových cest**. Protože nelze snížit permeabilitu vzduchu, je nutno upravit geometrii jádra a současně zabezpečit co největší poměr permeability jádra k permeabilitě okolního prostředí. Jádro musí mít tvar bez ostrých zlomů ve směru magnetického toku, nejlépe kruhový tvar, tj. *toroidní jádro*. Je důležitá velká magnetická vodivost jádra  $\lambda$ . Ta je dána vztahem:

$$\lambda = \mu_r \mu_0 \frac{S}{l} \quad (31.8.6)$$

$\mu_r$  je *relativní permeabilita materiálu*,  $S$  je *průřez jádra*,  $l$  je *délka střední siločáry*. Nestačí jen velká permeabilita  $\mu_r$ , ale i velký poměr  $\frac{S}{l}$ . Pro minimalizaci rozptylu jsou proto vhodná „baculatější“ jádra s velkým  $S$  a malým  $l$  (často například několik toroidů s malým průměrem tj. malým  $l$  paralelně pro dosažení velkého  $S$ ). Tím ale vzniká problém malého okénka  $S_0$  pro vinutí, což znemožňuje vinout vodiči s velkým průřezem a přenášet tak velké výkony. Tyto protichůdné požadavky na tvar jádra bývají kritické a je nutno je v návrhu kompromisně vyřešit.

Rozptylovou indukčnost dále zmenšíme způsobem vinutí. Jsou-li vinutí na kostřičce, pak je vineme na sebe, nikoliv vedle sebe s přepážkou. Blíže jádru umístíme vinutí s menším počtem závitů. Vhodné je také střídavé prokládání jednotlivých vrstev primárního a sekundárního vinutí, roste však neúměrně pracnost (cena) a klesá činitel plnění okénka. *Bifilární vinutí* s nejtěsnější vazbou nelze uskutečnit v případě rozdílných počtů závitů (což je téměř vždy) a v případě nároků na izolační pevnost mezi vinutími rozprostřenými rovnoměrně po obvodu celého toroidu.

### Poznámka k transformátorům obecně (nejen síťovým)

Všimněme si, že v celém výkladu není nikde zmínka o použití *vzduchové mezery v magnetickém obvodu jádra*. V kapitole Cívky s feromagnetickým jádrem je zamýšlení o vzduchových mezerech v magnetických obvodech a je zde vysvětlen jeden případ, kdy má smysl mezeru v transformátoru použít. Je zde ukázáno, že v případě předpokladu platnosti rov. 31.6.4 (což je mimo jiné případ běžných napájecích transformátorů) je použití vzduchové mezery bezúčelné a škodlivé, vede totiž ke vzrůstu magnetizačního proudu a zvýšení rozptylových toků.

## 31.9. Cívky s feromagnetickým jádrem

### 31.9.1. Fyzikální rozbor a příprava pro návrh

### 31.9.2. Důsledky a význam použití vzduchové mezery

### 31.10. Efektivní hodnoty proudů typických průběhů

Pro správnou volbu průřezu drátu pro vinutí je nutné stanovit přípustné oteplení, které je určeno efektivní hodnotou proudu. Pro nejčastější průběhy proudů jsem odvodil vztahy pro výpočet efektivních hodnot.

1. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.1a:

$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left( \frac{I_{max}}{\delta T} t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \int_0^{\delta T} t^2 dt = \frac{1}{T} \left( \frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\delta T} \\ &= \frac{1}{T} \frac{I_{max}^2}{(\delta T)^2} \frac{(\delta T)^3}{3} = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} \end{aligned} \quad (31.10.1)$$

2. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.1b: Pravý průběh na obrázku 31.10.1b je speciálním případem levého průběhu jehož efektivní hodnotu snadno určíme jako  $I_{max} \sqrt{\frac{1}{3}}$ . Pro úplnost provedeme výpočet následujícím způsobem

$$I_{ef}^2 = I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2 = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} + I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} = I_{max}^2 \frac{1}{3} \quad (31.10.2)$$

výpočet dílčí efektivní hodnoty proudu  $I_{ef2}$ :

$$\begin{aligned} I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^T \left( I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \\ &\left( \begin{array}{l} \tau = t - \delta T \Rightarrow \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt \Rightarrow \tau_d = 0 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left( I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left( I_{max}^2 + \frac{2I_{max}^2}{T(\delta-1)}\tau + \left( \frac{I_{max}}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[ \tau + \frac{2}{T(\delta-1)} \frac{\tau^2}{2} + \left( \frac{1}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left( T(1-\delta) - T(1-\delta) + \frac{T}{3}(1-\delta) \right) \\ &= I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} \end{aligned}$$

3. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.2:

$$I_{ef} = I_{max}. \quad (31.10.3)$$

4. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.3:

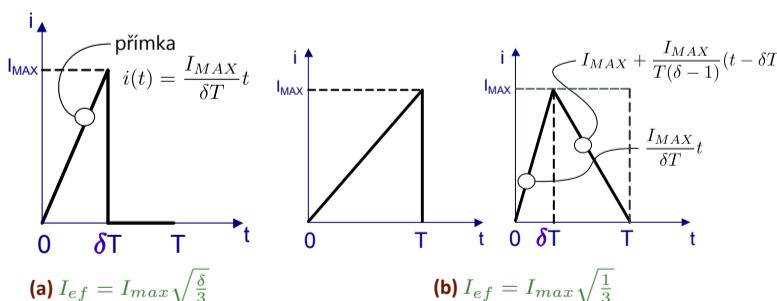
$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{2I_{max}\delta} \quad (31.10.4)$$

$$I_{ef1}^2 = I_{ef2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (31.10.5)$$

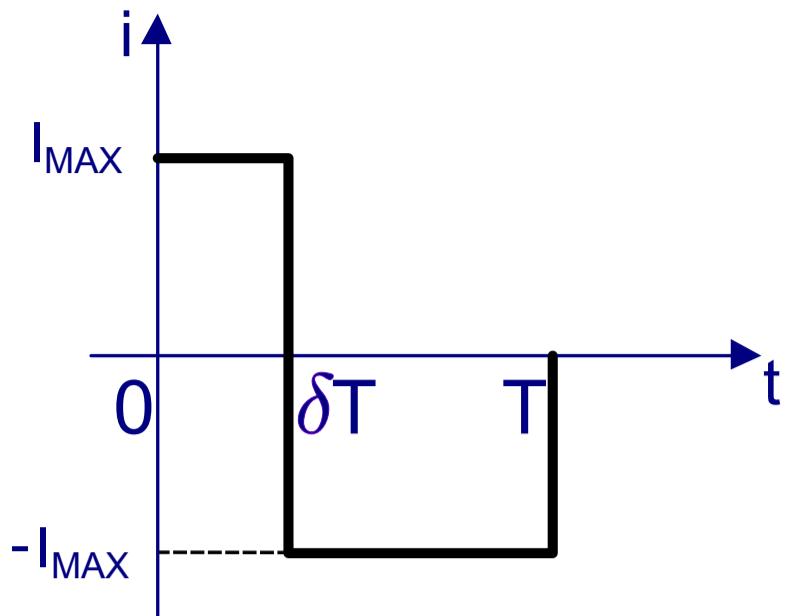
5. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.4:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (31.10.6)$$

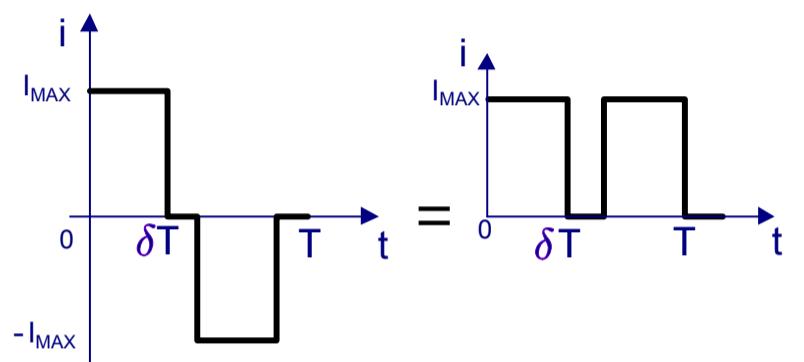
6. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.5:



Obrázek 31.10.1.: Typické průběhy proudů, jejichž efektivní hodnotu je nutné stanovit při dimenzování vinutých komponent.

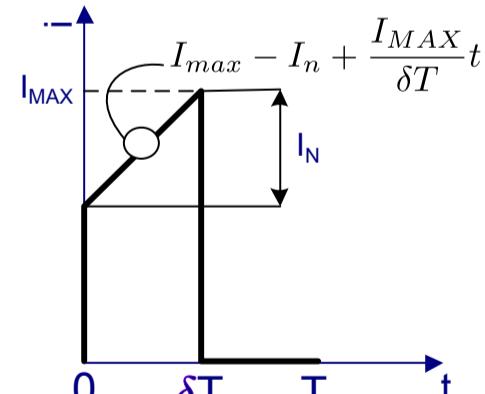


Obrázek 31.10.2.



Obrázek 31.10.3.:  $I_{ef} = I_{max} \sqrt{2\delta}$

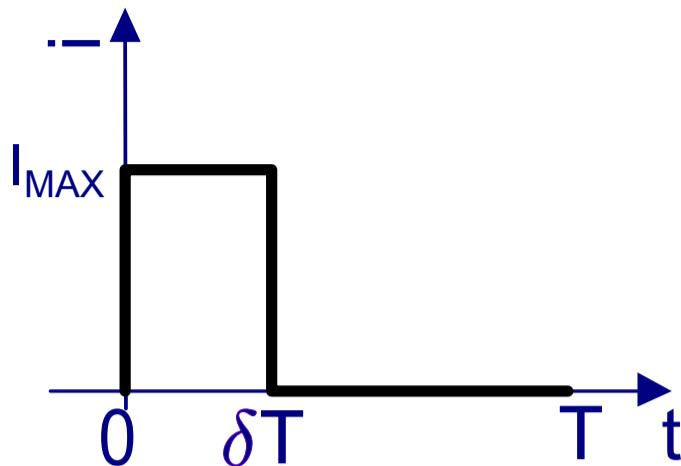
$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left( I_{max} - I_n + \frac{I_n}{\delta T} t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left( (I_{max} - I_n)^2 t + \frac{2I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t + \left( \frac{I_n}{\delta T} \right)^2 t^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \left( (I_{max} - I_n)^2 t + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t^2 + \left( \frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{t^3}{3} \right)_0^{\delta T} \\ &= \frac{1}{T} \left( (I_{max} - I_n)^2 \delta T + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} \delta T^2 + \left( \frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{\delta T^3}{3} \right) \\ &= \delta \left( (I_{max} - I_n)^2 + I_n \cdot (I_{max} - I_n) + \frac{I_n^2}{3} \right) \\ &= \delta \left( I_{max}^2 - 2I_{max}I_n + I_n^2 + I_{max}I_n - I_n^2 + \frac{I_n^2}{3} \right) \\ &= \delta \left( I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \end{aligned}$$



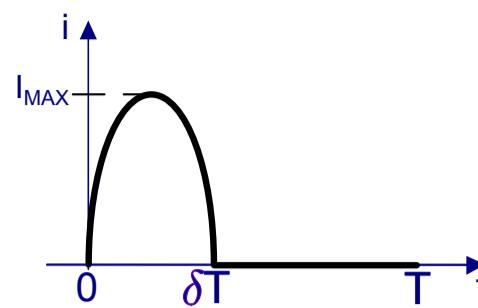
Obrázek 31.10.4.

$$I_{ef} = I_{max} \sqrt{\delta \left( I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right)} \quad (31.10.7)$$

7. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.6:



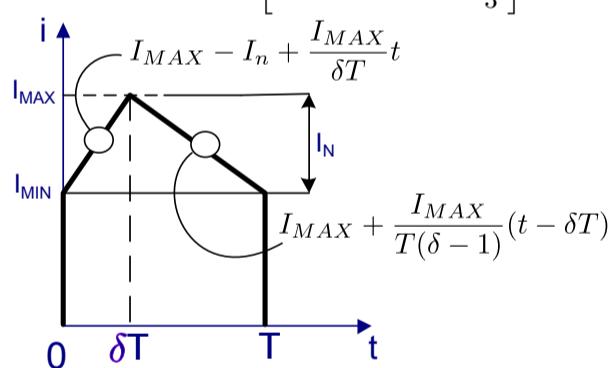
Obrázek 31.10.4.



Obrázek 31.10.7.

$$I_{ef} = I_{max} \sqrt{\frac{\delta}{2}} \quad (31.10.9)$$

$$\begin{aligned} I_{ef1}^2 &= \delta \left( I_{max}^2 - I_{max} I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \\ I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^{T(1-\delta)} \left( I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \\ &= \text{meze: } \begin{pmatrix} \tau = t - \delta T & \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt & \tau_d = 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left( I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left( I_{max}^2 + \frac{2I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau + \left( \frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left[ I_{max}^2 \tau + \frac{I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau^2 + \left( \frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\ &= (1-\delta) \left[ I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3} \right] \end{aligned}$$



Obrázek 31.10.6.

$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3}} \quad (31.10.8)$$

8. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 31.10.7:

$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} (I_{max} \sin(t))^2 dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^{\delta T} \sin^2(t) dt \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[ \frac{t}{2} - \underbrace{\frac{\sin(t) \cos(t)}{2}}_{\sin(\delta T)=0} \right]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$



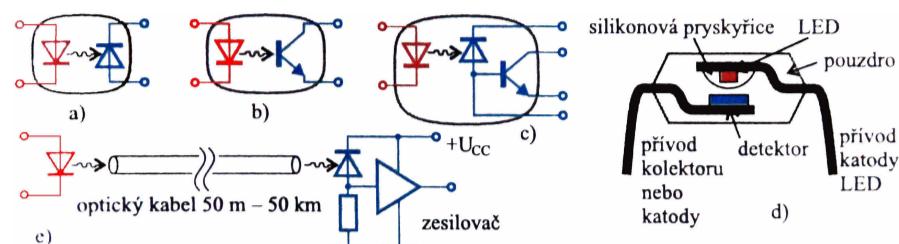
# 32. Optoelektronika

## Obsah

32.1. Optoelektronické systémy . . . . .	149
32.1.1. Statické parametry optoelektronických vazebních systémů . . . . .	149
32.1.2. Dynamické parametry optoelektronických vazebních systémů . . . . .	150
32.1.3. Izolační parametry optronu . . . . .	150

## 32.1. Optoelektronické systémy

Velmi rozšířené je využití fotonové vazby pro galvanické oddělení pomocí optoelektronických vazebních členů, optronů, a přenos dat pomocí optických kabelů. Optron je tvořen zdrojem (obvykle GaAs LED) a detektorem záření (obvykle Si fotodioda nebo Si fototranzistor) vzájemně spojených optickou vazbou v jednom pouzdře. Vstup a výstup jsou proto elektricky odizolovány a podle typu pouzdra snesou izolační napětí<sup>1</sup> 1,5 kV až 5 kV.



Obrázek 32.1.1.: Optoelektronické systémy [VZO1, p. 179]

Přenos signálu mezi zdrojem a detektorem na velkou vzdálenost se provádí prostředím s malým útlumem a vysokou šumovou imunitou, kterým je optické vlákno. Jedno nebo několik takových vláken s povrchovou a mechanickou ochranou (z kevlaru a polyuretanu) tvoří optický kabel. Vlákno se skládá z vnitřního skleněného jádra (o průměru jednotek až desítek  $\mu m$ ) s indexem lomu  $n_1$ , a je pokryto tenkým skleněným pláštěm (tlustým desítky  $\mu m$ ) s indexem lomu  $n_2$ . Jelikož  $n_1 > n_2$ , dochází pro určité rozmezí úhlu dopadu k odrazu záření na rozhraní jádro-plášť a energie záření se pak šíří převážně jádrem vlákna. Z důvodu nízkého útlumu vlákna se přenos uskutečňuje v přenosových oknech 850 nm, 1300 nm a 1550 nm, přičemž s rostoucí hodnotou vlnové délky útlum vlákna klesá, ale cena potřebných optických prvků roste.

Typy optronů z hlediska aplikace:

- optrony vyráběné pro aplikace v lineárních obvodech mají dobrou linearitu a jsou používány pro galvanické oddělení analogových obvodů;
- optrony vyráběné pro aplikace v logických obvodech jsou určeny pro přenos pouze dvou úrovní signálů a proto je jejich realizace podstatně snadnější než realizace lineárních optronů.

### 32.1.1. Statické parametry optoelektronických vazebních systémů

#### 32.1.1.1. Proudový přenosový poměr CTR

Přenosovou účinnost optoelektronického vazebního systému charakterizuje proudový přenosový poměr  $CTR$  (Current Transfer Ratio), který udává poměr výstupního ku vstupnímu proudu optronu v procentech při daném pracovním napětí (nastavení pracovního bodu), zátěži a teplotě.

$$CTR = \frac{I_{out}}{I_{in}} \times 100 \quad [\%] \quad (32.1.1)$$

S fotodiodou na výstupu je  $CTR \approx 0,2 - 0,3\%$  a s fototranzistorem na výstupu je  $CTR \approx 10 - 100\%$ . Tento poměr vyjadřený rovnicí 32.1.1 je parametr svými vlastnostmi podobný proudovému zesilovacímu činiteli bipolárního tranzistoru  $h_{FE}$ <sup>2</sup> a je s ním možné pracovat podobným způsobem.

V následujících odstavcích se budeme předpokládat optoelektronický vazební systém s fotodiodou na vstupu a fototranzistorem na výstupu. V tomto případě je zřejmé, že  $CTR$  udává v procentech poměr velikosti kolektorového proudu přijímacího tranzistoru  $I_C$  ku proudu vysílačí diodou  $I_F$ .

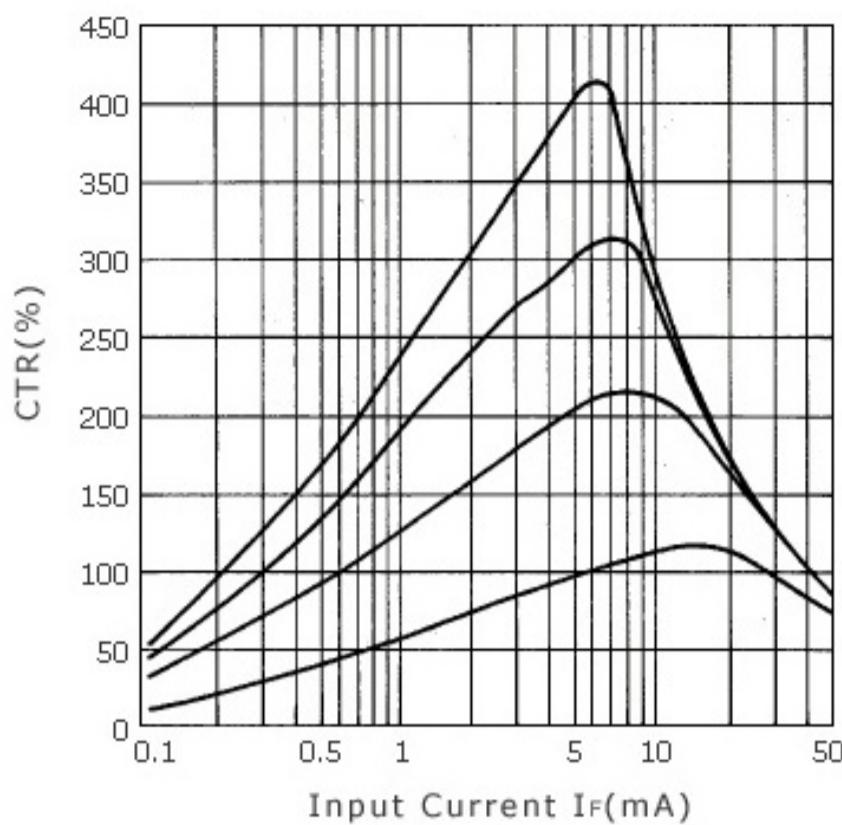
$$CTR = \frac{I_C}{I_F} \times 100 \quad [\%] \quad (32.1.2)$$

Poměr je udáván pro určitý proud  $I_F$  diody LED a kolektorové napětí  $U_{CE}$  fototranzistoru, např.  $CTR = 50\%$  při  $I_F = 1\text{mA}$ ,  $U_{CE} = 5\text{V}$  znamená, že když fotodiodou teče proud 1 mA, je výstupní kolektorový proud  $I_C = 0,5\text{mA}$ .

- Závislost  $CTR$  na vstupním proudu fotodiody na obr. 32.1.2a, není dáná monotónní funkcí, tj průběhem který by jen klesal, nebo naopak jen narůstal, ale vykazuje extrém, při kterém je dosažený přenosový poměr maximální.

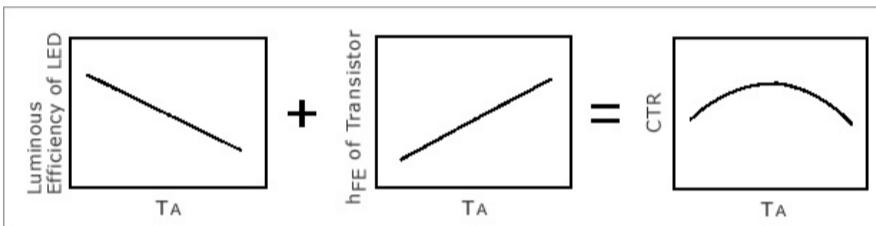
<sup>1</sup>(izolačním napětím se myslí rozdíl efektivních hodnot napětí mezi libovolnou vstupní a výstupní sorkou, při kterém dochází k průrazu mezi vstupem a výstupem)

<sup>2</sup>nebo též  $h_{21E}$  resp.  $\beta$ . Jedná se o parametr vystupující v hybridních rovnicích popisující chování tranzistoru v zapojení se společným emitorem.  $h_{21E}$  jako diferenciální proudový přenos při výstupu nakrátko



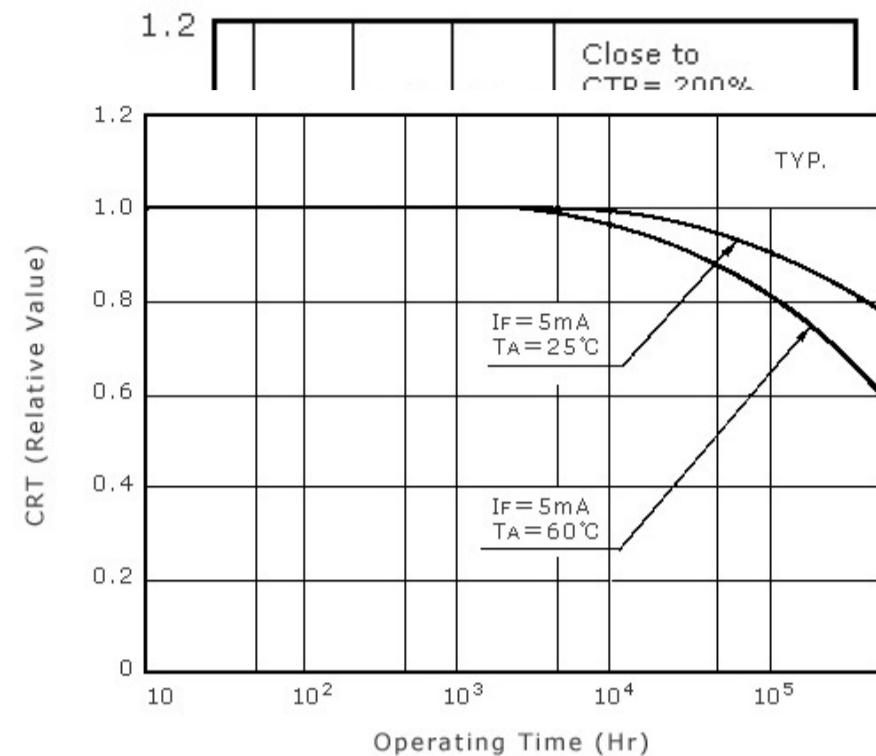
Obrázek 32.1.2.: Závislost CTR na vstupním proudu fotodiody a) a teplotě b)

- Závislost CTR na teplotě na obr. 32.1.3 ukazuje že zobrazená křivka je výsledkem kombinace dvou teplotních koeficientů. Zatímco světelná účinnost LED<sup>3</sup> vykazuje záporný teplotní koeficient, tranzistor naproti tomu kladný teplotní koeficient.

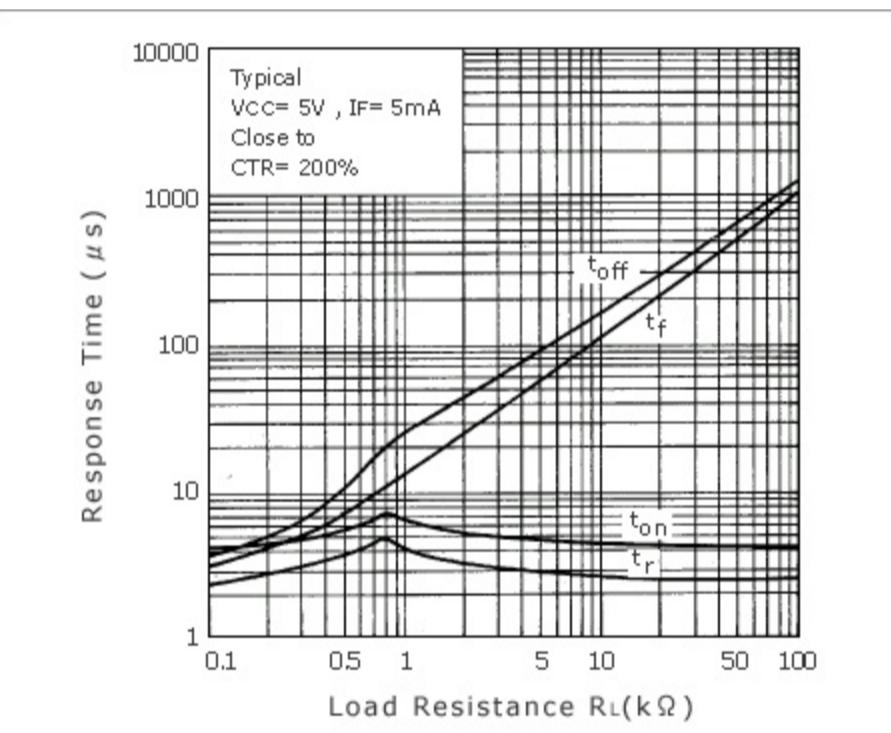


Obrázek 32.1.3.: Závislost CTR na teplotě

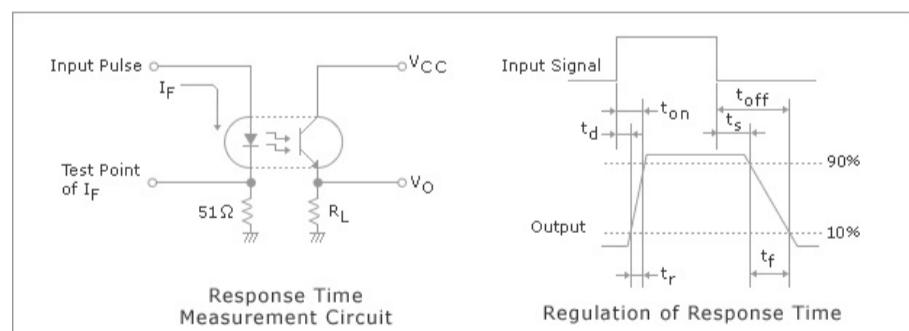
- Závislost CTR na čase na obr. 32.1.4a a obr. 32.1.4b udává velice důležitou vlastnost, na kterou je třeba klást důraz v aplikacích, vyžadujících dlouhou životnost produktu. Mohou to být například větrné elektrárny, drážní zabezpečovací zařízení atd. Největší vliv má na pokles CTR rychlosť stárnutí fotodiody. Světelná účinnost klesá tím rychleji, čím větší je pracovní proud  $I_F$  viz obr. 32.1.4a a čím větší je okolní teplota viz obr. 32.1.4b. V určité formě je degradace CTR způsobena také stárnutím optické vazby mezi fotodiodou a fototranzistorem a změnou účinnosti foto-elektrické konverze a stejnosměrného zesílení samotného fototranzistoru tj.  $h_{FE}$ .



Obrázek 32.1.4.: Závislost CTR na provozní době



Obrázek 32.1.5.: Response Time vs. RL Characteristics



Obrázek 32.1.6. \*\*\*

### 32.1.2. Dynamické parametry optoelektronických vazebních systémů

Rychlosť otronu je většinou limitována detektorem na výstupu. Pro rychlý přenos číslicového signálu se proto vyrábí otrony s fotodiodou integrovanou na jednom čipu s rychlým zesilovačem, jehož výstup je přímo slučitelný s číslicovými obvody. The response time of a photocoupler is similar to that of a transistor, and is expressed as follows.  $t_f // RL X hFE X CCB$  kde  $R_L$  ... zatěžovací odpor,  $h_{FE}$  ... proudový zesilovací činitel tranzistoru (DC amplification),  $C_{CB}$  ... kapacita mezi kolektorem a bází.

From this formula,  $t_f$  increases as the load resistance increases as shown in Figure 6, so for high-speed signal transfer, the load resistance must be designed as small as possible within the allowable rating range.

However, when the load resistance is minimized, the transistor may not become completely ON and the output signal may be unstable unless the input current  $I_F$  and output current  $I_C$  are determined making sufficient allowance for factors such as the CTR specification range, the temperature characteristics, and the change over time.

Some examples of these characteristics are introduced below.

Figure 7 shows an example of the variation in the response time according to the ambient temperature (TA).

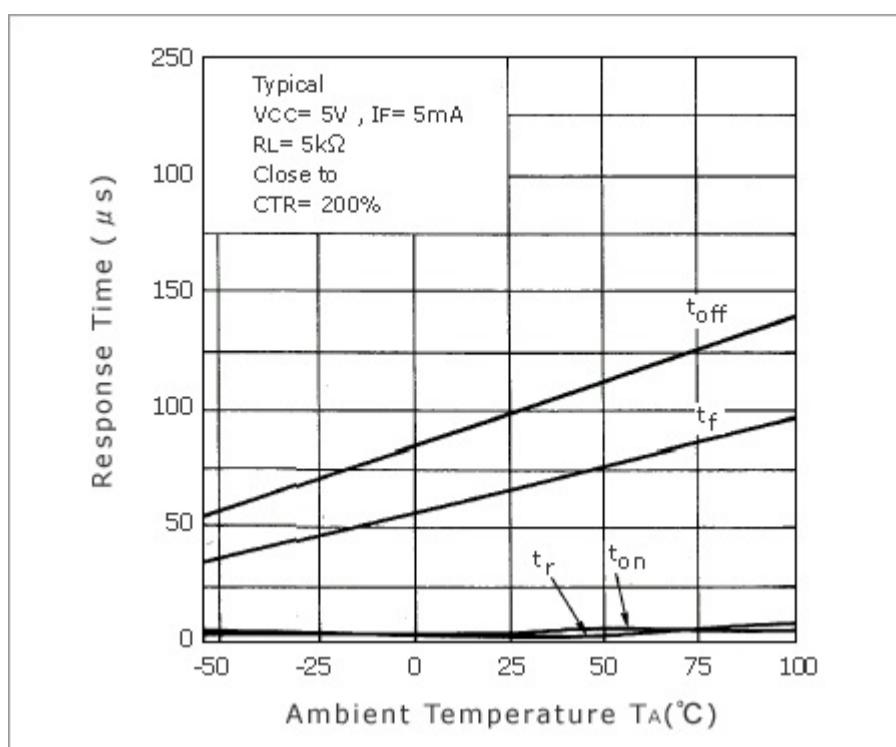
<sup>3</sup>LED luminous efficiency

Figure 8 shows an example of the variation in the response time according to the input current ( $I_F$ ).

Figure 9 shows an example of the variation in the response time according to the power supply current ( $V_{CC}$ ).

### 32.1.3. Izolační parametry otronu

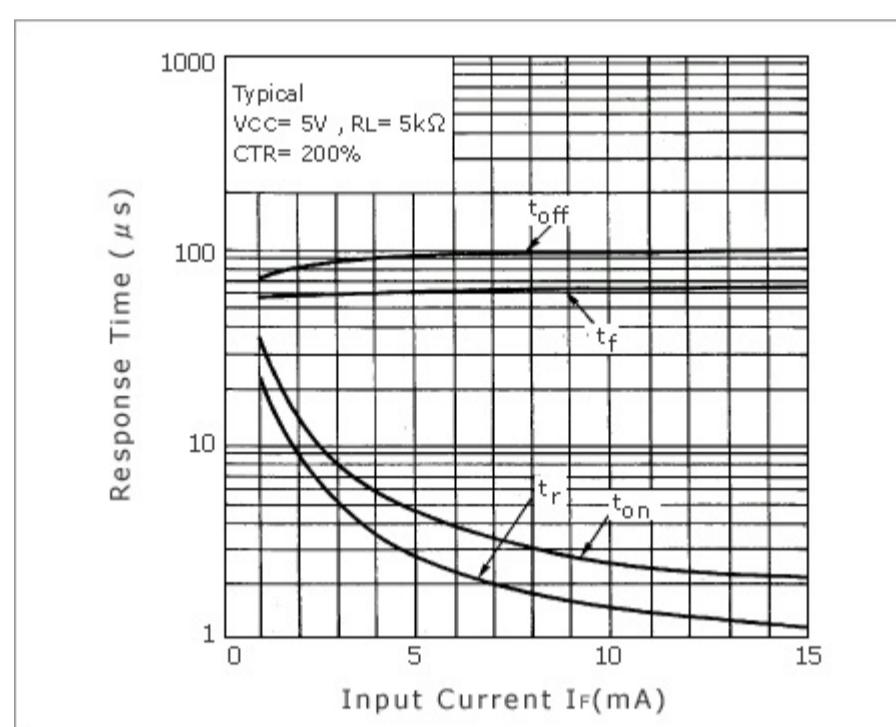
V mnoha aplikacích je na izolační bariéry, kladen jen požadavek na kvalitní galvanické oddělení. Galvanické oddělení je obvykle efektivním prostředkem, jak



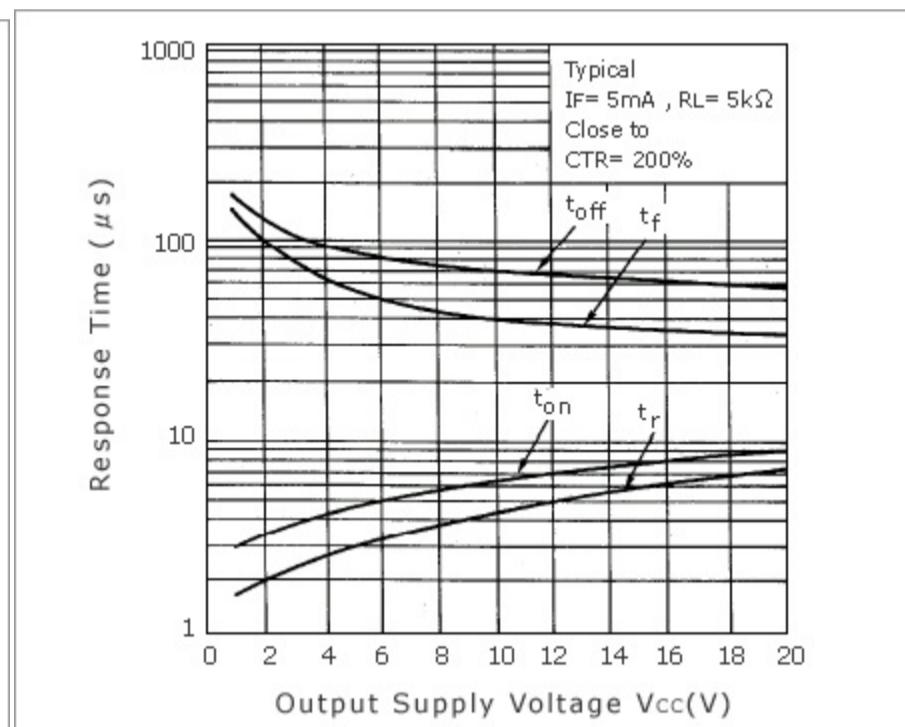
Obrázek 32.1.7.: \*\*\*

## References

- [VZ01] J. Vobecký and V. Záhlava. *Elektronika součástky a obvody, principy a příklady*. 2. vydání. Praha: Grada Publishing, spol. s.r.o., 2001, p. 192. ISBN: 80-7169-884-9 (cit. on p. 149).



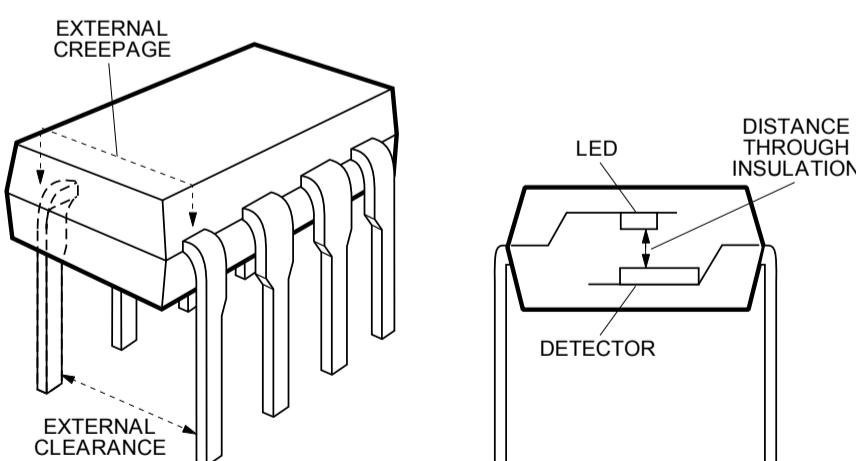
(a) Response Time vs. IF Characteristics



(b) Response Time vs. IF Characteristics

Obrázek 32.1.8.: Závislost CTR na provozní době

potlačit šíření rušení mezi systémy, neboť jednoduše dokážeme přerušit zemní a jiné impedanční smyčky v obvodě. Kvalita tohoto oddělení je pak závislá na velikostech parazitních kapacit mezi vstupem a výstupem optoelektronického prvku. V těchto obvodech je optoelektronických vazebních prvků použito ačkoliv, oddělované signály mají stejný vztažný potenciál (např. GND).



Obrázek 32.1.9.: K pojmu external creepage a clearance



**Část XII.**

**Senzory a akční členy**



# 33. Snímače tepelných veličin

## Obsah

33.1. Základní pojmy . . . . .	155
33.1.1. Elektrické teploměry . . . . .	155
33.1.2. Odporové snímače . . . . .	155

## 33.1. Základní pojmy

**Teplota** je charakteristika tepelného stavu hmoty. V obecném významu je to vlastnost předmětů a okolí, kterou je člověk schopen vnímat a přiřadit jí pocity studeného, teplého či horkého. V přírodních a technických vědách a jejich aplikacích je to *skalární intenzivní veličina*, která je vzhledem ke svému pravděpodobnostnímu charakteru vhodná k popisu stavu ustálených makroskopických systémů. Teplota souvisí s kinetickou energií čistic látky.

Teplota je základní fyzikální veličinou soustavy SI s jednotkou kelvin (K) a vedlejší jednotkou stupňu Celsia (°C). Nejnižší možnou teplotou je teplota absolutní nuly (0 K; -273,15 °C), ke které se lze libovolně přiblížit, avšak nelze jí dosáhnout.

Do této skupiny patří především rozsáhlá část snímačů teploty. Z hlediska měřených veličin můžeme provést následující rozdělení.

### 1. Snímače teploty

#### a) Snímače pro dotykové měření

- elektrické
  - odporové kovové
  - odporové polovodičové
  - termoelektrické
  - polovodičové
- dilatační
- termoelektrické
- tlakové
- speciální

#### b) Snímače pro bezdotykové měření

- monochromatické pyrometry
- pásmové pyrometry
- radiační pyrometry

### 2. Snímače tepla

### 3. Snímače tepelného toku

#### 33.1.1. Elektrické teploměry

#### 33.1.2. Odporové snímače

Odporové snímače využívají princip změny elektrického odporu vlivem změny teploty. Základním požadavkem kladeným na materiál snímače je co největší a stálý teplotní součinitel odporu a zároveň co největší měrný odpor. Pro tyto účely se používají kovové a polovodičové materiály.

##### 33.1.2.1. Kovové odporové snímače

Jsou to především čisté kovy, které se používají pro realizaci vlastního odporového článku. Požadavkem je, aby nereagovaly s izolačním nebo ochranným krytem. Jakékoli chemické nebo fyzikální vlivy by mohly způsobit nestálost odporu při stálé teplotě. Použitý materiál nemá vykazovat změnu teplotního součinitele odporu s časem (stárnutí) a hysterese. Nejčastěji používanými materiály je *platina, nikl, měď, slitina stříbro-zlato* a další [Zeh83, s. 96].

Platina je výhodná pro velkou chemickou stálost, vysokou teplotou tavení a možností dosažení vysoké čistoty. Pro snímače teploty se používá tzv. fyzikálně čistá platina, jejíž čistota se pohybuje kolem 99,93 až 99,99 % Pt. Měření ukázala, že změny základního odporu u sériově vyráběných přesných teploměru se pohybí kolem  $5 \cdot 10^{-6} R_o$  (což odpovídá 0,001 K), u nejlepších teploměrů je tato hodnota ještě o řád menší. Proto se používá platina pro etalonový teploměr v oblasti teplot -259,34 °C až 630,74 °C.

Závislost odporu na teplotě pro rozsah o až 630 °C se vyjadřuje rovnicí

$$R_\vartheta = R_0(1 + A\vartheta + B\vartheta^2) \quad (33.1.1)$$

kde  $R_0$  je odpor při 0 °C,  $\vartheta$  ... teplota ve °C,  $A$  ... konstanta

( $3,9075 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ),  $B$  ... konstanta ( $-0,575 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ).

V rozmezí od 0 °C do -190 °C se vyjadřuje závislost odporu na teplotě rovnicí

$$R_\vartheta = R_0[1 + A\vartheta + B\vartheta^2 + C(\vartheta - 100)\vartheta^3] \quad (33.1.2)$$

kde  $C$  je konstanta ( $-4 \cdot 10^{12} \text{ } ^\circ\text{C}$ ).

## References

[Zeh83] K. Zehnula. *Snímače neelektrických veličin*. SNTL, 1983, p. 372 (cit. on p. 155).



**Část XIII.**

**Analogové elektronické systémy**



# 34. Počítačová simulace v elektrotechnice

## 34.1. Historie

### Obsah

34.1. Historie .....	159
34.2. Simulace a analýza v programu LTspice IV .....	159

V roce 1971 vytvořil student „University of California“, Berkeley, USA *Larry Nagel* program SPICE1 (SPICE = *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*). Program umožňoval analýzu dějů v obvodech, obsahujících zejména bipolární a unipolární tranzistory. O věrohodnost výsledků bylo usilováno propracovaností modelů i matematických algoritmů řešení rovnic. Uživatel měl navíc možnost rozšiřování sortimentu analyzovaných součástek technikou makromodelů zakladáním tzv. *podobvodů* (*subcircuits*) SPICE. Protože program byl v podstatě volně šířitelný, stal se brzo standardním simulačním nástrojem pro elektrotechnické úlohy. Usilovně se pracovalo na jeho zdokonalování.

V roce 1975 byla představena verze SPICE2 s podstatně vylepšenými modely i numerickými algoritmy. Tato verze byla v průběhu téměř 20 let postupně zdokonalována na Berkeleyské univerzitě až do dnes všeobecně známého standardu SPICE2G.6, který byl v r. 1983 zpřístupněn k volnému používání. Zdrojové texty SPICE1 a SPICE2 byly napsány ve Fortranu. Vzhledem k zvýšenému využívání unixových pracovních stanic padlo v Berkeley rozhodnutí přepsat SPICE2 do jazyka C. Tak začala vznikat verze SPICE3. Dnes je rozšířena verze SPICE3F.2. Oproti SPICE2G.6 se vyznačuje řadou vylepšení, ovšem z různých důvodů došlo k ztrátě zpětné kompatibility se SPICE2G.6.

S růstem výkonnosti počítačů PC byly programy, dosud běžící na výkonnéch pracovních stanicích, přepisovány na programy spustitelné na „PCčkách“. Tak vznikl standard PSpice. Dnes existuje více simulačních programů, které využívají v podstatě tři ne zcela kompatibilní standardy: SPICE2, SPICE3, PSPICE. Všechny lze rozdělit na tzv. „*Spice-like*“ a „*Spice-compatible*“ simulátory.

Označení „*Spice-like*“ znamená, že simulátor je schopen generovat podobné výsledky analýzy jako SPICE, avšak nemusí být schopen číst standardní vstupní soubory SPICE. Typickými příklady jsou staré verze programů Micro-Cap nebo TINA, program apod. Termínem „*Spice-compatible*“ se označují simulační programy, které dokáží číst standardní vstupní soubory SPICE, provádět klasické SPICE analýzy, a generovat výsledky v standardním SPICE2G.6 tvaru. Ze současných programů jsou to například PSpice, HSpice (standard SPICE3), WINSpice (standard SPICE3), MicroCap od verze IV, Multisim, LTspice (standard SPICE3) a další.

Kromě toho existují programy pro simulaci obvodů, které nemají s výše uvedenými skupinami programů mnoho společného. Jedná se zejména o jednoúčelové programy, specializované na analýzu obvodů, které nelze realizovat programy typu SPICE. Programy typu „*SPICE-compatible*“ jsou široce využívány mimo jiné proto, že umožňují neomezené rozšiřování sortimentu modelovaných součástek o nové typy, jejichž modely se průběžně objevují na webu a následně i v inovovaných knihovnách nových verzí programů. Na akademických pracovištích i v průmyslu je oblíbeným produktem OrcadPSpice.[Bio05, s. 10]

## 34.2. Simulace a analýza v programu LTspice IV



# 35. Zesilovače

## Obsah

<b>35.1. Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače . . . . .</b>	<b>161</b>
35.1.1. Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru . . . . .	161

V této kapitole se budeme zabývat rozbory vlastností základních obvodů a jejich účelným spojováním do funkčních bloků určených pro zesilování signálů. [NU01, p. 101]

## 35.1. Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače

Přesný výpočet tranzistorového zesilovače vychází z určení dvojbranových parametrů tranzistoru a pokračuje sestavením maticy obvodu a řešením této matice. Při použití vybraných rovnic matematických modelů pro programy SPICE lze dojít ke zjednodušenému řešení, ve kterém se některé parametry zanedbají a sestavené náhradní schéma pak řešit libovolnou metodou. Přesto dostaneme výsledky s přesností, která pro obvyklé technické řešení postačuje.

### 35.1.1. Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru

Převodní charakteristika udává závislost výstupního proudu na vstupním napětí. Pro zapojení SE představuje převodní charakteristiku exponenciální závislost kolektorového proudu na napětí mezi bází a emitorem. Strmost je dána derivací funkce (tečnou) v daném pracovním bodě a odpovídá parametru  $y_{21}$ .



# 36. Operační zesilovače

## Obsah

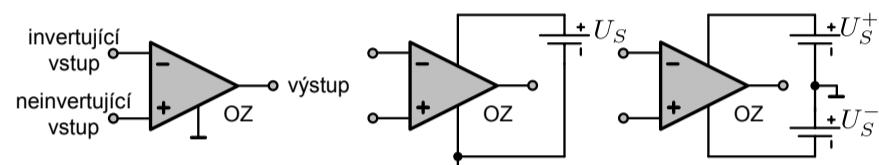
36.1. Úvod . . . . .	163
36.2. Parametry operačního zesilovače . . . . .	163
36.2.1. Lineární parametry a lineární model . . . . .	163
36.2.2. Nelineární parametry . . . . .	163
36.3. Ideální operační obvod . . . . .	164
36.3.1. Paralelní operační obvod . . . . .	164
36.3.2. Sériový operační obvod . . . . .	164
36.3.3. Složený operační obvod . . . . .	164

## 36.1. Úvod

Operační zesilovače (OZ, aj: opamp) původně vznikly jako složité elektronické obvody pro náročné použití při zpracování analogových (spojitě se měnících) stejnosměrných a nízkofrekvenčních střídavých signálů v analogových počítačích. Moderní polovodičová technologie umožnila vytvoření OZ v podobě levných integrovaných obvodů s malým počtem vývodů, které mají nepatrnou spotřebu, jsou odolné proti přetížení a umožňují jednoduše realizovat nejrůznější elektronická zařízení.

Svůj název získaly z dob *analogových počítačů*, ve kterých se používaly k realizaci matematických operací. Tyto integrované obvody se svými vlastnostmi blíží *ideálnímu zesilovačům napětí*. Jejich zesílení bez vnější zpětné vazby se blíží nekonečnu ( $10^7$ ). Vstupní odpor je velmi velký ( $10^4\Omega$ ) a výstupní odpor je malý ( $10\Omega$ ). Kmitočtový rozsah sahá od stejnosměrného signálu do desítek megahertzů. Vlastní šum a zkreslení zesilovače jsou rovněž malé. V dnešním pojetí je možné vymezit operační zesilovač jako **stejnosměrný zesilovač** s velkým zesílením a malým vlastním rušením, schopný stabilní činnosti v uzavřené zpětnovazební smyčce [Doso5, s. 5].

Směr signálového toku operačním zesilovačem (dále je OZ) od vstupu k výstupu je vyznačen trojúhelníkovým tvarem jeho symbolické značky na obr. 36.1.1.



Obrázek 36.1.1.: Symbolická značka OP s vyznačenými signálovými svorkami (a) a skutečná realizace zemní svorky (b, c)

### Shrnutí

1. Operační zesilovač má čtyři signálové svorky, i když se často kreslí jen tři - oba vstupy a výstup. Čtvrtou signálovou svorkou je zem.
2. Souhlasné napětí  $u_{CM}$  je totožné s napětím jeho neinvertujícího vstupu  $u^+$ .
3. Ideální operační zesilovač má za všech okolností nulové diferenční vstupní napětí a nulové vstupní proudy.

## 36.2. Parametry operačního zesilovače

Ideální operační zesilovač je nedosažitelná abstrakce. K posouzení kvality skutečného operačního zesilovače slouží řada funkčních parametrů jako soubor dat, která lze zjistit měřením na svorkách.

Operační zesilovač, jako každý aktivní elektronický obvod, je obvod nelineární. Funkční charakteristiky OZ však připouštějí linearizaci bez přílišného odklonu od skutečnosti. Odpovídající kvazilineární parametry jsou podkladem lineárního modelu OZ. Ostatní parametry jsou podstatně nelinearity, které tvoří meze jeho lineární oblasti.

### 36.2.1. Lineární parametry a lineární model

Obr. 36.2.1 ukazuje úplný *lineární model* operačního zesilovače. Se zřetelem k pozdější analýze chyb operačního obvodu je vhodné rozdělit znázorněné lineární parametry na **aditivní** a **multiplikativní**.

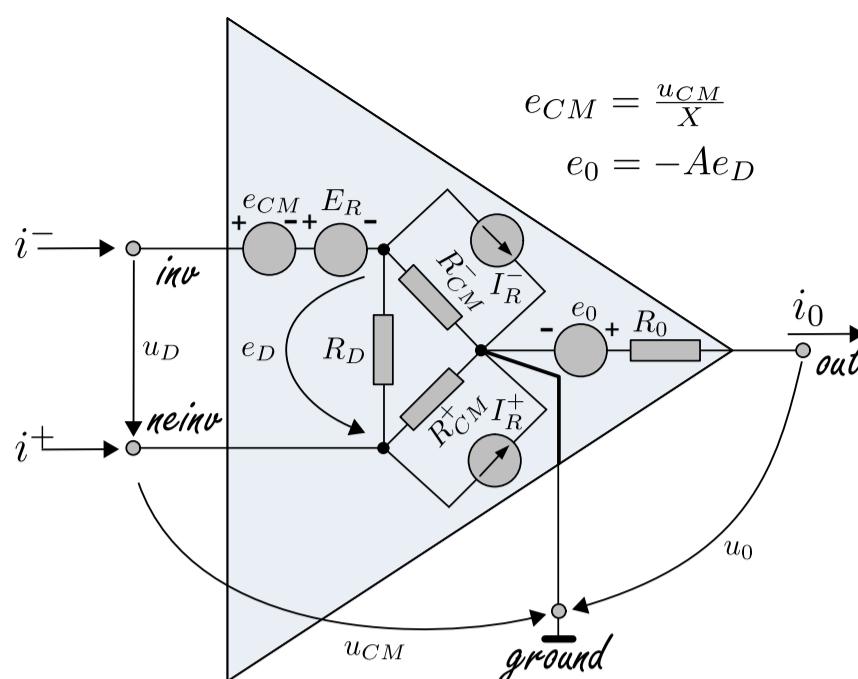
- Aditivní parametry zahrnují náhradní rušivé zdroje náhodných fluktuací:  $E_R$ ,  $I_R^-$ ,  $I_R^+$ , které způsobují aditivní chyby operačního obvodu nezávislé na jeho signálovém vybuzení.
- Multiplikativní parametry představované čtyřmi odpory  $R_D$ ,  $R_{CM}^-$ ,  $R_{CM}^+$ ,  $R_0$  a dvěma řidicími konstantami  $-A$ ,  $1/X$  závislých generátorů, vystihují pasivní a přenosové vlastnosti OZ způsobují multiplikativní chyby operačních obvodů úměrné jeho signálovému vybuzení.

Vnitřní, na svorkách neměřitelný napěťový úbytek  $e_D$  na odporu  $R_D$  zastává v tomto modelu vazbu mezi vstupem a výstupem.

Při práci s proměnnými signály v časové nebo frekvenční oblasti se význam použitých symbolů vhodně rozšíří na impedance, operátorové přenosy apod.

### 36.2.2. Nelineární parametry

Chyby, které provázejí approximaci skutečného operačního zesilovače lineárním modelem, se zvětšují se vstupním a výstupním vybuzením. To se týká zejména linearizace převodní charakteristiky napřízdrobu  $u_0(u_D)$  výrazem  $-A(u_D - E_R -$



Obrázek 36.2.1.: Lineární model operačního zesilovače

$e_{CM}$ ), výstupní charakteristiky  $u_0(i_0)$  výrazem  $e_0 = R_0 i_0$  a vstupní charakteristiky  $e_{CM}(u_{CM})$  výrazem  $u_{CM}/X$ . Skutečný průběh každé z těchto charakteristik se vyznačuje velmi ostrým kolenem, při jehož překročení ztrácejí lineární parametry smysl. Signálové vybuzení, které přísluší tomuto kolenu, tak vymezuje dosi přesně oblast lineárního chování [DOS05, s. 29].

Třem svorkovým proměnným  $u_{CM}, u_O, i_0$  přísluší tři statické nonlinearity (omezení rozkmitu) a tři dynamické nonlinearity (omezení rychlosti)

### 36.3. Ideální operační obvod

#### 36.3.1. Paralelní operační obvod

Napěťový invertor ukazuje, že vstupní signálový proud může být generován také synteticky, kombinací napěťového signálového zdroje a sériového rezistoru. Takovým způsobem vytvořený napěťový invertor na obr. \* je jedním z nejčastějších operačních obvodů.

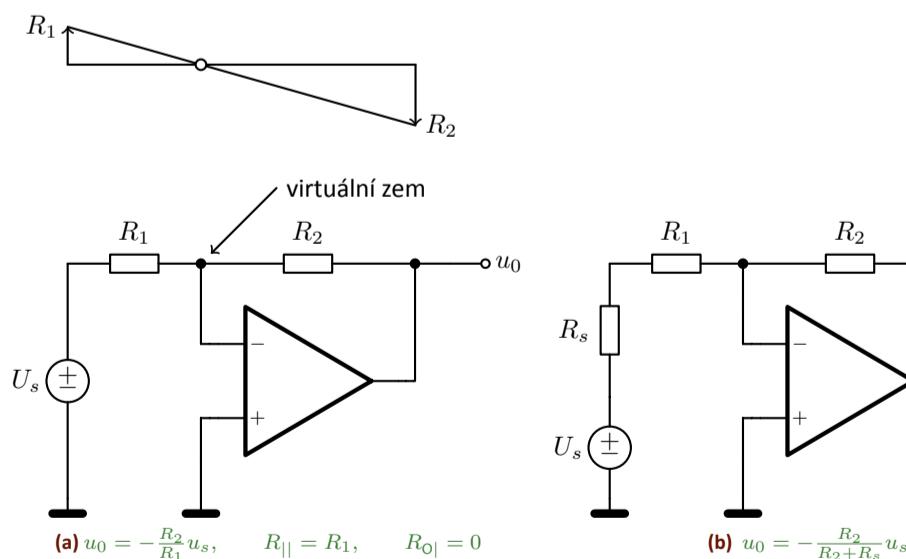
Vstupní napětí  $u_s$  je celé vloženo na rezistor  $R_1$  (jeho pravý konec je virtuálně uzemněn) a vyvolává ekvivalentní vstupní proud  $\frac{u_s}{R_1}$ . Tento přítékající proud je kompenzován proudem  $-\frac{u_0}{R_2}$  odsávaným přes zpětnovazební rezistor  $R_2$  do výstupu operačního zesilovače

$$\frac{u_s}{R_1} = -\frac{u_0}{R_2}.$$

Ideální operační rovnice

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1}u_s. \quad (36.3.1)$$

Vyjadřuje úměrnost signálových napětí  $-u_0$  a  $u_s$  velikostem přilehlých rezistorů  $R_2$  a  $R_1$ . Pro snadnější zapamatování se nabízí představa dvouramenné páky s délkami ramen  $R_1$  a  $R_2$ , otočné v bodě odpovídajícímu virtuální zemi, která přenáší výchylku  $u_s$  levého konce na výchylku  $u_0$  pravého konce v opačné polaritě.



Obrázek 36.3.1.: Napěťový invertor. Jeho mechanickou analogií je dvouramenná páka (a). Přítomnost vnitřního odporu signálového zdroje  $R_s$  v operační rovnici je důsledkem konečného vstupního odporu  $R_{||} = R_1$  (b).

#### Zesílení napěťového invertoru

$$G_i = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (36.3.2)$$

je záporné a nastavitelné v širokých mezích od 0 do  $\infty$  výběrem rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ . Zvláštním případem je jednotkový invertor se stejnými rezistory  $R_1 = R_2$ , který prostě inverteje polaritu vstupního napětí:

$$u_0 = -u_s, \quad G_i = -1.$$

Výstupní odpor napěťového invertoru je ideálně nulový. Jeho vstupní odpor však ztrácí onen vyhnanění charakter typický pro kanonické operační obvody a nabývá indiferentní velikosti

$$R_{||} = R_1, \quad (36.3.3)$$

rovné velikosti virtuálně uzemněného rezistoru  $R_1$ .

Napěťový invertor zatěžuje signálový zdroj (obr. \*). To se projevuje poklesem svorkového napětí signálového zdroje o úbytek na vnitřním odporu  $R_s$ , nebo jinak řečeno, přítomnosti nedefinovaného a nestáleho vnitřního odporu  $R_s$  v operační rovnici invertoru:

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1 + R_s}u_s. \quad (36.3.4)$$

Taková vlastnost se obvykle považuje za nedostatek.

#### 36.3.2. Sériový operační obvod

#### 36.3.3. Složený operační obvod

Operační obvody, které není možné zahrnout do předcházejících dvou velkých tříd, se vyznačují:

- signálovým buzením obou vstupů operačního zesilovače,
- násobnou zpětnou vazbou,
- kombinací záporné a kladné zpětné vazby,
- použitím několika operačních zesilovačů,
- nestandardním zapojením operačního zesilovače.

#### 36.3.3.1. Signálové buzení obou vstupů

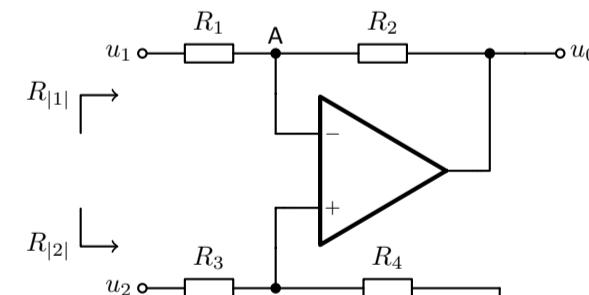
Rozdílový zesilovač na obr. 36.3.2 je lineární operační obvod se dvěma vstupy. Jeho výstupní napětí se najde superpozicí [DOS05, s. 126].

Nechť působí napětí  $u_1$  a napětí  $u_2$  je nulové. Neinvertující vstup operačního zesilovače je uzemněn přes paralelní kombinaci rezistorů  $R_3$  a  $R_4$ . Operační obvod představuje napěťový invertor a první složka výstupního napětí má velikost

$$-\frac{R_2}{R_1}u_1.$$

Nechť působí napětí  $u_2$  a napětí  $u_1$  je nulové. Operační obvod představuje neinvertující zesilovač s předřazeným děličem  $R_3$  a  $R_4$  a druhá složka výstupního napětí má velikost

$$u_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = u_2 \frac{R_2/R_1 + 1}{R_4/R_3 + 1} \cdot \frac{R_4}{R_3}.$$



rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{R_4}{R_3} &= \frac{R_2}{R_1} \\ u_0 &= \frac{R_2}{R_1} (u_2 - u_1) \\ R_{|1|} &= R_1 \\ R_{|2|} &= R_3 + R_4 \\ R_{O|} &= 0 \end{aligned}$$

Obrázek 36.3.2.: Rozdílový zesilovač. Podmínky potlačení souhlasné složky vstupních napětí  $u_1$  a  $u_2$  je poměrové vyvážení zpětnovazebních rezistorů,  $R_4/R_3 = R_2/R_1$ . S ohledem na offset se obvykle volí uplná symetrie, tj.  $R_4 = R_2$  a  $R_3 = R_1$ .

Současně působení obou vstupních napětí ve vyváženém operačním obvodu

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1},$$

přísluší výstupní napětí

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1} (u_2 - u_1), \quad (36.3.5)$$

úměrné rozdílu vstupních napětí bez ohledu na jejich absolutní velikost. Odtud název operačního obvodu. Důvod zařazení napěťového děliče ( $R_3, R_4$ ) je zřejmý - dělič sjednocuje zesílení invertujícího a neinvertujícího vstupu, která se liší absolutně o jednotku.

Dvěma vstupům přísluší dva vstupní odpory. První vstupní odpor

$$R_{|1|} = R_1$$

je roven velikosti rezistoru  $R_1$ , protože vnitřní odpor bodu  $A^1$  je nulový. Druhý vstupní odpor

$$R_{|2|} = R_3 + R_4$$

je roven součtu rezistorů  $R_3$  a  $R_4$ , protože vnitřní odpor zbytku operačního obvodu v bodě  $B$  je nekonečný. Tyto dva vstupní odpory jsou různé, i když jsou obě větve ( $R_1, R_2$ ) a ( $R_3, R_4$ ) stejné.

Vstupní odpory  $R_{|1|}$  a  $R_{|2|}$  přísluší dvěma samostatným uzemněným zdrojům signálových napětí  $u_1$  a  $u_2$  podle 36.3.2. Volnému (izolovanému) signálovému napěťovému zdroji připojenému diferenčně mezi vstupy rozdílového zesilovače, by příslušel diferenční vstupní odpor

$$R_{|D|} = R_1 + R_3,$$

rovný součtové velikosti rezistorů  $R_{|1|}$  a  $R_{|3|}$ , protože body  $A$  a  $B$  jsou virtuálně zkratovány.

---

<sup>1</sup>obdoba virtuální země



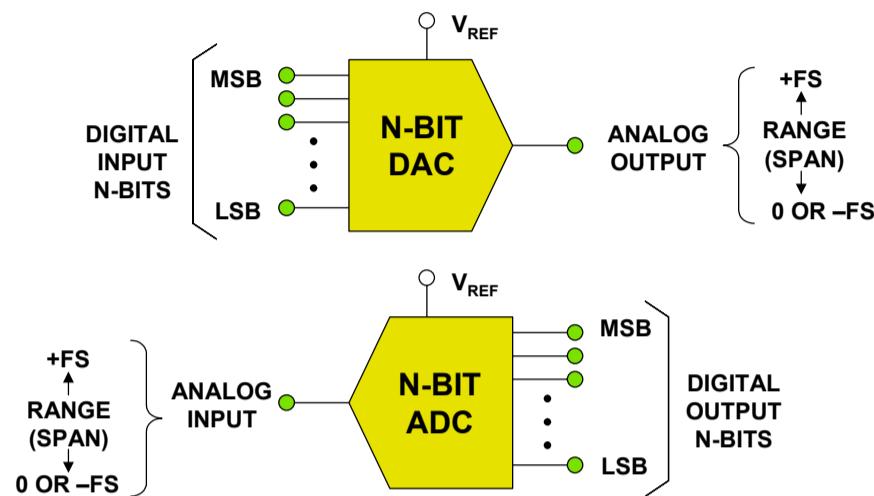
# 37. Konverze mezi digitálním a analogový signálem

## 37.1. Konverze mezi digitálním a analogový signálem

### Obsah

<b>37.1. Konverze mezi digitálním a analogový signálem . . . . .</b>	<b>167</b>
37.1.1. Základní struktura převodníků . . . . .	167
37.1.2. Statické a dynamické parametry převodníků . . . . .	167
37.1.3. Vzorkování . . . . .	168
37.1.4. Kvantování . . . . .	168
37.1.5. Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC . . . . .	169
<b>37.2. Principy A/D převodníků . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>37.3. Převod číslicového signálu na analogový . . . . .</b>	<b>170</b>
37.3.1. DA převodník DACo800 . . . . .	170

Při zpracování analogového signálu je jednou z důležitých funkcí převod tohoto signálu z analogové podoby do číslicové a naopak. Proto jsou analogově-číslicové převodníky resp. číslicově-analogové převodníky (ADC - Analog-to-Digital Converter), (DAC - Digital-to-Analog Converter) velmi důležitými prvky jakéhokoli systému zpracovávajícího signál [Haz+10, s. 11]. Na obrázku 37.1.1 je definováno rozhraní obou typů převodníku.



Obrázek 37.1.1.: Definice rozhraní bloku analogově-číslicového (ADC) a číslicově-analogového (DAC) převodníku

**Analogově-číslicové převodníky** (Analog-to-Digital Converters) slouží k převedení analogového signálu na signál číslicový. Pro A/D převodník má analogová stupnice vstupního signálu délku FS (Full scale), udávanou např. ve voltech. Stupnice číslicového signálu pak vyznačuje diskrétní hodnoty výstupu, které převodník generuje při převodu analogového signálu [NU01, s. 202].

**Číslicově-analogové převodníky** (Digital-to-Analog Converters) slouží k opačnému procesu, tedy k převedení číslicového signálu na signál analogový, což by šlo realizovat pomocí lineárního digitálního potenciometru a připojeného zdroje referenčního napětí na jeho vstupu [NU01, s. 208]. Pro N-bitové binární slovo by musel mít  $n - 1$  rezistorů a  $n$  resp.  $2n - 1$  spínačů. To je monoliticky téměř nerealizovatelné již pro osmi- a vícebitové slovo. Řešení převodníků proto musí být mnohem úspornější, i když úspory budou vykoupeny jinými nevhodnami, případně omezeními pro jejich použití.

### 37.1.1. Základní struktura převodníků

Obě skupiny převodníků mohou typicky obsahovat komparátory, číslicové obvody, spínače, integrátory, vzorkovací obvody a/nebo pasivní součástky. Nezbytnou a důležitou součástí je i přesný zdroj referenčního napětí. V mnoha případech pak také platí, že DAC je jednou z částí ADC.

Analogově číslicový převod můžeme pomyslně rozložit do tří etap [ŠS10].

1. Převod signálu se spojitým časem na signál s diskrétním časem. Tomuto převodu říkáme vzorkování.
2. Kvantování vzorku s cílem vyjádřit vzorky konečnou množinou čísel. Tento krok je provázen vznikem tzv. kvantovacího šumu. Uvedený jev souvisí s nelineárním zkreslením známým z teorie obvodů.
3. Kódování spočívající zpravidla v binárním vyjádření čísel představujících velikost vzorku.

### 37.1.2. Statické a dynamické parametry převodníků

Statické parametry převodníků jsou určovány pomocí *převodní charakteristiky*, zatímco dynamické vlastnosti se vyhodnocují z kmitočtového spektra převodníku [Haz+10, s. 11].

- rozsah,
- integrální a diferenciální nelinearity (*integral - INL, differential - DNL nonlinearity*),
- rozlišení převodníku (*resolution*),
- přesnost (*accuracy*),

- chyba monotónnosti,
- chyba nastavení nuly (*offset error*),
- hystereze a další.

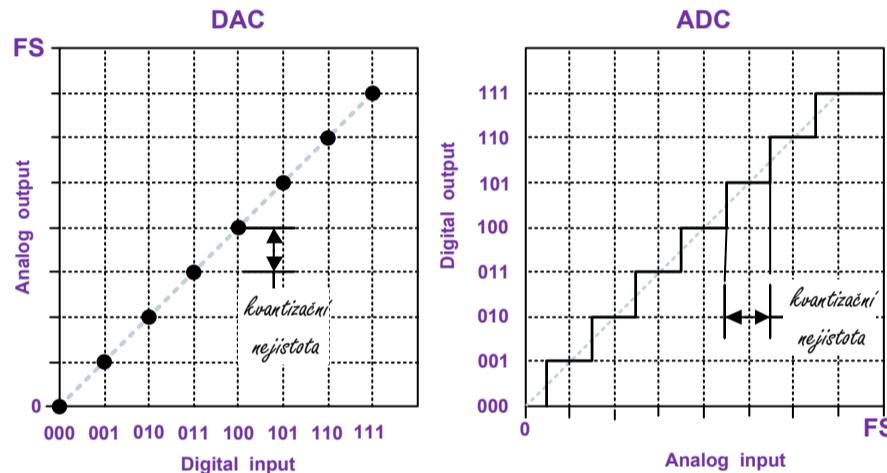
K hlavním dynamickým parametrům patří

- odstup signál - šum (*signal to noise ratio - SNR*) kap. 37.1.5.1,
- efektivní počet bitů (*effective number of bits - ENOB*),
- harmonické zkreslení (*total harmonic distortion - THD*),
- odstup signál-šum a zkreslení (*signal to noise and distortion - SINAD*),
- dynamický rozsah bez parazitních složek (*spurious free dynamic range - SFDR*),
- šum - vrcholový, efektivní (*noise - peak, rms*),
- doba přepnutí a ustálení.

### 37.1.3. Vzorkování

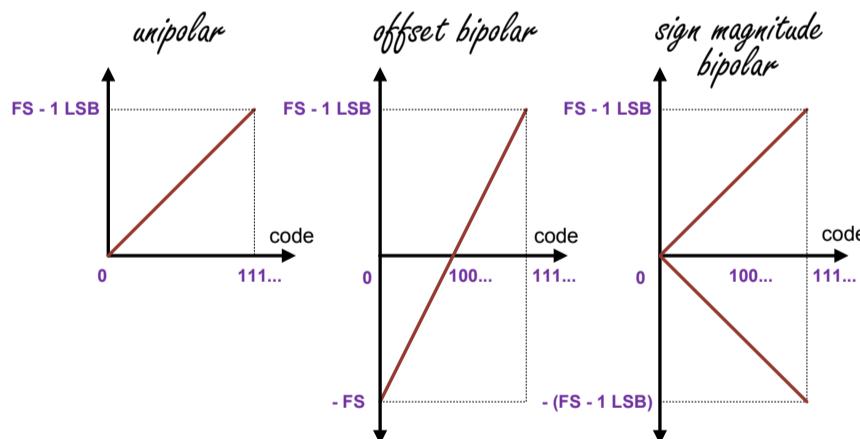
#### 37.1.4. Kvantování

Pro přechod od časově spojitého signálu se spojítou množinou hodnot k číslicovému signálu, je nutné provést (výškové) kvantování, tj. kvantování hodnot signálu, které je patrné z obrázku 37.1.4. Je zřejmé, že mapování spojitého intervalu vstupních hodnot na diskrétní hodnoty digitálního výstupu způsobí, že každá hodnota digitálního výstupu platí pro vstupní signál měnící se v určitém podintervalu. Délka podintervalu, pro který platí jedna hodnota digitálního výstupu se nazývá **kvantizační krok převodníku - Q**, jenž je roven bitu s nejnižší váhou - LSB.



Obrázek 37.1.2.: Ideální přenosová funkce 3bitového unipolárního AD a DA převodníku. V případě DA převodníku je přenosová funkce tvořena osmi body, nikoliv čárou.

Převodní charakteristika DA i AD převodníku je znázorněna na obr. 37.1.2. Analogový signál je spojitý a číslicový signál vyjadřuje jen jeho vybrané diskrétní hodnoty. Proto je převodní charakteristika nespojitá. Naproti tomu digitální vstup vytvoří na výstupu pouze omezený počet hodnot výstupního signálu.



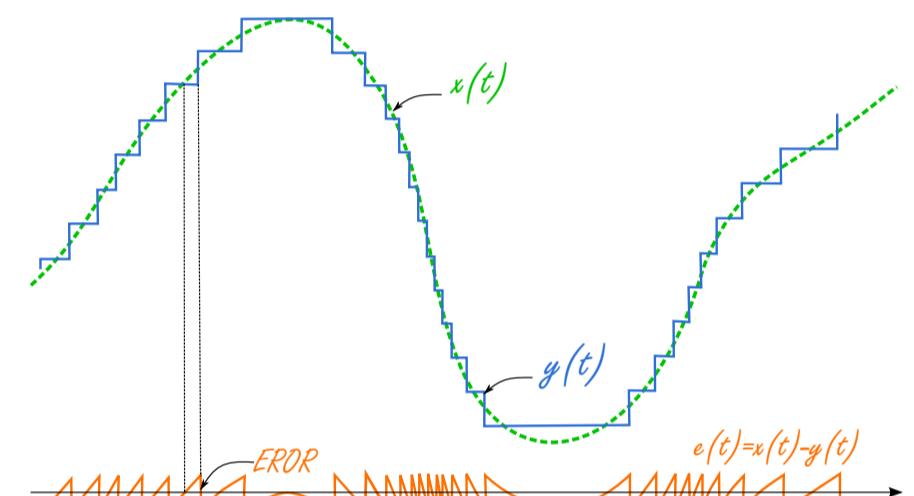
Obrázek 37.1.3.: Unipolární a bipolární převodníky [Keso4]

Počet úrovní AD převodníku, do kterého je rozdělen rozsah vstupního analogového signálu definuje **rozlišovací schopnost ADC** a lze ji vyjádřit různými způsoby, jak ukazuje tabulka 37.1.1 pro 2 až 24bitového převodníku.

Kvantizační chyba, ježíž průběh je na obr. 37.1.4, v dynamickém režimu, tj. při časových změnách vstupní analogové veličiny, způsobuje **kvantizační šum**. Ten lze pozorovat např. tehdy, kdy čísla získaná z převodníku A/D jsou vedena do převodníku D/A a jím je analogový signál rekonstruován. Rekonstruovaný signál se jeví jako signál původní, avšak se superponovaným rušivým signálem. Vzájemným

Rozlišení N	$2^N$	Napětí 10V FS	ppm FS	% FS	dB FS
2-bit	4	2.5 V	250000	25	-12
4-bit	16	625 mV	62500	6,25	-24
6-bit	64	156 mV	15625	1,56	-36
8-bit	256	39,1 mV	3906	0,39	-48
10-bit	1024	9,77 mV	977	0,098	-60
12-bit	4096	2,44 mV	244	0,024	-72
14-bit	16384	610 $\mu$ V	61	0,061	-84
16-bit	65536	153 $\mu$ V	15	0,0015	-96
18-bit	262144	38 $\mu$	4	0,0004	-108
20-bit	1048576	9,54 $\mu$	1	0,0001	-120
22-bit	4194304	2,38 $\mu$	0,24	0,000024	-132
24-bit	16777216	596 nV	0,06	0,000006	-144

Tabulka 37.1.1.: Porovnání rozlišovací schopnosti AD převodníku s různou délou výstupního slova. Z tabulky vyplývá, že kvantizační krok 24bitového ADC odpovídá velikosti úbytku na rezistoru  $2, 2k\Omega$  při teplotě  $25^\circ\text{C}$ , který vzniká vlivem tepelného šumu (viz Johnsonův šum) jenž je při šířce pásmá 10 kHz roven 600 nV.



Obrázek 37.1.4.: Kvantizační chyba je rovna rozdílu původního  $x(t)$  a kvantovaného signálu v úrovni  $y(t)$  [WRB48]

odečtení rekonstruovaného a původního signálu, dostaneme samostatný rušivý signál, který lze podrobit analýze. Pokud je vzorkovací signál nekorelovaný se vzorkovaným signálem, je možno kvantizační šum považovat za náhodný. Vztah mezi původním signálem a signálem degradovaným kvantizačním šumem vyjadřuje parametr - SNR.

- SNR - Signal to Noise Ratio: poměr signálu k šumu

$$SNR = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{(y(t) - x(t))^2\}} \quad (37.1.1)$$

- $E\{\cdot\}$  ... operátor průměrování
- $x(t)$  ... vstupní analogový signál
- $y(t)$  ... rekonstruovaný kvantovaný signál

Kvantizační chybu lze approximovat nekorelovaným pilovým průběhem s amplitudou špička-špička rovnou kvantizačnímu kroku  $Q$ . Ačkoliv takto provedená analýza (viz kapitola 37.1.5) není přesná, v běžných aplikacích zcela postačuje.

Na obr. 37.1.5 je kvantování realizováno tak, že je zajištěna minimální chyba kvantování, tj. převodník provádí operaci zaokrouhlování na nejbližší hodnotu. To znamená, že např. číslo jedna bude generováno vstupem v intervalu  $1 \pm 0,5V$ , je-li FS rovno 8V a máme-li k disposicí osm kvantizačních úrovní.

Převodník, který má v celém intervalu předváděných vstupních hodnot konstantní kvantizační krok, se též označuje jako lineární kvantizér. Převodník s přirozeným binárním kódem o  $N$  bitech je schopen na analogové straně reprezentovat  $n-1$  nenulových úrovní analogové veličiny, přičemž platí

$$n = 2^N \quad (37.1.2)$$

A jede-li o lineární  $N$ -bitový kvantizér, můžeme vyjádřit kvantizační krok vztahem

$$Q = \frac{FS}{n} = \frac{FS}{2^N} \quad (37.1.3)$$

Nejvyšší úroveň vstupní veličiny  $A$  pak bude

$$A_{max} = \frac{n-1}{n} + \frac{Q}{2} \quad (37.1.4)$$

V sekvenci bitů binárního čísla generovaného převodníkem se zpravidla první bit, který představuje nejvyšší binární řad, označuje MSB (*Most Significant Bit*), tedy nejvýznamnější bit. Poslední bit, tj. bit v poloze nejnižšího rádu, má označení LSB (*Least Significant Bit*), tedy nejméně významný bit. Je zřejmé, že LSB jednoznačně určuje základní krok na ose číslicového signálu. Dojde-li ke změně pouze v hodnotě LSB, změní se analogová hodnota právě o kvantizační krok. LSB tedy na analogové straně určuje rozlišovací schopnost převodníku. Např. osmibitový převodník má rozlišovací schopnost FS/256, tj. přibližně 0,4%. Je-li FS = 2V, musí rozlišit 8 mV [NU01, s. 203].

Vzhledem k diskretizaci hodnot původního analogového signálu při převodu A/D dochází ke *kvantizačním chybám*. Je-li např. vstupní veličinou okamžité napětí  $u_a$  a této hodnotě odpovídá na výstupu číslo  $D$ , pak kvantizační chybu  $\varepsilon_q$  lze vyjádřit takto:

$$\varepsilon_q = u_a - FS \frac{D}{2^N} \quad (37.1.5)$$

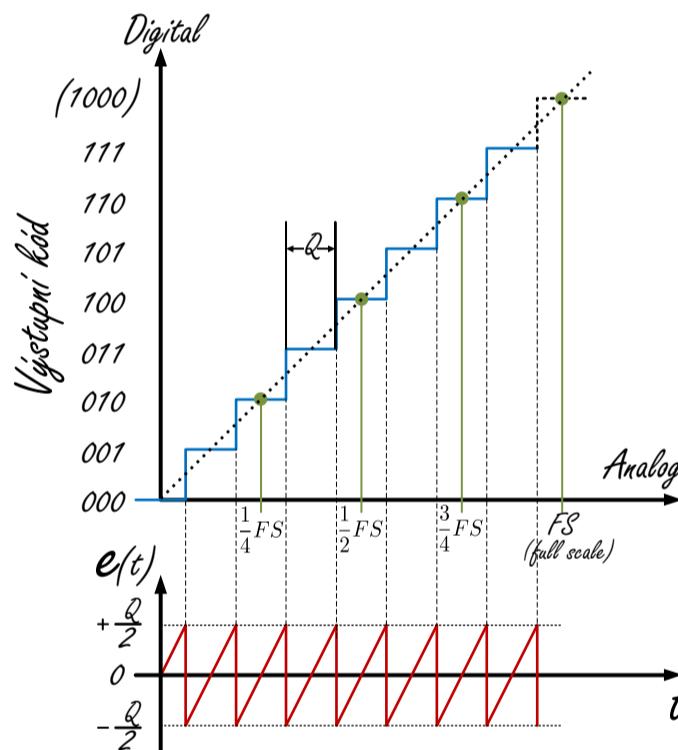
### 37.1.5. Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC

V předchozí kapitole byla nastíněna možnost approximace kvantizační chyby jakéhokoliv AC signálu v časové oblasti (viz 37.1.4) nekorelovaným pilovým průběhem, za cenu určité nepřesnosti vyvážené jednoduším matematickým aparátém.

Vyjděme tedy z převodní charakteristiky ideálního N-bitového převodníku zátižené kvantizační chybou, tak jak je znázorněna na obr. 37.1.5. Z té je patrné, že chyba může v absolutní hodnotě dosáhnout maximálně  $e(t) = \frac{Q}{2}$ , resp.  $\pm \frac{1}{2} LSB$  a v rámci kvantizačním kroku ji lze popsat přímkou se strmostí s:

$$e(t) = st, -\frac{Q}{2s} < t < +\frac{Q}{2s}.$$

Statisticky je pravděpodobnost jejího rozložení  $1/Q$  a je rovnoměrná od  $-\frac{Q}{2}$  do  $+\frac{Q}{2}$ .



Obrázek 37.1.5.: Převodní charakteristika ideálních převodníků a závislost chyby kvantizace na vstupní analogové hodnotě

Z výše uvedeného plyne, že okamžitá hodnota kvantizační chyby  $\varepsilon_q(t) = y(t) - x(t)$  může dosáhnout rozkmitu maximálně  $\pm \frac{Q}{2}$  a jelikož předpokládáme rovnoměrné rozložení hodnot, je hustota pravděpodobnosti amplitud rovna  $\frac{1}{Q}$ .

Kvantizační šum  $\sigma^2$  je definován jako výkon (rozptyl) střídavé složky kvantizační chyby  $\varepsilon_q$  a jeho efektivní hodnotu  $\sigma$  můžeme odvodit pomocí věty o druhém centrálním momentu nebo výpočtem efektivní hodnoty v časové oblasti.

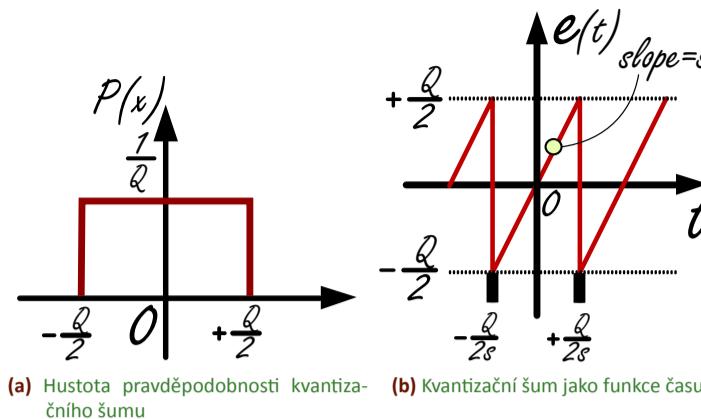
1. V pravděpodobnostním počtu je  $K$ -tý moment definován jako:

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$$

tedy

$$e(t) = \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (x - x_0)^2 p(x) dx = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2}{12}$$

2. V časové oblasti má kvantizační šum pilový průběh viz obr. 37.1.6b. Z



Obrázek 37.1.6.: K odvození efektivní hodnoty kvantizačního šumu

definičního integrálu efektivní hodnoty dostaneme

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (st)^2 dt = \frac{Q^2}{12}.$$

Též můžeme využít znalosti efektivní hodnoty pro průběh tohoto typu:  $\frac{U_m}{\sqrt{3}}$  a dosazením za  $U_m = \frac{Q}{2}$  získáme opět stejný výsledek jako při výpočtu integrálu

Tedy efektivní hodnota kvantizačního šumu ideálního N-bitového převodníku je:

$$e(t) = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (37.1.6)$$

Předpokládejme na vstupu převodníku ustálený harmonický signál o amplitudě  $X$ . Dále předpokládejme, že signál s amplitudou  $X_m$  by pokryl celý rozsah převodníku FS. Pak se dá ze vztahu 37.1.1 vyjádřit odstup signálu od šumu SNR ideálního N-bitového převodníku jako podíl jejich výkonů resp. kvadrátu efektivních hodnot signálu a šumu v decibelech vztahem

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left( \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 \quad (37.1.7)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = 10 \log \left( \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 = 20 \log \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \quad (37.1.8)$$

$$SNR = 1,76 + 6,02N + 20 \log \left( \frac{X}{X_m} \right) \quad (37.1.10)$$

Lze tedy říci, že každý bit navíc v digitálním výstupu A/D převodníku přinese zlepšení odstupu signálu od šumu o 6 dB. Naproti tomu je třeba vědět, že uvedený výraz počítá s harmonickým signálem různého rozkmitu. Při zmenšování amplitudy bude relativní podíl šumu v signálu vyšší. Poměry se také mohou velmi změnit, když signál nebude mít harmonický charakter.

#### 37.1.5.1. Odstup signálu od šumu

Z předchozí kapitoly víme, že SNR je definován jako poměr výkonu signálu k výkonu šumu (výkon =  $ef.hodnota^2$ ). Pro samotný kvantizační šum platí:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left( \frac{\frac{2^N \cdot Q}{2 \cdot \sqrt{2}}}{\frac{Q}{\sqrt{12}}} \right)^2 = N20 \log 2 + 20 \log \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad (37.1.11)$$

$$SNR_{dB} = 6,02 \cdot N + 1,76dB$$

Tato hodnota platí pouze pro ideální převodník pouze s kvantizační chybou, a sinusový signál s rozkmitem přes celý rozsah převodníku. Skutečný převodník má ovšem vlivem dalších chyb SNR menší než SNR určený pouze pro kvantizační šum. Tato hodnota se nazývá SINAD nebo SNDR - Signal-to-Noise and Distortion ratio.

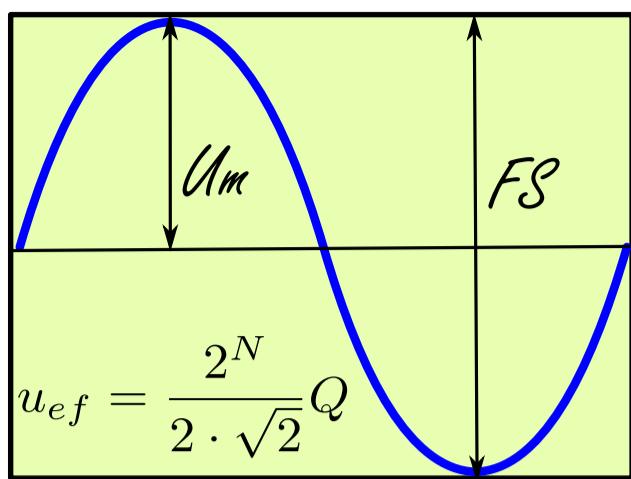
Známe-li SNR skutečného převodníku, můžeme určit počet efektivních bitů  $N_{ef}$  tzn. efektivní rozlišitelnost převodníku. Ten je vždy menší než  $N$ .

$$N_{ef} = \frac{SNR - 1,76}{6,02} \quad (37.1.12)$$

## 37.2. Principy A/D převodníků

Převod analogového signálu na číslo lze uskutečnit několika různými postupy: [NU01]

1. Vstupní signál se porovnává s kvantovanou referenční veličinou a komparátory okamžitě vyhodnotí, který z nich je větší. Přímým výstupním údajem je binární číslicové slovo.



Obrázek 37.1.7

2. Vstupní signál i referenční veličina se v určité časové sekvenci zavádějí do integrátoru a komparátoru na jeho výstupu určuje sekvenci impulsů, vypovídající o hodnotě vstupní analogové veličiny. Informací o vstupní veličině dále přenáší počet impulsu, jejich kmitočet nebo kódovaná sekvence impulsů. Tato informace může být převedena číslicovým blokem (obvykle blokem DSP) na binární číslicové slovo.

Bývá také používáno třídění na převodníky s přímým a nepřímým vyhodnocením analogové veličiny.

- Převodníky s přímým vyhodnocením porovnávají hodnoty analogové veličiny s vybranými kvantizačními úrovněmi současně nebo postupně, a to tak, že každá úroveň má vlastní komparátor. K těmto převodníkům patří *převodníky paralelní a kaskádní*.
  - K nepřímému převodu můžeme využít postupného provolávání vstupní veličiny s vhodnými vzorky referenčního napětí, dodávanými na vstup jednoho komparátoru v pořadí a velikosti řízené logickými obvody. U těchto převodníků je vstupní analogová veličina porovnávaná s výstupní veličinou převodníku D/A, přičemž je číslicový vstup tohoto převodníku měněn tak, aby se obě veličiny k sobě přibližovaly. Pokud se k sobě dostatečně přibliží, je převod ukončen. I zde jsou v podstatě jen dvě jednoduché možnosti přibližování výstup převodníku D/A k určité úrovni vstupní veličiny: buď se přibližování děje se stálým krokem, kdy jde o krovkování po jednotlivých kvantovacích úrovních (*převodníky sledovací*), nebo postupnou approximací (*převodníky approximační*), kdy první krok rozhoduje o hodnotě MSB, další kroky porovnávají binárně zmenšované hodnoty odpovídající jednotlivým binárním řádům s tím, že poslední krok určí hodnotu LSB.
  - Jinou možností nepřímého převodu A/D je převést hodnotu vstupní veličiny na takový parametr pomocného signálu, který se pak dá snadno převést na číslicový údaj. Tímto parametrem je nejčastěji kmitočet, jindy to může být i počet impulzů v určitém časovém intervalu nebo kódovaná sekvence impulzů. U těchto převodníků j kromě komparátoru typickým funkčním blokem integrátor.

### 37.3. Převod číslicového signálu na analogový

Číslicově-analogové převodníky převádějí číslicový signál zpravidla ve formě binárně kódovaného čísla na proud nebo napětí.

$$U_A \equiv D \cdot U_{BEE} \quad I_A \equiv D \cdot I_{BEE} \quad (37.3.1)$$

kde  $U_{REF}$ ,  $I_{REF}$  jsou referenční napětí a proud určující rozsah výstupní veličiny. Je-li referenční napětí konstantní jedná se o klasické převodníky DAC. Při proměnném referenčním napětí se jedná o násobící převodníky MDAC, které realizují násobení časově proměnného referenčního spojitého a vstupního číslicového signálu. Hodnota číslicového signálu  $D$  se vyjadřuje ve dvojkovém nebo dvojkově desítkovém (BCD) kódu. Ve dvojkovém kódu:

$$D_B = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{-i} \quad (37.3.2)$$

*n* je počet bitů dvojkového čísla. Bit  $a_1$  s nejvyšší vahou  $1/2$  se označuje **MSB**, bit  $a_n$  s nejnižší vahou  $2^{-n}$  se označuje **LSB**. Maximální hodnota číslicového signálu  $D_{MAX} = 1 - 2^{-n}$  a proto maximální hodnota výstupní veličiny je vždy o 1 LSB menší, než je rozsah převodníku. Veličina  $2^{-n} \cdot U_{REF}$ , resp.  $2^{-n} \cdot I_{REF}$  se nazývá **kvantum referenčního napětí nebo proudu** a určuje **rozlišitelnost** převodníku. Převodní funkci D/A převodníku můžeme v případě binárního kódu vyjádřit vztahem

$$U_A = U_{REF} \cdot \left( a_n 2^{-n} + a_{n-1} 2^{-(n-1)} + \dots + a_1 2^{-1} \right) \quad (37.3.3)$$

Statické vlastnosti D/A převodníku jsou určeny převodní charakteristikou, která je obvykle lineární (obr. 37.3.1). Převodní charakteristika reálného DA převodníku je zatížena chybou nuly, chybou zisku, integrální a diferenciální nelinearitou a monotónností převodu.

Z převodní charakteristiky lze tedy určit následující parametry převodníku:

- Chybu nuly (posunu)  $\varepsilon_0$

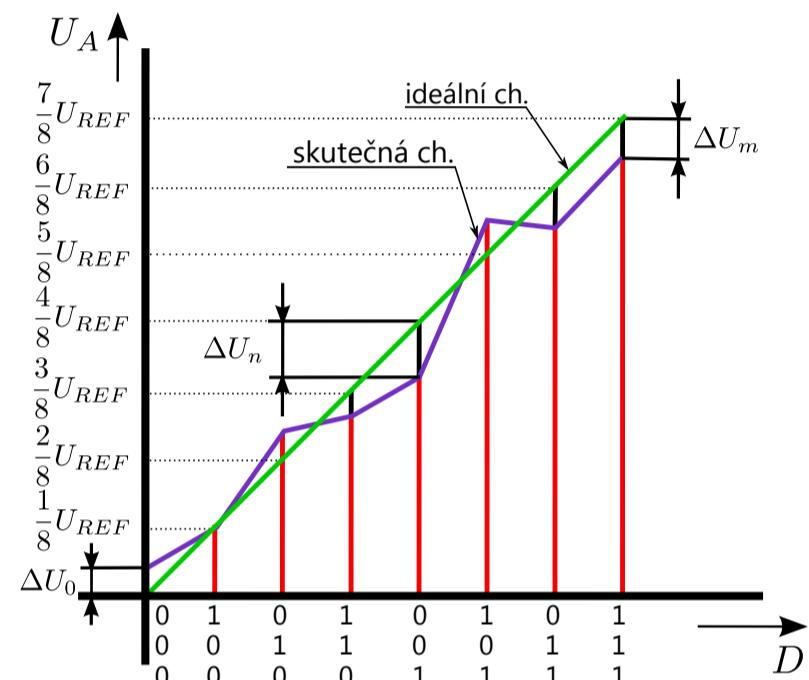
$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta U_0}{U_{REF}} \quad (37.3.4)$$

- Chybu měřítka (zesílení)  $\varepsilon_m$

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta U_m - \Delta U_0}{U_{REF}} \quad (37.3.5)$$

- Integrální nelinearity  $I_{NL}$  jako maximální odchylku výstupního napětí skutečného převodníku od ideální hodnoty v celém rozsahu převodníku

$$I_{NL} = \frac{\max \Delta U_n}{U_{REF}} \quad (37.3.6)$$



Obrázek 37.3.1.: Statická převodní charakteristika 3 bitového DA převodníku

Všechny tyto chyby se vyjadřují buď v procentech jmenovitého rozsahu  $U_{REF}$  převodníku, nebo v jednotkách ideální kvantizační úrovně (kvanta)  $q = 2^{-n} \cdot U_{REF}$ .

Dynamické vlastnosti D/A převodníku jsou charakterizovány **dobou ustálení**  $T_u$  (obr. 37.3.2), potřebnou k ustálení výstupního signálu na jmenovitou hodnotu se zadánou chybou  $\Delta U$  obvykle  $\pm 0.5 LSB$ .

U násobících D/A převodníků se navíc určuje kmitočtový rozsah referenčního napětí kmitočtem  $f_m$ , při kterém poklesne výstupní napětí převodníku o  $3dB$  oproti stejnosměrnému napětí při maximální hodnotě číslicového signálu.

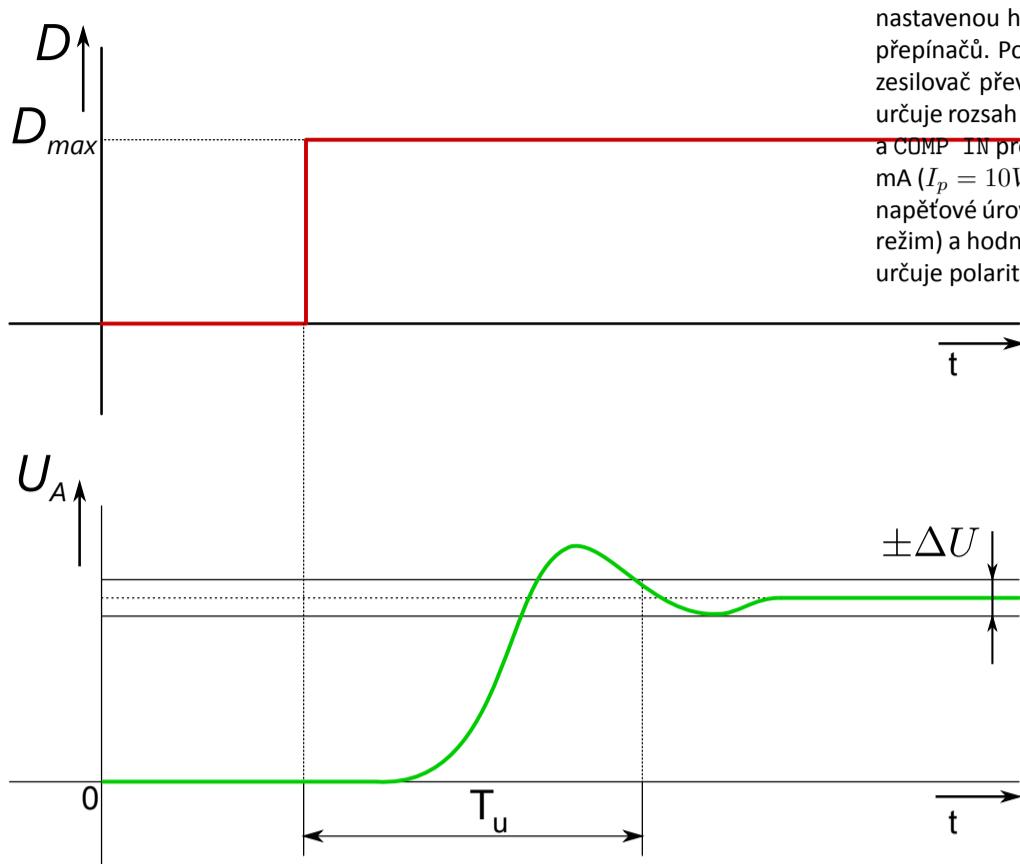
### 37.3.1. DA převodník DAC0800

D/A převodník DAC0800 je velmi rychlý násobící D/A převodník s rozlišením 8 bitů, pracující na principu spínacích proudových zdrojů (viz obr. 37.3.3).

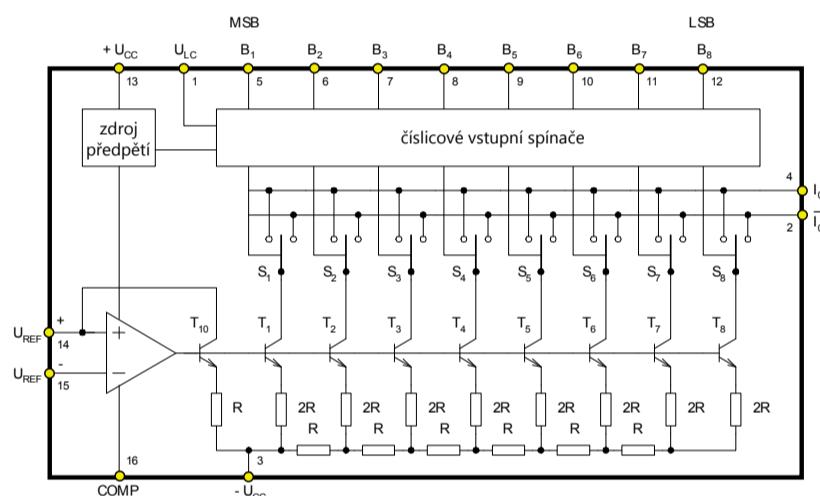
Vstup převodníku je proudový, proudový výstup je řešen jako komplementární. IO v sobě slučuje proudové spínače, váhové odpory a řídící zesilovač. Analogová reference, přesné vnější odpory, korekční kondenzátor a výstupní zesilovač se připojují vně převodníku. Převodník DAC0800 generuje váhové proudy do komplementárních proudových sběrnic  $I_0$  a  $\bar{I}_0$  prostřednictvím spínaných proudových zdrojů s tranzistory  $T_1$  až  $T_8$  a odporovou sítí  $R - 2R$  viz obr. 37.3.3. Při úrovni H na číslicových vstupech  $B_1$  až  $B_8$  připojí spínače  $S_1$  až  $S_8$  příslušné váhové proudy na výstup  $I_0$  a při úrovni L na výstup  $\bar{I}_0$ .

Nezávislost váhových proudu na teplotních změnách zajišťuje referenční zdroj proudu s tranzistorem  $T_{10}$  a zesilovačem Z, ke kterému se připojuje referenční proud o jmenovité hodnotě  $2mA$ . Kondenzátor s kapacitou  $10nF$  připojený mezi vývody 3 a 16 slouží ke kmitočtové kompenzaci zesilovače Z. Číslicové vstupy  $S_1$  až  $S_8$  řídí spínače  $S_1$  až  $S_8$  prostřednictvím převodníku úrovní, přičemž svorkou  $V_{LC}$  (pin 1) lze volit slučitelnost převodníku s obvody TTL, DTL, CMOS atd.

Vstupní referenční proud  $I_{REF}$  je odvozen pomocí vnějšího přesného odporu  $R_{REF}$  ze zdroje referenčního napětí  $U_{REF}$ . Souběh referenčního proudu a plného výstupního proudu  $I_{FS}$  je zachován v rozpětí dvou dekád proměnné unipolární reference a umožňuje použít IO též jako násobící převodník. Výstupní proudy  $I_0$ ,  $\bar{I}_0$  z vysokoimpedančních výstupů se mohou využívat přímo nebo pomocí vnějších odporů, popřípadě pomocí DZ, se mohou převést na napětí. Převodník pracuje

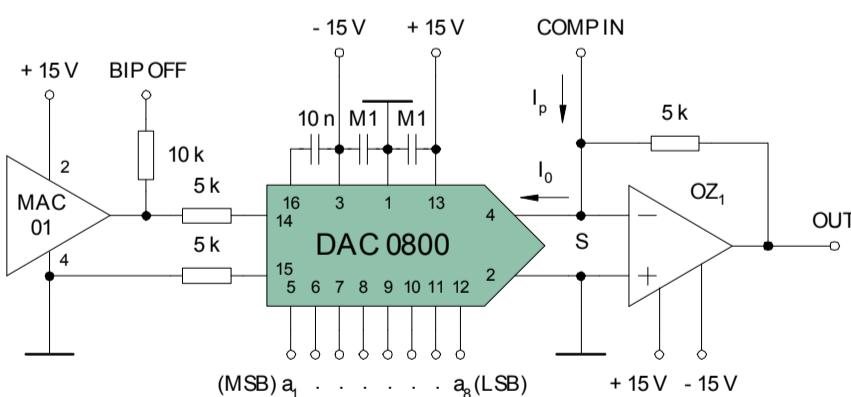


**Obrázek 37.3.2.:** Doba ustálení  $T_a$  DA převodníku. Je to celková doba od změny vstupního kódu do ustálení analogového výstupu s přesností  $\pm \frac{1}{2} LSB$



**Obrázek 37.3.3.: Blokové schéma DA převodníku DACo800**

se vstupním přímým binárním kódem při využití přímého proudového výstupu  $I_0$  nebo se vstupním komplementárním binárním kódem, využije-li se doplňkový proudový výstup  $\bar{I}_0$ . Rozhodovací úroveň číslicových vstupů lze z vnějšku nastavit na potřebnou hodnotu. Proto lze k řízení převodníku DAC0800 použít všechny běžně používané řady log. obvodů.



**Obrázek 37.3.4.: Příklad zapojení převodníku DAC0800**

Příklad zapojení D/A převodníku je na obr. 37.3.4. Obsahuje kromě vlastního D/A převodníku DAC0800 zdroj referenčního napětí MAC01 se jmenovitým referenčním napětím +10 V a invertor se zesilovačem, pracujícím ve funkci převodníku proudu na napětí pro realizaci napěťového výstupu převodníku. Funkce je následující: Napětí +10V z MAC01 je pomocí odporu  $5k\Omega$  převedeno na proud  $I_{REF} = 2mA$ , který je přiveden do kladného referenčního vstupu DAC0800, kde je vynásoben



# 38. Kmitočtové filtry

## Obsah

<b>38.1. Základní vlastnosti kmitočtových filtrů</b>	173
38.1.1. Kmitočtové filtry a jejich použití	173
<b>38.2. Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky</b>	175
38.2.1. Průchod signálu kmitočtovým filtrem a přenosové kmitočtové charakteristiky filtrů	175
<b>38.3. Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů</b>	175
38.3.1. Filtry s přenosovou funkcí 1. rádu	175
38.3.2. Filtry s přenosovou funkcí 2. rádu	175
38.3.3. Přenosové funkce vyšších rádů	175
38.3.4. Citlivost a tolerance přenosových vlastností filtrů	175
<b>38.4. Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. rádu</b>	175
38.4.1. Návrh filtrů RC	175
38.4.2. Návrh filtrů RLC 2. rádu	175
38.4.3. Návrh fázovacích článků RLC 1. a 2. rádu	175
<b>38.5. Filtry RLC vyšších rádů</b>	175
<b>38.6. Filtry ARC 2. rádu</b>	175
38.6.1. Základní principy funkce filtrů ARC	175
38.6.2. Obvody s náhradou cívky	175
38.6.3. Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností	175
38.6.4. Vliv reálných odporů a kondenzátorů	175
<b>38.7. Filtry ARC vyšších rádů</b>	175
<b>38.8. Filtry se spínanými kapacitami</b>	175
<b>38.9. Zvláštní typy a aplikace kmitočtových filtrů</b>	175

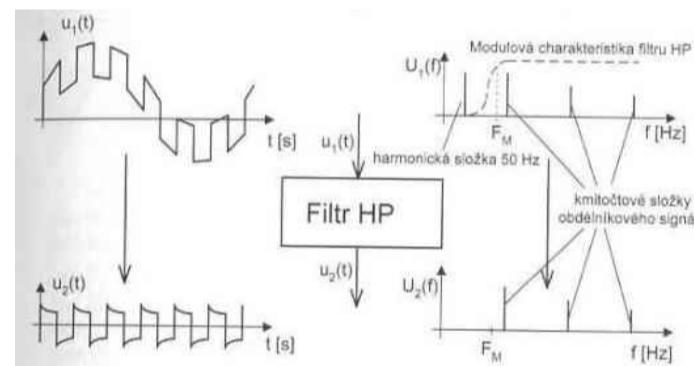
## 38.1. Základní vlastnosti kmitočtových filtrů

### 38.1.1. Kmitočtové filtry a jejich použití

Kmitočtové filtry jsou lineární elektrické obvody, používané v mnoha oblastech elektrotechniky a elektroniky. Jejich hlavním úkolem je výběr (selekce) kmitočtových složek procházejícího signálu podle jejich kmitočtů. Filtry obvykle některé kmitočtové složky signálů propouštějí bez útlumu (oblast se nazývá propustným pásmem), jiné kmitočtové složky potlačují (pásma potlačení, útlumu, nebo nepropustné pásma). Tyto vlastnosti obvykle vyjadřujeme *modulovou (amplitudovou) kmitočtovou charakteristikou* (závislost modulu napěťového přenosu na kmitočtu).

Příklad použití kmitočtového filtru ukazuje názorně obr. 38.1.1. Užitečný obdélníkový signál byl znehodnocen nízkofrekvenční rušivou harmonickou složkou (pronikající např. z napájecí střídavé sítě - kmitočet sítě je nižší, než kmitočty užitečných složek), signál je označen v grafu jako  $u_1(t)$ . Jak je z obrázku vidět, filtr typu horní propust propustil všechny kmitočtové složky s mezním kmitočtem vyšším než  $f_M$  (složky obdélníkového signálu) a potlačil tak nízkofrekvenční rušivou harmonickou složku, výsledný signál je v grafu označen jako  $u_2(t)$ . Z obr. 38.1.1 je zřejmé, že vliv kmitočtových filtrů na signál je dobře patrný zvláště při znázornění procesu filtrace v kmitočtové oblasti pomocí kmitočtového spektra - tedy pomocí rozkladu signálu na jeho jednotlivé harmonické složky.

Průchod signálu filtrem vede též obvykle k časovému zpoždění signálu, což je důsledkem fázových posuvů (zpoždění) procházejících harmonických kmitočtových složek signálu. Tyto vlivy obvykle vyjadřujeme *fázovou kmitočtovou charakteristikou*. Jejich vliv na výstupní signál je též zřejmý při znázornění signálu a vlastnosti filtru v časové oblasti (např. odezva na jednotkový skok). Fázové vlivy filtru na signál v propustném kmitočtovém pásmu se v časové oblasti projevují např. jako nežádoucí překmity či zvlnění průběhu signálu. V příkladu z obr. 38.1.1 (filtr typu horní propust) způsobil tento efekt zejména horní a spodní hran obdélníkového signálu. Uvedené vlivy je možné vhodnou volbou filtru minimalizovat. Na druhé straně ale existují případy, kdy těchto vlastností filtrů záměrně využíváme, např. ve fázovacích a zpožďovacích obvodech.



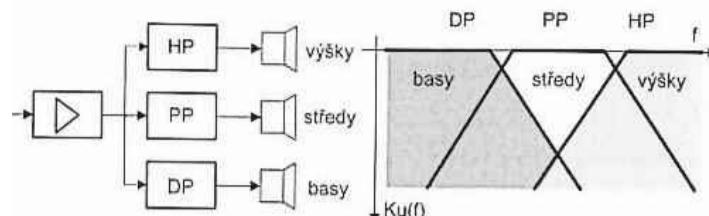
Obrázek 38.1.1.: Příklad selekce kmitočtových složek signálu filtrem typu horní propust pro potlačení nízkofrekvenční rušivé složky (např. kmitočet sítě 50 Hz)

#### 38.1.1.1. Oblasti a příklady použití kmitočtových filtrů

Kmitočtové filtry patří mezi základní stavební bloky pro zpracování signálů. V radiotechnice je časté použití pásmových propustí pro výběr přijímaných signálů (vstupní obvody přijímačů, mezifrekvenční filtry), dolních propustí a horních propustí jako výhybek pro rozdělení kmitočtových pásem v antenních obvodech a předzesilovačích, pásmových zádrží pro rejekci (potlačení) rušících signálů, dolních propustí pro různé typy demodulátorů atd. Moderní komunikační systémy s rozloženým spektrem vyžadují také jako jeden z důležitých bloků přijímače filtr typu pásmová propust. Obdobné je využití filtrů v telekomunikacích, při přenosu dat apod.

V elektroakustice se velmi často využívají korekční filtry (nastavitelné korektory hloubek, výšek, pásmové korektory, korektory kmitočtových charakteristik dynamických přenosů, magnetofonových hlav), různé typy filtrů v systémech omezení šumu (Dolby apod.). Dolní, horní a pásmové propusti tvoří kmitočtové výhybky pro reproduktorové soustavy (pasivní i aktivní), jak ukazuje obr. 38.1.2. V oblasti elektronické hudby se využívají i různé filtry pro zabarvení zvuku a realizaci zvláštních zvukových efektů.

Kmitočtové filtry se využívají také v oblasti *měřicí techniky*. Velmi často jsou to filtry pro výběr měřeného kmitočtového pásmu, obzvláště pak v různých typech selektivních měření (selektivní voltmetry, měřiče harmonického a dalších typů zkreslení, různá vysokofrekvenční měření). Pro akustická měření se využívá několika typů váhových filtrů pro měření úrovně akustického signálu (modeluje se vnímání lidského ucha). Často se využívá korektoru kmitočtových vlastností snímacích čidel. I přes rozvoj číslicových kmitočtových filtrů je výhodné u slabých a hodně zarušených



Obrázek 38.1.2.: Příklad použití filtrů v kmitočtových výhybkách reproduktorových soustav

signálů provést před A-D převodem analogovou předfiltraci pro podstatné zvýšení dynamického rozsahu systému.

Zvláštní skupinu aplikací tvoří filtry typu dolní propust v systémech pro převod analogového signálu na číslicový. Pro splnění vzorkovacího teoremu je zde v mnoha případech potřebné použít *antialiasingový filtr* pro zamezení překládání rušivého spektra do užitečného signálu a na výstupu takového systému obdobný rekonstrukční filtr. Kmitočtové filtry se používají často v *regulační technice*, speciální odrušovací filtry nacházejí uplatnění v *sílnoproudé elektrotechnice*. Tako bychom mohli vyjmenovat mnoho dalších aplikací.

Lze říci, že neexistuje oblast elektrotechniky a elektroniky, kde se alespoň v omezené míře nevyužívají kmitočtové filtry. Základní orientace a znalost problematiky kmitočtových filtrů je proto potřebná prakticky pro každého tvůrčího pracovníka v elektrotechnice.

### 38.1.1.2. Způsoby realizací kmitočtových filtrů

Kmitočtové filtry můžeme v praxi realizovat mnoha odlišnými způsoby, které do určité míry určují i některé podstatné provozní vlastnosti filtru. Nejvhodnější způsob realizace je potřebné si pro daný účel optimálně vybrat. Tyto způsoby realizací lze rozdělit orientačně do tří hlavních skupin:

- Realizace z **diskrétních prvků** (odpor, kondenzátory, cívky, operační zesilovače apod.), kde si každý uživatel může s menšími či většími problémy sestavit filtr přesné podle svých požadavků.
- Realizace v podobě **integrovaného bloku** je obvykle menší, levnější a lépe propracovaná, protože ji výrobce vyrábí ve velkých sériích vhodnou technologií. Na druhé straně si však uživatel obvykle nemůže upravit tento filtr podle svých speciálních požadavků a musí přesně dodržet podmínky zapojení podle výrobce.
- Realizace s **číslicovými filtry** spočívá v číslicovém zpracování signálu, kdy číslicovou interpretaci signálu matematicky upravujeme tak, aby výsledný signál měl po zpětném převodu shodné (či dokonce lepší) vlastnosti jako po průchodu normálním kmitočtovým filtrem. Matematicky tak modelujeme požadované vlastnosti filtrů a tímto způsobem lze dokonce realizovat i některé funkce a vlastnosti, které běžnými analogovými filtry nelze dosáhnout. Při realizaci jsme však omezeni na prostředí číslicového zpracování signálu (převodníky, počítač či signálový procesor, vhodný program). Značným omezením může být i maximální rychlosť výpočtu počítače a zpracování a tím i použitelné kmitočtové pásmo filtru.

Jak je z tohoto dělení zřejmé, pro optimální výběr realizace filtru neexistuje univerzální návod, vždy záleží na podmírkách úlohy. Jde-li o úlohu, kdy řešíme číslicové zpracování signálu a máme dostatečnou výpočetní kapacitu daného prostředku, zvolíme číslicový filtr. V jiných případech (vysoký kmitočet signálů, slabý a zarušený signál, jde-li o výkonovou aplikaci apod.), použijeme analogový filtr. Při tomto řešení dáváme přednost standardnímu integrovanému filtru profesionální výroby (např. mezifrekvenční filtry přijímačů). Pokud však našim požadavkům plně nevhovuje, musíme navrhnut a vyrobit filtr požadovaných vlastností z dostupných diskrétních součástek. Složitost a rozmanitost vlastností jednotlivých realizací filtrů ukazuje i jejich následující podrobnější přehled, který rozděluje jednotlivé typy filtrů podle použitých stavebních prvků:

- **Filtr RC** vynikají svou jednoduchostí, dostupností a nízkou cenou výchozích součástek, rezistorů a kondenzátorů. Plné však u nich platí:za málo peněz - málo muziky. Praktické využití mají jen jednoduché filtry prvního řádu a druhého řádu s nízkým činitelem jakosti ( $Q < 0,5$ ). Filtry RC vyšších řádů se v praxi používají výjimečně.
- **Filtr RLC** umožňují realizovat teoreticky libovolný typ filtru. Jejich omezení vyplývá především z použití cívek. Ty jsou obzvláště pro nízké kmitočty (velké hodnoty L) rozměrné, drahé a ztrátové (malý činitel jakosti Q). Obecně je také použití filtrů RLC omezeno vlastními ztrátami cívek a kondenzátorů a také tolerancí a stabilitou jejich hodnot pro propusti a zádrže s velmi malou relativní šířkou pásma. Obvykle jsou používány v kmitočtovém rozsahu od 100 kHz do 300 MHz, pro nižší kmitočty jen výjimečně. Pro kmitočty nad hranicí asi 300 MHz se výrazně projevují parazitní vlastnosti prvků a je lépe využít realizaci s rozprostřenými parametry - viz následující bod.
- **Mikrovlnné filtry** jsou realizací RLC filtrů v oblasti mikrovln ( $f \gg 300$  MHz), kde již nelze použít prvky se soustředěnými parametry (R, L, C), ale

používá se odpovídající realizace s rozloženými parametry jako jsou vlnovody, mikropásková vedení, koaxiální vedení apod.

• **Filtr ARC** (známé také jako *aktivní filtry RC*) v principu nahrazují filtry RLC. Místo cívek používají rezistory, kondenzátory a aktivní prvky, nejčastěji operační zesilovače. Mají obdobné vlastnosti jako filtry RLC, ale vzhledem k vlastnostem aktivních prvků se jejich použití omezuje nejčastěji na kmitočtové pásmo přibližně 0,1 Hz až 100 kHz. Současný pokrok v technologii aktivních prvků však umožňuje využití těchto filtrů na stále vyšších kmitočtech (dnes již řádové jednotky až desítky MHz), i když toto použití je zatím málo rozšířené. Kmitočtové jsou tedy vhodným doplňkem k filtrům RLC. Oproti nim mají výhodu i v snazší nastavitelnosti a laditelnosti změnou hodnot odporů. Jejich nevýhodou je na druhé straně potřeba napájení aktivních prvků. Objevují se i jejich specifické modifikace využívající parazitních vlastností aktivních prvků (R nebo C) jako stavebních prvků - filtry AC. AR apod.

• **Filtr ASC**, známé též jako *filtry se spínánými kapacitami* jsou speciální modifikací filtru ARC, které místo odporů používají přepínané kondenzátory. Jejich hlavní výhodou je možnost poměrně snadné monolitické integrace v porovnání s filtry ARC. Některé typy můžeme zakoupit jako integrované obvody. Jejich mezní kmitočet je určen spínacím kmitočtem a jsou tedy snadno přeladitelné. Lze je řadit již do skupiny integrovaných filtrů, nicméně jsou zde možnosti určitého přizpůsobení požadavků, a to jednak přeladěním, jednak také dostupnosti integrovaných nastavitelných bloků 2. řádu. Na druhé straně je však tento typ realizace kmitočtově ještě více omezen než filtry ARC a má navíc problémy s výším driftem, s určitým průnikem spínacího signálu do užitečného signálu a „schodovitostí“ výsledného signálu, způsobenou spínáním. Spínací kmitočet bývá  $50 \times$  až  $100 \times$  vyšší než mezní kmitočet filtru, což do určité míry minimalizuje spínáním vzniklý projev diskretizace signálu v časové oblasti a možný aliasingový efekt (překládání spektra rušivého signálu do spektra užitečného signálu).

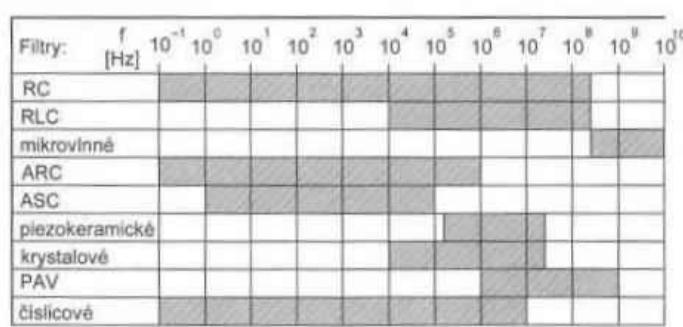
• **Elektromechanické filtry** jsou historicky nejstarší „integrované“ filtry. Vycházejí z principu převodu elektrického signálu na mechanický, využitím některé formy mechanické rezonance a zpětného převodu výsledného mechanického signálu na elektrický. Chovají se tedy vesměs jako pásmové propusti. Podle typu mechanického rezonátoru je lze dělit na různé skupiny. Dříve byly používány např. magnetostriktivní filtry a dnes jsou používané nejčastěji *piezokeramické filtry* (např. mezifrekvenční filtry 455 kHz a 10,7 MHz). Zvláštním typem je *krystalový filtr*, který odpovídá v podstatě složenému rezonančnímu obvodu s vysokým činitelem jakosti (rádiové 10 000) a vysokou stabilitou rezonančního kmitočtu. Nejčastěji se využívá ve stabilních oscilátorech. Vzhledem k vysokému a nenastavitelnému činiteli jakosti a nenastavitelnému rezonančnímu kmitočtu se krystaly jako filtry používají velmi omezené. Zapojením většího počtu krystalů s velmi přesným výběrem lze realizovat úzký pásmový filtr pro speciální aplikace jako např. úzkopásmové mezifrekvenční filtry s vysokým rezonančním kmitočtem.

• **Filtr s PAV** (s povrchovou akustickou vlnou, anglická zkratka SAW) jsou poměrné novým typem integrovaných filtrů, založených na principu vyzářování, šíření a fázového, kmitočtově závislého skládání povrchových akustických vln. Realizují se tak, že se nanese na nosnou keramickou destičku soustava vysílačích a přijímacích piezoelektrických zářičů, jejichž tvar a funkci lze přiřovat k dvěma Yagiho anténám. Obdobně jako u antén je rozměry a polohou zářičů tvarována přenosová kmitočtová charakteristika filtru. V porovnání s elektromechanickými filtry mohou realizovat podstatně širokopásmovější obvody. Proto se s výhodou používají, např. jako obrazové mezifrekvenční filtry v televizorech a v mnoha dalších aplikacích pro vysoké kmitočty. Na druhou stranu je jejich použití částečně omezeno vyšším průchozím útlumem.

• **Filtr CCD** (charge coupled devices - nábojové vázané obvody) jsou dalším speciálním typem aplikace s časové diskrétní charakterem (např. jako filtry ASC). Využívají se u nich technologie známá např. z CCD televizních kamer a princip spočívá v postupném posuvu a fázovém závislém sčítání jednotlivých „nábojových vzorků“.

• **Číslicové filtry** jsou oproti předchozím filtrům odlišnou („softwarovou“) realizaci funkce filtrů, jejich princip byl popsán v předchozím odstavci.

Uvedený přehled potvrzuje značnou různorodost konečných realizací filtrů. Z přehledu vlastností jednotlivých typů kmitočtových filtrů je zřejmá i obtížnost úlohy konstruktéra při výběru optimálního způsobu realizace. Pro rychlejší orientaci o použitelnosti uvedených filtrů z hlediska kmitočtového pásmá je možné využít tab. 38.1.3. Mezi použití jednotlivých způsobů realizací je nutno chápát jen jako orientační, protože závisí nejen na současném stavu technologie, ale i na mnoha různých parametrech a požadavcích kladených na filtry.

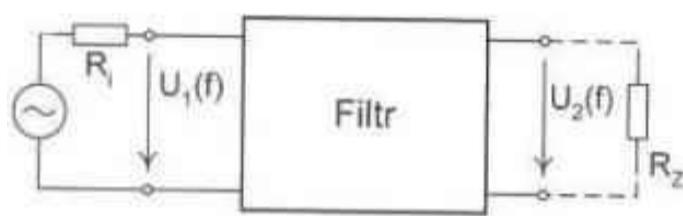


Obrázek 38.1.3.: Orientační znázornění kmitočtových pásem použitelnosti jednotlivých typů realizaci filtrů

## 38.2. Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky

### 38.2.1. Průchod signálu kmitočtovým filtrem a přenosové kmitočtové charakteristiky filtrů

Základní zapojení filtru připojeného ke zdroji harmonického signálu je uvedeno na obr. 38.2.1. Procházi-li přes kmitočtový filtr harmonický signál s amplitudou  $U_1$ , kmitočtem  $f_1$  a fází  $\varphi_1$ , získáme na výstupu filtru opět harmonický signál se stejným kmitočtem, ale jinou velikostí amplitudy a fáze ( $U_2, \varphi_2$ ).



Obrázek 38.2.1.: Filtr jako dvojbran

Přenos napětí  $K_U$  harmonického signálu filtrem lze pro daný kmitočet  $f$  vyjádřit komplexním výrazem

$$K_U = K_U \cdot e^{j\varphi} = \frac{U_2 e^{j\varphi_2}}{U_1 e^{j\varphi_1}}, \quad (38.2.1)$$

který můžeme rozdělit na reálnou a imaginární část. Častěji ale používáme vyjádření přenosu pomocí modulu a argumentu

$$K_U = \frac{U_2}{U_1}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (38.2.2)$$

kde modul  $K_U$  je poměr amplitud výstupního a vstupního signálu a argument  $\varphi$  je výsledný fázový posuv (časový rozdíl vztažený na periodu) mezi výstupním a vstupním signálem jako rozdíl fázi výstupního signálu  $\varphi_2$  a vstupního signálu  $\varphi_1$ . Modul přenosu  $K_U$  je bezrozměrné číslo a často se udává v logaritmické mřížce, kdy platí  $K_U[\text{dB}] = 20 \log K_U$ . Toto běžné používané vyjádření umožňuje grafické znázornění velkého rozsahu hodnot.

## 38.3. Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů

### 38.3.1. Filtry s přenosovou funkcí 1. řádu

### 38.3.2. Filtry s přenosovou funkcí 2. řádu

### 38.3.3. Přenosové funkce vyšších řádů

### 38.3.4. Citlivost a tolerance přenosových vlastností filtrů

## 38.4. Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu

### 38.4.1. Návrh filtrů RC

### 38.4.2. Návrh filtrů RLC 2. řádu

### 38.4.3. Návrh fázovacích článků RLC 1. a 2. řádu

## 38.5. Filtry RLC vyšších řádů

## 38.6. Filtry ARC 2. řádu

### 38.6.1. Základní principy funkce filtrů ARC

Při realizaci filtrů RLC pro nízké kmitočty jsou největší problémy s kvalitou, rozměry a cenou cívek. Proto se pro nízké kmitočty s výhodou nahrazují **aktivními filtry**

**RC** (filtry ARC). Jejich základní princip spočívá v "náhradě" cívky pomocí zapojení aktivního prvku (operační zesilovač, tranzistor) se dvěma rezistory a kapacitou. Nahradit cívku můžeme v zásadě dvěma základními způsoby. První spočívá v použití obvodu, který přímo nahrazuje cívku jako dvojpól a vykazuje mezi určitými svorkami příslušnou indukčnost. Druhý princip, jak bude ukázáno dále, nahrazuje cívku nepřímo, pomocí transformace výchozího RLC obvodu na ekvivalentně se chovající strukturu RCD, která indukční prvek neobsahuje, ale na druhou stranu potřebuje syntetický prvek  $D$  - dvojný kapacitor (kmitočtově závislý negativní rezistor).

### 38.6.2. Obvody s náhradou cívky

Aktivní filtry ARC, které vycházejí z filtru RLC a využívají k tomu přímou či nepřímou náhradu cívek, mají velké množství různých variant zapojení. Objasnění jejich funkce představuje i řadu různých pohledů na činnost filtru. V oblasti návrhu ARC filtru převažují dva hlavní přístupy. Velmi názorný je takový přístup, který vytváří obvody, vykazující na vstupních svorkách induktivní impedanci. Ty lze využít jako přímou náhradu indukčnosti ve filtru RLC. Zřejmě nejčastější je ale takový pohled, kdy vytváříme celý obvod ARC s přenosovou funkcí 2. řádu jako ekvivalenci obvodu RLC 2. řádu, přičemž přímá náhrada cívky v obvodu nemusí být na první pohled zřejmá.

### 38.6.3. Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností

Stavebními prvky filtrů ARC jsou rezistory, kapacitory a aktivní prvky, jak již bylo naznačeno v předešlém textu. I pro nejjednodušší posouzení funkce, klasifikaci a výběr optimálního zapojení filtrů ARC je potřeba rozumět alespoň základním vlivům reálných vlastností těchto stavebních prvků na výsledné parametry ARC obvodu.

### 38.6.4. Vliv reálných odporek a kondenzátorů

( $C_1, i C_2$ ) vytvářejí se zbytkem obvodu rezonanční obvod RLC, lze vliv jejich ztrát modelovat sériovým či paralelním spojením ideálního kapacitoru s rezistorem. Tento vliv lze posuzovat v principu shodně jako u filtrů RLC. Při ideálních vlastnostech zbývající části obvodu určuje hodnotu činitele jakosti celkového obvodu činitele jakosti reálného kondenzátoru  $Q_c = \frac{1}{tg\delta}$ . Jeho hodnota musí být proto podstatně vyšší než výsledná funkční hodnota činitele jakosti celého obvodu (alespoň 10×). Při nižších hodnotách je třeba tento vliv brát v úvahu a pokud je to možné, kompenzujeme jej snížením vnějšího zatlumení tak, aby výsledné  $Q$  odpovídalo požadovanému. Je potřebné si uvědomit, že ztráty kondenzátorů může obdobně zvýšit i sériové či paralelní spojení kondenzátorů s parazitními odpory, jako je např. vnitřní odpor zdroje, parazitní vstupní a výstupní odpor aktivních prvků apod.

## 38.7. Filtry ARC vyšších řádů

## 38.8. Filtry se spínanými kapacitory

## 38.9. Zváštní typy a aplikace kmitočtových filtrů



**Část XIV.**

**Elektronické napájecí zdroje**



# 39. Impulzně regulované napájecí zdroje

## Obsah

39.1. Úvod . . . . .	179
39.2. Impulzní regulace ve výkonové elektronice . . . . .	179
39.3. DC/DC měniče bez transformátoru . . . . .	180
39.3.1. Vymezení pojmu a základních požadavků . . . . .	180
39.3.2. Step-down converter (snižující neinvertující měnič) . . . . .	181
39.3.3. Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič) . . . . .	181
39.3.4. Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou) . . . . .	181
39.3.5. Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem) . . . . .	181
39.3.6. SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter) . . . . .	181
39.4. DC/DC měniče s transformátorem . . . . .	182
39.4.1. Jednočinný propustný měnič s impulsním transformátorem . . . . .	182
39.4.2. Jednočinný blokující měnič . . . . .	187
39.5. Metody regulace spínaných zdrojů . . . . .	188
39.5.1. Základy impulzní regulace . . . . .	188
39.5.2. Regulační smyčka . . . . .	188
39.6. Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů . . . . .	189
39.6.1. Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem . . . . .	189

## 39.1. Úvod

Spínané napájecí zdroje plní funkci stejnou jako zdroje se spojitou regulací. Výkonový člen spínačů zdrojů je však zatěžován impulzně, tj. střídavě spínán a rozeprínán. Lze tedy využít výhody impulzního režimu, tj. odebírat impulzní výkon podstatně větší, než je trvalý výkon při lineárním režimu regulátoru s týmž výkonovým členem. Spínači zdroje mají obecně větší účinnost než zdroje se spojitou regulací. Jsou výhodné zvláště tam, kde je velký rozdíl napětí na vstupu a výstupu regulátoru a kde jsou požadované malé rozmezí. Impulzní regulace zajistí stabilizované výstupní napětí i pro velké změny vstupního napětí; účinnost zdroje se při tom téměř nemění. I přes větší obvodovou složitost jsou ekonomicky výhodnější, neboť jejich použití vede k podstatné energetické úspoře.

Impulzně regulované zdroje však mají v porovnání se zdroji s lineární regulací i některé nevýhodné vlastnosti, například pomalejší reakci výstupního napětí na rychlé změny zatěžovacího výstupního proudu. Při požadavku malého zvlnění výstupního napětí se nesmí zanedbat vliv impulzního charakteru těchto zdrojů. Impulzně regulované zdroje jsou také zdrojem rušivých signálů, které jsou generovány spínacími prvky [Ham96, s. 112].

## Introduction to Power Supplies

2002 National Semiconductor

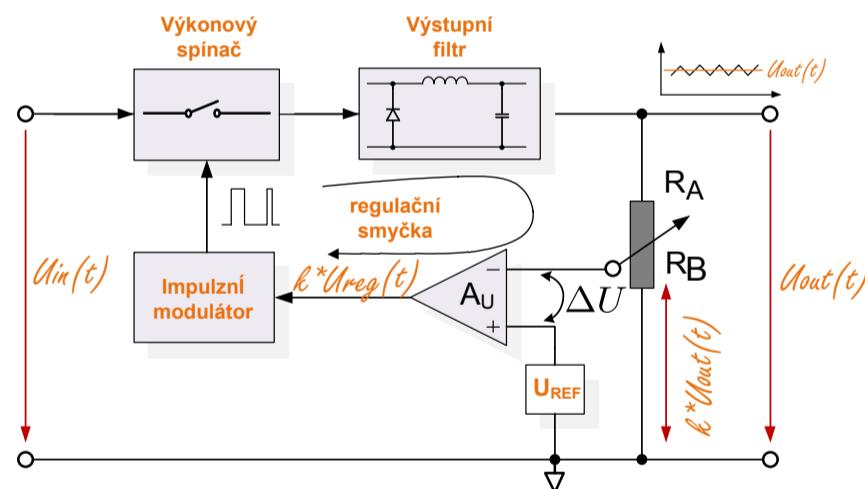
AN556



## 39.2. Impulzní regulace ve výkonové elektronice

Základním principem a současně odlišností impulzní regulace od regulace klasické je v její *nespojitosti*. To znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí stabilizováno zásahy regulačního člena pouze v určitých, časově omezených intervalech. Podstata regulačního člena (regulátoru) tedy spočívá v řízení vzájemných časových relací aktivního a pasivního intervalu pracovního cyklu v závislosti na velikosti zesílené regulační odchylky.

Akční člen je tedy řízen dvouhodnotovým signálem, mající význam *zapnutí* nebo *vypnutí* výkonové součástky. Následující příklad demonstreuje, jak lze tento signál vytvořit pomocí **pulzně-šířkové modulace** v simulátoru **LTS spice**. V simulacích některých topologií spínaných zdrojů bude místo zdroje s lineárně narůstajícím výstupním napětím viz obr. 39.2.3 použita regulační odchylka.



Obrázek 39.2.1.: Základní schéma impulzního regulátoru

Srovnáme-li pro názornost klasický a impulzní regulátor na úrovni blokových schémat, vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál  $U_{REF}$ , zesilovač regulační odchylky  $A_U$ , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprostě odlišné.

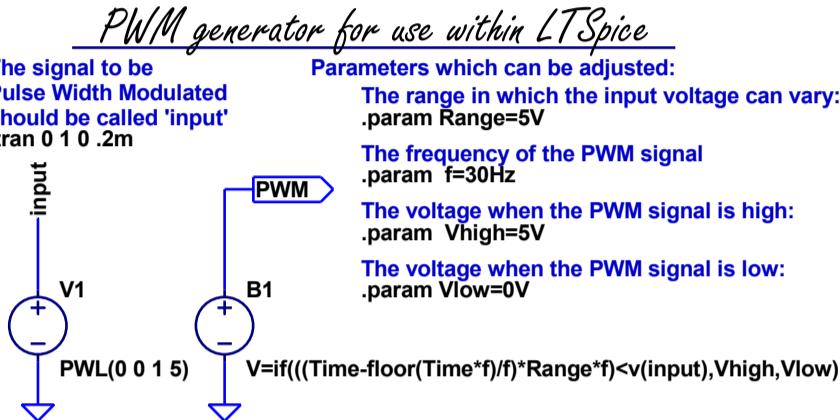
U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojite okamžitý odpor výkonového regulačního člena v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní. Z toho, jak je již známo, vyplývá velká poměrná výkonová ztráta na regulačním členu a tedy i malá účinnost spojité regulace za běžných provozních podmínek.

Impulzní regulace obr. 39.2.1 umožňuje výrazně snížit výkonovou ztrátu na regulačním členu. V tomto případě pracuje regulační prvek (tranzistor) jako řízený spínač. Proud jím tedy prochází pouze po určité intervalu pracovního cyklu. Přitom okamžitá výkonová ztráta v aktivním (sepnutém) stavu je vzhledem k  $U_{CES} \rightarrow 0$  řádově menší, než u lineárního regulátoru. Další předností je, že velikost ztráty v

podstatě nezávisí na rozdílu vstupního a výstupního napětí, ale prakticky pouze na kolektorovém proudu tranzistoru.

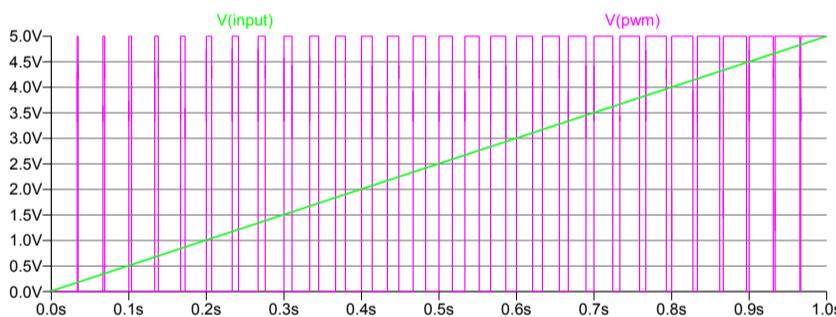
Možnost použít spínací regulační člen při stabilizaci stejnosměrného napětí je podmíněna jeho vzájemnou součinností s filtrováním členem, který na rozdíl od aplikace ve spojitém regulátoru musí mít výrazný akumulační charakter. Uspořádání filtru, který je pro větší výkony vždy typu LC, je podřízeno topologii měniče. Princip činnosti nerozlučně vázané dvojice spínač - akumulační výstupní filtr spočívá v akumulaci energie, která je v aktivním intervalu odebrána ze zdroje, aby mohla být v následujícím pasivním intervalu (spínač vypnut) dodávána z filtru do zátěže [Ham96, s. 121].

**Příklad 39.2.1.** Na obr. 39.2.2 je realizován generátor šířkově modulovaného signálu pro simulátor LTSpice, jenž s výhodou využívá komponenty B-source, umožňující behaviorální popis požadovaného průběhu. Podrobnějším pohledem



Obrázek 39.2.2.: Realizace PWM generátoru pomocí komponenty B-source (Arbitrary behavioral voltage or current source) v LTSpice (soubor pwm.asc)

na zápis rovnic dle obr. 39.2.2, lze dojít k závěru, že zdroj B1 na svůj výstup vnute hodnotu parametru  $V_{high}$ , nebo  $V_{low}$ , podle výsledku rozhodovací funkce  $i_f$ . Tj. jeli  $Time-floor(Time*f)/f)*Range*f$  větší než  $V(input)$ , bude na výstupu  $V_{high} = 5V$ , v opačném případě  $V_{low} = 0V$ . Funkce  $floor$  zaokrouhluje hodnotu svého argumentu na celé číslo (integer), což vede na schodovitý průběh a funkce  $Time$  umožňuje do vztahu vnést okamžitou hodnotu simulačního času. Vzájemný odečtením získáme pilový průběh, kterým se komparuje s okamžitou hodnotou zdroje  $V(input)$ .



Obrázek 39.2.3.: Výstupní signál  $V(pwm)$  z PWM generátoru na obr. 39.2.2 má-li rozhodovací napětí  $V(in)$  lineární charakter

### 39.3. DC/DC měniče bez transformátoru

#### 39.3.1. Vymezení pojmu a základních požadavků

DC - DC měniče jsou obvody sloužící k regulaci elektrické energie, které mění vstupní stejnosměrné napětí  $U_1$  na jiné výstupní stejnosměrné napětí  $U_2$ . Budeme se přitom zabývat měniči tzv. napěťového typu, což jsou měniče napájené konstantním vstupním napětím z napěťového zdroje, nikoliv proudem, z proudového zdroje. V této kapitole se omezíme pouze na měniče bez transformátoru, které tedy neumožňují galvanické oddělení výstupu od vstupu [NVP99].

Každý měnič sestává z vlastního silového obvodu a řídící elektroniky (regulačních obvodů). Silové obvody nesmí využívat při regulaci energie rezistorů a proto se mohou skládat jen ze spínačů a akumulačních prvků, tj. indukčnosti a kapacit.

##### 39.3.1.1. Napájecí zdroj a zátěž měniče

DC/DC měniče mohou přenášet energii z principu oběma směry. Mohou tedy čerpat energii ze zdroje a dodávat ji do zátěže nebo také opačně energii čerpat ze zátěže a dodávat ji do zdroje. Pojmy zátěž a zdroj je proto nutné chápát v širším slova smyslu.

- Zdrojem s konstantním napětím  $U_1$ , schopným dodávat i akumulovat energii, je akumulátor. Použijeme-li jako zdroj např. usměrňovač se sběrným kondenzátorem, pak není schopen dlouhodobě jímat energii z měniče, tj. dlouhodobě nesmí ve střední hodnotě převládat směr proudu do kladné svorky zdroje (krátkodobě, v okamžité hodnotě, je takový směr možný). Nabíjením sběrného kondenzátoru by totiž rostlo napětí  $U_1$ . Tomu lze zabránit přeměnou dodávané energie na teplo ve vybíjecím rezistoru, či na Zenerově diodě, zapojené paralelně ke sběrnému kondenzátoru.
- Z hlediska schopnosti spotřeby či dodávky energie, lze rozlišovat zátěž aktivní a pasivní. Aktivní zátěží je opět např. akumulátor, ale třeba i stejnosměrný motor. Jeho náhradní zapojení, platné v ustáleném stavu, je uvedeno na obr. 11). Vnitřní rotační (pohybové) indukované napětí je úměrně otáčkám, proud pak momentu na hřídeli a to včetně znamének.

Teče-li proud ve střední hodnotě do zátěže (+), pak motor pohání, tj. mění elektrickou energii na mechanickou (pracuje v motorickém režimu). Teče-li ze zátěže (-), pak motor brzdí, tj. mění v vnějšku dodávanou mechanickou energii na energii elektrickou (pracuje v generátorickém režimu).

##### 39.3.1.2. Pracovní kvadranty

Označme si vstupní a výstupní napětí a proud měniče podle obr. 39.3.2. Podle polarity výstupního napětí  $U_2$  a výstupního proudu  $I_2$  může měnič pracovat ve čtyřech kvadrantech tzv. VA-rovinu (viz obr. 39.3.3).

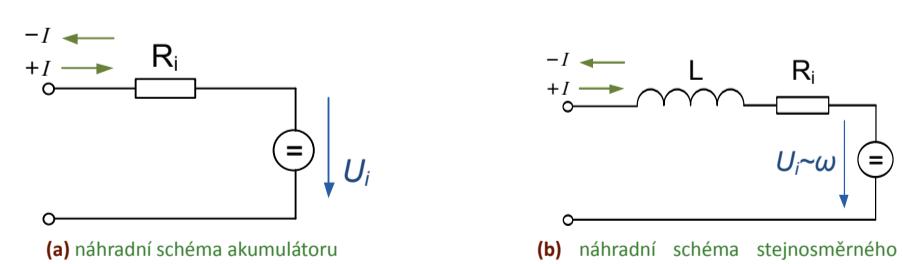
V kvadrantech 1 i 3 dodává měnič energii do zátěže. Je-li zátěží motor, tak pohání. Pasivní zátěže mohou pracovat pouze v těchto kvadrantech. V kvadrantech 2 a 4 dodává aktivní zátěž energii zpět do měniče. Jde-li o motor<sup>1</sup>, pak brzdí.

##### 39.3.1.3. Možnosti zapojení silového obvodu

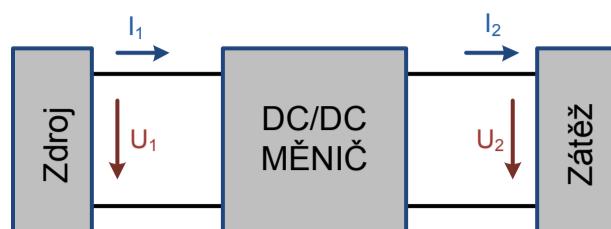
Na první pohled jsou zřejmá určitá omezení:

- Indukčnost nikdy nesmí být zapojena paralelně ke vstupu či výstupu (protože tam je napětí s nenulovou střední hodnotou).
- Kapacita nikdy nesmí být zapojena do série se vstupní nebo výstupní svorkou měniče (protože tudy prochází proud s nenulovou střední hodnotou).
- Jako akumulační prvek nelze použít samostatně kapacitu, není-li v obvodu použita ještě indukčnost (protože by v měniči napěťového typu docházelo k nepřípustnému nárazovému nabíjení kondenzátoru zkratovým proudem). Čili měnič napěťového typu musí obsahovat alespoň jednu indukčnost.
- Žádný spínač nesmí zkratovat vstup ani výstup měniče.

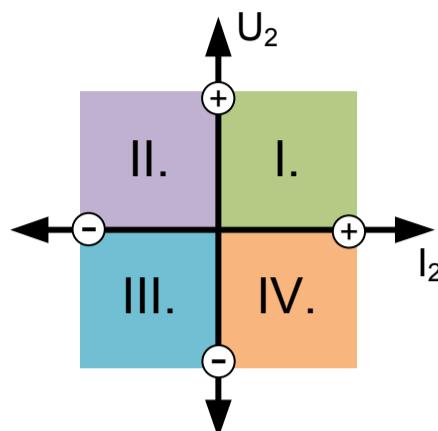
<sup>1</sup>Velikost napětí ss. motoru je úměrná otáčkám (rychlosti), polarita je dána směrem otáčení (uvážujeme motor s cizím buzením, např. s permanentními magnety). Velikost proudu je úměrná momentu na hřídeli, polarita je opět dána směrem momentu, tj. zde motor brzdí či pohání. Je třeba si povšimnout, že přechod mezi generátorickým a motorickým režimem mezi kvadranty 2 a 1 nebo mezi 3 a 4 (tj. takový, kdy se nemění polarita napětí, ale jen proudu) vůbec nemusí být na hřídeli motoru opticky pozorovatelný, neboť v dané chvíli přechodu se změní jen znaménko momentu (proudů) a přesto otáčky hřídele mohou být konstantní.



Obrázek 39.3.1.: Aktivní zátěž.



Obrázek 39.3.2.: Označení vstupních a výstupních veličin DC/DC měniče.



Obrázek 39.3.3.: Pracovní kvadranty ve VA rovině.

### 39.3.1.4. Nejjednodušší měnič s jediným akumulačním prvkem

Pro výchozí představu, vysvětlující princip činnosti, vytvoříme silový obvod měniče ze dvou prvků. Bude to indukčnost  $L$  a ideální přepínač. Vezmeme-li v úvahu omezení z kap. 39.3.1.3, existují podle obr. 39.3.4 jen tři způsoby, jak takový měnič zapojit [NVP99].

Označme střední hodnotu napětí mezi společným uzlem přepínače 3 a zemí jako  $U_x$ . Předpokládejme, že přepínač je ovládán periodickým signálem s periodou  $T$  a s nastavitelnou střídou, takže po dobu  $t_1$  spojuje svorky 3 – 1 a po dobu  $t_2 = T - t_1$  pak svorky 3 – 2. Popišme nyní nejzákladnější vlastnosti tří měničů z obr. 39.3.4.

1. Střední hodnota  $U_x$  na obr. 39.3.4a musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (39.3.1)$$

Výstupní napětí je rovno  $U_x$ , neboť střední hodnota napětí na indukčnosti  $L$  musí být nulová. Platí proto:

$$U_2 = U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (39.3.2)$$

Výstupní napětí je vždy menší než vstupní a má stejnou polaritu. Jde tedy o měnič *snižující a neinvertující*. Jeho jiné názvy jsou: **step-down, chopper, buck, propustný měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 1 a 2. Čili měnič je schopen dávat napětí  $U_2$  jediné polarity, ale proud  $I_2$  muže téci oběma směry (je-li to umožněno - aktivní zátěž).

2. Střední hodnota  $U_x$  na obr. 39.3.4b musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1 \quad (39.3.3)$$

Vstupní napětí  $U_1$  je rovno  $U_x$  (nulová střední hodnota napětí na indukčnosti  $L$ ). Odsud pro  $U_2$  platí:

$$U_2 = U_1 \frac{t_1 + t_2}{t_1} > U_1 \quad (39.3.4)$$

Střední hodnota výstupního napětí je vyšší než vstupní napětí a má stejnou polaritu. Jde tedy o *zvyšující a neinvertující měnič*. Jiný název je měnič **step-up, boost**. Možné pracovní kvadranty<sup>2</sup> jsou opět 1 a 2.

3. Střední hodnota  $U_x$  na obr. 39.3.4c musí vzhledem k činnosti přepínače být:

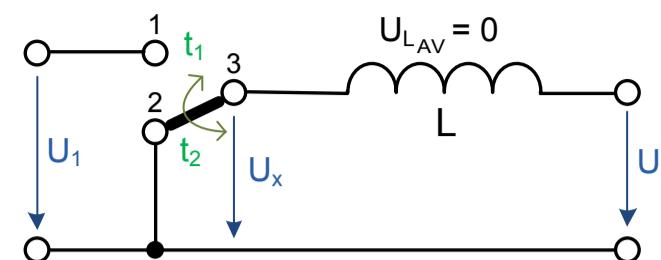
$$U_x = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1 \quad (39.3.5)$$

Protože  $U_x$  je střední hodnota napětí na indukčnosti  $L$ , musí platit  $U_x = 0$  tj.

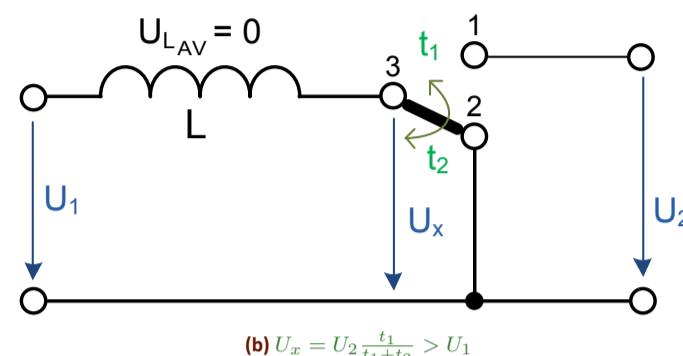
$$U_1 = -\frac{t_1}{t_2} U_1 <> -U_1 \quad (39.3.6)$$

Výstupní napětí má opačnou polaritu než vstupní, jde tedy o měnič *invertující*. Velikost výstupního napětí může být větší i menší než vstupní. Vzíté názvy jsou měnič **buck-boost, měnič se společnou tlumivkou, blokující měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 3 a 4.

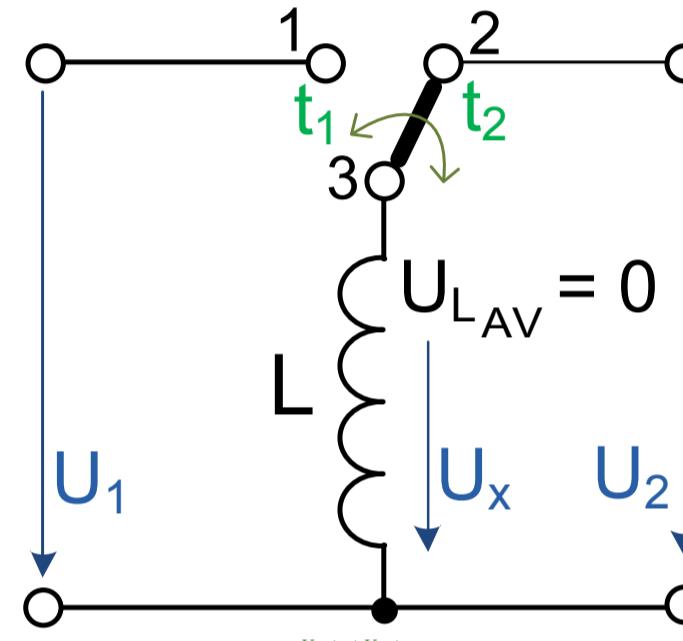
<sup>2</sup>Měnič 39.3.4a pracující v kvadrantu 1 je měničem 39.3.4b pracujícím v kvadrantu 2. Naopak 39.3.4a v kvadrantu 2 je 39.3.4b v kvadrantu 1. Čili 39.3.4a a 39.3.4b je vlastně týž obvod, pouze zaměňuje vstup a výstup.



$$(a) U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1$$



$$(b) U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1$$



$$(c) U_x = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1$$

Obrázek 39.3.4.: Principiální schémata DC/DC měničů s jediným akumulačním prvkem.

### 39.3.1.5. Prakticky realizované silové obvody

Kap. 39.3.1.4 ukazuje, že elektronicky ovládaný přepínač tvoří základní stavební kámen každého měniče. Tyto přepínače se ve skutečných obvodech realizují pomocí tzv. horních a dolních spínačů, což jsou *trojpóly* podle obr. 39.3.5.

### 39.3.2. Step-down converter (snižující neinvertující měnič)

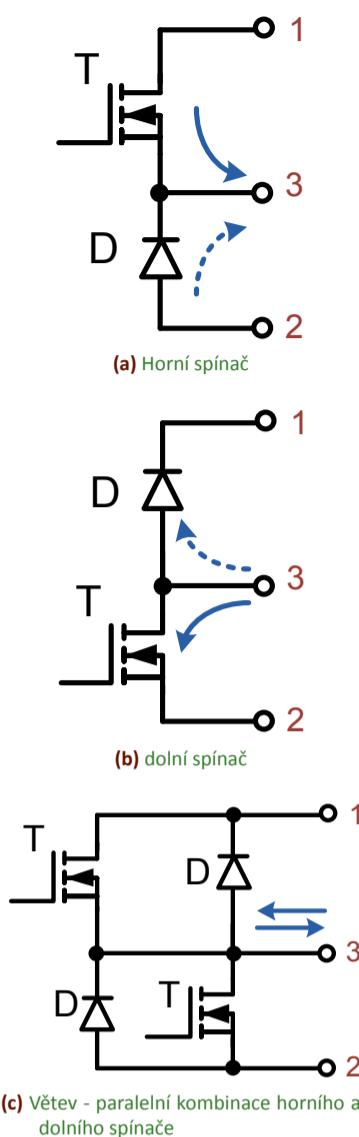
Jedná se o měnič s horním spínačem. Další jeho používané názvy jsou: propustný měnič, chopper, buck. *Pracuje v 1. kvadrantu*.

### 39.3.3. Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)

### 39.3.4. Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou)

### 39.3.5. Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)

### 39.3.6. SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)



Obrázek 39.3.5.: Horní a dolní spínač.

## 39.4. DC/DC měniče s transformátorem

Základní popis DC/DC měničů bez transformátoru, provedený v kap. 39.3, platí i pro měniče s transformátorem. Doplňením vhodné zapojeného vf. impulsního transformátoru je umožněno galvanické oddělení výstupního a vstupního napětí a transformaci napětí a proudu. Nejčastěji se v praxi setkáme s transformátorovými verzemi měniče propustného z kap. 39.3.2 a měniče blokujícího z kap. 39.3.3. Existuje i transformátorová verze měniče Čukova z kap. 39.3.5.

Snižující měnič z kap. 39.3.2 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič propustný**, neboť díky transformátoru lze převodovým poměrem zajistit výstupní napětí i vyšší než vstupní (názvy „snižující měnič“ a „step-down“ by tedy byly zavádějící). Princip činnosti však v hrubých rysech zůstává stejný.

Invertující měnič se společnou tlumivkou z kap. 39.3.4 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič blokující**, neboť díky transformátoru lze vyrobít napětí libovolné polarity (název „invertující měnič“ proto pozbývá výstižnosti).

Základní stavební kameny měničů bez transformátoru tj. horní spínač a dolní spínač (kap. 39.3.1.5) tvoří základ i u měničů s transformátorem, i když v zapojeních jsou tranzistor a jeho protilehlá dioda rozděleny tím, že je tranzistor na primární straně a dioda na sekundární. Použití transformátoru navíc vyžaduje demagnetizační obvody (zajištění nulové střední hodnoty primárního napětí) a další výstupní usměrňovací diodu (diody). To vše vede k tomu, že transformátorové měniče jsou **jednotkovadrentové**. Výstupní napětí má jedinou možnou polaritu a výstupní proud jediný možný směr takový, že zátež se chová vždy jako spotřebič, nikoli jako generátor.

### 39.4.1. Jednočinný propustný měnič s impulsním transformátorem

Propustné měniče se vyznačují tím, že energie je přenášena ze vstupu na výstup v době zapnutí tranzistoru, nikoli v době vypnutí, jak je tomu u měničů blokujících.

V této i v následujících kapitolách budou analyzovány měniče typu DC/DC, které obsahují vysokofrekvenční impulsní transformátor na feritovém jádře. Transformátor zajišťuje galvanické oddělení mezi vstupní a výstupní stranou měniče. Je-li vstupní stejnosměrné napětí získáno usměrněním střídavé sítě, pak bývají tyto měniče někdy označovány jako tzv. **síťové spínané zdroje**.

Celý výkonový řetězec sestává z následujících základních bloků:

- buď síťový usměrňovač - stejnosměrný meziobvod — vlastní měnič,
- nebo akumulátor — stejnosměrný meziobvod - vlastní měnič.

Stejnosměrný meziobvod (ss. meziobvod, DC-bus, zwischenkreis) bývá napěťového typu, tj. vůči následujícímu měniči se chová jako (též) ideální zdroj konstantního napětí  $U_d$  nulovou vnitřní impedancí. Bývá realizován buď LC-filtrem, nebo samostatným sběracím kondenzátorem o velké kapacitě. Dvojcestným usměrněním sítě  $1 \times 230$  V vznikne na sběracím kondenzátoru ss. meziobvodní napětí  $U_d$  o hladině přibližně 300 V. Šestipulsním usměrněním sítě  $3 \times 400$  V vznikne ss. napětí o jmenovité střední hodnotě 542 V.

Na hladině 542 V se obvykle používají tranzistory IGBT se závěrným napětím 1200 V, které pracují na spínacím kmitočtu od 25 kHz do 60 kHz (podle přenášeného výkonu). Kmitočet je ve většině případů omezen především přepínacími ztrátami v tranzistorech IGBT.

Na hladině 300 V bývají převážně používány tranzistory MOSFET se závěrným napětím 600 V. Tranzistory jsou v současnosti tak rychlé, že mohou pracovat na spínacím kmitočtu až do 300 kHz. Pracovní kmitočet leží v typické oblasti 40 kHz až 120 kHz. Jediným důvodem ke zvyšování kmitočtu je zmenšování objemu transformátoru i výstupní tlumivky. Zvyšování kmitočtu nad 200 kHz není výhodné z následujících důvodů:

- Mezní kmitočet manganato-zinečnatých feritů leží kolem 450 kHz, tudíž v pásmu nad 200 kHz prudce roste hustota hysterezních ztrát (viz komplexní permeabilita v kap. 6.4.4.). Ztráty je nutno omezovat snižováním maximální pracovní indukce  $B_{max}$ , což působí proti zmenšování transformátoru.
- V oblasti nad 200 kHz začínají narůstat problémy se skin efektem ve vinutí transformátoru (nikoli ve vinutí tlumivky, v ní je proud téměř hladký). Na kmitočtu 200 kHz činí hloubka vniku již pouze  $\delta \cong 0,14$  mm, viz kap. 4. Nutné je použít vf. lanka nejen na sekundárním (málo závitů a velký průřez), ale i na primární (více závitů a menší průřez). Výsledkem je pokles činitele plnění ve vinutí, který působí proti zmenšování transformátoru.
- S rostoucím pracovním kmitočtem/dramaticky roste reaktance  $2\pi f L_{2,K}$  výstupní rozptylové indukčnosti transformátoru  $L_{2,K} = L_2(1 - k^2)$ . Transformátor je pak velmi měkký a není schopen přenést požadovaný výkon. Jedinou obranou je dosažení co největšího činitele vazby  $k$ . Hodnota  $k = 0,990$  je naprostě nedostatečná. Nutným minimem bývá  $k = 0,998$ , což ale přináší značné konstrukční problémy (viz kap. 17.6).
- S rostoucím kmitočtem roste negativní vliv parazitních mezizávitových kapacit vinutí.

#### 39.4.1.1. Jednočinný propustný měnič - základní zapojení

Základní zapojení jednočinného propustného měniče s transformátorem je nakresleno na obr. 39.4.1. Jak již bylo předesláno, k přenosu energie ze vstupního do výstupního obvodu dochází v aktivním intervalu  $0 \leq \delta T$ , během něhož se současně akumuluje energie v magnetickém poli tlumivky  $L$ . Po dobu zbývající části periody  $(1-\delta)T$  je tlumivka od transformátoru oddělena a na výstup dodává energii nahromaděnou v magnetickém poli. Vzhledem k **blokujícímu měniči** je zde výhoda účinného LC filtru tvořeného tlumivkou a výstupním kondenzátorem  $C$  po dobu celého pracovního cyklu. Ve srovnání s blokujícím měničem je tedy možné dosáhnout řádově menší dynamické odchylky  $\Delta U_z(t)$ . Navíc proud tekoucí  $L$ , skládající se z ustálené složky  $I_z$  a pilovitého průběhu  $\Delta i_L$  má spojitý charakter v průběhu celé periody  $T$ .

Časové průběhy všech důležitých veličin jsou zachyceny na obr. 39.4.2. Z důvodu snadnějšího výkladu budeme při prvotní analýze předpokládat následující zjednodušení:

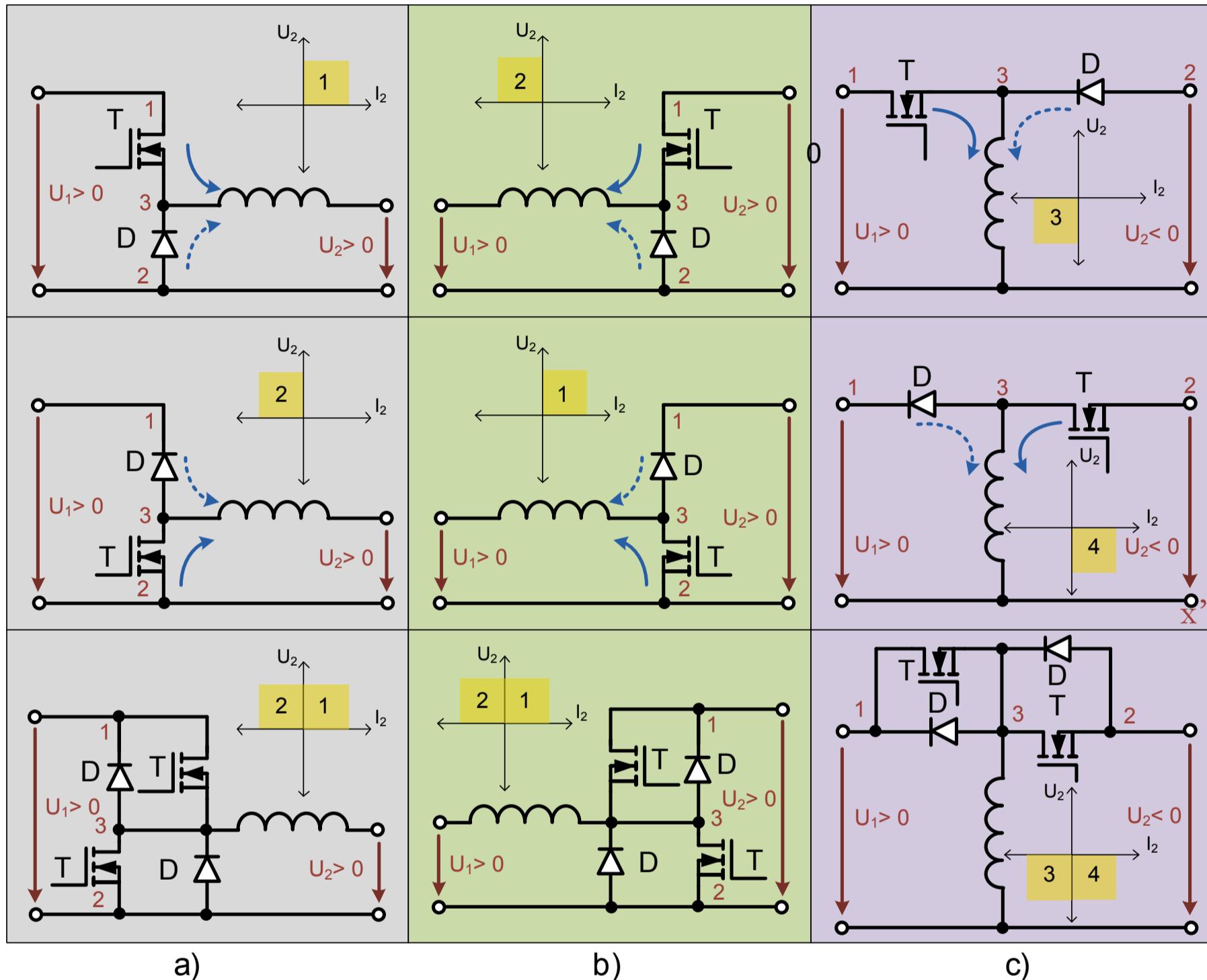
- Tlumivka výstupního LC-filtru má velikou (nekonečnou) indukčnost. Proud tlumivky  $i_L$  je hladký, málo zvlněný, tudíž je přímo roven proudu zátěže:  $i_L(t) = I_z = \text{konst.}$
- Transformátor má dokonalou magnetickou vazbu  $k = 1$ . Neexistuje tedy výstupní rozptylová indukčnost  $L_{2,K}$ .

Obě zjednodušení později při detailní analýze odstraníme.

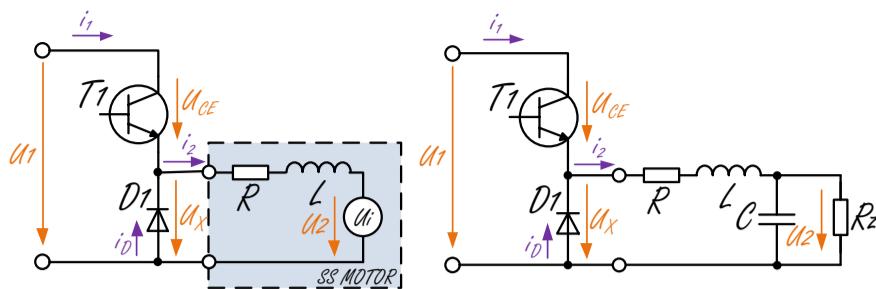
Měnič pracuje tak, že oba tranzistory jsou vždy zapínány i vypínány současně. Doba zapnutí je označena  $t_z$ . Střída je definována vztahem

$$s = \frac{t_z}{T}, \quad s_{max} = \frac{1}{2}, \quad \text{protože} \quad t < \frac{T}{2} \quad (39.4.1)$$

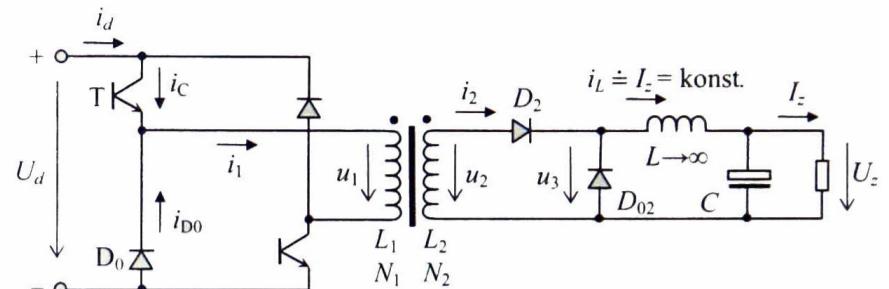
Maximální doba zapnutí  $t_z = t_1$ , nesmí překročit hodnotu  $\frac{T}{2}$ , neboť pak dochází k lavinovitému přesycení transformátoru podle obr. 39.4.3. Při zapnutí obou tranzistorů má primární napětí konstantní hodnotu  $U_1(t) = +U_d$ . Magnetizační proud je integrálem z tohoto konstantního napětí, proto narůstá *lineárně* (potkud zanedbáme nelinearitu magnetizační charakteristiky). V okamžiku  $t_1$  jsou oba tranzistory vypnuty. Magnetizační indukčnost  $L_1$ , však nedovolí zánik magnetizačního proudu a snaží se jej udržet na původní velikosti. Proud tedy musí začít téci oběma primárními diodami. Přes obě sepnuté diody připojí primární vinutí samo sebe na napájecí zdroj  $U_d$  ale v opačné polaritě, tedy bude  $U_1(t) = -U_d$ . Tímto napětím je jádro **demagnetováno** a magnetizační proud klesá, protože integrál ze záporné konstanty je klesající přímka. Obě diody se uzavřou až v okamžiku



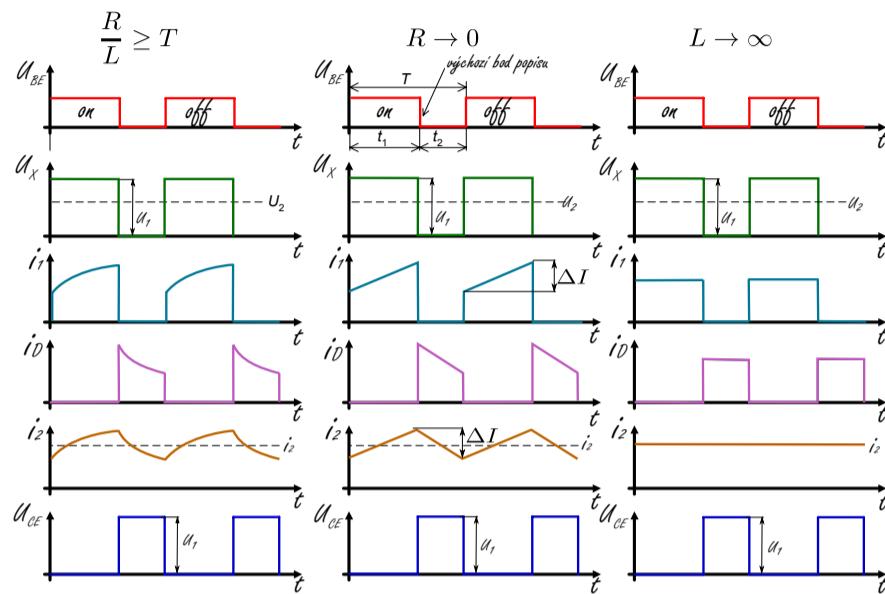
Obrázek 39.3.6.: Skutečné silové obvody měničů z obr. 39.3.4 a jejich pracovní kvadranty: a) měnič snižující neinvertující (step-down), b) měnič zvyšující neinvertující (step-up), c) měnič invertující (buck-boost)



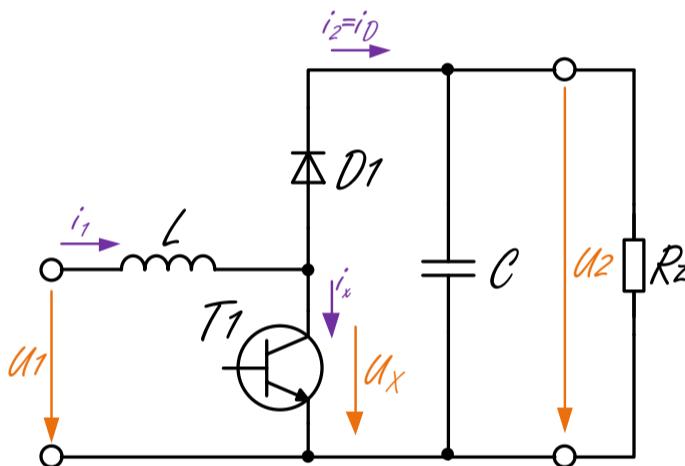
Obrázek 39.3.7.: Snižující měnič pracující v prvním kvadrantu s aktivní zátěží typu stejnosměrný motor nebo s LC filtrem



Obrázek 39.4.1.: Jednočinný propustný měnič - základní zapojení



Obrázek 39.3.8.: Průběhy napětí a proudů snižujícího měniče



Obrázek 39.3.9.: Zvyšujícího měnič pracující v prvním kvadrantu - Schéma zapojení

zániku magnetizačního proudu. Teprve tehdy je primární vinutí zcela odpojeno od mezilehlého zdroje  $U_d$ , stává se neutrálním vodičem neobsahujícím energii, proto teprve tehdy klesne primární napětí na nulu.

Sekundární napětí  $u_2$  musí mít *stejný tvar* jako napětí  $u_1$ , pouze je s převodem jinak velké. Záporný demagnetizační puls nesmí být využit k přenosu energie. Došlo by k narušení procesu demagnetizace. Proto musí být na sekundáru použit pouze jednocestný usměrňovač  $D_2$  s nulovou diodou  $D_{02}$  (nikoli dvojcestný). Dioda  $D_{02}$  vede proud tlumivky v době, kdy jsou oba tranzistory vypnuté, a usměrňovač dioda  $D_2$  je polarizována v závěrném směru. Užitečné napětí  $u_3$ , na vstupu LC-filtru má potom tvar jednopolaritních impulsů o maximální střídě 0,5.

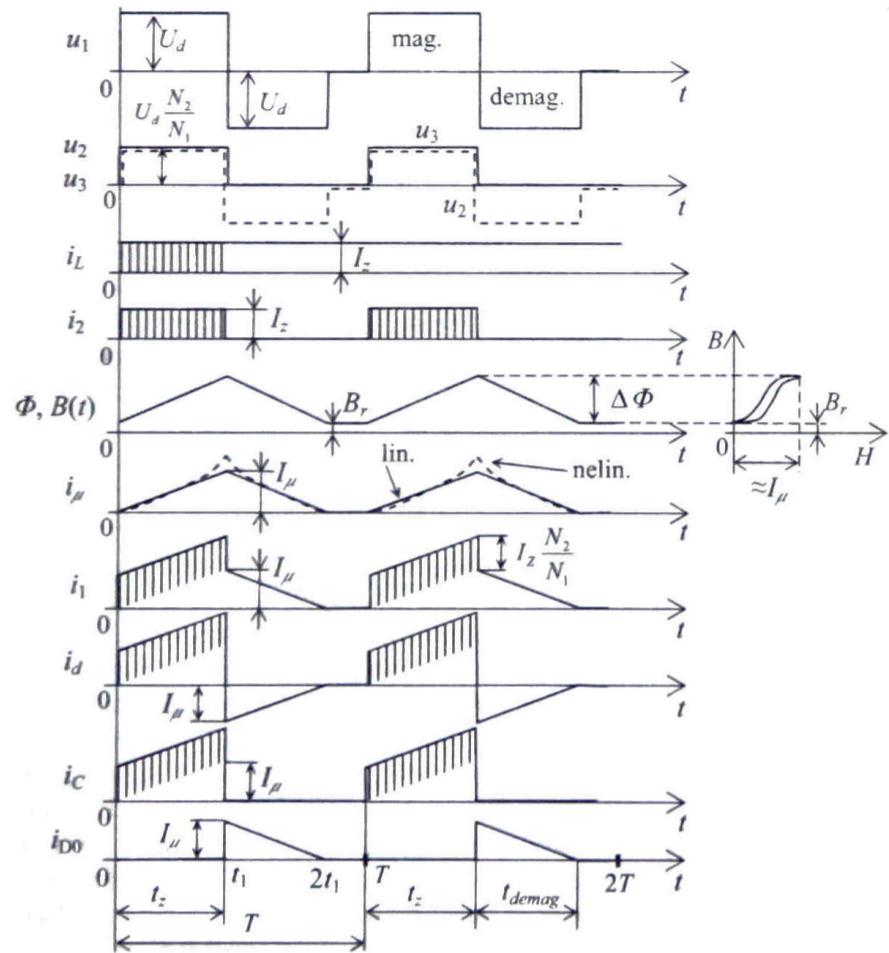
Sekundární proud  $i_2$  má podobu *pravoúhlých* proudových impulsů, protože pokud proud sekundárem teče, tlumivka s velikou indukčností ( $L \rightarrow \infty$ ) jej udržuje *konstantní*. S ohledem na vysoký pracovní kmitočet a na velký obsah harmonických je nutno učinit velmi přísna opatření proti vzniku skinefektu. Z toho důvodu nesmí být průměr sekundárního vodiče nebo tloušťka měděné fólie větší než  $2\delta$ , kde  $\delta$  je hloubka vniku. Totéž platí i o primárním vodiči.

Maximální doba zapnutí  $t_z = t_1$ , nesmí překročit hodnotu  $\frac{T}{2}$ , neboť pak dochází k lavinovitému přesycení transformátoru podle obr. 39.4.3. Jev je způsoben tím, že doby magnetizace a demagnetizace jsou stejně dlouhé, tj.  $t_z = t_{demag}$ . Demagnetizační proud proto zaniká v okamžiku  $2t_z$ . Pokud v případě c) doba zapnutí překročí  $\frac{T}{2}$ , tj.  $2t_z > T$ , magnetizační proud nestihne v rámci pracovního cyklu  $T$  klesnout na nulu. Demagnetizace tudíž není dokončena. Tokotvorný magnetizační proud  $i_\mu = I_0 + \frac{1}{L} \int u_1 dt$  je pak integrován z nenulové počáteční podmínky  $I_0$ , která se při každém následujícím cyklu zvyšuje. Proto proud makroskopicky postupně narůstá do nekonečna. Ve skutečnosti se zastaví na velké zkratové hodnotě

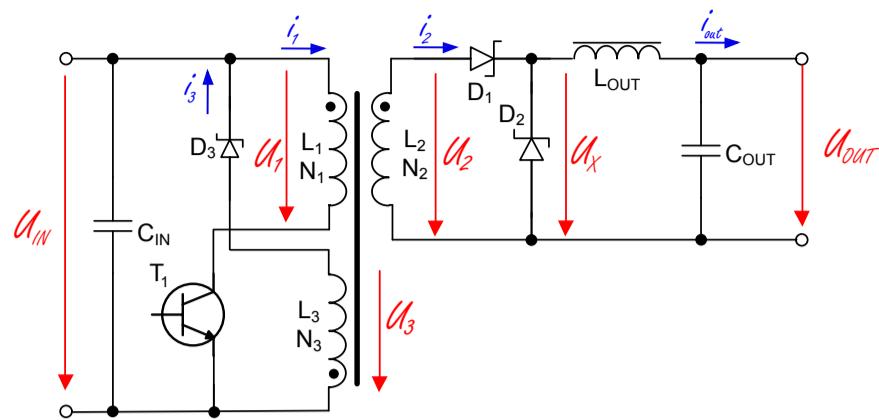
$\frac{U_d}{R_{Cu1}}$ . Podobně roste i magnetický tok. Jádro se tedy silně přesycuje, klesá jeho indukčnost a o to rychleji lavinovitě roste magnetizační proud. Výsledkem je velmi rychlá tepelná destrukce primárního vinutí (během několika sekund).

#### 39.4.1.2. Návrh transformátoru

#### 39.4.1.3. Jednočinný propustný měnič s demagnetizačním vinutím



Obrázek 39.4.2.: Jednočinný propustný měnič - průběhy důležitých veličin.



Obrázek 39.4.4.: Propustný měnič s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

#### 39.4.1.4. Popis činnosti

Nyní se věnujme podrobnějšímu rozboru funkce propustného měniče. Interval  $\delta T$  začíná **sepnutím tranzistoru  $T_1$**  kladným impulzem z řídicích obvodů do jeho báze [Ham96, s. 131], které přivede vstupní napětí na primární vinutí  $N_1$ . V kapitole 31.6.1 byl odvozen vztah 31.6.4 pro magnetizační tok v jádře transformátoru. Pro nynější případ platí  $u_1(t) = U_{in}$ . Pak 31.6.4 nabude tvaru [NVP99, s. 104]:

$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{N_1} U_{in} t \quad (39.4.2)$$

Takže po zapnutí tranzistoru tok lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci doby zapnutí  $\delta T$  bude mít své maximum

$$\Phi_{\mu_{max}} = \frac{1}{N_1} U_{in} \delta T \quad (39.4.3)$$

Během doby  $\delta T$  bude sekundární napětí  $u_2(t)$ :

$$u_2(t) = N_2 \frac{\Phi_\mu(t)}{dt} = \frac{N_2}{N_1} U_{in} = U_2 \quad (39.4.4)$$

Čili během doby  $\delta T$  je sekundární napětí konstantní. Protože jde o kladné napětí, je  $D_1$  otevřená,  $D_2$  zavřená a výstupní proud  $I_{out}$  musí téci ze sekundárního vinutí transformátoru.

Kolektorovým obvodem a primárním vinutím  $N_1$  teče proud  $i_{prim}$ . Propustně polarizovanou diodou  $D_1$  prochází transformovaný vstupní proud přes  $L_{out}$  do zátěže a výstupního filtrovního kondenzátoru  $C_{OUT}$ . Tento sekundární proud  $i_2$  se časem lineárně zvětšuje od určitého  $I_{L_{min}}$  a zároveň se lineárně zvětšuje také proud  $i_1$ , závislého na převodu transformátoru. Z kapitoly 31.6.1 víme, že primární proud zatíženého transformátoru bude mít hodnotu

$$i_1(t) = i_\mu(t) + I_2 \frac{N_2}{N_1} \quad (39.4.5)$$

Pro magnetizační proud  $i_\mu(t)$  přitom platí vztah (31.6.8). V našem případě je  $u_1(t) = U_{in}$  a proto tento vztah dostane konkrétní podobu:

$$i_\mu(t) = \frac{U_1 t}{L_1} \quad (39.4.6)$$

Vidíme, že stejně jako tok  $\Phi_\mu(t)$  tak i magnetizační proud  $i_\mu(t)$  lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci  $\delta T$  má magnetizační proud své maximum:

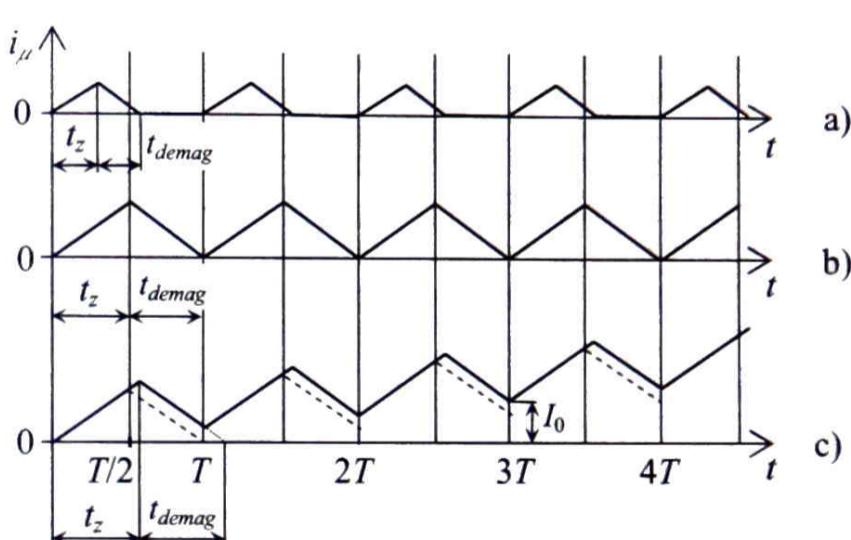
$$i_{\mu_{max}}(t) = \frac{U_1 \delta T}{L_1} \quad (39.4.7)$$

Během doby  $\delta T$  je odebírána energie ze zdroje  $U_{in}$  (složka  $I_{out} \frac{N_2}{N_1}$  primárního proudu) a dodávána do zátěže.

Nyní vypneme tranzistor  $T_1$ . Proud  $i_1(t)$  musí téměř skokem zaniknout. V jádře ale existuje na konci doby  $\delta T$  magnetický tok  $\Phi_{\mu_{max}}$ , odpovídající proudu  $I_{\mu_{max}}$ . Celková energie magnetického pole v okamžiku vypínání tranzistoru činí  $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}$ . Proud primárního vinutí je tranzistorem násilně přerušen.

Předpokládejme nejdříve, že neexistuje demagnetizační vinutí  $N_3$ . Pak by při skokovém zániku primárního magnetizačního proudu stejně prudce zanikl i s ním svázaný tok  $\Phi_{\mu_{max}}$ . Pokles toku s obrovskou (teoreticky nekonečnou) strmostí  $-\frac{d\Phi}{dt}$  způsobí vznik napěťového Diracova impulsu, opačné polarity oproti stavu v době  $\delta T$ , kdy tok narůstal. Tímto impulsem, přičteným k napětí  $U_1$ , je napěťově namáhan zavírající se tranzistor. Přitom se celá energie  $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}$  přemění na křemíkovém čipu v teplo a je přičinou jeho neodvratné destrukce. U reálného tranzistoru je velikost napěťového impulsu vždy omezena průrazným napětím tranzistoru. Nikdy totiž není tranzistor natolik pomalý, že by omezujícím faktorem byla malá strmost  $-\frac{di_C}{dt}$  zániku kolektorového proudu během vypínání. Destrukční energetické účinky však zůstávají v každém případě zcela ekvivalentní.

Aby popsaná situace nenastala, je zde demagnetizační vinutí  $N_3$ . Děj pak bude vypadat takto: Po vypnutí tranzistoru  $T_1$  se opravdu na primárním vinutí objeví napětí  $U'_1$  opačné polarity, než bylo  $U_1$  v sepnutém stavu, viz. obr. 39.4.5. Toto

Obrázek 39.4.3.: Demagnetizace transformátoru při různých dobách zapnutí  $t_z$ : a) dobrý stav  $t_z < \frac{T}{2}$ , b) mezní stav  $t_z = \frac{T}{2}$ , c) špatný stav  $t_z > \frac{T}{2}$

napětí však bude mít přesně definovanou velikost, kterou „dovolí“ vinutí  $N_3$ . Na tom se totiž objeví také indukované napětí  $u_3$ . Vzhledem k obrácené orientaci vinutí vůči  $N_1$  bude mít záporný pól „na zemi“ a kladný pól na diodě  $D_2$ . Toto napětí by „chtělo“ být opět teoreticky nekonečné, ale  $D_2$  se otevře a pracuje v součinnosti se zdrojem  $U_1$  jako napěťový omezovač, omezující napětí  $u_3$  na velikost  $U_1$ . Celá magnetizační energie  $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}$  je vinutím  $N_3$  odevzdána zpět do zdroje. Pak je zřejmé, že napětí indukované v primárním vinutí musí být:

$$U'_1 = u_3 \frac{N_1}{N_3} = U_1 \frac{N_1}{N_3} \quad (39.4.8)$$

Tento stav, kdy  $u_1 = -U_1$  a  $u_3 = U_1$ , trvá po dobu, než tok  $\Phi_\mu(t)$  klesne z počáteční hodnoty  $\Phi_{\mu_{max}}$  na nulu. K tomu je třeba konečné doby  $t_{demag}$ , neboť  $U_1$  není nekonečné a proto strmost poklesu  $\frac{d\Phi}{dt}$  nemůže být nekonečně velká. Velikost  $U_1$  je v této době konstantní a proto klesá tok lineárně. Celý jev se nazývá *demagnetizací jádra*.

Během demagnetizace se předává magnetizační energie jádra zpět do zdroje pomocí proudu  $i_3(t)$ . Proud  $i_3(t)$  je přímo úměrný klesajícímu toku  $\Phi_\mu(t)$  takto:

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \int u_3 dt = \frac{1}{L_3} \int \frac{N_3 d\Phi_\mu(t)}{dt} dt = \frac{N_3 \Phi_\mu(t)}{L_3} \quad (39.4.9)$$

Po skončení demagnetizace (uplynutí  $t_{demag}$ ) je již magnetický tok nulový, jádro je energeticky neutrální, proto i napětí  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  skokem zanikají na nulu. V neutrálním stavu soustava setrvává až do skončení doby  $(1 - \delta)T$ , tj. do zapnutí tranzistoru.

Pro magnetický tok během procesu demagnetizace musí platit:

$$\Phi_\mu(t) = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{U'_1 t}{N_1} \quad (39.4.10)$$

Po uplynutí  $t_{demag}$  je tok nulový. Položíme-li tedy  $\Phi_\mu(t)$  dle (39.4.10) rovný nule, lze odsud vyjádřit  $t_{demag}$ :

$$t_{demag} = \frac{N_1 \Phi_{\mu_{max}}}{U'_1} \quad (39.4.11)$$

Za  $\Phi_{\mu_{max}}$  dosadíme vztah (39.4.3) a za  $U_1$  vztah (39.4.8). Tím dostaneme:

$$t_{demag} = \frac{N_3}{N_1} \delta T \quad (39.4.12)$$

Je zřejmé, že musíme zajistit, aby  $(1 - \delta)T > t_{demag}$ , jinak by tok ještě nestačil úplně zaniknout a už bychom znova spínali tranzistor. V průběhu dalšího sepnutí by se tok (a magnetizační proud) zvýšil opět o hodnotu  $\Phi_{\mu_{max}}$  (resp.  $I_{\mu_{max}}$ , ale už z nenulové počáteční hodnoty a tak by neustále vzrůstal (během dalších period by se „aintegroval“ teoreticky na hodnotu  $\rightarrow \infty$ ), až by došlo k přesycení jádra a tím k prudkému lavinovitému růstu magnetizačního proudu (neboť by současně klesala indukčnost  $L_1$ ). Jev by postupoval až do zničení tranzistoru. Z výše uvedeného důvodu musí být maximální střída  $\delta$  omezena na hodnotu:

$$\delta_{max} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{demag}} \quad (39.4.13)$$

Dosazením (39.4.12) za  $t_{demag}$  dostaneme:

$$\delta_{max} = \frac{N_1}{N_1 + N_3} \quad (39.4.14)$$

Výstupní napětí  $U_{out}$  je rovno *střední hodnotě napětí*  $u_X$  a platí proto:

$$U_{out} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (39.4.15)$$

### 39.4.1.5. Proudové a napěťové dimenzování součástek

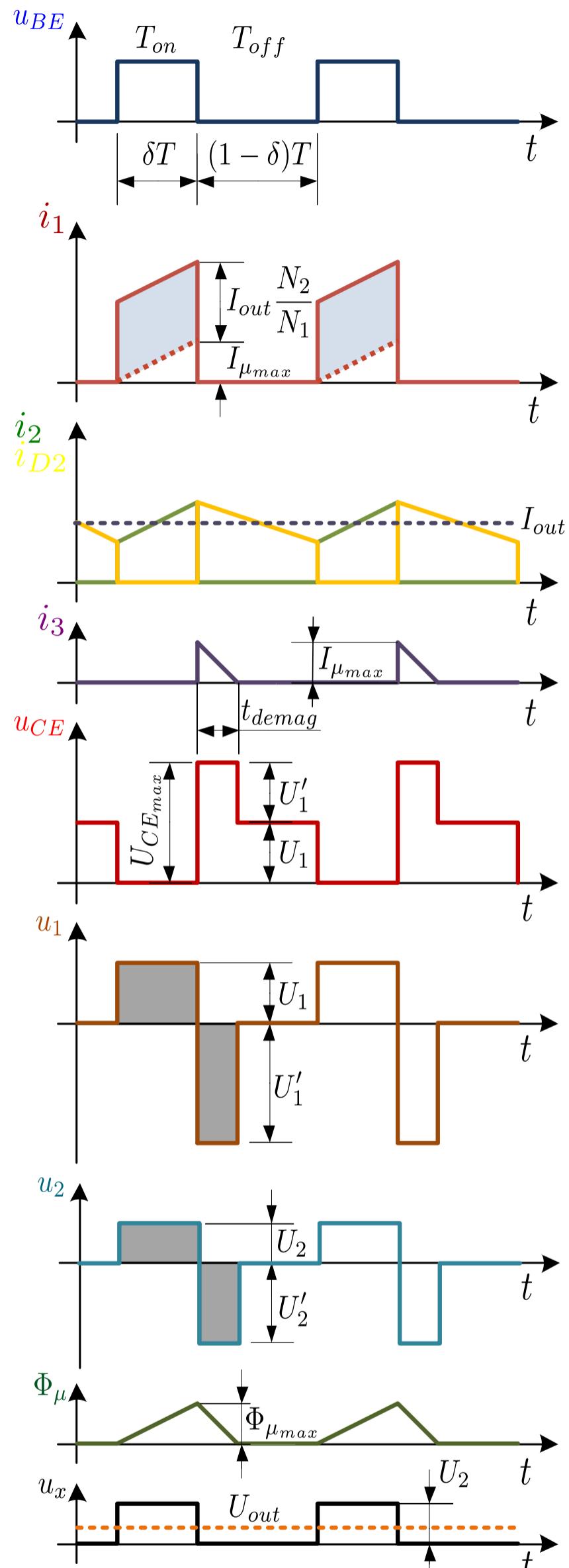
V době  $t_{demag}$  je tranzistor namáhan napětím  $U_{CE_{max}}$ :

$$U_{CE_{max}} = U_1 + U'_1 = U_1 + \frac{N_3}{N_1} U_1 = U_1 \frac{N_1 + N_3}{N_1} \quad (39.4.16)$$

- Volíme-li  $N_3 < N_1$ , je  $U'_1 > U_1$  a tedy namáhání  $U_{CE_{max}} > 2U_1$ . Zato je ale maximální dovolená střída  $\delta_{max} > 0,5$  a je tedy větší maximální dosažitelné výstupní napětí.
- Volíme-li  $N_3 > N_1$ , je  $U'_1 < U_1$  a je tedy  $U_1 < U_{CE_{max}} < 2U_1$ . Zato je ale maximální dovolená střída  $\delta_{max} < 0,5$  a je tedy menší maximální dosažitelné výstupní napětí.

Volba poměru  $N_3/N_1$  proto záleží na tom, co je v dané aplikaci více kritické, zda napěťové namáhání tranzistoru, či co největší dosažitelné výstupní napětí (s neměnným převodem  $N_2/N_1$ ). V praxi se nejčastěji volí  $N_3 = N_1$  z důvodu snadného souběžného (bifilárního) vinutí obou cívek - viz později.

- *Proudové a dimenzování  $T_1$ :*  
Zanedbáme-li magnetizační proud, pak lze psát, viz. obr. 39.4.5, pro



Obrázek 39.4.5.: Průběhy veličin propustného měniče s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

špičkovou, střední a efektivní hodnotu kolektorového proudu tranzistoru následující rovnice:

$$I_{1_{max}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \quad (39.4.17)$$

$$I_{1_{av}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (39.4.18)$$

$$I_{1_{rms}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\delta} \quad (39.4.19)$$

- Proudové a napěťové dimenzování  $D_1$ :

$$I_{D_{1max}} = I_{out} \quad (39.4.20)$$

$$I_{D_{1av}} = I_{out} \delta \quad (39.4.21)$$

$$I_{D_{1rms}} = I_{out} \sqrt{\delta} \quad (39.4.22)$$

$$U_{D_{1Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_3} \quad (39.4.23)$$

- Proudové a napěťové dimenzování  $D_2$ :

$$I_{D_{2max}} = I_{out} \quad (39.4.24)$$

$$I_{D_{2av}} = I_{out} (1 - \delta) \quad (39.4.25)$$

$$I_{D_{2rms}} = I_{out} \sqrt{1 - \delta} \quad (39.4.26)$$

$$U_{D_{2Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (39.4.27)$$

- Proudové a napěťové dimenzování  $D_3$ :

$$I_{D_{3max}} = I_3 = I_{\mu_{max}} \frac{N_1}{N_3} = \frac{U_1 \delta_{max} T}{L_1} \cdot \frac{N_1}{N_3} \quad (39.4.28)$$

$$I_{D_{3av}} = I_{3av} = \frac{I_3}{2} \delta \quad (39.4.29)$$

$$I_{D_{3rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_{demag}} \left( I_3 \frac{t}{t_{demag}} \right)^2 dt} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t_{demag}}{T}} \quad (39.4.30)$$

$$U_{D_{3Rmax}} = U_1 + U_1 \frac{N_3}{N_1} \quad (39.4.31)$$

**Poznámka 39.4.1.** Všimneme si, že funkce tohoto měniče je kromě transformátoru zcela analogická funkci snižujícího měniče z kap. 39.3.2. Horní spínač je zde rozdělen tak, že tranzistor je na primární straně (pro větší podobnost s obr. 39.3.7 lze v obr. 39.4.4 vzájemně zaměnit umístění tranzistoru a primárního vinutí transformátoru, tj. z kladného pólu  $U_{in}$  nejprve tranzistor). Dioda  $D_2$ , tvořící s tranzistorem horní spínač, je až na sekundární straně. Dioda  $D_1$  jen odděluje výstupní obvod od sekundárního napětí v době, kdy je záporné, protože toto napětí nemůže mít nenulovou stejnosměrnou složku (stejně tak ani napětí  $u_1$  a  $u_3$ ).

#### 39.4.1.6. Přehled metod demagnetizace jádra transformátoru

V kapitole 39.4.1.4 byl popsán jeden z možných způsobů, jak demagnetizovat jádro transformátoru, tak aby v dalším pracovním cyklu nedošlo k posunu pracovního bodu magnetického materiálu jádra a následně k jeho přesycení. Velikost magnetizačního proudu je dle vztahu 39.4.7 dána poměrem napěťové plochy  $U_{in} \cdot t_{on}$  přiložené na vinutí primární cívky a hodnotou její magnetizační indukčnosti ( $L_{mag} = L_1$ )

$$i_{mag} = \frac{U_{prim} \cdot t_{on}}{L_{mag}}$$

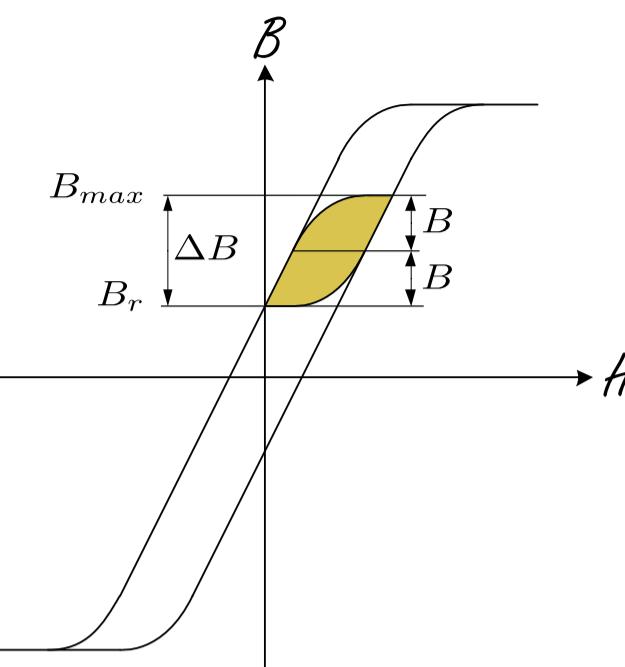
Pracovní oblast transformátoru je v prvním kvadrantu, jak naznačuje obr. 39.4.6, neboť polovodičový spínač přikládá mezi svorky primárního vinutí pouze unipolární pulzy. Měnič se také proto nazývá jednočinný, protože energie je ze zdroje předávána do zátěže pouze jedenkrát za periodu, v jednom tzv. aktivním běhu, tj. v době  $t_{on}$ , kdy je tranzistor sepnut a magnetická indukce se v jádře zvyšuje z hodnoty remanentní indukce  $B_r$  o velikost magnetického zdvihu  $\Delta B$ .

Pokud bychom měřili magnetizační proud primárního vinutí, dospěli bychom k průběhům na obr. 39.4.7, jenž vykazují stejnou vrcholovou hodnotu pro různé hodnoty vstupního napětí. Je to dáné tím, že pokud měnič během měření pracoval v uzavřené regulační smyčce, bude součin  $V_{in} \cdot t_{on}$  konstantní a za předpokladu, že magnetizační indukčnost je též nemenná, pak dle předchozí rovnice dospějeme  $i_{mag_{max}} = konst.$

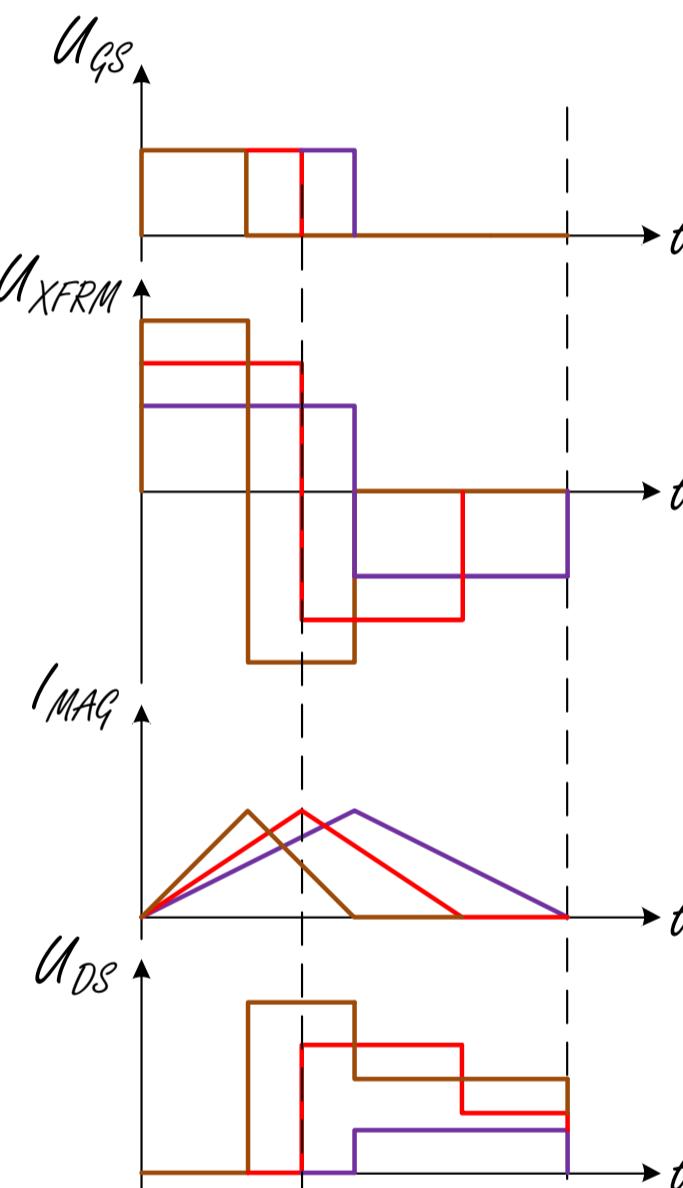
#### 39.4.1.7. Jednočinný propustný měnič s aktivním clampingem

#### 39.4.1.8. Vlastnosti měniče

Obecně pro všechny varianty propustných měničů s transformátorem lze říci, že jsou vhodné pro přenos velkých výkonů. Je to dáné principem činnosti, kdy proud podílející se na přenosu výkonu se nepodílí na magnetizaci jádra transformátoru (teče v době  $t_{on}$  a to jak na sekundární straně tak i na primární – kompenzace magnetických



**Obrázek 39.4.6.:** Transformátor jednočinného propustného měniče pracuje v prvním kvadrantu hysterezní smyčky



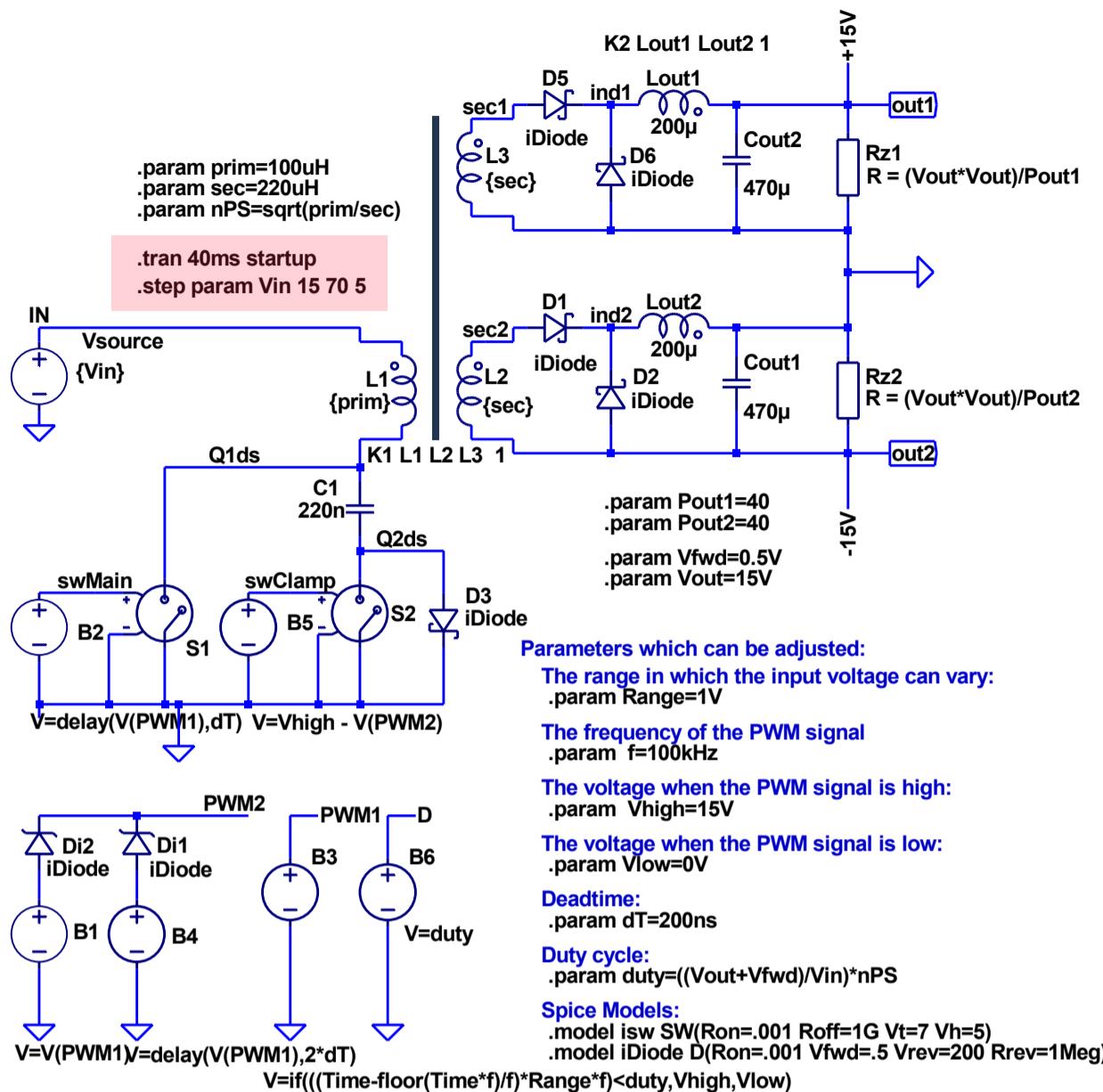
**Obrázek 39.4.7.:** Vrcholová hodnota magnetizačního proudu je konstantní pro jakékoli velikosti vstupního napětí, neboť regulační smyčka zajistí, aby napěťová plocha  $V_{in} \cdot t_{on}$  byla konstantní

účinku). Může se proto zvyšovat, aniž by rostlo sycení jádra transformátoru. Toto sycení je určeno pouze integrálem primárního napětí a počtem primárních závitů. Lze proto zvýšením pracovního kmitočtu docílit zmenšení velikosti transformátoru, jak to bylo vysvětleno na konci kap. 31.6.

#### 39.4.2. Jednočinný blokující měnič

Základem tohoto měniče je „invertující měnič se společnou tlumivkou“ z kapitoly 39.3.4. Všimneme si, že z původního schématu (obr. 8.12) vymizela tlumivka, jejíž funkci nyní zastane transformátor. Princip činnosti je vlastně úplně stejný, pokud si uvědomíme, že jádro nynějšího transformátoru je magnetováno stejně jako jádro tlumivky na obr. 8.12, viz. průběh  $i_L(t)$  v obr. 8.12 a průběh  $\Phi_\mu(t)$  v obr. 9.8. Jediný

### Model of the forward converter with active clamping technique



Obrázek 39.4.8.: Propustný měnič s aktivním clampingem

rozdíl je v tom, že stejných magnetických poměrů je nyní dosaženo pomocí dvou vinutí místo původního jednoho (v době  $t_1$  pomocí  $L_1$  a v době  $t_2$  pomocí  $L_2$ ). Tím se dosáhne galvanického oddělení. Vznikl tak transformátor, ovšem režim jeho činnosti je takový, že magnetické účinky v jádře se podobají tlumivce. Režim je zcela odlišný od režimu transformátoru v propustných měničích.

## 39.5. Metody regulace spínaných zdrojů

### 39.5.1. Základy impulzní regulace

Základním principem a současně odlišností impulsní regulace od regulace klasické je její nespojitost. To v zásadě znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí  $U_{out}$  stabilizováno zásahy regulačního člena pouze v určitých, časově omezených intervalech  $T_a$ . [Ham96]

Srovnejme pro názornost klasický a impulsní regulátor na úrovni blokových schémat. (obr. 4.1 a obr. 5.9). Vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál  $U_{REF}$ , zesilovač regulační odchylky  $A_u$ , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprostě odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpor výkonového regulačního člena v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní.

### 39.5.2. Regulační smyčka

#### 39.5.2.1. Porovnání regulátoru s napěťovým a proudovým řízením

The current mode control method uses two control loops –an inner, current control loop and an outer loop for voltage control. Figure 1 shows a forward converter (buck family) using current mode control. When the switching transistor is on, current through Rsense is proportional to the upward ramping filter inductor current. When the ramp voltage  $V_s$  reaches  $V_e$  (the amplified output voltage error), the switching transistor turns off. Thus, the outer voltage control loop defines the level at which

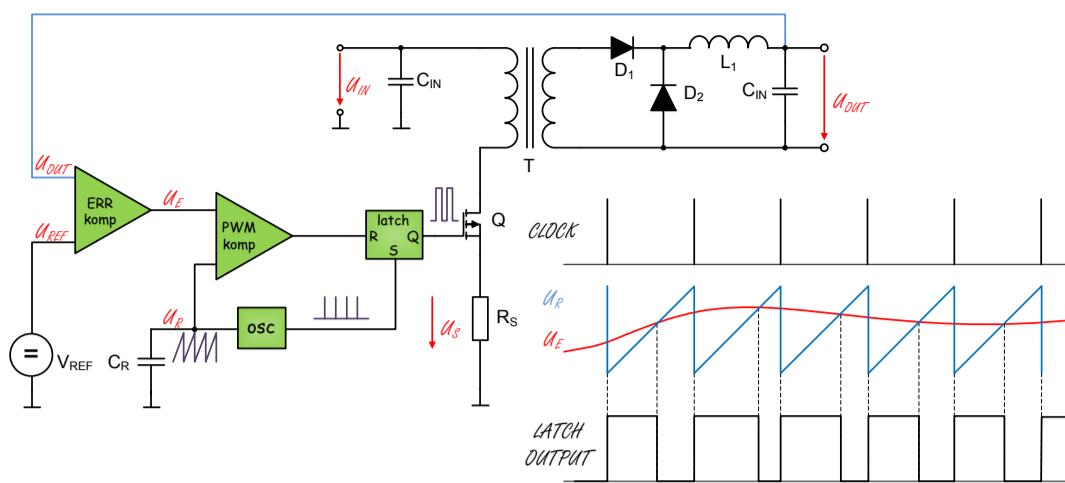
the inner loop regulates peak current through the switch and through the filter inductor. [SLUP075 ]

Výhody:

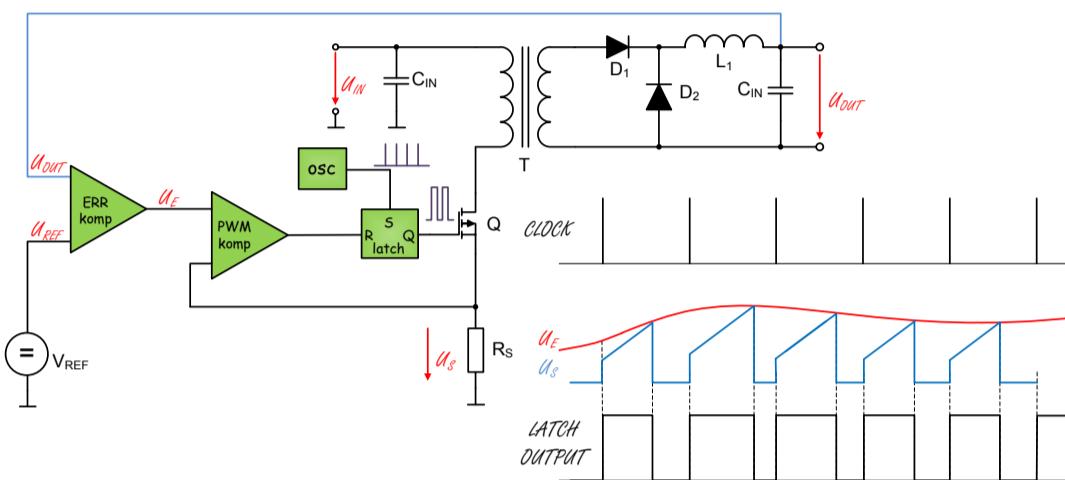
- Input voltage feed-forward, resulting in good open-loop line regulation.
- Simplified loop –inductor pole and 2nd order characteristic eliminated.
- Optimum large-signal behavior.
- No conditional loop stability problems.
- Flux balancing (symmetry correction) in push-pull circuits.
- Automatic pulse-by-pulse current limiting.
- Current sharing of paralleled supplies for modular power systems.
- Less complexity/cost (current sense/amp is not an added complication).

Nevýhody (continuous mode only):

- Peak/avg. current error and instability –slope compensation
- Noise immunity is worse because of shallower ramp.
- Half Bridge runaway
- DC open loop load regulation is worse.
- (1-D) current error in Boost or Flyback circuits.
- Loop irregularities with multiple output buck circuits.



Obrázek 39.5.1.: Regulátor s napěťovým řízením - Voltage mode control [[Mam99]]



Obrázek 39.5.2.: Regulátor s proudovým řízením - Current mode control [[Mam99]]

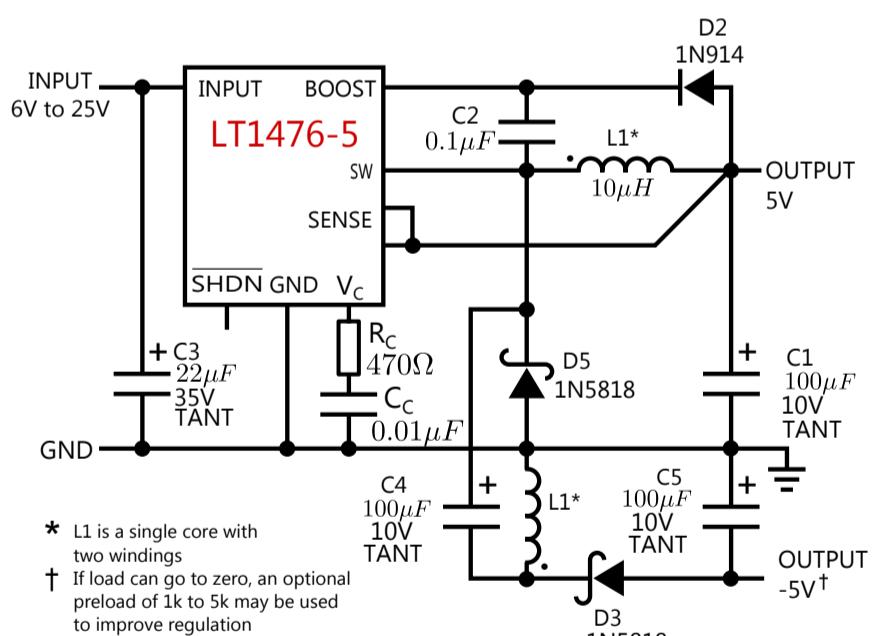
## 39.6. Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů

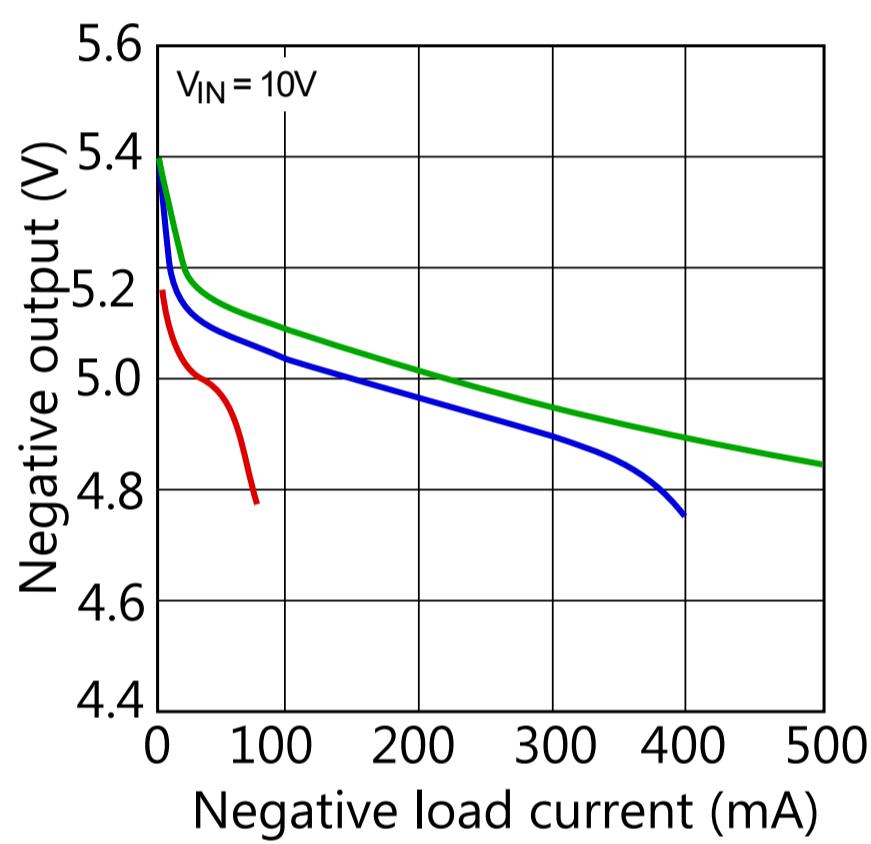
Existují dvě možnosti, jak provádět řízení pomocí PWM odlišující se *typem zpětné vazby*, která je buď čistě **napěťovou vazbou** (*voltage mode control*), nebo **napěťovou vazbou s vnitřní proudovou smyčkou** (*current mode control*). V následující diskusi se pokusíme konzistentním způsobem vysvětlit vlastnosti obou řídících algoritmů (slua119)

### 39.6.1. Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem

Toto řešení na obr. 39.6.1 nabízí spínaný zdroj symetrického napětí za použití několika dalších součástek a induktoru s dvojím vinutím. Základní části zdroje je napěťový regulátor snižující vstupní kladné napětí založený na obvodu LT1376-5 se spínacím kmitočtem 500 kHz a možností zatížení proudem až 1,5 A.

Druhá polovina induktoru  $L_1$  společně s  $D_3$ ,  $C_5$  a  $C_4$  je určena pro tvorbu záporného napětí pomocí **SEPIC topologie** - Single Ended Primary Inductance Converter. Kondenzátor  $C_4$  vnucuje oběma vinutím stejné napětí. Bez něho pracuje tato část jako blokující měnič (*flyback*), která by sice poskytla -5V, ale jen naprázdno se značnou závislostí na zátěži (nedokonalá vazba mezi vinutími).

Obrázek 39.6.1.: Spínaný zdroj napětí  $\pm 5V$  vystačí s jedinou indukčností s dvojím vinutím. [Nelo8]. Linear Technology Corp. (Dual Output Regulator Uses Only One Inductor)



Obrázek 39.6.2.: Zatěžovací charakteristika záporné větve.

**Část XV.**

**Číslicové elektronické systémy**



# 40. Číslicové systémy a signály

## Obsah

<b>40.1. Co je číslicový systém</b>	193
40.1.1. Dvojstavové signály	193
<b>40.2. Kombinační logické funkce</b>	193
40.2.1. Realizace kombinačních logických funkcí	193
40.2.2. Základní pravidla Booleovy algebry	193
40.2.3. Zjednodušování zápisu logické funkce	194

## 40.1. Co je číslicový systém

V číslicovém systému se pracuje se signály, které mají jen konečný počet diskrétních hodnot. Tím se liší od systémů analogových, u kterých jsou signály spojité, tj. mohou ve vymezeném rozsahu nabývat nekonečný počet hodnot. V číslicovém systému může i čas být veličinou diskrétní, tj. signály se mohou měnit jen v určitých okamžicích. Takovéto číslicové systémy se pak nazývají **synchronní** - na rozdíl od systémů **asynchronních**, u kterých ke změnám signálů může docházet kdykoliv. Synchronní systémy jsou podstatně častější, neboť existence přesně stanovených okamžiků změn signálů zavádí "pořádek" do časování signálů v systému a tím usnadňuje jeho konstrukci i výrobu v podobě integrovaných obvodů. Přesné časování je zajištěno hodinovými (taktovacími) impulsy, což je velmi významný signál systému [Pino6, s. 14].

Číslicové systémy se dělí na dvě skupiny

- **kombinační systémy**,
- **sekvenční systémy**.

U kombinačních systémů jsou výstupní signály závislé pouze na momentálních vstupních signálech. U sekvenčních systémů jsou výstupní signály závislé nejen na momentálních vstupních signálech, ale i na vstupních signálech v minulosti. Systém tedy má *vnitřní paměť*.

### 40.1.1. Dvojstavové signály

Jak již bylo řečeno, číslicové signály mají jen konečný počet diskrétních hodnot. V naprosté většině jrou to právě jen dvě hodnoty. Dvouhodnotové nebo dvoustavové signály snižují nároky na výrobní tolerance. Bylo tak možné zavést výrobní postupy, které umožňují hromadnou a levnou výrobu součástek.

Předpokládejme, že číslicové součástky jsou napájeny kladným napětím  $+U_{CC}$ . Jedna hodnota bude vyjádřena nižším napětím, druhá vyšším napětím. Dvě možné hodnoty signálu označíme jako '0' a '1' (v souladu se značením v **Boolově algebře**).

## 40.2. Kombinační logické funkce

Základním pojmem při úvahách o kombinačních systémech představuje pojem kombinací logická funkce. *Kombinační logická funkce* je pravidlo přiřazující každé kombinaci hodnot 0 a 1 přiřazených vstupním proměnným z definičního oboru funkce jedinou hodnotu výstupní proměnné. Pro daný počet vstupních proměnných je těchto funkcí konečný počet. Kombinační logické funkce mohou být úplně nebo neúplně určené. *Úplně určená kombinační logická funkce* je taková funkce, jejíž definiční obor zahrnuje všechny kombinace vstupních proměnných. U *neúplně určené kombinační logické funkce* její definiční obor nezahrnuje některé tyto kombinace. Kombinací se zde rozumí kombinace hodnot 0 a 1 přiřazených jednotlivým vstupním proměnným. Úplně určeným funkcím se někdy říká úplné funkce, funkcím neúplně určeným pak neúplné funkce.

### 40.2.1. Realizace kombinačních logických funkcí

Nejčastěji se v digitální technice setkáme s těmito způsoby realizace kombinační logické funkce:

- pomocí digitálních integrovaných obvodu typu NAND, NOR (popř. AND, OR) a dalších obvodů realizujících základní kombinační logické funkce - např. AND-OR-INVERT, EX-OR atd.,
- pomocí multiplexeru a demultiplexeru,
- pomocí speciálních kombinačních integrovaných obvodu (převodníky kódu, generátory parity, sčítacíky, násobičky a podobně - sem patří i použití multiplexeru a demultiplexeru),
- pomocí paměti (např. PROM a EEPROM),
- pomocí programovatelných logických obvodu (PLD).

#### 40.2.1.1. Použití multiplexerů a demultiplexerů k realizaci kombinačních logických funkcí

### 40.2.2. Základní pravidla Booleovy algebry

Nejdůležitější postuláty:

$$x + 0 = x \quad x \cdot 0 = 0 | x + 1 = 1 \quad x \cdot 1 = 1 \quad \text{Univerzální vazba} \quad (40.2.1)$$

$$x + \bar{x} = 1 | x \cdot \bar{x} = 0 \quad \text{Doplňek} \quad (40.2.2)$$

$$x + x = x | x \cdot x = x \quad \text{Idempotence} \quad (40.2.3)$$

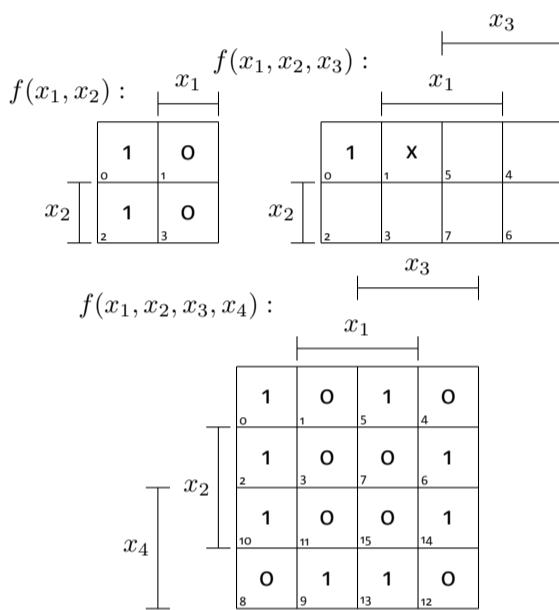
### 40.2.3. Zjednodušování zápisu logické funkce

Logická funkce vyjádřená úplnou součtovou (disjunktivní) nebo součinovou (konjunktivní) formou z pravdivostní tabulky není jediným možným zápisem logické funkce. Dá se většinou nalézt jednodušší algebraický zápis, z něhož můžeme předpokládat, že povede na realizaci méně složitého číslicového obvodu. Který ze zápisů logické funkce povede na minimální složitost obvodu závisí nejen na použitých logických členech, ale též na dalších kritériích: zpoždění, spotřeba obvodu, jeho spolehlivost, potlačení hazardních stavů, atd. První metodou je *algebraická minimalizace*,

#### 40.2.3.1. Karnaughova metoda minimalizace pomocí mapy

Jednou z možností grafického zápisu logické funkce je mapa. Nejpoužívanější je **Karnaughova mapa** (čti "karnau"). Mapa je uspořádána do čtverce či obdélníka a to tak, že *sousední pole* se liší vždy jen v jedné proměnné.

Mapu chápame jako uspořádaný zápis pravdivostní tabulky vzniklou transformací řádku tabulky na jedno pole mapy [PS94, s. 25]. Tedy, každé pole mapy jednoznačně odpovídá určité kombinaci všech proměnných. Nalézá-li se pole pod pruhem vyznačeným u proměnné, bude tato proměnná nenegovaná. Nalézá-li se mimo pruh, bude proměnná negovaná. Tak např. pole označené jako  $x$  v mapě pro tři proměnné bude odpovídat kombinaci  $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ . Jak je názorně vidět, z pravdivostní tabulky funkce lze snadno sestavit její mapu a naopak. Řádkům pravdivostní tabulky, ve kterých je funkční hodnota 1, odpovídají pole mapy s vepsanou jedničkou; obdobně to platí i pro nuly. V mapě lze znázornit i neurčené stavy prázdným políčkem (nebo pomlčkou) [Wak99, s. 219].



Obrázek 40.2.1.: Příklad Karnaughovy mapy pro dvě, tři a čtyři proměnné

Přiřazení kombinací hodnot vstupních proměnných (součinů) jednotlivým polím mapy se označuje jako **kódování**. Řádky i sloupce Karnaughovy mapy jsou kódovány **Grayovým kódem**. Základní vlastností Grayova kódu je to, že sousední slova konstantní délky se liší pouze v jedné proměnné. Tuto vlastnost splňuje i první a poslední kódové slovo (kód je uzavřen sám do sebe) viz 40.2.2. Právě tato vlastnost je využita při konstrukci Karnaughovy mapy - souřadnice polí jsou uspořádány tak, že u sousedních polí se liší jen v jedné proměnné. Tudiž geometricky sousedící pole jsou sousední i v algebraickém smyslu (liší se v jediné proměnné).

Každé pole s hodnotou 1 odpovídá **mintermu** z pravdivostní tabulky. Sousední pole tedy odpovídají mintermům lišícím se jen jednou proměnnou, a ty lze spojovat do **implikantů**. Sousední jsou i pole na okrajích mapy, neboť i ta se liší jen v jedné proměnné (konec řádek, konec sloupců a rohy mapy). Spojováním výrazů sousedních políček provádíme minimalizaci, která díky jasnému geometrickému postupu vyhýbá problematickému hledání těchto součtů nebo součinů.

Index	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f$	Index	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f$
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

Tabulka 40.2.1.: Pravdivostní tabulka logické funkce čtyř proměnných, kterou se pokusíme vyjádřit také pomocí Karnaughovy mapy

Číslo	Binární kód	Grayův kód
	$x_1, x_2, x_3$	$x_1, x_2, x_3$
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Tabulka 40.2.2.: Binární a Grayův kód pro tři proměnné

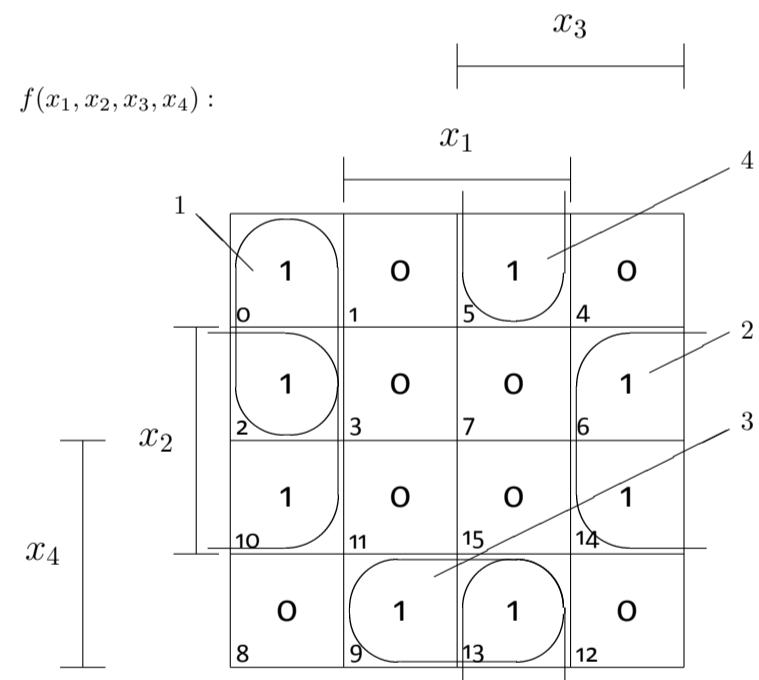
Spojování polí se vyznačí **smyčkou**. Pole po dvojicích sousední lze spojovat do větších myšek, ty opět do větších atd. Každá myška tedy musí mít stranu dlouhou právě  $2^k$  polí, kde  $k$  je celé kladné číslo. Myšky zahrnují 2 pole, 4 pole, 8 pole, atd. Každá myška v mapě odpovídá implikantu funkce. Princip minimalizace spočívá v pokrytí všech jedniček<sup>1</sup> (a libovolných neurčených stavů) soustavou myšek pro součtovou formu, přičemž:

- myšky musí být co možná největší,
- myšek musí být co nejmenší počet.

Tento princip je ilustrován na následující mapě funkce čtyř proměnných. Jako příklad vezmeme funkci definovanou pravdivostní tabulkou 40.2.1. Odpovídající Karnaughova mapa pro čtyři proměnné je na obrázku 40.2.1. Základní součtový tvar této funkce je dán rovnicí:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \\ & + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4. \end{aligned} \quad (40.2.4)$$

V mapě můžeme vytvořit celkem čtyři myšky, kterými spojíme sousední políčka. Všimněme si, že některé myšky se částečně překrývají. To však nevadí, protože k logické funkci můžeme na základě postulátu 40.2.3 (*idempotence*) přidat tentýž součin několikrát.



Obrázek 40.2.2.: Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy. Zakreslené myšky byly vytvořeny tak, aby každá zahrnovala co největší počet polí s vepsanou jedničkou.

Smyška ze dvou políček označená na mapě 40.2.2 jako č. 1, může být vyjádřena:

$$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 = \bar{x}_1x_3\bar{x}_4(\bar{x}_2 + x_2) = \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \quad (40.2.5)$$

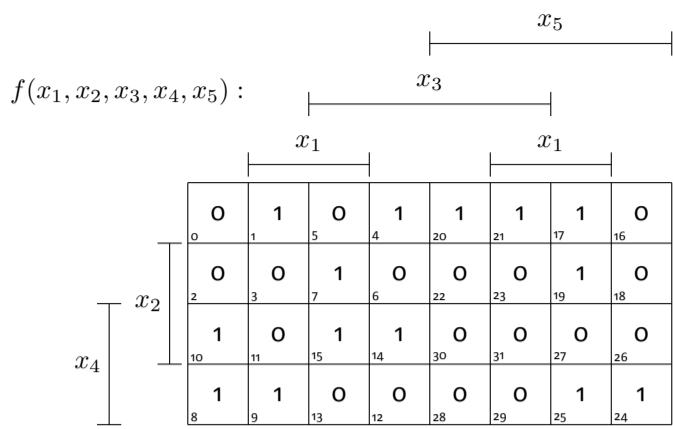
Smyška ze čtyř polí na pravé a levé straně (označená č. 2):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 = & \\ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3(\bar{x}_4 + x_4) + \bar{x}_1x_2x_3(\bar{x}_4 + x_4) = & \\ \bar{x}_1x_2(\bar{x}_3 + x_3) = \bar{x}_1x_2 \end{aligned} \quad (40.2.6)$$

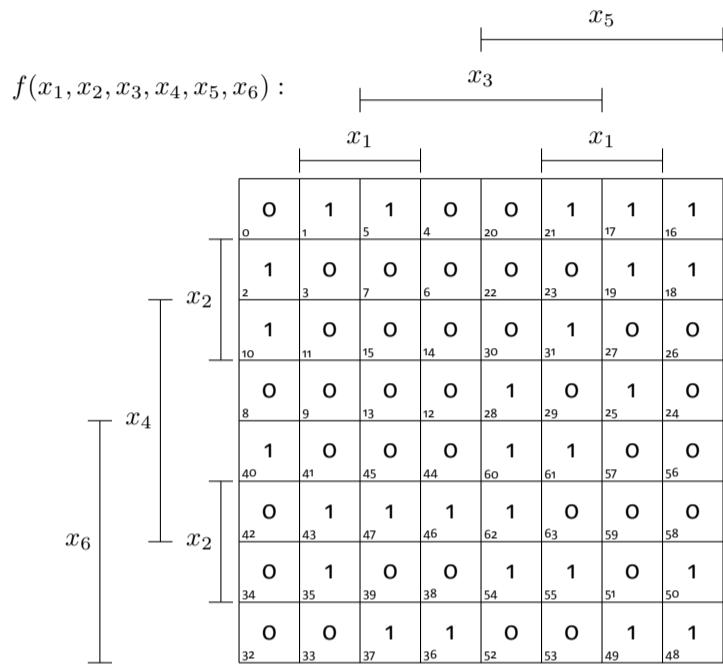
Smyška ze dvou polí v poslední řadce (označená č. 3):

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 = \quad (40.2.7)$$

<sup>1</sup>nul pro součinovou formu



**Obrázek 40.2.3.: Příklad Karnaughovy mapy pro pět proměnných**



**Obrázek 40.2.4.: Příklad Karnaughovy mapy pro šest proměnných**

## References

- [Pino06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on p. 193).

[PS94] J. Podlešák and P. Skalicky. *Spínací a číslicová technika*. ČVUT, 1994 (cit. on p. 194).

[Wak99] J. F. Wakerly. *Digital Design Principles and Practices*. PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. 194).



# 41. Číslicové součástky a technologie

## Obsah

<b>41.1. Rozdělení číslicových integrovaných obvodů</b>	197
41.1.1. Vlastnosti logických hradel	197
<b>41.2. Bipolární digitální obvody</b>	197
<b>41.3. Unipolární digitální obvody</b>	197
<b>41.4. Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd</b>	198
41.4.1. 3.3V → 5V	198
41.4.2. 5V → 3.3V	199

## 41.1. Rozdělení číslicových integrovaných obvodů

Logické integrované obvody zpracovávají nespojité signály, které nabývají jen konečného malého počtu úrovní. Naprostá většina dnes vyráběných logických IO využívá pouze dvou logických úrovní pracujících s dvojkovou číselnou soustavou. Jejich funkci a vzájemné spojování do soustav lze popsat pomocí Booleovy algebry (viz kap. 40.2.2) [MKPO2, p. 8].

Digitální IO se vyrábějí v technologii *bipolární* (kap. 41.2) i *unipolární* 41.3 (především MOS). Základní kriteria, podle kterých posuzujeme kvalitu (vhodnost pro danou aplikaci) jednotlivých druhů (tříd) digitálních obvodů jsou:

- rychlosť,
- příkon,
- odolnost proti rušení,
- široký rozsah pracovních teplot,
- nízké rušení generované vlastním obvodem (proudové špičky při změnách stavu),
- snadnost realizace složitějších logických funkcí,
- dosažitelná hodnota základních hradel a možnosti velké integrace,
- nízká cena.

Tyto požadavky splňuje každá třída digitálních obvodů pouze částečně. Proto se ve výrobě udržuje několik různých tříd digitálních obvodů, z nichž každá má zdůrazněnou některou z výše uvedených vlastností tak, jak to odpovídá její fyzikální podstatě.

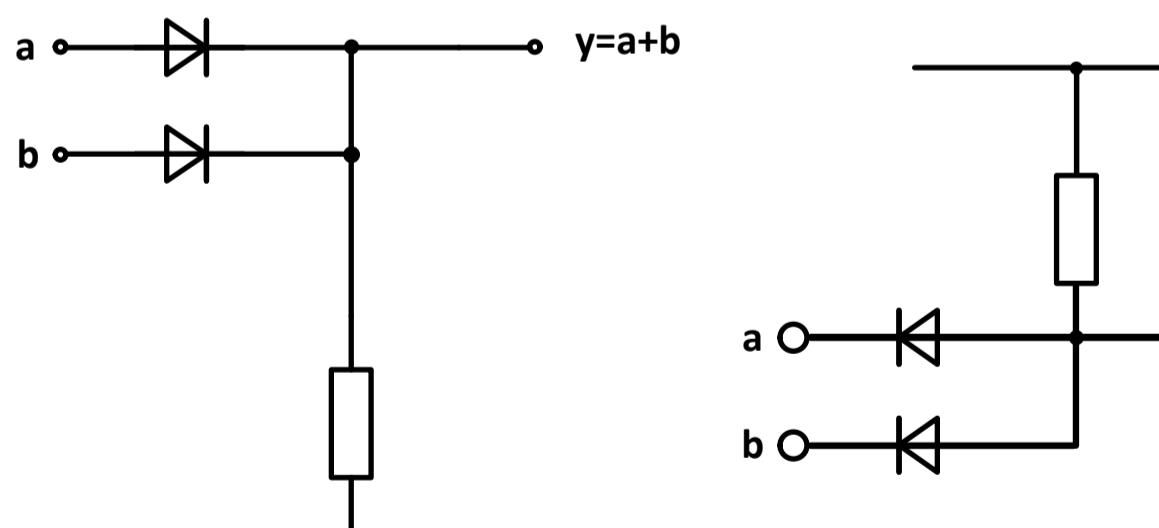
### 41.1.1. Vlastnosti logických hradel

## 41.2. Bipolární digitální obvody

V bipolární technologii jsou skupiny logických obvodů charakterizovány z hlediska režimu činnosti tranzistorů a tvoří dvě základní skupiny. Jsou to logické IO - s tranzistory pracujícími:

- v saturaci: tranzistor spínán z vypnutého stavu do saturace,
- v nesaturačním - aktivním režimu: tranzistor přepínán mezi stavem vypnutým (nebo slabě sepnutým) a aktivním (nesaturačním) módem.

V obou skupinách je přepínanou součástkou *tranzistor NPN*. Komplementární tranzistor *PNP* je využíván pouze jako zatěžovací prvek nebo jako proudový zdroj; pro tyto účely se rovněž využívá i rezistor.



(a) Součtový člen

(b) Součinový člen

Obrázek 41.2.1.: Diodová logika

## 41.3. Unipolární digitální obvody

#### 41.4. Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd

Vyskytne-li se v číslicovém návrhu potřeba použít logická hradla z odlišných napěťových tříd, budeme postaveni před problém jejich vzájemného propojení zachovávající jejich funkčnost. Pro správnou volbu vhodného napěťového přizpůsobení logických hradel z různých rodin, je nutné znát nejen jejich rozhodovací napětí, ale také následující parametry, které jsou uvedeny v tabulce 41.4.1 [Mico6, p. 22]:

- maximální úroveň logické '0' na vstupu hradla -  $V_{IL_{max}}$
- minimální úroveň logické '1' na vstupu hradla -  $V_{IH_{min}}$
- maximální úroveň logické '0' na výstupu hradla -  $V_{OL_{max}}$
- minimální úroveň logické '1' na výstupu hradla -  $V_{OH_{min}}$

	$V_{OH_{min}}$	$V_{OL_{max}}$	$V_{IH_{min}}$	$V_{IL_{max}}$
5V TTL	2.4V	0.5V	2.0V	0.8
3.3V LVTTL	2.4V	0.4V	2.0V	0.8
5V CMOS	4.7V ( $V_{CC} - 0.3V$ )	0.5V ( $0.7 \times V_{CC}$ )	3.5V ( $0.7 \times V_{CC}$ )	1.5V ( $0.3 \times V_{CC}$ )
3.3V LVCMOS	3.0V ( $V_{CC} - 0.3V$ )	0.5V ( $0.7 \times V_{CC}$ )	2.3V ( $0.7 \times V_{CC}$ )	1.0V ( $0.3 \times V_{CC}$ )

Tabulka 41.4.1.: Rozhodovací úrovně napěťových tříd: 5V TTL, 3.3V LVTTL, 5V CMOS, 3.3V LVCMOS

Úroveň logické nuly a jedničky na výstupu určuje konstrukce koncové části digitálního obvodu. Nejčastější provedení jsou na obr. 41.4.1. Jsou-li různé digitální obvody připojeny na společnou sběrnici, může dojít k situaci, kdy některý z výstupních vývodů bude buzen vyšším napětím než je napájecí napětí příslušného obvodu. I v tomto případě výstupní část digitálního obvodu rozhoduje o výsledném chování. Shrňme základní vlastnosti technologií číslicových obvodů uvedených na obr. 41.4.1:

- Bipolární koncový stupeň nedovoluje plný rozkmit výstupního signálu. Je-li obvod napájen 5 V, je výstup při úrovni H limitován na  $V_{CC} - 2 \times V_{BE}$  (cca 3.6V). To je hodnota, která na rozhraní 3 V systému nezpůsobuje příliš velký napěťový rozdíl, a tedy proud, tekoucímu z napájecího zdroje 5 V systému do zdroje 3 V systému.
- Výstupní napětí typické CMOS součástky se prakticky pohybuje v rozsahu GND -  $V_{CC}$ .
- Některé součástky mají výstup typu *open collector* - OC resp. *open drain* - OD, tj. neexistuje vnitřní obvod, jenž by uvedl výstup do stavu H. K tomu je zapotřebí *pull-up* rezistoru, který připojí výstup k napětí, které může být i vyšší než je napájecí - VCC. Očividně, tento způsob umožňuje relativně snadné rozhraní, ale pro dosažení vyšších rychlostí je nutné volit relativně malý odpor, což zvyšuje spotřebu.
- U NMOS stupně je podobně jako u bipolárního stupně výstupní napětí logické úrovně H omezeno úbytkem na kanálu horní NMOS tranzistoru na  $V_{CC} - V_{TH} \approx 3.5$  V. Obvykle je tedy možné přímé řízení 3V systému.

##### 41.4.1. 3.3V → 5V

Nejjednodušším a nejvíce žádoucím způsobem je přímé připojení 3.3V výstupu k 5V vstupu, což lze provést pouze v případě, že jsou splněny následující požadavky:

- $V_{OH}(3.3V) > V_{IH}(5V)$ ,
- $V_{OL}(3.3V) < V_{IL}(5V)$ .

Hodnoty prahových napětí logické nuly a jedničky v předchozí tabulce 41.4.1 dokládají, že v případě logiky 3.3V LVCMOS a 5V TTL je možné použít přímého připojení.

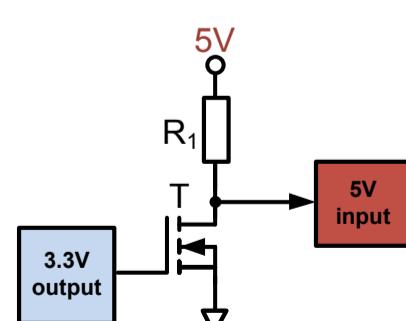
Pokud oba tyto požadavky nejsou splněny, je třeba použít na rozhraní obou logik přizpůsobovací obvody, popsané v následujících textu.

###### 41.4.1.1. MOSFET Translator

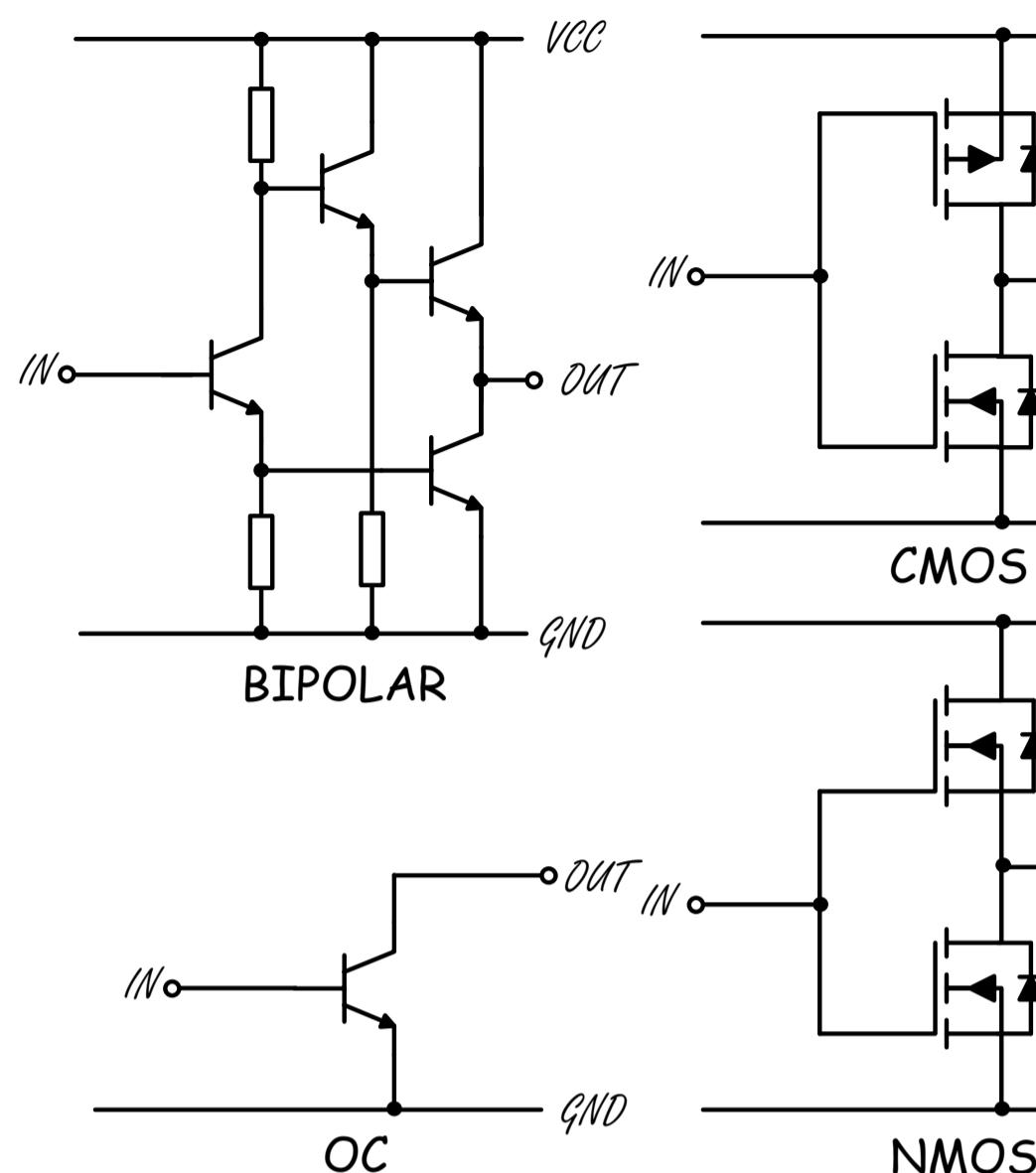
Levné a jednoduché řešení problému vzájemného přizpůsobení logických obvodů odlišných napěťových tříd, pro které platí  $V_{OH}(3.3V) < V_{IH}(5V)$  nabízí použití MOSFETu s prahovým napětím

$$V_{GS_{th,max}} < V_{OH_{min}}.$$

Při výběru hodnoty  $R_1$  je třeba vzít v úvahu:



Obrázek 41.4.2.: 3.3V → 5V: N-MOSFET



Obrázek 41.4.1.: Koncové stupně bipolárních, CMOS, NMOS obvodů a obvodů s otevřeným kolektorem [Tin95, p. 2]

- spínací rychlosť vstupu,
- zvýšení spotřeby díky proudu přes rezistor  $R_1$ .

Při změně logické úrovně '0' → '1' na vstupu 5V logiky je nutné počítat se zpožděním, které je dáno časovou konstantou RC článku, tvořeného rezistorem  $R_1$  a celkovou kapacitou na vstupu hradla. Důsledkem je tedy určitá minimální spínací perioda:

$$T_{SW_{min}} = 3 \cdot R_1 \cdot C_{IN},$$

která je vyšší, čím nižší spotřeba se návrhář snaží dosáhnout ( $R_1 \uparrow$ ). Zpoždění při spínání '1' → '0' má příznivější hodnotu, neboť  $R_{dsON} \ll R_1$ .

###### 41.4.1.2. Diodový Offset

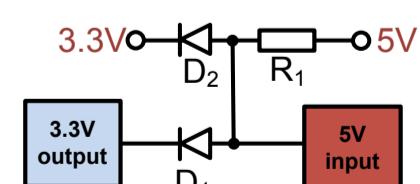
Hodnoty vstupního prahového napětí 5V CMOS a výstupní prahová napětí pro 3.3V LVTTL a LVCMOS jsou uvedeny v tabulce 41.4.2

Threshold	5V CMOS IN	3.3V LVTTL OUT	3.3V LVCMOS OUT
High	> 3.5V	> 2.4V	> 3.0V
Low	< 1.5V	< 0.4V	< 0.5V

Tabulka 41.4.2.: Přehled vstupní a výstupních prahových napětí různých logik, chceme-li ke vstupu 5V CMOS připojit 3.3V LVTTL nebo 3.3V LVCMOS. [Tin95]

Všimněme si, že obě prahová napětí vstupu 5V CMOS logiky jsou o volt vyšší než u výstupu 3.3V logiky. Zapotřebí je tedy obvod, který zvyšuje vysokou a nízkou úroveň prahového napětí.

Pokud bychom vytvořili posunutí o alespoň 0.7V pro obě úrovně prahového napětí, dosáhli bychom vzájemného přizpůsobení. Obvod na



Obrázek 41.4.3.: 3.3V → 5V: Diodový offset

obr. 41.4.3, posuneme hodnotu nízké úrovně výstupního prahového napětí o úbytek v propustném směru diody  $D_1$  (typicky 0,7V), na 1,1V až 1,2V. Úroveň vysokého prahového napětí se nastavuje pomocí pull-up rezistoru a diody  $D_2$  vázané na 3,3V napájení. Výstupní napětí je tedy také posunuto přibližně 0,7V nad 3,3V napájení, tj. na 4,0 až 4,1V, což je vysoko nad 3,5V prahem vstupu 5V CMOS logiky.

**Poznámka 41.4.1.** Aby obvod fungoval správně, musí být pull-up rezistor podstatně menší než vstupní odpor 5V CMOS logiky, aby se zabránilo snížení výstupního napětí díky efektu vstupního odporového děliče a také musí být dostatečně velký, aby proud tekoucí do 3,3V napájení a výstupu hradla byl v mezích specifikace.

#### 41.4.1.3. Komparátor

Základní funkce komparátoru je následující:

- napětí na invertující (-) vstupu je větší než na neinvertujícím vstupu (+), výstup komparátoru se nastaví do nízké úrovni,
- je-li napětí na neinvertujícím vstupu (+) větší než na invertujícím vstupu (-), výstup komparátoru se nastaví do vysoké úrovni.

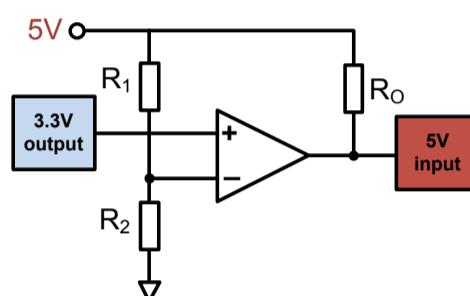
##### Výpočet hodnoty odporu $R_1$ a $R_2$ :

Poměr  $R_1$  a  $R_2$  je závislý na napětí logické nuly a jedničky na výstupu hradla 3,3V logiky. Invertující vstup by měl být nastaven do poloviny mezi prahovými hladinami  $V_{OL}$  a  $V_{OH}$ . Pro LVCMS je toto napětí rovno

$$1.75V = \frac{3V + 0.5V}{2}.$$

Budeme-li volit velikost  $R_2$ , pak hodnotu odporu  $R_1$  snadno dopočítáme dle následující rovnice:

$$R_1 = R_2 \left( \frac{5V}{1.75V} - 1 \right).$$

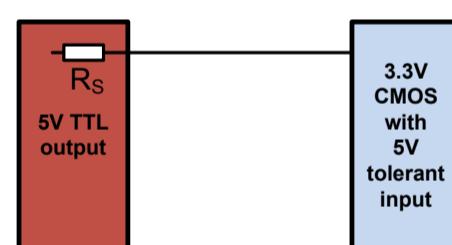


Obrázek 41.4.4.: 3,3V → 5V: Komparátor;  $R_1 = 1,8k\Omega$ ,  $R_2 = 1k\Omega$

#### 41.4.2. 5V → 3,3V

##### 41.4.2.1. Přímé propojení

Hradla napěťové třídy 5V mají výstupy s typickými prahovými hodnotami  $V_{OH} = 4,7V$ ,  $V_{OL} = 0,4V$  zatímco hradla 3,3V LVCMS mají vstupy s prahovými hodnotami  $V_{IH} = 0,7 \times V_{DD}$ ,  $V_{IL} = 0,2 \times V_{DD}$ . Je-li tedy na 5V výstupu logická nula, bude také správně interpretována 3V vstupem, neboť platí  $V_{OL} = 0,4 < V_{IL} = 0,8$ . Ani v případě logické jedničky nevzniká žádný konflikt, neboť  $V_{OH} = 4,7 > V_{IH} = 2,1$ . Pokud je tedy 3V vstup 5V tolerantní, je možné přímé propojení, v opačném případě je třeba použít některou z následujících technik.



Obrázek 41.4.5.: 5V → 3,3V: Přímé propojení

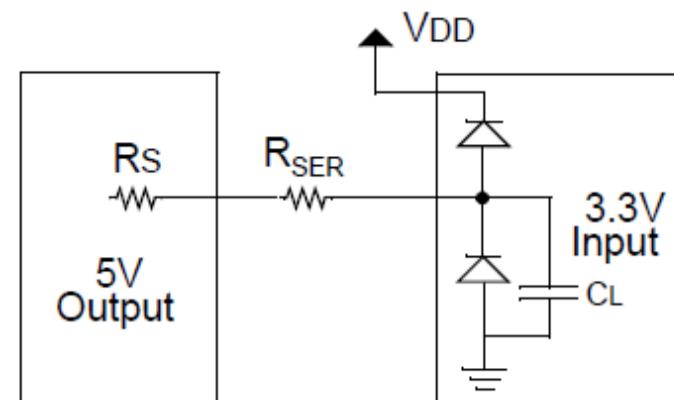
##### 41.4.2.2. Diodový omezovač

Některé digitální obvody mají své vstupy chráněny vnitřními omezovacími diodami tzv. diode clamp (obr. 41.4.6a). Proteče-li těmito diodami větší proud než udávají katalogové hodnoty, může dojít k poškození vstupu, nebo v lepším případě k efektu latching-up. Typický 5V výstup má kolem  $10\Omega$ , proto chceme-li využít těchto diod, musíme přidat sériový odpor, jenž limituje velikost propustného proudu. Nepřijemným důsledkem je ovšem vzniklý RC článek se vstupní kapacitou hradla  $C_L$ , který snižuje rychlosť. Není-li vstup takto chráněn je možné jej doplnit externí diodou dle obr. 41.4.6b.

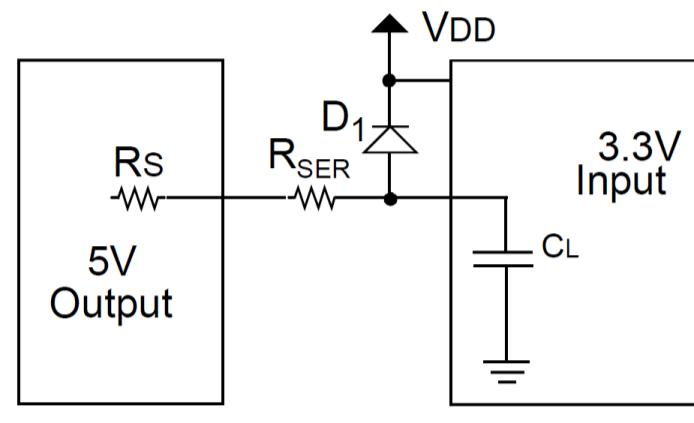
Dalším problémem je proud, injektovaný z 5V výstupu skrz omezovací diodu do 3,3V napájení. Tento proud může způsobit zvýšení napájecího napětí 3,3V obvodů, což může vést k jejich zničení. Proto lze s výhodou použít PNP tranzistor zapojený dle obr. 41.4.7.

##### 41.4.2.3. Napěťový dělič

A simple resistor divider can be used to reduce the output of a 5V device to levels appropriate for a 3,3V device input. An equivalent circuit of this interface is shown in Figure 41.4.8. Typically, the source resistance,  $R_S$ , is very small (less than 10 ohms) so its affect on  $R_1$  will be negligible provided that  $R_1$  is chosen to be much



(a) Vnitřní omezovací diody



(b) Externí omezovací dioda

Obrázek 41.4.6.: 5V → 3,3V: Použití omezovacích diod pro ochranu vstupu integrovaného obvodu

larger than  $R_S$ . At the receive end, the load resistance,  $R_L$ , is very large (greater than 500 k ohms) so its affect on  $R_2$  will be negligible provided that  $R_2$  is chosen to be much less than  $R_L$ .

There is a trade-off between power dissipation and transition times. To keep the power requirements of the interface circuit at a minimum, the series resistance of  $R_1$  and  $R_2$  should be as large as possible. However, the load capacitance, which is the combination of the stray capacitance,  $C_S$ , and the 3,3V device input capacitance,  $C_L$ , can adversely affect the rise and fall times of the input signal. Rise and fall times can be unacceptably long if  $R_1$  and  $R_2$  are too large.

Neglecting the affects of  $R_S$  and  $R_L$ , the formula for determining the values for  $R_1$  and  $R_2$  is given by Equation 41.4.1.

$$\frac{V_S}{R_1 + R_2} = \frac{V_L}{R_2} \quad (41.4.1)$$

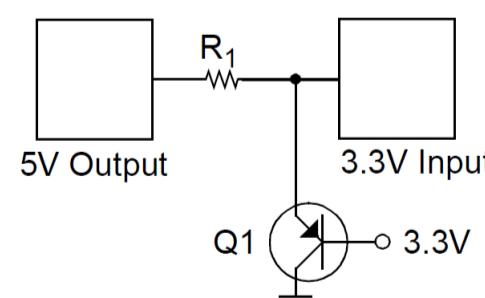
$$R_1 = \frac{(V_S - V_L)}{V_L} R_2 \quad (41.4.2)$$

$$R_1 = 0,515 \cdot R_2 \quad (41.4.3)$$

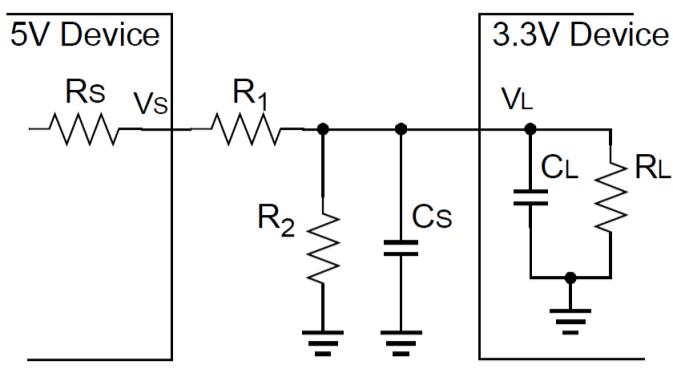
The formula for determining the rise and fall times is given in Equation 41.4.4. For circuit analysis, the Thevenin equivalent is used to determine the applied voltage,  $V_A$ , and the series resistance,  $R$ . The Thevenin equivalent is defined as the open circuit voltage divided by the short circuit current. The Thevenin equivalent,  $R$ , is determined to be  $0,66 \cdot R_1$  and the Thevenin equivalent,  $V_A$ , is determined to be  $0,66 \cdot V_S$  for the circuit shown in Figure 41.4.8 according to the limitations imposed by Equation 41.4.4.

$$t = -R \cdot C \cdot \ln \left( \frac{V_F - V_A}{V_I - V_A} \right) \quad (41.4.4)$$

kde  $t$  = Rise or Fall time,  $R = 0,66 \cdot R_1$ ,  $C = C_S + C_L$ ,  $V_I$  = Initial voltage on  $C$



Obrázek 41.4.7.: 5V → 3,3V: Active clamp - Přechod báze-emitor funguje jako omezovací dioda, ovšem s tím rozdílem, že jen malé procento celkového proudu z 5V výstupu teče do 3,3V napájení. Převážná část teče kolektorem do země. Poměr bázového a kolektorového proudu je určen proudovým zesílením tranzistoru, které je typicky 10 až 400



Obrázek 41.4.8.: 5V → 3,3V: napěťový dělič

$(V_L)$ ,  $V_F$  = Final voltage on  $C$  ( $V_L$ ),  $V_A$  = Applied voltage ( $0.66 \cdot V_S$ ).

Příklad 41.4.1. As an example, suppose the following conditions exist:

- Stray capacitance = 30 pF,
- Load capacitance = 5 pF,
- Maximum rise time from 0.3V to 3V ≤ 1 μs
- Applied source voltage  $V_S$  = 5V

Solve Equation 41.4.4 for  $R$ :

$$R = -\frac{t}{C \cdot \ln \frac{V_F - V_A}{V_I - V_A}}$$

Substitute values:

$$R = -\frac{10 \cdot 10^{-7}}{35 \cdot 10^{-12} \cdot \ln \frac{3 - 0.66 \cdot 5}{0.3 - 0.66 \cdot 5}}$$

Thevenin equivalent maximum  $R$ :

$$R = 12408$$

Solve for maximum  $R_1$  and  $R_2$ :

$$R_1 = 0.66 \cdot R \quad R_2 = \frac{R_1}{0.515} \quad (41.4.5)$$

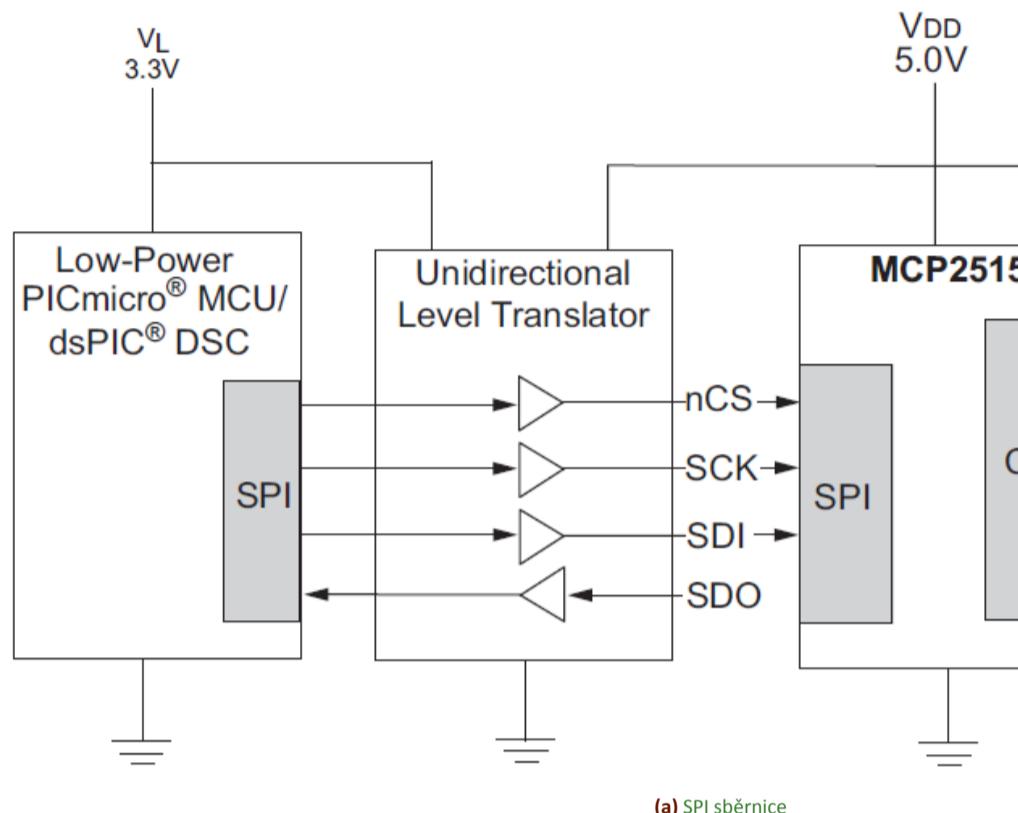
$$R_1 = 8190 \quad R_2 = 15902 \quad (41.4.6)$$

#### 41.4.2.4. Level translator

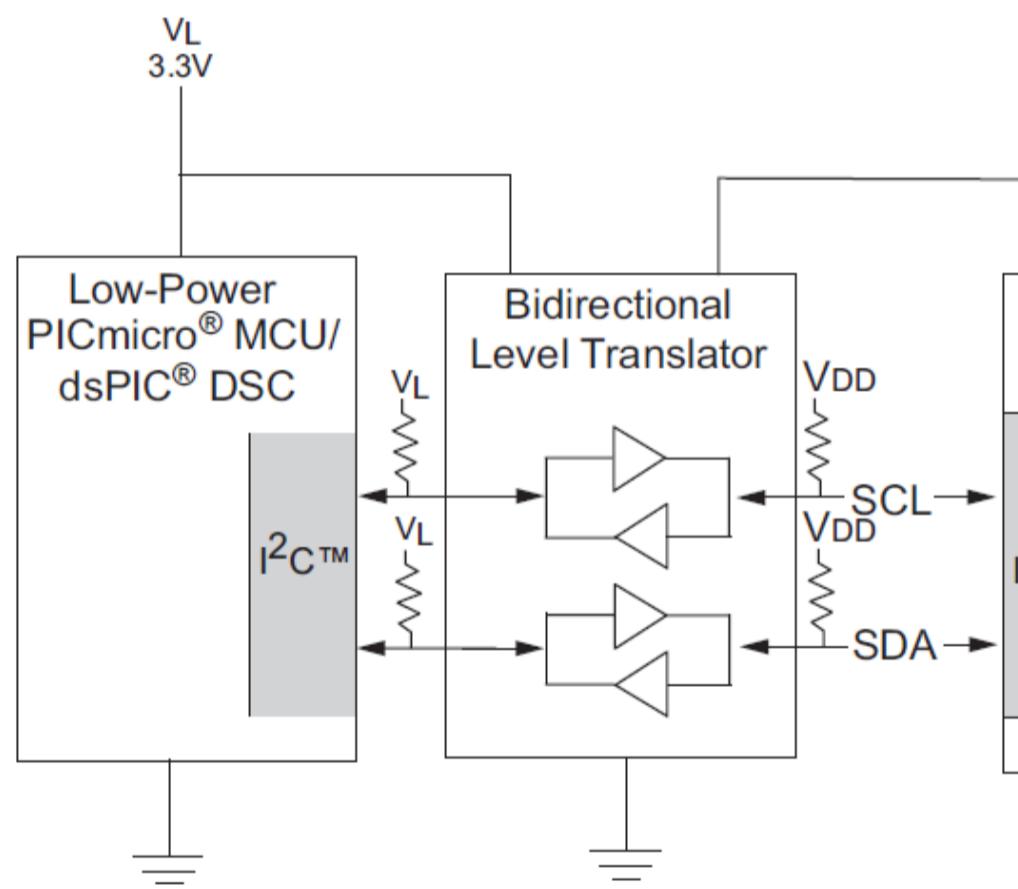
While level translation can be done discretely, it is often preferred to use an integrated solution. Level translators are available in a wide range of capabilities. There are unidirectional and bidirectional configurations, different voltage translations and different speeds, all giving the user the ability to select the best solution.

## References

- [Mic06] Microchip. "3V Tips 'n Tricks". In: *Microchip DS41285A* (2006), p. 56 (cit. on p. 198).
- [MKP02] V. Musil, J. Kolouch, and R. Prokop. *Návrh digitálních integrovaných obvodů a jazyk VHDL*. Ed. by V. Brno. VUT Brno, 2002 (cit. on p. 197).
- [Tin95] T. A. Tinus van de Wouw. "Interfacing 3V and 5V applications". In: *Philips Semiconductors AN240* (Sept. 1995), p. 11 (cit. on p. 198).



(a) SPI sběrnice



(b) I2C sběrnice

Obrázek 41.4.9.: 5V → 3,3V: Board-level communication between devices (e.g., MCU to peripheral) is most often done by either SPI or I2C. For SPI, it may be appropriate to use a unidirectional level translator and for I2C, it is necessary to use a bidirectional solution.

**Část XVI.**

**Mikroprocesorová technika**



## 42. Procesory AVR

### Obsah

<a href="#">42.1. AVR Architektura</a> . . . . .	203
<a href="#">42.1.1. Strojový cyklus</a> . . . . .	203
<a href="#">42.1.2. Prefetch a pipelining</a> . . . . .	203

### 42.1. AVR Architektura

AVR architektura vychází z koncepce rychle přístupného registrového pole, které obsahuje 32 obecně použitelných registrů délky 8 bitů. Přístup do registrového pole je proveden v jediném strojovém cyklu. To znamená, že během jednoho strojového cyklu lze vykonat jednu aritmeticko-logickou operaci<sup>1</sup>.

Tato technika umožňuje vyšší výkon ve srovnání s mikrokontroléry řady 8051, které disponují instrukcemi o délce od 12 do 48 hodinových cyklů, navíc se pro výpočty musí používat akumulátor, který je jen jeden. Registrové pole lze v tomto smyslu chápat jako skupinu akumulátorů.

#### 42.1.1. Strojový cyklus

Strojový cyklus mikrokontrolérů AVR přímo odpovídá hodinovému cyklu. Nedorhází k žádnému dělení hodinových cyklů jako například u mikrokontrolérů řady 8051<sup>2</sup>.

#### 42.1.2. Prefetch a pipelining

Mikrokontroléry AVR používají jednoduchý *předvýběr instrukce* (**prefetch**) umožňující *jednofázové zřetězení instrukcí* (**pipelining**).

<sup>1</sup>oba operandy aritmeticko-logické operace jsou načteny z registrového pole, operace je provedena a výsledek směřuje opět do registrového pole v jediném strojovém cyklu

<sup>2</sup>jeden strojový cyklus obsahuje 12 hodinových cyklů



## 43. ANSI-C pro mikrokontroléry

### 43.1. Stručný úvod

#### Obsah

43.1. Stručný úvod . . . . .	205
------------------------------	-----

---



**Část XVII.**

**Programovatelné logické obvody**



# 44. Architektura

## Obsah

<b>44.1. Typy struktur programovatelných logických obvodů . . . . .</b>	<b>209</b>
44.1.1. Historie . . . . .	209
44.1.2. Obvody typu Simple Programmable Logic Device . . . . .	210
44.1.3. Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD	212
44.1.4. Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA . .	213
44.1.5. Terminologie . . . . .	213
<b>44.2. Dynamické parametry PLD . . . . .</b>	<b>214</b>

## 44.1. Typy struktur programovatelných logických obvodů

Programovatelný logický obvod nebo programovatelné logické zařízení, často také PLD (*programmable logic device*) nebo FPD (*Field-Programmable Device*), je elektronická součástka (obvod) používaná pro vytváření digitálních obvodů. Na rozdíl od hradel, registrů a jiných digitálních obvodů není funkce zařízení tohoto druhu v době výroby ještě definovaná. Než může být PLD použito, musí být nejprve naprogramováno.

### 44.1.1. Historie

Historické kořeny moderních programovatelných polí jsou v prvních programovatelných pamětech typu PROM (*firma Radiation, 1970*) a jejich zákaznický programovatelných verzích EPROM (*Intel, 1971*) a EEPROM (*Intel, 1978*). Paměť PROM lze využít pro realizaci kombinacních logických funkcí tak, že paměť využijeme jako tzv. *vyhledávací tabulku LUT* (angl. *Lookup Table*). V tomto případě přivádíme na adresové vodiče PROM paměti vstupní signály (proměnné). Obsah paměti PROM vytvoříme tak, že na adresy jejichž hodnota je tvořena vektorem hodnot vstupních proměnných uložíme hodnoty, které jsou tvořeny vektory požadovaných výstupních hodnot. Výstupní datové signály paměti PROM pak reprezentují výstupy kombinací logiky. Tímto způsobem můžeme např. paměti PROM o velikosti 2 Kb s organizací 256x8 bitů (8 adresových vodičů, 8 datových vodičů), vytvořit programovatelný logický obvod, kterým lze realizovat 8 kombinacních funkcí s 8 vstupními signály (proměnnými). Výhodou takového realizace je, že všechny realizované funkce mají stejné zpoždění ze vstupu na výstup a to pro všechny možné kombinace vstupních hodnot. Na principu generátorů logických funkcí pomocí paměti (LUT) je založena funkce obvodů FPGA.

Permanentní paměti, jako takové, ale neumožňovaly úspornou realizaci logické funkce. Mezi první programovatelné logické obvody lze zařadit obvody PLA (angl. *Programmable Logic Array*), neboť v roce 1970 společnost Texas Instruments – TI podařilo vyuvinout maskou programovatelný integrovaný obvod TMS2000, založený na paměti ROAM (angl. *Read Only Associative Memory*) společnosti IBM. TMS2000 disponoval 17 vstupy, 18 výstupy s 8 JK klopnými obvody. Obvod bylo možné programovat modifikací vodivé propojovací masky během výroby (tj. koncový uživatel jej nemohl programovat). Obvody PLA obsahovaly pole hradel AND následované polem hradel OR. Logická funkce tedy vznikala v disjunktivní formě, tj. jako součet součinů. Tento způsob tvorby logické funkce se uchytíl a na tomto principu je založena funkce dnešních obvodů architektur SPLD a CPLD. Nicméně se tyto obvody na trhu příliš neprosadily.

Vývoj však pokračoval dál a v roce 1975 přišla na trh firma Signetics Corporation s obvody nazvanými FPLA - (*Field Programmable Logic Array*), konkrétně se jednalo o obvod 82S100. Po převzetí firmy Signetics firmou Philips byl tento obvod označován také jako PLS100. Obvody FPLA tvořilo programovatelné pole AND následované programovatelným polem hradel OR. Tyto obvody však měly poměrně dlouhou dobu přenosu signálu ze vstupu na výstup. Pro návrh obvodů neexistoval žádný jazyk, a tak musel návrhář nastavovat přímo hodnoty jednotlivých programovatelných buňek. Tyto nevýhody spolu s poměrně vysokou cenou způsobili malé rozšíření těchto obvodů.

Dalším významným krokem bylo uvedení obvodů PAL - (*Programmable Logic Array*). Tyto obvody navrhla firma MMI – Monolithic Memories, Inc v roce 1978. Obvody PAL vycházeli z obvodů FPLA a obsahovaly programovatelné pole hradel AND, které bylo následováno pevným neprogramovatelným polem hradel OR. Ke každému hradlu OR tak bylo možno připojit pouze omezený počet výstupů hradel AND (součinů). Díky tomuto zjednodušení došlo ke snížení doby přenosu signálu ze vstupu na výstup. Oba tyto typy obvodů FPLA i PLA byly totiž založeny na bipolární PROM technologii s programovatelnými pojistkami tzv. *fusible-link*. Programování bylo realizováno vstříknutím dostatečně velkého náboje, který způsobil přepálení vybrané vnitřní pojistky. Zbývající neporušené pojistky se staly součástí implementovaného číslicový obvodu. Pojistky ovšem zvyšují zpoždění signálu v obvodu, zvětšují složitost a ve výsledku i cenu. Počet součinů, které byly připojeny na vstup hradla OR, byl na základě praktických zkušeností stanoven na osm. Velkou výhodou těchto obvodů bylo, že se daly programovat v tehdy již běžných programátorech pamětí PROM. Mezi první obvody řady PAL patří například PAL16L8 (kombinační výstupy) a PAL16R8 (výstupy s registry).

Firma MMI dále napsala pro tyto obvody návrhový software, který umožňoval popsat číslicový systém pomocí velmi jednoduchého jazyka ve formě booleovských rovnic a z něj pak vygenerovat výstup, jímž bylo možné obvody PAL naprogramovat. Tím došlo k významnému zjednodušení vlastního návrhu obsahu těchto obvodů. Tento software se jmenoval PALASM (*PAL Assembler*) a firma MMI ho zveřejnila ve formě zdrojového kódu napsaného v jazyce FORTRAN. Program PALASM umožňoval dokonce softwarovou simulaci navrženého obvodu. Díky funkcím návrhu a simulace lze PALASM označit za první návrhový systém pro PLD obvody. Všechny zmíněné

obvody dnes řadíme do první generace PLD obvodů. Za zmínu ještě stojí, že firmy Signetics Corporation a MMI již mezi dnešními výrobcí programovatelných obvodů nenajdeme.

Vývoj v oblasti PLD obvodů pokračoval a postupně se začaly objevovat nové PLD obvody, které řadíme již do druhé generace. V roce 1983 uvedla firma AMD (*Advanced Micro Devices*) obvod PAL22V10. Tento obvod byl založen na obvodech PAL popsaných v předchozím odstavci, přinesl však jedno významné vylepšení, a to tzv. **výstupní makrobuňku** (OLMC - angl. *Output Logic Macro Cell*). Tyto obvody bývají označovány jako obvody PAL s makrobuňkou. Výstupní makrobuňka byla umístěna na každém výstupu obvodu. Každou makrobuňku bylo možné naprogramovat buď jako kombinační nebo registrový výstup. Dále bylo možné u jakékoli makrobuňky programovat, zda má být výstup v přímé nebo negované formě. Výstup makrobuňky byl třístavový, ovládaný jedním logickým součinem, což umožňovalo přepnutí makrobuňky z výstupního režimu do funkce vstupu. Tento typ obvodu vyrábělo svého času kromě firmy AMD mnoho dalších firem, např. Cypress Semiconductor, Lattice Semiconductor a Texas Instruments.

Všechny dosud zmíněné obvody měly jednu nevýhodu - byly programovatelné pouze jednou (OTP - *One Time Programmable*). Díky rozvoji technologie u pamětí EPROM se dostala tato technologie i do oblasti PLD obvodů a tudíž se na trhu objevili PLD obvody, jejichž obsah bylo možné smazat pomocí ultrafialového záření - obvody lze opakován mazat a znova programovat.

V roce 1984 vstoupila na scénu firma DATA I/O se svým návrhovým systémem **ABEL**, jenž disponoval jazykem vyšší úrovně, určený pro popis číslicových systémů (HDL - *Hardware Description Language*), který byl nazván stejně jako návrhový systém, tj. ABEL - *Advanced Boolean Expression Language*. Jazykem ABEL lze popsat číslicový systém pomocí booleovských rovnic, pravidlostní tabulky a stavových automatů, přičemž tyto způsoby je možné kombinovat. Práva na jazyk ABEL získala po několika akvizicích firma XILINX. Tento jazyk již sedmou revizi a dodnes ho některé současné návrhové systémy podporují (např. Xilinx a Lattice Semiconductor). Pro návrh nových číslicových systémů založených na PLD obvodech se však doporučuje používat některý z novějších HDL jazyků, např. jazyk VHDL nebo jazyk Verilog.

Další vývoj PLD obvodů pokračoval s nástupem technologie paměti EEPROM a jejím využitím v PLD obvodech. Této nové technologie bylo využito zejména u PLD obvodů označovaných jako GAL - *Generic Array Logic*. Obvody GAL lze zařadit do třetí generace PLD obvodů. Obvody typu GAL jsou také zařazovány do třídy jednoduchých programovatelných obvodů (SPLD).

Na konci osmdesátých let minulého století nastává v oblasti PLD obvodů bouřlivý vývoj. Vývojem a výrobou PLD se na konci osmdesátých a začátkem devadesátých let již zabývá mnoho firem a vývoj PLD obvodů již nelze od této doby přehledně rozdělit ani stručně popsat. V průběhu tohoto období vznikají nové řady PLD obvodů, nazývané CPLD - *Complex Programmable Logic Device*. Jmenujme např. alespoň obvody MACH firmy AMD a dále vznik první řady obvodů MAX, kterou společně vyvinula firma ALTERA a Cypress Semiconductor. Nové obvody v této době na trh uvádí také firma XILINX (řady XC7200 a XC7300), QuickLogic, Lattice Semiconductor a tak by bylo možné pokračovat dál a dál. Z uvedeného je vidět, že cesta vývoje PLD obvodů nebyla a není ani dnes nijak přímočará a byla navíc od svých počátků provázena soudními spory firem o patentová práva a tato situace trvá dodnes.

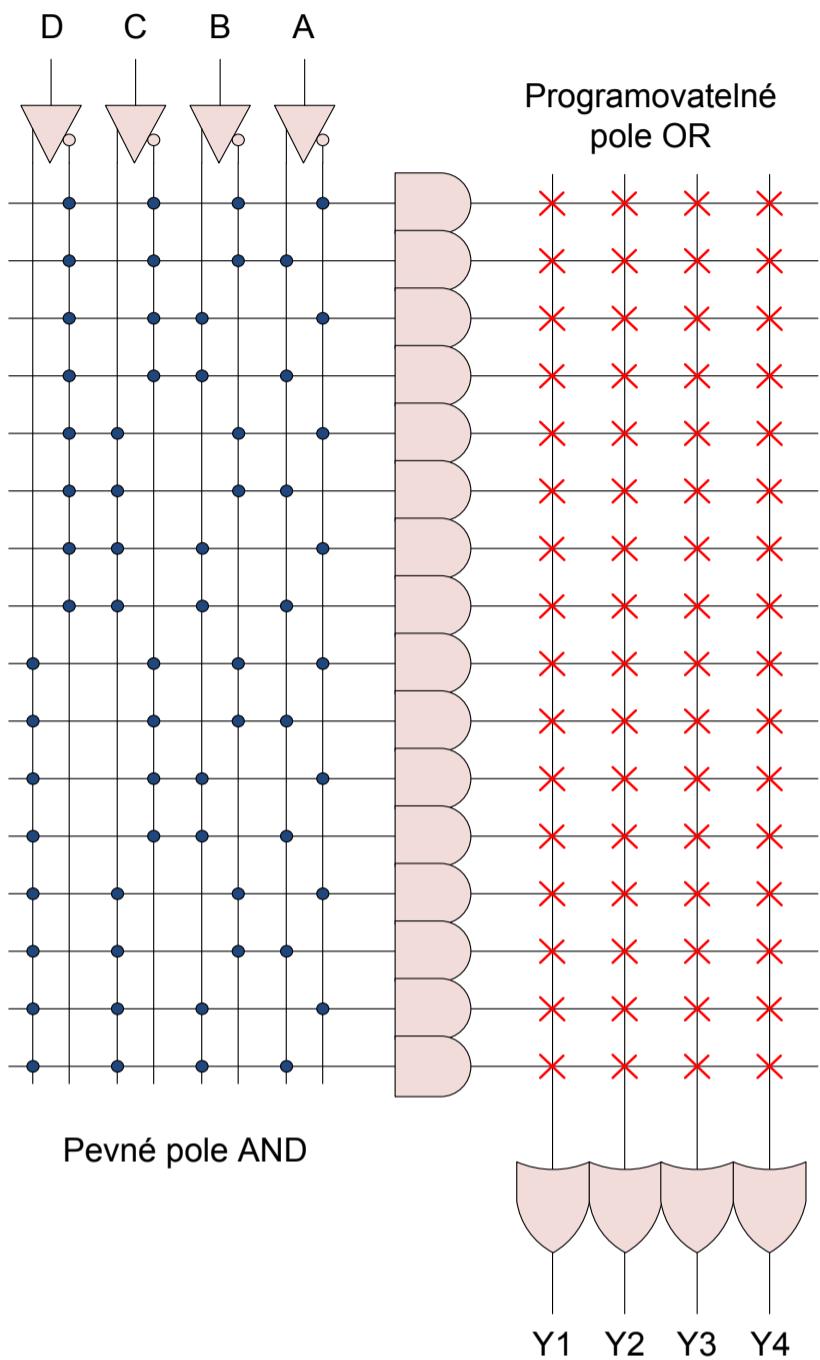
Lze však říci, že od začátku devadesátých let vyvíjí většina firem dvě od sebe velmi odlišné architektury PLD obvodů. První je architektura CPLD obvodů, založená na programovatelné matici hradel AND, hradle OR a makrobuňkách (vychází tedy z původní koncepce obvodů PAL) a na programovatelných místech používá buňky EEPROM nebo FLASH.

Kvůli rostoucí velikosti obvodů se začalo později místo rozširování logických funkcí užívat spíše skládání více matic PLD obvodů do jednoho pouzdra. Vznikly tak obvody, které dnes nazýváme CPLD (*Complex Programmable Logic Device*, Altera, 1988). Od CPLD byl už pak jen malý krok k prvním FPGA obvodům (Xilinx, 1984). Dnes dostupná FPGA se ovšem od architektur z poloviny osmdesátých let významně odlišují. Trendem je pozvolný příklon k hrubozrnným architekturám; obvodům, které kromě elementárních programovatelných logických bloků obsahují také další komplexní podpůrné bloky.

#### 44.1.2. Obvody typu Simple Programmable Logic Device

##### 44.1.2.1. Programmable Read Only Memory (PROM)

Po mnoho let nebyly obvody PROM *Programmable Read Only Memory* zařazovány do skupiny programovatelných logických obvodů, ačkoliv většina nejmenších PROM (např. 32x8) byly používány jako logické prvky (dekodéry, převodní tabulky kódů, znakové generátory).



Obrázek 44.1.1.: PLD typu Programmable Read Only Memory (PROM)

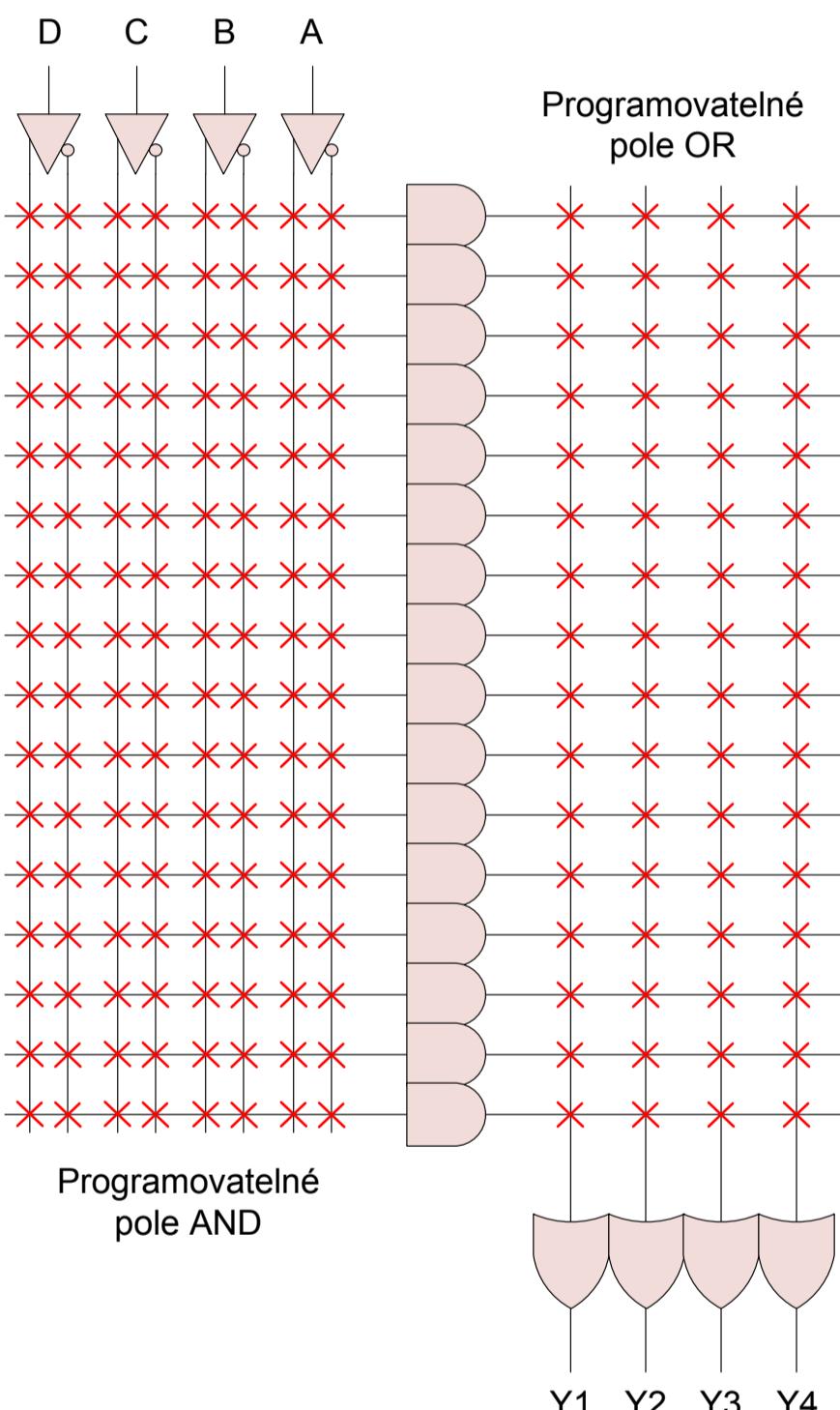
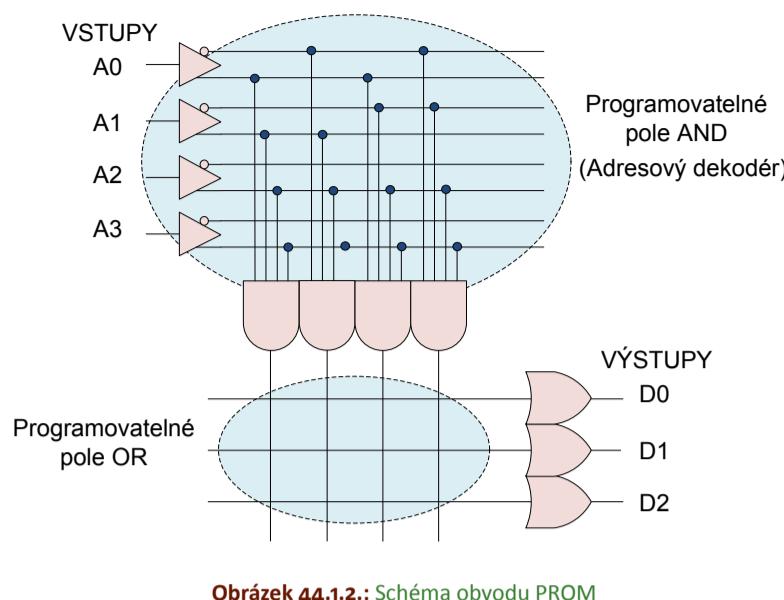
Obvody PROM představují matici paměťových buněk, jejíž řádky jsou adresovatelné vstupní signály a datové sloupce představují výstupní signály. Počet adresových a datových signálů determinuje rozměr matice. Např. 4 vstupní signály umožňují adresaci 16 řádků, 4 datové signály indikují, že každý řádek se skládá ze 4 paměťových buněk. Z pohledu architektury obvodu PLD obsahují PROM pevné propojovací pole hradel AND, následované programovatelným polem hradel OR (viz obr. 44.1.1).

Všeobecně platí, že obvody PROM jsou nevhodnějším kandidátem implementace takových aplikací, které vyžadují, aby na každou kombinaci vstupních signálů byla jiná odezva výstupních signálů. Překážkou je omezení počtu vstupních signálů, eventuálně je limitující také velikost programovatelné matice. Její velikost se přidáním nového vstupu vždy zdvojnásobí (omezení počtu vstupních signálů jistým způsobem řeší obvody typu PAL viz kap. 44.1.2.3)[LSS93, s. 59].

Na obr. 44.1.2 je uvedena architektura obvodu PROM prostřednictvím symboliky obvodů PLD. Každý term odpovídá jedné z jeho adres. Programovatelná hradla OR odpovídají datovým bitům obvodu PROM (výstupní slovo). Např. PROM velikosti 32x8 představuje obvod PLD s 5 vstupy, 32 součinovými termi (32 = 2<sup>5</sup>) a 8 programovatelnými výstupními OR hradly.

##### 44.1.2.2. PLD typu Programmable Logic Array (PLA)

Obvody PLA(*Programmable Logic Array*) patří k průkopníkům v oblasti programovatelných logických polí. Obsahují programovatelné pole hradel AND a zároveň i programovatelné pole hradel OR (viz obr. 44.1.3). Vstupní signály jsou přivedeny v přímém i invertovaném stavu do pole AND hradel.



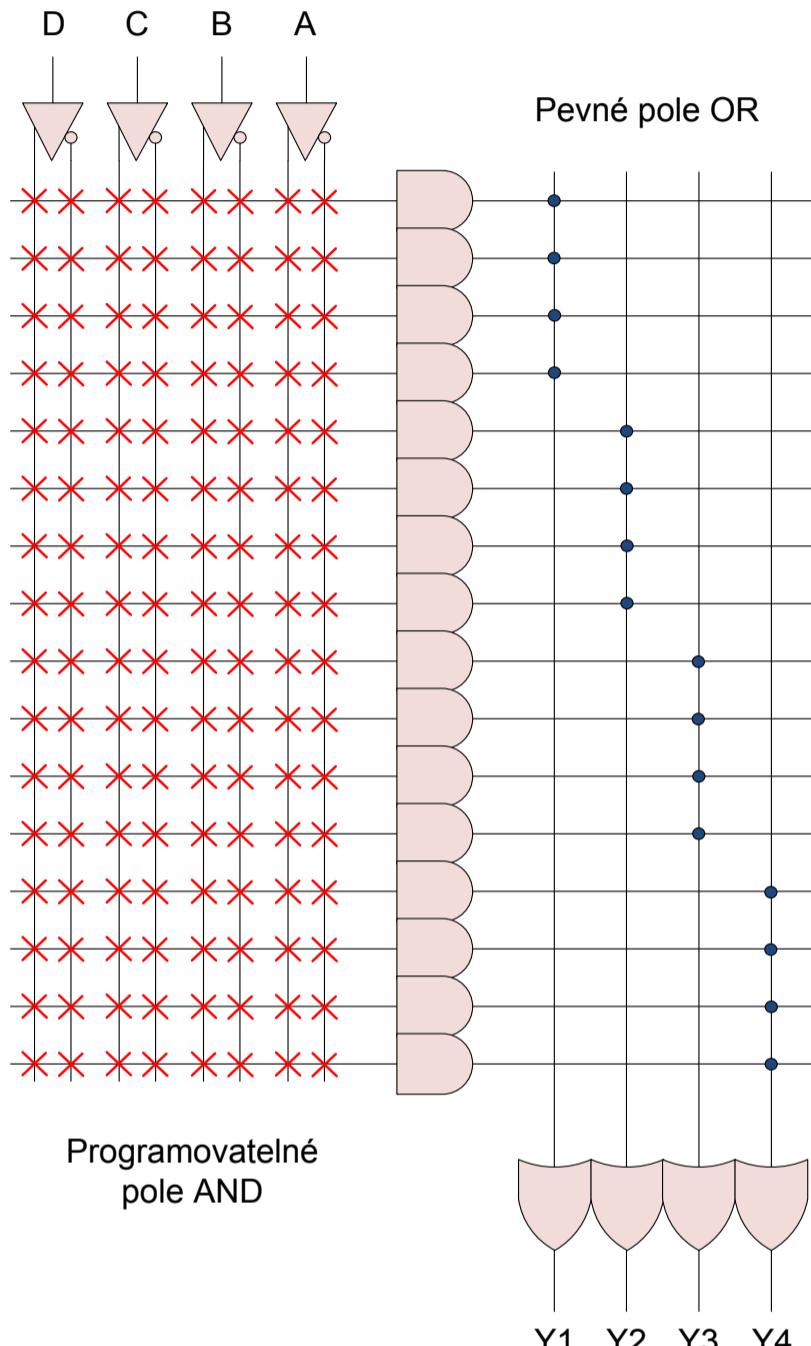
Oproti obvodům PROM, mají obvody PLA toto pole programovatelné, takže je možné snadno vytvořit součinové termíny z libovolné kombinace vstupních (přímých i negovaných) signálů. Součinové termíny jsou přivedeny do programovatelného pole OR hradel, které umožňuje připojení libovolného termu k libovolnému hradlu OR. Jeden term může být přiveden na vstup i několika hradel OR. Na jejich výstupu je formována požadovaná logická funkce ve tvaru "součtu součinů".

Je-li obvod PLD vybaven programovatelným polem AND, jako je tomu u obvodů PLA (a i např. u PAL kapitola 44.1.2.3), může být využita pouze polovina programovatelných spínačů propojovacího pole. Tato skutečnost je zřejmá, protože vstupní signály jsou do pole přivedeny v přímém i invertovaném tvaru a v žádném součin se

nemůže současně vyskytovat přímý i invertovaný signál (součin by vždy nabýval hodnoty logická nula). Takže nejméně polovina (a v praxi i více, protože všechny součiny vždy neobsahují všechny veličiny) není při konstrukcích logických funkcí využita. Je tedy zřejmé, jak neefektivně je využita plocha křemíkového čipu, na kterém je obvod typu PLA realizován. Tato skutečnost stimuluje další vývoj a vznik nových architektur obvodů PLD [LŠS93, s. 63].

#### 44.1.2.3. PLD typu Programmable Array Logic (PAL)

Obvody typu PAL jsou dalším z typů programovatelných logických obvodů. Jsou to PLD obvody s programovatelným polem hradel AND a pevným polem hradel OR. K jednomu hradlu OR lze připojit pouze omezený počet součinových termů, přičemž nelze současně jeden term připojit k několika hradlům OR.



**Obrázek 44.1.4.: Architektura obvodů PAL**

Jednodušší architektura oproti v té době existujícím FPLA obvodům, umožnila zkrácení doby přenosu signálu. Obvody PAL byly navrženy tak, aby "vypadaly" jako standardní obvody PROM a mohly tak být programovány standardními programátory obvodů PROM. Tím se výrobci obvodů PAL vyvarovali požadavků na dodatečné vývojové prostředí, jak tomu bylo v době uvedení na trh v případě FPLA obvodů.

#### 44.1.2.4. PLD typu Simple Programmable Logic Device - SPLD

Obvody typu GAL (Generic Array Logic) patří do skupiny elektricky reprogramovatelných obvodů PLD (EPLD - Electrically Erasable Programmable Logic Device). Z hlediska klasifikace PLD obvodů lze obvody GAL charakterizovat jako obvody s programovatelným polem AND hradel a pevným polem hradel OR. Významná odlišnost od obvodů PAL spočívá v možnosti elektrického reprogramování a využití makrobuňky (Output Logic Macrocell) na výstupech obvodu.

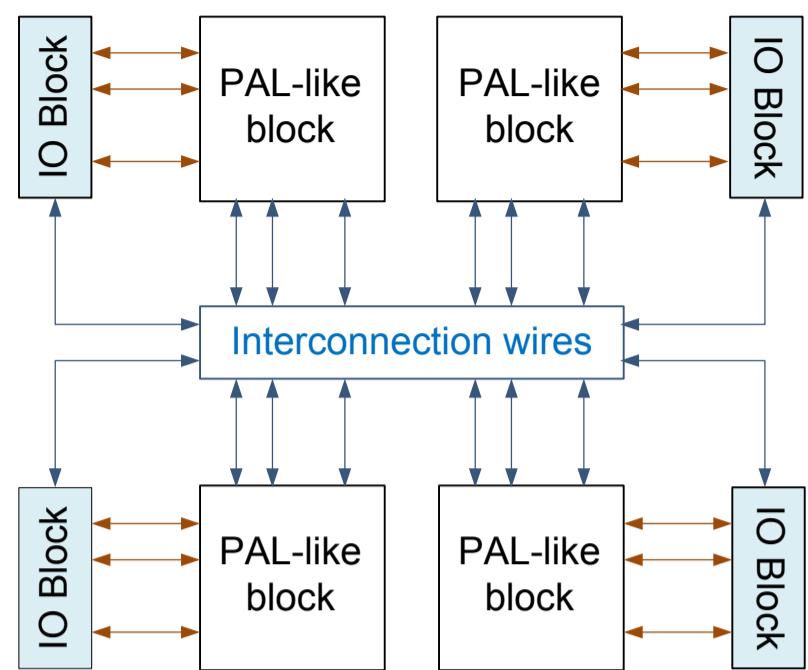
#### 44.1.3. Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD

Obvody typu CPLD patří podobně jako obvody SPLD do skupiny elektricky reprogramovatelných PLD obvodů (EEPLD). Většina CPLD obvodů je programovatelná v cílovém systému, nesou tedy i označení ISP (*In-system programming*). Tyto obvody jsou typické, podobně jako obvody GAL, svou programovatelnou maticí hradel AND následovanou hradlem OR a makrobuňkou. Na výstupu hradla OR je tak stejně jako u obvodů GAL formována pořadovaná logická funkce ve tvaru *součtu součinů*. Od obvodů GAL se však obvody CPLD liší hlavně velkým centrálním propojovacím polem. Makrobuňky jsou sdruženy do větších skupin a tvoří tzv. **funkční bloky** [Pino6, p 279]. Pro architekturu obvodů CPLD jsou charakteristické tyto čtyři struktury:

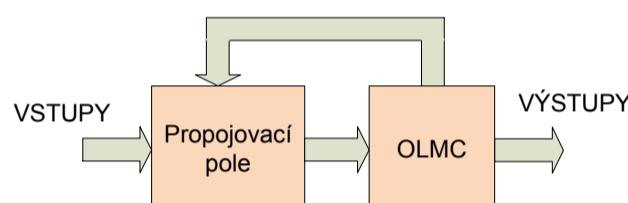
- velké centrální propojovací pole (*Global Routing Pool*),
- programovatelné funkční bloky (*Generic Logic Block - GLB*), uspořádané kolem propojovacího pole, sestávající z:
  - programovatelné matice AND,
  - několika makrobuňek,
  - alokátoru součinů,
- výstupní propojovací pole (*Output Routing Pool - ORP*),
- vstupní/výstupní bloky (*I/O Blocks*).

Všechny výše uvedené stavební prvky mají u různých výrobčů různá označení, jejich význam a funkce je však velmi podobná. Pomocí makrobuňek lze realizovat různě složité kombinační a sekvenční logické či paměťové funkce. Přes programovatelné **vstupní/výstupní bloky** lze přivádět vstupní signály z vývodů obvodu nebo naopak vyvádět výstupní signály. Na rozdíl od jednodušších SPLD, kde vstupní/výstupní obvody jsou přímo spojeny s makrobuňkou, jsou však u CPLD zásadně od makrobuňek odděleny a tvoří samostatný I/O blok, do kterého mohou výstupní signály z makrobuňek vstupovat přes programovatelné **výstupní propojovací pole**. Tím se všeobecně zlepší využití jak makrobuňek, tak výstupních obvodů.

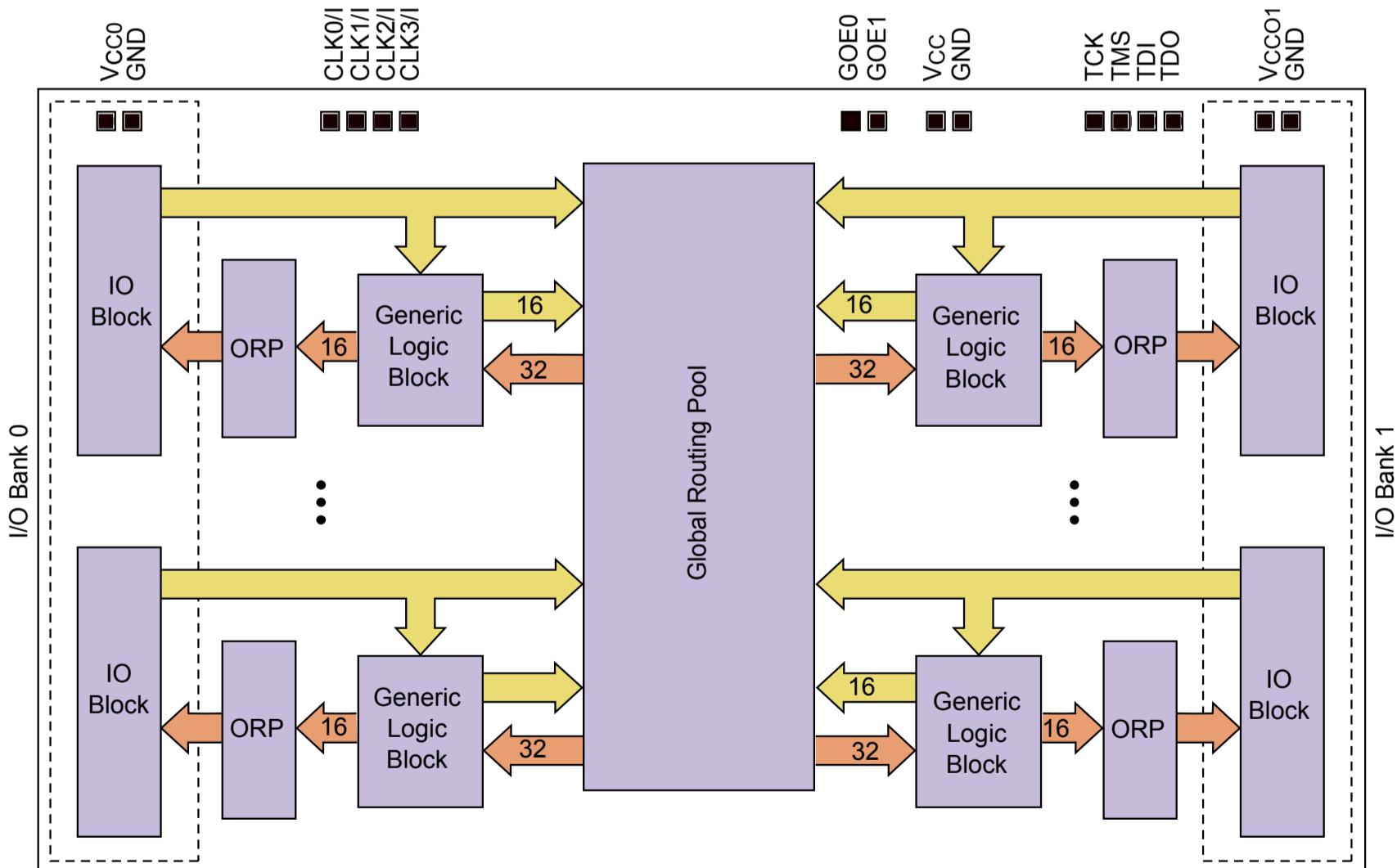
Všechny vstupní/výstupní bloky a všechny makrobuňky lze spolu vzájemně propojit pomocí **centrálního programovatelného propojovacího pole**.



Obrázek 44.1.7.: Obecná struktura obvodu CPLD



Obrázek 44.1.5.: Obecná struktura obvodu GAL



Obrázek 44.1.6.: Architektura CPLD ispMACH4000 společnosti Lattice

#### 44.1.4. Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA

#### 44.1.5. Terminologie

- **PLA** — *Programmable Logic Array* nebo také **FPLA** *Field Programmable Logic Array*: Obvod obsahuje matici AND za nímž následuje matice OR, jež jsou obě programovatelné.
- **PAL** - *Programmable Array Logic*<sup>1</sup>: Relativně jednoduchý PLD obvod obsahující programovatelnou matici AND, za níž následuje pevná matice OR (obr.[44.1.4](#)).
- **SPLD** — *Simple programmable logic device*: Označení je společné pro PLA a PAL struktury.
- **CPLD** — *Complex programmable logic device*: Název zahrnuje obvody jejichž složitost je někde mezi architekturami obvodů PAL a FPGA a nese rysy obou těchto architektur. Základním stavebním blokem je tzv. *makrobuňka*, která realizuje logický výraz ve tvaru normální disjunktivní formy.
- **FPGA** — *Field-Programmable Gate Array*: Obvody mají z programovatelných obvodů nejobecnější strukturu a obsahují nejvíce logiky. Základním stavebním blokem jsou logické buňky (logic elements; Altera), nebo také řezy (slices; Xilinx), jež jsou zpravidla sdruženy do větších logických bloků<sup>2</sup> (*logic array block*, LAB; Altera) resp. (*configurable logic block*, CLB; Xilinx). Logické buňky obsahují tzv. vyhledávací tabulkou (*Look-up table*, LUT), která dovoluje realizovat jednoduché kombinaci funkce. LUT má obvykle čtyři vstupní signály, které mají význam indexu (pointeru) do této tabulky. K propojení CLB slouží programovatelná propojovací struktura PI (*programmable interconnect*).

<sup>1</sup>obchodní známka je v současnosti ve vlastnictví společnosti Lattice Semiconductor  
<sup>2</sup>Výrobci FPGA obvodů používají vlastní názvosloví k popisu jejich architektur.

## 44.2. Dynamické parametry PLD

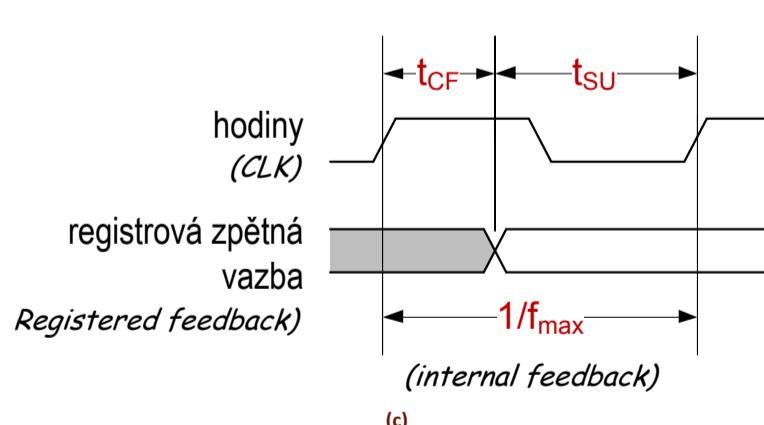
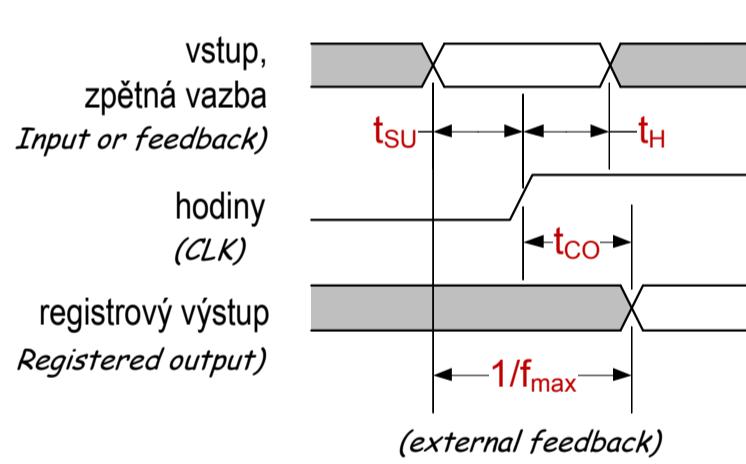
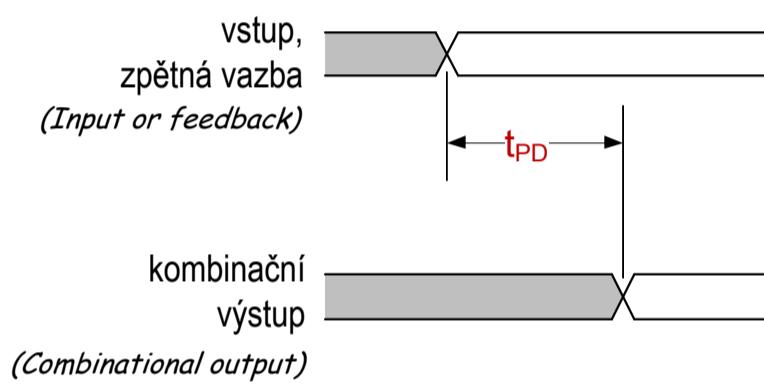
Programovatelné logické obvody mohou pracovat jako obvody kombinační, nebo častěji jako obvody sekvenční [Wak99, p 593]. Symboly pro doby jenž jsou dále popsány, se v různých firemních publikacích liší, význam však zůstáva.

- $t_{PD}$  - doba zpoždění - ve funkci kombinačního obvodu  $t_{PD}$  je doba od změny signálů na vstupech obvodu do změny signálů na jeho výstupech. Je podstatná pro režim bez hodinových impulzů u ryze kombinačního obvodu. U sekvenčního obvodu Mealyho typu je to zpoždění obvodu v době mezi hodinovými impulzy,
- $t_{CO}$  - doba zpoždění po hodinovém impulzu - doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu,
- $t_{CF}$  - opět se jedná o zpoždění jako v předchozím případě, tj. je to doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu registru, jenž je ovšem veden jako zpětnovazební vstup. Běžně platí, že  $t_{CF} < t_{CO}$  a pokud jej výrobce neuvádí, lze předpokládat  $t_{CF} = t_{CO}$
- $t_{SU}$  - doba předstihu - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní až do aktivní hrany hodinového impulzu,
- $t_H$  - doba přesahu - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní po aktivní hraně hodinového impulzu,
- $f_{max}$  - maximální kmitočet hodinových impulzů - Je to nejvyšší frekvence, na které zařízení může pracovat spolehlivě a je ekvivalentní k převrácené hodnotě minimální periody hodinových impulzů.

využití vnitřních bloků. Složitější situace je u obvodů FPGA, kde cesty signálů nejsou předem definovány a v procesu návrhu budou teprve vyvtařeny. Jednotlivé doby proto musí dodatečně dopočítat návrhový systém [Pino6, p 288].

## References

- |         |  |
|---------|--|
| [LŠS93] | M. Liška, V. Šula, and J. Strelec. <i>Programovatelná logická pole</i> . Grada Publishing, spol. s.r.o., 1993, p. 456. ISBN: 80-85623-26-9 (cit. on pp. 210, 211). |
| [Pino6] | M. Pinker Jiří; Poupa. <i>Číslicové systémy a jazyk VHDL</i> . Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on pp. 212, 214).                       |
| [Wak99] | J. F. Wakerly. <i>Digital Design Principles and Practices</i> . PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. 214).                                 |



Obrázek 44.2.1.: Základní dynamické parametry PLD:  $t_{PD}, t_{CO}, t_{CF}, t_{SU}, t_H, f_{max}$

Dynamické parametry u programovatelných logických obvodů jsou závislé na vnitřních cestách signálů. U obvodů CPLD je situace jednodušší, neboť cesty signálů jsou do jisté míry pevně dány a jedná se jen o jejich výběr. Výrobci uvádějí korekční vztahy pro výše uvedené doby, kterými jsou respektovány logické zátěže a způsob

# 45. Jazyk VHDL

## Obsah

<b>45.1. Návrh číslicového obvodu</b> . . . . .	<b>215</b>
45.1.1. Popis číslicové funkce . . . . .	215
<b>45.2. Úvod</b> . . . . .	<b>215</b>
<b>45.3. Základní vlastnosti jazyka VHDL</b> . . . . .	<b>216</b>
<b>45.4. Logický úrovně</b> . . . . .	<b>216</b>
<b>45.5. Souběžné příkazy</b> . . . . .	<b>216</b>
<b>45.6. Sekvenční příkazy</b> . . . . .	<b>217</b>
<b>45.7. Technologicky nezávislá část návrhu</b> . . . . .	<b>217</b>
45.7.1. Dynamicky řízené sekvenční obvody . . . . .	217
45.7.2. Staticky řízené sekvenční obvody . . . . .	217
45.7.3. Kombinační obvody . . . . .	217
<b>45.8. Knihovna LPM</b> . . . . .	<b>217</b>
45.8.1. Posuvný registr - lpm shiftreg . . . . .	217

## 45.1. Návrh číslicového obvodu

### 45.1.1. Popis číslicové funkce

Máme-li představu o funkci a struktuře budoucího číslicového obvodu, nastupuje proces *zachycení návrhu* (design entry, design capture), při kterém je nutné naše představy přenést do počítačem zpracovatelné formy. Tuto úlohu, lze splnit na různých úrovních abstrakce [Šta10, s. 19]:

- **hradlové/schématické** - navrhujeme přímo kreslením schématu budoucího obvodu. Výhodou tohoto postupu je jeho srozumitelnost a zachycení skutečné podoby návrhu - co máme ve schématu je to, co se realizuje. Nevýhody nicméně převyšují výhody. Kreslení schéma je obvykle specifické pro zvolený obvod, protože často používáme struktury, které jsou k dispozici jen na příslušném PLD obvodu. Konverze do jiného obvodu, znamená překleslení schématu. Vlastní proces kreslení je pomalý a únavný, protože pracujeme na nízké úrovni abstrakce - kreslíme obvod hradlo po hradle. Chceme-li například realizovat stavový automat, musíme nejprve zminimalizovat jeho přechodovou a výstupní funkci a pak nakreslit schéma. Snadno se můžeme dostat do situace, kdy je nutné kompletní překreslení.
- **meziregistrových přenosů** - tzv. RTL (*Register Transfer Level*). RTL popis je dnes standardním prostředkem pro popis číslicové funkce. Číslicové synchronní obvody se skládají ze dvou základních typů logických bloků: paměťových prvků (registru) a kombinacních funkcí. Na úrovni abstrakce, číslicový obvod popisujeme tak, že jednotlivé struktury popíšeme pomocí těchto dvou typů logiky a doplníme informací o jejich vzájemném propojení (odkud, kam a přes jaké kombinacní logické funkce jsou přelévána data mezi registry). Popis obvodu je realizován v textové podobě pomocí zápisu ve speciálním programovacím jazyku (HDL - *Hardware Description Language*). Pro popis se používají nejčastěji jazyk VHDL a Verilog. Použití RTL úrovně má nesporné výhody: získáme technologicky nezávislý popis obvodu na relativně vysoké úrovni abstrakce, přičemž jeden rádek zdrojového kódu je v hardware reprezentován typicky desítkami/stovkami hradel. To zvyšuje produktivitu práce, zpřehledňuje vlastní návrh, zjednoduší přenos návrhu mezi různými technologiemi a zrychluje jak vlastní návrh, tak pozdější opravy. Jedinou nevýhodou je nevhodnost pro ryze asynchronní návrh, to ale není při práci s hradlovými poli omezující, neboť hradlová pole jsou určena právě pro synchronní číslicové obvody.
- **algoritrické** - neustále se zkracující délka návrhového cyklu spolu s rostoucí komplexitou navrhovaných systémů nutí návrháře používat stále vyšší úrovně abstrakce. Architektura na RTL úrovni je navrhována vždy s ohledem ke skutečnému časování obvodu a použití paralelizmu. Systém je na této úrovni naroven s odpovídajícím počtem výpočetních jednotek, řídicích bloků, sběrnic, apod. Problém nastává v okamžiku, kdy v pozdějších fázích návrhu zjistíme, že navržená architektura nesplňuje očekávání. Právě odstranění informace o paralelismu a časování ze zdrojového kódu je přínosem *algoritrické syntézy*. Funkce bloku je popsána v některém z jazyků na "vyšší úrovni" - např. ANSI C, Handel-C, SystemC, nebo System Verilog. Příslušný syntézní nástroj pak dostane informaci o počtu funkčních jednotek a časování ve formě jednoduchých omezení (například povolíme použití nejvýše dvou násobiček a dvou sčítáček) a na základě předloženého algoritmu vygeneruje RTL kód výsledného systému (datových cest i řídicích bloků). Každá změna v architektuře je triviální - zjistíme-li, že výpočetní výkon systému je příliš nízký, stačí jen znova spustit syntézní proces s jiným počtem aritmetických jednotek. Rychlosť celého procesu umožňuje vyzkoušet celou řadu alternativ architektury a najít nejhodnější kompromis mezi plochou a rychlosťí obvodu. Zjednoduší se i verifikace. Použitelnost algoritrické syntézy zatím omezuje fakt, že výsledek není tak dobrý v porovnání s návrhem od profesionála.

## 45.2. Úvod

Název VHDL představuje akronym — VHSIC Hardware Description Language. Samo označení VHSIC je další akronym představující název projektu, v rámci něhož byl jazyk VHDL zpracován, a znamená Very High Speed Integrated Circuits. I když označení VHDL v tomto kontextu není příliš přiléhavé, vžilo se a obecně se používá. Jazyk VHDL byl původně vyvinut především pro modelování a simulaci rozsáhlých systémů. Na mnoha jeho konstruktech je to znát, některé z nich nemají pro syntézu vůbec význam. Zde se však budeme zabývat především použitím jazyka VHDL k vytváření modelů určených pro syntézu číslicových systémů. České termíny budou v prvním výskytu zapsány tučně. Často tyto termíny nejsou ustálené, a proto budeme uvádět i jejich anglické ekvivalenty, které již většinou mají ustálenou podobu.

### 45.3. Základní vlastnosti jazyka VHDL

- Je to otevřený standard (*open standard*). K jeho použití pro sestavení návrhových systémů není třeba licence jeho vlastníka, jako je tomu u jiných jazyků HDL (například u jazyka ABEL). To je jeden z důvodů, proč je tento jazyk v návrhových systémech často používán.
- Umožňuje pracovat na návrhu, aniž je předtím zvolen cílový obvod. Ten může být zvolen až v okamžiku, kdy jsou známy definitivní požadavky na prostředí, v němž má navrhovaný systém pracovat, a je možno cílový obvod měnit podle potřeby při zachování textu popisujícího systém, může být zvolen obvod PLD nebo FPGA (*Device-independent design*).
- Je možno provést simulaci navrženého obvodu na základě téhož zdrojového textu, který pak bude použit pro syntézu a implementaci v cílovém obvodu. Zdrojový text je možno zpracovávat v různých simulátorech a v syntetizérech různých výrobců. Odsimulovaný text může být použit v dalších projektech s různými cílovými obvody, což je podporováno hierarchickou strukturou jazyka. Této vlastnosti jazyka se říká přenositelnost (*portability*) kódu.
- V případě úspěšného zavedení výrobku na trh lze popis modelu systému v jazyku VHDL použít jako podklad pro jeho implementaci do obvodů ASIC vhodných pro velké série.

#### Některé námitky proti VHDL:

- Jazyk VHDL je dosti „upovídáný“, jazykové konstrukty nejsou navrženy tak, aby zdrojový text byl stručný a při popisu modelu určitého systému se setkáme s opakováním bloků stejného znění. Ty je však možno snadno vytvářet využitím kopírování a podobných možností současných editorů.
- V jazyku VHDL je možno vytvořit neefektivní konstrukce, efektivnost nebo její nedostatek nemusí být na první pohled ze zdrojového textu patrné. To je však vlastnost i jiných jazyků vyšší úrovně a výsledná efektivnost konstrukce závisí nejen na kvalitě programových návrhových prostředků, ale také na zkušenosti konstruktéra (návrháře).

Základní verze jazyka VHDL byla přijata jako standard IEEE číslo 1076 v roce 1987. Konstrukty odpovídající tomuto standardu se označují jako konstrukty jazyka VHDL-87. Podobně jako další standardy IEEE, i tento standard se v pravidelném pětiletém intervalu aktualizuje. Upravená verze standardu byla přijata v roce 1993, odkazuje se na ni jako na standard VHDL-93.

Vedle jazyka VHDL se setkáme také s jazykem Verilog, který má podobné použití. Uvádí se, že jazyk VHDL je rozšířený zejména v Evropě, zatímco Verilog se používá hlavně v asijských zemích. V USA se používají oba tyto jazyky.

Vyjadřovací schopnosti jazyku VHDL jsou dány příkazy, jenž mají souběžný nebo sekvenční charakter. Některé příkazy jsou jen jednoho druhu, jiné mohou být oboujednotlivé. Toto rozlišení se týká toho, ve které části popisu se příkazy mohou používat. Pro stručnost budeme dále mluvit o souběžných a o sekvenčních příkazech, i když jde spíše o to, kde se tyto příkazy nacházejí či mohou nacházet. V následujících kapitolách jsou příkazy rozděleny do dvou velkých skupin:

- **Souběžné příkazy** (*concurrent statements*): zapisují se v textu jazyka mimo procesy, definice funkcí a procedur.
- **Sekvenční příkazy** (*sequential statements*): slouží k algoritmickému vyjádření popisu. Tyto příkazy mohou být zapsány jen v procesech, v definicích funkcí a procedur.

### 45.4. Logické úrovně

Od jazyka určeného k návrhu a modelování integrovaných obvodů očekáváme schopnost modelovat základní logické úrovně - *log. 0* a *log. 1*. Ty jsou pro jednoduché simulace postačující, ale již například pro návrh a modelování třístavových budičů sběrnic potřebujeme mít možnost pracovat se stavem vysoké impedance *Z*. Dalším jednoduchým příkladem může být modelování zkratu na sběrnici, který může vzniknout v situaci, kdy dva budiče budí jeden spoj opačnými logickými úrovněmi. Balíček *std\_logic\_1164* knihovny IEEE pro tyto účely zavádí *devítistavovou logiku*.

- 'U': uninitialized. This signal hasn't been set yet.
- 'X': unknown. Impossible to determine this value/result.
- 'o': logic 0
- '1': logic 1
- 'Z': High Impedance
- 'W': Weak signal, can't tell if it should be 0 or 1.
- 'L': Weak signal that should probably go to 0
- 'H': Weak signal that should probably go to 1

- '-': Don't care.

Všimněme si, že tato knihovna je připojena všemi ukázkovými kódů. Logický signál, který má popsaných hodnot nabývat, je pak definován jako signál typu *std\_logic*, nebo *std\_logic\_vector* pokud se jedná o sběrniči. Pomocí nich modelujeme standardní propojení logických prvků, tj. "obyčený kus drátu". [Šta10, s. 51]

### 45.5. Souběžné příkazy

## 45.6. Sekvenční příkazy

#### 45.7. Technologicky nezávislá část návrhu

V následujícím textu jsou uvedeny základní způsoby popisu chování sekvenčních (např. klopné obvody) a kombinačních obvodů. Klopné obvody jsou rozdělovány na **hranově citlivé** a **úrovňově citlivé**. Je možné je popsat jako **jednobitové paměti**. Hranově citlivý klopný obvod je obvod řízený změnou na vstupu synchronizace (*clock input*). Bývá označován "*flip-flop*". Úrovňově citlivý klopný obvod je nazýván v české terminologii ***zdrž***. Obvykle je však srozumitelný anglický název "*latch*".

#### 45.7.1. Dynamicky řízené sekvenční obvody

Obvody řízené změnou signálu na vstupu synchronizace jsou ve VHDL popisovány použitím příkazu process a podmíněného příkazu **if**. V podmíněném příkazu jsou rozlišovány události (**events**), které znamenají vzestupnou hranu nebo sestupnou hranu signálu na vstupu synchronizace. Při popisu je možné použít dvou různých zápisů, ve kterých se objevuje atribut události synchronizačního signálu `clk` `clk'event` nebo volání funkce.

- `(clk'event and clk='1')` vzestupná hrana signálu
  - `(clk'event and clk='0')` sestupná hrana signálu
  - `rising_edge(clk)` volání funkce vzestupné hrany
  - `falling_edge(clk)` volání funkce sestupné hrany

Jméno	Popis	komentář
data []	Data input to the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH.
clock	Positive-edge-triggered clok	Vstup hodinového signálu.
enable	Clock enable input	Blokuje hodinový signál.
shiftin	Serial shift data input	Pro funkci je nutné použít alespoň jeden ze signálů data [], aset, aclr, sset, sclr, a/nebo shiftin.
load	Synchronous parallel load	(1) load operation (podmínka: enable = 1); (0) shift operation (výchozí).
aclr	Asynchronnous clear input	Signál aclr má vyšší prioritu než signál aset.
aset	Asynchronnous set input	Naplní registr g [] hodnotou LPM_AVALUE
sclr	Synchronous clear input	Signál sclr má vyšší prioritu než signál sset.
sset	Synchrонous set input	Naplní registr g [] hodnotou LPM_SVALUE
q []	Data output from the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH. Vyžaduje shiftout.
shiftout	Serial shift data output	Vyžaduje registr q [].

**Tabulka 45.8.1.: Popis portů komponenty lpm\_shiftreg.**

Uvedené příklady ukazují možnosti vyjádření vzestupné a sestupné hrany ve VHDL. Vyjádření pomocí atributu je častěji používané, protože tento konstrukt je rozeznatelný při syntéze obvodového řešení. Nicméně použití volání funkce je výhodnější při simulaci, protože nastává pouze při změně signálu  $\text{clk}$  z  $0 \rightarrow 1$  a  $2^2$   $1 \rightarrow 0$ , ale ne z  $X \rightarrow 1$  nebo z  $0 \rightarrow X$ , které nepředstavují platný přechod z jednoho stavu do druhého. Devět hodnot signálu, které jsou označované jako  $\text{std\_logic}$  jsou určeny k modelování poruchových stavů logické sítě. Jsou to hodnoty ' $U$ ', ' $X$ ', ' $0$ ', ' $1$ ', ' $Z$ ', ' $W$ ', ' $L$ ', ' $H$ ' a '-'.

#### 45.7.2. Staticky řízené sekvenční obvody

V následujících odstavcích jsou popisovány klopné obvody řízené úrovní synchronizace, které jsou známé pod názvem **zdrž** (*latch*).

### 45.7.3. Kombinační obvody

## 45.8. Knihovna LPM

Knihovna **LPM** (angl. *Library of Parametrized module*) obsahuje parametricky vytvarene moduly jako jsou hrada, čítače, multiplexory, klopné obvody, aritmetické a paměťové funkce.

Standard LPM byl navržen v roce 1990 jako jedna z monžností pro efektivní návrh číslicových systémů do odlišných technologií, jako jsou např. obvody PLD, hradlová pole a standardní buňky. Předběžná verze standardu vyšla v roce 1991, další úprava předběžné verze pak v roce 1992. Standard byl přijat organizací EIA (angl. *Electronic Industries Alliance*) v dubnu roku 1993 jako doplněk do standardu EDIF.

EDIF je formát pro přenos návrhu mezi návrhovými nástroji různých výrobců.  
Formát EDIF popisuje syntaxi, která reprezentuje logický netlist. LPM do něj pak  
přidává množinu funkcí, která popisuje logické operace netlistu. Před rozšířením  
o LPM musel každý EDIF netlit typicky obsahovat technologicky specifické logické  
funkce, které zabraňovaly tomu, aby byl návrh ve větší míře nezávislý na cílové  
technologii [Pino6, s. 72].

#### 45.8.1. Posuvný registr - lpm shiftreg

```

lpm_hint      : string := "UNUSED"
);
port (
    — Data input to the shift register.
    data : in std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) :=
        (OTHERS => '0');
    — Positive-edge-triggered clock. (Required)
    clock : in std_logic;
    — Clock enable input
    enable : in std_logic := '1';
    — Serial shift data input.
    shiftin : in std_logic := '1';
    — Synchronous parallel load. High (1): load operation;
    — low (0): shift operation.
    load : in std_logic := '0';
    — Asynchronous clear input.
    aclr : in std_logic := '0';
    — Asynchronous set input.
    aset : in std_logic := '0';
    — Synchronous clear input.
    sclr : in std_logic := '0';
    — Synchronous set input.
    sset : in std_logic := '0';
    — Data output from the shift register.
    q : out std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0);
    — Serial shift data output.
    shiftout : out std_logic
);
end LPM_SHIFTREG;

architecture LPM_SYN of LPM_SHIFTREG is
    — FUNCTION DECLARATION
function conv_STR_to_VECT (str : string) return
    std_logic_vector is
    — conversion string to std_logic_vector
variable len      : integer := str'length;
variable ivalue : std_logic_vector(lpm_width+4 downto 0)
    := (others => '0');
variable digit   : std_logic_vector(3 downto 0) := (others
    => '0');
variable ten     : std_logic_vector(3 downto 0) := "1010";
begin
if (str /= "UNUSED") then
    for i in 1 to len loop
        case str(i) is
            when '0' => digit := "0000";
            when '1' => digit := "0001";
            when '2' => digit := "0010";
            when '3' => digit := "0011";
            when '4' => digit := "0100";
            when '5' => digit := "0101";
            when '6' => digit := "0110";
            when '7' => digit := "0111";
            when '8' => digit := "1000";
            when '9' => digit := "1001";
            when others =>

```

```

70      ASSERT FALSE
71      REPORT "Illegal character "& str(i) & " in
72          string parameter!"
73      SEVERITY ERROR;
74  end case;
75  ivalue(lpm_width+3 downto 0) := 
76      unsigned(ivalue(lpm_width-1 downto 0)) *
77      unsigned(ten) + unsigned(digit);
78  end loop;
79  end if;
80  return ivalue(lpm_width-1 downto 0);
81 end conv_STR_to_VECT;
82 — SIGNAL DECLARATION
83 signal i_q : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) :=
84     (OTHERS => '0');
85 signal init : std_logic := '0';
86 signal tmp_init : std_logic := '0';
87 signal i_shiftout_pos : natural := lpm_width-1;
88
89 begin
90 — PROCESS DECLARATION
91 — basic error checking for invalid parameters
92 MSG: process
93 begin
94     if (lpm_width <= 0) then
95         ASSERT FALSE
96         REPORT "Value of lpm_width parameter must be greater
97             than 0!"
98         SEVERITY ERROR;
99     end if;
100    wait;
101 end process MSG;
102
103 process (tmp_init)
104 begin
105     if (tmp_init = '1') then
106         init <= '1';
107     end if;
108 end process;
109
110 process (clock, aclr, aset, init)
111 variable avalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto
112     0):= conv_STR_to_VECT(lpm_avalue);
113 variable svalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto
114     0):= conv_STR_to_VECT(lpm_svalue);
115 variable pvalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto
116     0):= conv_STR_to_VECT(lpm_pvalue);
117 begin
118     — INITIALIZE TO PVALUE —
119     if (init = '0') then
120         if (lpm_pvalue /= "UNUSED") then
121             i_q <= pvalue;
122         end if;
123         if ((lpm_direction = "LEFT") or (lpm_direction =
124             "UNUSED")) then
125             i_shiftout_pos <= lpm_width-1;
126         elsif (lpm_direction = "RIGHT") then
127             i_shiftout_pos <= 0;
128         else
129             ASSERT FALSE
130             REPORT "Illegal lpm_direction property value for
131                 LPM_SHIFTREG!"
132             SEVERITY ERROR;
133         end if;
134         tmp_init <= '1';
135         elsif (aclr = '1') then
136             i_q <= (OTHERS => '0');
137         elsif (aset = '1') then
138             if (lpm_avalue = "UNUSED") then
139                 i_q <= (OTHERS => '1');
140             else
141                 i_q <= avalue;
142             end if;
143         elsif (rising_edge(clock)) then
144             if (enable = '1') then
145                 if (sclr = '1') then
146                     i_q <= (OTHERS => '0');
147                 elsif (sset = '1') then
148                     if (lpm_svalue = "UNUSED") then
149                         i_q <= (OTHERS => '1');
150                     else
151                         i_q <= svalue;
152                     end if;
153                 elsif (load = '1') then
154                     i_q <= data;
155                 else
156                     q <= i_q;
157                 end if;
158             end if;
159             shiftout <= i_q(i_shiftout_pos);
160         end if;
161     end process;
162 end LPM_SYN;

```

**Část XVIII.**

**Elektromagnetická kompatibilita**



## **46. Vlastnosti plošných spojů**



## **Část XIX.**

**C**



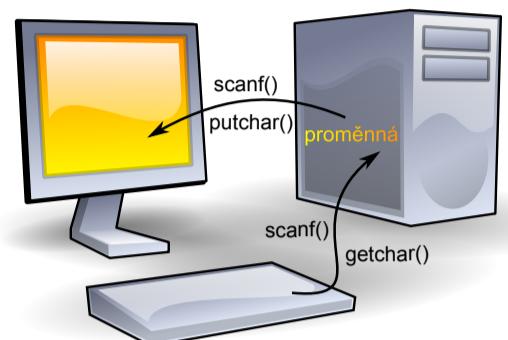
# 47. Terminálový vstup a výstup

## Obsah

47.1. Hlavičkový soubor stdio.h . . . . .	225
47.2. Standardní vstup a výstup znaku . . . . .	225
47.3. Standardní vstup a výstup řetězců . . . . .	226
47.4. Formátovaný standardní vstup a výstup . . . . .	226
47.5. Souhrnné cvičení . . . . .	226

Jazyk C, narozený od Pascalu, nedefinuje žádnou I/O (vstupně/výstupní -Input/Output) operaci jako část jazyka. Nezbytné vstupy a výstupy jsou řešeny tak, že standardní knihovna obsahuje několik funkcí, které I/O zajišťují.

Nejvíce strojově závislé akce jsou I/O operace a tímto způsobem se tedy důsledně oddělují strojově závislé a strojově nezávislé části jazyka. Tato skutečnost je pak významným přínosem při vytváření kompilátoru pro jiný počítač.



Obrázek 47.0.1.: Operace pro terminálový vstup a výstup

## 47.1. Hlavičkový soubor stdio.h

Aby bylo možno správně používat všechny funkce pro vstupu a výstupu, je nutné na začátku programu připojit "popis" těchto funkcí. Ten se nachází v hlavičkovém (header) souboru stdio.h:

`#include <stdio.h> //zde není stredník`

Od tohoto okamžiku je pak možné používat dále popsané funkce.

## 47.2. Standardní vstup a výstup znaku

Výstup jednoho znaku zajišťuje putchar() a vstup jednoho znaku funkce getchar().

- `int putchar(int c);`
- `int getchar(void);`

Obě funkce pracují s proměnnými `int` a ne `char`.

```
1  ****
2  /* Cteni_tisk_znaku.C */
3  /* Cteni a tisk znaku */
4  /* P. Herout 10.1991 */
5  ****
6  #include <stdio.h>
7
8  main()
9  {
10    int c;
11
12    printf("\nZadej znak: ");
13    c = getchar() + 1;
14    printf("%c (ASCII %d)\n", c, c);
15 }
```



**Výpis 47.1:** Cteni\_tisk\_znaku.c Čtení a tisk znaku ze standardního vstupu na standardní výstup.

**Příklad 47.2.1.** Čtení znaku ze standardního vstupu a jejich zápis na standardní výstup ukazuje následující program, představující jednoduchou variantu příkazu kopírování souboru (nutno ovšem přesměrovat vstup a výstup).

```
1  ****
2  /* CPY.C */
3  /* CoPY character */
4  ****
5
6  #include <stdio.h>
7
8  int main(void)
9  {
10    int c;
11
12    while ((c = getchar()) != EOF)
13      putchar(c);
14    return 0;
15 }
```



**Výpis 47.2:** CPY . c Kopíruje znak ze standardního vstupu na standardní výstup.

### 47.3. Standardní vstup a výstup řetězců

Standardní vstup a výstup řetězců je jednoduchou nadstavbou nad čtením znaku.  
Obě funkce,

- `char *gets(char *s);`
- `int puts(const char *s);`

pracují s řetězci. `gets()` načte do znakového pole vstupní řetězec az do konce řádku, symbol '`\n`' není do znakového pole zapsán. Ukazatel na pole (načtený řetězec) je rovněž návratovou hodnotou. Chybu signalizuje návrat NULL. `puts()` zapíše řetězec na výstup a přidá přechod na nový řádek '`\n`'. Chybu představuje návratové EOF, jinak vrací kladné cele číslo.

Jednoduchost použití skrývá velké nebezpečí. Funkce `gets()` nemá informaci o délce oblasti vymezené pro čtený řetězec. Je-li oblast kratší, než vstupní řádek, dojde jeho načtením velmi pravděpodobně k přepsání paměťové oblasti související s vyhrazenou pamětí. A to se všemi důsledky z toho vyplývajícími.

### 47.4. Formátovaný standardní vstup a vystup

#### 47.5. Souhrnné cvičení

**Příklad 47.5.1.** Vytvořte program, který vygeneruje ASCII tabulku se čtyřmi sloupcí ve formátu [znak|kód|znak|kód]. Rozsah tabulky definujte pomocí dvou symbolických konstant `MIN_ASCII`, `MAX_ASCII`.

```

1  ****
2  /* ASCII.C
3  /* Generate ASCII table
4  ****
5  #include <stdio.h>
6  #include <conio.h>
7
8  #define MIN_ASCII 32
9  #define MAX_ASCII 127
10 #define BASE ' '
11 #define TABLE_HEADING "\tASCII\tASCII\nChar\Code\Char\Code\n"
12
13 char ascii_table_tittle []= "uuuuuuASCII_CODE_TABLE";
14
15 main()
16 {
17     int index = 0, i, tisk = 0;
18
19     printf("%s\n", ascii_table_tittle);
20     printf("-----\n");
21     printf("%s", TABLE_HEADING);
22     printf("=====\\n");
23
24     while(tisk < MAX_ASCII)
25     {
26         for(i = 0; i < 2; i++)
27         {
28             tisk = BASE + index + i;
29             printf("%c\t%d\t", tisk, tisk);
30         }
31         printf("\n");
32         index += 2;
33     } /* end while */
34
35     while (!kbhit());
36     return 0;
37 }
```

**Výpis 47.3:** ASCII . c Generuje ASCII tabulku na terminálu.

# 48. Pointery

## Obsah

48.1. Základy práce s pointery . . . . . 227

**Pointery** (též ukazatele nebo směrníky) jsou „srdce a duše jazyka C“. Pointer je proměnná, jako každá jiná, pouze hodnota uložená v této proměnné má jiný význam. Pointer představuje *adresu paměti* a na této adrese se teprve ukrývá příslušná hodnota. Pointer je tedy proměnná uchovávající paměťovou adresu.[Her94]

## 48.1. Základy práce s pointery

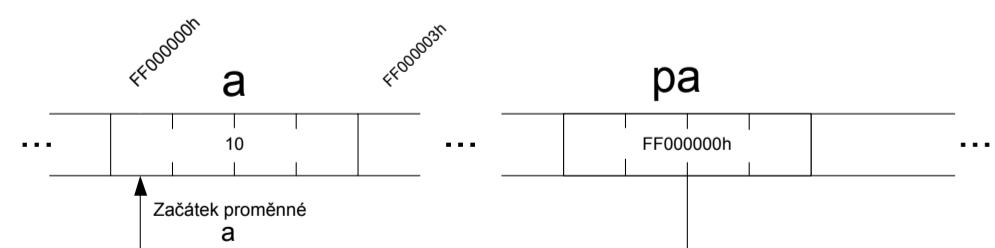
**Příklad 48.1.1.** Vytvořte funkce kopírující prvky jednoho pole do druhého pomocí indexu i ukazatele.

```
1  /*************************************************************************/
2  /* soubor CPYARRY.C                                                 */
3  /* na funkciích kopírujicich prvky jednoho pole do druhého      */
4  /* ukazuje pristup k prvkum pole pomoci indexu i pomocí          */
5  /* ukazatele, tedy pointerovou aritmetiku                         */
6  /*************************************************************************/
7  #include <stdio.h>
8
9  #define N      6
10
11 void copy_array1(int *a, int *b, int n)
12 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
13 {
14     register int i = 0;
15     for (; i < n; i++)
16         b[i] = a[i];
17 }
18
19 void copy_array2(int *a, int *b, int n)
20 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
21 {
22     while (n-- > 0)
23         *b++ = *a++;
24 }
25
26 void print_array(int *p, int n)
27 // vytiskne celociselné pole o n prvcích
28 // zacne a skonci na novem radku
29 {
30     puts("");
31     while (n-- > 0)
32         printf("\t%d", *p++);
33     puts("");
34 }
35
36 int main()
37 {
38     int pole1[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
39         pole2[N], dim1;
40     dim1 = sizeof(pole1) / sizeof(int);
41
42     print_array(pole1, dim1);
43     copy_array1(pole1, pole2, N);
44     print_array(pole2, N);
45     copy_array2(pole1 + 3, pole2, N);
46     print_array(pole2, N);
47     return 0;
48 }
```

**Výpis 48.1:** CPYARRY.C Kopíruje prvky jednoho pole do druhého.

*Výstup programu:*

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9
1  2  3  4  5  6
4  5  6  7  8  9
```



**Obrázek 48.1.1.:** Princip ukazatele v paměti



# 49. Preprocesor jazyka C

## Obsah

49.1. Připojení externích souborů . . . . .	229
49.2. Definice makra . . . . .	229
49.2.1. Symbolické konstanty . . . . .	229
49.2.2. Makra . . . . .	229
49.3. Podmíněný překlad . . . . .	229

Preprocesor interpretuje jednoduché direktivy pro vložení zdrojového kódu z jiného souboru (`#include`), definice makra (`#define`) a podmíněné vložení kódu (`#if`). C preprocesor přijímá tyto direktivy:

<code>#define</code>	<code>#elif</code>	<code>#else</code>	<code>#endif</code>
<code>#error</code>	<code>#if</code>	<code>#ifdef</code>	<code>#ifndef</code>
<code>#include</code>	<code>#line</code>	<code>#pragma</code>	<code>#undef</code>

Tabulka 49.0.1.: Seznam platných direktiv jazyka C

## 49.1. Připojení externích souborů

### 49.2. Definice makra

Definice makra ve významu rozsahů polí je typickým příkladem použití preprocessoru. Ve zdrojovém textu se neodvoláváme na magická čísla, ale na vhodně symbolicky pojmenovaná makra, která zvýší čitelnost programu.

Pro větší přehlednost rozdělme makra na

- symbolické konstanty,
- makra

Klíčem nechť je skutečnost, že makro na rozdíl od symbolické konstanty má argumenty.

#### 49.2.1. Symbolické konstanty

#### 49.2.2. Makra

## 49.3. Podmíněný překlad

Preprocesor může během své činnosti vyhodnocovat, je-li nějaké makro definováno, či nikoliv. Při použití klíčového slova preprocessoru `defined` pak může spojovat taková vyhodnocení do rozsáhlejších logických výrazů. Argument `defined` nemusí být uzavřen do závorek. Může se však vyskytnout jen za `#if` nebo `#elif`. Například si ukažme složitější podmínu:



**Část XX.**

**ANSI/C++**



# 50. Přehled jazyka C++

## Obsah

<b>50.1. Objektově orientované programování . . . . .</b>	<b>233</b>
50.1.1. Třídy: první nahlédnutí . . . . .	233
50.1.2. Některé rozdíly mezi C a C++ . . . . .	235
50.1.3. Úvod do přetěžování funkcí . . . . .	235
50.1.4. Práce s ukazateli . . . . .	236

C++ je rozšířená verze jazyka C. C++ zahrnuje vše, co je součástí jazyka C, a přidává podporu objektově orientovaného programování (zkráceně OOP). C++ navíc obsahuje mnohá vylepšení, a prvky, které z něj jednoduše dělají "lepší C", nezávisle na objektově orientovaném programování. Kromě několika málo zanedbatelných výjimek platí, že C je podmnožinou jazyka C++.

Poněvadž byl C++ vytvořen pro podporu OOP, začne následující podkapitola popisem OOP. Je důležité si uvědomit, že jazyka C++ může být použito i pro psaní programů, které nejsou objektově orientovány. Tato kapitola, kromě představení nejdůležitějších vlastností jazyka C++, diskutuje především o rozdílech mezi způsoby programování v C a v C++ [Schot, p. 20].

## 50.1. Objektově orientované programování

Objektově orientované programování je výkonný způsob jak přistupovat k úloze programování. Již od raných začátků bylo programování spojováno s rozličnými metodologiemi. V každém kritickém momentě během vývoje programování byly vytvářeny nové přístupy, které pomohly programátorům zvládat stále složitější programy. První programy byly vytvářeny pouhým nastavením přepínačů na panelu počítače. Tento postup byl vhodný pouze pro velmi malé programy. Později vytvořený jazyk symbolických instrukcí již umožňoval psaní delších programů. K dalšímu vývoji došlo v roce 1955, kdy byl vytvořen první programovací jazyk vysoké úrovně - FORTRAN.

S využitím programovacího jazyka vysoké úrovně byl programátor schopen psát programy o délce několika tisících řádků. Nejstarší metodou použitou pro programování byl *ad hoc* přístup "všechno jde". Jestliže to bylo přípustné pro relativně krátké programy, pak u rozsáhlých programů to vedlo k vytváření nečitelných a nezvládnutelných "špagety kódů"

Eliminaci "špagety kódů" umožnil až vznik *strukturovaných programovacích jazyků* v šedesátých letech. Byly to jazyky Algol a Pascal. Volně lze interpretovat, že je-li jazyk C strukturovaný, pak typ programování, které v něm provádíme, by se mohl označit jako strukturované programování. Strukturované programování se opírá o dobře definované řídící struktury, bloky kódů, vyloučení příkazů GOTO, lokální (stand-alone) podprogramy, které podporují rekurzi, a lokální proměnné.

Přestože strukturované programování přinášelo výborné výsledky, když bylo použito pro středně složité programy, v mnoha bodech zklamalo, když program přesáhl určitou velikost. K tomuto účelu bylo vytvořeno objektově orientované programování. OOP vzalo nejlepší myšlenky včleněné do strukturovaného programování a zkombinovalo je s výkonnými novými koncepty, které dovolují organizovat programy mnohem efektivněji.

Obecně všechny OOP jazyky sdílejí tři definované vlastnosti:

- zapouzdření (encapsulation),
- polymorfismus (polymorphism),
- dědičnost (inheritance).

### 50.1.1. Třídy: první nahlédnutí

Snad nejdůležitějším samostatným prvkem jazyka C++ je **třída**. Je to mechanismus používaný pro vytváření objektů. Jako taková, je třída srdcem mnoha prvků jazyka C++. Třídy jsou pro programování v C++ tak významné, že je vhodné předložit na tomto místě jejich stručný přehled.

**Definice 50.1.1 (Třída).** Třída je základním obecným pojmem *klasifikace*, jak při návrhu uspořádávat informace do smysluplné entity. Základním pojmem je objekt, *instance třídy*, jako konkrétní případ realizace předpisu. Objekt si „pamatuje“ svůj stav (v podobě **dat** čili **atributů**) a zveřejněním některých svých operací (*nazývaných metody*) poskytuje rozhraní, jak s ním pracovat. Při používání objektu nás zajímá, jaké operace (služby) poskytuje, ale ne, jakým způsobem to provádí - to je princip zapouzdření. Jestli to provádí sám nebo využije služeb jiných objektů, je celkem jedno. Vlastní implementaci pak můžeme změnit (např. zefektivnit), aniž by se to dotklo všech, kteří objekt používají.

Abstrakce objektu, která v architektuře programu podchycuje na obecné úrovni podstatu všech objektů podobného typu, se nazývá **třída**. Třída je předpis, jak vyrobit objekt daného typu.

**Příklad 50.1.1.** Nechť má sousedka (chápejme ji jako objekt) má nějaké jméno, je nějak vysoká, umí chodit a umí mluvit. Totéž platí i pro mne. Mohu tedy při modelování této dvou objektů, *sousedky* a *mě*, abstrahovat od nepodstatných dílčích odlišností a díky této abstrakci vytvořit obecnou třídu *Člověk*, která bude mít atributy jméno a příjmení (obojí je nějaký řetězec znaků) a metody chodit a mluvit.

Třída je deklarována klíčovým slovem `class`. Syntaxe deklarace `class` je podobná její struktuře. V obecné formě vypadá takto

```
class jméno-řtídy {
    // privátní-funkce a členy
public:
    // veřejné funkce a členy
} seznam-úobjekt
```

Seznam objektů je v deklaraci třídy nepovinný. Stejně jako struktura, se mohou objekty třídy deklarovat později. Zatímco jméno třídy je také nepovinné, z praktického hlediska je vlastně vždy potřeba. Je to proto, že se jméno třídy stává novým typem jména použitého k deklaraci objektů třídy.

**Funkce a proměnné** deklarovány uvnitř třídy jsou označeny jako **členy této třídy**. Znamená to, že jsou přístupné pouze pro ostatní členy třídy. Pro deklaraci členů veřejné třídy se použije klíčové slovo `public` s dvojtečkou. Všechny funkce a proměnné deklarovány za tímto specifikátorem jsou přístupné jak pro členy třídy, tak i pro další části programu, které obsahují třídu.

Toto je jednoduchá deklarace třídy:

```
class myclass{
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};
```

Tato třída má pouze jednu privátní proměnnou nazvanou `a` a dvě veřejné funkce `set_a()` a `get_a()`. Tyto funkce jsou deklarovány uvnitř třídy pomocí jejich **prototypů**. Funkce, které jsou deklarovány jako součásti třídy se nazývají **členské funkce**.

Jelikož je a privátní, není dostupné pro žádný kód vně `myclass`. Ovšem funkce `set_a()` a `get_a()` jsou členy `myclass`, takže mají k a přístup. `set_a()` a `get_a()` jsou deklarovány jako veřejné členy `myclass` a mohou být volány každou částí programu, která `myclass` obsahuje.

Ačkoliv jsou funkce `set_a()` a `get_a()` deklarovány v `myclass`, nejsou ještě definovány. Aby jsem definoval členskou funkci, musím spojit typové jméno třídy se jménem funkce. To se udělá uvozením jména funkce jménem třídy se dvojicí dvojteček. Dvojice dvojteček se nazývá **operátor rozlišení oblasti** (scope resolution operator). Následující příklad ukazuje, jak jsou členské funkce `set_a()` a `get_a()` definovány:

```
void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}
```

Jak `get_a()`, tak i `set_a()` mají přístup k `a`, které je privátní v `myclass`. Poněvadž `get_a()` i `set_a()` jsou členy `myclass`, mohou přímo přistupovat k jejím soukromým datům.

Obecně se pro definici členské funkce musí použít následující tvar:

```
re-type jméno-řtídy ::jmého-funkce(seznam-úparametr)
{
    // členská funkce
}
```

Deklarace `myclass` nedefinuje žádný objekt typu `myclass`. Definuje pouze typ objektu, který bude vytvořen, když bude deklarován. Pro vytvoření objektu se použije jako specifikátor jméno třídy. Například tento řádek deklaruje dva objekty typu `myclass`:

```
myclass ob1, ob2; //toto jsou objekty typu myclass
```

Jakmile je vytvořen objekt třídy, může se program odkazovat na jeho veřejné členy pomocí tečkových operátorů bezmála takovým způsobem, jímž jsou prvky struktury zpřístupněny. Dle předcházející deklarace objektů volají následující příkazy `set_a()` pro objekty `ob1` a `ob2`:

```
ob1.set_a(10); // nastaví verzi ob1 na 10
ob2.set_a(99); // nastaví verzi ob2 na 99
```

Každý objekt obsahuje vlastní kopii všech dat deklarováných uvnitř třídy. Znamená to, že a náležející `ob1` je odlišné a různé od a navázaného na `ob2`.

**Příklad 50.1.2.** Tento program předvádí `myclass`, popsanou výše v textu. Nastavuje hodnoty a pro `ob1` a `ob2`, a pak zobrazuje hodnotu a pro každý objekt.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass {
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};
```

```
void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}

int main()
{
    myclass ob1, ob2;

    ob1.set_a(10);
    ob2.set_a(99);

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}
```

Program by měl na obrazovce zobrazit hodnoty 10 a 99.

**Příklad 50.1.3.** V `myclass` z předešlého příkladu je a privátní. Znamená to, že k ní mohou přímo přistupovat pouze členské funkce z `myclass`. (To je důvodem, proč je vyžadována veřejná funkce `get_a()`). Tedy při pokusu o přístup k privátnímu členu třídy z některé části programu, která není členem třídy, objeví se při překladu chyba. Pokud je `myclass` definována tak, jak bylo předvedeno v předešlém příkladě, pak následující volání funkce `main()` zapříčiní chybu:

```
// Toto je fragment obsahující chybu.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    myclass ob1, ob2;
    ob1.a = 10; // ERROR! užneme přistupovat
                 // k privátnímu členu
    ob2.a = 99; // dle členeských funkcí.

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}
```

**Příklad 50.1.4.** Stejně jako mohou existovat funkce veřejného člena, mohou existovat i proměnné veřejného člena. Jestliže například a bylo deklarováno ve veřejné části `myclass`, lze se na ně odkazovat z kterékoliv části programu, jak je předvedeno dále:

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
public:
    // nyní je a veřejné
    int a;
    // a nyní není potřeba set_a() a get_a()
};

int main()
{
    myclass ob1, ob2;

    ob1.a = 10;
    ob2.a = 99;

    cout << ob1.a << "\n";
    cout << ob2.a << "\n";

    return 0;
}
```

Protože je v tomto příkladě a deklarováno jako veřejný člen `myclass`, je přímo přístupné z `main()`. Pro přístup k a je použit tečkový operátor. Obvykle, když se volá členská funkce nebo se přistupuje k členské proměnné z vnějšího prostředí mimo třídu, je nutná plná specifikace daná jménem objektu i s tečkovým operátorem následovaným jménem člena, aby bylo jasné, na kterého člena objektu se odkazuje.

**Příklad 50.1.5.** Aby byla ukázána síla objektů, následující program vytváří třídu pojmenovanou `stack`, která implementuje zásobník použitelný například pro uchování znaků:

```
#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklaruje třídu stack pro znaky
class stack{
    char stck[SIZE]; // uklada zásobník
```



```

int tos; // index vrcholu zásobníku
public:
void init(); // inicializace stack
void push(char ch); // vložení znaku do stack
char pop(); // vyjmout znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::init()
{
    tos = 0;
}

// Vložení znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmout znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    stack s1, s2; // vytvoření dvou zásobníku
    int i;

    // inicializace zásobníku
    s1.init();
    s2.init();

    // vložení znaku do zásobníku
    s1.push('a');
    s2.push('x');
    s1.push('b');
    s2.push('y');
    s1.push('c');
    s2.push('z');

    // vyjmout znaku ze zásobníku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s1: " << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s2: " << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}
\end{lstlisting}

```

Program zobrazí následující výstupy:

```

Pop s1: c
Pop s1: b
Pop s1: a
Pop s2: z
Pop s2: y
Pop s2: x

```

Podívej se na program ještě jednou. Třída `stack` obsahuje dvě privátní proměnné: `stck` a `tos`. Pole `stck` uchovává znaky umístěné v zásobníku a `tos` obsahuje index horní úrovně zásobníku. Veřejné funkce zásobníku jsou `init()`, `push()` a `pop()` a slouží k inicializaci zásobníku, vkládání hodnoty a k vyjmouti hodnoty. Uvnitř `main()` jsou vytvořeny dva zásobníky `s1` a `s2` a do každého z nich jsou vloženy tři znaky. Je důležité uvědomit si, že každý zásobníkový objekt je oddělený od druhého. To znamená, že znaky vložené do `s1` nemohou žádným způsobem ovlivnit znaky vložené do `s2`. Každý objekt obsahuje vlastní kopii `stck` a `tos`. To je základní princip pro pochopení objektů. Ačkoliv všechny objekty třídy sdílejí své členské funkce, každý objekt vytváří a udržuje svá vlastní data.

### 50.1.2. Některé rozdíly mezi C a C++

Ačkoliv je jazyk C++ rozšířenou množinou jazyka C, existují mezi nimi drobné rozdíly a bylo by dobré se s nimi na začátku seznámit. Především, když v C nemá funkce žádné parametry, její prototyp má v seznamu parametrů funkce slovo `void`. Například když v "céčku" funkce nazvaná `f1()` nemá parametry (a vrací `char`), pak její prototyp bude vypadat následovně:

```
char f1(void);
```

Přestože v C++ zůstává `void` stále jako volitelný, bude se prototyp pro `f1()` psát běžně takto:

```
char f1();
```

C++ se odlišuje od C tím, že je v něm specifikován prázdný seznam parametrů. Kdyby se předchozí prototyp objevil v programu C, pak se to bude chápat, že o parametrech nebylo řečeno nic. V C++ to znamená, že funkce nemá parametry. Proto tedy v předchozím příkladě nebyl využit k deklaraci prázdného seznamu explicitně parametr `void`. (Použití parametru `void` k deklaraci prázdného seznamu parametrů není zakázáno; je to pouze nadbytečné. Jelikož většina programů C++ usiluje o téměř posvátným zanícením o výkonnost, neuvidíš téměř nikdy, že by bylo void tímto způsobem použito.) Zapamatuj si, že v C++ jsou následující dvě deklarace zcela rovnocenné:

```
char f1();
char f1(void);
```

Další drobná rozdílnost mezi C a C++ spočívá v tom, že v programech C++ musí mít všechny funkce prototypy. Zapamatuj si, že v C jsou prototypy doporučeny, ale technicky jsou nepovinné. V C++ jsou však vyžadovány. Jak je patrné z příkladu v předchozí části, prototyp členské funkce obsažený v třídě slouží rovněž jako její obecný prototyp a žádný další samostatný prototyp již není požadován. Třetím rozdílem mezi C a C++ je, když je funkce deklarována aby vracela hodnotu, musí hodnotu opravdu vracet. Jestliže má totiž funkce jiný návratový typ než `void`, musí pak každý příkaz `return` uvnitř funkce obsahovat hodnotu. V C není vyžadováno, aby vracely hodnotu funkce, které nejsou `void`. Jestliže hodnota neexistuje, "vrací se" jakási nahodilá hodnota.

Jestliže v C nespecifikujete explicitně návratový typ funkce, předpokládá se návratový typ `integer`. V C++ bylo toto pravidlo potlačeno, a proto musíš explicitně deklarovat všechny návratové typy funkcí. Další rozdíl mezi C a C++ je, že v programech C budeš muset brát ohled na to, kde mohou být lokální proměnné deklarovány. V C mohou být lokální proměnné deklarovány pouze na začátku bloku před všemi "výkonnými" příkazy. V C++ mohou být lokální proměnné deklarovány kdekoli. Výhodou tohoto přístupu je, že lokální proměnné mohou být deklarovány ta, kde budou poprvé použity, což může napomoci v prevenci před nechtěnými vedlejšími účinky.

Konečně také v C++ definuje datový typ `bool` pro uložení hodnot Boolean (popř. pravda/nepravda). C++ rovněž definuje klíčová slova `true` a `false`, která jsou jedinými hodnotami, které může hodnota typu Boolean nabývat. V C++ je výstupní hodnotou relačních a logických operátorů hodnota typu `bool` a všechny podmíněné příkazy musí hodnotu `bool` vyhodnocovat. V C je hodnota `true` nenulová a hodnota `false` odpovídá nule. Tak je to i v C++, poněvadž při použití v booleánských výrazech je každá nenulová hodnota automaticky převedena na `true` a každá nulová hodnota je převedena na `false`. Funguje to i opačným směrem. Když je booleánská hodnota použita ve výrazech `integer`, pak se `true` převádí na 1 a `false` na 0. Přidání `bool` umožňuje důkladnější ověřování typů a poskytuje způsob, jak navzájem rozlišovat Boolean a `integer`. Využívání je samozřejmě nepovinné, ale `bool` je nejpohodlnější.

#### 50.1.3. Úvod do přetěžování funkcí

Po třídách je snad nejdůležitější a vše postupující vlastnosti C++ přetěžování funkcí. Přetěžování funkcí nejen poskytuje mechanismus jímž C++ poskytuje jeden typ polymorfismu, ale také utváří základ, na němž může být programování prostředí dynamicky rozšiřováno. Kvůli důležitosti přetěžování je v následujících odstavcích předložen stručný úvod.<sup>1</sup>

V C++ mohou dvě nebo více funkcí sdílet stejně jméno, pokud se liší typy jejich argumentů nebo jejich počet anebo se liší obojí.

Je velmi snadné přetěžit funkci: jednoduše deklaruješ a definuješ všechny požadované verze. Správnou verzi překladač automaticky vybere dle počtu nebo typu argumentů použitých při volání funkce.

**Příklad 50.1.6.** Následující program definuje tři funkce pro výpočet absolutní hodnoty nazvané `abs()` - pro každý typ dat jednu.

```

#include <iostream>
using namespace std;

// Přetízení abs() třemi způsoby
int abs(int n);
long abs(long n);
double abs(double n);

int main()
{
    cout << "Absolute value of -10" << abs(-10) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10L" << abs(-10L) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10.01" << abs(-10.01) << "\n";

    return 0;
}

// abs() pro hodnoty int
int abs(int n)
{
    cout << "In integer abs()\n";
    return n < 0 ? -n : n;
}

```

<sup>1</sup>V C++ lze přetěžovat i operátory.

```
// abs() pro hodnoty long
long abs (long n)
{
    cout << "In long abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty double
double abs (double n)
{
    cout << "In double abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}
```

Překladač automaticky volá správně jednu ze tří verzí `abs()` dle typu dat, která jsou uvedena v argumentu. Program vytvoří následující výstup:

```
In integer abs() Absolute value of -10: 10
In long abs() Absolute value of -10L: 10
In double abs() Absolute value of -10.01: 10.01
```

Uvedený příklad je velmi jednoduchý, nicméně ukazuje význam přetěžování funkcí. Jelikož lze jediné jméno použít k popisu obecné třídy činností, je umělá složitost, která vyplývá z použití tří mírně odlišných jmen - v tomto případě `abs()`, `labs()` a `fabs()` - snadno eliminována.

#### Příklad 50.1.7.

```
#include <iostream>
using namespace std;

void date(char *date) // datum jako retezec
void date(int month, int day, int year) // datum jako císla

int main()
{
    date("11/22/2010");
    date(11, 22, 2010 );
}

// Datum jako retezec.
void date(char *date)
{
    cout << "Date:" << date << "\n";
}

// Datum jako integer
void date(int month, int day, int year)
{
    cout << "Date:" << month << "/";
    cout << day << "/" << year << "\n";
}
```

Příklad 50.1.7 ilustruje jak může přetížení funkce zajistit mnohem přirozenější přístup k funkci. Protože je poměrně běžné, že je datum reprezentováno buď řetězcem, nebo třemi celočíselnými hodnotami obsahující den, měsíc a rok, záleží jen na uživateli, aby vybral tu nejhodlnější formu, dle dané situace.

#### 50.1.4. Práce s ukazateli

##### Příklad 50.1.8. Práce s ukazateli:

```
// Demonstrates the use of pointer declarations
// and operators.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int num=123;           // A regular integer variable.
    int *p_num;            // Declares an integer pointer.
    cout << "num is " << num << "\n"; // Prints value of num.
    cout << "The address of num is " << &num << "\n";
                                // Prints num's location.
    p_num = &num;          // Puts address of num in p_num,
                          // in effect making p_num point
                          // to num.
                          // No * in front of p_num.
    cout << "*p_num is " << *p_num << "\n"; // Prints value
                                              // of num.
    cout << "p_num is " << p_num << "\n"; // Prints location
                                              // of num.
    return 0;
}
```

Výstup programu:

```
num is 123
The address of num is 0x28ff44
*p_num is 123
p_num is 0x28ff44
```

**Příklad 50.1.9.** Napište funkci `swap` která prohodí hodnoty dvou proměnných typu `int`. Výsledek funkce `swap` vytiskněte na výstupu terminálu.

```
// Program that includes a function that swaps
// any two integers passed to it
#include <iostream>
using namespace std;
void swap(int &num1, int &num2);
int main()
{
    int i=10, j=20;
    cout << "\n\nBefore swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    swap(i, j);
    cout << "\n\nAfter swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    return 0;
}

void swap(int &num1, int &num2)
{
    int temp;           // Variable that holds
                        // in-between swapped value.
    temp = num1;        // The calling function's variables
    num1 = num2;        // (and not copies of them) are
    num2 = temp;        // changed in this function.
    return;
}
```

Výstup programu:

```
Before swap, i is 10 and j is 20
After swap, i is 20 and j is 10
```

**Příklad 50.1.10.** Následující příklad ukazuje použití **ukazatele na funkci**. Program se nejprve zeptá, zda se má provádět sčítání nebo násobení. Podle této odpovědi vloží do proměnné `operation` ukazatel na funkci `add` nebo na funkci `multiply`. Dále zadáme dvě čísla, která se použijí jako parametry vybrané funkce.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int add(int a, int b)
{
    return a+b;
}
int multiply(int a, int b)
{
    return a*b;
}
int main()
{
    int (*operation) (int, int);
    int x, y, sel;
    cout << "We will add(1) or multiply(2)?";
    do {
        cin >> sel;
    } while (sel != 1 && sel != 2);
    if (sel == 1) operation = add;
    if (sel == 2) operation = multiply;
    cout << "Enter two integers:";
    cin >> x >> y;
    cout << "Result is " << operation(x, y) << endl;
    return 0;
}
```

# 51. Úvod do tříd

## Obsah

51.1. Funkce konstruktor a destruktur . . . . . 237

### 51.1. Funkce konstruktor a destruktur

Je zcela běžné, že některé části programu vyžadují inicializaci. Potřeba inicializace je mnohem častější, když se pracuje s objekty. K ošetření této situace poskytuje C++ funkci konstruktor, která může být vložena do deklarace třídy. Všechny inicializace, které je nutno na objektu provést, může automaticky vykonat konstruktor. Konstruktor má stejné jméno jako třída, jejíž je součástí a nemá návratový typ (není to ani povoleno). Následující příklad ukazuje krátkou třídu, jež obsahuje konstruktor.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

V tomto jednoduchém příkladě je hodnota a inicializována konstruktorem myclass(). Konstruktor je volán při vytváření objektu ob. Objekt je vytvářen tehdy, když se provádí jeho deklarační příkaz. V C++ je deklarační příkaz proměnné vlastně "příkazem činnosti". Když se programuje v C, lze deklarační příkazy považovat za zavádění proměnných. Ovšem v C++, poněvadž objekt může mít konstruktor, bude ve skutečnosti příkaz pro deklaraci proměnné vyvolávat celou řadu činností.

Pro globální objekty je konstruktor objektu volán jen jednou, když se program začíná poprvé spouštět. Pro lokální objekty je konstruktor volán pokaždé, když je prováděn deklarační příkaz. Doplňkem konstruktoru je destruktur. Tato funkce volána, když je objekt rušen. Když se pracuje s objekty, je běžné, že se musí provést v souvislosti s rušením objektu určité akce (např. uvolnění zabrané paměti). Následující třída již destruktur obsahuje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    ~myclass(); // destruktur
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

myclass::~myclass()
{
    cout << "Destructing...\n";
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();
```

```
    return o;
}
```

Destrukтор třídy je volán, když je objekt rušen. Lokální objekty jsou rušeny, když odcházejí mimo oblast. Globální objekty jsou rušeny, když program končí.

Není možné získat adresu konstruktoru nebo destruktoru.

**Příklad 51.1.1.** Třída `stack` vytvořená v příkladu 50.1.5 vyžadovala inicializační funkci k nastavení proměnné pro index zásobníku. To je přesně ten druh operací, pro něž byl konstruktor navržen. Zde je vylepšení verze třídy `stack`, která používá konstruktor pro automatickou inicializaci zásobníkového objektu po jeho vytvoření:

```
#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklarace třídy znakového objektu
class stack{
    char stck[SIZE]; // uklada zasobnik
    int tos; // index vrcholu zasobniku
public:
    stack() // konstruktor
    void push(char ch); // vlozeni znaku do stack
    char pop(); // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::stack()
{
    cout << "Constructing a stack\n";
    tos = 0;
}

// Vlozeni znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    // vytvorí dva zásobníky, které se
    // automaticky inicializují
    stack s1, s2;
    int i;

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push('a');
    s2.push('x');
    s1.push('b');
    s2.push('y');
    s1.push('c');
    s2.push('z');

    // vyjmuti znaku ze zasobniku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s1: " << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s2: " << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}
```

```
#define SIZE 255

class strtype{
    char *p;
    int len;
public:
    strtype(); // konstruktor
    ~strtype(); // destruktor
    void set(char *ptr);
    void show();
};

// inicializace retezcového objektu
strtype::strtype()
{
    p = (char *) malloc(SIZE);
    if(!p) {
        cout << "Allocation error\n";
        exit(1);
    }
    *p = '\0';
    len = 0;
}

strtype::~strtype()
{
    cout << "Freeing p\n";
    free(p);
}

void strtype::set(char *ptr)
{
    if(strlen(p) >= SIZE) {
        cout << "String too big\n";
        return;
    }
    strcpy(p, ptr);
    len = strlen(p);
}

void strtype::show()
{
    cout << p << "-length: " << len;
    cout << "\n";
}

int main()
{
    strtype s1, s2;

    s1.set("This is a test.");
    s2.set("I like C++.");

    s1.show();
    s2.show();

    return 0;
}
```

Tento program používá pro přidělení a uvolnění paměti funkce `malloc` a `free`. Přestože to funguje perfektně, dále je ukázáno, že v C++ se používá jiný způsob pro dynamickou správu paměti.

Je Vidět, že úloha inicializace je konstruktorem provedena automaticky lépe, než pomocí samostatné funkce, která by musela být explicitně volána programem. Když je inicializace provedena automaticky při vytváření objektu, eliminuje to možnost, že by kvůli výskytu chyby inicializace neproběhla. Je to další cesta, jak omezit složitost programu.

**Příklad 51.1.2.** Tento příklad předvádí nutnost existence nejen konstruktoru, ale i destruktoru. Vytváří se zde jednoduchá řetězová třída, nazvaná `strtype`, která obsahuje řetězec a jeho délku. Když je objekt `strtype` vytvořen, je mu přidělena paměť pro uložení řetězce a jeho počáteční hodnota je nastavena na 0. Když je objekt `strtype` zrušen, je paměť uvolněna.

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
using namespace std;
```

**Část XXI.**

**Elektrické měřicí systémy**



## 52. LabView

### Obsah

52.1. Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView . . . . .	241
52.2. Základní části virtuálního přístroje . . . . .	242
52.2.1. Čelní panel . . . . .	242
52.2.2. Blokové schéma . . . . .	242
52.2.3. Ikona a konektor . . . . .	242
52.3. Práce s grafy . . . . .	242
52.3.1. Rozdělení grafů . . . . .	242
52.3.2. Datové struktury pro indikátory grafů . . . . .	242

### 52.1. Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView

Základním záměrem vývojových pracovníků firmy National Instruments bylo dát do rukou inženýrů nástroj podobné efektivity pružnosti a síly jako je tabulkový procesor v rukou finančního manažera. Myšlenka, na níž stojí efektivita vývojového prostředí LabVIEW I daného na trh v roce 1986 pro platformu počítačů Macintosh je jednoduchá a vznikla původně na půdě Texaské univerzity ve skupině nadšenců kolem duchovního 'otce' tohoto systému Jeffa Kodovského. Vychází se zde z poznatku, že tím, kdo ví, co měřit, jak analyzovat a jak prezentovat data, je technik, který nemusí být sám zkušeným programátorem. Své představy tedy předává programátorovi obvykle v podobě blokového schématu. Programátor toto schéma potom převádí do syntaxe zvoleného programovacího jazyka, což je činnost poměrně zdolouhavá a náročná na přesnost a nepřináší již do procesu měření obvykle žádné další nové informace.

Cílem vývojového prostředí LabVIEW je to, aby blokové schéma bylo koncovým tvarem aplikace, který se již dále nebude převádět do textové podoby. LabVIEW (Laboratory Virtual Instruments Engineering Workbench) je obecným vývojovým prostředím s bohatými knihovnami pro vytváření aplikací zaměřených do oblasti měření ve všech fázích tohoto procesu - tj.

sběru, analýzy a prezentace naměřených dat. Podporuje všechny čtyři základní způsoby sběru dat do počítače (z měřicích přístrojů přes rozhraní RS 232 nebo GPIB, ze zásvuných multifunkčních karet a ze systému na bázi VXI sběrnice). Poskytuje uživateli plnohodnotný programovací jazyk se všemi odpovídajícími datovými a programovými strukturami v grafické podobě - tzv. G jazyk (Graphical language) [Židov, p. 21].

LabVIEW je tedy vývojovým prostředím na úrovni např. C jazyka, ale na rozdíl od něj není orientován textově, ale graficky.. Výsledný produkt tohoto vývojového prostředí se nazývá virtuálním přístrojem (Virtual Instrument), protože svými projevy a činností připomíná klasický přístroj ve své fyzické podobě.

Virtuální přístroj jako základní jednotka aplikace vytvořené v tomto vývojovém prostředí obsahuje:

- interaktivní grafické rozhraní (Graphical User Interface - GUI) ke koncovému uživateli - tzv. čelní panel (Front Panel), který simuluje čelní panel fyzického přístroje. Obsahuje prvky pro ovládání a indikaci (knoflíky, tlačítka, LED indikátory, grafy ...). Tento čelní panel ovládá uživatel myší nebo z klávesnice.
- činnost virtuálního přístroje je dána jeho blokovým schématem (Block Diagram). Toto blokové schéma je vytvořeno ikonami reprezentujícími v koncových blocích ovládací a indikační prvky čelního panelu a ve svých uzlových blocích jsou to bloky zpracovávající procházející data. Tento blokový diagram je zdrojovou podobou každé aplikace.
- virtuální přístroj má hierarchickou a modulární strukturu. Lze jej používat jako celý program nebo jeho jednotlivé podprogramy, které se nazývají podřízenými virtuálními přístroji (SubVI). Součástí každého virtuálního přístroje je jeho ikona, kterou je prezentován v blokovém schématu a konektor s přípojnými mísť pro vstupní a výstupní signály.

Těmito charakteristickými rysy naplňuje vývojové prostředí LabVIEW podmínky modulárního programování. Svou aplikaci dělí uživatel na jednotlivé úlohy, pro které vytváří dílčí virtuální přístroje (subVI) a z nich potom buduje celou aplikaci jejich spojováním do výsledného virtuálního přístroje. Na závěr lze celou aplikaci přeložit do EXE tvaru a provozovat nezávisle na vývojovém prostředí. Díky možnosti vyzkoušet funkci každého dílčího virtuálního přístroje nezávisle na jiných a díky bohaté škále ladicích prostředků je ladění aplikace velmi snadné.



Obrázek 52.1.1.: Jeff Kodovsky prezentuje ranou verzi programu LabVIEW. Psal se rok 1988. Kredit: [National Instruments](#), [11]

## 52.2. Základní části virtuálního přístroje

### 52.2.1. Čelní panel

### 52.2.2. Blokové schéma

### 52.2.3. Ikona a konektor

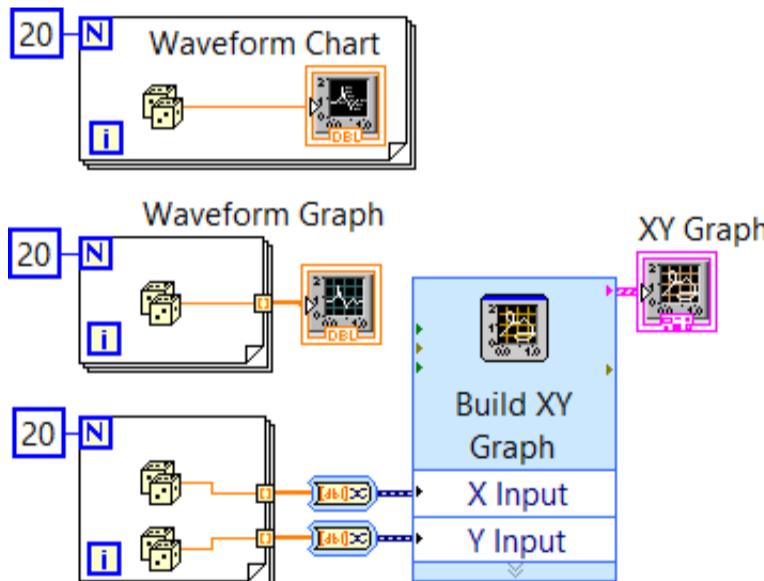
## 52.3. Práce s grafy

Součástí grafického rozhraní k uživateli tvořeného ve vývojovém prostředí LabVIEW čelním panelem virtuálního přístroje jsou velmi často i grafy. Z hlediska dělení objektů čelního panelu na prvky ovládací (směr toku informace od uživatele k systému) a indikační (směr toku informace od systému k uživateli) se jedná prakticky vždy o objekty indikační. Indikátor grafu tedy představuje dvouozměrný displej určený pro zobrazení jednoho nebo více průběhů.

### 52.3.1. Rozdelení grafů

Ve vývojovém prostředí LabVIEW lze indikátory grafů zásadně rozdělit podle dvou hledisek:

- podle způsobu předávání dat a zobrazení průběhů v grafu:
  - **statické indikátory** (Graphs), kde pro zobrazení jednoho či více průběhů je nutné předem připravit data popisující celý průběh, popř. průběhy a předat je objektu statického grafu jako celek, graf je zobrazen jednorázově podle zadání dat pro osu nezávisle proměnné se statické grafy dělí na:
    - \* průběhové (časové) grafy (waveform graph), u kterých se předpokládá rovnoměrné rozdělení bodů tvořících graf na ose x a dané počátkem a přírůstkem - nejčastěji se tento typ grafu používá pro zobrazení časového průběhu veličiny
    - \* XY grafy (XY graph), u kterých se předpokládá libovolné rozdělení bodů tvořících graf na ose x - s využitím tohoto typu grafu je možno zobrazit libovolný průběh v kartézských souřadnicích
  - **registrační indikátory** (CHARTS), kde vstupní data jsou předávána bod po bodu, popř. jako bloky dat představující úseky zobrazeného průběhu. Registrační graf postupně doplňuje průběh tak, jak jsou mu dodávána vstupní data.
- podle počtu dimenzí grafu:
  - grafy dvouozměrné - statické i registrační
  - grafy tříozměrné zobrazené v ploše - statické i registrační
  - grafy tříozměrné zobrazené v axonometrickém pohledu s možností natáčení



**Obrázek 52.3.1.:** Demonstrace rozdílu mezi registračním grafem (Waveform chart) a statickým grafem (Waveform Graph). Pro úplnost je zde zastoupen i XY graph.

Jak již bylo řečeno, Waveform Chart se používá pro zobrazení postupně vznikajících průběhů - data pro zobrazení jsou na indikátor grafu posílána postupně. Pokud bychom VI z obrázku 52.3.1 opakován spouštěli, byl by vygenerovaný průběh připojen na konec předchozího průběhu. Tím by se graf postupně zaplňoval. Při definování tohoto typu indikátoru grafu je vhodné aby uživatel mimo jiné určil:

- šířku zobrazeného průběhu v počtu bodů - lze si to představit jako okno dané šířky, přes které se dívám na zobrazený průběh – zadává se jako dolní a horní mez při popisu osy x

- šířku zapamatované části grafu v počtu bodů, která je obvykle větší než šířka zobrazeného průběhu a umožňuje mi tak podívat se i na starší data, která se nevezdou do zobrazené části průběhu – zadává se přes roletové menu v položce Chart History Length.

### 52.3.2. Datové struktury pro indikátory grafů

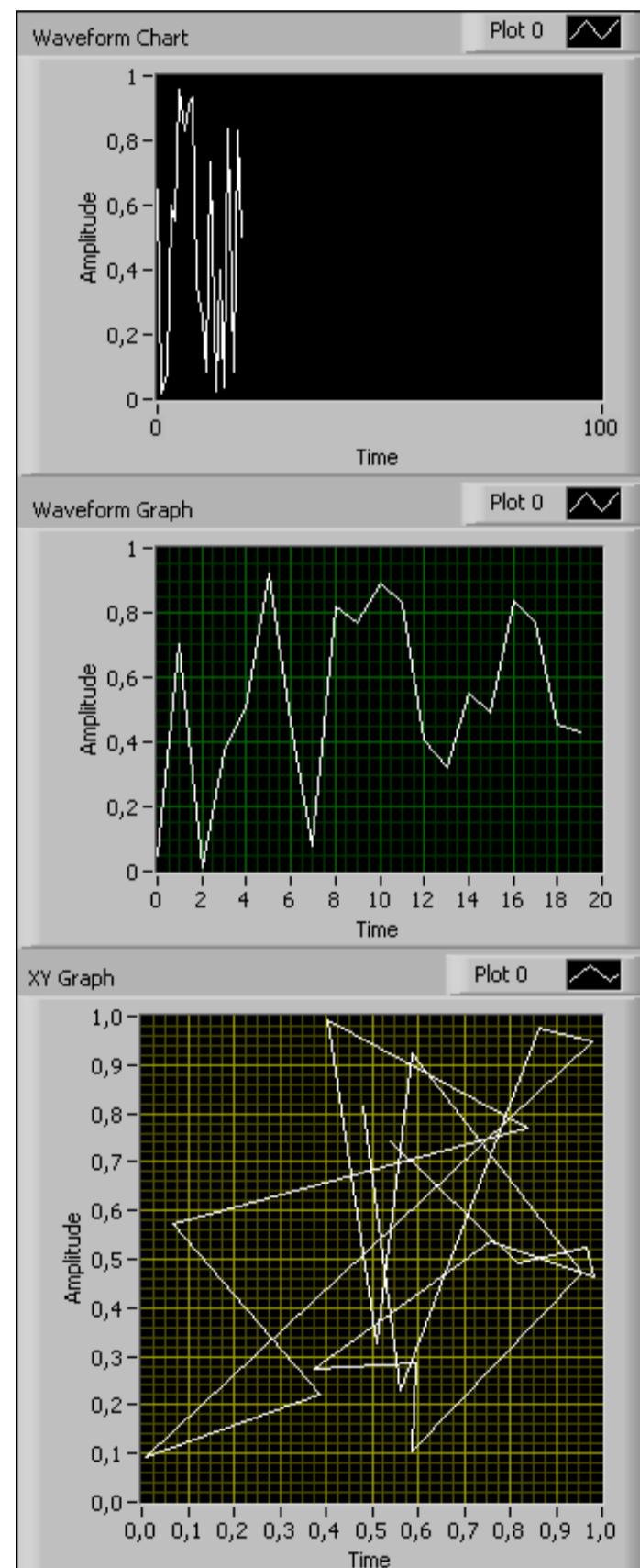
Podle zvoleného typu grafu je nutno pro něj připravit i vhodnou datovou strukturu odpovídající vybranému typu grafu a počtu požadovaných průběhů v něm zobrazených. V následujícím popisu datových struktur je použita tato konvence:

- $[y]$  představuje jednorozměrné pole prvků  $y$
- $y1, y2, y3$  představuje cluster s prvky  $y1, y2$  a  $y3$

Pro programové vytvoření odpovídajících datových struktur se používá:

- v případě pole funkce Build Array nebo zapnutá indexace na výstupu z programových struktur cyklu typu FOR a typu WHILE.
- v případě clusteru funkce Bundle eventuálně funkce Bundle by Name

V případě složitějších datových struktur se tyto funkce kombinují, přičemž se postupuje od středu definice datové struktury k okrajům.



**Obrázek 52.3.2.:** Demonstrace rozdílu mezi registračním grafem (Waveform chart) a statickým grafem (Waveform Graph). Pro úplnost je zde zastoupen i XY graph

## References

- [11] "Jeff Kodosky Predicts an Exciting Future for LabVIEW". In: *NI-Instrumentation Newsletter 1396* (2011), p. 2 (cit. on p. [241](#)).
- [Žídoz] J. Žídek. "Grafické programování ve vývojovém prostředí LabVIEW". In: (2002), p. 215 (cit. on p. [241](#)).



**Část XXII.**

**Výkonová elektronika**



# 53. Měniče s vnější komutací

## 53.1. Takt a komutace

### Obsah

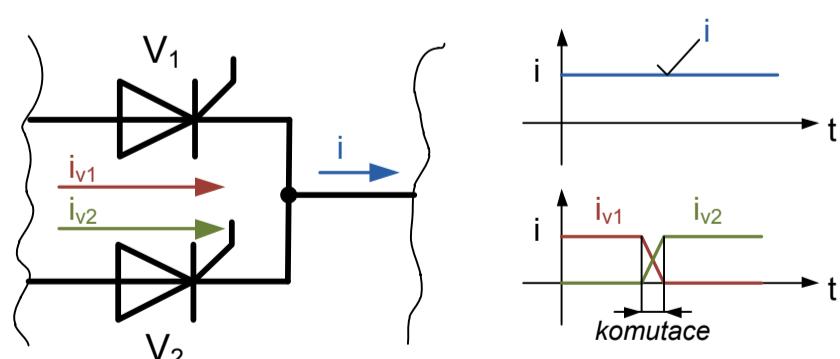
53.1. Takt a komutace . . . . . 247

Spínáním hlavních polovodičových součástek v *hlavním obvodu* měniče nebo spínače je realizována žádaná funkce, tj. přeměna parametrů elektrické energie, u měničů, a spínání u spínačů. *Vedlejší obvod*, včetně vedlejších polovodičových součástek, zajišťuje činnost hlavního obvodu (např. vypínání hlavních tyristorů). Každá část hlavního obvodu mezi dvěma uzly je *hlavní větev*. Každá část vedlejšího obvodu mezi dvěma uzly je *vedlejší větev*.

**Takt** je časový interval mezi dvěma po sobě následujícími změnami vodivosti větví měniče či spínače. Označujeme jej značkami sepnutých součástek. Tak např. takt  $V_1, V_2$  je časový interval, ve kterém jsou sepnuty součástky  $V_1, V_2$ .

**Komutace** větví měniče (spínače) je elektromagnetický děj v obvodu měniče (spínače) charakterizovaný přechodem proudu z jedné větve měniče (spínače) na druhou aniž by byl přerušen proud odtékající z (nebo přitékající do) uzlu obou větví. Termín komutace měniče (spínače) nelze zaměňovat s termínem komutace polovodičové součástky. Ke komutaci běžné dochází po sepnutí polovodičové součástky jedné z komutujících větví, *Sepnutí a nárůst proudu v této větvi, pokles proudu a nakonec vypnutí polovodičové součástky ve druhé větvi, umožňuje komutační napětí působící na obě větve*.

- **Vnější komutace** (dříve označována jako přirozená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným vně měniče. Užšími termíny síťová komutace nebo zátěžová komutace je blíže určován původ komutačního napětí.
- **Vlastní komutace** (dříve označována jako nucená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným ve vlastním obvodu měniče.
- **Přímá komutace** probíhá v jednom komutačním taktu (obr. 53.1.1), přímo z jedné hlavní větve na druhou. Přímou komutaci je možno označit též jako jednostupňovou.



Obrázek 53.1.1.: Komutace.



## 54. Polovodičové součástky výkonové elektroniky

### 54.1. MOSFET tranzistory

#### Obsah

54.1. MOSFET tranzistory . . . . .	249
54.1.1. Odhad ztrátového výkonu tranzistoru . . . . .	249

#### 54.1.1. Odhad ztrátového výkonu tranzistoru

Odhad ztrátového výkonu bude proveden pro potřeby výběru optimálního MOSFET tranzistoru pro danou výkonovou aplikaci

##### 54.1.1.1. Typy ztrát v MOSFET struktuře a antiparalelní diodě

Celkové ztrát ve spínacím režimu lze rozdělit do tří složek:

- **Vodivostní ztráty** (Conduction losses)
- **Spínací ztráty** (Switching losses)
- **Blokovací ztráty** (Blocking "leakage" losses)

$$P_{TOTAL} = P_C + P_{SW} + P_B \doteq P_C + P_{SW} \quad (54.1.1)$$



# 55. Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů

## Obsah

<b>55.1. Úvod</b>	251
<b>55.2. Výkonové tranzistory MOS</b>	251
55.2.1. Princip funkce tranzistoru MOS	251
55.2.2. Struktury tranzistorů MOS	251
55.2.3. Statické parametry	251
55.2.4. Výkonový tranzistor ve spínacím režimu	251
<b>55.3. Tranzistory IGBT</b>	251
55.3.1. Statické parametry	251
55.3.2. Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT	251
<b>55.4. Metody řízení spínacího procesu</b>	251
55.4.1. Vliv velikosti hradlového odporu	251
55.4.2. Aktivní řízení spínání (Active gate control)	251
<b>55.5. Způsoby detekce nadproutu</b>	252
55.5.1. Uvažované typy zkratových obvodů ve věti výkonového měniče s indukční zátěží	252
55.5.2. Monitorování velikosti kolektorového napětí	253
55.5.3. Omezovač hradlového napětí - $V_{GE}$ clamping	253

## 55.1. Úvod

V obecném smyslu se pojmem budič výkonové součástky rozumí určité rozhraní mezi řídící jednotkou a výkonovou součástkou. Základní funkcí je přizpůsobit logické řídící signály způsobu ovládání hradla výkonové součástky. S rostoucím instalovaným výkonem a spínací frekvencí výkonového elektronického systému jsou na budiče kladený vyšší nároky. Častým požadavkem je spínání výkonové součástky na plovoucím potenciálu vůči řídícímu signálu. Z toho vyplývá nutnost galvanického oddělení řídících signálů na rozhraní mezi řídícími a výkonovými obvody elektronického systému. Ve většině aplikací jsou také na galvanické oddělení kladený ještě bezpečnostní požadavky. Můžeme se proto setkat s budiči, které mají řídící signály galvanicky odděleny, ačkoliv výkonový spínač pracuje na stejném potenciálu jako řídící elektronika, nebo například s budiči s dvojitou izolací.

Při spínání často dochází k potenciálovým skokům mezi hradlem a řídicí elektronikou, což klade mimořádné požadavky na kvalitu galvanického oddělení a odolnost proti rušení vlivem  $dU/dt$ . Budič tudíž vyžaduje vlastní, rovněž galvanicky oddělený napájecí zdroj, který je jednoznačně řešen vždy impulsním transformátorem. Velmi důležitou součástí budiče jsou rychlé elektronické ochrany, jejich úkolem je zajistit "nezničitelnost" výkonového spínače. Informaci o nestandardním stavu kterékoli ochrany je nutno hlásit zpět do řídícího systému.

V následující kapitole se budeme věnovat konstrukci a návrhu budičů pro výkonové spínače typu IGBT pro trakční aplikace. Při provozu nejen trakčních měničů, se během spínacího procesu IGBT prvku generují vysoké strmosti kolektorového napětí a proudu, které vytváří rušení (EMI) a přepěťové špičky při vypínání. Jelikož budič představuje elektronický obvod, pracující ve velmi těsné blízkosti výkonového spínače, existuje vždy elektromagnetická vazba, přes kterou se šíří rušení a je tedy nezbytné zkoumat jeho odolnost. Zpomalení spínacího procesu sice omezuje generované strmosti, ale vede ke zvyšování ztrát. Dosažení optimálního kompromisu mezi úrovní rušení a výkonovou ztrátou vede na konstrukci komplexních budičů, které spínací proces výkonové součástky kontrolují ve všech jeho fázích.

## 55.2. Výkonové tranzistory MOS

- 55.2.1. Princip funkce tranzistoru MOS**
- 55.2.2. Struktury tranzistorů MOS**
- 55.2.3. Statické parametry**
- 55.2.4. Výkonový tranzistor ve spínacím režimu**
  - 55.2.4.1. Zapínací proces**
  - 55.2.4.2. Vypínací proces**

## 55.3. Tranzistory IGBT

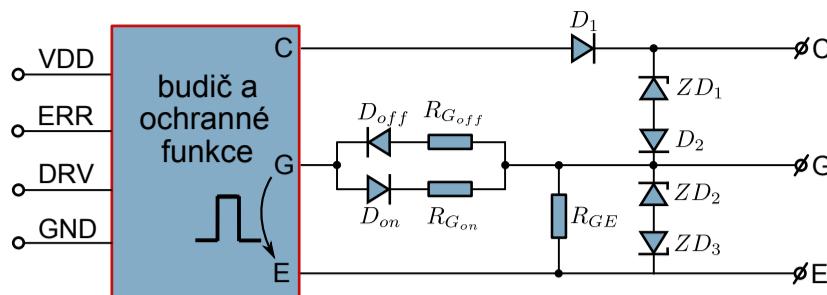
- 55.3.1. Statické parametry**
- 55.3.2. Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT**
- 55.4. Metody řízení spínacího procesu**
  - 55.4.1. Vliv velikosti hradlového odporu**
  - 55.4.2. Aktivní řízení spínání (Active gate control)**

Příklad budiče IGBT s čistě odporovým řízením spínacího procesu je na obrázku 55.4.1, z něhož je patrné, že při zapínání tranzistoru je na hradlo připojeno napětí  $U_{d_{ON}}$  přes předřazený zapínací rezistor  $R_{G_{ON}}$  a analogickým způsobem při vypínání je předřazen rezistor  $R_{G_{OFF}}$ . Spínací proces je tedy řízen pouze těmito rezistancemi. Na obrázku 55.4.1 jsou též vyznačeny základní ochrany:

- Gate-Emitter-clamping (ZD2, ZD3),
- desaturation-monitoring (D1),
- overvoltage clamping (ZD1),

které obvykle zajišťují činnost IGBT v bezpečné pracovní oblasti (Safe operating area – SOA) i během vystavení tranzistoru nejhorším pracovním podmínkám, jako jsou například zkrat nebo přepětí.

There are some drawbacks of the resistive control. There is no separate influence on collector current and collector emitter voltage in the switching interval.



**Obrázek 55.4.1.: Princip budiče s čistě odporovým řízením spínání společně se základními ochranami IGBT**

The switching losses increase relatively strong with higher RG. Varying the gate resistance influences both the switching and delay times. Often it is not possible to control overvoltages at turn-off sufficiently and in case of series connection of IGBTs additional measures are to be taken. To avoid these drawbacks and to adapt and optimize the switching behaviour to the requirements, the gate drive can be controlled actively. A lot of work has been done and published in this field, mostly for IGBTs in series connection or for high power [3, 4]. There are only few investigations aimed at the power range below high power [5], where because of extreme sensitivity to costs only a limited number of additional electronic components are allowed.

#### 55.4.2.1. Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového proudu ( $dI/dt$ control)

Je-li  $U_{GE} = U_{d_{ON}} > U_{GE_{th}}$  je IGBT spínač ve vodivém stavu a pouze celková parazitní indukčnost v obvodu zkratového proudu omezuje di/dt kolektorového proudu. Doporučovanou možností jak redukovat maximální kolektorový proud  $I_{C_{max}}$  a také maximální  $dI_C/dt|_{max}$  je snížení hradlového napětí  $U_{GE}$ . Pro odvození závislosti strmosti kolektorového proudu na hradlovém napětí vyjdeme z náhradního schématu dle obr. 55.4.2 a idealizovaných průběhů spínacího a vypínacího procesu výkonového spínače dle obrázku \*. Kolektorový proud v saturaci je možné vyjádřit vztahem

$$I_C = g_m \cdot (U_{GE} - U_{GE_{th}}) \quad (55.4.1)$$

kde  $g_m$  označuje transkonduktanci,  $U_{GE_{th}}$  je prahové napětí (threshold voltage)

$$I_G = C_{GS} \frac{dU_{GS}}{dt} \quad (55.4.2)$$

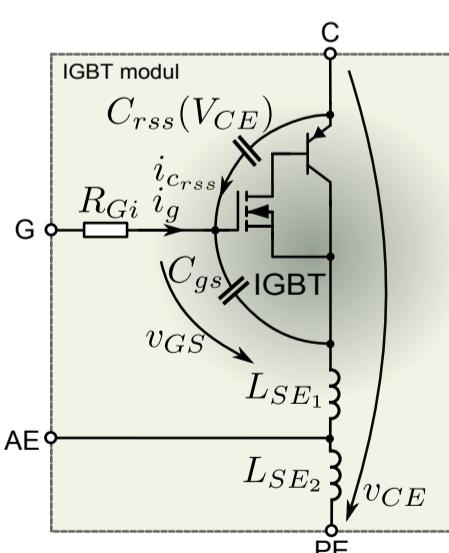
$$\frac{dI_C}{dt} = g_m \frac{dU_{GS}}{dt} = \frac{g_m}{C_{GS}} \cdot I_G \quad (55.4.3)$$

Je-li  $U_Z > U_{L_{SE}} + U_{GE}$  pak neprochází proud skrz větev omezovače na obr. 55.4.3 a můžeme sestavit náhradní rovnici dle obr. \*\*. Hradlový proud vyjádříme z rovnice (55.4.3) a dosadíme do rov. 55.4.4.

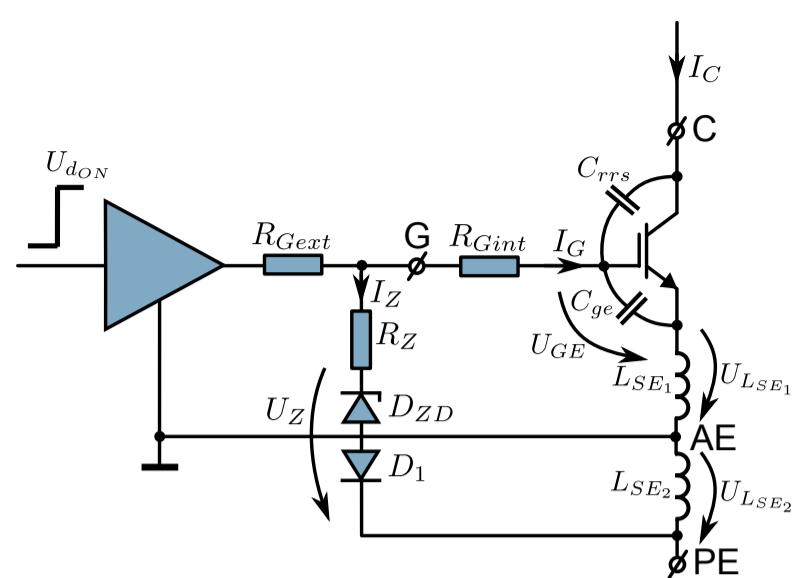
$$U_{d_{ON}} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}})I_G + U_{GS} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (55.4.4)$$

$$U_{d_{ON}} - U_{GS} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} \frac{dI_C}{dt} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (55.4.5)$$

$$\frac{dI_c}{dt} = \frac{U_{d_{ON}} - U_{GS}}{(R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{a} + L_{SE_1}} \quad (55.4.6)$$



**Obrázek 55.4.2.: Náhradní schéma IGBT modulu (kapacita  $C_{CE}$  a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)**



**Obrázek 55.4.3.: Obvod budiče se zavedenou zpětnou vazbou od di/dt tvořenou součástkami  $R_Z$ , ZD1, D1 (kapacita  $C_{CE}$  a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)**

#### 55.4.2.2. Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového napětí (dU/dt control)

Jednoduchý způsob realizace tohoto způsobu řízení

### 55.5. Způsoby detekce nadproudu

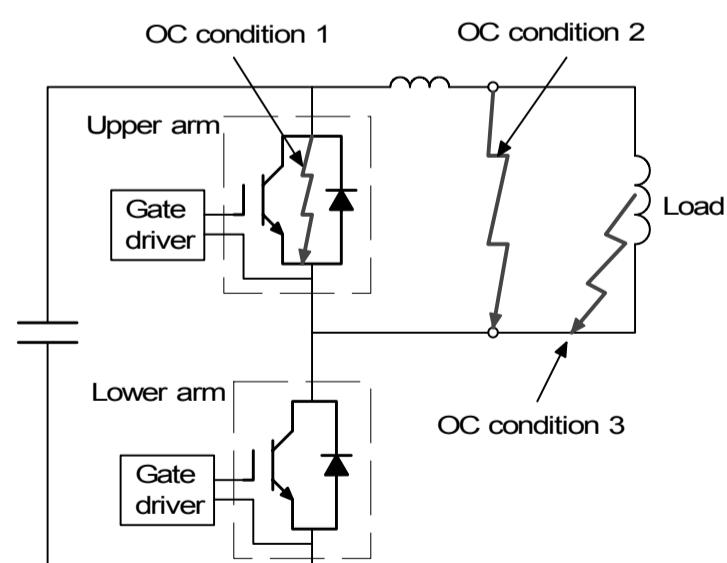
Vysoká spolehlivost provozu výkonového systému, je v současnosti standardním požadavkem moderní komerční aplikace IGBT. Ochrana výkonových prvků před destrukcí v případě nadproudů je tedy nezbytná a bývá řešena následujícími konvenčními metodami:

- hlídání hodnoty kolektorového napětí  $U_{CE}$  - collector-emitter voltage monitoring method (viz 55.5.2),
  - proudový transformátor - current transformer (CT).

První metoda je velice jednoduchá a její princip spočívá ve vyhodnocování úbytku mezi kolektorem a emitorem sepnutého tranzistoru. Problém nastává u vysokonapěťových aplikací, kde je nutné použít vysokonapěťovou signálovou diodu a navíc ochrana nefunguje během přechodného děje spínacího procesu, protože napětí  $U_{CE}$  klesá pomalu. Je tedy vhodné používat tuto ochranu v kombinaci s jinou. Širokému použití proudových transformátorů jen pro ochranné účely brání především cena spolu s velkým počtem kusů pro pokrytí všech možných kombinací zkraťových obvodů, iež v dané aplikaci mohou nastat.

Následující kapitoly budou věnovány metodám detekce poruchového stavu a způsobům bezpečného vypnutí IGBT i v těchto nepříznivých režimech. Nejprve bude nutné kategorizovat možné poruchové režimy podle chování IGBT. Zajištění těchto funkcí je náplní moderního budíče IGBT.

### 55.5.1. Uvažované typy zkratových obvodů ve větvi výkonového měniče s indukční zátěží



**Obrázek 55.5.1.:** Znázornění třech uvažovaných zkratových obvodů ve věti výkonového měniče s indukčním zátěží

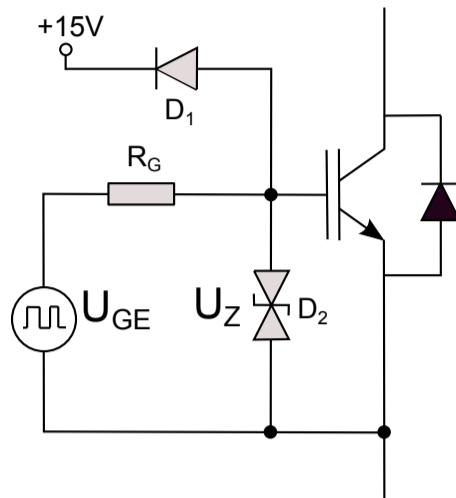
### 55.5.2. Monitorování velikosti kolektorového napětí

#### 55.5.3. Omezovač hradlového napětí - $V_{GE}$ clamping

$$U_{Z_{GE}} = U_Z \cdot (1 + \alpha_T \cdot \Delta\vartheta_j) \cdot (1 + T_V) \leq U_{GE_{peak}}, \quad (55.5.1)$$

$$U_{GE_{max}} \leq U_Z \cdot (1 - T_V) \quad (55.5.2)$$

kde:  $U_Z$  ... jmenovité napětí transilu;  $U_{GE_{peak}}$  ... špičková hodnota hradlového napětí - při zkratu:  $\leq 17,5V$ ;  $\alpha_T$  ... teplotní koeficient transilu;  $\Delta\vartheta_j$  ... oteplení nad jmenovitou teplotu okolo  $25^\circ C$ ;  $T_V$  ... katalogová tolerance transilu



**Obrázek 55.5.2.:** Jednoduchá realizace omezovače hradlového napětí pomocí Shottkyho diody nebo tranzilu

Na obrázku 55.5.2 jsou znázorneny dvě jednoduché možnosti. V případě použití transilu je nutné dbát zvýšenou pozornost jeho výběru. Průrazné napětí musí mít co nejnižší rozptyl a při změně teploty okolo nesmí v běžném provozu omezovat budicí signál. Těmto požadavkům nejlépe vyhovuje transil 1.5KE16CA:

- $\alpha_T = 8 \cdot 10^{-4} (12mV/K)$ ,
- $\Delta\vartheta_j = 50K$  (předpoklad),
- $T_V = 5\%$ ,

z čehož vyplývají následující kontrolní rovnice

$$U_Z(@ + 75^\circ C; +5\%) = 17,53V \approx U_{GE_{peak}} \quad (55.5.3)$$

$$U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%) = 14,53V \approx U_{GE_{min}} \quad (55.5.4)$$

$$U_Z(@ + 25^\circ C; -5\%) = 15,20V \geq U_{GE_{max}} \quad (55.5.5)$$

V případě krajní hodnoty  $U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%)$  dojde při buzení  $U_{GE} = \pm 15V$  ke krátkodobé aktivaci ochranného transilu, což způsobí jeho ohřátí a posunutí hladiny  $U_Z$ .

Efektivita varianty se Shottkyho diodou (viz obr. 55.5.2) je závislá na velikosti parazitní indukčnosti mezi hradlem a kondenzátorem zdroje budiče. Zdroj budiče musí také zajistit aby napětí na tomto kondenzátoru při funkci ochrany nevzrůstalo.



**Část XXIII.**

**Elektrické přístroje**



# 56. Teorie elektrického oblouku

## Obsah

<b>56.1. Teorie spínacího oblouku</b>	257
56.1.1. Plazma elektrického oblouku	257
56.1.2. Charakteristika vypínacího pochodu	257
56.1.3. Elektrický oblouk a jeho zhášení	258
56.1.4. Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového	258

## 56.1. Teorie spínacího oblouku

### 56.1.1. Plazma elektrického oblouku

Ve spínací technice se zabýváme plazmatem vznikajícím hořením elektrického oblouku při spínání elektrických obvodů. Dále popisované vlastnosti elektrického oblouku jsou rozpracovány pro druh plazmatu hořící ve vypínací dráze zhášecích komor vypínačů. Toto plazma se charakterizuje jako vysokotlaké (tlaky plynu vyšší než 0,1 MPa) a elektrické proudy řádově kiloampéry. Pozornost bude soustředěna zejména na elektrický oblouk hořící v tlakoplynových zhášecích komorách při vypínání elektrických obvodů. V tlakoplynových zhášecích komorách byl oblouk nejvíce prozkoumán u tlakovzdušného principu a u vypínačů s plynem SF<sub>6</sub> [BV83, s. 3].

### 56.1.2. Charakteristika vypínacího pochodu

#### 56.1.2.1. Základní uspořádání zhášecích komor

Základním uspořádáním zhášecích komor lze rozdělit z hlediska proudění plynu na zhášecí komory:

- s jednostranným prouděním,
- s dvoustranným prouděním.

Na obrázcích je schématicky znázorněn oblouk, který je axiálně ofukován plynem z prostoru zhášecí komory s tlakem  $p_1$  přes zhášecí trysky dutinou kontaktů do výfuku, kde je nižší tlak  $p_2$ .

#### Legenda:

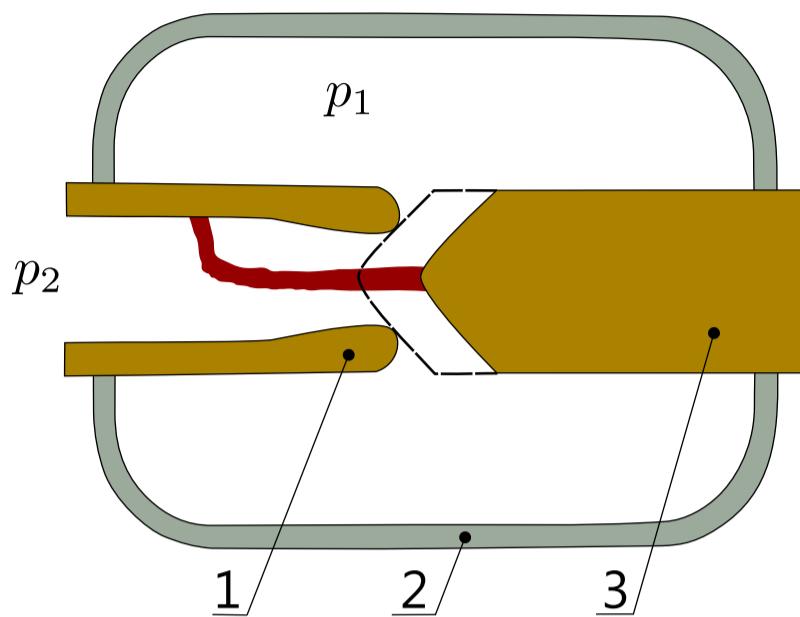
1. Zhášecí tryska
2. Tlaková izolační nádoba
3. Kontakt
  - $p_1$  ... tlak ve zhášecí komoře
  - $p_2$  ... tlak ve výfukovém prostoru

#### 56.1.2.2. Tři základní intervaly vypínacího pochodu

Vypínací pochod lze z hlediska zkoušení vypínačů rozdělit do tří základních intervalů:

1.  $t_s$  ... **Silnoproudý interval**
2.  $t_i$  ... **Interakční interval**
3.  $t_d$  ... **Dielektrický interval**
  - $t_s$  ... silnoproudý interval
  - $t_i$  ... interakční interval
    - $t_{i1}$  ... interval výrazné změny obloukového napětí
    - $t_{i2}$  ... interval zbytkového proudu
  - $t_d$  ... dielektrický interval
  - $t_a$  ... doba hoření oblouku
  - $\frac{di}{dt}$  ... derivace proudu podle času
  - $i_r$  ... zbytkový proud
  - $\frac{di_r}{dt}$  ... derivace zbytkového proudu podle času
  - $u_a$  ... napětí oblouku
  - $U_{zh}$  ... zhášecí amplituda napětí
  - $U_{zn_{max}}$  ... maximální hodnota zotaveného napětí
  - $u_{0b}$  ... obnovené napětí
  - $S$  ... strmost zotaveného napětí (podle IEC)
  - $\Delta t_u$  ... doba od průchodu proudu nulou do okamžiku protnutí tečny obalující křivku  $u_{zn}$  v hodnotě  $U_{zn_{max}}$
  - $\frac{du}{dt}|_{i=0}$  ... okamžitá strmost zotaveného napětí v nulové hodnotě proudu

Charakteristické parametry vypínače v intervalech vypínacího pochodu:



**Obrázek 56.1.1.:** Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s jednotranným prouděním.

- $\mathbf{t}_s : i, I_{max}, u_a$
- $\mathbf{t}_a : \frac{di}{dt}, i_r, \frac{du}{dt}, u_{zn}, U_{zn_{max}}$
- $\mathbf{t}_d : \frac{du}{dt}, S, U_{zn_{max}}$

Rozdělení vypínačového pochodu do těchto intervalů umožňuje snadněji specifikovat základní kritéria, kterým musí zhášecí komora vyhovovat při vypínání. Při vypínání střídavého proudu charakter proudění plynu závisí nejen na časově proměnlivém zdvihu kontaktů, druhu plynu a tlakových poměrech, ale i na předcházejícím proudu, přičemž všechny veličiny jsou vzájemně závislé. Hranice intervalů však lze určit jen přibližně, protože jsou závislé na kmitočtu proudu a na časové konstantě oblouku. Časová konstanta oblouku je proměnlivá nejen s velikostí proudu, ale závisí i na uspořádání zhášecí komory.

### 56.1.3. Elektrický oblouk a jeho zhášení

### 56.1.4. Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového

Jak bylo uvedeno v předchozích kapitolách, ve zhášecí komoře výkonových vypínačů po zhasnutí oblouku ještě zůstává po krátkou dobu mezi elektrodami zbytkové plazma, které obsahuje značný počet volných elektronů. Je-li toto množství kolem  $10^{14}$  až  $10^{15}$  elektronů v metru krychlovém, pak je splněna podmínka pro tvorbu *elektronových lavin* nebo *strimérů* a strmě stoupající zotavené napětí může způsobit jiskrový výboj, který přejde okamžitě v obloukový opětný zápal. Protože v plazmě oblouku je hustota elektronů závislá na její teplotě, nemá-li dojít k opětnému zápalu, musí plazmu dobrě fungující vypínač rychle ochladit. Chladící pochod je podmíněn vlastností plynu vyjádřenou textbtepelnou vodivostí  $[\frac{W}{K \cdot m}]$ , kterou způsobují tyto dva dílčí jevy:

- Odvod kinetické energie plynu, který probíhá při vzájemných srážkách molekul rozkmitaných tepelnou energií plynu,
- Disociace molekul, kdy při rozkladech molekul na základní atomy se při nepružných srážkách pohlcuje disociační energie a tím se kinetická energie molekul přeměnuje na potenciální energii atomů. Tato se odvádí difuzí do oblasti plynu s nízkou teplotou.

Disociace molekul nastává jen v úzkém teplotním intervalu charakterizovaném **disociační teplotou**  $\Theta_d$ . Proto má křivka tepelné vodivosti plynu teploty  $\Theta_d$  značně vyjádřené maximum.

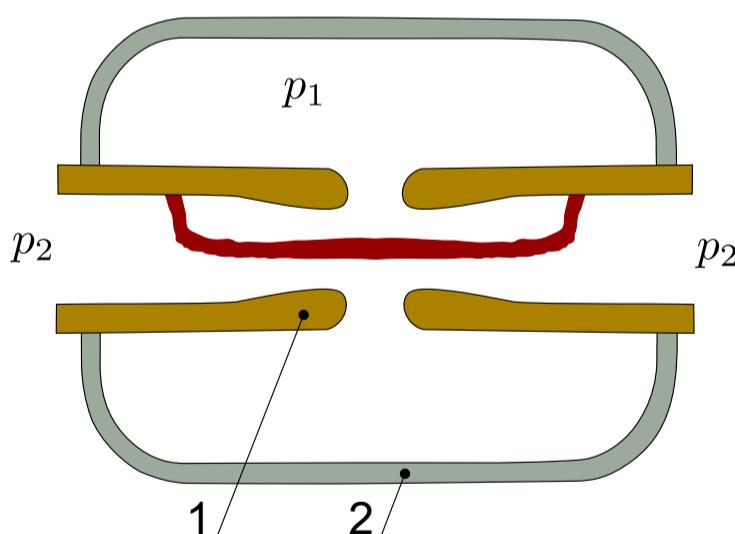
- Plyn  $SF_6$ :  $\Theta_d = 2500 K$ .
- Plyn  $N_2$  (vzduch):  $\Theta_d = 7500 K$ .

Rozdílné teploty  $\Theta_d$  jsou způsobeny tím, že disociační energie molekuly dusíku  $N_2$  je  $14.5 eV$ , zatímco síra  $S$  disociuje z molekuly  $SF_6$  již při energii  $10.4 eV$ .

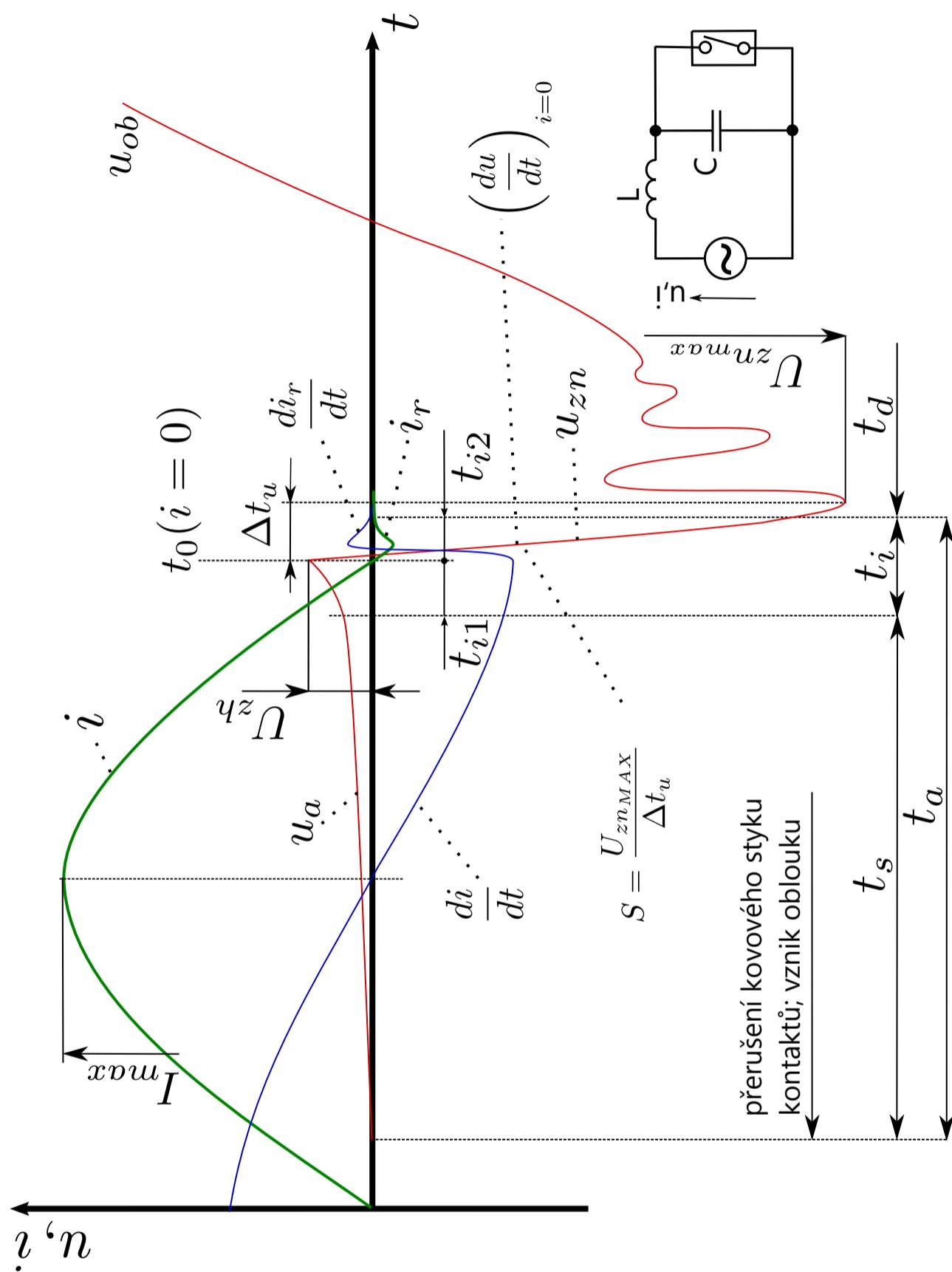
Průběh křivek tepelných vodivostí různých plynů dovoluje současně odhadnout prostorové rozdělení teplot v elektrickém oblouku, neboť v místech s **maximální tepelnou vodivostí** je **minimální teplotní spád (gradient)**. Proto se v křivkách znázorňujících rozdělení teploty oblouku v závislosti na jeho poloměru objevují v okolí disociačních teplot pro dusík  $N_2$  a  $SF_6$  znatelné zlomy pro různé velikost proudů. Z těchto průběhů je také možné určit dvě zcela rozdílné oblasti oblouku:

- **Trup oblouku:** velmi jasně zářící oblast s vysokými teplotami ležícími nad  $\Theta_d$
- **Plášť oblouku:** difúzně svítivá část oblouku s teplotami dosahujícími maximálně  $\Theta_d$

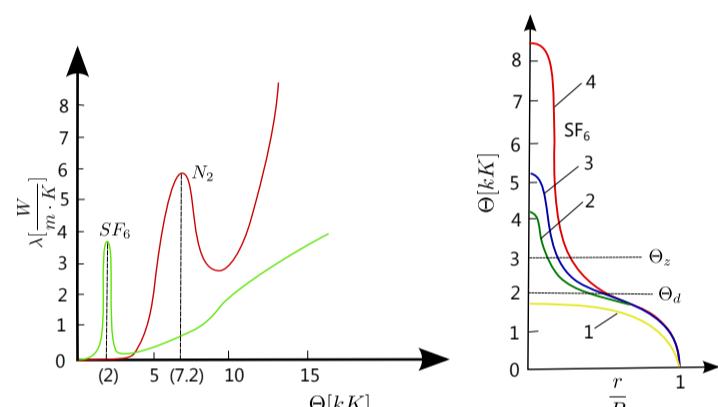
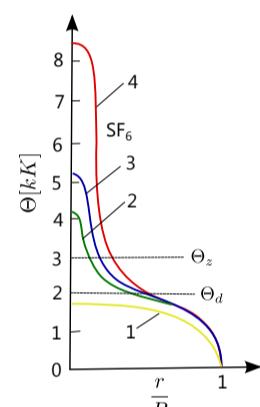
Důležitost disociační teploty  $\Theta_d$  molekuly plynu zvlášť vyniká při sledování rychlosti zmenšování hustoty elektronů ve zbytkové plazmě oblouku, která je kritériem vzniku elektrického výboje mezi kontakty. Protože ve žhavém trupu je úbytek hustoty elektronů stokrát rychlejší než ve vnějším plášti oblouku, zaniká po nule proudu nejprve zářivý trup oblouku. **Zotavené napětí** působí již jen na **plášť oblouku**, v němž se hustota elektronů zmenšuje jen velmi zvolna. Protože kritickou veličinou pro elektrický výboj v plynném prostředí je hustota elektronů kolem  $10^{14}/m^3$ , bylo z kinetické teorie plynů odvozeno, že tento stav odpovídá přibližně teplotě kolem **3000 K**.



**Obrázek 56.1.2.:** Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s dvousměrným prouděním.



Obrázek 56.1.3.: Základní intervaly vypínačového pochodu.

(a) Tepelné vodivosti dusíku ( $N_2$ ) a fluoridu sírového ( $SF_6$ )(b) Křivky rozdělení teplot oblouku v závislosti na poloměru oblouku v  $SF_6$ ; 1 až 4 různé proudy oblouku

**Obrázek 56.1.4.:** Základní charakteristiky oblouku hořícího v plynech  $SF_6$  a porovnání s dusíkem

**Část XXIV.**

**Železniční zabezpečovací technika**



## 57. Úvod

Základním požadavkem na železniční zabezpečovací zařízení je zajištění bezpečného provozu na železnici. Tento požadavek je ohrožen vznikem poruch, čemuž nelze u reálných systémů zabránit absolutně. Jak již bylo řečeno, tyto poruchy se nesmí projevit nebezpečným způsobem, čehož se dosahuje vhodným návrhem systému. Z toho zdánlivě vyplývá, že na bezporuchovost (spolehlivost) systému nemusí být kladený příliš vysoké požadavky, neboť poruchy neohrožují bezpečnost dopravy.

Opak je však pravdou, protože lze očekávat, že vznikající poruchovost zařízení bude doprovázena také vznikem obecné četnosti výskytu hazardních stavů a také četnosti výskytu hazardního stavu v uvažovaném časovém okně (druhá porucha), což je podstatné u redundantních a reakčních systémů.

Navíc případná nefunkčnost systému následkem poruchy znamená, že řízení provozu, který nemůže být zastaven po celou dobu opravy systému, je nutné provádět bez jeho dohledu. Zodpovědnost je přinejmenším částečně opět na člověku, který je navíc v této mimořádné situaci ještě náchylnější k chybám. U zabezpečovacích zařízení tedy musíme požadovat i vysokou spolehlivost! Proto se v následující kapitole budeme stručně věnovat popisu jednotlivých poruch.

### 57.1. Klasifikace poruch

**Chyba** je rozdíl mezi správnou a skutečnou hodnotou nějaké veličiny. V zařízení se chyby mohou obecně objevit jako *důsledek (projev) poruchy některé jeho součásti, působením nějakého cizího vlivu nebo selháním lidského činitele*. Za poruchy hardware se považují všechna vybočení z předpokládaných vlastností stavebního prvku (součástky, dílu) zařízení. Předpokládanými vlastnostmi prvků přitom jsou vlastnosti odpovídající příslušným technickým podmínkám popisujícím jeho vlastnosti. Jako omyl lze označit každou lidskou činnost, která může vést k nezamýšlenému chování zařízení. V širším slova smyslu se jako **porucha** označují souhrnně všechny příčiny vedoucí k chybě, tj. poruch součásti, cizí vliv i omyl.



# 58. Bezpečnost a spolehlivost zabezpečovacích systémů

## 58.1. Spolehlivost

### 58.2. Bezpečnost

V různých publikacích je možné najít různé definice bezpečnosti. Například norma EN 61508<sup>1</sup> definuje bezpečnost jako nepřítomnost netolerovaného rizika. Z této definice je zřejmé, že bezpečnost je úzce spjatá s rizikem, a je nutné bezpečnost třeba chápát relativně. Když se řekne, že řídící systém je bezpečný, neznamená to jeho absolutní bezpečnost (ta je prakticky nedosažitelná vzhledem na existenci objektivních faktorů, jako je například úroveň poznání, technologická úroveň a limitované finanční prostředky), ale taková úroveň bezpečnosti, která odpovídá definovaným bezpečnostním požadavkům na tento řídící systém.

Relativnost v pojímání bezpečnosti znamená posun od kvalitativního ke kvantitativnímu chápání bezpečnosti.

Kvalitativně je bezpečnost chápána jako schopnost řídícího systému zajistit omezení důsledků poruch řídících systémů v daných podmínkách a v daném časovém intervalu. Matematicky je možné kvalitativní bezpečnost řídícího systému vyjádřit jako

$$E_H = 0, \quad (58.2.1)$$

kde  $E_H$  je množina nebezpečných stavů, které jsou důsledkem výskytu pravděpodobných poruch řídícího systému. Pravděpodobná porucha je taková porucha z množiny všech poruch, jejichž výskyt během provozu řídícího systému je nutné předpokládat (vzhledem na požadovanou úroveň bezpečnosti řídícího systému).

Kvantitativně je bezpečnost řídícího systému chápána jako pravděpodobnost nepřítomnosti jakéhokoliv nebezpečného stavu v řídícím systému v daných podmínkách a v daném časovém intervalu. Je zřejmé, že i když pravděpodobnost nebezpečného stavu řídícího je malá, neznamená to, že se nebezpečný stav nemůže vyskytnout v nejbližším časovém intervalu. Matematicky je možné kvantitativní bezpečnost vyjádřit tak, že

$$P_{HT}(t) \geq P_{HR}(t) > 0, \quad (58.2.2)$$

kde  $P_{HT}(t)$  je pravděpodobnost tolerovaného nebezpečného stavu řídícího systému a  $P_{HR}(t)$  je reálná pravděpodobnost nebezpečného stavu řídícího systému.

Na kvantitativním hodnocení bezpečnosti řídícího systému je v podstatě možné uplatnit stejné teoretické postupy, jako při hodnocení spolehlivosti technických systémů. Zásadní rozdíl je v tom, že při hodnocení spolehlivosti standardních řídících systémů se obvykle rozlišují dva stav - bezporuchový stav a poruchový stav, a k témuž dvěma stavům se vztahují také kvantitativní ukazatele spolehlivosti. Při hodnocení bezpečnosti řídících systémů musíme uvažovat s dvěma druhy poruchových stavů - bezpečným a nebezpečným poruchovým stavem. Bezpečnost řídícího systému se potom vyjadřuje pomocí ukazatelů bezpečnosti (například pravděpodobnost výskytu nebezpečné poruchy, intenzita nebezpečných poruch, ...).

Při kvantitativním hodnocení důsledků poruch na bezpečnost řídícího systému se obvykle k hodnoceným řídícím systémům přistupuje jako k neobnovovaným objektům, protože z pohledu bezpečnosti jsou důležité dva stav (bezpečný, nebezpečný) a analýza končí výskytem nebezpečné poruchy (může jít o jednu poruchu, nebo o kombinaci více poruch, které nejsou individuálně nebezpečné). To znamená, že od uvedení řídícího systému do provozu, až po výskyt nebezpečné poruchy, se může řídící systém střídavě nacházet ve funkčním, nebo nefunkčním stavu (nefunkční ještě neznamená nebezpečný). Z tohoto důvodu ukazatele bezpečnosti jsou podobné ukazatelům bezporuchovosti neobnovovaných objektů.

### 58.2.1. Základní legislativa

- EN 61508 - základní všeobecná norma pro SRCS; pojednává o funkční bezpečnosti elektrických/elektronických/programovatelných elektronických systémů souvisejících s bezpečností (Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic systems), obecná norma funkční bezpečnosti, která se opírá o dvě základní koncepce - životní cyklus bezpečnosti a úroveň integrity bezpečnosti (SIL)

- EN 61508-1: Všeobecné požadavky
- EN 61508-2: Požadavky na elektrické / elektronické / programovatelné elektronické systémy související s bezpečností
- EN 61508-3: Požadavky na SW
- EN 61508-4: Definice a zkratky

<sup>1</sup>Funkční bezpečnost elektrických/elektronických/programovatelných elektronických systémů souvisejících s bezpečností (Functional safety of electrical/ electronic/programmable electronic systems), obecná norma funkční bezpečnosti, která se opírá o dvě základní koncepce - životní cyklus bezpečnosti a úroveň integrity bezpečnosti (SIL)

- EN 61508-5: Příklady metod určování úrovně integrity bezpečnosti
- EN 61508-6: Metodické pokyny na používání EN 61508-2, STN EN 61508-3
- EN 61508-7: Přehled technik a opatření

- EN 50126: Railway applications – The specification and demonstration of reliability, availability, maintainability and safety (RAMS)
  - Part 1: Basic requirements and generic process. 1999
  - Part 2: Guide to the application of EN 50126-1 for safety. 2007
  - Part 3: Guide to the application of EN 50126-1 for rolling stock RAMS. 2008

Zabývá se specifikací parametrů RAMS (spolehlivost, pohotovost, udržovatelnost, a bezpečnost) obecně pro všechny železniční systémy, reaguje na skutečnost, že naléhavost požadavků na bezpečnost funkce jednotlivých železničních systémů je různá a lze je tedy splňovat s různou pravděpodobností jejich selhání. Také zavádí pojem *integrita bezpečnosti (safety integrity - celistvost, úplnost, neporušenost bezpečnosti)*, který definuje jako pravděpodobnost, s níž systém uspokojivě splní požadované bezpečnostní funkce, za všech stanovených podmínek a ve stanoveném časovém období. Jde o to, do jaké míry může být pro bezpečnost relevantní funkce narušena např. poruchami vlastního zařízení, omyly obsluhy, vnějším rušením atd.

- EN 50128: Railway applications – Communication, signalling and processing systems – Software for railway control and protection systems. 2003

- EN 50129: Railway applications – Communication, signalling and processing systems – Safety-related electronic systems for signalling. 2011 Modifikovaně byl pojem integrita bezpečnosti přenesen i do této normy pro železniční zabezpečovací systémy. I klasická zabezpečovací technika bez velkého zdůrazňování respektovala, že nejsou na všechna zařízení kladený stejně důrazné bezpečnostní požadavky (kategorie zařízení, vedlejší tratě/hlavní tratě, zařízení pro ČD/zařízení pro vlečky, staniční zařízení/spádoviště atd.). Uvidíme dále, že pojmu integrita bezpečnosti je pro zabezpečovací zařízení dominantně obsažena oblast, kterou běžně v této technice označujeme (a také norma EN 50129 ji tak označuje ve své základní části) termínem technická bezpečnost. Úvahy okolo integrity bezpečnosti zde sledujeme odděleně od úvah o technické bezpečnosti (přes jejich podobnost) pro jejich výhodnost zejména v úvodních fázích projektu nového systému (zařízení, výrobku, atd.)

- EN 50159: Railway applications – Communication, signalling and processing systems - Safety-related communication in transmission systems. 2010

Vyjmenované normy se poněkud liší v definici termínu *bezpečnost*:

- Bezpečnost (Safety) – nepřítomnost nepřijatelných úrovní rizika poškození (EN50129)
- Bezpečnost (Safety) – nepřítomnost nepřijatelného rizika. (EN61508)
- Bezpečnost při poruše (Fail Safe) – vlastnost konstrukce objektu zabraňující, aby jeho poruchy způsobili nebezpečné poruchové stav. (IEC 61508)
- Kvantitativní bezpečnost – schopnost systému zajistit omezení důsledku poruch systému v daných podmínkách a v daném časovém intervalu.
- Kvantitativní bezpečnost – pravděpodobnost nepřítomnosti jakéhokoliv nebezpečného stavu v systému v daných podmínkách a v daném časovém intervalu.

### 58.2.2. Ukazatel bezpečnosti

Pravděpodobnost bezpečného provozu je pravděpodobnost, že objekt může bezpečně plnit požadovanou funkci v daných podmínkách v časovém intervalu  $t_1, t_2$ .

$$R_S(t_1, t_2) = 1 - F_H(t_1, t_2), \quad (58.2.3)$$

kde  $F_H(t_1, t_2)$  je distribuční funkce, která naopak vyjadřuje pravděpodobnost, že objekt nemůže bezpečně plnit požadovanou funkci k daným podmínkám v časovém intervalu  $t_1, t_2$ .

$$F_H(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_H(t) \cdot dt, \quad (58.2.4)$$

kde  $f_H(t)$  je hustota pravděpodobnosti nebezpečné poruchy objektu.

Intenzita nebezpečných poruch  $\lambda_H(t)$  definujme jako limitu poměru podmíněné pravděpodobnosti, že časový okamžik vzniku nebezpečné poruchy objektu

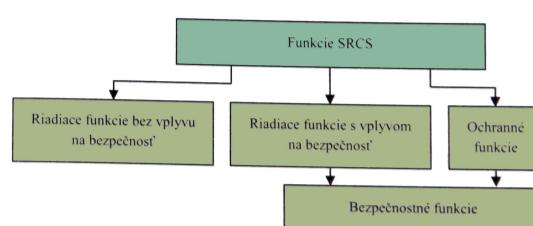
$T$  padne do daného časového intervalu  $t$ ,  $t + \Delta t$ , přičemž délka časového intervalu  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lambda_H = \frac{f_H(t)}{R_S(t)}. \quad (58.2.5)$$

Protože nebezpečné poruchy jsou méně časté, zkoušky na určení požadovaných ukazatelů bezpečnosti by bylo třeba provádět dlouhodobě, což je prakticky nemožné.

### 58.3. Integrita bezpečnosti

Všeobecně je možné konstatovat, že SRCS realizuje řídící i ochranné funkce (obr. 58.3.1). Jelikož selhání řídící funkce může způsobit ohrožení bezpečnosti, je třeba i tyto funkce považovat za bezpečnostní. Bezpečnostní funkce jsou definované



Obrázek 58.3.1.: Vztah mezi bezpečnostními funkcemi a moduly SRCS

na základě analýzy rizik jako technická opatření na snížení rizika spojeného s konkrétními nebezpečí na tolerovatelnou úroveň. Účinnost bezpečnostní funkce se určuje pomocí úrovně integrity bezpečnosti (*SIL - safety integrity level*).

Norma EN 61508 definuje integritu bezpečnosti jako pravděpodobnost, že SRCS bude plnit požadované bezpečné funkce za všech stanovených podmínek v rámci stanoveného operačního prostředí a během stanoveného časového období. Všeobecně lze konstatovat, že čím je integrita bezpečnosti SRCS větší, tím je menší pravděpodobnost selhání bezpečnostní funkce realizovaných SRCS.

Integrita bezpečnosti se skládá ze dvou částí a to:

- *integrity bezpečnosti proti systematickým poruchám*: jde o nekvantifikovatelnou část integrity bezpečnosti, která souvisí s nebezpečnými systematickými poruchami hardware a software; integrity bezpečnosti proti systematickým poruchám se dosahuje především opatřením na předcházení chybám a poruchám; vzhledem k tomu, že jde o nekvantifikovatelnou část integrity bezpečnosti, je vhodnější chápát integritu bezpečnosti jako vlastnost a né jako pravděpodobnost; hodnocení integrity bezpečnosti proti systematickým chybám a poruchám se realizuje kontrolou dodržování opatření předcházejících chybám a poruchám, mezi které patří také důsledné testování korektní realizace bezpečnostních funkcí;
- *integrity bezpečnosti proti náhodným poruchám*: jde o kvantifikovatelnou část integrity bezpečnosti, která se týká náhodných poruch hardware vyplývajících z konečné bezporuchovosti použitých součástek; hodnocení integrity bezpečnosti proti náhodným poruchám se realizuje prostřednictvím pravděpodobnostních výpočtů.

Aby se dosáhla požadovaná integrita bezpečnosti, musí být splněny požadavky na integritu proti systematickým poruchám i náhodným poruchám.

#### 58.3.1. Úroveň integrity bezpečnosti

Úroveň integrity bezpečnosti (*Safety Integrity Levels - SIL*) se dělí podle EN 50129 do čtyř kategorií - úroveň 4 (SIL 4) je nejvyšší, úroveň 1 (SIL 1) je nejnižší. Pokud se objevuje úroveň SIL 0, značí to, že se jedná o systém na které nejsou kladený žádné bezpečnostní požadavky (ve smyslu zabezpečovací techniky)

Proto, aby SRCS mohl být zařazen do odpovídající úrovni bezpečnosti SIL, musí vyhovovat těmto faktorům:

- naplnění podmínek řízení kvality,
- naplnění podmínek řízené bezpečnosti,
- splnění požadavků na technickou bezpečnost,
- dosažení kvantitativního cíle

Jak patrné, splnění kvantitativního ukazatele samo o sobě neznamená, že bylo dosaženo odpovídající úrovni bezpečnosti. To platí ovšem i naopak - splnění tří předchozích podmínek (řízení kvality, řízení bezpečnosti a technické bezpečnosti) nezaručuje, že bylo dosaženo kvantitativních cílů a nelze tedy tvrdit, že zařízení lze zařadit do odpovídající skupiny SIL (58.3.2).

Žádná z norem CENELEC nepředepisuje, které zařízení musí být jaké úrovni. Toto určení je ponecháno na provozovateli, resp. regulátorovi, vyplýne také z provedených analýz rizik a hazardů.

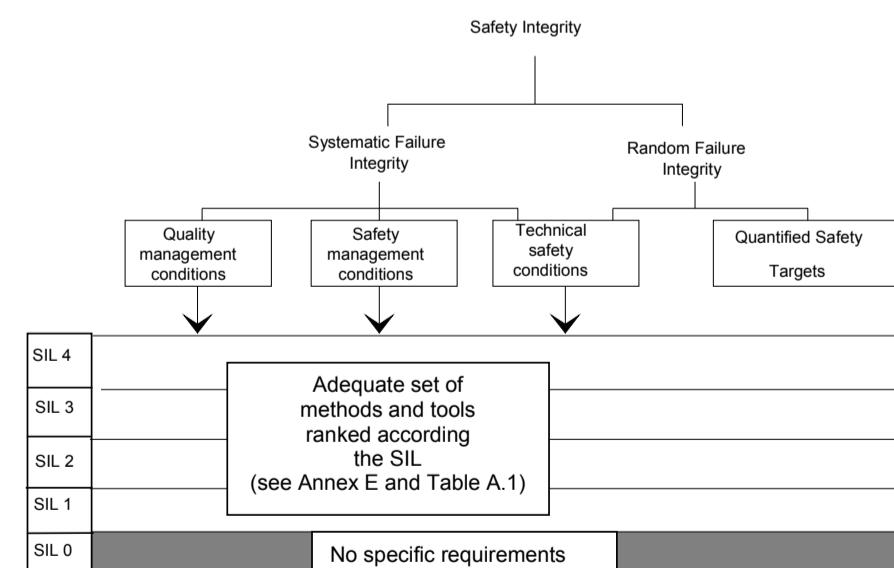
Následující tabulka shrnuje definované úrovně integrity bezpečnosti a zároveň dává do souvislosti s tolerovatelnými četnostmi hazardů. SIL jsou tedy prostředkem

Úroveň integrity bezpečnosti	Tolerovatelná četnost hazardu
SIL	THR [za hodinu a funkci]
4	$10^{-9} \leq THR < 10^{-8}$
3	$10^{-8} \leq THR < 10^{-7}$
2	$10^{-7} \leq THR < 10^{-6}$
1	$10^{-6} \leq THR < 10^{-5}$

Tabulka 58.3.1.: SIL tabulka: Funkce, jejichž kvantitativní požadavky by převyšovaly hranici  $10^{-9}$ , která se zdánlivě nelogicky objevuje u SIL4, vyžaduje podle normy EN 50129 zvláštní technická nebo provozní opatření pro dosažení tak mimořádného cíle.

přiřazení kvalitativních přístupů (pro vyloučení systematických poruch) ke kvantitativnímu přístupu (pro řízení náhodných poruch), neboť systematické poruchy nelze kvantifikovat.

1. Z normy jasně vyplývá rozdelení na dvě skupiny SIL 1,2 vs. SIL 3,4, u nichž je výrazný rozdíl v požadavcích, které je potřeba splnit, aby SRCS mohl patřit do dané skupiny. To je velmi dobře patrné z tabulek v příloze E normy EN 50129, která se zabývá technikami a opatřeními pro řízení náhodných a systematických poruch.
2. Druhým důležitým faktorem je poněkud odlišná definice chápání úrovní SIL v EN 61508. *Funkční bezpečnost elektrických, elektronických, programovatelných elektronických systémů souvisejících s bezpečností*. Tato norma je obecnou normou pro průmyslové elektronické systémy, z níž vycházejí normy EN 50126, EN 50 129 atd. jakožto specifické normy pro železniční aplikace. Důležitou odlišností ve specifikaci SIL, viz tab. 2 a 3 v první části této normy (EN 61508-1). Nicméně tabulka 3 pro režim provozu s vysokým, resp. nepřetržitým výzadáním odpovídá tabulce v normě EN 50129. Avšak i pro tyto systémy se zde jeví určitá odlišnost v požadavcích na zajištění dané SIL. Norma EN 61508 je zaměřena pouze na *funkční bezpečnost*, není zde zahrnutý požadavek na bezpečnou reakci na ojedinělé náhodné poruchy. S poruchami se samozřejmě pracuje, mají být provedena opatření k jejich maximálnímu potlačení - četnosti i následku, nicméně může stačit, když systém je schopen poruchy detektovat a dát o nich vědět (např. obsluze). Závěrem nutno dodat, že je potřeba určité obezřetnosti k tvrzení, že systém splňuje daný SIL. Tento údaj musí být doplněn specifikací, která norma byla při klasifikaci použita.



Obrázek 58.3.2.: Vztah mezi SIL úrovní a technikami jejich dosažení