

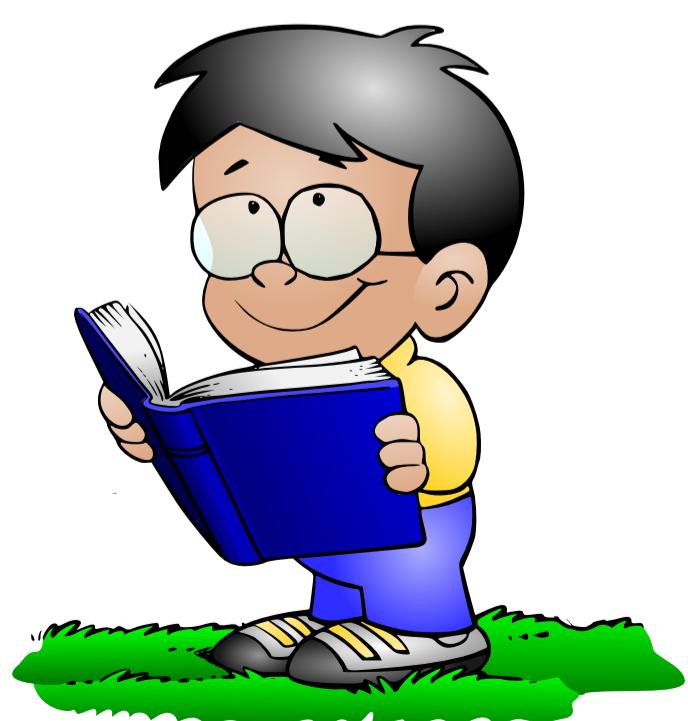
WIKING





ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

My school notes



Studijní notes

Wiking

Saturday 26th April, 2014

Obsah

I. Radiotechnika	3
1. Základy fyziky	5
1.1. Úvod	5
1.2. Hlavní etapy vývoje	6
2. Práce a potenciální energie	7
2.1. Potenciály a pole	7
3. Elektromagnetismus	9
3.1. Elektrické sily	9
3.2. Elektrická a magnetická pole	10
3.3. Charakteristiky vektorových polí	10
3.4. Zákony elektromagnetizmu	11
3.5. Co jsou pole?	13
3.6. Působení na dálku versus teorie pole	13
3.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice	14
4. Diferenciální počet vektorových polí	15
4.1. Chápání fyziky	15
4.2. Vektorový počet	15
4.3. Skalární a vektorová pole	16
4.4. Derivace polí - gradient	16
4.5. Operátor ∇	18
4.6. Operace s ∇	18
4.7. Diferenciální rovnice proudění tepla	18
4.8. Druhé derivace vektorových polí	19
4.9. Nástrahy	20
4.10. Cvičení	20
5. Integrální počet vektorových polí	21
5.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$	21
5.2. Tok vektorového pole	22
5.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta	22
5.4. Cirkulace vektorového pole	24
5.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta	25
5.6. Pole s nulovou rotací a divergencí	25
5.7. Shrnutí	26
5.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury	26
6. Elektrostatika	29
6.1. Statika	29
6.2. Coulombův zákon, superpozice	29
6.3. Elektrický potenciál	30
6.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$	31
6.5. Tok pole \vec{E}	32
6.6. Gaussův zákon. Divergence pole \vec{E}	33
6.7. Pole nabité koule	34
6.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy	34
6.9. Použití Gaussova zákona	34
6.10. Elektrické pole v různých případech	39
7. Speciální teorie relativity	41
7.1. Princip relativity	41
7.2. Lorentzova transformace	42
8. Geometrická optika	43
8.1. Úvod	43
Seznam literatury	45

DEBUG was on

Část I.

Radiotechnika

1. Základy fyziky

Contents

1.1. Úvod	5
1.2. Hlavní etapy vývoje	6

1.1. Úvod

V této kapitole budeme zkoumat nejzákladnější myšlenky, s nimiž se ve fyzice setkáváme - budeme hovořit o tom, jak si v současnosti představujeme povahu věcí. Nebudeme však hovořit o tom, jak se poznala správnost těchto představ - o těchto detailech se dozvítě v pravý čas.

Věci, o něž se naší vědě zajímáme, se nám ukazují množstvím projevů a atributů. Stojíme-li například na břehu a hledíme na moře, vidíme vodu, na vodě pěnu, nad mořem oblaka, slunce, modrou oblohu a vůbec světlo, slyšíme zvuk, nárazy vln, světlo větru, cítíme vzduch. Na břehu je písek a skály, a každá má jinou tvrdost a pevnost, barvu a složení. Jsou tam zvířata a vodní tráva, je tam hlad i nemoc a na břehu je pozorovatel se svými myšlenkami a snad i štěstím. Každé jiné místo v přírodě se vyznačuje podobnou pestrostí věcí a vlivů, podobnou složitostí. Naše zvědavost nás nutí klást otázky, hledat souvislosti a chápout mnohotvárnost věcí jako následek snad relativně malého počtu nejjednodušších věcí a sil působících nekonečně rozmanité.

Klademe si otázku: Je písek jiný než skály? Není snad písek nic jiného, než velký počet velmi malých kamínků? Je Měsíc velká skála? Kdybychom porozuměli tomu, co jsou skály, znamená to, že bychom pochopili i podstatu píska a Měsíce? Co je to vítr? Jsou to nárazy vzduchu podobné nárazům vody na břeh? Jaké společné rysy mají rozličné druhy pohybu? Co mají společného různé druhy zvuku? Kolik různých barev existuje? A tak dále. Takovým způsobem se snažíme postupně analyzovat všechny věci. Dáváme do souvislostí věci, které na první pohled vzájemně nesouvisí. Děláme to s nadějí, že se nám podaří redukovat počet rozličných věcí a tak je lépe poznat.

Před několika sty lety vznikla metoda hledání částečných odpovědí na uvedené otázky. *Pozorování, usuzování a experiment* vytvářejí to, co nazýváme *vědeckou metodou*. Budeme se muset omezit jen na holý popis našich představ o tom, co se nazývá *základní fyzikou* nebo základními myšlenkami, které vznikly aplikováním vědecké metody.

Co to znamená něco „pochopit“? Můžeme si představit, že to složité nahromadění pohybujících se věcí, které vytvářejí „svět“, je šachová hra bohů a my vystupujeme jako diváci, kteří neznají pravidla hry, ale je jim dovoleno hru pozorovat. Samozřejmě, pozorujeme-li dostatečně dlouho, můžeme nakonec pochytit několik pravidel. *Pravidla hry* představují to, co chápeme jako *základní fyziku*. I kdybychom znali všechna pravidla, nemuseli bychom ještě rozumět každému kroku hry, protože je příliš složitá a možnosti našeho rozumu omezené. Hrajete-li šachy, jistě víte, že je jednoduché naučit se všechna pravidla, ale i tak je velmi těžké zvolit ten správný tah nebo pochopit záměry protihráče. Stejně je to i s přírodou, jen mnohem těžší. Máme však možnost najít alespoň všechna pravidla. Zatím je všechna neznáme. (Každou chvíli se objevuje něco takového jako rošáda, kterou ještě neznáme.) Nejen, že neznáme všechna pravidla, ale pomoci těch, která známe, umíme jen velmi málo vysvětlit. Je tomu tak proto, že téměř všechny situace jsou ohromně složité a známá pravidla nám neumožní sledovat všechny obraty hry, nemluvě o předvídání dalších kroků. Musíme se proto omezit na základnější otázku pravidel hry. Naučíme-li se pravidla, budeme to považovat za „pochopení“ světa.

Jak můžeme rozhodnout, zda pravidla, která vlastně jen „odhadujeme“, jsou skutečně správná, když nemůžeme dokonale analyzovat hru? Existují zhruba tři způsoby. Především nám příroda může poskytnout (nebo my si od přírody vynutíme) jednoduché situace skládající se z malého počtu částí, umožňující přesnou předpověď budoucího dění, a tím i zkoušku pravidel. (V rohu šachovnice zůstalo jen málo figurek, jejichž tahy již umíme přesně určit)

Druhý způsob zkoušky pravidel spočívá v jejich použití k odvození obecnějších pravidel. Například, střelec se na šachovnici pohybuje úhlopříčně. Odtud je možné usuzovat na skutečnost, že určitý střelec bude vždy na bílém poli. Odhlédneme-li od podrobností, můžeme prověrovat naše pravidlo o pohybu uvedeného střelce tak, že sledujeme, jestli se vždy nachází na bílém poli. Po dlouhém čase se samozřejmě může stát, že se náhle objeví na černém poli (v průběhu hry byl vzat, ale jeden pěšec došel na konec šachovnice a proměnil se na střelce na černém poli). Tak to bývá i ve fyzice. Dlouho používáme pravidlo, které ve všech směrech dobrě vyhovuje, ačkoliv neznáme detaily, a potom najednou objevíme *nové pravidlo*. Z hlediska základů fyziky probíhají nejzajímavější jevy na nových místech, na místech, kde pravidla neplatí a ne tam, kde pravidla *platí*. To je způsob, jakým objevujeme nová pravidla.

Třetí ze způsobů, kterými se můžeme přesvědčit o správnosti našich myšlenek, je poměrně hrubý, ale snad nejúčinnější. Je to způsob přibližného odhadu. Ačkoliv nejsme schopni říci, proč Aljechin *táhl právě tou figurkou*, můžeme v *hrubých rysech* chápout, že seskupuje figurky okolo krále, aby ho chránil, protože za daných okolností je to nejrozumnější. Podobně je to i s naším chápáním přírody. Často ji více či méně chápeme, aniž bychom byli schopni znát význam tahu *každé jednotlivé figurky*.

Zpočátku se přírodní jevy hrubě rozdělovaly do tříd jako teplo, elektřina, mechanika, magnetismus, vlastnosti látek, chemické děje, světlo nebo optika, rentgenové paprsky, jaderná fyzika, gravitace, mezonové jevy atd. Cílem je však pochopení celé přírody jako různých aspektů *jednoho souboru* jevů. Úkolem základní teoretické fyziky dneška je *nalezení zákonů stojících za experimentem a sjednocení uvedených tříd*. Historicky se nám vždy podařilo sloučit je, ale postupem času se objevovaly nové věci. Když jsme si již vytvořili ucelenou představu, objevily se najednou rentgenové paprsky. Když se i

1. Základy fyziky

tento jev dostal do jednotného schématu, objevily se mezony. Proto v každém stádiu hry vypadá situace dost chaoticky. Mnohé se objasnilo z jednotného hlediska, ale ještě stále je mnoho volných konců nitek, o nichž nevíme, kam patří. Takový je dnes stav věcí a my se ho pokusíme popsat.

Všimněme si v historii několika příkladů uvedeného sjednocování. Uvažujme nejdříve *teplu a mechaniku*. Jsou-li atomy v pohybu, obsahuje systém tím více tepla, čím více pohybu v něm je, takže *teplu a všechny tepelné efekty je možné vyjádřit pomocí zákonů mechaniky*. Dalším úžasným sjednocením bylo objevení souvislosti mezi *elektřinou, magnetizmem a světlem*, o nichž se zjistilo, že jsou různými aspekty stejně věci, kterou dnes nazýváme *elektromagnetické pole*. Dále chemické děje, rozmanité vlastnosti různých látek a chování atomových částic byly sjednoceny do *kvantové chemie*.

Zůstává zde však otázka, zda bude možné vše sjednotit tak, abychom mohli prohlásit, že svět představuje rozmanité aspekty jediné věci? To nikdo neví. Víme pouze, že na naší cestě vpřed se nám daří spojovat fragmenty, přičemž vždy nalézáme cosi, co nezapadá do obecného obrazu, a proto se opět pokoušíme doplnit skládačku. Nevíme, zda tato skládačka má konečný počet částí a zda má tato hra vůbec hranice. Dozvím se to až tehdyn, když složíme výsledný obraz, jestli ho vůbec kdy složíme. Chtěli bychom však ukázat, kam až tento proces sjednocování pokročil a jaká je dnešní situace při objasňování základních jevů pomocí co nejmenšího počtu principů. Jednodušeji řečeno: **z čeho jsou složeny věci a kolik je těch stavebních prvků?**

1.2. Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egypťané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimédovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovaný základní pojmy (rychlosť, zrychlení, síla apod.) Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich drahách kolem Slunce je táz jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektrina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a též elektromagnetické povahy. V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě sily, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztážné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické

a elektromagnetické děje se zdaly být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozporu vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoručasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlosť světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonovu. Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádřech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrín. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všechny těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou též podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou též povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

References

- [Moš07] F. Mošna. "Řešené příklady z Matematiky III". In: XXX (Oct. 2007). příklady.

2. Práce a potenciální energie

2.1. Potenciály a pole

Contents

2.1. Potenciály a pole	7
--	---

$$K_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (2.1)$$

3. Elektromagnetizmus

Contents

3.1. Elektrické síly	9
3.2. Elektrická a magnetická pole	10
3.3. Charakteristiky vektorových polí	10
3.4. Zákony elektromagnetismu	11
3.5. Co jsou pole?	13
3.6. Působení na dálku versus teorie pole	13
3.7. Elektromagnetizmus ve vědě a technice	14

3.1. Elektrické síly

[**Feynman02**] Představme si sílu, která se podobá gravitaci a mění se převážně nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti, ale asi miliardu miliard miliard krát větší. A ještě s jedním rozdílem. Nechť existují dva druhy „látky“, které nazývajeme kladná a záporná. Nechť na rozdíl od gravitace, v níž existuje pouze přitahování, se stejné druhy odpuzují a odlišné druhy přitahují. Co by se stalo?

Chomáč kladné látky by se ohromnou silou odpuzoval a rozptýlil by se na všechny strany. S chomáčem záporné by se stalo totéž. Ale směs stejněho množství kladné a záporné látky by se chovala zcela odlišně. Ohromná přitažlivá síla by přitáhla opačné kousky k sobě. V konečném důsledku by se tyto úžasné síly navzájem téměř dokonale vykompenzovaly vytvořením hutných jemných směsí kladného a záporného, přičemž mezi dvěma oddělenými chomáči takových směsí by neexistovalo téměř žádné přitahování nebo odpuzování.

Taková síla existuje - je to elektrická síla! A každá látka je směsí kladných protonů a záporných elektronů, které se touto velkou silou přitahují a odpuzují. Ale vyvážení je tak dokonalé, že když stojíte blízko někoho jiného, necítíte sílu vůbec žádnou. Kdyby existoval jen malý zbytek nerovnováhy, poznali bychom to. Kdybyste stáli od někoho na vzdálenost paže a každý z vás by měl o jedno procento víc elektronů než protonů, byla by odpudivá síla mezi vámi neuvěřitelná. Jak velká? Dost na to, aby zvedla obrovský mrakodrap? Ne! Aby zvedla Mount Everest? Ne! Odpuzování by stačilo na zvednutí břemene s hmotností celé zeměkoule!

S ohledem na tak perfektní vyvážení ohromné síly, působící v této směsi, není těžké pochopit, že látka s tendencí udržet své kladné a záporné náboje v nejjemnější rovnováze může mít velkou tvrdost a pevnost. Mrakodrap Empire State Building se například vychyluje ve větru jen o necelé tři metry, neboť elektrické síly udržují každý elektron a proton víceméně ve stálé poloze. Na druhé straně, když se podíváme na tak malé množství látky, že uvidíme jen několik atomů, libovolná malá část látky obvykle nebude mít stejný počet kladných a záporných; nábojů, takže budou existovat velké zbytkové elektrické síly. I kdyby byly počty obou druhů nábojů ve dvou sousedních malých částech stejně, pravděpodobně ještě zůstanou mezi oběma částmi elektrické síly, neboť síly mezi jednotlivými náboji se mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti. Zbytková síla může vzniknout, nachází-li se záporný náboj jedné části blíž kladnému náboji než kladný náboj zápornému v části jiné. Pak mohou být přitažlivé síly větší než odpudivé a může dojít k výslednému přitahování i dvou částí bez nadbytečných nábojů. Síla, která „udržuje“ pohromadě atomy, a chemická síla, která drží molekuly, jsou ve skutečnosti elektrickými silami působícími v oblastech s nedokonalou rovnováhou nábojů anebo s velmi malými vzdálenostmi.

Samozřejmě víme, že se atomy skládají z kladných protonů v jádře a záporných elektronů v jeho okolí. Můžeme se ptát: Když je tato elektrická síla tak úžasná, proč spolu protony a elektrony nesplynou? Když mají tvořit dokonalou směs, proč tato směs nemí ještě dokonalejší? Odpověď nacházíme v kvantových jevech. Pokusíme-li se naše elektrony uzavřít do oblasti těsně přiléhající k protonům, musí mít podle principu neurčitosti nenulovou střední kvadratickou hybnost, která je tím větší, čím těsnější je ohraničení. Právě tento pohyb, vyplývající ze zákonů kvantové mechaniky, zabraňuje elektrické přitažlivosti dostat náboje jakýmkoli způsobem blíž k sobě.

Je tu další otázka: Co drží pohromadě atomové jádro? V jádře je několik kladných protonů. Proč se od sebe neoddělí? Ukazuje se, že v jádře existují kromě elektrických i neelektrické síly, které se nazývají jaderné síly. Jsou větší než elektrické síly a jsou schopné držet protony u sebe i přes jejich elektrické odpuzování. Síly jádra však mají malý dosah - jejich velikost klesá mnohem rychleji než $\frac{1}{r^2}$. A to má důležitý důsledek. Kdyby jádro obsahovalo velmi mnoho protonů, stalo by se příliš velkým a nezůstalo by pohromadě. Příkladem je uran s 92 protony. Jaderné síly působí převážně jen mezi každým protonem (nebo neutronem) a jeho nejbližším sousedem, ale elektrické síly působí i na větší vzdálenosti a vytvárají tak odpuzování každého protonu od všech ostatních v jádře. Čím víc je v jádře protonů, tím je elektrické odpuzování silnější, až dokud - jako v případě uranu - není rovnováha tak křehká, že je jádro účinkem elektrické síly téměř připraveno se rozletět. Jestliže takové jádro jen trochu „postrčíme“ (pokud do něj vyšleme pomalý neutron), rozdělí se na dvě části s kladným nábojem. V důsledku elektrického odpuzování od sebe obě části odletí. Energie, která se při tom uvolňuje, je energií atomové bomby. Obvykle se tato energie nazývá jaderná, ale v podstatě je to elektrická energie uvolněná tehdy, když elektrické síly překonaly přitažlivé síly jádra.

Konečně se můžeme ptát, co drží pohromadě záporný elektron (neboť ten nemá žádné jaderné síly). Skládá-li se elektron celý z jednoho druhu látky, každá z jeho částí by měla odpuzovat ty ostatní. Proč se tedy nerozletí? Má však elektron „části“? Asi bychom měli říct, že elektron je jen bod a že elektrické síly působí jen mezi různými dvěma bodovými náboji, takže sám na sebe elektron nepůsobí. Snad. Vše, co můžeme říct, je, že otázka, co drží pohromadě elektron, způsobila v pokusech o vytvoření úplné teorie elektromagnetismu mnoho těžkostí. Tato otázka zatím nebyla zodpovězena. V dalších kapitolách se budeme tomuto tématu věnovat více.

Jak jsme viděli, je třeba čekat, že právě kombinace elektrických sil a kvantově mechanických jevů bude určovat detailní strukturu makroskopických množství látek, a tím i jejich vlastnosti. Některé látky jsou tvrdé, jiné měkké. Některé jsou elektrickými vodiči, protože jejich elektrony se mohou volně pohybovat, jiné jsou izolátory, protože jejich elektrony jsou pevně připoutané k jednotlivým atomům. Později budeme hovořit

3. Elektromagnetismus

o tom, jak vznikají některé z těchto vlastností. Je to však složitá otázka, proto nejdřív budeme zkoumat elektrické síly jen v jednoduchých situacích. Začneme s probíráním zákonů elektřiny, včetně magnetizmu, který je vlastně částí téhož předmětu.

Řekli jsme, že elektrická síla podobně jako gravitační klesá nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti mezi náboji. Tento vztah se nazývá Coulombův zákon. Ale neplatí přesně, když se náboje pohybují, protože elektrické síly závisí také na pohybu nábojů, a to komplikovaným způsobem. Jednu část síly mezi pohybujícími se náboji nazýváme *magnetická síla*, která vlastně představuje jeden aspekt elektrického účinku. Právě proto hovoříme o „elektromagnetismu“.

Existuje důležitý obecný princip, který umožňuje zacházet s elektromagnetickými silami poměrně snadno. Experimentálně se zjistilo, že síla působící na náboj závisí pouze na poloze tohoto náboje, jeho rychlosti a velikosti, bez ohledu na to, kolik dalších nábojů existuje a jak se pohybují. Sílu \vec{F} působící na náboj q , který se pohybuje rychlostí \vec{v} , můžeme vyjádřit takto:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.1)$$

kde \vec{E} je *elektrické pole* a \vec{B} *magnetické pole* v místě, kde se nachází náboj. Důležité je, že elektrické síly všech nábojů ve vesmíru lze složit právě z těchto dvou vektorů. Jejich hodnoty závisí na tom, kde se uvažovaný náboj nachází, a mohou se v čase měnit. Kromě toho, nahradíme-li tento náboj jiným, změní se síla působící na nový náboj v poměru velikostí obou nábojů, nezmění-li všechny ostatní náboje na světě svou polohu nebo pohyb. (Samozřejmě že v reálné situaci každý náboj působí na všechny ostatní ve svém okolí a může je uvést do pohybu. A tak když v některých případech nahradíme náš určitý náboj jiným nábojem, mohou se pole změnit.)

Z 1. dílu víme, jak se určuje pohyb částice, známe-li sílu, která na ni působí. Dosadíme-li výraz (3.1) do pohybové rovnice, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.2)$$

Známe-li \vec{E} a \vec{B} , můžeme určit pohyby nabitéch částic. K tomu už jen potřebujeme vědět, jak \vec{E} a \vec{B} vznikají.

Jeden z nejdůležitějších zjednodušujících principů vytváření elektrických polí závisí na tomto: Předpokládejme, že určitý počet nábojů pohybujících se libovolným způsobem vytváří pole \vec{E}_1 a jiná množina nábojů vytváří pole \vec{E}_2 . Působí-li obě množiny nábojů současně (při zachování stejných pohybů a poloh, které měly, když jsme o nich uvažovali odděleně), vytváří pole, které je dáno součtem

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (3.3)$$

Tento fakt se nazývá princip *superpozice polí*. Platí také pro magnetická pole.

Z tohoto principu vyplývá, že budeme-li vědět, podle jakého zákona vytváří elektrická a magnetická pole jedený náboj pohybující se libovolným způsobem, zákony elektrodynamiky už budou úplné. Chceme-li znát sílu působící na náboj A , je třeba spočítat pouze \vec{E} a \vec{B} , které vytváří každý náboj B, C, D atd., pak vypočítat vektory \vec{E} a \vec{B} všech nábojů, a tak najít pole a síly působící z nich na A . Kdyby se ukázalo, že zákon, podle kterého se vytváří pole jediného náboje, je jednoduchý, byla by to nejšikovnější cesta, jak popsat zákony elektrodynamiky. My už jsme uvedli tento zákon (kapitola 28, díl 1), který je, bohužel, dost složitý.

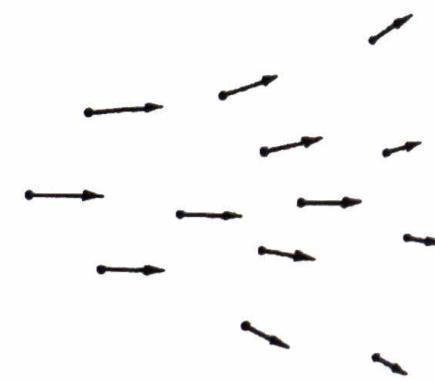
Ukazuje se, že tvar, ve kterém jsou zákony elektrodynamiky nejednodušší, není tím tvarem, který byste zde mohli očekávat. Není totiž vůbec jednoduché udat vzorec síly, kterou působí jeden náboj na druhý. Je pravda, že pokud jsou náboje v klidu, je výraz pro Coulombovu sílu ještě jednoduchý, ale když se náboje pohybují, vztahy se komplikují kromě jiného i časovým zpožděním a zrychlením. Z tohoto důvodu neholďme prezentovat elektrodynamiku pouze prostřednictvím zákonů síly působící mezi náboji; pokládáme za vhodnější jiné hledisko – při něm jsou zákony elektrodynamiky zvládnutelné snáze.

3.2. Elektrická a magnetická pole

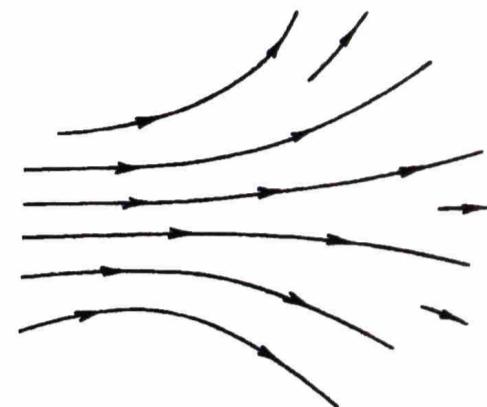
Nejdříve si musíme trochu rozšířit naši představu o elektrickém vektoru \vec{E} a magnetickém vektoru \vec{B} . Definovali jsme je pomocí sil působících na náboj. Nyní chceme hovořit o elektrických a magnetických polích v bodě, i v tom případě, kdy se v něm nenachází žádný elektrický náboj. Tvrdíme: jestliže existují síly působící na náboj, existuje tam „něco“ i tehdy, je-li náboj odstraněn. Když na náboj umístěný v bodě (x, y, z) působí v čase t síla \vec{F} daná výrazem (3.1), přířazujeme bodu (x, y, z) v prostoru vektory \vec{E} a \vec{B} . O vektorech $\vec{E}(x, y, z, t)$ a $\vec{B}(x, y, z, t)$ si můžeme myslit, že určují síly, které by působily v čase t na náboj umístěný v bodě (x, y, z) za podmínky, že umístění náboje do bodu (x, y, z) neporuší polohy nebo pohyby žádných jiných nábojů vytvářejících i pole \vec{E} a \vec{B} .

Podle této představy připřeseme každému bodu (x, y, z) v prostoru dva vektory \vec{E} a \vec{B} , které se mohou měnit v čase. Elektrická a magnetická pole pak chápeme jako *vektorové funkce* proměnných x, y, z a t . Protože vektor je určen svými složkami, každě z polí $\vec{E}(x, y, z, t)$ a $\vec{B}(x, y, z, t)$ představuje tři reálné funkce proměnných x, y, z a t .

Právě proto, že \vec{E} (nebo \vec{B}) je možné určit v každém bodě v prostoru, nazývá se pole. Pole je jakákoli fyzikální veličina, která nabývá různé hodnoty v různých bodech prostoru. Například teplota je polem – v tomto případě skalárním polem, které zapisujeme jako $T(x, y, z)$. Teplota se může také měnit v čase, říkáme, že je závislá na čase a zapisujeme ji jako $T(x, y, z, t)$. Jiným příkladem je „rychlostní pole“



(a) šípkami, jejichž velikost a směry udávají hodnoty vektorového pole v bodech, ze kterých vychází.



(b) siločar, jejichž tečny mají v každém bodě směr vektoru pole a jejichž hustota je úměrná velikosti vektoru pole.

Obrázek 3.1.: Znázornění vektorového pole

tekoucí kapaliny. Rychlosť kapaliny v každém bodě prostoru v čase t zapisujeme jako $\vec{v}(x, y, z, t)$. Je to vektorové pole.

Vraťme se k elektromagnetickým polím. Ačkoliv se jejich závislost na nábojích, které je vytvořily, vyjadřuje složitými vzorce, mají důležitou následující vlastnost: vztahy mezi hodnotami polí v jednom bodě a hodnotami polí v bodech sousedních jsou velice jednoduché. Pole lze zcela popsat pomocí několika vztahů, které mají tvar diferenciálních rovnic. Právě pomocí takových rovnic se zapisují zákony elektrodynamiky nejjednodušší.

Existují rozmanité nápady, jak si vytvořit představu o chování polí. Nejsprávnější z nich je i nejabstraktnější: pole chápeme prostě jako matematické funkce polohy a času. Můžeme se pokusit získat představu pole také tím, že si v mnoha bodech prostoru nakreslíme vektory, z nichž každý bude udávat intenzitu a směr pole v daném bodě. Takové zobrazení pole vidíme na obr. 3.1a. Můžeme však jít dál a nakreslit křivky, které mají všude vektory ve směru tečny, tj. jakoby šly za šípkami a sledovaly směr pole. Když postupujeme takto, ztrácíme znázornění délek vektoru. Intenzitu pole můžeme však znázornit tak, že křivky vykreslíme daleko od sebe, když je pole slabé, a blízko sebe, když je silné. Domluvíme se přitom, že počet křivek připadající na jednotku plochy postavenou kolmo na křivky bude přímo úměrný intenzitě pole. Toto je ovšem jen zjednodušení a vyžaduje, aby se tu a tam objevily nové křivky tak, aby jejich počet vždy souhlasil s intenzitou pole. Pole z obr. 3.1a je znázorněno pomocí těchto siločar na obr. 3.1b.

3.3. Charakteristiky vektorových polí

[Feynman02] V našem popisu zákonů elektřiny, který se opírá o pojem pole, budeme používat dvě matematicky důležité vlastnosti vektorového pole. Předpokládejme, že máme nějakou uzavřenou plochu, a ptáme se, zda se „něco“ ztrácí z jejího nitra, tj. zda má pole vlastnost „výtoku“. Například v případě rychlostního pole bychom se mohli ptát, zda rychlosť směruje vždy ven z plochy, nebo obecněji, zda víc kapaliny (za jednotku času) vytéká než vtéká. Výsledné množství kapaliny, vytékající z určité plochy za jednotku času, se nazývá tok rychlostí plochou. Tok elementární ploškou je roven složce rychlostí kolmé na plošku, násobené velikostí plošky. Pro libovolnou uzavřenou plochu je čistý výtok, nebo krátce tok, roven součinu jejího plošného obsahu a střední normálové složky rychlosti, orientované ven z objemu uzavřeného plochou:

$$\text{Tok} = (\text{Střední normálová složka}) \cdot (\text{plošný obsah}) \quad (3.4)$$

I v případě elektrického pole můžeme matematicky definovat veličinu analogickou k toku. Opět ji nazveme tokem, ale samozřejmě nepůjde o tok nějaké látky, protože elektrické pole není rychlosť něčeho. Ukazuje se však, že i tak je matematická veličina udávající střední normálovou složku pole velice užitečná. Pak hovoříme o elektrickém toku, definovaném také podle (3.4). Přitom je užitečné zavést tok nejen zcela uzavřenou plochu, ale jakoukoliv ohraničenou plochou. Podobně jako předtím se tok takovou plochou definuje jako součin jejího plošného obsahu a střední normálové složky vektoru. Tyto pojmy ilustruje obr. 3.2.

Druhá vlastnost vektorového pole se týká spíše křivky než plochy. Opět si představme rychlostní pole, které popisuje tok kapaliny. Mohli bychom si položit

tuto zajímavou otázkou: Cirkuluje kapalina? Myslíme tím toto: existuje výsledný rotační pohyb kapaliny podél nějaké uzavřené křivky? Představme si, že jsme v jeden okamžik zmrazili všechnu kapalinu s výjimkou vnitřku trubice s konstantním průřezem a tvarem uzavřené křivky, jako na obr. 3.3. Mimo trubici se kapalina zastaví, ale uvnitř se může udržovat v pohybu, a to v závislosti na hybnosti kapaliny zachycené v trubici, tj. podle toho, zda hybnost kapaliny v jednom směru podél trubice je větší než hybnost v opačném směru.

Veličinu nazvanou cirkulace definujeme jako výslednou rychlosť kapaliny v trubic i násobenou délkom trubice. Naše pojmy můžeme nyní opět rozšířit a cirkulaci definovat pro jakékoli vektorové pole (i když tam není nic, co by se pohybovalo). Pro libovolné vektorové pole se cirkulace podél libovolné myšlené uzavřené křivky definuje jako střední tangenciální složka vektoru (s ohledem na směr oběhu po křivce) násobená délkou křivky (obr. 3.4).

$$\text{Cirkulace} = (\text{střední tangenciální složka}) \cdot (\text{délka křivky}). \quad (3.5)$$

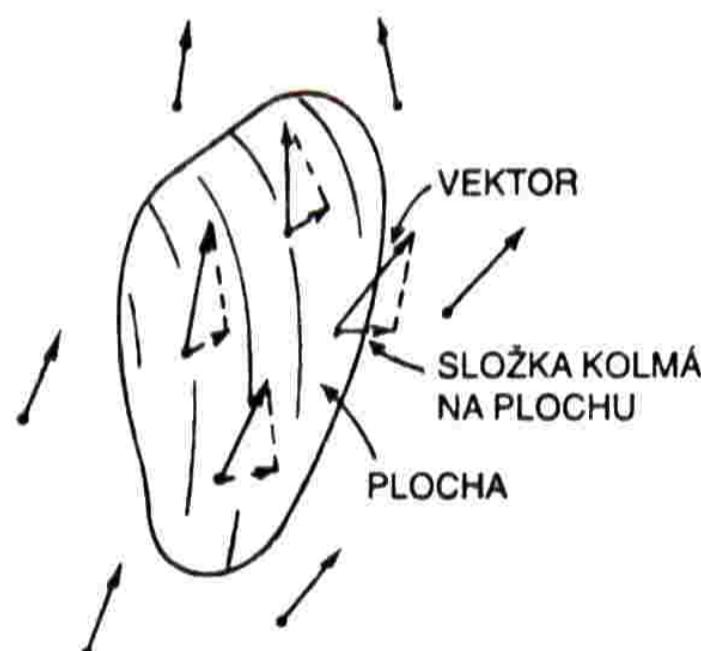
Uvidíme, že z této definice opravdu vyplývá číslo, které je přímo úměrné rychlosti oběhu kapaliny v rychle zamrzlé trubici, popsané předtím.

Právě pomocí těchto dvou pojmu - toku a cirkulace — už můžeme uvést všechny zákony elektřiny a magnetizmu. Možná, že význam zákonů hned plně nepochopíme, ale poskytnou nám určitou představu o tom, jak se v konečném tvaru formuluje fyzika elektromagnetických jevů.

3.4. Zákony elektromagnetizmu

[Feynman02] První zákon elektromagnetizmu určuje tok elektrického pole:

$$\text{Tok } \vec{E} \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = \frac{\text{celkový náboj uvnitř plochy}}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$



Obrázek 3.2.: Tok vektorového pole plochou se definuje jako součin střední hodnoty normálové složky vektoru a obsahu plochy.

Konstanta c^2 , která vystupuje v rovnici (3.9), je druhou mocninou rychlosti světla. Vyskytuje se tu proto, že magnetizmus je ve skutečnosti relativistickým efektem elektřiny. Konstanta ϵ_0 byla vložena proto, aby vhodným způsobem vyšly jednotky elektrického proudu.

Rovnice (3.6) až (3.9) spolu se vztahem (3.1) vyjadřují všechny zákony elektrodynamiky¹. Jak si vzpomínáte, Newtonovy zákony sice bylo možné snadno zapsat, ale měly mnoho velmi složitých důsledků a zabralo nám mnoho času, než jsme se o nich doveděli všechno. Napsat tyto naše zákony tak jednoduché není, z čehož vyplývá, že jejich důsledky budou ještě složitější, a zabere nám opravdu velmi mnoho času, než je všechny objasníme.

Zákony elektrodynamiky můžeme ilustrovat sérií jednoduchých pokusů, které kvalitativně ukazují vzájemné vztahy elektrických a magnetických polí. První člen ve vztahu (3.1) jste pocítili, když jste si česali vlasy, a proto ho nebudeme ilustrovat. Druhou část výrazu (3.1) lze demonstrovat při průchodu proudem vodičem, který visí nad tyčovým magnetem tak, jako na obr. 3.5.

Účinkem síly $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ se při zapnutí proudu vodič pohně. Po dobu trvání proudu se náboje uvnitř vodiče pohybují, tj. mají rychlosť \vec{v} , a proto na ně působí

kde ϵ_0 je vhodná konstanta (čte se „epsilon nula“). Není-li uvnitř plochy žádný náboj, ačkoliv v jejím okolí náboje jsou, je střední normálová složka \vec{E} nulová, takže výsledný tok plochou je nulový. Abychom naznačili hloubku tohoto tvrzení, můžeme ukázat, že vztah (3.6) je ekvivalentní s Coulombovým zákonem. Stačí doplnit předpoklad, že pole jednotlivého náboje je kulové symetrické. V případě bodového náboje opíšeme kolem náboje kulovou plochu. Střední normálová složka vektoru pole je pak dána právě velikostí \vec{E} v libovolném bodě kulové plochy, neboť pole má nevyhnutelně radiální směr a v každém bodě na kouli má stejnou intenzitu. Naše pravidlo tvrdí, že součin pole na povrchu koule a plošného obsahu jejího povrchu, tj. tok směrem ven z koule, je přímo úměrný náboji uvnitř koule. Jestliže bychom poloměr koule zvětšili, plošný obsah by vzrostl přímo úměrně druhé mocnině poloměru. Ale střední normálová složka elektrického pole vynásobená zvětšeným plošným obsahem se musí rovnat stejnemu náboji uvnitř, a pole se tedy musí zmenšit nepřímo úměrně druhé mocnině poloměru — dostáváme výsledek, že pole je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti.

Vezmeme-li libovolnou pevnou křivku v prostoru a měříme-li podél ní cirkulaci elektrického pole, zjistíme, že obecně není rovna nule (i když jde o Coulombovo pole). Pro elektřinu platí totiž i druhý zákon, podle něhož pro jakoukoliv plochu S (neuzavřenou) ohrazenou křivkou C platí

$$\text{Cirkulace } \vec{E} \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt}(\text{tok } \vec{B} \text{ plochou } S). \quad (3.7)$$

Zákony elektromagnetického pole můžeme završit zapsáním dvou analogických rovnic pro magnetické pole \vec{B} :

$$\text{Tok } \vec{E} \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = 0. \quad (3.8)$$

Pro plochu S ohrazenou křivkou C platí následující rovnice

$$c^2 \text{ Cirkulace } \vec{B} \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt}(\text{tok } \vec{E} \text{ plochou } S) + \frac{\text{elektrický proud plochou } S}{\epsilon_0}. \quad (3.9)$$

magnetické pole magnetu, což se projeví pohybem vodiče do strany.

Když se vodič pohně doleva, je třeba čekat, že magnet dostane náraz směrem doprava. (V opačném případě bychom mohli celé zařízení umístit na vůz a měli bychom pohonné systém, který nezachovává hybnost!) I když je síla příliš malá na to, aby byl pohyb tyčového magnetu viditelný, jemnější uložený magnet, např. střelka kompasu, by se pohnul.

Jak působí na magnet vodič elektrického proudu? Proud ve vodiči vytváří vlastní magnetické pole, které se projeví silovým působením na magnet. Podle posledního člena v rovnici (3.9) vyvolá proud nevyhnutelně cirkulaci pole \vec{B} — v tomto případě křivky pole \vec{B} (magnetické indukční čáry) jsou uzavřené a obepínají vodič, jak je vidět na obr. 3.6. Právě toto pole \vec{B} je původcem síly působící na magnet.

Podle rovnice (3.9) je při stálém proudu cirkulace pole \vec{B} stejná pro jakoukoliv křivku, která vodič obepíná. Křivky, např. kružnice, které jsou dál od vodiče, mají obvod větší, takže tangenciální složka \vec{B} musí být menší. Vidíte, že podle očekávání bude pole \vec{B} klesat nepřímo úměrně vzdálenosti od dlouhého přímého vodiče.

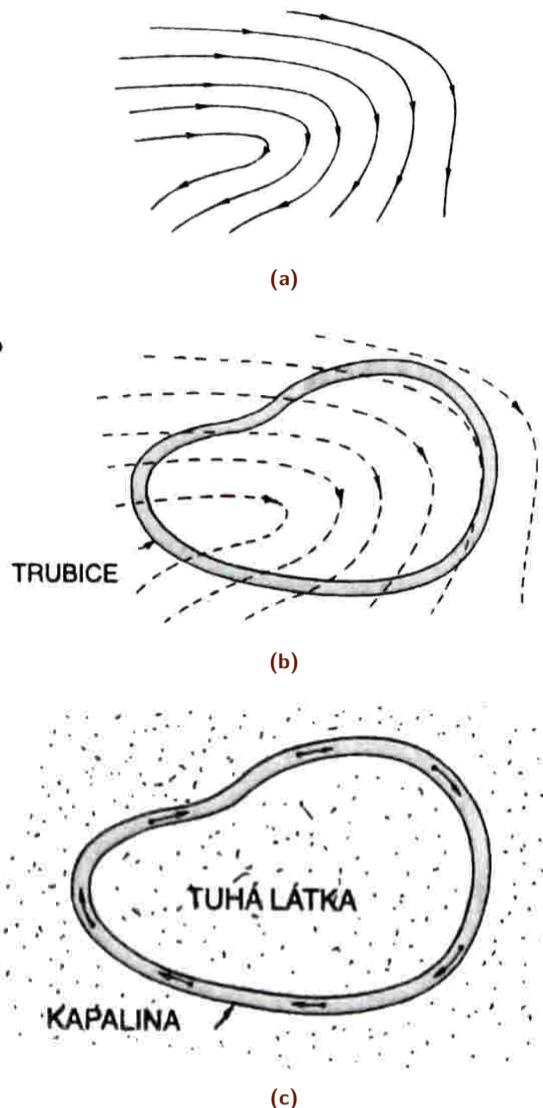
Řekli jsme, že proud ve vodiči vytváří magnetické pole a že v magnetickém poli působí na vodič, kterým prochází proud, síla. Pak bychom měli také očekávat, že vytvoříme-li magnetické pole proudem v jednom vodiči, bude působit silou na jiný vodič, kterým také prochází proud. Můžeme si to ukázat na dvou visících vodičích, jako na obr. 3.7. Mají-li proudy stejný směr, vodiče se přitahují, jsou-li proudy opačného směru, vodiče se odpuzují.

Krátké řečeno elektrické proudy vytvářejí magnetická pole právě tak jako magnety. Ale počkejte, co je vlastně magnet? Jestliže pohybující se náboje vyvolávají magnetická pole, není možné, že magnetické pole kousku železa je ve skutečnosti také důsledkem proudů? Ukazuje se, že ano. Tyčový magnet z našeho pokusu můžeme nahradit cívku navinutou z drátu, stejně jako na obr. 3.8. Prochází-li cívku proud (jakož i přímým vodičem nad ní), pozorujeme pohyb vodiče přesně jako předtím, kdy jsme měli místo cívky magnet. Jinak řečeno, proud v cívce imituje magnet. Ukazuje se tedy, že kus železa působí tak, jako kdyby obsahoval ustavičně obíhající proud. Magnety opravdu můžeme objasnit pomocí permanentních proudů v atomech železa. Sílu účinkující na magnet na obr. 3.6 vyvolává tedy druhý člen ve vztahu (3.1).

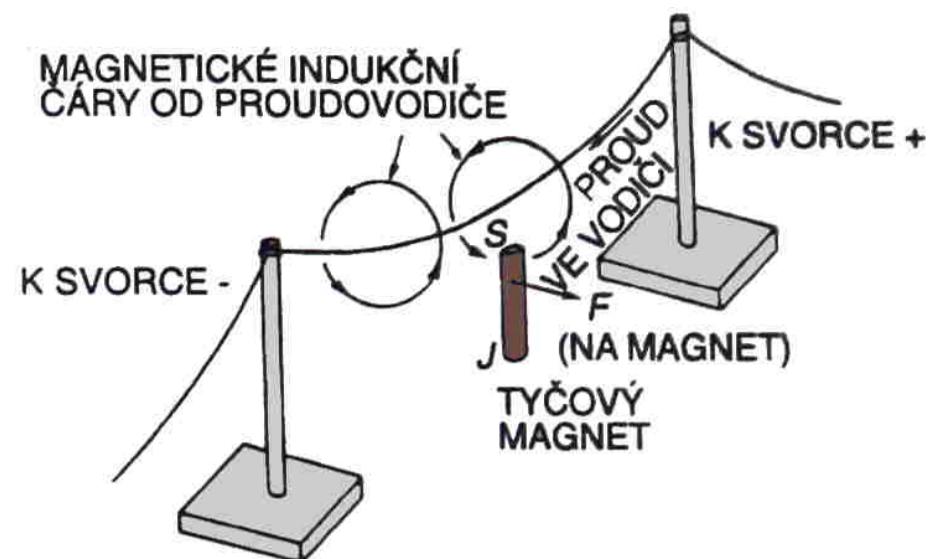
Odkud se tyto proudy berou? Jednou z možností je, že z pohybu elektronů v atomových orbitách. To však není případ železa, třebaže to tak v některých látkách je. Kromě oběhu v atomu se elektron otáčí i kolem své vlastní osy (nějak podobně jako vlastní rotace Země) a právě tento pohyb, tzv. spin elektronu, vytváří magnetické pole v případě železa. (Říkáme, že je to „něco podobného“ jako vlastní rotace Země, protože tento problém zasahuje tak hluboko do kvantové mechaniky, že klasické představy opravdu příliš dobře nevystihují tyto poměry.) Ve většině látek se některé elektrony otáčejí jedním směrem, kdežto jiné směrem opačným, takže jejich magnetizmus se vyruší. Ale v železe – ze záhadného důvodu, o němž budeme hovořit později – jsou osy otáčení mnoha elektronů uspořádány jedním směrem, a to je zdrojem magnetizmu.

Protože pole magnetů pocházejí z proudů, nemusíme do rovnic (3.9) nebo (3.9) přidávat žádný zvláštní člen zohledňující magnety. Stačí zahrnout všechny proudy včetně těch, které souvisejí se spiny elektronů, a zákon bude správně. Také byste si měli všimnout, že podle rovnice (3.9) neexistují magnetické „náboje“ analogické s

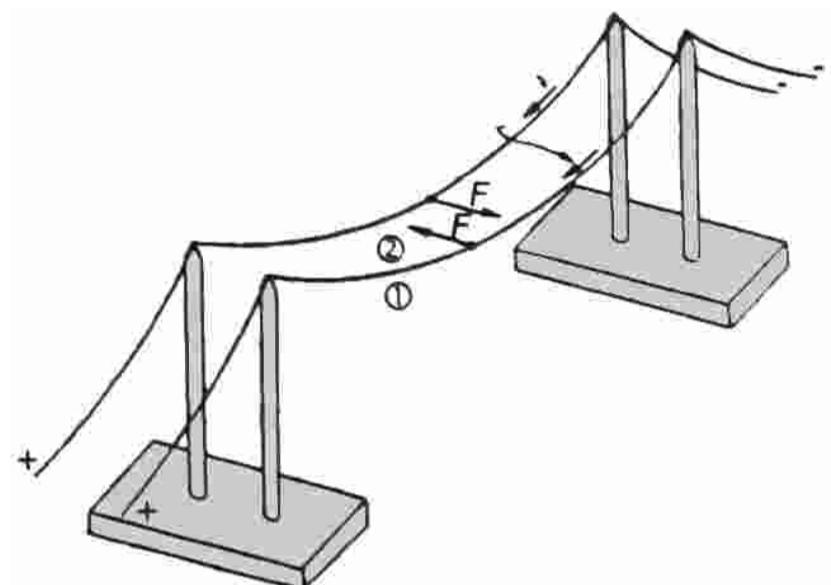
¹ Už se potřebujeme jen dohodnout na konvencích pro výběr znaménka cirkulace.



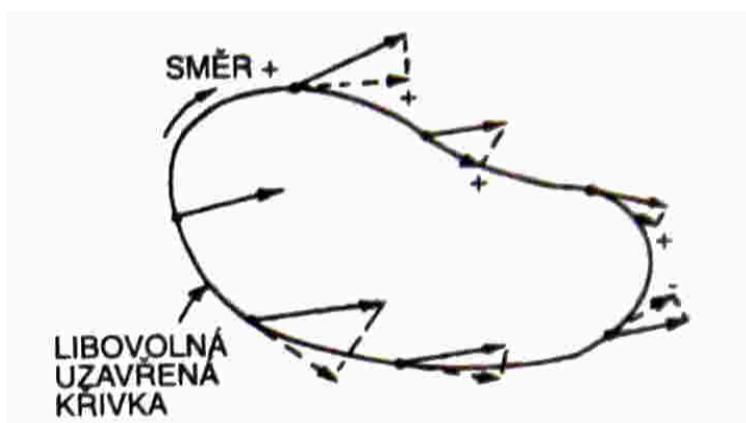
Obrázek 3.3.: Cirkulace vektorového pole: a) Pole rychlosti v kapalině. b) Představme si trubici s konstantním průřezem a tvarem nějaké uzavřené křivky. c) Kdyby kapalina všude s výjimkou vnitřku trubice náhle zmrzla, v trubici by cirkulovala.



Obrázek 3.6.: Magnetické pole vodiče působí silou na magnet.



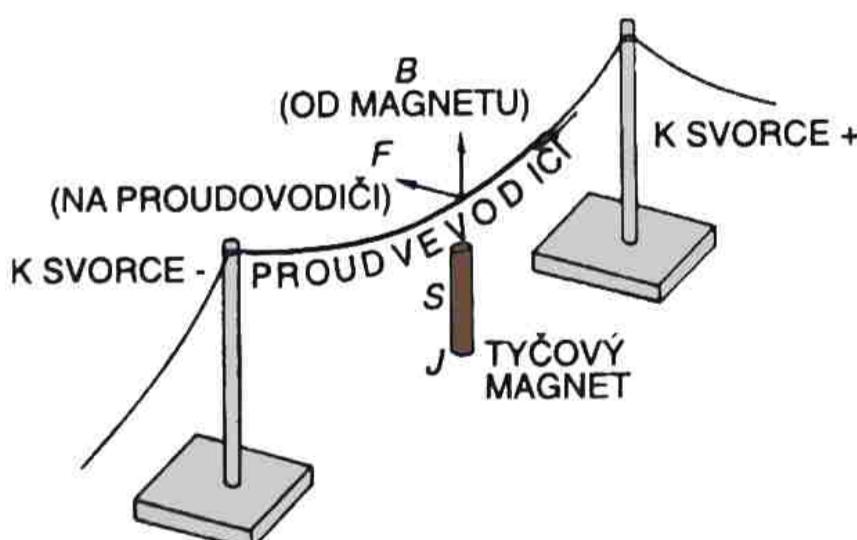
Obrázek 3.7.: Dva vodiče, kterými prochází proud, na sebe navzájem působí silami.



Obrázek 3.4.: Cirkulace vektorového pole je rovna součinu střední tangenciální složky vektoru (vzhledem ke směru pohybu po křivce) a délky uzavřené křivky.

elektrickými, vystupující na pravé straně rovnice (3.7). Žádné se nenašly.

První člen na pravé straně rovnice (3.9) objevil Maxwell čistě teoreticky a je velmi



Obrázek 3.5.: Tyčový magnet vyvolává ve vodiči pole \vec{B} . Když vodičem prochází proud, působením síly $F = q\vec{v} \times \vec{B}$ se vodič pohně.

důležitý. Podle něj mají proměnlivá elektrická pole magnetické účinky. Pravda je, že bez tohoto člena by rovnice neměla smysl, protože bez něho by neexistovaly elektrické proudy v obvodech, které netvoří uzavřené smyčky. Ale, jak uvidíme na následujícím příkladě, takové proudy existují. Představme si kondenzátor skládající se ze dvou roviných desek. Nechť se nabijí proudem směřujícím k jedné desce a vycházejícím z druhé z nich (obr. 3.9). Opišme okolo jednoho z přívodů křivku C , jejíž vnitřek vyplníme plochou S_1 , která přetíná vodič (viz obrázek). Podle (3.9) je cirkulace \vec{B} podél C určena proudem ve vodiči. Ale co když vnitřek křivky C vyplníme jinou plochou S_2 , která má tvar mýsy a prochází mezi deskami kondenzátoru, přičemž se nikde nedotýká vodiče. Touto plochou jistě neprochází žádný proud. A zajisté změna umístění myšené plochy nezmění reálné magnetické pole! Cirkulace pole \vec{B} se tedy nesmí změnit. První člen na pravé straně rovnice (3.9) se ve skutečnosti kombinuje s druhým členem tak, aby složením daly shodné výsledky pro obě plochy S_1 a S_2 . V případě S_2 se cirkulace \vec{B} udává pomocí rychlosti změny toku pole \vec{E} mezi deskami kondenzátoru. Vychází, že změna \vec{E} je právě v takovém poměru k proudu, aby rovnice (3.9) byla správná. Maxwell viděl tuto potřebu a byl prvním, kdo napsal úplnou rovnici.

Zařízením znázorněným na obr. 3.9 můžeme demonstrovat další ze zákonů elektromagnetismu. Odpojme konce zavřeného vodiče od akumulátoru a připojme je ke galvanometru, který nám ukazuje, jestli vodičem protéká proud. Když vodič postrčíme do strany v magnetickém poli magnetu, zaznamenáme proud. Takový jev je opět dalším důsledkem vztahu (3.1) — na elektrony ve vodiči působí síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Elektrony mají příčnou rychlosť, neboť se pohybují s vodičem. Rychlosť v v kombinaci se svislým \vec{B} magnetu vyvolává sílu působící na elektrony v podélném směru (vzhledem k vodiči) a uvádí je do pohybu ke galvanometru.

Předpokládejme však, že vodič necháme v klidu a pohybujeme magnetem. Na základě principu relativity se domníváme, že by v tom neměl být žádný rozdíl. A opravdu, na galvanometru pozorujeme podobný proud. Jak působí magnetické pole na náboje, které se nepohybují? Podle vztahu (3.1) tam musí být elektrické pole. Pohybující se magnet musí vytvořit elektrické pole. Jak k tomu dojde, popisuje kvantitativně rovnice (3.7). Tato rovnice popisuje mnoho prakticky důležitých úkazů, např. ty, které se vyskytují v elektrických generátorech a transformátořech.

Nejpozoruhodnějším důsledkem našich rovnic je, že spojením rovnic (3.7) a (3.9) lze vysvětlit vyzařování elektromagnetických vzruchů na velké vzdálenosti. Příčinou spočívá zhruba v tomto. Předpokládejme, že někde máme vznikající magnetické pole, třeba proto, že jsme např. najednou zapnuli proud ve vodiči. Potom se podle rovnice (3.7) musí objevit cirkulace elektrického pole. Když elektrické pole postupně vzniká a vytváří svou cirkulaci, bude se podle rovnice (3.9) generovat magnetická cirkulace. Ale nárůst tohoto magnetického pole způsobí vznik nové cirkulace elektrického pole atd. Takto si pole razí svou cestu prostrem, aniž by

potřebovala náboje nebo proudy někde jinde než ve svém zdroji. Tím způsobem jeden druhého vidíme! To všechno obsahují rovnice elektromagnetických polí.

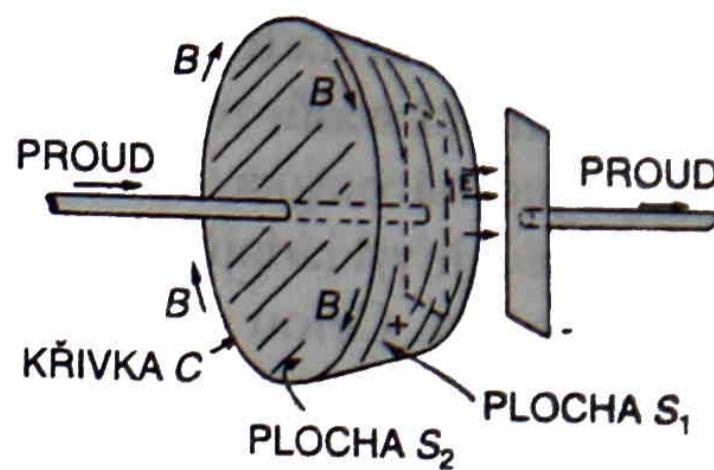
3.5. Co jsou pole?

[Feynman02] Nyní uděláme několik poznámek o našem způsobu náhledu na tuto otázku. Mohli byste namítat: „Celá ta záležitost s toky a cirkulacemi je velmi abstraktní. V každém bodu prostoru existují elektrická pole, kromě toho platí určité zákony. Ale co se opravdu děje? Proč to nemůžete vysvětlit např. tím, že už je to cokoliv, co prochází mezi náboji?“ Problém je ve vašich předsudcích. Mnozí fyzici říkají, že přímé působení bez ničeho mezi působícími objekty je nemyslitelné. (Jak to mohli označit za nemyslitelnou ideu, když už byla vymyšlena?) Říkají: „Podívejte se, jediné síly, které známe, jsou přímým působením jednoho kousku látky na jiný. Je nemožné, aby existovala síla, jejíž přenos nic nezprostředkuje.“ Ale co se ve skutečnosti děje, když zkoumáme „přímé působení“ jednoho kusu látky na druhý? Zjistíme, že nejde o bezprostřední dotyk obou kusů, kusy jsou od sebe trochu vzdálené a uplatňují se mezi nimi elektrické síly, působící v malém měřítku. Tak docházíme k tomu, že působení ve formě přímého dotyku máme vysvětlovat pomocí elektrických sil. Zajisté by nebylo rozumné trvat na tom, že elektrická síla má vypadat jako staré známé odtlačování nebo přitahování pomocí svalů, zejména když se ukazuje, že svalové účinky je třeba vykládat jako elektrické síly! Jediná otázka, která má smysl, je, jaký způsob popisu elektrických sil je nevhodnější. Někteří lidé si je vykládají jako působení nábojů na dálku a používají přitom složitý zákon. Jiní si oblíbili siločáry. Celou dobu kreslí siločáry a psát vektory \vec{E} a \vec{B} je podle nich příliš abstraktní. Siločáry jsou však jen hrubým způsobem popisu pole a je velmi těžké podat správné kvantitativní zákony bezprostředně pomocí siločar. Kromě toho pojednání siločar neobsahuje nejhlbší princip elektrodynamiky - princip superpozice, I když víme, jak vypadají siločáry pro jednu množinu nábojů a jak vypadají pro jinou množinu nábojů, neuděláme si z toho žádnou představu o obraze siločar v případě, že množiny působí najednou. Naproti tomu z matematického hlediska je superpozice jednoduchá - prostě sečteme dva vektory. Určitou předností siločar je, že poskytuje názorný obraz, ale mají také nevýhody. Způsob uvažování pomocí přímé interakce má velké výhody, když se uvažuje o elektrických nábojích v klidu, ale má také velké nevýhody, jde-li o náboje v rychlém pohybu.

Nejlepším způsobem je používat abstraktní pojem pole. To, že je abstraktní, je nepříjemné, ale nevyhnutelné. Pokusy popisovat elektrické pole jako pohyb nějakých ozubených koleček, pomocí siločar nebo napětí v nějaké látce si vyžádaly větší úsilí fyziků, než by stačilo na samotné nalezení správných odpovědí na problémy elektrodynamiky. Je zajímavé, že, správné rovnice o chování světla v krystalech vypracoval McCullough už r. 1843. Lidé mu však říkali: „Dobře, ale taková reálná látka, jejíž mechanické vlastnosti by mohly vyhovovat těmto rovnicím, neexistuje, a protože světlo je vlnění, které musí kmitat v něčem, nemůžeme těmto abstraktním rovnicím věřit.“ Kdyby lidé byli bývali méně zaujatí, mohli by uvěřit správným rovnicím chování světla o mnoho dříve.

Co se týče magnetického pole, můžeme udělat následující poznámku: Předpokládejme, že jste nakonec úspěšně vytvořili obraz magnetického pole pomocí nějakého druhu siločar nebo koleček rychle se otáčejících v prostoru. Pokuste se potom vysvětlit, co se stane se dvěma náboji pohybujícími se v prostoru rovnoběžně stejnou rychlostí. Protože se pohybují budou se chovat jako dva proudy a každý z nich bude mít svoje magnetické pole (podobně jako proudy ve vodičích na obr. 3.7). Pozorovatel, který by se pohyboval spolu s náboji, by je však vnímal jako stojící a tvrdil by, že magnetické pole není. Ozubená kolečka anebo siločáry tedy zmizí, když se pohybujete spolu s objektem! Jediné co jsme udělali je, že jsme vytvořili nový problém. Jak mohou ozubená kola zmizet? Lidé, kteří kreslí siločáry, se dostávají do podobných těžkostí. Nejen, že není možné říci, zda se siločáry s náboji pohybují anebo ne, ale můžou v určitých souřadnicových soustavách zcela zmizet.

To, co bychom ještě chtěli říct, je, že magnetizmus je skutečně relativistickým efektem. V právě uvažovaném případě dvou rovnoběžně se pohybujících nábojů lze očekávat, že bude třeba udělat relativistické korekce k jejich pohybu pomocí členů



Obrázek 3.9.: Cirkulace vektoru \vec{B} po křivce C je určena buď proudem procházejícím plochou S_1 nebo rychlosti změny toku vektoru \vec{E} plochou S_2 .

rádu $\frac{v^2}{c^2}$. Tyto korekce musí odpovídat magnetické síle. Ale co se silou mezi dvěma vodiči v našem pokusu (obr. 3.7)? Tam je magnetická síla jedinou působící silou. Nevypadá jako „relativistická korekce“. Kromě toho, odhadneme-li rychlosť elektronů ve vodiči (to můžete udělat sami), zjistíme, že jejich střední rychlosť podél vodiče je asi $0,01 \text{ cm s}^{-1}$. Takže $\frac{v^2}{c^2}$ je asi 10^{-25} . Určitě zanedbatelná „korekce“. Ale není! Ačkoli magnetická síla je v tomto případě 10^{-25} „normální“ elektrické síly mezi pohybujícími se elektrony, vzpomeňme si, že „normální“ elektrické síly vymizely v důsledku téměř dokonalého vyrovnání - neboť vodiče mají stejný počet protonů i elektronů. Rovnováha je mnohem přesnější než $1/10^{-25}$ a malý relativistický člen, který nazýváme magnetickou silou, je jediným členem, který zůstal, a stává se tak dominantním.

Právě téměř dokonalé vzájemné vyrušení elektrických sil umožnilo zkoumat relativistické efekty, tj. magnetizmus, a objevit správné rovnice s přesností $\frac{v^2}{c^2}$, i když fyzici nevěděli, co se ve skutečnosti děje. A právě proto, když byla objevena teorie relativity, elektromagnetické zákony se nemusely měnit. Na rozdíl od mechaniky už byly správné s přesností $\frac{v^2}{c^2}$.

Elektromagnetické pole je rozloženo v prostoru a může se měnit s časem. Veličiny, které toto pole popisují jsou obecně funkci času a tří geometrických souřadnic. Podle časového průběhu rozlišujeme:

1. **pole časově neproměnné**: jsou-li náboje v klidu, budeme hovořit o poli **statickém**, jsou-li v rovnomořném pohybu (tj. tvoří-li stejnosměrný proud), jde o pole **stacionární**.
2. **pole časově proměnné** čili **nestacionární**: jestliže se elektromagnetické pole mění s časem relativně pomalu, nazýváme jej **kvazistacionárním**. Jestliže se mění s časem periodicky, říkáme, že je v **ustáleném stavu**. Speciální případy jsou:
 - **harmonický ustálený stav**: pole se časem mění podle sinové nebo kosinové funkce
 - **neustálený (přechodný) stav**: pole přechází z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tento případ nastane tehdy, když zdroje pole změní své parametry, resp. svou polohu v prostoru.

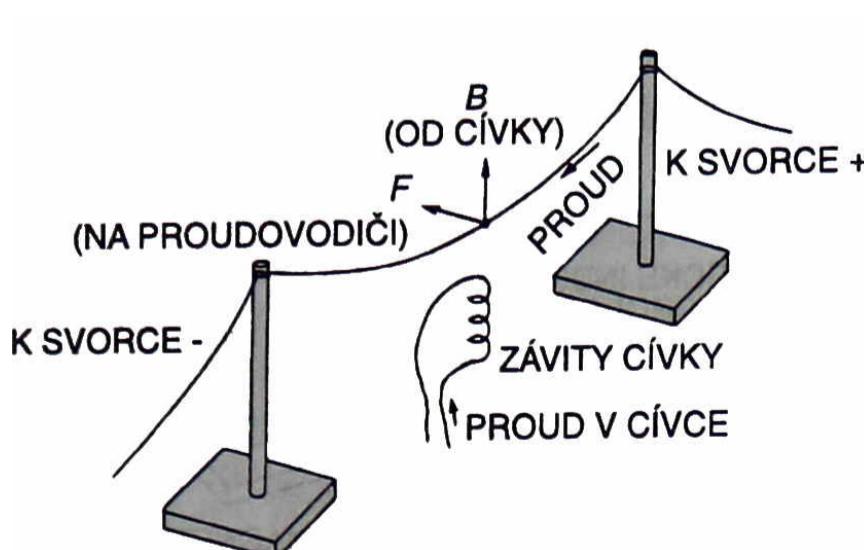
Pode prostorového průběhu rozlišujeme:

1. **trojrozměrné**: (trojdimentzionaLNÍ, prostorové pole), veličiny charakterizující pole jsou funkcemi tří geometrických souřadnic (např. x, y, z). Označení: **3D pole**.
2. **dvojrozměrné**: (dvojdimentzionaLNÍ pole), veličiny charakterizující pole jsou funkcemi dvou geometrických souřadnic. Dvourozměrné pole je např. pole rovinné (je funkcií souřadnic x, y), nebo pole rotačně souměrné (je funkcií r, z). Označení: **2D pole**.
3. **jednorozměrné**: (jednodimentzionaLNÍ pole), veličiny charakterizující pole jsou funkcemi jedné geometrické souřadnice (např. x , nebo r). Označení: **1D**.
4. **homogenní**: veličiny charakterizující pole jsou v kterémkoliv bodě uvažované oblasti prostoru tytéž. (tj. jsou nezávislé na geometrických souřadnicích).

3.6. Působení na dálku versus teorie pole

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci Jamese Clerka Maxwella „Pojednání o elektřině a magnetismu“. Maxwell založil svou teorii z větší části na intuitivních úvahách Michaela Faradaye. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovateli interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu „působení na dálku“, který předcházel teorii pole.

Co je „působení na dálku“? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše



Obrázek 3.8.: Tyčový magnet na obr. 3.5 je možné nahradit cívkou s elektrickým proudem. Na vodič přitom působí podobná síla.

3. Elektromagnetismus

díky svéj přítomnosti. Jakékoliv vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlosť šíření zprostředkovaného přenosu. To je známo jako „silové působení na dálku“, protože kromě objektů působících na sebe „silou“ a „vzdáleností“ mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námítky proti modelu „působení na dálku“, protože odporoval jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit *prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícím se v prostoru mezi objekty*.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (médium) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

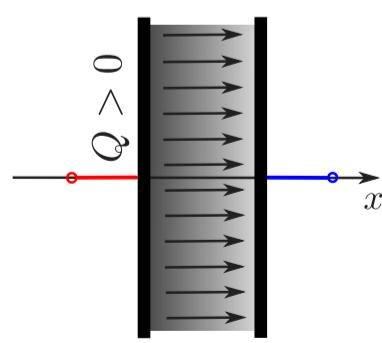
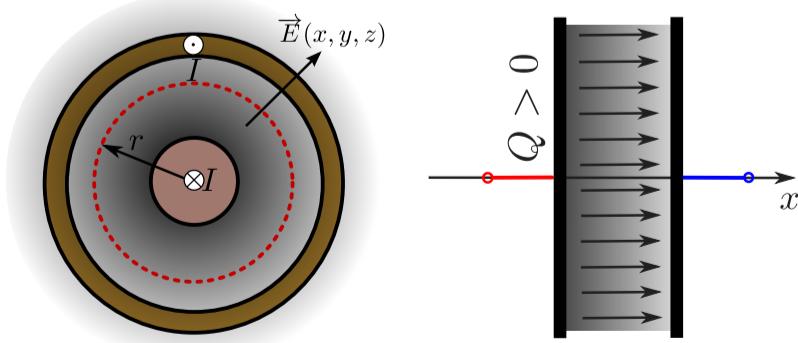
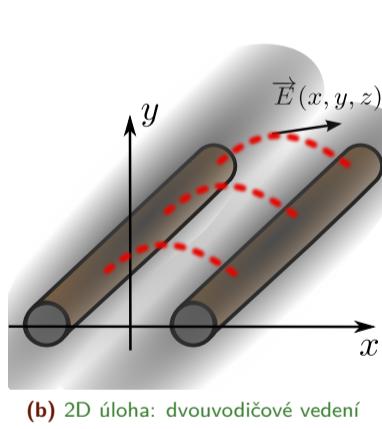
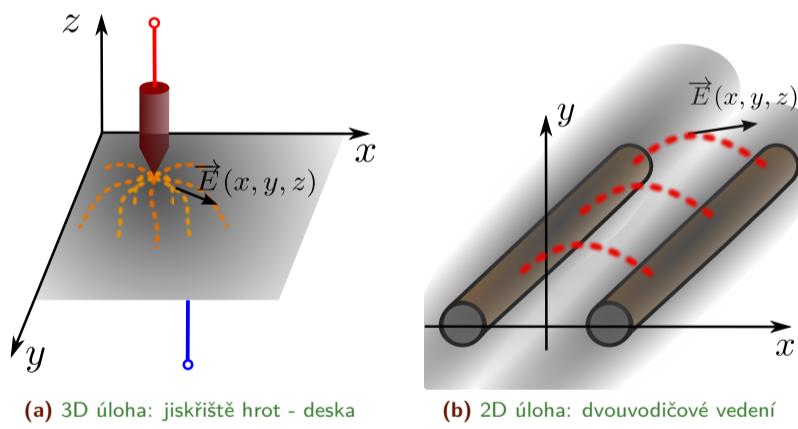
Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlosťí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled „teorie pole“ se tak vyhýbá pojmu „působení na dálku“ a nahrazuje jej pojmem „působení nepřetržitým kontaktem“. Tento „kontakt“ je způsoben tlakem nebo „polem“ indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetizmu byla první teorií pole. Na závěr uvedeme definici pojmu „pole“, vystihující předchozí ideje

Definice 3.6.1. *Fyzikální pole* jsou vesměs zprostředkovateli vzájemného působení (interakcí) mezi hmotnými objekty. Např. elektromagnetické pole je specifická forma hmoty. Základní vlastnosti má společně s ostatními formami hmoty: je objektivní realitou existující nezávisle na našem vědomí, přísluší mu určitá energie, hmotnost a hybnost, přičemž pro tyto veličiny platí zákony zachování, má kvantovou strukturu (elementární částice elektromagnetického pole se nazývají fotony) a stejně jako ostatní elementární částice mohou projevovat též vlnový charakter. Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem elektromagnetických interakcí v makroskopickém i mikroskopickém měřítku a přitom však může existovat i mimo látkové objekty samostatně ve formě elektromagnetického vlnění.

3.7. Elektromagnetismus ve vědě a technice

[Feynman02] Tuto kapitolu zakončíme poukázáním na to, že mezi mnohými jevy, které zkoumali Řekové, byly dva velmi neobvyklé. Když třete kousek jantaru, můžete jím zvednout malé kousky papyru. Dále to byl podivný kámen z okolí města Magnesia v Malé Asii, který přitahoval železo. Je těžké si představit, že toto byly jediné dva Řekům známé úkazy, v nichž se projevují elektrické a magnetické účinky. Důvod, že to opravdu byly jediné dva úkazy, které byly tehdy známy, spočívá především ve



Obrázek 3.10.: Příklad trojdimenzionálního a), dojdimenzionálního b) a jednodimenzionálního c), d) pole

fantastické přesnosti vyrovnání nábojů, o níž jsme se zmínili dříve. Práce vědců, kteří přišli po Řecích a kteří objevovali jeden nový jev za druhým, byly vlastně jen různými aspekty těchto vlastností jantaru a magnetovce. Dnes si uvědomujeme, že i jevy chemické interakce a konec končů i samotného života je třeba objasňovat pomocí elektromagnetismu.

Současně s tím, jak se vyvíjelo chápání elektromagnetismu, se objevily také technické možnosti, o nichž se lidem dříve nesnilo. Stalo se možným posílat zprávy telegrafem na velké vzdálenosti, mluvit s člověkem, který je na kilometry vzdálený, bez jakýchkoliv spojů v meziprostoru. Vznikly obrovské energetické soustavy. Velká vodní turbína spojená stovkami kilometrů drátů se vzdáleným elektromotorem udržuje jeho otáčky ve svém rytmu, tisíce a tisíce vodičů se rozvětvují, desítky tisíc motorů na desetitisících místech pohání stroje v průmyslu i domácnostech, to vše se otáčí a funguje díky poznání zákonů elektromagnetismu.

Dnes prakticky využíváme i nejjemnější efekty. Elektrické síly, jakkoliv mohutné, mohou být i velmi slabé a můžeme je řídit a mnoha způsoby využívat. Naše přístroje jsou tak citlivé, že to, co člověk dělá, můžeme rozpoznat podle toho, jak ovlivňuje elektrony v tenké kovové tyči vzdálené stovky kilometrů od něj. Jediné co potřebujeme, je použít tyč jako anténu televizního přijímače.

Z dlouhodobého pohledu historie lidstva, tak, jak se bude jevit, například, za deset tisíc let, lze sotva pochybovat, že Maxwellův objev zákonů elektrodynamiky bude hodnocen jako nejvýznamnější událost 19. století. V porovnání s touto důležitou vědeckou událostí upadne americká občanská válka z téhož desetiletí do provinční bezvýznamnosti.

4. Diferenciální počet vektorových polí

4.1. Chápání fyziky

Contents

4.1. Chápání fyziky	15
4.2. Vektorový počet	15
4.3. Skalární a vektorová pole	16
4.4. Derivace polí - gradient	16
4.5. Operátor ∇	18
4.6. Operace s ∇	18
4.7. Diferenciální rovnice proudění tepla	18
4.8. Druhé derivace vektorových polí	19
4.9. Nástrahy	20
4.10. Cvičení	20

[**Feynman02**] Fyzik potřebuje mít schopnost zkoumat problémy z několika hledisek. Exaktní analýza reálných fyzikálních problémů je obvykle velmi složitá. Jakákoliv konkrétní fyzikální situace se může ukázat příliš spletitou na to, aby bylo možné ji analyzovat přímo řešením diferenciální rovnice. Přesto lze získat velmi dobrou představu o chování systému, má-li fyzik určitou schopnost vycítit charakter řešení v různých situacích. Přitom jsou velice prospěšné takové představy jako siločáry, kapacita, odpor a indukce. Proto strávíme mnoho času při jejich analýze. Tím získáme cit pro to, co se v různých situacích děje. Na straně druhé ani jeden z heuristických modelů, takových, jako jsou siločáry, není adekvátní skutečnosti a přesný ve všech situacích. Existuje pouze jediný způsob formulace zákonů, a to pomocí diferenciálních rovnic. Předností rovnic je jejich fundamentálnost, a pokud je nám známo, i přesnost. Jestliže jste se naučili diferenciální rovnice, vždy se k nim můžete vrátit. Neexistuje přitom nic, co by bylo třeba se odnaučit.

Pochopit, co se v různých situacích děje, nám zabere určitý čas. Budeme muset řešit rovnice. Pokaždé, když řešíme rovnice, se něco dozvídáme o charakteru řešení. Aby jsme si tato řešení zapamatovali, bude také užitečné zkoumat, co znamenají hlediska siločář a dalších pojmu. To je cesta, kterou rovnicím opravdu „porozumíme“. V tom je rozdíl mezi matematikou a fyzikou. Matematici, anebo lidé s vyuvinutým matematickým myšlením, často při „studiu“ fyziky sejdou s cestou, protože fyziku ztrácejí ze zřetele. Říkají: „Podívejte se, tyto diferenciální rovnice - Maxwellovy rovnice - představují vše, co se v elektrodynamice vyskytuje; samotný fyzikové přiznávají, že není nic, co by nebylo obsaženo v těchto rovnicích. Jsou to složité rovnice, ale jde konec konců jen o matematické rovnice, a když jim porozumí matematicky, budu chápát i jejich fyziku.“ Tak tomu však není. Matematici, kteří studují fyziku s tímto přístupem, a takoví jsou mnozí z nich, obvykle přispívají fyzice málo a opravdu málo i matematice. Selžou, protože skutečné fyzikální situace v reálném světě jsou tak složité, že je nevyhnutelné je chápát v mnohem širším kontextu.

Co opravdu znamená pochopit rovnici, tj. více než ve striktně matematickém smyslu, vyjádřil Dirac. Řekl: „Rozumím tomu, co rovnice znamená, umím-li určit vlastnosti jejího řešení, aniž bych ji ve skutečnosti řešil.“ Ovládáme-li tedy způsob, jak se dovědět, co se děje v daných situacích, aniž bychom rovnice skutečně řešili, „chápeme“ rovnice v aplikaci na tyto situace. Fyzikální chápání je naprostě nematematičké, nepřesné a neexaktní, ale pro fyzika naprostě nevyhnutelné.

Kurz, jako je tento, bývá obvykle založen na postupném budování fyzikálních představ - začíná jednoduchými situacemi a pokračuje situacemi stále složitějšími. Vyžaduje to, abyste neustále zapomínali věci, které jste se naučili dříve - věci, jež platí v určitých situacích, ale neplatí obecně. Například „zákon“, že elektrická síla se mění s druhou mocninou vzdálenosti, neplatí vždy. My dáváme přednost opačnému postupu. Raději napřed probereme úplné zákony a pak budeme postupovat zpět a aplikovat je na jednotlivé situace, se souběžným rozvíjením fyzikálních představ. A to je to, co se chystáme dělat nyní.

Náš přístup je úplným opakem historického přístupu, při němž se předmět podává na základě experimentů, které o něm poskytly informaci. Předmět fyziky však budovalo velmi mnoho bystrých lidí během uplynulých více než 200 let, a protože my máme na nabytí informací jen omezenou dobu, není v našich silách probrat vše, co udělali oni. Bohužel, jedno z toho, co přitom bude zřejmě chybět v těchto přednáškách, je historický, experimentální postup. Je naděje, že je možné nahradit tento nedostatek v určité míře laboratorními cvičeními. Vše, co musíme pustit ze zřetele, si můžete také doplnit čtením encyklopedií, v nichž se občas vyskytují historické články o elektřině a o jiných oblastech fyziky. Historickou informaci najdete také v mnoha učebnicích elektřiny a magnetismu.

4.2. Vektorový počet

[**Feynman02**] Nyní začneme s abstraktním, matematickým pohledem na teorii elektřiny a magnetismu. Základní myšlenkou je vysvětlit význam zákonů formulovaných v kapitole 3. Ale abychom to udělali, musíme nejdříve vysvětlit novou a zvláštní symboliku, kterou chceme použít. Takže na chvíli zapomeňme na elektromagnetismus a věnujme se matematice vektorových polí. Je velmi důležitá nejen pro elektromagnetismus, ale pro všechny druhy fyzikálních situací. Diferenciální počet vektorů je pro všechna odvětví fyziky stejně důležitý jako obyčejný diferenciální a integrální počet. Tak se do toho pustme.

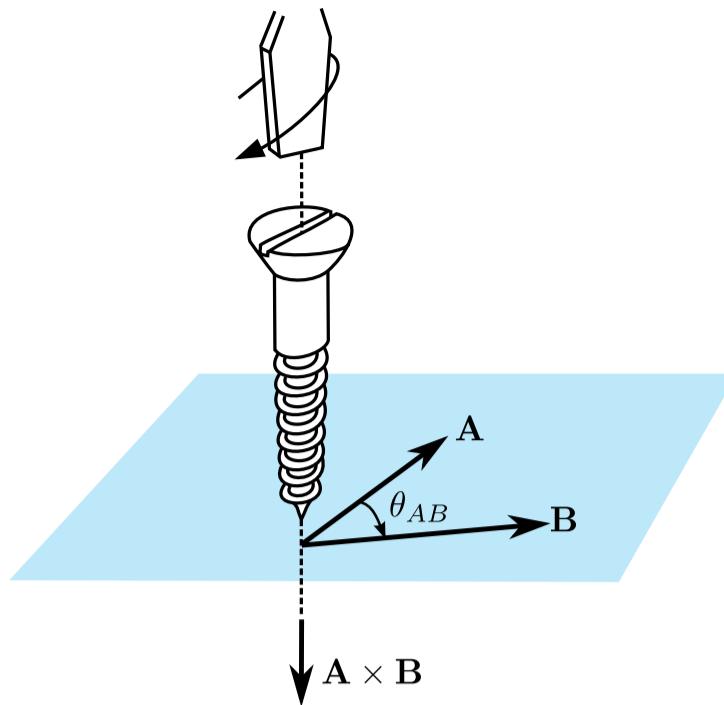
Dále uvádíme několik faktů z vektorové algebry, přičemž předpokládáme, že je již znáte: V pravoúhlém kartézském systému je každý bod prostoru určen polohovým vektorem \vec{r} , který má složky x, y, z , což budeme zapisovat takto:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (4.1)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z . Velikost vektoru \vec{r} určíme ze vztahu

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.2)$$

Pro osvězení pár faktů z vektorové algebry pro vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ uvádíme následující vztahy: Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

Obrázek 4.1.: Určení směru vektora $\vec{A} \times \vec{B}$ pomocí pravotočivého šroubu

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \dots \text{skalár} \quad (4.3)$$

$\vec{A} \times \vec{B} \dots \text{vektor}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (4.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (4.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (4.6)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.7)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (4.8)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (4.9)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (4.10)$$

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (4.12)$$

Rovnost (4.11) platí samozřejmě pouze v limitě, když $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se blíží nule.

Vektorový součin vektorů \vec{A} a \vec{B} je definován jako vektor kolmý k vektorům \vec{A} a \vec{B} s velikostí rovnou ploše kosoúhelníku, který oba vektory definují:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |A| |B| \sin \theta \quad (4.13)$$

kde θ je úhel svíraný vektory \vec{A} a \vec{B} ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) a \vec{n} je jednotkový vektor kolmý k nim. Takové jednotkové vektory však existují dva; volba závisí na tom, že-li souřadný systém definován jako pravotočivý nebo levotočivý. V pravotočivém souřadném systému lze použít pravidlo jako na obr. 4.1.

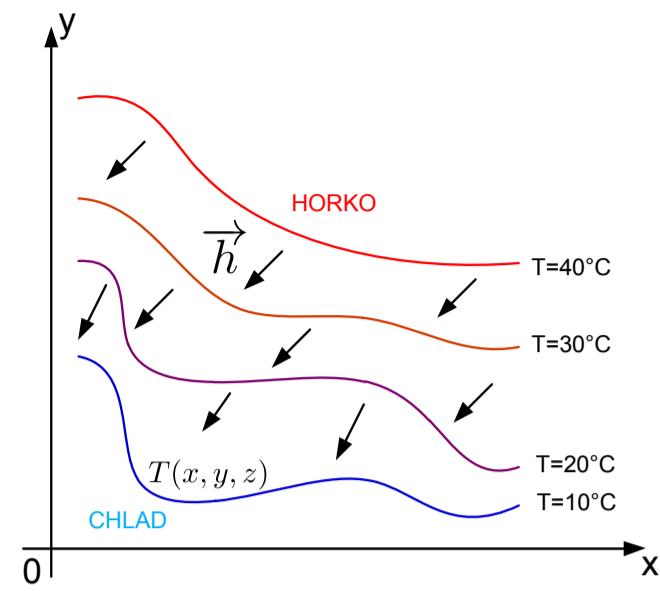
4.3. Skalární a vektorová pole

[Feynman02] Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty veličiny. Řečeno jinými slovy, polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru.

Nejjednodušší možné fyzikální pole je **skalární pole**. Skalárním polem chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit.

Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá určité představy myšlených ploch, proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě **teplotního pole** se tyto plochy nazývají **izotermickými hladinami** nebo **izotermami**. Obrázek 4.2 zobrazuje teplotní pole a ukazuje závislost T na x a y při $z = 0$. Je nakresleno několik izoterm.

U **vektorových polí** je v každém bodě prostoru dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlosť látky, tvořící těleso je v každém bodě vektor, který je funkci polohy. V druhém případě uvažujeme proudění tepla z teplejších míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. **Hustota tepelného toku** je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji \vec{h} . Její velikost je mírou proudícího tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 4.2. Definujeme \vec{h} přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde

Obrázek 4.2.: Teplota je příkladem skalárního pole. Každému bodu (x, y, z) v prostoru je přiřazeno číslo $T(x, y, z)$. Všechny body na ploše označené $T = 20^\circ C$ (zobrazené jako křivka při $z = 0$) mají stejnou teplotu. Sípky jsou ukázkami hustoty tepelného toku \vec{h} .

infinitezimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 4.4a). Vyjádříme to v symbolech: je-li ΔP tepelná energie, která projde za jednotku času

$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t \quad \vec{e}_t \dots \text{jednotkový vektor ve směru toku} \quad (4.14)$$

Vektor \vec{h} je možno definovat i jiným způsobem - pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obrázek 4.4b znázorňuje plošku ΔS_2 skloněnou pod úhlem ϑ k ploše ΔS_1 kolmé na tok. Jednotkový vektor \vec{n} je kolmý na plošku ΔS_2 . Vektory \vec{n} a \vec{h} svírají úhel ϑ (neboť \vec{h} je kolmý ΔS_1). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou ΔS_2 ? Tok ploškou ΔS_2 je stejný jako ploškou ΔS_1 , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to $\Delta S_1 = S_1 \cos(\vartheta)$. Hustota toku ploškou ΔS_2 je

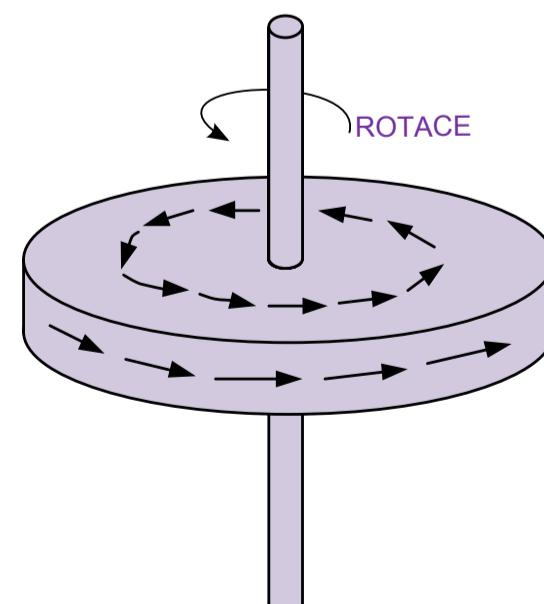
$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (4.15)$$

Tuto rovnici interpretuje tak, že hustotu tepelného toku \vec{h} (teplo prošlé za jednotku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je \vec{n} , udává výraz $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku ΔS_2 je $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za definice \vec{h} . Stejně představy můžeme použít i pro jiná vektorová pole.

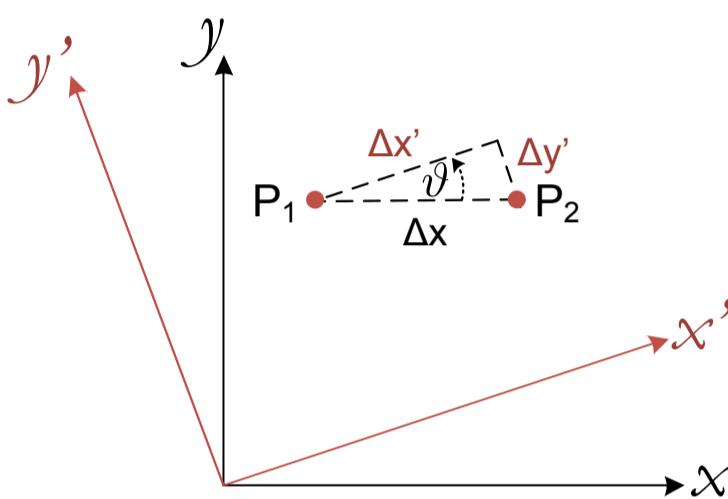
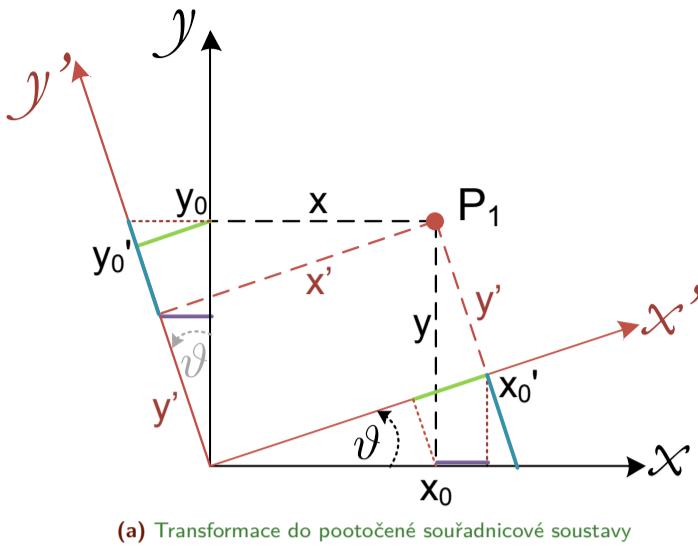
4.4. Derivace polí - gradient

[Feynman02] Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle x ? Nebo podle y , nebo z ?

Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry, nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například $\frac{\partial T}{\partial x}$? Je to skalár nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu



Obrázek 4.3.: Rychlosť v rotujúcim tělese je příkladem vektorového pole.



Obrázek 4.6.: Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy.
Dokažme to!

4.5. Operátor ∇

[**Feynman02**] Důkaz, že $\text{grad } T$ nebo ∇T je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejné i tehdy, kdyby se T zaměnilo za jakékoli jiné skalární pole. Transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom T vynechat a nahradit rovnici (4.25) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (4.26)$$

Ponecháme přitom operátory "hladové po derivování".

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme jej nazvat složkami **vektorového operátoru**. Můžeme psát

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.27)$$

což samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.28)$$

Gradient jsme abstrahovali od T .

Musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od ∇ . $T\nabla$ je stále operátorem, zatímco ∇T už není "hladovým" operátorem, neboť se nasylí. Je to opravdový fyzikální vektor, představující rychlosť změny T v prostoru. Víme, že rychlosť změny T v nějakém směru udává složka vektoru ∇T v tomto směru (viz vztah 4.20). Z toho vyplývá, že ∇T směřuje tam, kde má největší možnou složku - jinými slovy, směrem, v němž se T mění nejrychleji. **Gradient T má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny T .**

4.6. Operace s ∇

[**Feynman02**] Je možné s vektorovým operátorem ∇ provádět nějaké jiné algebrické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vyjádřením skalárního součinu. Mohly bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}) \quad (4.29)$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. $((\vec{A} \cdot \vec{B})$ je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru ∇ s vektorovým polem, které známe, např. \vec{h} . Vypíšeme-li ho ve složkách

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x \cdot h_x + \nabla_y \cdot h_y + \nabla_z \cdot h_z \quad (4.30)$$

nebo

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (4.31)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali bychom²

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \quad (4.32)$$

což je totéž číslo, které bychom dostali z (rov. 4.31), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h} \quad (4.33)$$

pro každý bod prostoru. Tedy $\nabla \cdot \vec{h}$ je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíte si uvědomit, že kombinace derivací $\nabla \cdot \vec{h}$ je dost specifická. Existují rozmanité kombinace, např. $\frac{\partial h_y}{\partial x}$, které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina $\nabla \cdot (\text{vektor})$ je ve fyzice neobyčejně užitečná. Byla nazvána **divergencí** (div \vec{h}). Například

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{divergence } \vec{h}. \quad (4.34)$$

Podobně jako v případě ∇T můžeme najít fyzikální význam i pro $\nabla \times \vec{h}$. Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru ∇ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (4.35)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz rov. 4.6).

$$(\nabla \times \vec{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (4.36)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (4.37)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (4.38)$$

Kombinace $\nabla \times \vec{h}$ se nazývá **rotace** \vec{h} (rot \vec{h}). O přičinění tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor ∇ :

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{vektor}$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{skalár}$$

$$\nabla \times \vec{h} = \text{rot } \vec{h} = \text{vektor}$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislé na nějaké souřadnicové soustavě.

Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru ∇ napišeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetismu - Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

kde ρ (ró) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu, \vec{j} je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

4.7. Diferenciální rovnice proudění tepla

[**Feynman02**] Uvedeme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Vezmeme-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahřejeme na teplotu T_2 , zatímco protilehlou stranu ochladíme na odlišnou teplotu T_1 , materiálem bude proudit teplo ve směru od T_2 k T_1 (rov. 4.7).

²Na \vec{h} se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je \vec{h} "derivováno" podle x, y a z nebo podle x', y' a z' , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro \vec{h} jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme \vec{h} čárkou.

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu S stěn i rozdílu teplot $T_2 - T_1$ a nepřímo úměrný vzdálenosti d mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok). Nechť P je tepelná energie, která projde deskou za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda(T_2 - T_1) \frac{S}{d}, \quad (4.39)$$

Konstanta úměrnosti λ (lambda) se nazývá *součinitel teplotní vodivosti*.

Co se stane ve složitějším případě, řekněme v tělese nepravidelném tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 4.7a, ale v miniaturním měřítku. Nasměrujeme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami obr. 4.7b, takže pro destičku bude platit rov. 4.39.

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky ΔS , je tepelný tok

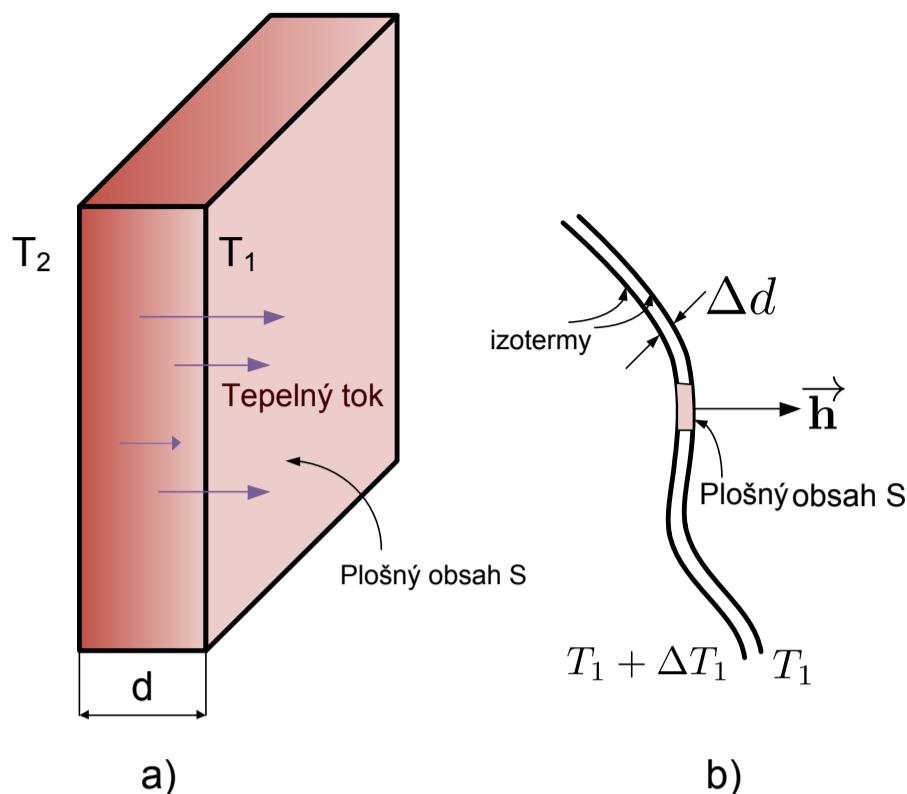
$$P = \lambda(\Delta T) \frac{\Delta S}{\Delta d} \quad (4.40)$$

kde Δd je tloušťka destičky. $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ jsme definovali jako velikost vektoru \vec{h} ležícího ve směru tepelného toku.

Teplo bude proudit od $T_1 + \Delta T_1$ k T_1 a tudíž kolmo na izotermy (obr. 4.7b). $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává dále právě rychlosť změny T při změně polohy. Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává maximální rychlosť změny T , a tedy velikost vektoru ∇T . Protože směr ∇T je opačný než směr³ \vec{h} rov. 4.40 zapsaná pomocí vektorů bude vypadat takto

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (4.41)$$

Rovnice 4.41 je diferenciální rovnicí vedení tepla v masivních tělesech. Jde o skutečnou vektorovou rovnici. Každá její strana je vektor, je-li λ jen číslo. Je zobecněním speciální rov. 4.40 pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Tato symbolika je užitečný nejen proto, že v ní rovnice vypadají jednodušeji, ale i proto, že nejjasněji ukazuje fyzikální obsah rovnic bez odvolání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.



Obrázek 4.7.: a) Tepelný tok deskou. b) Infinitezimální destička rovnoběžná s izotermickou hladinou ve velkém kuse látky

Podobná věta platí i v případě, že $\operatorname{div} \vec{A}$ je rovna nule. Rovnost (4.43) říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáme-li se s vektorovým polem \vec{D} , přičemž $\operatorname{div} \vec{D}$ je rovna nule, můžeme z toho usoudit, že \vec{D} je rotací nějakého vektorového pole \vec{C} .

Věta 4.8.2. Je-li $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, existuje \vec{C} takové, že $\vec{D} = \nabla \times \vec{C}$.

Při zkoumání možných kombinací dvou operátorů ∇ jsme zjistili, že dvě z nich dávají vždy nulu. Podívejme se nyní na ty, které nejsou nulové. Vezměme kombinaci $\nabla \cdot (\nabla T)$, která byla v našem záznamu napsaná jako první. Obecně nulu nedává. Vypíšeme složky:

- a) $\nabla \cdot (\nabla T)$
- b) $\nabla \times (\nabla T)$
- c) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h})$
- d) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$
- e) $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

Můžeme se přesvědčit, že to jsou všechny možné kombinace.

Podívejme se nejdříve na druhou z nich, tj. na b). Má stejný tvar jako $\vec{A} \times (\vec{A}T) = (\vec{A} \times \vec{A})T = 0$, neboť $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} T = \nabla \times \nabla T = 0. \quad (4.42)$$

Jak dochází k této rovnosti, můžeme vidět, když si výraz b) napíšeme ve složkách:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

což je nula podle rovnosti (4.12). Stejně je to pro další složky. $\nabla \times (\nabla T) = 0$ tedy platí pro jakékoli rozdelení teploty - dokonce pro *jakoukoliv* skalární funkci.

Vezměme si jiný příklad. Podívejme se, zda se podaří dostat i jiný výraz rovný nule. Skalární součin vektoru s vektorovým součinem obsahující tentýž vektor dává nulu

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

neboť $(\vec{A} \times \vec{B})$ je kolmé na \vec{A} a jeho složka ve směru \vec{A} je tedy nulová. Stejná kombinace se vyskytuje v rovnici d), a tak dostáváme

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{h}) = 0. \quad (4.43)$$

Snadno se opět ukáže, že je to 0, zapíši-li se naznačené operace ve složkách.

Nyní zformulujeme dvě matematické věty, které nebudeme dokazovat. Jsou to velice zajímavé věty a je pro fyziku užitečné je znát.

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, řekněme vektorového pole \vec{A} , je nula. Viděli jsme (rovnost 4.42), že rotace gradientu je rovna nule, což se vzhledem k vlastnostem vektorů dobře pamatuje. Bylo by tedy dobré možné, aby bylo \vec{A} gradientem nějaké veličiny; jeho rotace by pak byla nutně nulová. Platí zajímavá věta, podle které, je-li $\operatorname{rot} (\vec{A})$ rovna nule, je \vec{A} vždy gradientem něčeho, a tedy existuje určité skalární pole Ψ (psí) takové, že \vec{A} je rovno $\operatorname{grad} \Psi$. Jinými slovy platí následující věta

Věta 4.8.1. Je-li $\nabla \times \vec{A} = 0$, existuje ψ takové, že $\vec{A} = \nabla \psi$

³Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.

z čehož v obecném případě dostaneme nějaké číslo. Jde o skalární pole.

Vidíme, že není třeba ani dávat závorky a aniž bychom riskovali záměnu, můžeme psát $\nabla \cdot (\nabla T) = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T$. Na ∇^2 se díváme jako na nový operátor

- **Laplaceův operátor:**

$$\text{Laplaceův operátor} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.44)$$

Protože Laplaceův operátor je skalárním operátorem, můžeme jím působit i na vektor - myslíme tím tutéž operaci na každou složku vektoru v pravoúhlé souřadnicové soustavě:

$$\nabla^2 \vec{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

Podívejme se na další možnost, kterou je rovnice e), tj. $\nabla \times \nabla \times \vec{h}$. Vzhledem k vektorové rovnosti (4.10) můžeme rotaci vyjádřit jinak. Při použití výše této rovnice musíme \vec{A} a \vec{B} nahradit operátorem ∇ a položit $\vec{C} = \vec{h}$.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \vec{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Okamžik! Něco je špatně. První dva členy jsou totiž vektory, jak to má být (operátory v nich jsou „nasycené“), ale poslední člen není v pořádku. Má stálé charakter operátoru. Chyba je v tom, že jsme nebyli dost pozorní při dodržování pořadí symbolů v zápisech našich členů. Když si znova všimnete rovnosti (4.10), zjistíme, že bychom ji mohli stejně dobře napsat ve tvaru:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Pořadí členů teď vypadá lip. Provedme naši substituci do této rovnice. Dostáváme

$$\nabla \times (\nabla \cdot \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h}$$

Tento tvar se zdá být v pořádku. Skutečně je správný, o tom se můžete přesvědčit výpočtem složek. Poslední člen je Laplaceův operátor a tak můžeme stejně dobře napsat

$$\nabla \times (\nabla \cdot \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{h}.$$

Již jsme se zmínili o všech kombinacích v našem seznamu výrazů v úvodu kapitoly 4.8 s dvojitým operátorem ∇ s výjimkou případu c), tj. $\nabla(\nabla \cdot \vec{h})$. To je přípustné

4. Diferenciální počet vektorových polí

vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm říci nedá. Jde pouze o určité vektorové pole, které se může příležitostně vyskytnout.

Bude vhodné, když naše závěry shrneme:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla^2 T && \dots \text{skalární pole} \\ \nabla \times (\nabla T) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) &= && \dots \text{vektorové pole} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} \\ (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{h} &= \nabla^2 \vec{h} && \dots \text{vektorové pole}\end{aligned}$$

Všimněme si, že jsme se nepokusili zavést nový operátor $\nabla \times \nabla$. Víme proč?

4.9. Nástrahy

[Feynman02] Naši znalost obvyklé vektorové algebry jsme aplikovali na algebru operátoru ∇ . Musíme přitom však být opatrní, neboť se můžeme dostat na scestí. Zmíníme se o dvou nástrahách. V tomto kursu se však nevyskytnou. Co byste řekli následujícímu výrazu, který obsahuje dvě skalární funkce ψ a φ (fí):

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi)?$$

Asi byste chtěli prohlásit: musí to být nula, protože je to stejně jako

$$(\vec{A}a) \times (\vec{B}b),$$

což je rovno nule, neboť vektorový součin dvou stejných vektorů $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy nula. Ale v našem případě dva operátory ∇ nejsou stejné. První působí na jednu funkci, a to ψ , zatímco druhý působí na jinou funkci, tj. φ . Proto ačkoliv je označujeme tímtož symbolem ∇ , je třeba o nich uvažovat jako o odlišných operátorech. Je to pochopitelné, vždyť směr $\nabla \psi$ závisí na funkci ψ , a proto asi nebude rovnoběžný s $\nabla \varphi$.

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi) \neq 0 \text{ (obecně).}$$

My, naštěstí, nebudeme muset takové výrazy použít. (Co jsme právě řekli, nemění nic na faktu, že $\nabla \times \nabla(\psi) = 0$ pro jakékoli skalární pole, neboť zde působí oba operátory ∇ na stejnou funkci.)

Nástraha číslo dvě (které se opět v kurzu vyhneme) spočívá v tomto: Pravidla, která jsme tu uvedli, jsou jednoduchá a pěkná, když se použijí pravoúhlé souřadnice. Máme-li například $\nabla^2 \vec{h}$ a potřebujeme složku x , hned příšeme

$$(\nabla^2 \vec{h})_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Stejný výraz se však nedá napsat, kdybychom se ptali na radiální složku $\nabla^2 \vec{h}$. Radiální složka $\nabla^2 \vec{h}$ není rovna výrazu $(\nabla^2 \vec{h})_r$. Příčina je v tom, že máme-li co dělat s vektorovou algebrou, jsou směry všech vektorů plně určeny. Ale pokud jde o vektorová pole, jsou jejich směry v různých místech různé. Pokusíme-li se popsat vektorové pole, řekneme v polárních souřadnicích, to, co nazýváme radiálním směrem, se od bodu k bodu mění. Proto se můžeme dostat do velkých těžkostí, když začneme derivovat složky. Například i pro konstantní vektorové pole se radiální složka bod od bodu mění.

Obvykle je nejbezpečnější a nejjednodušší držet se pravoúhlých souřadnic a vynout se těžkostem. Je tu však jedna výjimka, která stojí za zmínu: Protože Laplaceův operátor ∇^2 je skalár, můžeme jej psát v souřadnicové soustavě jaké jen chceme (např. v polárních souřadnicích). Ale protože je to diferenciální operátor, smíme jej použít pouze na vektory, jejichž složky mají pevný směr, tj. na složky dané v pravoúhlé souřadnicové soustavě. Proto budeme-li naše vektorové diferenciální rovnice sít ve složkách, budeme všechna vektorová pole vyjadřovat pomocí jejich x-ových, y-ových a z-ových složek.

4.10. Cvičení

Příklad 4.10.1. Jestliže platí, že $\text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{B}$, plyne z toho že $\vec{A} = \vec{B}$?

Řešení:

Nikoliv. Mějme následující funkci $\vec{A} = \vec{B} + \text{grad } \Psi$, kde $\Psi(\vec{r})$ je libovolná skalární funkce (tedy $\vec{A} \neq \vec{B}$), pak platí

$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{B} + \text{rot grad } \Psi = \text{rot } \vec{B}$$

(rotace gradientu je pro spojité funkce vždy nulová, viz 4.42 kapitola 4.8)

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488.
- [Pol98] J. Polák. *Matematická analýza I*. ZČU - FAV, 1998. ISBN: 80-7082-466-2.

5. Integrální počet vektorových polí

Contents

5.1. Vektorové integrály, křivkový integrál $\nabla\Psi$	21
5.2. Tok vektorového pole	22
5.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta	22
5.3.1. Tepelná vodivost, rovnice difúze	23
5.4. Cirkulace vektorového pole	24
5.5. Cirkulace po obvodu čtverce. Stokesova věta	25
5.6. Pole s nulovou rotací a divergencí	25
5.7. Shrnutí	26
5.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury	26

5.1. Vektorové integrály, křivkový integrál

$$\nabla\Psi$$

V kapitole 4 jsme viděli, že existují různé způsoby derivování polí. Některé vedou k vektorovým polím, jiné dávají pole skalární. Ačkoliv jsme odvodili mnoho různých vzorců, vše, co je v kapitole 4, lze shrnout do jediného pravidla: operátory $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$ představují tři složky vektorového operátoru ∇ . Rádi bychom nyní trochu vnikli do významu derivací polí. Potom získáme lepší cit pro to, co znamená vektorová rovnice pole.

Již jsme se zmínili o významu operace gradient (∇ působí na skalár). Teď se budeme zajímat o význam operací divergence a rotace. Interpretovat tyto veličiny je možné nejlépe pomocí určitých vektorových integrálů a rovnic, které uvádějí tyto integrály do souvislosti. Bohužel, tyto rovnice nelze získat z vektorové algebry nějakou snadnou substitucí. Proto se je budete muset učit jako něco nového. Jeden z těchto integrálních vztahů je prakticky triviální, ale další dva nejsou. Odvodíme je a objasníme, co z nich vyplývá. Rovnice, které budeme studovat, představují vlastně matematické věty. Užitečné budou nejen při interpretování významu a obsahu divergence a rotace, ale i při vypracování obecných fyzikálních teorií. Tyto matematické věty jsou pro teorii polí tím, čím je zákon zachování energie pro mechaniku částic. Takové obecné věty, jako jsou tyto, jsou důležité pro hlubší porozumění fyziky. Uvidíme však, že při řešení úloh z nich mnoho užitku není (s výjimkou nejjednodušších případů). I tak je potěšující, že na začátku našeho výkladu se setkáme s mnoha jednoduchými úlohami, řešitelnými pomocí těchto tří integrálních vzorců, které budeme nyní probírat. Uvidíme však, že sotva se úlohy stanou těžšími, nebude moci tyto jednoduché metody použít.

Nejdříve si vezměme integrální vzorec s gradientem. Obsahuje velmi jednoduchou myšlenku: Protože gradient představuje rychlosť změny veličiny mající charakter pole, integrujeme-li tuto rychlosť změny, dostaneme celkovou změnu. Předpokládejme, že máme skalární pole $\Psi(x, y, z)$. Funkce Ψ bude mít v nějakých dvou bodech (1) a (2) hodnoty $\Psi(1)$, resp. $\Psi(2)$ (Používáme pohodlnou symboliku, ve které (2) představuje bod x_2, y_2, z_2 a $\Psi(2)$ znamená totéž jako $\Psi(x_2, y_2, z_2)$.) Je-li Γ (gamma) nějaká křivka spojující body (1) a (2) (obr. 5.1), platí následující

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\Psi) \cdot d\vec{s} \quad (5.1)$$

Jde o křivkový integrál z (1) do (2) skalárního součinu $\nabla\Psi$ (vektor) a $d\vec{s}$ (jiný vektor — infinitezimální element křivky Γ , orientovaný ve směru postupu z (1) do (2) po křivce Γ).

Nejdříve bychom měli vysvětlit, co rozumíme křivkovým integrálem. Uvažujme skalární funkci (x, y, z) a křivku Γ spojující dva body (1) a (2). Vyznačme na křivce nějaký počet bodů a sousední body spojujeme tak, jak ukazuje obr. 5.2. Délku jednotlivých úseček označme Δs_i kde i je index, který nabývá hodnot 1, 2, 3, ...

Křivkovým integrálem $\int_{(1)}^{(2)} f ds$ rozumíme limitu součtu $\sum_i f_i \Delta s_i$, kde f_i je hodnota funkce pro i -tou úsečku. Limitní hodnota je to, čemu se součet blíží, přidáváme-li a víc úseček (takovým způsobem, aby největší $\Delta s_i \rightarrow 0$).

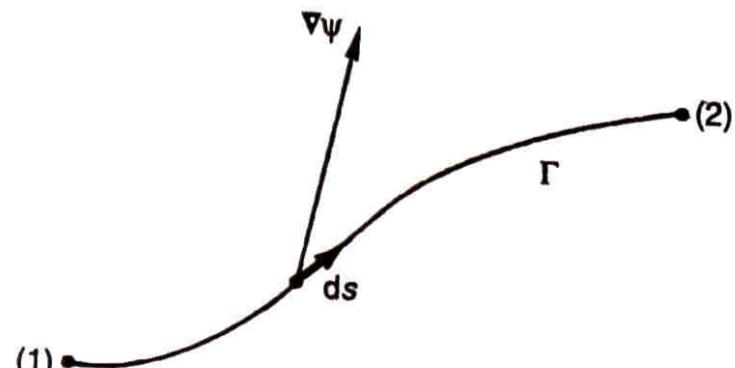
Integrál v naší větě (vztah 5.1) znamená totéž, ačkoliv vypadá trochu jinak. Namísto f máme jiný skalár - složku $\Delta\Psi$ ve směru $\Delta\vec{s}$. Označíme-li tuto tangenciální složku $(\Delta\Psi)_t$, je jasné, že

$$(\Delta\Psi)_t = (\Delta\Psi) \cdot \Delta\vec{s} \quad (5.2)$$

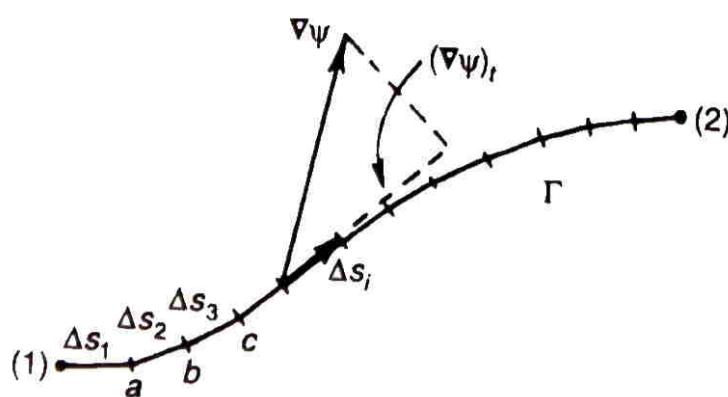
Integrál v (5.2) představuje sumu takovýchto členů.

Nyní se podívejme na to, proč rovnost (5.2) platí. V kapitole 3 je ukázáno, že složka $\Delta\Psi$ ve směru malého posunutí $\Delta\vec{r}$ udává rychlosť změny Ψ v tomto směru $\Delta\vec{r}$. Uvažujme o úsečce $\Delta\vec{s}$ z bodu (1) do bodu a na obr. 5.2. Podle naší definice

$$\Delta\Psi = \Psi(a) - \Psi(1) = (\Delta\Psi)_1 \cdot \vec{s}_1. \quad (5.3)$$



Obrázek 5.1.: Význam veličin vystupujících v rovnosti 5.1. Vektor $\nabla\Psi$ se vztahuje k elementu $d\vec{s}$.



Obrázek 5.2.: Křivkový integrál je limitou součtu.

Takže

$$\Psi(b) - \Psi(a) = (\Delta\Psi)_2 \cdot \vec{s}_2, \quad (5.4)$$

kde $(\Delta\Psi)_1$, znamená, samozřejmě, gradient počítaný na úsečce Δs_1 a $(\Delta\Psi)_2$ gradient počítaný na úsečce Δs_2 . Výpočtem rovností (5.3) a (5.4) dostaneme

$$\Psi(b) - \Psi(1) = (\Delta\Psi)_1 \cdot \vec{s}_1 + (\Delta\Psi)_2 \cdot \vec{s}_2 \quad (5.5)$$

Můžeme se přesvědčit, že postupným přidáváním takovýchto členů dostaneme

$$\Psi(b) - \Psi(a) = \sum_i (\Delta\Psi)_i \Delta s_i \quad (5.6)$$

Levá strana nezávisí na tom, jak volíme naše intervaly (zůstávají-li body (1) a (2) stejně) takže můžeme vzít limitu druhé strany. Tím jsme dokázali rovnost (5.1). Z našeho důkazu můžete vidět, že tato rovnost nezávisí ani na tom, jak zvolíme body a, b, c..., ani na volbě křivky Γ spojující (1) a (2). Naše věta platí pro jakoukoliv křivku vedenou z (1) do (2).

Ještě jedna poznámka o označování: Uvidíme, že nevznikne žádný zmatek, budeme-li pro pohodlí psát

$$(\Delta\Psi) \cdot d\vec{s} = \Delta\Psi \cdot d\vec{s} \quad (5.7)$$

V tomto označení má naše věta tento tvar:

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\Psi \cdot d\vec{s} \quad (5.8)$$

jakákoli křivka od (1) do (2)

5.2. Tok vektorového pole

Definovali jsme vektor \vec{h} jako teplo procházející jednotkovou plochou za jednotkový čas. Předpokládejme, že uvnitř tělesa vyplněného látkou máme nějakou uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Chtěli bychom zjistit, kolik tepla vytéká z tohoto objemu.

Označme plošný obsah elementu plochy S jako dS . Tento symbol nahrazuje dvojrozměrný diferenciál

$$ds = dx dy. \quad (5.9)$$

Tok tepla elementární ploškou dS je roven jejímu plošnému obsahu vynásobenému složkou \vec{h} kolmou na dS . Už jsme definovali \vec{n} jako jednotkový vektor směřující pod pravým úhlem ven z plochy (obr. 5.3). Složka \vec{h} , kterou potřebujeme, je

$$h_n = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (5.10)$$

Tok ploškou dS pak je

$$\vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (5.11)$$

Celkový tepelný tok jakoukoliv plochou dostaneme, sečteme-li příspěvky všech elementárních plošek vytvářející plochu S . Jinými slovy, integrujeme-li 5.11 přes celou plochu: Celkový tepelný tok plochou S se rovná

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS \quad (5.12)$$

Tento plošný integrál¹ budeme také nazývat *tokem plochou*. Můžeme to chápout tak, že \vec{h} je hustota proudu tepelného toku a plošný integrál z ní je celkový proud tepla směřující ven z plochy za jednotku času (v joulech za sekundu).

Rádi bychom tuto ideu zobecnili na případ, kdy vektor nepředstavuje tok něčeho konkrétního, mohlo by jít například o elektrické pole. Kdybychom chtěli, jistě bychom mohli integrovat normálovou složku elektrického pole plochou. Ačkoliv tu nejde o tok něčeho, nazýváme tuto veličinu tokem. Říkáme tok vektoru \vec{E} plochou S se rovná $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$. Slovo tok zde používáme v obecném významu jako, *plošný integrál normálové složky vektoru*.

Vráťme se k případu tepelného toku a uvažujme situaci, v níž se teplo zachovává. Například si představíme nějakou látku, ve které se po počátečním ohřevu tepelná energie dále ani negeneruje, ani neabsorbuje. Existuje-li pak tok tepla uzavřenou plochou, musí tepelný obsah objemu vymezeného plochou klesat. Tedy v podmínkách, ve kterých se teplo zachovává, tvrdíme, že

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (5.13)$$

¹Malý kroužek na znaku integrálu znamená, že integrujeme přes uzavřenou plochu.

kde Q je teplo uvnitř plochy. Tok tepla plochou S je roven rychlosti změny celkového tepla Q uvnitř S za čas, vztáte se záporným znaménkem. Takováto interpretace je možná, neboť hovoříme o tepelném toku a kromě toho jsme udělali předpoklad, že teplo se zachovává. O celkovém teple uvnitř objemu bychom nemohli hovořit, kdyby se v tomto objemu teplo generovalo.

Nyní poukážeme na zajímavou vlastnost toku jakéhokoliv vektoru. Můžeme mít na mysli stále vektor tepelného toku, ale vše bude platit i pro jakékoliv vektorové pole \vec{C} . Představme si, že máme uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Rozdělme nyní objem V jakýmsi řezem na dvě části (obr. 5.4). Dostaneme tím dvě uzavřené plochy a dva objemy. Objem V_1 ohraničuje plocha S_1 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_a a plochy řezu S_{ab} . Objem V_2 ohraničuje plocha S_2 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_b doplněné řezem S_{ab} . Položme si nyní otázku: Předpokládejme, že vypočítáme tok z plochy S_1 a přičteme ho k toku z plochy S_2 . Je roven tento součet toku z celé plochy S , s níž jsme původně začínaly? Odpověď zní ano. Tok z částí ploch S_{ab} , společnou oběma plochám S_1 a S_2 se přesně vyruší. Pro tok vektoru \vec{C} z objemu V_1 můžeme psát:

- tok plochou S_1 je roven:

$$\int_{S_a} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS \quad (5.14)$$

- tok plochou S_2 je roven:

$$\int_{S_b} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (5.15)$$

Všimněme si, že v druhém integrálu jsme psali \vec{n}_1 , pro vnější normálu k S_{ab} , patří-li tato k S_1 a \vec{n}_2 patří-li k S_2 , jak ukazuje obr. 5.4. Zřejmě $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ takže

$$\int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (5.16)$$

Sečteme-li rovnosti 5.14 a 5.15 přesvědčíme se, že součet toku přes S_1 a S_2 je dán součtem dvou integrálů, které spolu dávají tok původní plochy $S = S_a + S_b$.

Vidíme, že o toku úplnou vnější plochou S je možné uvažovat jako o součtu toků dvou částí, na které se objem V rozdělil. *Takto pro jakýkoliv způsob dělení původního objemu musí obecně platí, že tok vnější plochou, daný původním integrálem, je roven součtu toků ze všech jeho malých vnitřních částí.*

5.3. Tok povrchem krychle. Gaussova věta

Uvažujme krychli jejíž hrany mají směr souřadnicových os tak, jako na obr. 5.5. Předpokládejme, že souřadnice jednoho z vrcholu krychle je totožný se začátkem souřadnicové soustavy x, y, z . Nechť Δx je délka hrany krychle ve směru osy x , Δy je délka hrany ve směru osy y a Δz délka hrany ve směru osy z . Chceme najít tok vektorového pole \vec{C} povrchem krychle. Dostaneme jej sečtením toků každou ze šesti stěn. Nejdříve uvažujeme stěnu na obrázku 5.5 označenou jako 1. Tok směřující touto stěnou ven z krychle je dán integrálem záporně vzáte x-ové složky \vec{C} plochou stěny: Protože máme malou krychli můžeme tento integrál approximovat hodnotou x ve středu stěny (označíme jej jako bod 1) vynásobenou plošným obsahem stěny, tj. $\Delta y \Delta z$:

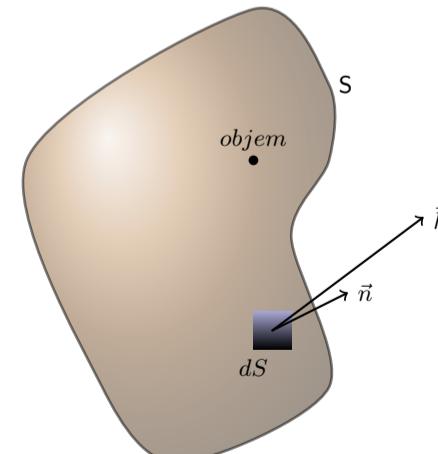
$$\text{tok z 1} = -C_x \Delta y \Delta z \quad (5.17)$$

Podobně napíšeme tok stěnu 2:

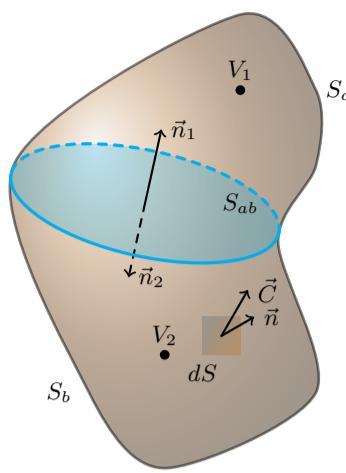
$$\text{tok z 2} = C_x \Delta y \Delta z \quad (5.18)$$

Obecně se $C_x(1)$ a $C_x(2)$ trochu liší. Je-li dostatečně malé, můžeme psát

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x. \quad (5.19)$$



Obrázek 5.3.: Uzavřená plocha S vymezuje objem V . Jednotkový vektor \vec{n} udává vnější normálu k plošnému elementu dS a \vec{h} je vektor hustoty tepelného toku pro uvažovaný plošný element.



Obrázek 5.4.: Objem V uvnitř plochy S je řezem S_{ab} rozdělen na dvě části. Dostaváme tím objem V_1 vymezený plochou $S_a + S_{ab}$ a objem V_2 vymezený plochou $S_b + S_{ab}$.

Na pravé straně tohoto vztahu bychom ve skutečnosti měli uvést víc členů. Všechny však budou obsahovat vyšší mocniny Δx , a proto, uvažujeme-li limitní případ malého Δx , budou zanedbatelné. Takovým způsobem pro tok stěnou 2 vychází

$$\text{tok z 2} = \left(C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z. \quad (5.20)$$

Sečtením toků stěnami 1 a 2 dostaneme

$$\text{tok z 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.21)$$

Derivace by se měla počítat ve skutečnosti ve středu stěny 1, tj. v bodu $[x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}]$. Ale v limitním případě infinitesimální krychle uděláme pouze zanedbatelnou chybu, počítáme-li je ve vrcholu (x, y, z) .

Provedeme-li stejně úvahy pro každý z dvou párů stěn, dostaneme

$$\text{tok z 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{tok z 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Celkový tok všemi stěnami je součtem těchto členů. Dostaváme tedy

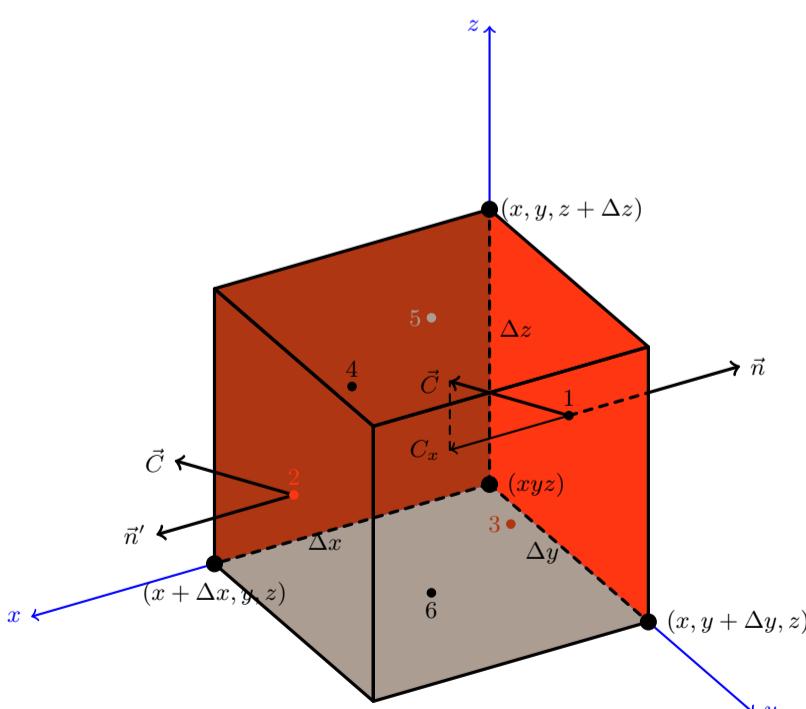
$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.22)$$

Součtem derivací je právě $\nabla \cdot \vec{C}$ a dále $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$, tj. objem krychle. Takovýmto způsobem můžeme pro infinitesimální krychli psát

$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V. \quad (5.23)$$

Ukázali jsme, že tok z povrchu infinitesimální krychle ven je roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. Nyní vidíme význam divergence vektoru. Divergence vektoru v bodě P je tok - vycházející „proud“ vektoru \vec{C} - připadající na jednotkový objem v okolí P .

Divergenci \vec{C} jsme uvedli do souvislosti s tokem \vec{C} z každého infinitesimálního objemu. V případě konečného objemu můžeme využít fakt, který jsme už dokázali, že celkový tok z objemu je součtem toků z každé jedné části. To znamená, že



Obrázek 5.5.: Výpočet toku pole \vec{C} z malé krychle

divergenci můžeme integrovat přes celý objem. Z toho vyplývá věta, že integrál normálové složky každého vektoru přes jakoukoliv uzavřenou plochu je možné zapsat jako integrál z divergence tohoto vektoru přes objem uzavřený touto plochou. Tato věta byla pojmenována po Gaussovi.

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad \dots \text{Gaussova věta} \quad (5.24)$$

kde S je jakákoli uzavřená plocha a V je objem jí vymezený.

5.3.1. Tepelná vodivost, rovnice difúze

Abychom se lépe seznámili s Gaussovou větou, uvedme nějaký případ jejího použití. Vezměme opět případ tepelného toku, například v kovu. Předpokládejme, že máme jednoduchou situaci, kdy všechno teplo bylo o přivedeno už dříve a těleso se nyní pouze ochlazuje. Žádné zdroje tepla už nejsou, takže teplo se zachovává. Kolik je potom tepla uvnitř určitého zvoleného objemu v libovolném čase? Množství tepla se musí zmenšovat, a to právě o množství, které vytéká z objemu jeho povrchem. Kdyby byl nás objem malou krychlí, pak podle vztahu 5.23 bychom napsali

$$\text{tok tepla} = \int_{\text{krychle}} \vec{h} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{h}) \Delta V. \quad (5.25)$$

Tato hodnota však musí být rovna rychlosti, kterou se teplo ztrácí z vnitřku krychle. Je-li q teplo připadající na jednotkový objem, $q \Delta V$ je teplo v krychli a rychlosť jeho úbytku je

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (5.26)$$

Z porovnání rov. 5.25 a 5.26 vidíme, že

$$\nabla \cdot \vec{h} = -\frac{dq}{dt}. \quad (5.27)$$

Podotkněme, že rovnice tohoto tvaru se ve fyzice vyskytuje velmi často. Vyjadřuje Zákon zachování, v tomto případě Zákon zachování tepla. Ve vztahu 5.13 jsme tentýž fyzikální jev vyjádřili jiným způsobem. Zde máme diferenciální tvar zákona zachování zatímco rovnost 5.13 představuje jeho integrální tvar.

Rovnici (5.27) jsme odvodili použitím vztahu (5.13) na infinitesimální krychli. Můžeme postupovat i obráceně. Pro velký objem V ohrazený plochou S vyplývá z Gaussovy věty

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{h} dV. \quad (5.28)$$

Dosadíme-li sem z (5.27), zjistíme, že integrál na pravé straně je právě $-\frac{dQ}{dt}$ a opět dostaneme vztah (5.13).

Nyní uvažujeme jiný případ. Představme si, že máme těleso vyplňené látkou s malou dutinou uvnitř. Necht v ní dochází k nějaké chemické reakci generující teplo. Nebo bychom si to mohli představit tak, že tam jsou nějaké vodiče vedoucí k miniaturnímu odporu, který je zahříván elektrickým proudem. Budeme předpokládat, že teplo se generuje prakticky v jednom bodě. Necht P označuje energii uvolněnou v tomto bodě za jednu sekundu. Dále budeme předpokládat, že ve zbytku objemu se teplo zachovává a že generování tepla probíhalo velmi dlouho, takže se teplota už nikde nemění. Otázka zní: Jak vypadá tepelný vektor \vec{h} na různých místech kovu? Jaká je hustota tepelného toku v každém bodě?

Víme, že integrujeme-li normálovou složku vektoru \vec{h} po uzavřené ploše, která obklopuje zdroj, vždy dostaneme P . Všechno teplo, které se generuje v bodovém zdroji, musí vyjít povrchem, neboť jsme předpokládali, že tok je stálý. Máme těžkou úlohu najít vektorové pole, které integrováno přes jakoukoliv plochu, dá vždy P . Toto pole však můžeme najít docela snadno, vezmeme-li speciálnější plochu. Vezmeme kulovou plochu s poloměrem R a se středem ve zdroji a budeme předpokládat, že proudění tepla je radiální (obr. 5.6). Intuice nám napovídá, že vektor \vec{h} by měl směřovat radiálně, jde-li o velké těleso a nejsme-li blízko stěn, a že ve všech bodech kulové plochy by měl mít stejnou velikost. Vidíte, že na to, abychom našli odpověď, přidáváme k naší matematice jisté množství dodahů - obyčejně nazývané „fyzikální intuice“.

Když je pole \vec{h} radiální a kulově symetrické, je integrál normálové složky vektoru \vec{h} kulovou plochou velmi jednoduchý, protože tehdy je normálová složka vektoru rovna velikosti vektoru \vec{h} a je konstantní. Obsah plochy, přes kterou integrujeme, je $4\pi R^2$. Potom dostaneme

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = h \cdot 4\pi R^2 \quad (5.29)$$

kde h je velikost vektoru \vec{h} . Tento integrál má být roven P , tedy rychlosti, se kterou teplo ve zdroji vzniká. Dostaváme

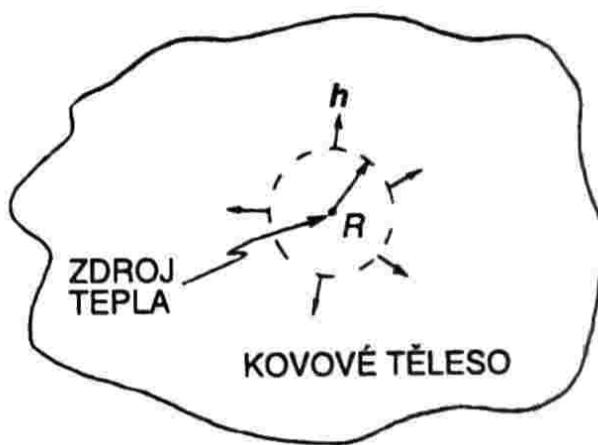
$$h = \frac{P}{4\pi R^2}$$

nebo

$$\vec{h} = \frac{P}{4\pi R^2} \vec{e}_r \quad (5.30)$$

kde, jako obvykle, \vec{e}_r představuje jednotkový vektor v radiálním směru. Podle našeho výsledku je \vec{h} přímo úměrné P a mění se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti od zdroje.

Výsledek, který jsme právě dostali, se hodí na proudění tepla v blízkosti bodového zdroje tepla. Pokusme se nyní najít rovnice pro nejobecnější případ proudění tepla,



Obrázek 5.6.: V oblasti blízko bodového zdroje proudí teplo radiálně směrem ven.

platí-li jediná podmínka, že teplo se zachovává. Budeme se zabývat pouze tím, co se stane v prostoru bez jakýchkoliv zdrojů nebo absorbátorů tepla.

Diferenciální rovnice pro vedení tepla byla odvozena v kapitole 4. Podle rovnice (4.41) platí

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (5.31)$$

(vzpomeňte si, že tento vztah platí sice přibližně, ale pro takové látky jako jsou kovy, docela dobře.) Dá se použít, samozřejmě, jen v těch oblastech látky, ve kterých nedochází ke generování nebo absorpcii tepla. Už jsme odvodili jiný vztah, rovnici (5.27), který platí, když se teplo zachovává. Když v (5.27) vektor \vec{h} vyjádříme podle (5.31), dostaneme

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \lambda \nabla^2 T \quad (5.32)$$

nebo

$$\frac{dq}{dt} = \lambda \nabla \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T \quad (5.32)$$

je-li λ konstanta. Vzpomínáte si, že q je množství tepla v jednotkovém objemu a $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ je Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Uděláme-li ještě jeden předpoklad, můžeme dostat velmi zajímavou rovnici. Budeme předpokládat, že teplota látky je přímo úměrná tepelnému obsahu jednotkového objemu, tj. že látka má určitou měrnou tepelnou kapacitu. Platí-li tento předpoklad (což bývá často), můžeme psát

$$\Delta q = c_V \Delta T$$

nebo

$$\frac{dq}{dt} = c_V \frac{dT}{dt} \quad (5.33)$$

Rychlosť změny teplaje přímo úměrná rychlosti změny teploty. Součinitel úměrnosti c_V je tu měrná tepelná kapacita jednotky objemu látky. Ze vztahů (5.33) a (5.32) dostáváme

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c_V} \nabla^2 T \quad (5.34)$$

Zjišťujeme, že časová rychlosť změny T v každém bodě je přímo úměrná Laplaceovu operátoru teploty T , tj. druhé derivaci její závislosti na poloze v prostoru. Dostáváme diferenciální rovnici s proměnnými x, y, z a t pro teplotu T .

Diferenciální rovnice (5.34) se nazývá rovnicí difúze tepla. Často je psána ve tvaru

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T \quad (5.35)$$

kde D je koeficient difúze tepla a zde je roven hodnotě $\frac{\lambda}{c_V}$.

Rovnice difúze se objevuje v mnoha fyzikálních úlohách - při difúzi plynů, neutronů a v dalších případech. Nyní však máme úplnou rovnici, která popisuje difúzi v nejobecnější možné situaci. Později probereme způsoby řešení rovnice difúze, abychom našli, jak se v konkrétních případech mění teplota. Nyní se vrátíme zpět k výkladu dalších vět o vektorových polích.

5.4. Cirkulace vektorového pole

Podobným způsobem, jakým jsme to udělali v případě divergence, chceme nyní prozkoumat rotaci. Gaussovu větu jsme odvodili analýzou plošného integrálu, ačkoli zpočátku nebylo zřejmé, že se chystáme zabývat divergencí. Jak jsme věděli, že máme integrovat přes celou plochu, abychom dostali divergenci? Vůbec nebylo jasné, že vyjde tento výsledek. A právě bez zjevného opodstatnění teď vypočítáme pomocí vektoru ještě cosi a ukážeme, že to souvisí s rotací. Tentokrát budeme počítat to, co se nazývá cirkulace vektorového pole. Je-li \vec{C} nějaké vektorové pole, vezmeme jeho složku podél nějaké křivky a vypočítáme integrál této složky po celé uzavřené křivce.

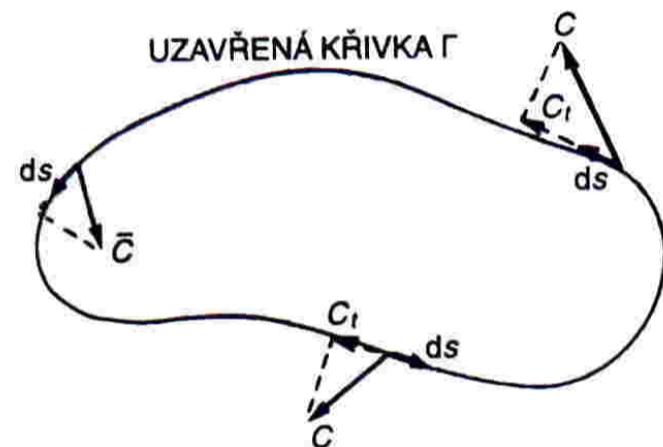
Tento integrál se nazývá cirkulací vektorového pole po (uzavřené) křivce. Už dříve v této kapitole jsme uvažovali křivkový integrál vektoru $\nabla \Psi$. Nyní provedeme totéž pro jakékoli vektorové pole \vec{C} .

Nechť je Γ nějaká uzavřená křivka v prostoru - pouze myšlená (obr. 3.7). Křivkový integrál tangenciální složky vektoru \vec{C} po této křivce bude

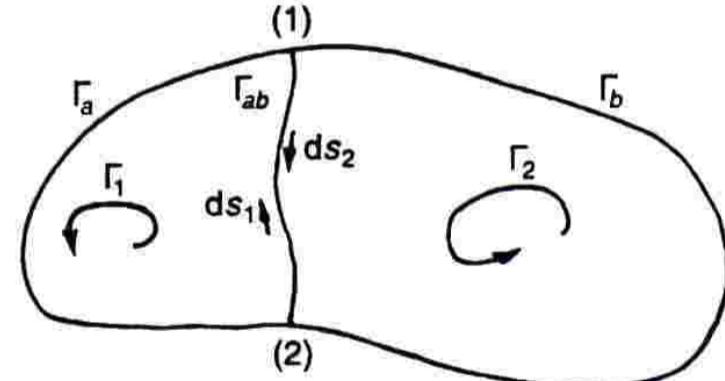
$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s}. \quad (5.36)$$

Je nutné, abyste si všimli, že integrujeme po celé křivce kolem dokola, nejen z jednoho bodu do druhého, jako jsme to dělali předtím. To, že je třeba integrovat po celé dráze dokola, nám má připomenout malý kroužek na znaku integrování. Tento integrál se nazývá cirkulace vektorového pole po křivce Γ . Název se převzal ze zkoumání cirkulace kapaliny a podobně jako tok se rozšířil a použil na jakékoli pole, i když tam není žádná „cirkulující“ látka.

Stejnou hrou, jakou jsme předvedli v případě toku, můžeme ukázat, že cirkulace po křivce je součtem cirkulací po dvou dílčích křivkách. Předpokládejme, že jsme naši křivku na obr. 5.7a rozdělili na dvě uzavřené křivky spojením dvou bodů (1) a (2) na původní křivce nějakou čarou napříč (obr. 5.7b). Nyní existují dvě uzavřené křivky a Γ_1 a Γ_2 . Γ_1 je vytvořena z Γ_a -té části původní křivky, která je vlevo od (1) a (2) plus zkratka Γ_{ab} . Křivku Γ_2 vytváří zbytek původní křivky plus zkratka.



(a) Cirkulace vektorového pole \vec{C} po křivce Γ je křivkový integrál \vec{C} (tj. tangenciální složky vektoru \vec{C}).



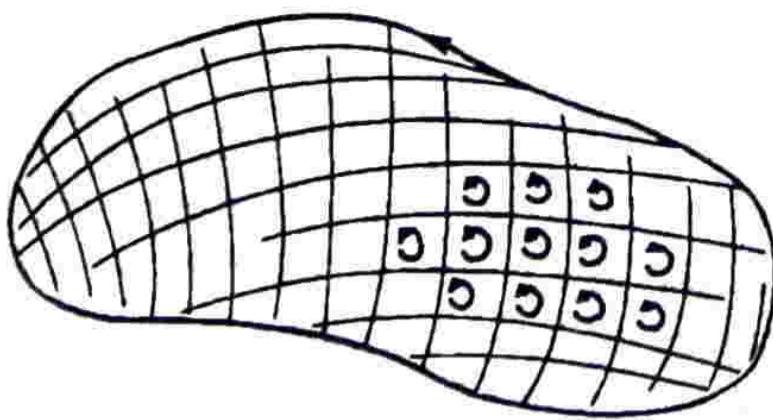
(b) Cirkulace po celé křivce $\Gamma_1 + \Gamma_2$ je rovna součtu cirkulací po dvou křivkách: $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ a $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$.

Obrázek 5.7.: Cirkulace vektorového pole C

Cirkulace po Γ_1 , je součtem integrálů po Γ_a a po Γ_{ab} . Podobně cirkulace po Γ_2 je součtem dvou částí, jedné související s Γ_a a druhé související s Γ_{ab} . Integrál po Γ_{ab} bude mít v případě křivky Γ_2 opačné znaménko než v případě Γ_1 , protože směr oběhu bude opačný - vždyť oba naše křivkové integrály musíme počítat ve stejném smyslu oběhu.

Toutéž úvahou, jakou jsme provedli dříve, se můžete přesvědčit, že součet obou těchto cirkulací dá právě křivkový integrál po původní křivce Γ . Příspěvky pocházející od Γ_{ab} se ruší. Cirkulace po jedné části plus cirkulace po druhé části je rovna cirkulaci po vnější křivce. S procesem rozdělování původní křivky můžeme pokračovat do jakéhokoliv počtu menších uzavřených drah. Sečteme-li cirkulace po menších dráhách, dojdeme vždy k rušení příspěvků od jejich společných částí, takže součet je ekvivalentní s cirkulací po původní křivce.

Nyní předpokládejme, že původní uzavřená křivka ohraňuje nějakou plochu. Ve skutečnosti existuje nekonečně mnoho ploch, jež všechny mají původní křivku jako svou hranici. Naše výsledky však nebudu záviset na tom, kterou plochu zvolíme. Nejdříve rozdělíme naši původní křivku na mnoho malých uzavřených křivek, jež všechny budou ležet na námi zvolené ploše, jak je vidět na obr. 5.8. Zvolíme-li naše křivky dostatečně malé, můžeme, bez ohledu na tvar plochy, předpokládat, že každá z nich utváří v podstatě rovinou plošku. Kromě toho můžeme křivky vybrat tak, že každá bude velmi blízká obvodu čtverce. Cirkulaci po velké křivce nyní můžeme vypočítat tak, že najdeme cirkulace po obvodech všech malých čtverců a ty sečteme.



Obrázek 5.8.: Je zvolena nějaká plocha ohraničená uzavřenou křivkou Γ . Plocha se rozdělí na množství malých přibližně čtvercových plošek. Cirkulace po Γ je rovna sumě cirkulací po malých uzavřených křivkách.

5.5. Cirkulace po obvodu čtverce.

Stokesova věta

Jak najít cirkulaci pro každý z malých čtverečků? Závisí to na tom, jak je čtvereček orientovaný v prostoru. Kdyby měl speciální orientaci, například když ležel v některé ze souřadnicových rovin, bylo by možné výpočet provést snadno. Protože jsme dosud o orientaci souřadnicových os neudělali žádny předpoklad, můžeme si osy dobře zvolit tak, aby ten čtvereček, na který je v té chvíli soustředěna naše pozornost, ležel v rovině xy (obr. 5.9).

Vyjádříme-li náš výsledek ve vektorové symbolice, můžeme tvrdit, že bude pro všechny konkrétní orientace roviny tentýž.

Nyní chceme najít cirkulaci pole \vec{C} po obvodu našeho malého čtverce. Křivkový integrál se snadno vypočte, uděláme-li čtvereček tak malý, že podél jakékoli jeho strany se vektor \vec{C} moc nemění. (Tento předpoklad platí tím lépe, čím menší je čtvereček, takže v podstatě mluvíme o infinitezimálních čtverečcích.) Vyjdeme z bodu (x, y) - levého dolního rohu obrázku - a budeme postupovat ve směru vyznačeném šipkami. V případě první strany, označené 1, nechť je tangenciální složka $C_x(1)$, délka dráhy nechť je Δx . První příspěvek k integrálu tedy bude $C_x(1)\Delta x$. V případě druhé strany dostaneme $C_y(2)\Delta y$, v případě třetí $-C_x(3)\Delta x$ a v případě čtvrté strany to bude $-C_y(3)\Delta y$. Záporná znaménka jsou nutná, neboť tangenciální složku musíme vyjadřovat vzhledem ke směru postupu po obvodu. Celý křivkový integrál pak bude

$$\oint \vec{C} d\vec{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(3)\Delta y. \quad (5.37)$$

Všimněme si prvního a třetího členu na pravé straně. Spolu dávají

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x. \quad (5.38)$$

Mohli byste se domnívat, že podle naší approximace je rozdíl v hranaté závorce roven nule. Je to tak, ale pouze v nulovém přiblžení. Můžeme však být přesnější a vzít v úvahu i rychlosť změny C_x . Když to uděláme, můžeme psát

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} dy. \quad (5.39)$$

Když bychom zahrnuli následující přiblžení, vystoupily by v něm i členy obsahující Δy^2 . Protože však nakonec přejdeme k limitě pro $\Delta y \rightarrow 0$, je možno takové členy zanedbat. Dosadíme-li (5.39) do (5.38), jistíme, že

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} dx dy. \quad (5.40)$$

Souhlasně s naší approximací je možno tuto derivaci počítat v bodě (x, y) .

Podobně můžeme vyjádřit zbývající dva členy ve výrazu (5.37) pro cirkulaci

$$[C_y(2) - C_y(4)]\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} dx dy. \quad (5.41)$$

Cirkulace po obvodu čtverečku pak bude

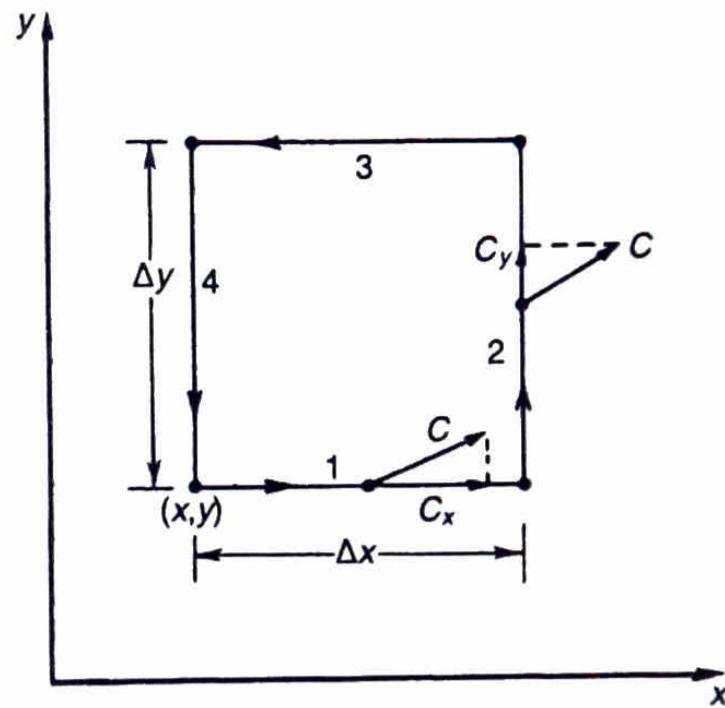
$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.42)$$

což je zajímavé, neboť rozdíl závorkách představuje právě z -ovou složku rotace. Kromě toho si všimněme, že $\Delta x \Delta y$ je plošný obsah našeho čtverečku. Takovýmto způsobem můžeme naši cirkulaci (5.42) psát jako

$$(\nabla \times \vec{C})_z ds. \quad (5.43)$$

Ale z -ová složka ve skutečnosti znamená normálovou složku vzhledem k plošnému elementu. Cirkulaci po obvodu diferenciálního čtverečku proto můžeme vyjádřit v invariantním vektorovém tvaru:

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = (\nabla \times \vec{C})_n dS = (\nabla \times \vec{C}) \cdot n dS. \quad (5.44)$$



Obrázek 5.9.: Výpočet cirkulace C po obvodu malého čtverečku

Náš výsledek zní: cirkulace jakéhokoli vektoru \vec{C} po obvodu infinitezimálního čtverečku je rovna normálové (vzhledem k rovině, v níž leží čtvereček) složce vektoru rot \vec{C} vynásobené plošným obsahem čtverečku.

Cirkulaci po jakémkoliv uzavřené křivce Γ je možné nyní lehce uvést do souvislosti s rotací vektorového pole. Křivku „vyplníme“ nějakou vhodnou plochou S (obr. 5.10) a vypočítáme cirkulace po obvodech množiny infinitezimálních čtverečků tvořících tuto plochu. Tento součet je možno zapsat jako integrál. Naším výsledkem je velmi užitečná věta, nazvaná Stokesova věta (podle G. G. Stokese).

$$\text{Stokesova věta: } \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{C})_n dS. \quad (5.45)$$

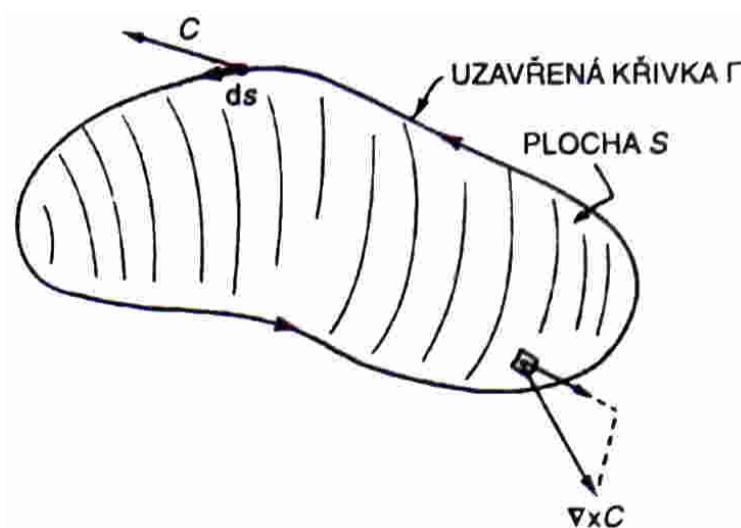
kde S je jakákoli plocha ohraničená křivkou Γ .

Nyní musíme něco říci o znaménkové konvenci. Na obr. 5.9 směřuje osa z k vám v „obyčejné“, tj. pravotočivé soustavě. Když bychom náš křivkový integrál počítali při kladné orientaci oběhu, zjistili bychom, že cirkulace je rovna z -ové složce vektoru $\nabla \times \vec{C}$. Když bychom postupovali opačným směrem, dostali bychom opačné znaménko. Jak tedy budeme obecně vědět, který směr zvolit za kladný pro normálovou složku vektoru $\nabla \times \vec{C}$? Kladná normála musí souviset se smyslem rotace vždy tak, jak je to na obr. 5.9. Obecný případ je vyznačen na obr. 5.10.

Jedním ze způsobů, jak si tento vztah zapamatovat, je *pravidlo pravé ruky*. Přiložíte-li *pravou* ruku podél křivky Γ tak, že prsty ukazují kladný smysl $d\vec{s}$, palec ukazuje směr kladné normály k ploše S .

5.6. Pole s nulovou rotací a divergencí

Nyní bychom se rádi zabývali některými důsledky našich nových vět. Nejdřív vezměme příklad vektoru, jehož rotace je všude rovna nule. Pak je podle Stokesovy věty jeho cirkulace po každé křivce také rovna nule. Z toho vyplývá, že zvolíme-li na uzavřené křivce dva body (1) a (2) (obr. 5.11), křivkový integrál tangenciální složky z (1) do (2) nezávisí na tom, po které ze dvou možných drah se vypočítá. Můžeme udělat závěr, že integrál z (1) do (2) bude záviset pouze na poloze těchto bodů, tj. je pouze nějakou funkcí polohy. Stejnou logiku jsme použili v kapitole 2, když jsme dokázali, že když je integrál nějaké veličiny po uzavřené dráze vždy roven nule, lze jej



Obrázek 5.10.: Cirkulace \vec{C} po Γ je rovna plošnému integrálu normálové složky vektoru $\nabla \times \vec{C}$

5. Integrální počet vektorových polí

vyjádřit jako rozdíl funkce polohy dvou bodů. Tento fakt nám umožnil zavést pojem potenciálu. Dále jsme dokázali, že vektorové pole je gradientem této potenciálové funkce (viz vztah 2.1).

Z toho vyplývá, že každé vektorové pole s nulovou rotací je rovno gradientu nějaké skalární funkce. To je užitečný pozatek: je-li $\nabla \times \vec{C} = 0$, existuje skalární pole Ψ (psí), že $\vec{C} = \nabla \Psi$. Tento zvláštní druh vektorového pole tedy můžeme, chceme-li, popsat pomocí skalárního pole.

Ukážeme ještě něco. Předpokládejme, že máme libovolné skalární pole φ (fí). Vytvoříme-li jeho gradient $\nabla \varphi$, musí být integrál tohoto vektoru po jakémkoliv uzavřené křivce roven nule. Jeho křivkový integrál z bodu 1 do bodu 2 bude $\varphi(2) - \varphi(1)$. Představují-li 1 a 2 tentýž bod, bude podle věty 1 (vztah 5.8) křivkový integrál roven nule:

$$\int_{\text{jakákoliuzavřená křivka}} \nabla \times (\nabla \varphi) dS = 0 \quad (5.46)$$

pro jakoukoliv plochu. Je-li tento integrál roven nule pro každou plochu, musí být roven nule i jeho integrand. Vždy tedy platí

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (5.47)$$

Tentýž výsledek jsme dokázali v článku 4.8 pomocí vektorové algebry.

Nyní se podívejme na zvláštní případ, kdy malou uzavřenou křivku Γ vyplníme velkou plochou S , jako na obr. 5.12. Rádi bychom se vlastně dozvěděli, co se stane, když se uzavřená křivka „scvrkne“ na bod, takže ohraničení plochy zmizí, tj. plocha se stane uzavřenou. Je-li vektor \vec{C} všude konečný, musí se při „scvrkávání“ křivky Γ křivkový integrál po Γ blížit nule (integrál je přibližně přímo úměrný délce Γ která se blíží nule). Podle Stokesovy věty se musí plošný integrál veličiny $(\nabla \times \vec{C})_n$ také blížit nule. Když plochu uzavíráme, jako bychom přidávali příspěvky, které postupně vyrůší to, co bylo předtím. Dospěli jsme k nové větě

$$\oint_{\text{jakákoliuzavřená křivka}} (\nabla \times \vec{C})_n d\vec{S} = 0 \quad (5.48)$$

Nyní je to zajímavé, neboť jednu větu o plošném integrálu uzavřenou plochou už máme. Takový plošný integrál je podle Gaussovy věty (vztah 5.24) roven objemovému integrálu divergence vektorového pole. Z Gaussovy věty použité na vektor $\nabla \times \vec{C}$ vyplývá

Z toho usuzujeme, že druhý integrál musí být též roven nule:

$$\int_{\text{jakýkoliv objem}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) dV = 0 \quad (5.49)$$

To také platí pro každé vektorové pole \vec{C} . Protože však rovnost (5.49) je správná pro každý objem, musí platit, že v každém bodě prostoru je integrand roven nule. Dostáváme, že vždy

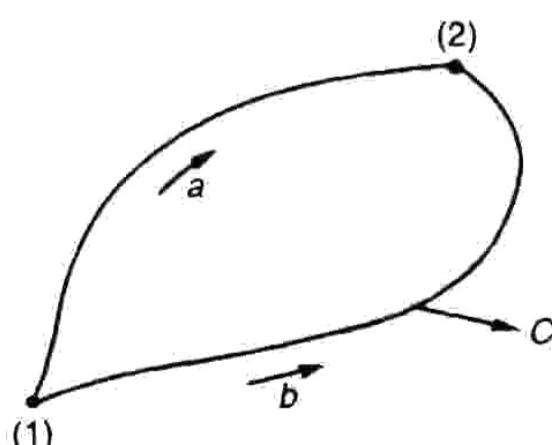
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0. \quad (5.50)$$

To je však stejný výsledek, jaký jsme dostali v článku 4.8 z vektorové algebry. Nyní začínáme chápát, jak jedno souvisí s druhým.

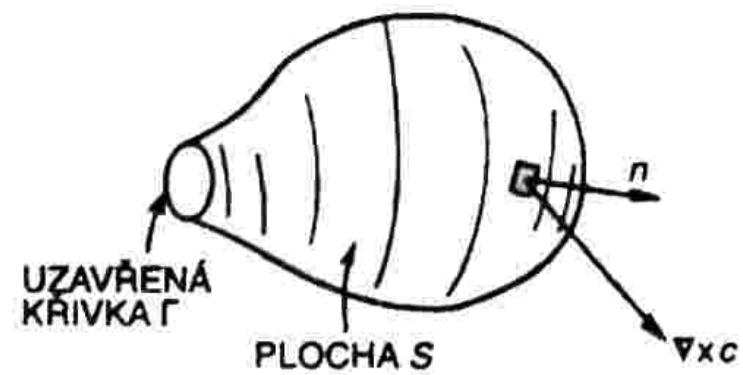
$$\int_{\text{uzavřená plocha}} (\nabla \times \vec{C})_n d\vec{S} = \int_{\text{objem uvnitř plochy}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) dV. \quad (5.51)$$

5.7. Shrnutí

Shrňme, co jsme se dozvěděli o vektorovém počtu. Skutečně významné výsledky kapitol 4 a 5 jsou tyto:



Obrázek 5.11.: Je-li $\nabla \times \vec{C}$ rovno nule, cirkulace po uzavřené křivce Γ je také rovna nule. Křivkový integrál $\vec{C} \cdot d\vec{s}$ z (1) do (2) po křivce a proto musí být stejný jako tentýž křivkový integrál po křivce b .



Obrázek 5.12.: Přechodem k limitnímu případu uzavřené plochy zjistíme, že plošný integrál veličiny $(\nabla \times \vec{C})_n$ musí konvergovat k nulové hodnotě.

1. Operátory $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$ možno považovat za tři složky vektorového operátoru:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.52)$$

Zachází-li se s tímto operátorem jako s vektorem, vzorce, které pro něj vyplývají z vektorové algebry, jsou správné.

2. Rozdíl hodnot skalárního pole ve dvou bodech je roven křivkovému integrálu tangenciální složky gradientu tohoto skaláru po jakémkoliv křivce spojující oba body:

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla \Psi \cdot d\vec{s} \quad (5.53)$$

jakákoli křivka od (1) do (2)

3. Plošný integrál normálové složky libovolného vektoru po uzavřené ploše je roven integrálu divergence tohoto vektoru přes vnitřní objem ohraničený plochou:

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad (5.54)$$

4. Křivkový integrál tangenciální složky libovolného vektoru po uzavřené křivce je roven plošnému integrálu normálové složky rotace tohoto vektoru po jakémkoliv ploše, která je touto křivkou ohraničena:

$$\int_S \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int (\nabla \times \vec{C}) \cdot \vec{n} dS. \quad (5.55)$$

5.8. Vizualizace vektorového pole s využitím šumové textury

Zámerem této „názorné exkurze“ do teorie pole je poskytnout náhled s využitím animací. Zopakujme že, vektor je veličina, která určuje nejen velikost, ale i směr v prostoru. Vektory tedy používáme k popisu fyzikálních veličin, jako je např. rychlosť, hybnosť, zrychlení nebo síla působící na objekt. Nicméně, pokud se pokoušíme popsat systém, který se skládá z velkého počtu objektů (např. pohybující se voda, sníh, dešť,...), musíme přiřadit vektor každému samostatnému objektu. Například v každém okamžiku můžeme jakékoli sněhové vločce přiřadit vektor rychlosti, který charakterizuje její pohyb. Padající sníh je příkladem diskrétního, tj. nespojitého prostředí.

Na druhou stranu, jestliže chceme analyzovat pohyb tekutiny, musíme vektor rychlosti přiřadit v každém okamžiku každé částečce tekutiny. Tako budou vektory popisovat směr a velikost rychlosti v každém čase a v každém bodě prostoru. Soubor všech vektorů rychlosti nazveme vektorovým polem rychlostí. Nyní je jasné podstatný rozdíl mezi vektorovým a skalárním polem tj., že vektorové obsahuje informaci jak o velikosti, tak i o směru veličiny v každém časovém okamžiku pro každý bod v prostoru, zatímco skalární pouze udává velikost dané veličiny v každém čase a v každém bodě prostoru. Příkladem spojitého prostředí je např. proudění vzduchu.

Obecné vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$ můžeme napsat ve tvaru:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (5.56)$$

kde jednotlivé komponenty jsou skalární pole. Pro ilustraci vlastností vektorových polí použijeme tekutinové pole, protože vizualizace takových typů vektorových polí jsou nejjednodušší.

Zobrazení vektorových polí je provedeno pomocí šumové textury, která je lokálně korelována se směrem vektorového pole. Obdobné zobrazení lze přirozeným způsobem realizovat i experimentálně. Rozházíme-li semínka trávy v silném elektrickém poli, začnou se orientovat delší osou rovnoběžně se směrem silokřivek pole. Poskytnou nám tím hustý soubor vzorků zobrazujících směry a tedy i tvar pole. Platí tedy, že lokální směry polí jsou v souhlase se směry šumové textury diagramu. Šumová textura umí poskytnout mnoho informací o prostorové struktuře pole.

První animace 5.13 znázorňuje divergující tok tekutiny, šumovou texturou, jejíž směr je v korelace se směrem tohoto toku. Animace na obr. 5.14 zobrazuje jinou třídu chování toku tekutiny - cirkulaci, víření. Kapalina se pohybuje jednoduše v kružích, nic zde nevzniká ani nezaniká (nemá zdroj ani propad).

Na animaci 5.15 je zřídlo v blízkosti menší výpusti (propadu), zatímco animace 5.16a znázorňuje dvě zřídla nestejné síly. Tekutinové pole může mít více než jeden střed vřetení.

Na animaci 5.16b je ukázán tok pole se dvěma víry, cirkulacemi. Toky víří v opačných směrech a jeden je silnější než druhý. Na animaci 5.16c máme stejnou situaci, ale směry obou vírů jsou stejné.

Na animaci 5.17a je ukázán konstantní tok klesající dolů, který se vzájemně ovlivňuje se zřídlem. Zdroj je částečně schopen téci vzhůru proti proudu padající tekutiny, ale nakonec je také stržen a otočen směrem dolů.

Podobně na animaci 5.17b je znázorněn homogenní tok směřující dolů, interagující s tokem cirkulujícím proti směru hodinových ručiček. Otáčivý tok je schopen téci kousek proti proudu, ale nakonec je stržen silnějším tokem směrem dolů.

Konečně na animaci 5.17c jsou ukázány oba toky pole, jak vír, tak i zdroj (jak rotace, tak také divergence vektorového pole jsou nenulové). Jakékoli vektorové pole lze zapsat jako součet nevírových částí (nulová rotace) a nedivergujících (nezřídlových, nezdrojových) částí (žádná zřídla ani propady částic). V našem studiu elektromagnetizmu uvidíme, že statické elektrické pole je nevírové (tj. vypadá jako na animacích 5.13, 5.15, 5.16a a 5.17a) a statické magnetické pole je nedivergující, nezdrojové (tj. podobá se animacím 5.14, 5.16b, 5.16c a 5.17b). Jenom v případech časově proměnného elektrického pole můžeme pozorovat, že má elektrické pole obě vlastnosti, tj. je jak zdrojové, tak i vírové, takže vypadá jako na animaci 5.17c. Narozdíl od pole elektrického je pole magnetické vždy nezdrojové (nedivergentní), a to i v časově proměnných situacích. To znamená, že magnetické pole se vždy podobá modelům z animací 5.14, 5.16b, 5.16c a 5.17b.

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488.

Obrázek 5.14.: Proudové pole je vytvářeno pouze vírem; je bez zřídla, tekutina se pohybuje po kružnicích a nedochází ani ke vzniku, ani k zániku částic tekutiny

Obrázek 5.13.: Proudové pole má zřídlo v počátku souřadnic a proudnice od něho směřují radiálně

Obrázek 5.15.: Proudové pole je složeno ze zřídla a z propadu (tzv. proudový dipól); v okolí zřídla a propadu směřují proudnice vždy od zřídla směrem k propadu

(a) Tok tekutiny s dvěma různě silných zřídly

(a) Zřídlo a homogenní tok

(b) Tok tekutiny s dvěma opačně orientovanými víry

(b) Vír a homogenní tok

(c) Tok tekutiny s dvěma souhlasně orientovanými víry

(c) Tok tekutiny s vírem a zřídlem

Obrázek 5.16.: Znázornění proudového pole pomocí animací využívající šumové textury, která je v reálném čase deformována ve směru rychlostního pole: a) proudové pole je složeno ze dvou různě silných zřidel v různých místech; v blízkém okolí obou zřidel se proudnice pohybují směrem od zřidel.b) proudové pole je složeno ze dvou různě silných vírů v různých místech; směr rotace jednoho víru je ve směru hodinových ručiček a druhého proti směru hodinových ručiček; c) proudové pole je složeno ze dvou různě silných vírů v různých místech; směr rotace obou vírů je v tomto případě shodný

Obrázek 5.17.: Znázornění proudového pole pomocí animací využívající šumové textury, která je v reálném čase deformována ve směru rychlostního pole: a) proudové pole je vytvářeno zřídlem umístěným v homogenním konstantním toku, který míří shora dolů (tzv. Rankinovo polotěleso, Rankinův ovál); b) proudové pole je složeno z víru a homogenního toku směřujícího shora dolů; c) proudové pole je vytvářeno kombinací víru a zřídla

6. Elektrostatika

Contents

6.1. Statika	29
6.2. Coulombův zákon, superpozice	29
6.3. Elektrický potenciál	30
6.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$	31
6.5. Tok pole \vec{E}	32
6.6. Gaussův zákon, Divergence pole \vec{E}	33
6.7. Pole nabité koule	34
6.8. Siločáry, ekvipotenciální plochy	34
6.9. Použití Gaussova zákona	34
6.9.1. Rovnováha v elektrostatickém poli	35
6.9.2. Rovnováha s vodiči	35
6.9.3. Stabilita atomů	35
6.9.4. Pole nabité přímky	36
6.9.5. Nabité rovina, dvě roviny	36
6.9.6. Nabité koule, kulová slupka	37
6.9.7. Je pole bodového náboje přesně přímo úměrné veličině $\frac{1}{r^2}$?	37
6.9.8. Pole vodiče	38
6.9.9. Pole vodiče	38
6.10. Elektrické pole v různých případech	39

6.1. Statika

[Feynman02] Nyní začneme s podrobným studiem teorie elektromagnetismu. Celý elektromagnetismus je obsažen v Maxwellových rovnicích.

Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.4)$$

Situace popsané těmito rovnicemi mohou být velice složité. Nejdříve budeme uvažovat o poměrně jednoduchých situacích a učit se, jak s nimi zacházet. Složitější situace probereme až potom. Nejsnáze se pracuje ve statickém případě¹, kdy nic nezávisí na čase. Tehdy mají všechny náboje trvale pevnou polohu v prostoru anebo, pohybují-li se, pak pouze jako ustálený proud v obvodu (takže se ρ a \vec{j} v čase nemění). V těchto podmínkách všechny členy, které jsou časovými derivacemi pole, jsou rovny nule a Maxwellovy rovnice získají tento tvar:

Elektrostatika:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.6)$$

Magnetostatika:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.8)$$

Na soustavě těchto čtyř rovnic si všimněte zajímavé věci. Soustavu lze rozdělit na dva páry rovnic. Přitom elektrické pole \vec{E} se objevuje pouze v prvních dvou a magnetické pole \vec{B} pouze v druhých dvou rovnicích soustavy. Obě pole spolu vzájemně nesouvisí. Znamená to, že *dokud jsou proudy a náboje statické, jsou elektřina a magnetizmus oddělené jevy*. Vzájemná závislost \vec{E} a \vec{B} se neobjeví, pokud nedochází k takovým změnám nábojů anebo proudů jako při nabíjení kondenzátoru anebo při pohybu magnetu. \vec{E} a \vec{B} budou na sobě navzájem záviset pouze v případě dostatečně rychlých změn, když v Maxwellových rovnicích dostanou význam časové derivace.

Podíváte-li se na rovnice statiky, uvidíme, že studium obou těchto předmětů, které nazýváme elektrostatika a magnetostatika, je ideální pro seznámení se s matematickými vlastnostmi vektorových polí. Elektrostatika je čistým příkladem vektorového pole s *nulovou rotací a nenulovou divergencí*. Magnetostatika je čistým příkladem pole s *nulovou divergencí a nenulovou rotaci*. Častější, a snad si myslíte, že i lepsí, způsob přednášení teorie elektromagnetismu je začít nejdřív elektrostatikou, a tak se poučit o divergenci. Magnetostatika a rotace budou probrány později. Poté se elektřina a magnetizmus spolu zkombinují. My jsme se rozhodli, začít úplnou teorií vektorového počtu. Nyní ji budeme aplikovat na speciální případ, na elektrostatiku, tj. na pole \vec{E} dané prvním párem rovnic (6.5) a (6.6).

Začněme nejjednoduššími situacemi, tedy těmi, v nichž jsou dány polohy všech nábojů. Kdybychom měli studovat elektrostatiku pouze na této úrovni (což budeme dělat ve dvou následujících kapitolách), bylo by to velmi jednoduché, téměř banální. Jak uvidíte, vše je možné získat z Coulombova zákona a několika integrací. V mnoha reálných elektrostatických úlohách však zpočátku nevíme, kde náboje jsou. Víme pouze, že se mezi sebou rozdělily podle vlastností látky. Polohy, jež náboje zaujaly, závisí na poli \vec{E} , a to zase závisí na polohách nábojů. Tím se věci značně komplikují. Umístíme-li například do blízkosti vodiče nebo izolátoru nabité těleso, elektrony a protony ve vodiči nebo v izolátoru se přemístí. Hustota náboje ρ v rovnici (6.5) pak bude mít jednu část, kterou určíme z velikosti přeneseného náboje, ale i další části, pocházející od nábojů, které se přemístily ve vodiči. Je nutné započítat všechny náboje. Přitom je možné dospět k některým zálužným a zajímavým problémům. Ačkoli se má tato kapitola zabývat elektrostatikou, její hezčí a náročnější partie neobsahne. Budeme v ní rozebrávat situaci, kdy polohy všech nábojů můžeme pokládat za známé. Přirozeně, měli byste být schopni zvládnout tuto situaci dřív, než se pokusíte řešit složitější problémy.

6.2. Coulombův zákon, superpozice

[Feynman02] Bylo by logické vyjít z rovnic (6.5) a (6.6). Jednodušší však bude, začneme-li někde jinde a vrátíme se k těmto rovnicím. Výsledky budou ekvivalentní. Začneme zákonem, o němž jsme již hovořili dříve, tzv. *Coulombovým zákonem*.

¹Vlastně stacionární případ. O elektrostatice mluvíme obyčejně tehdy, když jsou náboje nehybné.

Podle něho působí mezi dvěma nepohybujícími se náboji síla, která je přímo úměrná součinu nábojů a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti mezi nimi. Síla má směr přímky spojující oba náboje.

$$\text{Coulombův zákon} \quad \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = \vec{F}_2, \quad (6.9)$$

kde \vec{F}_1 je síla působící na náboj q_1 , \vec{e}_{12} je jednotkový vektor směrující od q_2 k q_1 a r_{12} je vzdálenost mezi q_2 k q_1 . Síla \vec{F}_2 působící na náboj q_2 je stejně velká jako \vec{F}_1 , ale má opačný směr.

Konstanta úměrnosti se z historických důvodů příše jako $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. V soustavě jednotek SI, kterou používáme, je rovna přesně $10^{-7} c^2$ ($10 \cdot 10^{-7}$ -krát druhá mocnina rychlosti světla ve vakuu). Protože rychlosť světla ve vakuu je přibližně $10 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, konstanta má hodnotu zhruba $9 \cdot 10^9 \text{ N F}^{-1}$ (metr/farad) a její rozdíl vzhledem k základním veličinám soustavy SI je $\text{m}^3 \text{kgs}^{-4} \text{A}^{-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7} c^2 \quad \dots \text{z definice} \\ &= 9,0 \cdot 10^9 \quad \dots \text{z experimentu} \end{aligned}$$

Možné způsoby vyjádření rozdílu konstanty jednotky:

- m F^{-1} ,
- nebo $\text{N m}^2 \text{ C}^{-2}$,
- nebo $\text{m}^3 \text{kgs}^{-4} \text{A}^{-2}$,
- nebo V m C^{-1} .

Jde-li o víc než dva náboje - a pouze takové případy jsou opravdu zajímavé - musíme Coulombův zákon doplnit ještě jedním přirodním zákonem: síla působící na jakýkoliv náboj je vektorovým součtem Coulombových sil pocházejících od všech ostatních nábojů. Tento zákon se nazývá *princip superpozice*. To je vše, co se týká elektrostatiky. Kombinujeme-li Coulombův zákon a princip superpozice, není nic víc třeba. Rovnice (6.5) a (6.6) - rovnice elektrostatiky - neříkají nic více, nic méně.

Při používání Coulombova zákona je vhodné zavést pojem elektrického pole. Říkáme, že pole $\vec{E}(1)$ je rovno síle působící na náboj q_1 (ze strany všech ostatních nábojů) a připadající *na jednotku náboje* (tj. vektor působící síly, dělený velikostí náboje (q_1)). Vydejme-li rovnost (6.9) (q_1), dostaneme pro účinek nábojů jiných než (q_1), že

$$\vec{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} \quad (6.10)$$

Chápeme to tak, že $\vec{E}(1)$ udává cosi pro bod 1 i tehdy, kdyby tam náboj q_1 nebyl - za předpokladu, že všechny ostatní náboje zachovají své původní polohy. Říkáme, že $\vec{E}(1)$ je elektrické pole v bodě 1.

Elektrické pole $\vec{E}(1)$ je vektor, takže rovnici (6.10) myslíme ve skutečnosti tři rovnice pro každou složku jednu. Explicitně vypíšeme x-ovou složku, pro kterou z rovnice (6.10) vyplývá, že

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (6.11)$$

Podobně pro ostatní složky.

Je-li víc nábojů, je pole \vec{E} v nějakém bodě 1 součtem příspěvků od každého z ostatních nábojů. Každý člen součtu bude mít tvar (6.10), resp. (6.11). Bude-li q_j označovat velikost j -tého náboje a \vec{r}_{1j} je vektor posunutí z polohy q_j do bodu 1, píšeme

$$\vec{E}(1) = \sum_{j=1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \vec{e}_{1j} \quad (6.12)$$

což, samozřejmě, znamená, že

$$E_x(x, y, z) = \sum_{j=1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_j}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (6.13)$$

a analogicky pro další složky. Casto je pohodlnější nebrat v úvahu fakt, že náboje existují jako diskrétní objekty - protony a elektrony - a pokládat je za rozptýlené v nějakém spojitém útvaru anebo, jak se to nazývá, v nějakém „rozdelení“. Tento přístup je v pořádku, pokud nás nezajímá, co se děje ve velmi malých rozmezích. Rozdelení náboje charakterizujeme „*hustotou náboje*“ $\rho(x, y, z)$. Nachází-li se v malém objemu ΔV_2 v okolí bodu 2 množství náboje Δq_2 , pak je ρ definováno vztahem

$$\Delta q_2 = \rho(2)\Delta V_2. \quad (6.14)$$

Při používání Coulombova zákona při takovém přístupu nahradíme sumy ve vztazích (6.12) a (6.13) integrály přes všechny objemy obsahující náboje. Pak bude platit

$$\vec{E}(1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(2)\vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2 \quad (6.15)$$

Některí lidé píšou raději

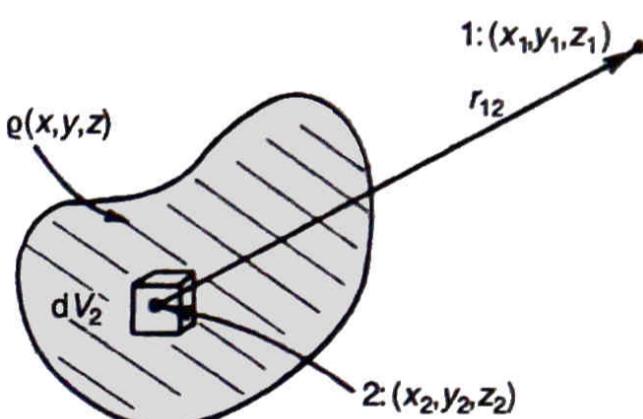
$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

kde \vec{r}_{12} je vektor posunutí z 2 dol (obr. 6.2). Integrál udávající \vec{E} je pak zapsán takto

$$\vec{E}(1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dV_2 \quad (6.16)$$

Chceme-li pomocí těchto integrálů něco vypočítat, musíme je obvykle podrobne rozepsat. Pro x-ovou složku rovností (6.15) nebo (6.16) bychom pak psali

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{celý prostor}} \rho(x_2, y_2, z_2) \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}} dx_2 dy_2 dz_2 \quad (6.17)$$



Obrázek 6.1.: Elektrické pole \vec{E}_v bodě 1 nějakého rozdelení nábojů získáme integrálem přes toto rozdelení. Bod 1 se může nacházet i uvnitř rozdelení

Tento vzorec nebudeme používat často. Napsali jsme jej sem pouze proto, abychom zdůraznili fakt, že jsme úplně vyřešili všechny ty elektrostatické úlohy, ve kterých známe polohy všech nábojů. Jsou dány náboje. Jaká jsou pole? Odpověď: vypočtěte tento integrál. Nic víc k tomu není potřeba; pouze výpočet složitých trojrozměrných integrálů - přesně vzato, je to práce pro počítač.

Pomocí našich integrálů můžeme najít pole vytvářená nabitym rovinným nebo lineárním útvarem, nabitou kulovou plochou anebo jiným udaným rozdelením náboje. Je důležité uvědomit si, že i když budeme kreslit siločáry, hovořit o potenciálech nebo počítat divergence, výsledek už máme. Závisí pouze na tvaru tohoto integrálu. Někdy

je snadnější jej vypočítat nějakým důvtipným trikem než jeho skutečným výpočtem. Ovládat takovéto postupy však vyžaduje naučit se mnohé neobvyčejné věci. V praxi je možná jednodušší nesnažit se dělat chytrého, a namísto toho vypočítat vždy integrál přímo. I přesto se však nyní pokusíme být v této záležitosti důvtipnými a budeme pokračovat analýzou některých jiných vlastností elektrického pole.

6.3. Elektrický potenciál

[Feynman02] Nejdříve probereme pojem elektrického potenciálu, který souvisí s prací vykonanou při přenášení náboje z jednoho bodu do druhého. Mějme nějaké rozdelení náboje, které vytváří elektrické pole. Ptejme se, kolik práce je třeba vynaložit na přenos malého náboje z jednoho místa na druhé. Práce, která se vykonává přenášením náboje po nějaké dráze proti elektrickým silám, je rovna záporně vzatému integrálu po této dráze ze složky elektrické síly ve směru pohybu.

Přenášíme-li náboj z bodu a do bodu b , bude platit

$$W = - \int_a^b \vec{F} d\vec{s},$$

kde \vec{F} je elektrická síla působící na náboj v každém bodě a $d\vec{s}$ je diferenciální vektor posunutí podél dráhy (obr. 6.2).

Pro naše účely je zajímavější uvažovat práci, která by se konala při přenášení jedné jednotky náboje. Tehdy síla působící na náboj je číselně rovna intenzitě elektrického pole. Označíme-li práci vykonanou proti elektrickým silám v tomto případě W_{jedn}

můžeme psát

$$W_{jedn} = - \int_a^b \vec{E} d\vec{s}. \quad (6.18)$$

To, co dostaneme pomocí takového integrálu, obecně závisí na dráze, po které integrujeme. Jestliže by integrál (6.18) závisel na dráze od a do b , mohli bychom z pole získávat práci přenášením náboje do b po jedné dráze a pak zpět do a po jiné. Do b bychom šli po dráze, pro kterou je W menší, a zpět po jiné dráze, odčerpávající více práce, než vkládáme.

Získávat energii z pole - na tom není v principu nic nemožného. Opravdu se setkáme s poli, kde to možné je. Může se stát, že když pohybujete nábojem, působí silami na jinou část „mechanizmu“. Pohybuje-li se mechanizmus proti síle, ztrácí energii, přičemž celková energie v přírodě se nemění. Avšak v elektrostatice takový „mechanizmus“ není. Víme, jaké síly působí zpětně na zdroje pole. Jsou to coulombovské síly působící na náboje, které jsou původci pole. Mají-li Ostatní náboje v prostoru pevné polohy, což předpokládáme pouze v elektrostatice, nevykonávají tyto zpětné síly při působení práci. Neexistuje žádný způsob, jak z nich získat energii, samozřejmě za předpokladu, že v elektrostatických situacích platí princip zachování energie. Věříme, že platí, ale teď ukážeme, že to musí vyplývat z Coulombova zákona pro sílu.

Uvažujme nejdříve, co se stane v poli vyvolaném jediným nábojem q . Nechť je bod a ve vzdálenosti r_1 od q a bod b ve vzdálenosti r_2 . Nyní z a do b přenesme jiný náboj, který budeme nazývat „zkušebním“ nábojem a jehož velikost zvolíme rovnou jedné jednotce. Začneme s tou dráhou, která je ze všech možných drah pro výpočet nejjednodušší. Náš zkušební náboj přeneseme nejdřív po oblouku kružnice a pak podél poloměru, jak to znázorňuje obr. 6.3a. Najít práci vykonanou na této speciální dráze je dětskou hrou (jinak bychom ji nebyli zvládli). Především vůbec žádná práce se nevykoná na dráze z a do a' . Pole je radiální (podle Coulombova zákona), takže jeho intenzita je kolmá na směr pohybu. Dále na dráze z a' do b má intenzita pole směr pohybu a mění se jako $\frac{1}{r^2}$. Práce vykonaná přenosem zkušebního náboje z a do b bude

$$-\int_a^b \vec{E} d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (6.19)$$

Vezměme nyní jinou jednoduchou dráhu, např. takovou, jaká je znázorněna na obr. 6.3b. Chvíli vede po oblouku kružnice, potom chvíli radiálně, potom opět po oblouku a potom radiálně atd. Předně, když jdeme po oblouku kružnice, práci nevykonáváme. Když jdeme po radiálním úseku, musíme integrovat $\frac{1}{r^2}$. Na prvním radiálním úseku integrujeme z r_a do $r_{a'}$, na druhém úseku z $r_{a'}$ do $r_{a''}$ atd. Součet všech těchto integrálů dá totéž jako jediný integrál přímo z r_a do r_b . Pro tuto dráhu dostáváme stejný výsledek, jaký jsme dostali v případě první dráhy. Je zřejmé, že tentýž výsledek bychom dostali pro jakoukoliv dráhu, která se skládá z libovolného počtu takovýchto úseků.

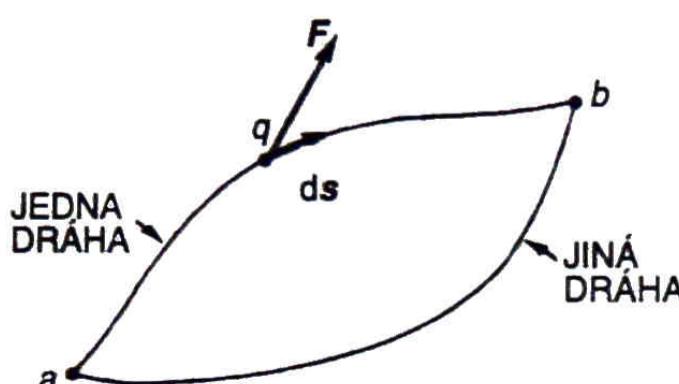
Jak to bude v případě hladkých drah? Dostali bychom tentýž výsledek? O této otázce jsme hovořili už ve 13. kapitole 1. dílu. Na základě stejných důvodů, které jsme použili tam, můžeme udělat závěr, že práce vykonaná při přenášení jednotkového náboje z a do b nezávisí na dráze.

$$W_{jedn} = - \int_{a-b}^b \vec{E} d\vec{s}, \quad \text{jakákoliv dráha}$$

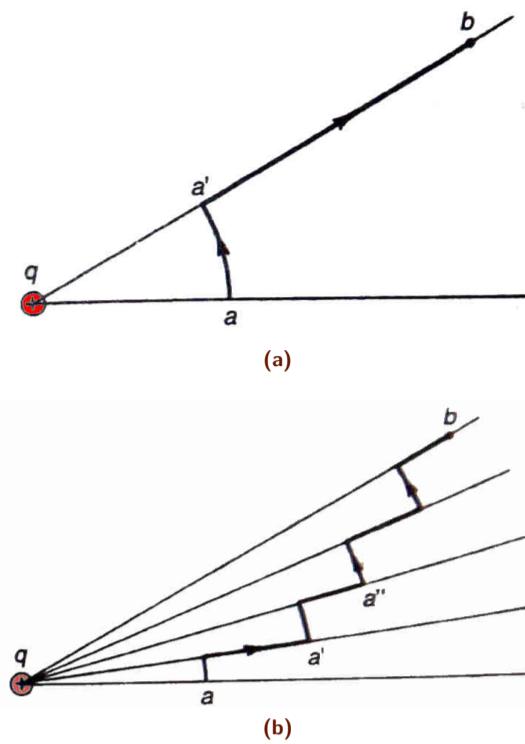
Protože vykonaná práce závisí pouze na koncových bodech, je možné ji udat jako rozdíl dvou čísel. Přesvědčíme se o tom následujícím způsobem. Zvolme vztazný bod P_0 a domluvme se, že budeme počítat náš integrál použitím dráhy, která bude vždy procházet bodem P_0 . Nechť $\varphi(a)$ označuje práci vykonanou proti poli při přechodu z P_0 do bodu a a $\varphi(b)$ práci vykonanou při přechodu z P_0 do bodu b (obr. 6.4). Práce vykonaná při přechodu z a do P_0 (cestou do b) je záporně vzaté $\varphi(a)$, takže bude platit

$$-\int_a^b \vec{E} d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (6.20)$$

Protože tu bude vždy vystupovat pouze rozdíl hodnot funkce φ ve dvou bodech, ve skutečnosti nepotřebujeme ani specifikovat polohu bodu P_0 . Jakmile jsme však



Obrázek 6.2.: Práce konaná při přenesení náboje z a do b je rovna záporně vzatému integrálu ze skalárního součinu $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ po dráze z a do b



Obrázek 6.3.: Přenášením zkušebního náboje z a do b po obou těchto drahách se koná stejná práce

zvolili nějaký referenční bod, hodnota φ je už určena pro každý bod v prostoru; φ je tedy *skalární pole*. Je funkcí x, y, z . Tuto skalární funkci nazýváme *elektrostatickým potenciálem* v libovolném bodě.

Elektrostatický potenciál:

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E} d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (6.21)$$

Často je pohodlné volit vztazný bod v nekonečnu. V případě jednotlivého náboje nacházejícího se v počátku souřadnicové soustavy pak s ohledem na vztah (6.19) pro potenciál φ v nějakém bodě (x, y, z) dostaneme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.22)$$

Elektrické pole několika nábojů je možné napsat jako součet elektrického pole prvního, druhého, třetího atd. náboje. Integrujeme-li součet, abychom našli potenciál, dostaneme součet integrálů. Každý z těchto integrálů představuje potenciál jednoho z nábojů. Usuzujeme tak proto, že potenciál množiny nábojů je součtem potenciálů jednotlivých nábojů. Princip superpozice platí tedy i pro potenciály. Stejnými úvahami, kterými jsme našli elektrické pole skupiny nábojů a rozdělení nábojů, můžeme dostat úplné vzorce i pro potenciál φ v nějakém bodě, který označíme 1:

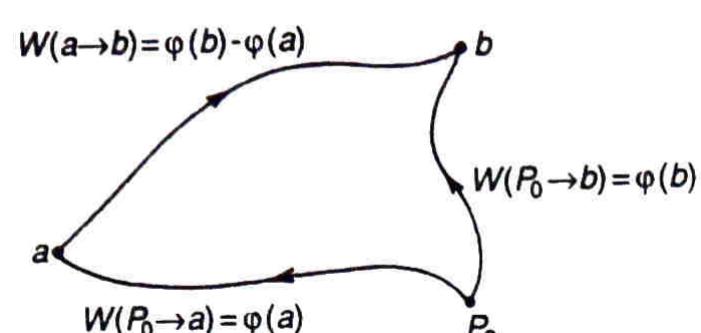
$$\varphi(1) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{1j}} \quad (6.23)$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2 \quad (6.24)$$

Zapamatujte si, že potenciál φ má fyzikální význam: je to potenciální energie, kterou by měl jednotkový náboj, přenesl-li by se z nějakého vztazného bodu do daného bodu v prostoru.

6.4. $\vec{E} = -\nabla\varphi$

[**Feynman02**] Kdo potřebuje potenciál φ . Vždyť síly působící na náboje jsou určené hodnotami \vec{E} -elektrickým polem. Vtip je v tom, že \vec{E} je možné snadno dostat z



Obrázek 6.4.: Práce vykonaná při postupu po jakékoliv dráze z a do b je rovna záporně vzaté práci z nějakého bodu P_0 do a zvětšené o práci z P_0 do b

φ tak jednoduše jako vypočítat derivaci. Uvažujme dva body, jeden v x a druhý v $(x + dx)$, ale u obou při stejných y a z , a ptejme se, jak velká práce se vykoná při přenášení jednotkového náboje z jednoho bodu do druhého. Jde o dráhu podél horizontální x do $x + dx$. Vykonaná práce je dána rozdílem potenciálů v obou bodech:

$$\Delta W = \varphi(x + dx, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x.$$

Ale práce vykonaná po téže dráze proti poli je

$$\Delta W = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x \Delta x.$$

Vidíme že,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.25)$$

Podobně $E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ - nebo, napsané souborné symbolikou vektorové analýzy,

$$\vec{E} = -\nabla \varphi. \quad (6.26)$$

Tato rovnice představuje diferenciální tvar vztahu (6.21). Jakoukoliv úlohu, v níž jsou dány náboje, je možné řešit výpočtem potenciálu pomocí (6.23) nebo (6.24) a použitím vztahu (6.26) pro výpočet pole. Vztah (6.26) souhlasí i s tím, co jsme zjistili o vektorovém počtu: pro každé skalární pole platí

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (6.27)$$

Podle vztahu (6.24) je skalární potenciál φ dán trojrozměrným integrálem podobným tomu, který jsme měli pro \vec{E} . Je proto vůbec výhodné počítat φ místo \vec{E} ? Ano. Pro φ máme jen jeden integrál, zatímco pro \vec{E} jsou zapotřebí tři integrály, neboť jde o vektor. Kromě toho $\frac{1}{r}$ je obvykle jednodušší integrovat než $\frac{x}{r^3}$. V mnoha praktických případech se ukazuje, že je poněkud jednodušší vypočítat φ a pak najít elektrické pole pomocí gradientu, než počítat tři integrály pro \vec{E} . Je to čistě praktická záležitost.

Potenciál φ má kromě toho i hlubší fyzikální význam. Ukázali jsme, že \vec{E} v Coulombově zákoně je odvozeno z $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, kdy φ je dán vztahem (6.21). Ale z vektorového počtu víme, že je-li \vec{E} rovno gradientu skalárního pole, pak rot \vec{E} musí být rovna nule:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.28)$$

Toto je však právě naše druhá základní rovnice elektrostatiky (6.6). Ukázali jsme tak, že Coulombův zákon definuje pole \vec{E} , které splňuje tuto podmínku. Dosud je vše v pořádku.

Ve skutečnosti jsme dokázali, že $\nabla \times \vec{E}$ je rovno nule, dřív než jsme definovali potenciál. Ukázali jsme, že práce vykonaná na uzavřené dráze je rovna nule, tj. že

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

pro každou dráhu. V kapitole 5 jsme se přesvědčili, že pro každé takové pole musí být $\nabla \times \vec{E}$ všude rovno nule. Elektrické pole v elektrostatice je tedy příkladem pole s nulovou rotací.

Můžeme se pocvičit ve vektorovém počtu tím, že dokážeme tvrzení, že $\nabla \times \vec{E} = 0$, a to výpočtem složek vektoru $\nabla \times \vec{E}$ pro pole bodového náboje dané vztahem (6.10). Bude-li výsledkem výpočtu nula, pak podle principu superpozice bychom dostali nulu pro jakékoli rozdelení náboje.

Je třeba poukázat na důležitou skutečnost. Pro libovolnou radiální sílu nezávisí vykonaná práce na dráze a existuje potenciál. Přemýšlite-li o tom, přesvědčíte se, že všechny úvahy, které jsme provedli výše, abychom ukázali, že integrál práce nezávisí na dráze, byly postaveny pouze na faktu, že síla jednotlivého náboje je radiální a kulově symetrická. Při této úvahách jsme nevyužívali skutečnost, že závislost síly na vzdálenosti je dáná vztahem $\frac{1}{r^2}$, mohlo by tedy jít o libovolnou závislost na r . Existence potenciálu a skutečnost, že $\nabla \times \vec{E}$ je rovna nule, pramení opravdu jen ze symetrie a směru elektrostatických sil. Proto vztahy (6.27) nebo (6.28), mohou obsahovat pouze část zákonů elektřiny.

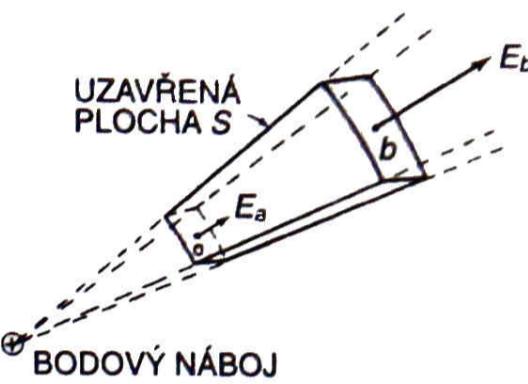
6.5. Tok pole \vec{E}

[Feynman02] Nyní odvodíme rovnici pole, která závisí právě a přímo na skutečnosti, že ve jmenovateli zákona síly vystupuje druhá mocnina vzdálenosti. To, že se pole mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, se někomu zdá být „jedině přirozený“, neboť „je to způsob, kterým se říší všechno“. Vezměme si světelný zdroj, z něhož vychází světlo: množství světla procházející základnou kužele s vrcholem ve zdroji je stejně bez ohledu na to, jak daleko je základna od zdroje. Tak to musí být, má-li se světelná energie zachovávat. Množství světla připadající na jednotku plochy, tedy intenzita osvětlení, se musí měnit přímo úměrně plošnému obsahu základny kužele, tj. nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Ze stejného důvodu by se zajisté mělo měnit i elektrické pole. Ale nic takového jako „stejný“ důvod neexistuje. Nikdo nemůže říci, že elektrické pole je mírou toku něčeho podobného jako světlo, které se musí zachovávat. Kdybychom měli takový „model“ elektrického pole, v němž by vektor pole udával směr a rychlosť, tj. představoval by tok nějakých drobných vyletujících „kulík“, a kdyby náš model vyžadoval, aby se tyto kulky zachovávaly a žádná by nemohla zmizet, pokud už byla

vystřelena, tak bychom řekli, že můžeme nevyhnutelnost zákona nepřímo úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti „pochopit“. Na druhé straně nevyhnutelně musí existovat nějaký matematický způsob, jak tuto fyzikální představu vyjádřit. Kdyby elektrické pole bylo něčím takovým jako zachovávající se vyletující kulky, měnilo by se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, a takové chování bychom byli schopni popsat rovnicí - což je čistě matematická záležitost. Není tedy nic špatného na tom, když se této představy podržíme, pokud ovšem nebude tvrdit, že elektrické pole se opravdu skládá z kulek, ale budeme si vědomi toho, že používáme model, který nám pomáhá najít správné matematické vyjádření.

Předpokládejme, že jsme si na chvíli představili elektrické pole jako proud něčeho, co se zachovává - všude, tj. mimo místa, kde se nachází náboje. (Proudění musí někde začínat.) Představujeme si, že něco, ať už je to cokoliv, vytéká z náboje do okolního prostoru. Byl-li by \vec{E} vektor takového toku (jako je \vec{h} v případě tepelného toku), v blízkosti bodového zdroje by se vyznačoval závislostí $\frac{1}{r^2}$. Tento model chceme nyní použít k tomu, abychom našli způsob, jak dojít k zákonu nepřímo úměrnosti na druhé mocnině vzdálenosti principiálnější nebo abstraktnější cestou místo toho, aby se prostě konstatovalo: „nepřímo úměrné druhé mocnině“. (Snad se divíte, proč se chceme vyhnout přímému zformulování takového jednoduchého zákona, a místo toho chceme dosáhnout téhož jinou cestou. Ale mějte trpělivost! Ukáže se, že je to užitečné.)

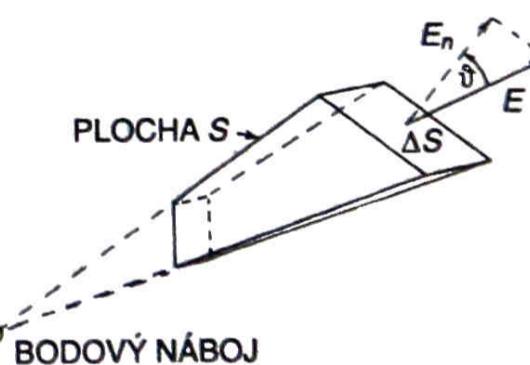
Ptáme se: Jaký je tok pole \vec{E} ven z libovolné uzavřené plochy v okolí bodového náboje? Nejdříve vezměme jednoduchou plochu, jakou ukazuje obr. 6.5.



Obrázek 6.5.: Tok vektoru \vec{E} z plochy S je roven nule

Má-li pole \vec{E} charakter toku, musí být celkový tok z takové krabičky roven nule. Tento výsledek opravdu dostaneme, rozumíme-li „tokem“ z této plochy plošný integrál normálové složky vektoru \vec{E} , tj. veličiny, kterou jsme nazvali tokem pole \vec{E} . V případě radiálních (rovnoběžných se spojnicí k náboji) stěn je normálová složka \vec{E} nulová. V případě kulových čelních stěn je normálová složka E_n rovna velikosti vektoru \vec{E} - se záporným znaménkem u menší a s kladným u větší stěny. Velikost vektoru \vec{E} klesá jako $\frac{1}{r^2}$, ale plošný obsah stěny je přímo úměrný veličině r , takže jejich součin na r nezávisí. Tok vektoru \vec{E} do stěny a se právě ruší tokem ze stěny b . Celkový tok z S je roven nule, což je rovnocenné s tvrzením, že pro tuto plochu je

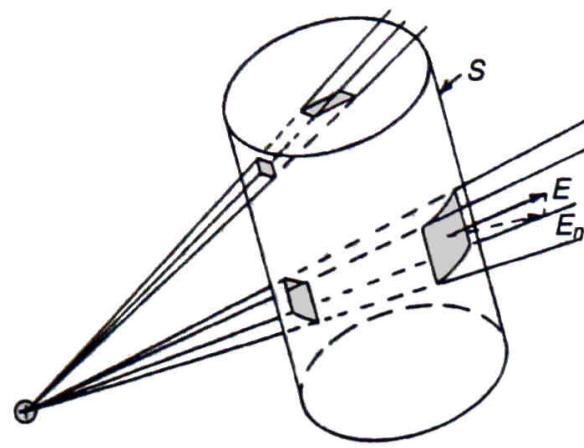
$$\oint_S E_n dS = 0. \quad (6.29)$$



Obrázek 6.6.: Tok vektoru \vec{E} z plochy S je roven nule

Dále ukážeme, že obě koncové plochy mohou být skloněny vzhledem k radiální přímce a integrál (6.29) se přitom nezmění. Ačkoli to platí obecně, pro naše účely postačí ukázat, že to platí, jsou-li koncové plochy malé, takže se ze zdroje jeví pod malým úhlem, přesněji pod infinitesimálním úhlem. Na obr. 6.6 vidíme plochu S s radiálními „stěnami“ a šikmými „konci“. Na obrázku nejsou koncové plochy malé, ale máte si představit podobnou situaci s velmi malými koncovými plochami. Pak bude pole \vec{E} na každé ploše dostatečně homogenní, abychom pracovat pouze s jeho hodnotou ve středu plochy. Skloníme-li plošku o úhel ϑ , její plošný obsah se zvětší $\frac{l}{\cos \vartheta}$. Ale E_n složka vektoru \vec{E} normálová k ploše, se změní úměrně $\cos \vartheta$. Součin $E_n \cdot \Delta S$ se tedy nezmění. Tok z celé plochy S zůstává nulový.

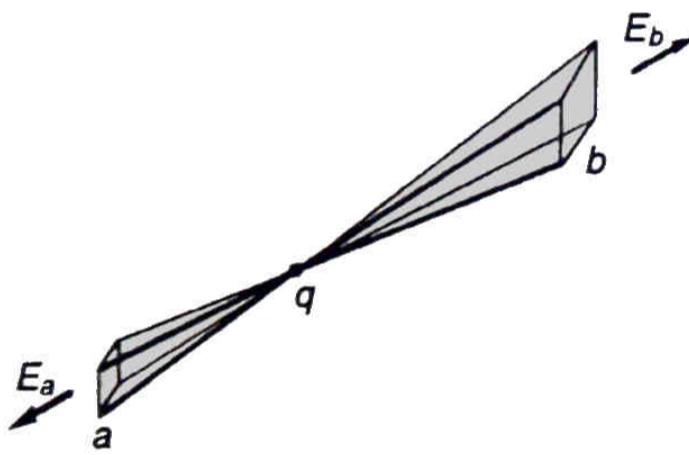
Nyní se snadno přesvědčíme, že tok z objemu vymezeného jakoukoliv plochou S musí být roven nule. Každý objem je totiž možné si představit, jako kdyby se skládal z částí, podobných útvaru znázorněnému na obr. 6.6. Celá plocha S se přitom rozdělí



Obrázek 6.7.: Každý objem lze považovat za úplně složený z infinitezimálních komolých kuželů. Tok \vec{E} z jednoho konce kuželového segmentu se rovná zápornému toku z druhého konce. Celkový tok z plochy S je proto roven nule.

do párů koncových plošek, a protože vtoky a výtoky z těchto koncových plošek se v jednotlivých párech navzájem ruší, celkový tok z plochy S bude roven nule. Tuto představu ilustruje obr. 6.7. Dostáváme úplně obecný výsledek, že celkový tok pole \vec{E} ven z jakékoli plochy S v poli bodového náboje je roven nule.

Ale pozor! Nás důkaz platí pouze tehdy, neobklopuje-li plocha S náboj. Co by se stalo, kdyby se bodový náboj nacházel uvnitř plochy? Opět můžeme naši plochu rozdělit na páry plošek, které jsou vymezeny radiálními přímkami procházejícími nábojem tak, jak to ukazuje obr. 6.8. Opět jsou tu toky oběma ploškama stejně velké, z týchž důvodů jako dříve, pouze teď mají stejně znaménko. Tok z plochy, která obklopuje náboj, není nulový. Jaký tedy je? Můžeme ho najít malým trikem. Předpokládejme, že náboj „odstraníme“ z „vnitřku“ tím, že ho obalíme malou plochou S uloženou úplně uvnitř původní plochy S (obr. 6.9a)



Obrázek 6.8.: Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.

Pak se v objemu mezi oběma plochami S a S' žádný náboj nenachází. Celkový tok z tohoto objemu (včetně toku plochou S') je roven nule na základě úvah, jež jsme již uvedli. Z těchto úvah vlastně vyplývá, že tok do objemu plochou S' je stejný jako tok z něj ven plochou S .

Za S' můžeme zvolit plochu jakéhokoliv tvaru. Zvolme tedy kulovou plochu se středem v náboji (obr. 6.9b). Pak dokážeme snadno vypočítat tok touto plochou.

Je-li poloměr malé koule r , má \vec{E} všude na jejím povrchu velikost

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

a směr normály k povrchu. Celkový tok S' dostaneme, vynásobíme-li tuto normálovou složku plošným obsahem plochy S' :

$$\text{Tok plochou } S' = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (6.30)$$

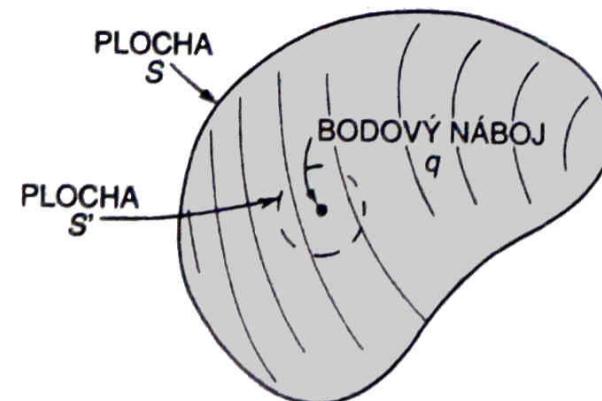
je tedy roven hodnotě, která nezávisí na poloměru koule! Z toho vidíme, že tok ven z plochy S je také roven $\frac{q}{\epsilon_0}$ - hodnotě, jež nezávisí na tvaru plochy S , pokud náboj q zůstává uvnitř.

Naše výsledky můžeme napsat takto:

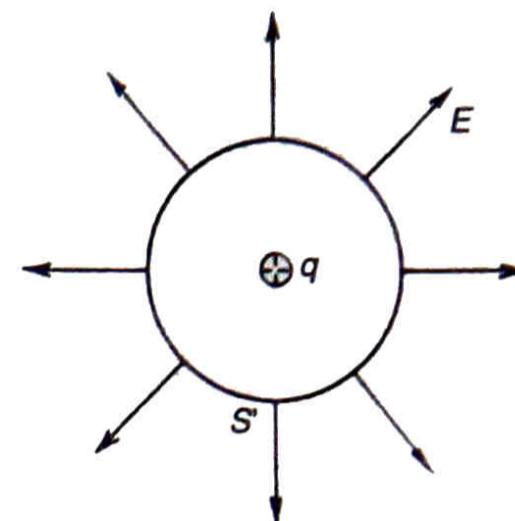
$$\int E_n dS = \begin{cases} 0 & q \text{ vně } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & q \text{ uvnitř } S \end{cases} \quad (6.31)$$

Vratme se k naší analogii s kulkami a podívejme se, zda má smysl. Podle naší věty je celkový tok kulek nějakou plochou roven nule, neobklopuje-li plocha zbraň vystřelující kulky. Je-li zbraň obklopena plochou, ať má jakýkoliv tvar a velikost, počet kulek jí proletující je stejný - určuje jej rychlosť, jakou zbraň kulky vystřeluje. Pro zachovávající se kulky vypadá všechno celkem rozumně. Ale poskytuje nám tento model něco více, než dostáváme napsáním vztahu (6.31)? Nikomu se nepodařilo

dosáhnout toho, aby tyto kulky dokázaly něco více, než zformulovat tento jediný zákon. Kromě toho už nevedou k ničemu, jen k omylům. Proto dnes dáváme přednost čistě abstraktní představě elektromagnetického pole.



(a) Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.



(b) Tok kulovou plochou obsahující uvnitř bodový náboj q je roven $\frac{q}{\epsilon_0}$

Obrázek 6.9.

6.6. Gaussův zákon. Divergence pole \vec{E}

[Feynman02] Nás překrásný výsledek, tj. vztah (6.31), jsme dokázali pro jediný bodový náboj. Nyní předpokládejme, že jsou dva náboje, náboj q_1 v jednom bodě a náboj q_2 v jiném bodě. Tato úloha vypadá těžší. Elektrické pole, jehož normálovou složku při toku integrujeme, je polem pocházejícím od obou nábojů, tj. představujeme \vec{E}_1 elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj q_1 a \vec{E}_2 elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj q_2 , celkové elektrické pole $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Tok každou uzavřenou plochou S je

$$\oint_S E_{1n} + E_{2n} dS = \oint_S E_{1n} dS + \oint_S E_{2n} dS. \quad (6.32)$$

V případě obou nábojů je roven toku vyvolanému prvním nábojem plus tok vyvolaný druhým nábojem. Jsou-li oba náboje na vnější straně S , tok plochou S je nulový. Je-li q_1 uvnitř S a q_2 mimo, první integrál dává $\frac{q_1}{\epsilon_0}$ a druhý nulu. Obklopuje-li

plocha oba náboje, bude každý dávat svůj příspěvek a dostáváme, že tok je $\frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$. Obecné pravidlo je zřejmé: celkový tok z uzavřené plochy je roven celkovému náboji uvnitř, dělenému ϵ_0 .

Náš výsledek představuje důležitý obecný zákon elektrostatického pole, nazvaný *Gaussův zákon*.

$$\int E_n dS = \frac{\text{součet nábojů uvnitř}}{\epsilon_0} \quad (6.33)$$

jakákoliv uzavřená plocha S

nebo

$$\int E_n dS = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\epsilon_0} \quad (6.34)$$

jakákoliv uzavřená plocha S

kde

$$Q_{\text{uvnitř}} = \sum_{\text{uvnitř } S} q_i. \quad (6.35)$$

Popříme-li rozmístění nábojů pomocí hustoty náboje ρ , můžeme to chápout tak, že každý infinitezimální objem dV obsahuje „bodový“ náboj ρdV . Součet všech nábojů pak bude dán integrálem

$$Q_{uvnitř} = \int_{\text{objem uvnitř } S} \rho dV. \quad (6.36)$$

Z našeho odvození vidíme, že Gaussův zákon vyplývá ze skutečnosti, že mocnitél v Coulombově zákoně je roven přesné dvěma. Pole se zákonem $\frac{1}{r^3}$ nebo jakékoliv pole se zákonem $\frac{1}{r^n}$, kde $n \neq 2$, by ke Gaussovemu zákonu nevedlo. Gaussův zákon tedy není právě nijméně vyjádřením (v odlišném tvaru) Coulombova zákona síly, která působí mezi dvěma náboji. Opravdu, zpětným postupem můžete z Gaussova zákona odvodit Coulombův zákon. Oba tyto zákony jsou zcela ekvivalentní, máme-li na paměti, že síly působící mezi náboji jsou radiální².

Nyní bychom rádi napsali Gaussův zákon pomocí derivací. Abychom to udělali, použijeme Gaussův zákon na povrch infinitezimální krychle. V kapitole 5 jsme ukázali, že tok vektoru \vec{E} z takového krychle je roven hodnotě $\nabla \cdot \vec{E}$ vynásobené objemem krychle dV ! Náboj uvnitř dV je podle definice roven ρdV , takže z Gaussova zákona dostaneme

$$\nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.37)$$

Diferenciální tvar Gaussova zákona představuje první z našich fundamentálních rovnic pole v případě elektrostatiky (rovnice 6.5). Ukázali jsme tím, že obě rovnice elektrostatiky (rovnice 6.5 a 6.6) jsou ekvivalentní Coulombovu zákonu síly. Dále se budeme zabývat jedním příkladem použití Gaussova zákona. (Později se dostaneme k mnohem většímu množství takových příkladů.)

6.7. Pole nabité koule

[Feynman02] Jednou z těžkých úloh, s nimiž jsme se setkali, když jsme se studovali teorii gravitace, bylo dokázat, že síla pocházející z pevné koule je na jejím povrchu taková, jako kdyby všechna látka byla soustředěna ve středu koule. Newton po mnoho let svou teorii gravitace nepublikoval, protože si nebyl jistý, zda je toto tvrzení pravdivé. Dokázali jsme jej ve 13. kapitole 1. dílu tak, že jsme vypočítali integrál potenciálu a pak jsme pomocí gradientu našli gravitační sílu. Nyní můžeme tuto větu dokázat jednodušším způsobem. Tentokrát budeme dokazovat jí odpovídající větu pro homogenně elektricky nabité kouli. (Protože zákony elektrostatiky jsou stejné jako zákony gravitace, mohl by být tentýž důkaz proveden i pro gravitační pole.)

Ptáme se: Jaké je elektrické pole \vec{E} v bodě P , který se nachází někde mimo kouli s rovnoměrným rozdělením náboje? Protože tam není žádný význačný směr, můžeme předpokládat, že \vec{E} směruje od středu koule. Uvažujme myšlenou kulovou plochu, která je koncentrická s nabité koulí a prochází bodem P (obr. 6.10). Tok směrem ven z této plochy je

$$\int E_n dS = E \cdot 4\pi R^2.$$

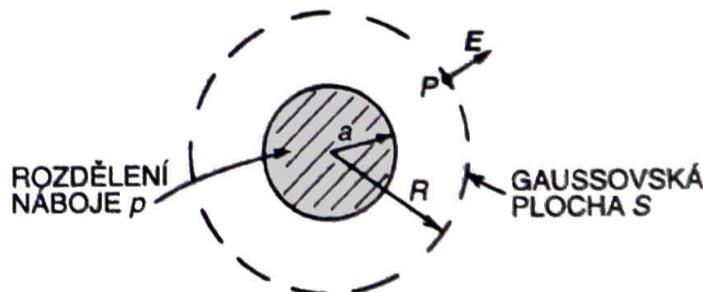
Podle Gaussovy věty je tento tok roven celkovému náboji koule Q (dělenému ϵ_0):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

neboli

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

což je stejný vzorec, jaký bychom měli pro bodový náboj Q . Newtonovu úlohu jsme dokázali snáze než pomocí integrálu. To je, pravda, jen zdánlivě jednodušší – nějaký čas vám trvalo, než jste porozuměli Gaussovemu zákonu, takže se můžete domnívat, že ve skutečnosti jste ani žádný čas neušetřili. Když však budete používat tuto větu stále častěji, začne se to splácat. Je to otázka efektivnosti.



Obrázek 6.10.: Použití Gaussova zákona na odvození pole homogenní nabité koule

6.8. Siločary, ekvipotenciální plochy

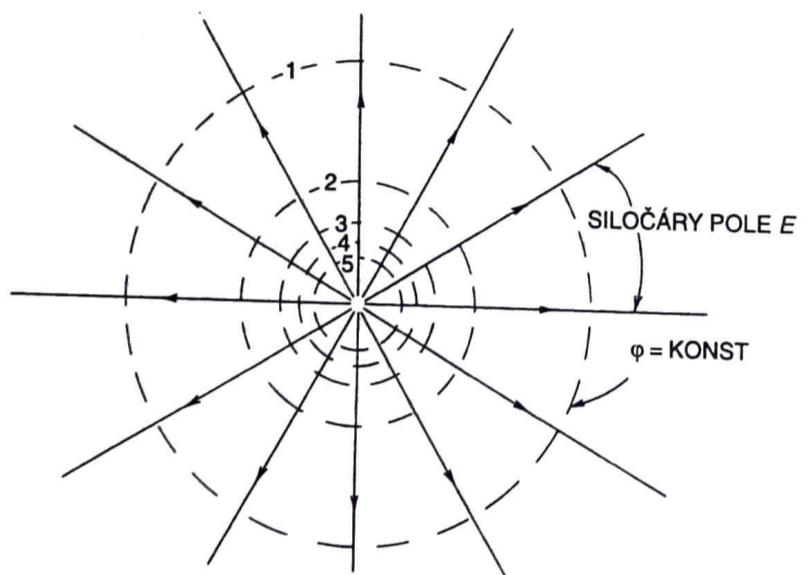
[Feynman02] Nyní bychom rádi uvedli geometrický popis elektrostatického pole. Oba zákony elektrostatiky – první, že tok je přímo úměrný náboji uvnitř, a druhý, že elektrické pole je gradientem potenciálu – je rovněž možno interpretovat geometricky. Ilustrujeme to těmito dvěma příklady. Nejdříve mějme pole bodového náboje.

²A kulové symetrické neboli centrální

Nakreslíme křivky ve směru pole, tj. křivky, jejichž tečny mají všude směr vektoru pole (obr. 6.11). Jsou to tzv. siločary.

V každém bodě ukazují směr elektrického vektoru. Chceme však znázornit i jeho velikost. Můžeme proto zavést pravidlo, že intenzitu elektrického pole bude reprezentovat „hustota“ siločar. Hustotou siločar rozumíme počet siločar připadajících na jednotku plochy v rovině kolmé na siločary. Pomocí těchto pravidel můžeme vytvořit obraz elektrického pole. V případě bodového náboje se musí hustota siločar zmenšovat podle zákona $\frac{1}{r^2}$. Ale plošný obsah kulové plochy kolmé na siločary při každém poloměru r vzrůstá s r^2 . Zachováme-li tedy tentýž počet siločar ve všech vzdálenostech od náboje, jejich hustota zůstane přímo úměrná velikosti pole. Stejný počet siločar v každé vzdálenosti můžeme zabezpečit tak, že budeme trvat na tom, aby siločary byly souvislé, tj. aby siločára, pokud už jednou z náboje vyšla, nikde nekončila. Gaussův zákon vyjádřený jazykem siločar říká, že siločary mají začínat pouze v kladných nábojích a končit pouze v záporných nábojích. Počet siločar vycházejících z náboje q musí být roven $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Podobný geometrický obraz můžeme nyní najít i pro potenciál φ . Nejjednodušší způsob jak znázornit potenciál, je nakreslit plochy, na nichž je φ stálé. Říkáme jim ekvipotenciální plochy (hladiny), tj. plochy se stejným potenciálem. Jaký je geometrický vztah ekvipotenciálních ploch k siločáram? Elektrické pole je gradientem potenciálu. Gradient udává směr nejrychlejší změny potenciálu, a proto je kolmý na ekvipotenciální plochu (v každém bodě). Kdyby totiž \vec{E} nebylo kolmé na ekvipotenciální plochu, mělo by v ní nenulovou složku. Pak by se potenciál na ploše měnil a nebyla by ekvipotenciální plochou. Ekvipotenciální plochy tedy musí všechny svírat se siločárami elektrického pole pravý úhel.



Obrázek 6.11.: Siločary a ekvipotenciální plochy v případě kladného bodového náboje.

V případě osamoceného bodového náboje jsou ekvipotenciálními plochami kulové plochy se středem v náboji. Na obr. 6.11 jsme ukázali řez těmito kulovými plochami procházejícími nábojem.

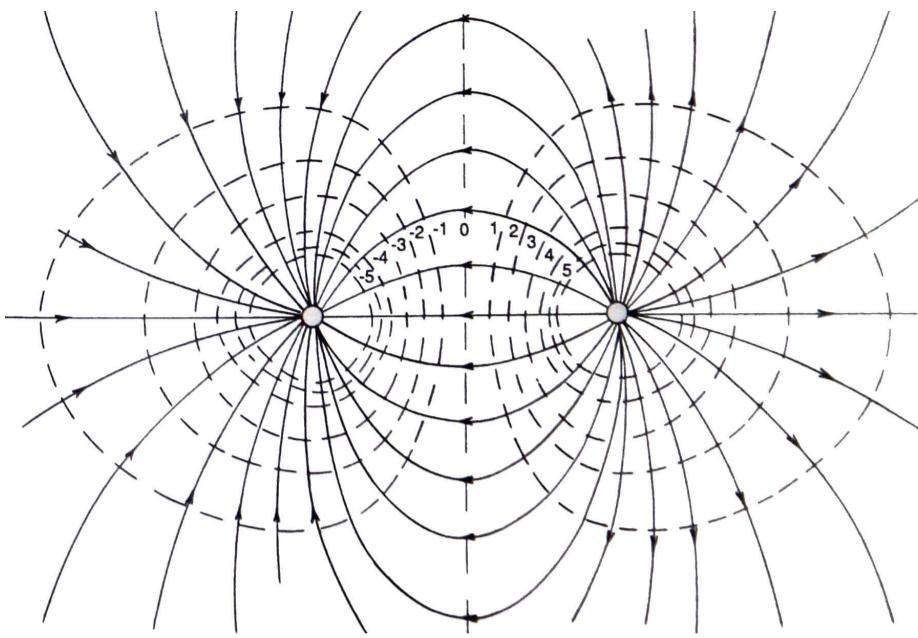
Jako druhý příklad uvažujme pole v blízkosti dvou stejně velkých nábojů, jednoho kladného a druhého záporného. Najít toto pole je snadné. Jde o superpozici polí pocházejících od každého z těchto nábojů. Můžeme tedy dva obrázky, jako je obr. 6.11, položit jeden na druhý, ale to nejde. Dostali bychom tak siločáry, které se navzájem protínají, a to není možné, neboť \vec{E} nemůže mít v jednom bodě dva různé směry. Nevýhoda popisu pole pomocí siločar je nyní očividná. Geometrickými úvahami nelze snadno dospat k tomu, jaký průběh budou mít nové siločáry. Ze dvou nezávislých obrazů siločar nemůžeme dostat jejich složený obraz. Princip superpozice – jednoduchý a zároveň hluboký princip teorie elektrických polí – nemá v popisu pole pomocí siločar jednoduchou reprezentaci.

Představa siločar má však své použití, a proto bychom přece rádi nakreslili jejich obraz pro dvojici nábojů stejné velikosti a opačných znamének.

Vypočítáme-li pole ze vztahu (6.12) a potenciály z (6.22), můžeme siločáry a ekvipotenciální hladiny nakreslit. Výsledkem je obr. 6.12. Tuto úlohu jsme však museli řešit nejdříve matematicky.

6.9. Použití Gaussova zákona

V elektrostatice platí dva zákony: tok elektrického pole z objemu je přímo úměrný náboji v něm — Gaussův zákon, a cirkulace elektrického pole je rovna nule, tj. \vec{E} je gradientem. Z těchto dvou zákonů vyplývají v elektrostatice všechny předpovědi. Ale vyjádřit tyto zákony matematicky je jedna věc a používat je snadno a s určitou dávkou důvtipu je věc druhá. V této kapitole probereme řadu výpočtů, které je možné provést pomocí Gaussova zákona. Dokážeme některé věty a popíšeme některé jevy, zejména ve vodičích, které je možno na základě tohoto zákona velmi snadno pochopit. Samotný Gaussův zákon však nemůže poskytnout řešení žádné úlohy, neboť je třeba respektovat ještě druhý zákon. Proto, když budeme používat Gaussův zákon k řešení konkrétních úloh, musíme k němu ještě něco přidat: Budeme muset například udělat nějaký předpoklad o tom, jak vypadá pole, založený například i na požadavcích symetrie. Anebo budeme muset explicitně zavést představu, že pole je gradientem potenciálu [Feynman02].



Obrázek 6.12.: Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě dvou stejně velkých bodových nábojů s opačným znaménkem

6.9.1. Rovnováha v elektrostatickém poli

Uvažujme nejdříve o tomto problému: Kdy může být bodový náboj ve stabilní mechanické rovnováze v elektrostatickém poli jiných nábojů? Jako příklad si představme tři záporné náboje umístěné ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka ve vodorovné rovině. Zůstal by kladný náboj, který se nachází ve středu trojúhelníka, na tomto místě? (Bude jednodušší, když na okamžik zapomeneme na gravitaci, ačkoliv její zahrnutí výsledky stejně nezmění) Síla působící na kladný náboj je nulová, ale je to stabilní rovnováha? Vrátil by se náboj do rovnovážné polohy, kdyby se trochu posunul? Odpověď zní: ne.

V žádném elektrostatickém poli neexistují žádné body stabilní rovnováhy (s výjimkou poloh, ve kterých jsou už jiné náboje). Z Gaussova zákona je snadno vidět proč. Za prvé, má-li být náboj v rovnováze v nějakém konkrétním bodě P_0 , musí tam být pole nulové. Za druhé, má-li být rovnováha stabilní, požadujeme, aby při vysunutí náboje z P_0 v jakémkoliv směru vznikla zpětná síla směřující opačně než posunutí. Elektrické pole tedy musí ve všech okolních bodech směrovat dovnitř - k bodu P_0 . Nejsou-li v P_0 žádné náboje, bylo by to v rozporu s Gaussovým zákonem. Snadno se můžeme přesvědčit.

Představme si malou myšlenou plošku, obklopující P_0 (obr. 6.13). Směruje-li všechno v okolí elektrické pole do P_0 , jistě není plošný integrál normálové složky roven nule. V případě ukázaném na obrázku musí tok ploškou mít zápornou hodnotu. Podle Gaussova zákona tok elektrického pole z libovolné plochy je přímo úměrný celkovému náboji uvnitř. Není-li v P_0 žádný náboj, je existence takového pole, jako jsme právě popsali, v rozporu s Gaussovým zákonem. Vyvážit kladný náboj v prázdném prostoru, tj. v bodě, v němž se nenachází žádný záporný náboj, se nepodaří. Kladný náboj může být v rovnováze jen tehdy, když se nachází ve středu rozdělení záporného náboje. Samozřejmě, v takovém případě by rozdělení záporného náboje muselo být udržováno na místě jinými než elektrostatickými silami.

Náš výsledek jsme získali pro bodový náboj. Platí tentýž závěr i pro složité uspořádání nábojů udržovaných pohromadě v pevných vzájemných polohách, řekněme tyčemi? Prozkoumáme tento problém pro dva stejně náboje upevněné na tyči. Může být v elektrostatickém poli takový útvary v rovnováze? Opět zní odpověď: ne. Celková síla působící na tyč nemůže mít zpětný účinek pro posunutí v každém směru.

Označme celkovou sílu působící na tyč v jakékoli poloze \vec{F} ; \vec{F} je pak vektorovým polem. Budeme-li uvažovat jako předtím, dojdeme k závěru, že v poloze stabilní rovnováhy musí mít divergence \vec{F} zápornou hodnotu. Celková síla působící na tyč je rovna prvnímu náboji krát pole v jeho poloze, plus druhý náboj krát pole v jeho poloze:

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}_1 + q_2 \vec{E}_2. \quad (6.38)$$

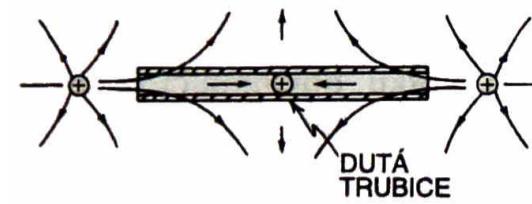
Pro divergenci F z toho vyplývá

$$\nabla \cdot \vec{F} = q_1 (\nabla \cdot \vec{E}_1) + q_2 (\nabla \cdot \vec{E}_2).$$

Je-li každý z těchto nábojů ve vakuum, jsou $\nabla \cdot \vec{E}_1$ a $\nabla \cdot \vec{E}_2$ rovny nule a divergence $\nabla \cdot \vec{F}$ je také rovna nule - není tedy záporná, jak by bylo žádoucí pro rovnováhu. Sami můžete rozšířit tuto úvahu a přesvědčit se, že vůbec žádný pevný útvary skládající se z jakéhokoliv počtu nábojů nemůže mít v elektrostatickém poli polohu stabilní rovnováhy ve volném prostoru.

Nedokázali jsme však, že rovnováha je zakázaná, existují-li úchyty nebo jiná mechanická omezení. Jako příklad nám poslouží dutá trubice, v níž se může náboj volně pohybovat dopředu a dozadu, ale ne do stran. V tomto případě je možno velmi snadno navrhnut elektrické pole, které na obou koncích směruje dovnitř, připustí se, že v blízkosti středu trubice může směrovat ven do stran. Prostě na každý

konec trubice umístíme kladné náboje, jak ukazuje obr. 6.14. Nyní může existovat rovnovážný bod i tehdy, když je divergence rovna nule. Náboj by, samozřejmě, nebyl ve stabilní rovnováze pro pohyb do stran, kdyby nepůsobily „neelektrické“ síly stěn trubice.



Obrázek 6.14.: Existují-li mechanické vazby, náboj může být v rovnováze.

6.9.2. Rovnováha s vodiči

V poli soustavy fixovaných nábojů neexistuje pro náš zkušební náboj žádná stabilní poloha. Jak je to v soustavě nabitých vodičů? Může soustava nabitých vodičů vytvořit takové pole, které bude mít bod stabilní rovnováhy pro bodový náboj? (Myslíme, samozřejmě, bod jinde než na povrchu vodiče.) Víte, že vodiče se vyznačují tím, že náboje v nich se mohou volně pohybovat. Je možné, že posune-li se trochu náš zkušební náboj, pohnou se ostatní náboje na vodičích tak, že na něj budou působit návratovou silou? Odpověď se stále stejná: Ne, ačkoliv z důkazu, který jsme podali výše, to není patrné. V tomto případě je důkaz těžší a my pouze naznačíme postup.

Nejprve poznamenáme, že když se náboje na vodičích přerozdělují, může se to dít pouze tehdy, zmenšuje-li se tím jejich potenciální energie. (Při pohybu ve vodiči se část jejich energie ztrácí na teplo). Už jsme ukázali, že jsou-li náboje vytvářející pole stacionární, v blízkosti každého bodu P_0 , v němž je pole rovno nule, existuje takový směr, že posune-li se jím z P_0 , energie systému se zmenší (neboť síla směřuje od P_0). Jakékoli přerozdělení nábojů na vodičích může pouze ještě více zmenšit potenciální energii, takže (podle principu virtuální práce) jejich pohyb jen zvětší sílu ve zmíněném směru orientovanou od P_0 , ale neobrátí ji.

Naše závěry neznamenají, že náboj není možné dostat do rovnováhy elektrickými silami. Je to možné, budou-li polohy nebo velikosti opěrných nábojů regulovány pomocí vhodných zařízení. Vyvíte, že tyč postavená na hrot je v gravitačním poli nestabilní, ale to nedokazuje, že není možné ji vyvážit na konci prstu. Podobně je možné náboj udržovat v nějaké poloze elektrickými silami, jsou-li proměnné. Ale ne pasivní, tj. statickou soustavou sil.

6.9.3. Stabilita atomů

Nelze-li náboje trvale udržovat ve svých polohách, zajisté nebude adekvátní představovat si látku, jako když se skládala ze statických bodových nábojů (elektronů a protonů), řídících se pouze zákony elektrostatiky. Taková elektrostatická konfigurace je nemožná, zhroutila by se.

Svého času bylo navrženo, že kladný náboj atomu může být rozdelen homogenně v kouli a záporné náboje — elektrony mohou být v klidu uvnitř kladného náboje, jak je to znázorněno na obr. 6.15. To byl první model atomu, navržený Thomsonem. Na základě Geigerových a Marsdenových pokusů však dospěl Rutherford k závěru, že kladné náboje jsou velmi silně soustředěny v tom, co nazval jádrem. Thomsonův statický model byl zavržen.

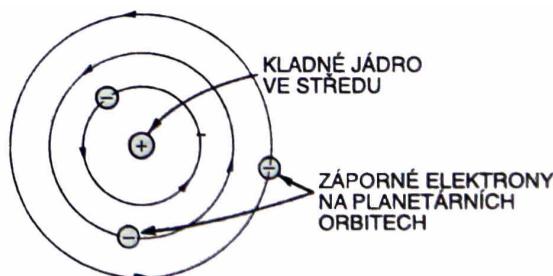


Obrázek 6.15.: Thomsonův model atomu

Rutherford a Bohr pak navrhli, že půjde o dynamickou rovnováhu s elektrony obíhajícími na orbitách, jako na obr. 6.16. Orbitální pohyb by zabraňoval elektronům spadnout k jádru. Již známe nejméně jeden problém spojený s touto představou. Při takovém pohybu by elektrony měly zrychlení (v důsledku jejich kruhového pohybu), a vyzařovaly by proto energii.

Tím by ztrácely kinetickou energii potřebnou na to, aby zůstaly na orbitě a spirálově by se blížily k jádru. Opět nestabilita!

Nyní se stabilita atomů vysvětluje pomocí kvantové mechaniky. Elektrostatické síly přitahují elektron těsně k jádru, jak je to jen možné, přičemž ten je však přinucen zůstat rozptýlen v prostoru do vzdálenosti vyplývající z principu neurčitosti. Byl-li by totiž omezen na příliš malý prostor, měl by velkou neurčitost v hybnosti. Ale to znamená, že by měl velkou střední energii, která by mu umožňovala vymanit se z elektrické přitažlivosti jádra. Konečným výsledkem je taková elektrická rovnováha, která se ani příliš neliší od Thomsonovy představy — pouze je to záporný náboj, který je rozptýlen (neboť hmotnost elektronu je mnohem menší než hmotnost protonu).

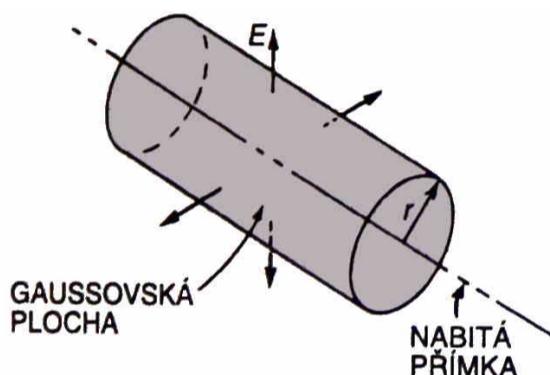


Obrázek 6.16.: Rutherfordův-Bohrův model atomu

6.9.4. Pole nabité přímky

Gaussův zákon je možno použít na řešení mnoha úloh o elektrostatickém poli vyznačujících se speciální symetrií - obvykle kulovou, válcovou nebo rovinou. Ve zbyvající části této kapitoly použijeme Gaussův zákon v několika takových úlohách. Snadnost, s jakou lze tyto úlohy takto řešit, může vést ke klamnému dojmu, že jde o velmi účinnou metodu umožňující postupovat tak i v mnoha dalších úlohách. Naneštěstí tomu tak není. Seznam úloh, které lze pomocí Gaussova zákona snadno řešit, bude brzy vyčerpán. V dalších kapitolách vypracujeme účinnější metody ke zkoumání elektrostatických polí.

Jako náš první příklad budeme uvažovat soustavu s válcovou souměrností. Předpokládejme, že máme velmi dlouhou, homogenně nabitou tyč. Myslíme tím, že elektrické náboje jsou rovnoměrně rozdeleny podél nekonečně dlouhé přímky, přičemž na jednotkovou délku připadá náboj τ . Chceme vědět, jaké bude elektrické pole. Úlohu je jistě možno řešit integrováním příspěvků každé části přímky k poli. My to však dokážeme bez integrování, pomocí Gaussova zákona a důvitu. Především snadno vytušíme, že elektrické pole bude směřovat radiálně od přímky. Jakákoli osová složka nábojů na jedné straně by se totiž anulovala stejně velkou osovou složkou pocházející od nábojů na straně druhé. Výsledkem může být pouze radiální pole. Také se zdá být odvodené, že pole by mělo mít tutéž velikost pro všechny body ve stejně velké vzdálenosti od přímky. Je to zřejmé. (Asi to není snadno dokazatelné, ale je to pravda, je-li prostor symetrický - a věříme, že je.)



Obrázek 6.17.: Válcová gaussovská plocha s nabité přímkou v ose

Gaussův zákon můžeme použít následujícím způsobem. Mějme myšlenou válcovou plochu koaxiální s naší přímkou, jak to znázorňuje obr. 6.17. Podle Gaussova zákona je celkový tok pole z této plochy roven náboji uvnitř válce, dělenému ϵ_0 . Protože pole je na válcovou plochu kolmé, normálová složka pole je rovna velikosti pole. Označíme ji E . Dále nechť poloměr válce je r . Je výhodné brát jeho délku jako jednotkovou. Tok válcovou plochou je roven součinu E a jejího plošného obsahu, tj. $2\pi r$. Tok oběma čelními stěnami je roven nule, protože elektrické pole je s nimi rovnoběžné. Celkový náboj uvnitř naší válcové plochy je přesně τ , neboť délka části přímky uzavřené uvnitř válce je rovna jedné jednotce. Z Gaussova zákona pak vyplývá, že

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\tau}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (6.39)$$

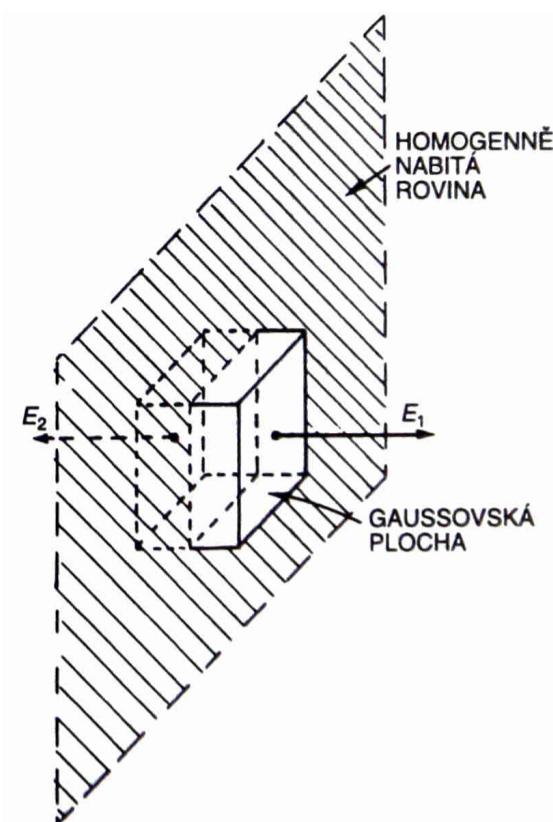
Elektrické pole nabité přímky je nepřímo úměrné první mocnině vzdálenosti od přímky.

6.9.5. Nabité rovina, dvě roviny

V dalším příkladě budeme počítat pole homogenně nabité roviny. Předpokládejme, že rovina se rozprostírá do nekonečna a na její plošnou jednotku připadá náboj σ . Teď provedeme další odhad. Důvody souměrnosti nás totiž vedou k přesvědčení, že směr pole je všude kolmý na rovinu a že neexistuje-li pole jiných nábojů, musí být pole na obou stranách roviny stejné (co do velikosti). Tentokrát zvolme jako naši gaussovskou plochu pravoúhlou krabičku, která protíná uvažovanou rovinu (obr. 6.18). Stěny krabičky rovnoběžné s rovinou budou mít stejný plošný obsah S . Pole je na tyto dvě stěny kolmé a se zbyvajícími čtyřmi stěnami je rovnoběžné. Celkový tok je roven $E \cdot S$ - krát plošnému obsahu první stěny plus $E \cdot S$ - krát plošný obsah protilehlé stěny, přičemž zbyvající čtyři stěny nepřispívají nicméně. Celkový náboj uvnitř krabičky je $\sigma \cdot S$. Když jej uvedeme do vztahu s tokem stěnami krabičky, dostaneme rovnost

$$E \cdot S + E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (6.40)$$

Tentýž výsledek jsme dostali už dříve integrováním po celé ploše. Gaussův zákon nám dává odpověď v tomto příkladě o mnoho rychleji (ačkoli nemá takovou obecnou použitelnost jako dřívější metoda).



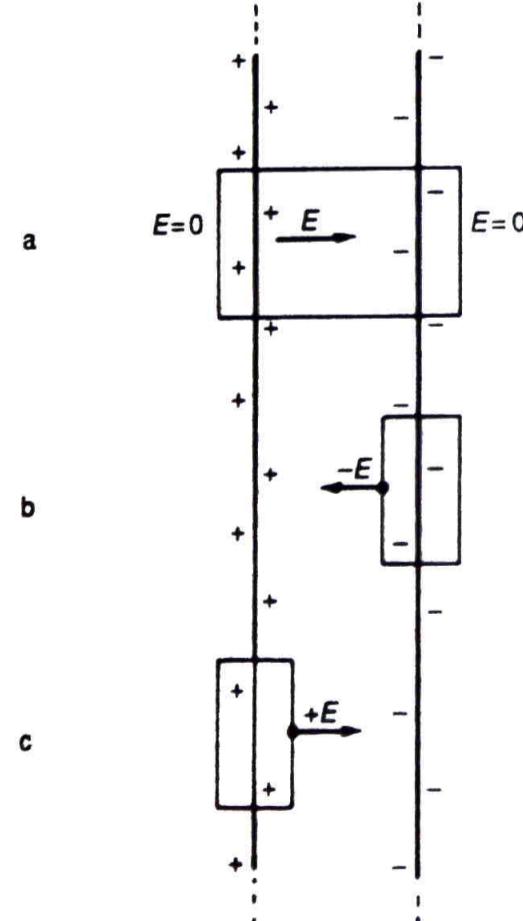
Obrázek 6.18.: Elektrické pole v blízkosti homogenně nabité roviny je možno najít použitím Gaussova zákona na myšlenou krabici.

Zdůrazňujeme, že tento výsledek se vztahuje pouze na pole vytvořené náboji rozmístěnými v rovině. Nacházejí-li se někde v blízkosti ještě další náboje, bude celkové pole v okolí roviny rovno součtu pole (6.40) a pole pocházejícího od těchto nábojů.

Úloha se dvěma rovnoběžnými rovinami se stejnými plošnými hustotami nábojů, které mají opačná znaménka $+\sigma$ a $-\sigma$, je také jednoduchá, předpokládáme-li opět, že vnější svět je zcela souměrný. Superpozicí obou řešení pro jednotlivé roviny nebo sestrojením gaussovské krabice, která by protala obě roviny, je možno jednoduše ozrejmít, že na vnější straně roviny je pole rovno nule (obr. 6.19a). Kdybychom uvažovali krabici, která protíná jen jednu z rovin částí b, c (obrázku), mohli bychom se přesvědčit, že pole mezi deskami musí být dvakrát větší než v případě jedni desky. Podle Gaussova zákona by pak platilo, že

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.41)$$

kde E_1 a E_2 jsou pole na každé straně roviny směřující od ní. Máme tedy výsledek

Obrázek 6.19.: Pole mezi dvěma nabitymi rovinami je rovno $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$E(\text{mezi deskami}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.42)$$

$$E(\text{venku}) = 0 \quad (6.43)$$

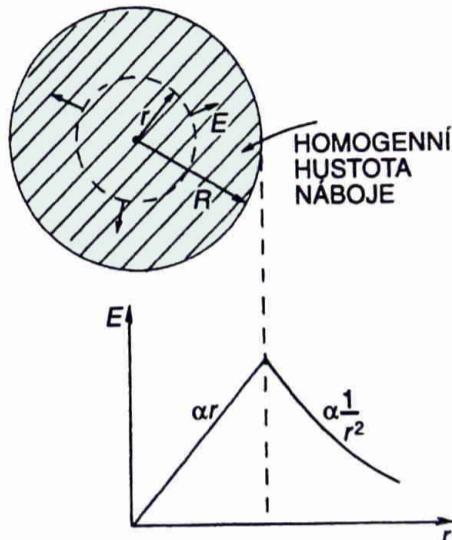
6.9.6. Nabité koule, kulová slupka

V kapitole 6.7 jsme již použili Gaussov zákon k nalezení pole v okolí homogenně nabité kulové slupky. Touž metodou je možné získat pole i ve vnitřních bodech koule. Tento výpočet je například možné použít k získání dobrého přiblžení pole uvnitř atomového jádra. Přesto, že se protony v jádře navzájem odpuzují, jsou působením velkých jaderných sil v objemu jádra rozptýlené zhruba homogenně.

Mějme kouli s poloměrem R , homogenně vyplňnou nábojem. Nechť ρ je náboj v jednotce objemu. Na základě souměrnosti opět předpokládejme, že pole bude radiální, a ve všech bodech stejně vzdálených od středu koule bude mít tutéž velikost. Abychom našli pole ve vzdálenosti r od středu, vložíme dovnitř koule soustřednou gaussovskou plochu s poloměrem r ($r < R$), jak to ukazuje obr. 6.20. Tok z této plochy je

$$4\pi r^2 E.$$

Náboj uvnitř plochy je roven jí uzavřenému objemu vynásobenému hustotou ρ :



Obrázek 6.20.: Gaussov zákon je možno použít k nalezení pole uvnitř homogenně nabité koule.

$$Q_{uvnitř} = \int_{objem uvnitř S} \rho dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho. \quad (6.44)$$

Z Gaussova zákona pak pro velikost pole vyplývá vztah:

$$\int_S E_n dS = \frac{Q_{uvnitř}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \quad (6.45)$$

tedy:

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < R). \quad (6.46)$$

Můžete se přesvědčit, že tento vztah dává správný výsledek i pro $r = R$. Elektrické pole je přímo úměrné vzdálenosti od středu koule, má směr poloměru a je orientované směrem ven od středu. Úvahy, které jsme právě dělali pro homogenně nabité kouli, je možno aplikovat i na tenkou nabité kulovou slupku. Uděláme-li předpoklad, že pole je všude radiální a kulově symetrické, z Gaussova zákona okamžitě vyplýne, že pole na vnější straně slupky je podobné poli bodového náboje, zatímco všude uvnitř je rovno nula. (Gaussovská plocha uvnitř slupky nebude obklopat žádný náboj.)

6.9.7. Je pole bodového náboje přesně přímo úměrné veličině $\frac{1}{r^2}$?

Podíváme-li se trochu podrobněji, jak se pole uvnitř kulové slupky stává nulovým, lépe si ozrejmíme, proč platnost Gaussova zákona vyplývá právě jen z přesné závislosti Coulombovy síly na druhé mocnině vzdálenosti. Uvažujme nějaký bod P uvnitř homogenně nabité kulové plochy. Představme si úzký kužel, který má vrchol v P a sahá po kulovou plochu, na které vytíná malou plošku s plošným obsahem ΔS_1 (obr. 6.21). S ním přesně souměrný kužel vycházející z P na opačnou stranu by na kulové ploše vyřízl plošku s obsahem ΔS_2 . Jsou-li vzdálenosti od P k těmto dvěma ploškám r_1 a r_2 , jsou jejich plošné obsahy v poměru

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

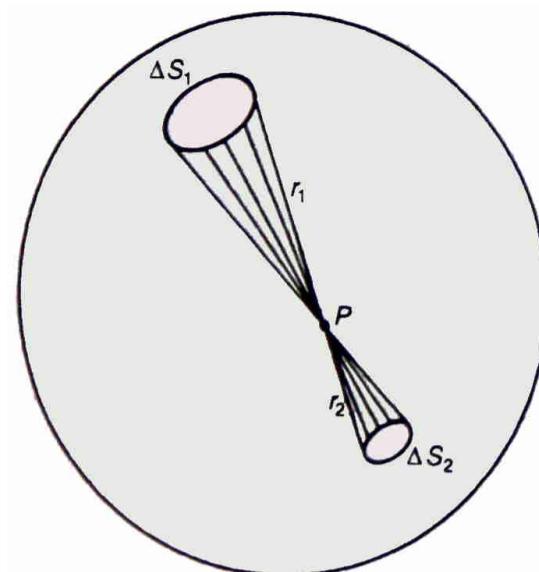
(To můžete dokázat pomocí geometrie pro jakýkoliv bod P uvnitř koule).

Je-li povrch koule homogenně nabity, je náboj Δq na každé vyříznuté ploše přímo úměrný její velikosti, tedy

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}.$$

Podle Coulombova zákona velikosti polí vytvořených těmito dvěma ploškami v bodě P jsou v poměru

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2} = 1.$$



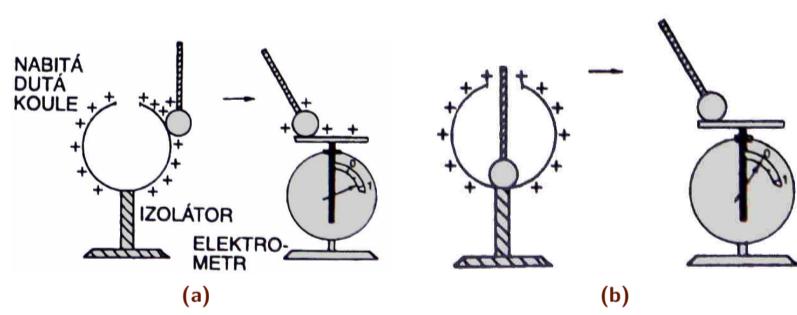
Obrázek 6.21.: V každém bodě P uvnitř nabité kulové plochy je pole nulové.

Obě pole se přesně ruší. Protože takové dvojice plošek je možné vytvořit že všech Částí kulové plochy, je výsledné pole v P rovno nule. Můžeme se však přesvědčit, že by to tak nebylo, kdyby mocnina r v Coulombově zákoně nebyla rovna přesně dvěma.

Platnost Gaussova zákona je podmíněna nepřímou úměrností druhé mocnině vzdálenosti v Coulombově zákoně. Neobsahoval-li by zákon ve jmenovateli přesně druhou mocninu, neplatilo by, že pole uvnitř homogenně nabité kulové plochy je přesně rovno nule. Kdyby se například pole měnilo rychleji, řekněme nepřímo úměrně třetí mocnině r , ta část plochy, která je blíž k uvažovanému vnitřnímu bodu, by v něm vytvárela větší pole než ta část, která je od něho dál. Výsledkem by bylo radiální pole směřující v případě kladného náboje do středu koule. Tyto závěry nám napovídají elegantní způsob jak zjistit, zda zákon o nepřímé úměrnosti druhé mocnině platí přesně. Potrebujeme pouze zjistit, zda je pole uvnitř homogenně nabité kulové plochy přesně rovno nebo nerovno nule.

Ještěstí, že taková metoda existuje. Obvykle je těžké změřit fyzikální veličinu s vysokou přesností. Dosáhnout výsledku s chybou jedno procento by asi příliš těžké nebylo, ale jak měřit, řekněme, Coulombův zákon s přesností na jednu miliardtinu? Téměř jistě není možné ani pomocí nejlepších existujících přístrojů měřit s takovou přesností sílu mezi dvěma nabitymi tělesy. Ale budeme-li určovat pouze to, zda jsou elektrická pole uvnitř nabité koule menší než nějaká hodnota, můžeme tím udělat velmi přesné měření platnosti Gaussova zákona a tedy závislosti na druhé mocnině vzdálenosti ve jmenovateli Coulombova zákona. Efektivně se tím provede porovnání zákona síly s ideální nepřímou úměrností druhé mocnině vzdálenosti. Na takových porovnáváních stejných nebo přibližně stejných věcí se obvykle zakládají na nejpřesnější fyzikální měření.

Jak pozorovat pole uvnitř nabité koule? Jeden způsob je zkoušet nabít nějaké těleso tak, že se jím dotkneme nitra kulového vodiče. Víte, že dotkneme-li se nabitého tělesa kovovou kuličkou a pak sejí dotkneme elektrometru, ten se nabije a jeho ručička se vychýlí z nulové polohy (obr. 6.22a). Kulička nabírá náboj, neboť elektrické síly v okolí nabité koule ženou náboje na kuličku (nebo z ní). Provedeme-li pokus tak, že se kuličkou dotýkáme nitra nabité koule, zjistíme, že na elektrometr se nepřenáší žádný náboj. Pomocí takového pokusu můžete také snadno dokázat, že pole uvnitř dosahuje nejvyšší několika procent vnějšího pole a že Gaussov zákon je alespoň přibližně správný [Feynman02].



Obrázek 6.22.: Uvnitř uzavřené kulové plochy je elektrické pole všude rovno nule.

Zdá se, že prvním, kdo zjistil, že pole uvnitř vodičové slupky je rovno nula, byl Benjamin Franklin. Připadal mu to divné. Když svůj poznatek oznámil Priestleyovi, ten navrhl, že mohlo souviset se zákonem nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti, neboť bylo známo, že kulová hmotná slupka uvnitř nevytváří žádné gravitační pole. Ale Coulomb naměřil nepřímou úměrnost druhé mocnině vzdálenosti až o 18 let později a Gaussov zákon byl objeven ještě později.

Gaussov zákon byl pečlivě prověrován. Za tímto účelem se elektrometr umístil uvnitř velké koule a sledovalo se, zda se neobjeví nějaké výchylky, když se koule nabije na vysoké napětí. Vždy bylo dosaženo záporného výsledku. Z geometrie aparatury a citlivosti elektrometru je možné vypočítat, jaké nejmenší pole by se projevilo. Z této hodnoty lze stanovit horní ohraničení odchylky mocnitého od dvou. Například, že elektrostatická síla je úměrná $r^{2+\epsilon}$, můžeme určit horní hranici pro ϵ . Touto metodou Maxwell určil, že ϵ je méně než $1/10\,000$. V roce 1936 Plimpton a Laughton experiment zopakovali a zdokonalili. Zjistili, že mocnité se liší od dvou o méně než

jednu miliardtinu.

To nás přivádí k zajímavé otázce: Do jaké míry víme, jak přesně platí Coulombův zákon v různých situacích? Právě popsané pokusy měří závislost pole na vzdálenosti řechneme několika desítek centimetrů. Ale co třeba vzdáleností uvnitř atomu, např. vodíkového atomu, v němž, jak předpokládáme, je elektron přitahován k jádru podle téhož zákona nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti? Je pravda, že k popisu mechanické stránky chování elektronu musí být použita kvantová mechanika, ale přitom jde o obyčejnou elektrostatickou sílu. Při formulování úlohy o atomu vodíku je potřeba znát potenciální energii elektronu jako funkci vzdálenosti od jádra. Coulombův zákon dává potenciál, který se mění nepřímo úměrně první mocnině vzdálenosti. S jakou přesností je znám mocnitel pro takové malé vzdálenosti? Z velmi pečlivých měření relativních poloh energetických hladin vodíku, které provedli Lamb a Rutherford r. 1947, víme, že v rozmezích atomu, tj. ve vzdálenostech řádově desetin nanometru ($10 \cdot 10^{-10}$ m), Souhlasí mocnitel opět s přesností jedné miliardtiny.

Přesnost Lambova-Rutherfordova měření znovu umožnila fyzikální „náhoda“. Ze stavu atomu vodíku by dva měly mít téměř stejnou energii, ale jen tehdy, mění-li se potenciál přesně jako $1/r$. Tento velmi malý rozdíl jejich energií se měřil zjišťováním úhlové frekvence ω fotonů emitovaných nebo absorbovaných při přechodech mezi těmito dvěma stavami na základě vztahu pro rozdíl energie $\Delta E = \hbar\omega$. Výpočty ukázaly, že δE by se zřetelně odlišovalo od naměřené hodnoty, kdyby se mocnitel v zákoně síly $1/r^2$ lišil od dvou už o víc než jednu miliardtinu.

Je tentýž mocnitel správný i pro kratší vzdálenosti? Z měření v jaderné fyzice se zjistilo, že v typických jaderných vzdálenostech, zhruba $10 \cdot 10^{-15}$ m, se uplatňují elektrostatické síly a také se mění jako převrácená hodnota druhé mocniny vzdálenosti. Na některé z důkazů, které o tom svědčí, se podíváme později. Víme tedy, že Coulombův zákon ještě platí, alespoň v takové míře, i pro vzdálenosti řádu $10 \cdot 10^{-10}$ m.

A co při $10 \cdot 10^{-16}$ m? Tento dosah je možné zkoumat ostřelováním protonů elektrony s velmi vysokou energií a pozorováním jejich rozptylu. Jak se zdá, získané údaje naznačují, že při těchto vzdálenostech zákon selže. Elektrická síla se ukazuje být ve vzdálenostech menších než $10 \cdot 10^{-16}$ m asi 10-krát slabší. Jsou dvě možná vysvětlení. Jedno je, že v takových malých vzdálenostech Coulombův zákon neplatí. Druhé je, že naše „tělesa“, tj. protony a elektrony, nepředstavují bodové náboje. Možná že elektron nebo proton nebo oba jsou nějak rozmařány. Většina fyziků se domnívá, že rozmařán je náboj protonu. Víme, že protony silně interagují s mezonem. To předpokládá, že proton čas od času existuje jako neutron s mezonem π^+ kolem sebe. V průměru bude takováto konfigurace působit jako malá kulička kladného náboje. Víme, že pole nabité koule se při postupu do jejího středu nemění stále jako $1/r^2$. Je docela pravděpodobné, že náboj protonu je rozmařaný, ale i teorie π -mezonů je ještě dost nedokonalá, takže možná i Coulombův zákon selže na velmi malých vzdálenostech³.

Ještě jedna věc: zákon nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdáleností platí pro vzdálenosti řádu 1 m, ale i pro $10 \cdot 10^{-10}$ m; zůstává však činitel $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ stále stejným?

Odpověď je ano, alespoň s relativní přesností 15 milióntin.

Nyní se vraťme k důležitému problému, který jsme přešli mlčením, když jsme hovořili o experimentálním potvrzení Gaussova zákona. Možná, že jste se podivili, jak mohl být výsledek experimentu Maxwella nebo Plimptona a Lauglitona tak přesný, když přitom kulový vodič, který použili, nebyl dokonalou koulí. Vždyť dosáhnout přesnosti na jednu miliardtinu je už opravdu něco a právem byste se mohli ptát, zda dokázali udělat tak přesnou kouli. Každá reálná koule má určitě malé nepravidelnosti. Existují-li nepravidelnosti, nebudou uvnitř vytvářet pole? Nyní chceme ukázat, že není třeba mít dokonalou kouli. Opravdu lze dokázat, že uvnitř uzavřené vodivé plochy jakéhokoli tvaru není žádné pole. Jinými slovy, výsledek zmíněných experimentů závisel na $1/r^2$, ale vůbec ne na tom, zda je plocha kulová (až na to, že pro kouli je snazší vypočítat, jaká by byla pole, kdyby Coulombův zákon neplatil), a tak se nyní vracíme znovu k našemu problému. Abychom to ukázali, je nevyhnutelné poznat některé vlastnosti elektrostatických vodičů.

6.9.8. Pole vodiče

Elektickým vodičem je pevné těleso, které obsahuje mnoho „volných“ elektronů. Elektrony se mohou v tělese volně pohybovat, ale nemohou projít jeho povrchem. V kovu je totiž volných elektronů, že jakékoliv elektrické pole jich uvede do pohybu velké množství. Takto vzniklý proud elektronů se pak musí buď udržovat vnějšími zdroji energie, nebo se pohyb elektronů zastaví, jakmile elektrony vybjí zdroje, které vytvořily původní pole. V elektrostatice nepracujeme se stálými zdroji proudu (jimi se budeme zabývat později, až budeme hovořit o magnetostatice), takže elektrony se pohybují jen dokud se neuspořádají tak, aby všude uvnitř vodiče vytvořily nulové elektrické pole. (Obvykle se to stane v malém zlomku sekundy). Kdyby totiž ještě nějaké pole zůstalo, uvedlo by do pohybu další elektrony, jediným možným řešením v elektrostatice je, že je pole uvnitř vodiče je všude nulové.

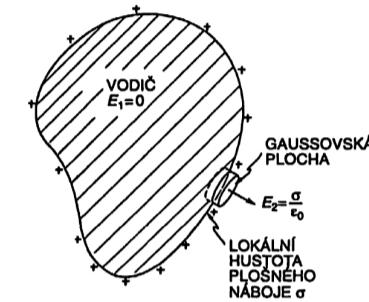
Nyní si všimněme vnitřku nabitého vodivého tělesa. („Vnitřkem“ rozumíme prostor v objemu kovu.) Protože kov je vodič, vnitřní pole, a tedy gradient potenciálu φ musí být roven nule. Každý vodič tak představuje ekvipotenciální oblast a jeho povrch je ekvipotenciální plochou. Protože všude ve vodivé látce je elektrické pole rovno nule, je nula rovna i divergence \vec{E} a podle Gaussova zákona musí být rovna nula i hustota náboje uvnitř vodiče.

³Experimenty, které Feynman popisuje, postupně vedly k dnešní představě, podle níž protony, neutróny i mezony skutečně nejsou bodové částice, ale mají vnitřní strukturu tvořenou kvarky. Kvarky přitom nemohou existovat samostatně.

Nemohou-li být ve vodiči žádné náboje, jak je možné jej nabít? Co máme na mysli, když říkáme, že je vodič „nabit“? Kde tedy náboje jsou? Odpověď je, že se nachází na povrchu vodiče, kde působí velké síly, které jím zabraňují uniknout, tedy náboje nejsou zcela „volné“. Budeme-li studovat fyziku pevných látek, dozvím se, že přebytečný náboj se v každém vodiči nachází v jedné - dvou atomových vrstvách povrchu. Pro naše současné účely je dostačující přesnost říkat, že převede-li se nějaký náboj na vodič nebo do něj, celý se shromáždí na jeho povrchu; uvnitř vodiče žádné náboje nejsou.

Kromě toho si všimněte, že na vnější straně v těsné blízkosti povrchu vodiče musí být elektrické pole kolmé na povrch. Nemůže existovat žádná tečná složka. Kdyby totiž existovala, elektrony by se pohybovaly podél povrchu; neexistují žádné síly, které by jim v tom zabraňovaly. Jinými slovy víme, že elektrické siločáry musí vždy svírat s ekvipotenciální plochou pravý úhel.

Na základě Gaussova zákona můžeme také uvést do vztahu intenzitu pole blízko povrchu vodiče s lokální hustotou náboje na jeho povrchu. Jako gaussovou plochu vezmeme malou válcovou krabičku jednou polovičkou pod a druhou polovičkou nad povrchem (obr. 6.23). K celkovému toku \vec{E} přispívá pouze ta strana krabičky, která je mimo vodič. Pole těsně při povrchu vodiče z jeho vnější strany je potom Vn



Obrázek 6.23.: Elektrické pole těsně při povrchu vodiče je přímo úměrné lokální plošné hustotě náboje na povrchu.

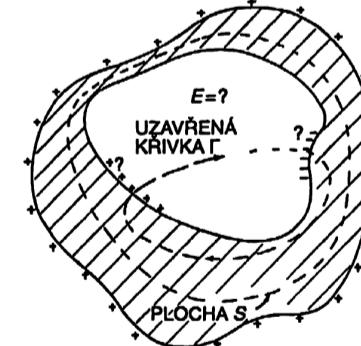
vodiče

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \sigma \dots \text{lokální plošná hustota náboje.} \quad (6.47)$$

Proč nabítá vrstva na povrchu náboje vytváří jiné pole než samotná nabité rovina? Jinými slovy, proč je (6.47) dvakrát větší než (6.40)? Důvod spočívá, samozřejmě, v tom, že v případě vodiče jsme netvrtili, že se v okolí nenachází žádné „jiné“ náboje. Opravdu nějaké ještě musí být, aby ve vodiči bylo $\vec{E} = 0$. Náboje, nacházející se v bezprostředním sousedství bodu P na povrchu vodiče, ve skutečnosti vytvářejí pole $E_{lok} = \frac{\sigma_{lok}}{2\epsilon_0}$ jak z vnitřní tak i z vnější strany povrchu. Ale všechny ostatní náboje na vodiči se „spikly“, aby vytvořily v bodě P dodatkové pole s velikostí E_{lok} . Výsledné vnitřní pole je pak nulové a vnější je rovno $2E_{lok} = \frac{\sigma_{lok}}{\epsilon_0}$ [Feynman02].

6.9.9. Pole vodiče

Nyní se vrátíme k problému duté schránky - vodiče s dutinou. Uvnitř kovu není žádné pole, ale jak tomu bude v dutině? Ukážeme, že je-li dutina prázdná, pak v ní pole nejsou bez ohledu na to, jaký tvar má vodič nebo dutina. Ukážeme to například pro tvar na obr. 6.24. Uvažujme gaussovou plochu takového tvaru, jaký má plocha S vyznačená na obr. 6.24, která obklopuje dutinu, ale všude zůstává ve vodivé látce. Všude na S je pole rovno nule, takže není žádný tok z S a celkový náboj uvnitř S je roven nule. Kdyby šlo o kulovou plochu, by bylo možno ze souměrnosti usoudit, že v jejím nitru by nemohl být žádný náboj. Ale obecně můžeme pouze tvrdit, že na vnitřním povrchu vodiče je stejně množství kladného a záporného náboje. Kladný povrchový náboj by mohl být v jedné jeho části a záporný někde jinde, jako na obr. 6.24. Gaussovým zákonem není možné něco takového vyloučit.



Obrázek 6.24.: Jaké pole je v prázdné dutině ve vodiči při jakémkoliv tvaru vodiče a dutiny?

Ve skutečnosti však jakékoli stejně velké a opačné náboje, nacházející se na vnitřním povrchu, k sobě skloznou a úplně se vyruší. To, že musí být vyrušeny úplně, můžeme ukázat použitím zákona, že cirkulace pole \vec{E} je vždy rovna nule (v elektrostatice). Předpokládejme, že by se v některých částech vnitřního povrchu nacházely náboje. Víme, že někde jinde na povrchu by se muselo nacházet stejně množství opačných nábojů. Jakékoliv siločáry pole \vec{E} by nyní musely vycházet z kladných nábojů a končit v záporných nábojích (neboť uvažujeme pouze o případě, že v dutině nejsou volné náboje). Představme si nyní uzavřenou křivku Γ , která prochází napříč dutinou podél některé siločáry od nějakého kladného k některému zápornému náboji a vodičem se vrací zpět do svého výchozího bodu. (jako na obr.

6.24). Integrál po takové siločáře vedoucí od kladného k zápornému náboji nebude roven nule. Integrál po křivce uvnitř kovu dá však nulu, neboť $\vec{E} = 0$. Dostali jsme tedy že

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \neq 0 \quad ??? \quad (6.48)$$

Křivkový integrál pole \vec{E} po každé uzavřené křivce je však v elektrostatickém poli roven nule. Z toho vyplývá, že uvnitř prázdné dutiny nemohou existovat žádná pole ani žádné náboje na jejím povrchu.

Měli bychom si pečlivě všimnout důležité výhrady, kterou jsme uvedli. Vždy jsme říkali „uvnitř prázdné“ dutiny. Umístí-li se totiž nějaké náboje do některých pevných poloh v dutině, ať už v izolantu, nebo na malém vodiči izolovaném od hlavního vodivého tělesa, pak se v dutině mohou objevit pole. Ale pak už to není „prázdná“ dutina.

Ukázali jsme, že je-li dutina úplně obklopena vodičem, žádné statické rozdělení nábojů mimo ni nikdy nemůže vytvořit pole v jejím nitru. Tím se vysvětluje princip „stínění“ elektrického zařízení, které je uloženo v kovovém obalu. Stejně úvahy můžeme použít i v důkazu, že žádné statické rozdělení nábojů uvnitř uzavřeného vodiče nemůže vytvořit nějaká pole ve vnějším prostoru. Stínění funguje v obou směrech. V elektrostatice - ne však při proměnných polích - pole na obou stranách uzavřené vodivé plochy jsou úplně nezávislá.

Nyní chápeme, proč bylo možné prověřit Coulombův zákon s tak velkou přesností. Tvar duté schránky je bezvýznamný. Nemusí být kulový, mohla by to být krychle. Je-li Gaussův zákon přesný, je pole uvnitř vždy nulové. Ted' také chápeme, proč je bezpečné sedět uvnitř vysokonapěťové elektrody megavoltového van de Graaffova generátoru bez obavy ze zásahu elektřinou. Umožňuje to Gaussův zákon.

6.10. Elektrické pole v různých případech

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488.

7. Speciální teorie relativity

Contents

7.1. Princip relativity	41
7.2. Lorentzova transformace	42

7.1. Princip relativity

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy ronice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak jej odstranit. Oboje, chybu i korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že m je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlosť. V Einsteinově opraveném vztahu má m hodnotu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.1)$$

kde m_0 je *klidová hmotnost* (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje) a c je *rychlosť světla*, která je přibližně rovna $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlosť $9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$ a po dosazení do uvedeného vztahu dostaneme korekci hmotnosti ne větší než dveře až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostatečně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosť světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý a proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Proto je zajímavé sledovat, jaké kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona. Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o *speciální teorii relativity* z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou *Obecná teorie relativity*. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ *gravitace*.

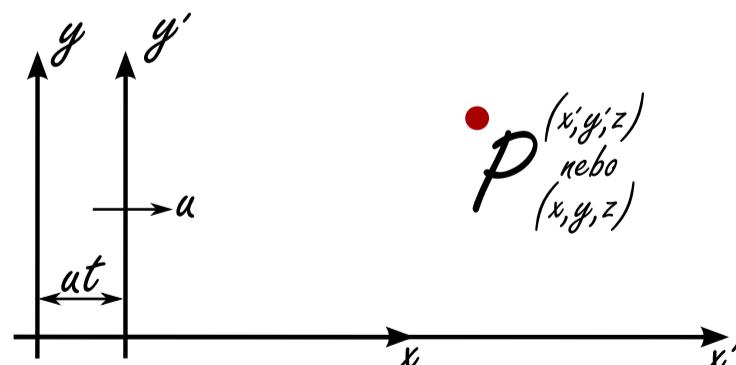
Newton byl první, kdo vyslovil *princip relativity* jako jeden z důsledků pohybových zákonů: Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejně ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočáre vpřed. To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlosťí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samozřejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je pravda, že ve všech experimentech provedených v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální zákony stejně, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje konstantní rychlosťí u ve směru osy x , přičemž měří polohu určitého bodu (obr. 7.1). Ve své souřadnicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy x jako x' . Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy x ve své souřadnicové soustavě značí jako x . Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunu za čas t o vzdálenost ut , a jestliže soustavy z počátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (7.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetransformovaly do stejných zákonů v čárkované soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soustavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje či nikoliv.

Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumu elektrických, magnetických a světelných jevů, jež vyústilo v *Maxwellovu teorii elektromagnetického pole*, která jednotně popisuje elektřinu, magnetizmus a světlo. Zdálo se však, že Maxwellovy rovnice nevyhovovaly *principu relativity*, neboť přetransformujeme-li Maxwellovy rovnice pomocí rovnic 7.2, nebudou mít stejný tvar. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měli lišit od jevů v nehybné lodi. Těmito jevy by pak bylo možné určit rychlosť lodi, a ve speciálním případě pomocí



Obrázek 7.1.: Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých x-ových os.

vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možné určit i absolutní rychlosť lodi. Jedním z důsledků Maxwellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří všemi směry stejnou rychlostí $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dalším důsledkem těchto rovnic je, že pohybuje-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlostí c . Tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje vede k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlosť u a že světlo z reflektorů auta za námi nás míjí rychlosť c . Zdiferencováním první rovnice 7.2 máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u, \quad (7.3)$$

což znamená, že podle *Galileovy transformace* by zdánlivá rychlosť světla měřená z auta nemohla být c , ale $c - u$. Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosti Země, ale všechny selhaly - nedávaly vůbec žádné rychlosti. Ukázalo se, že někde byla chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

7.2. Lorentzova transformace

Když se zjistilo, že s rovnicemi v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileiho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxwellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problému je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si H. A. Lorentz všiml pozoruhodné věci, když použil v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (7.4)$$

tvar rovnic se nezměnil. Rovnice 7.4 jsou známé jako *Lorentzovy transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že všechny fyzikální zákony, by měly být takové, aby se při Lorentzově transformaci neměnily. Jinými slovy, měly bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak se ukázalo jediné co je třeba, je změnit hmotnost m v Newtonových rovnicích podle vztahu 7.1. Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejné.

Pro pochopení smyslu této nové transformace nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání prostoru a času.

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488.
- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600.
- [MMB09] J. Musilová, P. Musilová, and V. učení technické v Brně. *Matematika I: pro porozumění i praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*. VUTIUM, 2009, p. 339. ISBN: 9788021436312.
- [Rek63] K. Rektorys. *Přehled užité matematiky*. 1. vydání. SNTL, 1963.

8. Geometrická optika

8.1. Úvod

Contents

8.1. Úvod	43
---------------------	----

Na několika přístrojích předvedeme approximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější approximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná.

Abychom mohli pokračovat potřebujeme jeden geometrický vztah a to: máme-li trojúhelník s malou výškou h a velkou základnou d , pak přepona s je delší než základna (viz obr. 8.1).

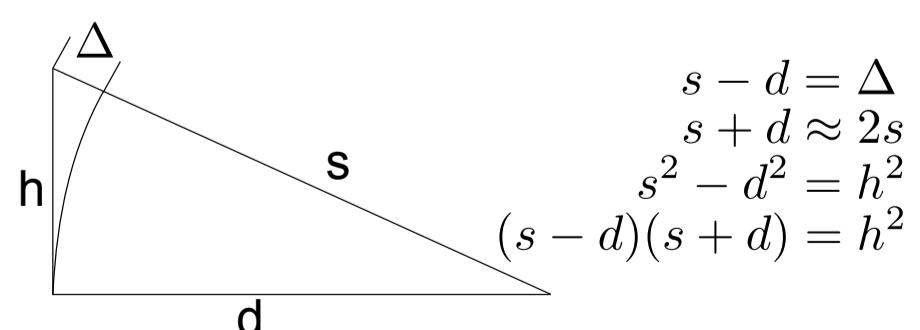
Tedy

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (8.1)$$

To je celá geometrie, kterou je třeba znát, aby bylo možné diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch.

References

- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600.



Obrázek 8.1.: Trojúhelník s malou výškou a velkou základnou

Bibliografie

- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600.