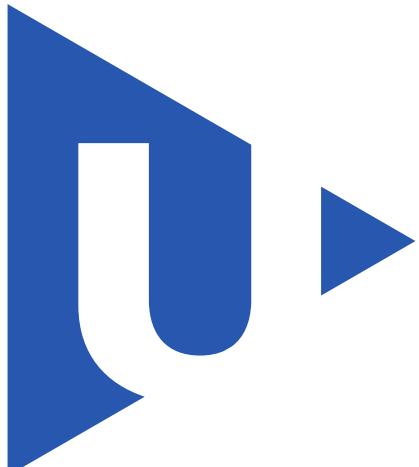


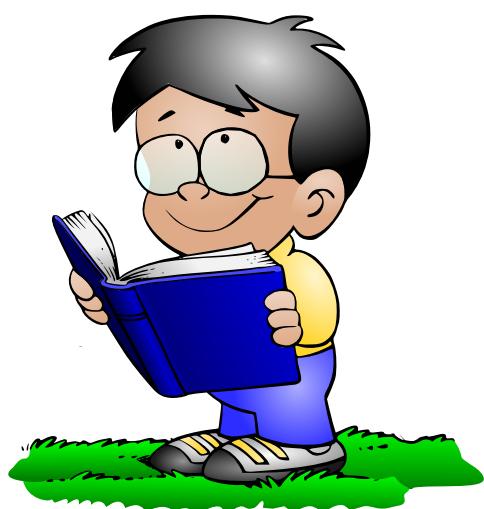
WIKING





ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

My school notes



Studijní notes

Wiking

Sunday 23rd June, 2013

Jaroslav Fait, jardak.fait@gmail.com
Fakulta elektrotechniky
Západočeská univerzita

I Lineární algebra	1
1 Zaklády lineární algebry	3
1.1 Matice	4
1.2 Determinanty	7
1.3 Vlastní čísla a vlastní vektory	10
1.4 Polynomy	16
1.5 Vektorové prostory se skalárním součinem	17
1.6 Vektory	19
II Matematická analýza I	21
2 Historie matematické analýzy	23
Seznam literatury	24
3 Reálná a komplexní čísla	25
Seznam literatury	26
4 Limita a spojitost funkce	27
4.1 Reálná funkce	28
4.2 Limita funkce	38
4.3 Spojitost funkce	38
Seznam literatury	38

5 Derivace funkce	39
5.1 Základní věty diferenciálního počtu	40
Seznam literatury	45
6 Aplikace diferenciálního počtu	47
6.1 Průběh funkce	48
Seznam literatury	52
7 Primitivní funkce	53
7.1 Motivace	54
Seznam literatury	66
8 Určitý integrál	67
8.1 Motivace	68
8.2 Vlastnosti určitého integrálu	69
Seznam literatury	72
9 Řady	73
Seznam literatury	74
10 Elementární metody řešení diferenciálních rovnic	75
10.1 Diferenciální rovnice 1. řádu	76
Seznam literatury	76

III Numerické metody	79
11 Úvod do numerických metod	81
11.1 Úvodní slovo	82
11.2 Reprezentace čísel ve výpočetní technice	83
11.3 Chyby při numerických výpočtech	85
11.4 Řešení nelineárních rovnic	87
IV Fyzika	91
12 Historie fyziky	93
12.1 Hlavní etapy vývoje	94
13 Diferenciální počet vektorových polí	97
13.1 Vektorový počet	98
13.2 Skalární a vektorová pole	100
13.3 Derivace polí - gradient	102
13.4 Operátor nabla	105
13.5 Diferenciální rovnice proudění tepla	108
13.6 Druhé derivace vektorových polí	110
14 Integrální počet vektorových polí	113
14.1 Tok vektorového pole	114
14.2 Tok povrchem krychle. Gaussova věta	116

15 Speciální teorie relativity	121
15.1 Princip relativity	122
15.2 Lorentzova transformace	124
16 Geometrická optika	125
16.1 Úvod	126
V Astrofyzika	127
17 Úvod	129
17.1 Historie astrofyziky	130
17.2 Základní vztahy	130
VI Mechanika	135
18 Kinematika částice	137
18.1 Kinematický popis pohybu částice	138
19 Dynamika částice	153
VII Teorie elektromagnetického pole	155
20 Spojité matematické modely polí	157
20.1 Elektrický náboj	159
20.2 Působení na dálku versus teorie pole	160

20.3 Elektromagnetické pole	161
20.4 Elektrostatické pole	166
20.5 Stacionární proudové pole	167
20.6 Stacionární magnetické pole	177
VIII Signály a soustavy	191
21 Číslicové signály - posloupnosti	193
21.1 Základní typy posloupností	194
21.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	195
21.3 Základní operace s posloupnosti	196
22 Vlastnosti a popis lineárních systémů	199
22.1 Linearita, časová invariance a kauzalita	200
22.2 Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce	205
IX Teorie elektrických obvodů	215
23 Základy elektrických obvodů	217
23.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů	218
23.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	218
23.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí	221
23.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	223
23.5 Napěťový dělič	225

24 Přechodné děje	229
24.1 Fyzikální podstata přechodných dějů	230
24.2 Přechodný jev kmitavého obvodu	235
25 Harmonické obvody	237
25.1 Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty	238
25.2 Obvody s nastavitelnými parametry	242
X Elektronické součástky	243
26 Základní zákony elektromagnetismu	245
26.1 Zákon elektromagnetické indukce	246
26.2 Spřažený tok vzduchové cívky	254
26.3 Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem	255
27 Topologické vlastnosti elektromagnetického pole	259
27.1 Topologie diskrétních útvarů	262
28 Teorie transformátoru	265
28.1 Transformátor jako lineární pasivní dvojbran	268
28.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou	269
28.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení	271
28.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	273
28.5 Ztráty v reálném transformátoru	278

28.6 Rozptyl transformátoru	281
28.7 Cívky s feromagnetickým jádrem	282
28.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	283
XI Senzory a akční členy	291
29 Snímače tepelných veličin	293
29.1 Základní pojmy	294
XII Analogové elektronické systémy	297
30 Počítačová simulace v elektrotechnice	299
30.1 Historie	300
30.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV	301
31 Zesilovače	303
31.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	304
32 Operační zesilovače	305
32.1 Úvod	306
32.2 Parametry operačního zesilovače	307
32.3 Ideální operační obvod	309
33 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	313
33.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	314

33.2 Principy A/D převodníků	323
33.3 Převod číslicového signálu na analogový	324
34 Kmitočtové filtry	331
34.1 Základní vlastnosti kmitočtových filtrů	333
34.2 Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky	339
34.3 Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů	340
34.4 Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu	340
34.5 Filtry RLC vyšších řádů	340
34.6 Filtry ARC 2. řádu	340
34.7 Filtry ARC vyšších řádů	342
34.8 Filtry se spínanými kapacitory	342
34.9 Zváštní typy a aplikace kmitočtových filtrů	342
XIII Elektronické napájecí zdroje	343
35 Spojitě regulované napájecí zdroje	345
35.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích	346
35.2 Neřízené usměrňovače	346
35.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí	347
35.4 Násobiče napětí	352
35.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů	352

36 Impulzně regulované napájecí zdroje	353
36.1 Úvod	355
36.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice	355
36.3 DC/DC měniče bez transformátoru	358
36.4 DC/DC měniče s transformátorem	366
36.5 Metody regulace spínaných zdrojů	376
36.6 Sbírka zapojení neizolovaných měničů	378
XIV Číslicové elektronické systémy	381
37 Číslicové systémy a signály	383
37.1 Co je číslicový systém	384
37.2 Kombinační logické funkce	385
38 Číslicové součástky a technologie	391
38.1 Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	392
38.2 Bipolární digitální obvody	392
38.3 Unipolární digitální obvody	393
38.4 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	394
XV Mikroprocesorová technika	403
39 Procesory AVR	405
39.1 AVR Architektura	406

40 ANSI-C pro mikrokontroléry	407
40.1 Stručný úvod	408
XVI Programovatelné logické obvody	409
41 Architektura	411
41.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů	412
41.2 Dynamické parametry PLD	425
42 Jazyk VHDL	427
42.1 Návrh číslicového obvodu	428
42.2 Úvod	429
42.3 Základní vlastnosti jazyka VHDL	430
42.4 Logické úrovně	431
42.5 Souběžné příkazy	432
42.6 Sekvenční příkazy	433
42.7 Technologicky nezávislá část návrhu	433
42.8 Knihovna LPM	434
XVII Elektromagnetická kompatibilita	441
43 Vlastnosti plošných spojů	443
XVIII C	445
44 Terminálový vstup a výstup	447
44.1 Hlavíčkový soubor stdio.h	448

44.2 Standardní vstup a výstup znaku	448
44.3 Standardní vstup a výstup řetězců	450
44.4 Formátovaný standardní vstup a vystup	450
44.5 Souhrnné cvičení	450
45 Pointery	453
45.1 Základy práce s pointery	454
46 Preprocesor jazyka C	457
46.1 Připojení externích souborů	458
46.2 Definice maker	458
46.3 Podmíněný překlad	458
XIX ANSI/C++	459
47 Přehled jazyka C++	461
47.1 Objektově orientované programování	462
48 Úvod do tříd	477
48.1 Funkce konstruktor a destruktur	478
XX Elektrické měřicí systémy	485
49 LabView	487
49.1 Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView	488

49.2 Základní části virtuálního přístroje	489
49.3 Práce s grafy	489
XXI Výkonová elektronika	495
50 Měniče s vnější komutací	497
50.1 Takt a komutace	498
51 Polovodičové součástky výkonové elektroniky	499
51.1 MOSFET tranzistory	500
52 Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů	501
52.1 Úvod	503
52.2 Výkonové tranzistory MOS	504
52.3 Tranzistory IGBT	504
52.4 Metody řízení spínacího procesu	504
52.5 Způsoby detekce nadproudu	506
XXII Elektrické přístroje	511
53 Teorie elektrického oblouku	513
53.1 Teorie spínacího oblouku	514

Část I

Lineární algebra

Kapitola 1

Základy lineární algebry

Obsah

1.1	Matice	4
1.1.1	Maticová algebra	4
1.1.2	Označení prvků matice	7
1.2	Determinanty	7
1.2.1	Permutace	7
1.3	Vlastní čísla a vlastní vektory	10
1.3.1	Motivace	10
1.4	Polynomy	16
1.4.1	Rozklad rye racionální funkce na parciální zlomky	16
1.5	Vektorové prostory se skalárním součinem	17
1.5.1	Ortogonalní doplňky	17
1.6	Vektory	19

1.1 Matice

Definice 1.1.1. Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici (m, n) . Jestliže každé uspořádané dvojici $(m, n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ přiřadíme prvek $a_{ij} \in \mathcal{R}$ obdržíme reálnou **matici** typu (m, n) nad \mathcal{R} . Čísla jsou indexy, i je řádkový a j je sloupcový index.

Matici zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

která má právě mn prvků (a_{ij}) uspořádaných do m řádků a n sloupců. Stručně píšeme $A = (a_{ij})$

Příklad 1.1.1. Matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

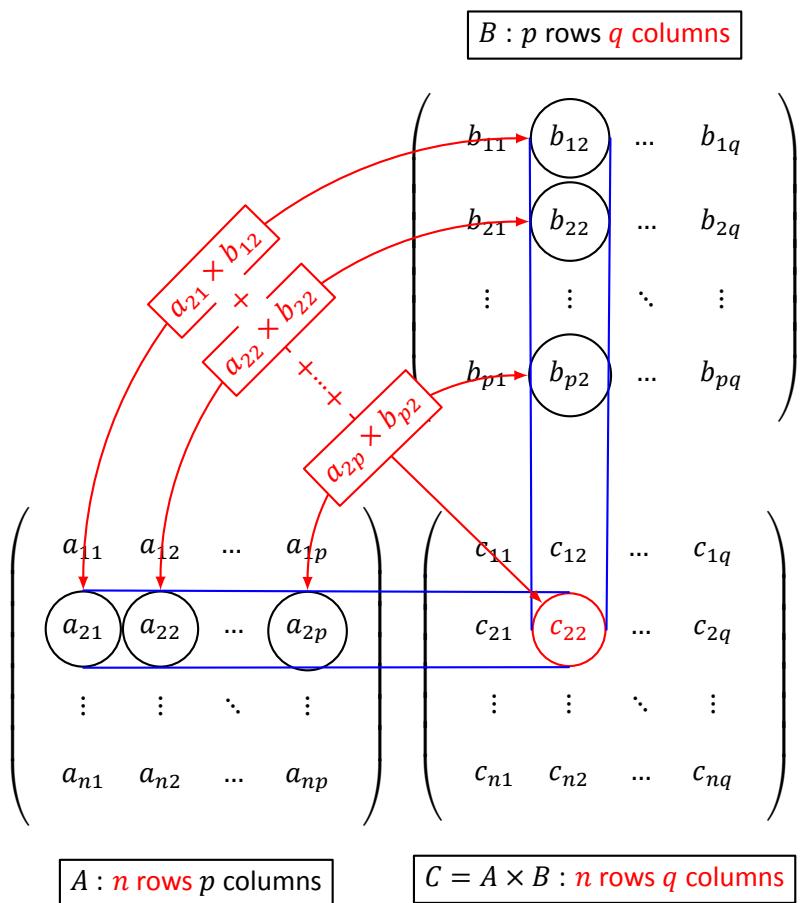
je čtvercová matice velikosti 4×4 . Prvek matice a_{23} je 2.

1.1.1 Maticová algebra

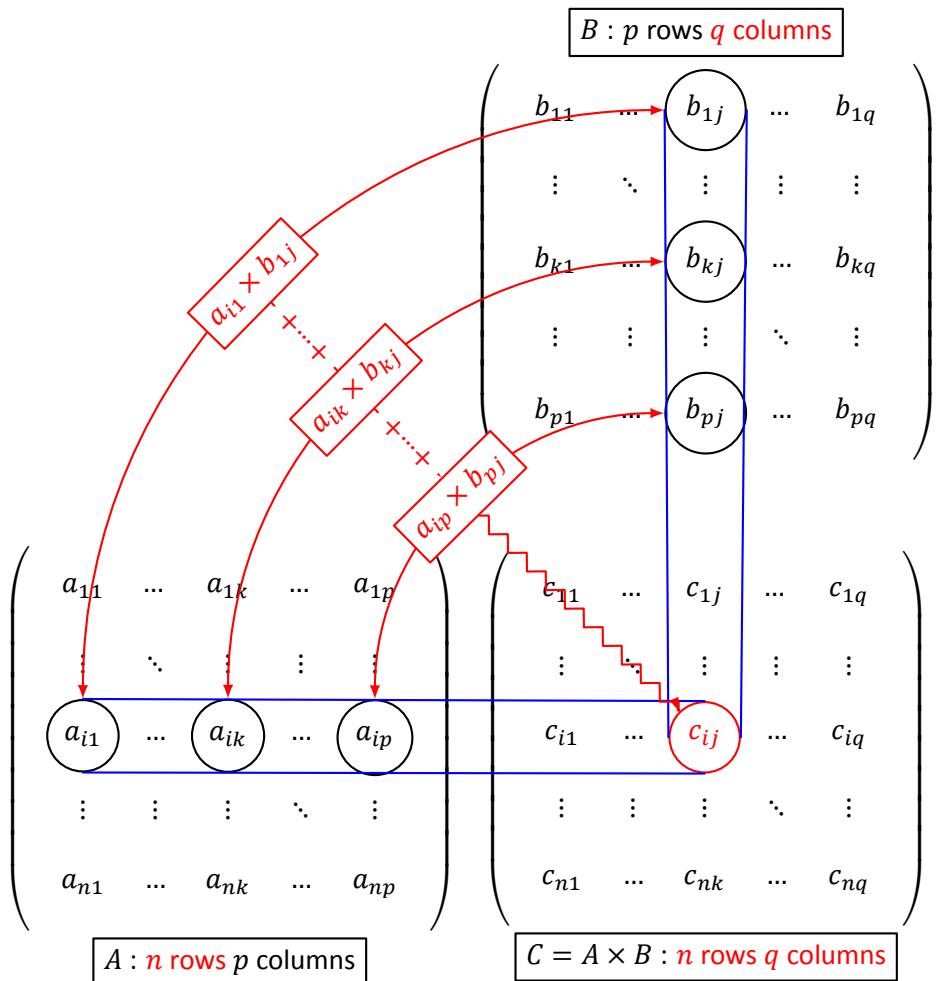
Definice 1.1.2. Součinem matice $A \in \mathcal{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathcal{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathcal{R}_{m,p}$ pro kterou platí:

$$C = AB; C = (c_{ij}); c_{ij} = \sum_n^{k=1} a_{ik} b_{kj}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p. \quad (1.1.2)$$

Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B . Obrázek 1.1.1 demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobení druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku c_{ij} (viz 1.1.2).



Obrázek 1.1.1: Násobení matic - 1. krok



Obrázek 1.1.2: násobení matic - 2. krok

1.1.2 Označení prvků matice

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **řádek** a **slopec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A se obvykle značí a_{ij} . Potom i-tý řádek matice obsahuje vodorovnou n-tici prvků $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a j-tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, kde $j = 1, 2, \dots, n$.

V tabulce 1.1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální¹, jednotkové², nulové, transponované a symetrické.

Matice téhož typu (m, n) nad \mathbb{R} budeme značit $\mathfrak{R}_{m,n}$.

Definice 1.1.3. (Rovnost matic): Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je rovna matici $\mathbf{B} = (b_{kl})$, jsou-li matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě **rovnají**, tj. $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{m,n}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.2 Determinanty

Abychom mohli nadefinovat determinant, budeme muset vědět, jak vypočítat permutaci entice, respektive zmanénko permutace.

1.2.1 Permutace

Definice 1.2.1. Nechť \mathbf{M} je libovolná konečná množina. Permutací množiny M nazýváme zobrazení π množiny \mathbf{M} na sebe.

Příklad 1.2.1. Permutace π množiny $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ je např. zobrazení π , definované předpisem:

$$\pi(a) = c, \pi(b) = d, \pi(c) = b, \pi(d) = a, \quad (1.2.1)$$

¹Prvky a_{ii} kde $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice \mathbf{D} je typu (m, m) , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

²Jestliže $m = n$, pak mluvíme o čtvercové matici řádu m .

Maticce	Zápis
řádková	$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
sloupcová	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
diagonální	$a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
jednotková	$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
nulová	$\mathbf{0} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \forall i, j$
transponovaná	$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
symetrická	$\mathbf{S} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

Tabulka 1.1.1: Speciální typy matic

Místo tohoto zápisu se však používá přehlednější zápis ve tvaru matice typu (2, 4):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

kde v prvním řádku jsou vypsány všechny prvky množiny \mathbf{M} (v libovolném pořadí) a ve druhém řádku je pod každým prvkem zapsán jeho obraz v permutaci. Tutož permutaci

však můžeme zapsat ve tvaru matice několika různými způsoby. Například mohou být zapsány takto:

$$\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & a & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \text{apod.} \quad (1.2.3)$$

Zřejmě všechny čtyři uvedené zápisy permutace rov. 1.2.2 ve tvaru matice se liší navzájem pouze pořadím sloupců. Aby bylo možné zapsat každou permutaci množiny \mathbf{M} ve tvaru rov. 1.2.2 jediným způsobem, je nutné zvolit pevné pořadí prvků množiny \mathbf{M} a v zápisu permutace uvádět prvky matice \mathbf{M} v prvním řádku v tomto pořadí. Avšak známe-li toto pořadí prvků množiny \mathbf{M} , je pak obvykle zbytečné jej v zápisu permutace uvádět, ale stačí uvést pouze pořadí obrazů, tj. druhý řádek. Zvolíme-li např. v naší množině \mathbf{M} pevné pořadí prvků $\{a, b, c, d\}$, pak permutaci rov. 1.2.1 zapíšeme jako uspořádanou čtevřici $\{c, d, b, a\}$.

Definice 1.2.2. Když vytváříme uspořádanou n -tici navzájem různých prvků n -prvkové množiny \mathbf{M} , přiřazujeme každému prvku množiny \mathbf{M} právě jedno přirozené číslo, index příslušného prvku, z množiny prvních n přirozených čísel.

$$\pi = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (1.2.4)$$

Proto každé permutaci uspořádané n -tice prvků množiny \mathbf{M} odpovídá jednoznačně permutace příslušných indexů tj. permutace množiny 1.2.4 z definice 1.2.2. Stačí se tedy omezit při vyšetřování permutací n -prvkové množin na vyšetřování permutací množiny 1.2.4. Permutace π množiny 1.2.4 budeme zapisovat jako uspořádané n -tice

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$$

, kde $\pi(i)$ je číslo z množiny 1.2.4, které permutace π přiřazuje číslu i .

Příklad 1.2.2. *Spočítejme celkový počet permutací množiny.* V každé uspořádané n -tici může být na prvním místě kterákoli z n cifer, na druhém místě kterákoli ze zbývajících $n - 1$ cifer (kromě té, která je na prvním místě), na třetím místě každá ze zbývajících $n - 2$ cifer atd. Je tedy celkový počet všech permutací n -prvkové množiny $n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Toto číslo se zapisuje pomocí symbolu $n!$ (čti **n -faktoriál**).

Definice 1.2.3. Inverze v permutaci: Inverzí v permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

1.3 Vlastní čísla a vlastní vektory

1.3.1 Motivace

Poznámka: Je-li $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární zobrazení z prostoru \mathcal{V} do prostoru \mathcal{V} (nikdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít takovou bázi prostoru \mathcal{V} , že je matice zobrazení \mathbf{A} v této bázi co nejjednodušší, např. má následující strukturu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & A_k \end{pmatrix},$$

kde A_k jsou čtvercové matice malého rádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde A_k jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definice 1.3.1. Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{n,n}$ (matice je čtvercová řádu n).

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jestliže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (1.3.1)$$

pro jisté komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^n$, $\mathbf{u} \neq \Theta$, potom číslo λ nazýváme **vlastním číslem** matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{u} **vlastním vektorem** příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme **spektrem matice \mathbf{A}** . Pokud rov. 1.3.1 rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

můžeme ji rovněž psát ve tvaru

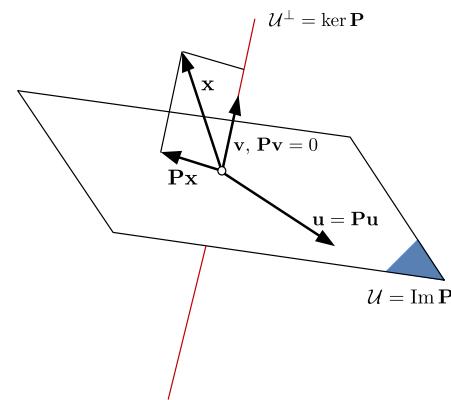
$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

Poznámka: U vlastních čísel studium pouze reálných matic ztrácí smysl, protože i reálná matice může mít komplexní vlastní čísla. Proto se uvažuje obecná komplexní matice.

Poznámka: Podmínka existence nenulového vektoru $\mathbf{u} = \Theta$ v definici vlastního čísla je nezbytná: kdyby bylo připuštěno i $\mathbf{u} = \emptyset$, potom by každé komplexní číslo bylo vlastním číslem a definice by ztratila smysl.

Poznámka: Odpovídá-li matice \mathbf{A} matici nějakého zobrazení \mathcal{A} , pak každý nenulový vektor z jádra zobrazení $\ker \mathcal{A}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu \emptyset . Je-li $\ker \mathcal{A} = \{\Theta\}$ (je-li matice \mathbf{A} regulární), pak \emptyset není vlastním číslem matice \mathbf{A} .

Příklad 1.3.1. Je-li \mathbf{P} matice ortogonální projekce v prostoru \mathbb{R}^3 na nějaký podprostor \mathcal{U} (\mathcal{U} je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí $\mathbf{Pu} = \mathbf{u}$, všechny vektory z \mathcal{U} (s výjimkou nulového vektoru Θ) jsou vlastními vektory matice \mathbf{P} příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor \mathcal{U}^\perp je roven jádru projekce (nulovému prostoru matice \mathbf{P}), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku \mathcal{U} (s výjimkou Θ) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.



Soustava rov. 1.3.3 je **homogenní** a stručně ji můžeme zapsat

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (1.3.4)$$

Homogenní soustava má netriviální řešení, právě když je determinant matice soustavy roven nule, tj. v případě soustavy rov. 1.3.3, resp. rov. 1.3.4 platí

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \mathbf{0} \quad (1.3.5)$$

Determinant $A(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$ nazýváme **charakteristický polynom** matice A - jedná se o polynom stupně n v proměnné λ , který má v oboru komplexních čísel n kořenů. Rovnici $A(\lambda) = 0$ nazýváme **charakteristická rovnice matice \mathbf{A}** - jejími kořeny jsou **charakteristické hodnoty** (resp. **vlastní čísla**) matice \mathbf{A} .

Příklad 1.3.2. Určete spektrum matice a její spektrální poloměr následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Spektrum matice je množina všech jejích vlastních čísel. Spektrální poloměr je maximum z absolutních hodnot vlastních čísel. Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -3 - \lambda & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2 - \lambda)^2(-3 - \lambda) + 1.25(2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) &= 0 \\ (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 1.25 + 6] &= 0 \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1.25) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -0.5 + i, \quad \lambda_3 = -0.5 - i$$

- Spektrum matice \mathbf{A} je $\sigma(\mathbf{A}) = \{2, -0.5 + i, -0.5 - i\}$.
- Spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| = 2$.



Příklad 1.3.3. Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Vlastní vektory \mathbf{x}_i odpovídající vlastním číslům λ_i , jsou řešením homogenní soustavy rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$.

- Vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0.5 \\ -3.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (1 - \lambda)(4 - \lambda) - \frac{7}{4} &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + \frac{9}{4} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 4.5, \quad \lambda_2 = 0.5$$

- Vlastní čísla matice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (3 - \lambda)(4 - \lambda) + \frac{5}{2} &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + \frac{29}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{7 + 3i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7 - 3i}{2}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = 4.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 - 4.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4 - 4.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3.5 & 0.5 \\ -3.5 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_2 = 0.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 - 0.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4 - 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 3.5 & 3.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = \frac{7+3i}{2}$: $(\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 - \frac{7+3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7+3i}{2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -5 & -(1 - 3i) \\ 5 & (1 - 3i) \end{pmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} -1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0 \end{aligned}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{B} pro $\lambda_2 = \frac{7-3i}{2}$: $(\mathbf{B} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 - \frac{7-3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7-3i}{2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -5 & -(1 + 3i) \\ 5 & (1 + 3i) \end{pmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} -1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0 \end{aligned}$$

```

1 % example:
2 % Determine the spectrum of a matrix and its spectral radius:
3 % write the matrix A
4 A = [2 2 0; -3 -3 5; 0 -0.25 2]
5 % solutions:

```

```

6 % d = eig(A) Returns the vector of the matrix's own numbers.
7 vlastni_cisla = eig(A)
8 spektralni_polomer = max(abs(vlastni_cisla))
9 %=====
10 % example:
11 % Specify your own numbers and corresponding own vectors
12 % of the following matrices:
13 A1 = [1 0.5; 3.5 4]
14 A2 = [3 -1; 2.5 4]
15 % solutions:
16 [vl_vektory_mA1 ,vl_cisla_mA1] = eig(A1)
17 [vl_vektory_mA2 ,vl_cisla_mA2] = eig(A2)
18 % notes:
19 % vlastni cisla jsou na diagonale
20 % 1. sloupec vl_vektoru odpovida vl_cisu v 1. sloupce

```

Výpis 1.1: Výpis programu pro ověření výpočtu vlastních čísel matic programem Matlab.

Příklad 1.3.4. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$, kde \mathbf{A} je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: (z předchozího příkladu víme, že $\lambda_1 = 4.5, \lambda_2 = 0.5$) a \mathbf{I} jednotková matice. Označme symbolem λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a nechť \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor. Pak platí:

- Matice \mathbf{A}^2 má vlastní čísla rovna λ^2 .
- Matice $4\mathbf{A}$ má vlastní čísla rovna 4λ .
- Matice $9\mathbf{A}^{-1}$ má vlastní čísla rovna $\frac{9}{\lambda}$.

Matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$ má vlastní čísla ve tvaru $\lambda^2 - 4\lambda + \frac{9}{\lambda} - 1$, vlastní vektory jsou stejné jako vlastní vektory odpovídající vlastním číslům matice \mathbf{A} . Tedy:

$$\sigma(B) = \{4.5^2 - 4 \cdot 4.5 + \frac{9}{4.5} - 1, \quad 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + \frac{9}{0.5} - 1\} = \{3.25, 15.25\}$$

Definice 1.3.2. Rovnost dvou polynomů: Řekneme, že dva polynomy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 + b_0$ stupňů n a m se sobě rovnají právě tehdy, když $m = n$ a $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_{(n-1)} = b_{(m-1)}, a_n = b_m$. V tomto případě také říkáme, že mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou **totožné**.

Věta 1.3.1. Jestliže mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou dva polynomy stupně n -tého a jestliže pro $n+1$ různých reálných nebo komplexních čísel x platí $f(x) = g(x)$, potom jsou polynomy **totožné**.

1.4 Polynomy

1.4.1 Rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky

Příklad 1.4.1. Rozložte na parciální zlomky lomenou racionální funkci

$$f(x) : y = \frac{7x + 8}{x^2 + x - 2}$$

Nejprve vypočteme nulové body jmenovatele:

$$x^2 + px + q = (x - u)(x - v) = x^2 - (u + v)x + uv \rightarrow p = -(u + v), \quad q = uv$$

Kořenové činitele $x^2 + x - 2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ zvolíme za jmenovatele parciálních zlomků a rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{7x + 8}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

kde A, B jsou neznámé konstanty. Tyto konstanty určíme tak, aby rozklad platil pro každé $x \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$. Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost dvou polynomů

$$7x + 8 = (A + B)x + 2A - B$$

Podle 1.3.1 se musí rovnat koeficienty u x a absolutní členy obou stran poslední rovnice \Rightarrow dostaneme soustavu rovnic pro určení A a B ve tvaru:

$$7 = A + B \tag{1.4.1}$$

$$8 = 2A - B$$

$$A = 5, \quad B = 2$$

Postup, který jsme užili, nazýváme **Metodou neurčitých koeficientů**.

Pozn: Pro určení koeficientů A, B se užívají také jiné postupy, např. dosazování kořenů jmenovatele, která je výhodná zejména v případech, kdy jmenovatel lomené racionální funkce má jednoduché kořeny. Postupujeme tak, že rov. 1.4.1 násobíme součinem kořenových činitelů $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ a dostaneme rovnici

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

pro určení koeficientů A, B dosazováním kořenů.

$$\begin{aligned} x = -2 &\rightarrow & -14 + 8 &= B(-2 - 1) \rightarrow B = 2 \\ x = +1 &\rightarrow & +7 + 8 &= A(1 + 2) \rightarrow A = 5 \end{aligned}$$

1.5 Vektorové prostory se skalárním součinem

1.5.1 Ortogonální doplňky

Nechť U je podprostor vektorového prostoru V . Ortogonální doplněk U^\perp obsahuje všechny vektory, které jsou kolmé ke každému vektoru z U , neboli

$$\forall \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

což lze vyjádřit pomocí skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ortogonální doplněk U^\perp k podprostoru $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ tedy hledáme jako řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} \vec{u}_1 & 0 \\ \cdots & \vdots \\ \vec{u}_k & 0 \end{array} \right),$$

nuly na pravé straně při výpočtu zpravidla vynescháváme. Připomeňme také vztah

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \tag{1.5.1}$$

Příklad 1.5.1. Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle (1, -3, 2), (2, 1, 5) \rangle^\perp$$

(Zdroj: [Mošo7, s. 3])

Řešení: Hledáme vektor (x, y, z) , jehož skalární součin je se zadánymi vektory roven nule. Budeme tedy řešit (úpravou na Gaussův tvar pomocí elementárních úprav) homogenní soustavu rovnic zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odtud dostáváme

$$z = \alpha, \quad 7y + z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}\alpha, \quad x + \frac{3}{7}\alpha + 2\alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{17}{7}\alpha$$

neboli

$$(x, y, z) = \alpha \left(-\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right) = \alpha = (17, 1, -7).$$

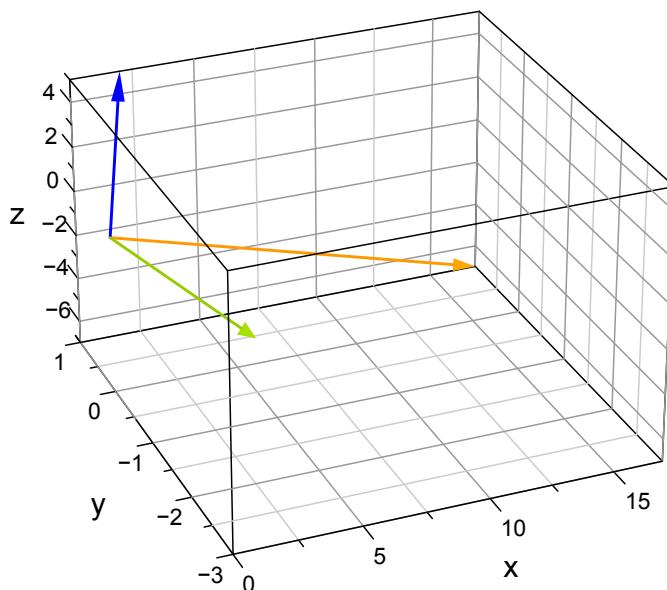
V dalších příkladech budeme nuly na pravé straně soustavy vynechávat a upravovat na výhodnější tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno zjistíme, že vektor $(x, 1, -7)$ jistě vyhovuje druhé rovnici. Dosadíme-li ho do první rovnice, dostaneme $7x + 17 \cdot (-7) = 0$ a $x = 17$.

Hledaný ortogonální doplněk je tedy lineární obal

$$\langle (17, 1, -7) \rangle^\perp.$$



Obrázek 1.5.1: Vizualizace vektorového prostoru a jeho ortogonálního doplňku pomocí sw MatLab - MuPAD příkazem:

```
plot(plot::Arrow3d([1,-3,2]),plot::Arrow3d([2,1,5]),
plot::Arrow3d([17,1,-7]))
```

Výsledek předchozího příkladu 1.5.1 lze interpretovat tak, že jsme našli všechny vektory, které jsou kolmé na rovinu určenou vektory ze zadání. Rovina je útvar dvojrozměrný a protože prostor všech vektorů je trojrozměrný, musí nutně mít podprostor ortogonálních vektorů ve shodě se vztahem 1.5.1 pouze jednu dimenzi. Vše je dobře patrné z obr. 1.5.1

1.6 Vektor

Zadejte složky vektoru \vec{a}

$$\vec{a} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

a vektoru \vec{b}

$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

Operace s vektory:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\theta = {}^\circ$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

References

- [Moš07] F. Mošna. “Řešené příklady z Matematiky III”. In: XXX (Oct. 2007). příklady (cit. on p. 17).



Část II

Matematická analýza I

Kapitola 2

Historie matematické analýzy

Obsah

Seznam literatury	24
---------------------------------------------	-----------

Analýza jako nezávislý předmět byla vytvořena v 17. stol. během vědecké revoluce. Kepler, Galilei, Descartes, Fermat, Huygens, Newton a Leibniz, když zmíníme jen několik důležitých jmen těch, kteří přispěli k jejímu vzniku. Otázky z mechaniky, optiky a astronomie hrály roli v jejím raném období, tak jako vnitřní problémy matematiky, jako výpočet obsahů, objemů a analýza komplikovaných křivek. Pohyb po zakřivených drahách působením proměnných sil, které se staly předmětem důkladného zájmu po studiu volně padajících těles Galilea, vedl k počátečnímu úspěchu. Z velké rozmanitosti snah, které se objevily na konci 17. stol. v práci Newtona a Leibnize, se zrodila nová matematická disciplína, jejíž některé poznatky jsou v těchto studijních zápiscích.

Základní myšlenka použití diferenciálních rovnic k získání pohledu na globální chování proměnných kvantit z jejich (infinitezimálních) změn prokázala základní a plodné výsledky daleko za hranicemi matematiky a fyzika a formovala náš souhrnný vědecký pohled na svět, zvláště na představu o kauzalitě. Na konci 18. stol., vskutku, největší vědci došli ke shodě, že procesy v přírodě (a společnosti) jsou determinovány a podřízeny zákonům, které mohou být popsány v podobě diferenciálních rovnic. Laplace, tento mistr matematické fyziky, naznačil obraz nějaké fiktivní vševedoucí intelligence, užívající úplnou znalost zákonů a stavu světa v daný časový okamžik, by mohla předpovídat další vývoj světa navždy a hned. Myšlenka *přírodních zákonů* byla kmotrem při vytvoření matematického pojmu funkce a naopak nebyla by to myšlenka nikdy tak vlivná, kdyby matematická analýza nevyvíjela úspěšné metody pro výzkum funkčních závislostí.

Kapitola 3

Reálná a komplexní čísla

Obsah

Seznam literatury	26
-----------------------------	----

Kapitola 4

Limita a spojitost funkce

Obsah

4.1	Reálná funkce	28
4.1.1	Pojem funkce	28
4.1.2	Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce	28
4.1.3	Některé zvláštní vlastnosti funkcí	32
4.1.4	Operace s funkcemi. Uspořádání	36
4.1.5	Elementární funkce	36
4.1.6	Zobrazení v jiných strukturách	38
4.1.7	Cvičení	38
4.2	Limita funkce	38
4.3	Spojitost funkce	38
	Seznam literatury	38

4.1 Reálná funkce

4.1.1 Pojem funkce

4.1.2 Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce

Každé funkci můžeme přiřadit její graf. **Grafem funkce** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, jejíž souřadnice x, y v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovuje rovnice

$$y = f(x). \quad (4.1.1)$$

Grafem funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné "představy". Grafy některých funkcí jsou "křivky" (intuitivním smyslu tohoto slova). Avšak u některých funkcí názorná představa grafu selhává. Vezmeme-li např. Dirichletovu funkci z odst. **, snadno zjistíme, že její graf nemůžeme sestrojit (byly by to "dvě rovnoběžné přímky $y = 0$ a $y = 1$ s nekonečným množstvím mezer")

Zadat funkci znamená udat její definiční obor a "zobrazovací předpis", tj pravidlo (formulované slovně či v používaném matematickém jazyku), podle něhož můžeme jednoznačným způsobem rozhodnout, jaká funkční hodnota odpovídá libovolně zvolenému číslu z definičního oboru. Definičním oborem bývá často interval nebo sjednocení intervalů. Není-li definiční obor udán, rozumíme jím množinu všech reálných čísel, pro něž je příslušný předpis definován. Tuto množinu nazýváme **přirozeným (též maximálním) definičním oborem funkce**. Je to tzv. *existenční obor* výrazu, jímž je funkce definována [BMR89, s. 84].

Například funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, můžeme vyjádřit bez udání definičního oboru \mathbb{R} vztahem

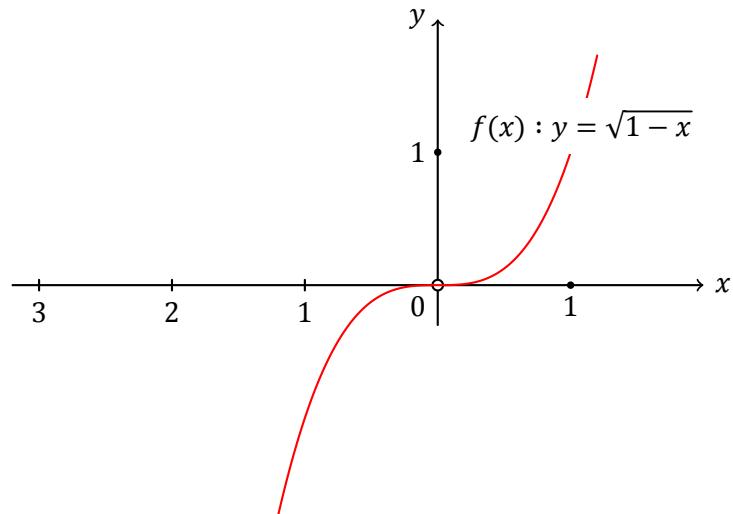
$$f : y = x^2,$$

neboť předpis $y = x^2$ má smysl pro každé reálné číslo x . Avšak u funkce $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, je nutné v zápisu funkce definiční obor $(0, 1)$ uvést, píšeme tedy

$$g : y = x^2, \quad x \in (0, 1).$$

Zobrazovací předpis, kterým je funkce zadána, může být rozmanitý. Nejčastěji a pro účely matematické analýzy nevhodnější je *analytické zadání vzorcem*, tj. rovnicí tvaru $y = f(x)$ nebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru. Přitom v rovnici $y = f(x)$ je na pravé straně nějaký správně definovaný výraz obsahující nejvýše poměnnou x a nabývající jednoznačné hodnoty pro danou hodnotu proměnné x .

Příklad 4.1.1. Vzorcem $f(x) = \sqrt{1-x}$ je dána funkce, jejímž přirozeným oborem je interval $(-\infty, 1]$ (uvažme, že výraz $\sqrt{1-x}$ je definován v reálném oboru, je-li $1-x \geq 0$). Graf této funkce je část paraboly, jejíž osou je osa x , viz obr. 4.1.1.



Obrázek 4.1.1: Graf funkce $y = \sqrt{1-x}$ je část paraboly, jejíž osou je osa x

Příklad 4.1.2. Funkce je dána vzorcem

$$f(x) : y = |x|.$$

Přirozeným definičním oborem této funkce je množina \mathbb{R} . Táž funkce může být dána i vzorcem

$$f(x) : y = \sqrt{x},$$

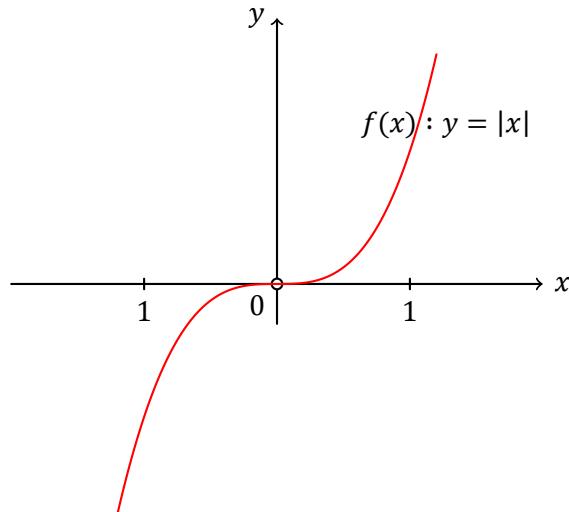
nebo dvěma rovnicemi

$$f(x) : y = \begin{cases} x & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

což je zřejmé, uvědomíme-li si jak je definována absolutní hodnota. Graf funkce je na obr. 4.1.2.

Funkce může být analyticky zadána i jinak než vzorcem $y = f(x)$. časté je **parametrické vyjadřování**, tj. vyjádření dvojicí rovnic

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J, \quad (4.1.2)$$



Obrázek 4.1.2: Graf funkce $y = |x|$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině J (J bývá obvykle interval). Proměnná t se nazývá *parametr*: má zde pomocný význam. Zajímá nás totiž vztah mezi x a y . Rovnice 4.1.2 definuje relaci $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{ existuje } t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t), y = \psi(t)\}. \quad (4.1.3)$$

Tato relace může být za určitých podmínek jednoznačná tj. je funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} . V tomto případě říkáme, že funkce f je *definována parametricky rovnicemi 4.1.2*

Příklad 4.1.3. Rovnice $x = \cos t$, $y = \sin t$ $t \in \langle 0, \pi \rangle$, definují parametricky funkci

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (4.1.4)$$

jejíž grafem je polokružnice, ležící v horní polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$.

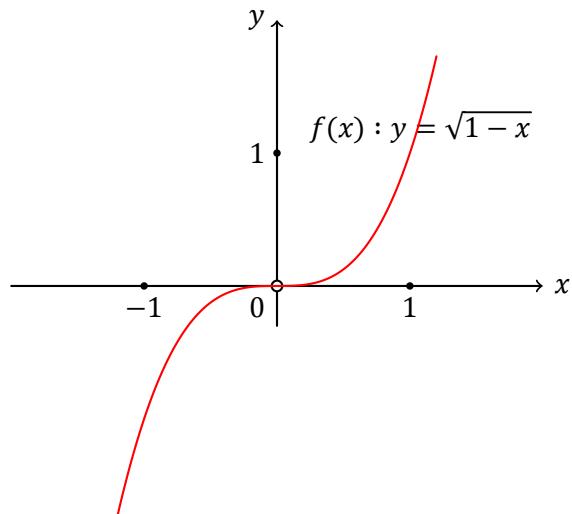
Blíže se parametrickým zadáním funkce budeme zabívat v kapitole 6 (Aplikace diferenciálního počtu).

Funkce může být někdy zadána též rovnicí tvaru

$$F(x, y) = 0. \quad (4.1.5)$$

Přitom F je funkce dvou proměnných, tj. zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Kromě rovnice 4.1.5 může být dána ještě podmínka, aby bod (x, y) patřil k některé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Rovnicí 4.1.5 je definován opět jakási relace $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\} \quad (4.1.6)$$



Obrázek 4.1.3: Graf funkce $y = \sqrt{1 - x}$ je polokružnice

(případně $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0, (x, y) \in M\}$), zajímá nás, kdy tato relace je funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Říkáme pak, že funkce f je dána **implicitně** uvedenou rovnicí 4.1.5 (příp. rovnicí 4.1.5 a podmínkou $(x, y) \in M$). Naproti tomu zadání funkce ve tvaru $y = f(x)$ nazýváme **explicitním**.

Příklad 4.1.4. Rovnicí $x + 2y - 3 = 0$ je implicitně definována funkce $f : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Příklad 4.1.5. Rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ a podmínkou $y \geq 0$ je definována implicitní funkce z příkladu 4.1.3. Relace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ není ovšem jednoznačná, každé hodnotě $x \in (-1, 1)$ odpovídají dvě hodnoty y : $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Podmínkou $y \geq 0$ druhou hodnotu vylučujeme. Místo podmínky $y \geq 0$ bychom mohli uvést i jiné podmínky, aby rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určovala implicitní funkci.

Vyšetřování podminek, při nichž rovnice $F(x, y) = 0$ je definována funkce f , se obvykle provádí metodami matematické analýzy funkce více proměnných.

Funkce může být někdy dána tabulkou, tj. dvojicemi hodnot argumentu a funkce, což bývá obvyklé při zjišťování závislosti veličin měřením. Proměnná x se v tomto případě mění "diskrétně". Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme definovat úplně jen tehdy, je-li definiční obor konečná množina. Tabulku však používáme i v jiných případech, zejména chceme-li vyznačit pomocí ní, některé hodnoty, které nás z nějakého důvodu přednostně zajímají.

V technických aplikacích bývá funkce dána graficky. Z grafu můžeme ovšem funkční hodnoty určit pouze přibližně. Pro další matematické zpracování je grafické zadání nejméně vhodné, i když jeho praktický význam nelze popřít.

Speciálním případem reálných funkcí jedné reálné proměnné jsou *posloupnosti reálných čísel*.

4.1.3 Některé zvláštní vlastnosti funkcí

4.1.3.1 Omezená funkce

Definice 4.1.1. Funkci f nazýváme shora (zdola) omezenou na množině $A \subset D(f)$, je-li shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot $f(A)$. Je-li funkce f omezená shora i zdola na množině A , pak ji nazýváme omezenou na množině A . Je-li $A = D(f)$, nazýváme funkci omezenou. Viz kniha [BMR89, s. 87]

Funkce f je omezená na množině A , právě když existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pro každé } x \in A$$

neboli

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pro každé } x \in A.$$

Příklad 4.1.6. Funkce $f : y = \frac{1}{x^2+1}$ je omezená. Platí totiž

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| = \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zdola je tato funkce omezena dokonce číslem 0.

- Je-li funkce f shora omezená na množině A , existuje konečné supremum $\sup f(A)$. Toto číslo nazýváme supremem funkce f na množině A a označujeme je též $\sup_{x \in A} f(x)$ nebo $\sup\{f(x), x \in A\}$.
- Je-li funkce f zdola omezená na množině A , existuje konečné infimum $\inf f(A)$, které nazýváme infimum funkce f na množině A a označujeme je též $\inf_{x \in A} f(x)$ nebo $\inf\{f(x), x \in A\}$.

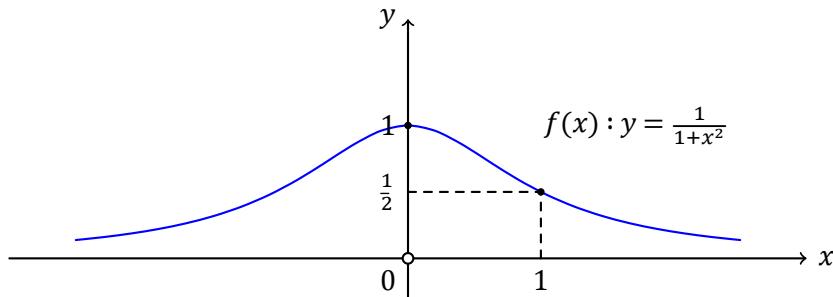
- Není-li funkce f shoda (zdola) omezená na množině A , pak je ovšem $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$ ($\sup_{x \in A} f(x) = -\infty$).
- Má-li množina $f(A)$ největší (nejmenší) prvek, pak toto číslo nazýváme největší (nejmenší) hodnotou funkce f na množině A (je-li $A = f(f)$, též absolutním maximem, resp. absolutním minimem funkce f) a značíme je $\max_{x \in A} f(x)$ ($\min_{x \in A} f(x)$). V tomto případě existuje takové číslo $x_0 \in A$, že $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$ ($f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$). Pro všechna $x \in A$ tedy platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Je zřejmé, že největší (nejmenší) hodnota funkce f na množině A , pokud existuje je současně supremem (infimumem) funkce f na A .

Příklad 4.1.7. Pro funkci z příkladu 4.1.6 platí:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = 1; \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = 0, \quad (4.1.7)$$

tato funkce však nenabývá v definičním oboru \mathbb{R} nejmenší hodnoty, neboť je stále $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$. To, že infimum je 0, dokážeme takto: Zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, pak snadno zjistíme, že existuje x , pro níž $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} 1 &< \varepsilon(x^2 + 1) \\ \frac{1}{\varepsilon} &< x^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < x \end{aligned}$$



Obrázek 4.1.4

Neexistuje tedy kladné číslo, jíž by bylo dolnímezí množiny funkčních hodnot, takže infimum je 0. Graf funkce f je na obr. ??.

4.1.3.2 Monotonní funkce

Definice 4.1.2. Funkci f nazýváme **rostoucí (klesající)** na množině $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Funkci f nazýváme **neklesající (nerostoucí)** na množině $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dvá body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Rostoucí a klesající funkce (na množině A) se nazývají **ryze monotónní** (na množině A), neklesající a nerostoucí funkce (na množině A) se nazývají **monotónní** (na množině A).

Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí. Ryze monotónní funkce tvoří tedy podmnožinu množiny monotónních funkcí.

Příklad 4.1.8. Funkce $y = 2x + 1$ je **rostoucí** na intervalu $(-\infty, \infty)$. Platí totiž: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$.

Příklad 4.1.9. Funkce $y=[x]$ je **neklesající** na intervalu $(-\infty, \infty)$ (viz příklad **).

Příklad 4.1.10. Heavisideova funkce (viz příklad **) je **neklesající** na intervalu $(-\infty, \infty)$ (viz příklad **).

Příklad 4.1.11. Funkce $y = |x|$ je **klesající** na intervalu $(-\infty, 0)$ a **rostoucí** na intervalu $(0, \infty)$.

Definice 4.1.3. Funkci f nazýváme **konstantní** na množině A , jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, platí $f(x_1) = f(x_2)$. V tom případě existuje reálné číslo k takové, že pro každé $x \in A$ je $f(x) = k$. Je-li $k = 0$, mluvíme o **nulové funkci** na množině A .

Výrok "funkce f je konstantní na množině A " zapisujeme též $f(x) = \text{konst}$ na A . Funkci konstantní na \mathbb{R} budeme stručně nazývat **konstantní funkcí** nebo krátce **konstantou**. Z textu bude obvykle patrno, interpretujeme-li symbol k jako reálné číslo nebo jako konstantní funkci. Je zřejmé, že konstantní funkce na množině A je zároveň neklesající i nerostoucí na množině A . Toto tvrzení se dá obrátit. Lze snadno dokázat i tuto větu:

Věta 4.1.1. Funkce f je **rostoucí** na množině A , právě když je **neklesající** na množině A a na žádné dvoubodové podmnožině $B \subset A$ není konstantní.

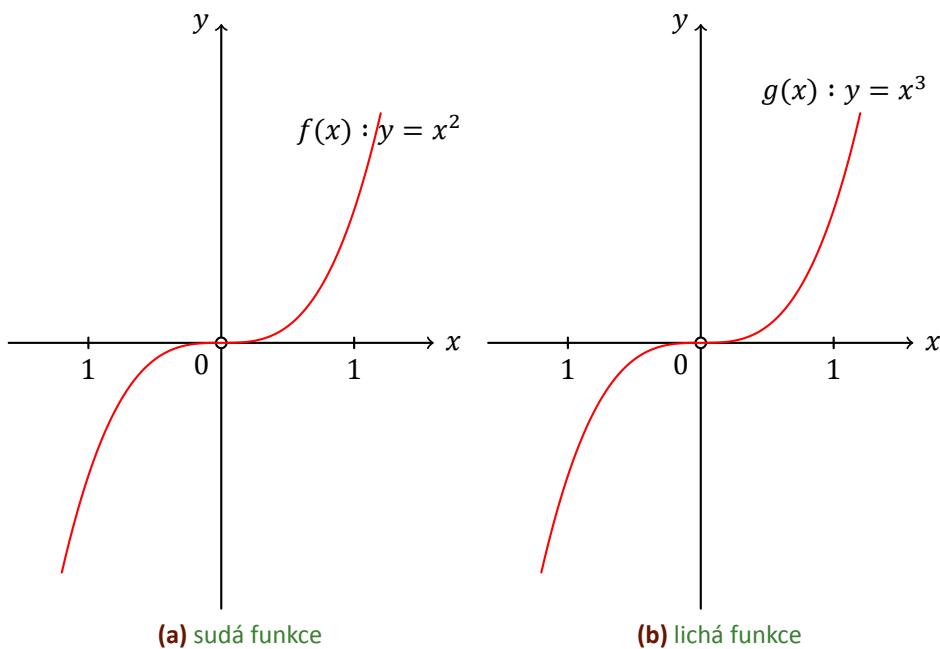
Obdobná tvrzení platí i pro klesající funkce.

4.1.3.3 Sudé a liché funkce

Definice 4.1.4. Funkce f se nazývá **sudá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá **lichá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (osy funkčních hodnot), graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Příklad 4.1.12. Funkce $f : y = x^2$ je sudá, funkce $g : y = x^3$ je lichá.



Obrázek 4.1.5: Příklad sudé a liché funkce

Daná funkce nemusí být ovšem ani sudá, ani lichá. Snadno se dokáže tvrzení:

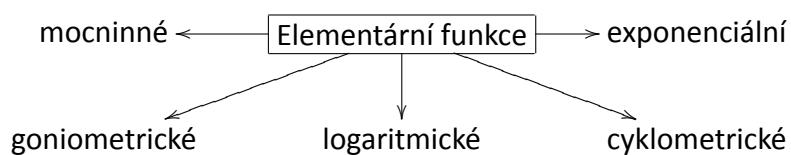
- Je-li sudá funkce f na množině $D(f) \cap (0, \infty)$ rostoucí (klesající), je na množině $D(f) \cap (-\infty, 0)$ klesající (rostoucí).
- Je-li lichá funkce na množině $D(f) \cap (0, \infty)$ rostoucí (klesající), je též na množině $D(f) \cap (-\infty, 0)$ klesající (rostoucí).

4.1.3.4 Periodická funkce

4.1.4 Operace s funkcemi. Uspořádání

4.1.5 Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme [Pol98, s. 10]:



4.1.5.1 Goniometrické funkce

- Základní vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.8)$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.9)$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.10)$$

- Součtové vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.11)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.12)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.13)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.14)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (4.1.15)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \quad (4.1.16)$$

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

- **Vzorce pro dvojnásobný úhel 2α**

Pro každé $\alpha \in R$ platí:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.1.17)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (4.1.18)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (4.1.19)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad (4.1.20)$$

- **Vzorce pro poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$**

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.21)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.22)$$

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (4.1.23)$$

$$\left| \cot \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (4.1.24)$$

Vzorce 4.1.21 a 4.1.22 odvodíme pomocí vzorců 4.1.18 a 4.1.8:

$$\cos \alpha = \cos 2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

a dále užijeme vztahu $\sqrt{a^2} = |a|$ (platí pro každé $a \in \mathbb{R}$) Užitím součtových vzorců a toho že, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$ a $\cos \pi = -1$ lze snadno odvodit, že pro každé $\alpha \in R$ platí

$$\begin{array}{ll}
 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\
 \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\
 \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha
 \end{array}$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha.$$

4.1.6 Zobrazení v jiných strukturách

4.1.7 Cvičení

4.2 Limita funkce

4.3 Spojitost funkce

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on pp. [28](#), [32](#)).
- [Pol98] J. Polák. *Matematická analýza I*. ZČU - FAV, 1998. ISBN: 80-7082-466-2 (cit. on p. [36](#)).

Kapitola 5

Derivace funkce

Obsah

5.1	Základní věty diferenciálního počtu	40
5.1.1	Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce	40
5.1.2	Věty o střední hodnotě	40
5.1.3	Některé důsledky Lagrangeovy věty	44
	Seznam literatury	45

5.1 Základní věty diferenciálního počtu

5.1.1 Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce

V tomto článku uvedeme významné věty, zvané souhrně věty o *střední hodnotě diferenciálního počtu*, a dále pak ukázky jejich užití v matematické analýze. Avšak dříve než budeme tyto věty formulovat, uvedeme jedno důležité tvrzení, které sice bude mít v dalších úvahách tohoto článku pomocnou úlohu, ale v teorii extrémů má i samostatný význam. [BMR89, s. 186]

Věta 5.1.1. Nechť funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na množině A své největší (nejmenší) hodnoty na vnitřním bodě c množiny A . Máli funkce f v bodě c derivaci, potom $f'(c) = 0$.

Důkaz. Nechť např. $f(c)$ je největší hodnota funkce f na množině A , takže $f(x) \leq f(c)$ pro $\forall x \in A$. Potom pro $x \in A, x < c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

a tedy

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Dále pro $x \in A, x > c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

a proto

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Platí tedy

$$f'_+(c) \leq f'_-(c) \geq f'_-(c).$$

Avšak $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$. Odtud plyne $f'(c) = 0$. ■

5.1.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.1.2. Rolleova věta¹ Nechť funkce f má tyto vlastnosti:

¹Michel Rolle [Mišel Rol] (1652-1719) Francouzský matematik

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$;
2. má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu (a, b) ;
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Protože je funkce f je na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, nabývá v tomto intervalu své největší hodnoty M , své nejmenší hodnoty m . Přitom ovšem platí:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (5.1.1)$$

Nyní mohou nastat dva případy:

1. funkce f nabývá M i m právě v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Podle předpokladu 3 věty 5.1.2 však potom platí $f(a) = f(b) = m = M$. Vzhledem ke vztahu 5.1.1 odtud plyne, že funkce f je konstantní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a tedy $f'(x) = 0$ dokonce v každém bodě $x \in (a, b)$
2. Funkce f nabývá aspoň jedné z hodnot M, m v některém vnitřním bodě ξ intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom podle věty 5.1.1 je $f''(\xi) = 0$.

■

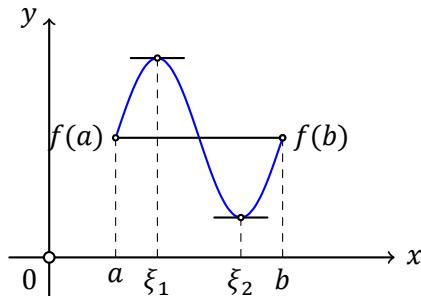
Poznámka 5.1.1. Rolleova věta sama zaručuje jen existenci aspoň jednoho bodu $\xi \in (a, b)$, ve kterém je $f'(\xi) = 0$. Neumožňuje však ani určení tohoto bodu (nebo bodů), ani stanovení jejich počtu

Poznámka 5.1.2. Na obr. 5.1.1 je ilustrován geometrický význam Rolleovy věty. Graf funkce na tomto obrázku má v bodech ξ_1, ξ_2 , v nichž je $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ tečny rovnoběžné s osou x .

Z Rolleovy věty plyne důležitá věta:

Věta 5.1.3. (Cauchyova věta). Nechť funkce f a g mají tyto vlastnosti:

1. Jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,



Obrázek 5.1.1: K výkladu Rolleovy věty

2. v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje derivace $f'(x)$ (vlastní či nevlastní) a vlastní derivace $g'(x)$,
3. $g'(x) \neq 0$ na (a, b)

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (5.1.2)$$

Důkaz. Poznamenejme především, že z předpokladu 3 $g'(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$ a z předpokladu spojitosti funkce g na uzavřeném intervalu $[a, b]$ ihned vyplývá vztah $g(b) - g(a) \neq 0$. Kdyby totiž bylo $g(b) = g(a)$, potom by podle Rolleovy věty 5.1.2 existoval aspoň jeden bod $\eta \in (a, b)$ takový že $g'(\eta) = 0$. To však by byl spor s předpokladem $g'(x) \neq 0$ pro každý bod $x \in (a, b)$. Proto má smysl podíl na levé straně rovnosti 5.1.2

K vlastnímu důkazu Cauchyovy věty zavedeme takovou pomocnou funkci F , aby splňovala podmínky Rolleovy věty. Definujme ji pro $x \in (a, b)$ předpisem

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]. \quad (5.1.3)$$

Snadno ověříme, že tato funkce skutečně splňuje podmínky Rolleovy věty na intervalu (a, b) :

- Je spojitá na intervalu $x \in (a, b)$, což je důsledkem spojitosti funkce f a g na intervalu $x \in [a, b]$,
- má derivaci F' na otevřeném intervalu (a, b) , což plyne z existence derivace f' a g' funkce f a g na intervalu (a, b) ,

- $F(a) = F(b) = 0$

Platí tedy i závěr Rolleovy věty pro funkci F , tj. na intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ , pro který $F'(\xi) = 0$. Zderivujeme-li funkci F , dostaneme (dosadíme-li $x = \xi$):

$$F'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - f'(\xi)[g(b) - g(a)] = 0$$

Odtud již plyne rovnost [5.1.2](#) ■

Významným zvláštním případem Cauchyovy věty je další věta, která se častěji používá.

Věta 5.1.4. (Lagrangeova věta)². Nechť funkce má tyto vlastnosti:

- Je spojitá na intervalu (a, b) ,
- má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu (a, b) .

Potom existuje v otevřeném intervalu (a, b) aspoň jeden bod ξ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad (5.1.4)$$

či-li

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad (5.1.5)$$

Důkaz. Tvrzení této věty je důsledkem tvrzení Cauchyovy věty, a to pro případ $g(x) = x$. Protože $g'(x) = 1$ dokonce všude, jsou splněny všechny tři podmínky Cauchyovy věty. Proto platí i závěr této věty, z něhož pro náš případ již plyne vzorec [5.1.4](#) a tedy i vzorec [5.1.5](#). ■

Poznámka 5.1.3. Podobně jako je Lagrangeova věta zvláštním případem věty Cauchyovy, je Rolleova věta zvláštním případem Lagrangeovy věty, a to při případ, že $f(a) = f(b)$.

Poznámka 5.1.4. Lagrangeova věta se často nazývá větou o přírůstku funkce, protože vzorcem [5.1.5](#) se vyjadřuje přírůstek funkce, tj. rozdíl $f(b) - f(a)$. Všechny tři uvedené věty, tj. věta Rolleova, Cauchyova a Lagrangeova, se v literatuře nazývají souhrnně **věty o střední hodnotě diferenciálního počtu**.

²Joseph Louis Lagrange [lagrénž] (1736-1813), francouzský matematik

Poznámka 5.1.5. Na obr. ** je ilustrován geometrický význam Lagrangeovy věty. Podíl na levé straně rovnosti 5.1.4, tj. číslo $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnice sečny s, spojující body A, B grafu funkce f, které odpovídají krajním bodům intervalu (a, b) . Podle tvrzení Lagrangeovy věty existuje v otevřeném intervalu (a, b) aspoň jeden bod ξ tak, že tečna grafu funkce f v příslušném jeho bodě je rovnoběžná s přímkou s.

Poznámka 5.1.6. Z Lagrangeovy věty vyplývá toto tvrzení: Nechť funkce f vyhovuje na intervalu (a, b) podmínkám Lagrangeovy věty a x_1, x_2 jsou dva libovolné různé body intervalu (a, b) . Potom v otevřeném intervalu s krajními body x_1, x_2 existuje aspoň jeden bod ξ , pro který platí Lagrangeův vzorec:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (5.1.6)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (5.1.7)$$

Potom bod ξ lze vyjádřit takto:

$$\xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), \quad \text{kde } \vartheta \in (0, 1). \quad (5.1.8)$$

Označíme-li $x_2 - x_1 = h$, můžeme vzorec 5.1.6 napsat ve tvaru

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = f'(x_1 + \vartheta h)h, \quad \text{kde } \vartheta \in (0, 1). \quad (5.1.9)$$

5.1.3 Některé důsledky Lagrangeovy věty

Lagrangeova věta, má některé významné důsledky, které nyní uvedeme [BMR89, s. 189]:

Věta 5.1.5. Nechť funkce f vyhovuje podmínkám Lagrangeovy věty a navíc nechť $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Potom funkce f je prostá na intervalu (a, b) .

Důkaz. Necť x_1, x_2 jsou libovolné dva různé body intervalu (a, b) . Potom podle Lagrangeova vzorce 5.1.3 platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \neq 0$$

neboť $f'(\xi) \neq 0$ dle předpokladu. ■

Věta 5.1.6. Funkce f je konstantní na intervalu (a, b) , právě když má na tomto intervalu derivaci a platí $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz. Tedy

- Je-li funkce f konstantní na intervalu (a, b) , pak je $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, jak již víme.
- Nechť $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Dokažme, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) = f(x_2)$. Z existence derivace vyplývá spojitost funkce a jsou tedy splněny podmínky Lagrangeovy věty na každém intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (a, b)$. Podle vzorce 5.1.3 tedy platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (x_1, x_2)$. Protože podle předpokladu je $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a, b)$, platí $f(x_1) - f(x_2) = 0$, tj. $f(x_1) = f(x_2)$

■

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on pp. 40, 44).

Kapitola 6

Aplikace diferenciálního počtu

Obsah

6.1	Průběh funkce	48
6.1.1	Monotonie funkcí	48
	Seznam literatury	52

Diferenciální počet má rozsáhlou oblast užití. V této kapitole ukážeme použití výsledků předchozích kapitol k vyšetřování průběhu funkce a vlastnosti rovinných křivek.

6.1 Průběh funkce

Pomocí derivace můžeme studovat vlastnosti funkce, které usnadní vyšetřování jejího průběhu.

6.1.1 Monotonie funkcí

Jednou z důležitých vlastností funkce je její “monotonie”, kterou jsme definovali již v odst. 4.1.3 kap. 4. Proto je při vyšetřování průběhu funkce důležité určit množiny (často jsou to intervaly), na nichž je funkce monotónní, jinak řečeno, najít “intervaly monotonie funkce”(viz [BMR89, s. 208]).

1. Zjistíme **definiční obor funkce**, vyjádříme jej v intervalech a z nich poznáme, kde je funkce **spojitá**. Funkce je spojitá v (a, b) pro každý bod tohoto intervalu, když $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolně zvolené číslo, a pro všechna x z okolí bodu c je $|x - c| < \delta$, kde $\delta > 0$ je na ε nezávislé.
2. Určíme, je-li funkce **lichá** $f(-x) = -f(x)$ nebo **sudá** $f(-x) = f(x)$. Je-li funkce lichá, je souměrná podle středu souměrnosti (obyčejně to bývá počátek souřadnic xy), je-li sudá, je souměrná podle osy y .
3. Určíme *průsečíky křivky s osami pravoúhlých souřadnic*. Body, ve kterých křivka protíná osu x spolu s body, ve kterých není křivka spojitá, rozlišují intervaly, v nichž je graf křivky nad osou x od intervalů, ve kterých je graf křivky pod osou x .
4. V krajních bodech definičních intervalů, ve kterých je funkce spojitá, stanovíme *limity funkce* a dále

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

5. Vypočítáme $f'(x)$ a $f''(x)$, abychom zjistily, kde je funkce *rostoucí* $f'(x) > 0$, *klesající* $f'(x) < 0$ a kde jsou *lokální extrémy*. Dostaneme-li dosazením kořenů rovnice $f'(x) = 0$ do $f''(x)$ hodnotu $f''(x) > 0$, má funkce lokální minimum, při $f''(x) < 0$ má funkce lokální maximum. V intervalech, kde $f''(x) > 0$, je křivka **konvexní (vypuklá)**, kde $f''(x) < 0$, je křivka **konkávní (vydutá)**. Body, v nichž $f''(x)$ mění znaménko, jsou **inflexní body**. Najdeme je tak, že stanovíme hodnoty

x , pro které je $f''(x) = 0$ nebo neexistuje. Číslo c je inflexní bod, když existuje takové okolí bodu c , že pro $x > c$ je oblouk křivky konvexní a pro $x < c$ konkávní. Je nutné si uvědomit, že když má $f'(x)$ konečnou derivaci, je inflexní bod c taky nulovým bodem druhé derivace čili kořenem rovnice $f''(x) = 0$. Obrácená věta neplatí, tj. z $f''(x) = 0$ nevyplývá, že v bodě c má $f'(x)$ extrém a že bod c je inflexním bodem.

6. **Asymptota** je tečna křivky $f(x)$, jejíž bod dotyku je v nekonečnu. Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

je přímka $x = a$ její asymptotou. Jinak asymptoty mají rovnici $y = kx + q$, kde x a y jsou souřadnice bodů na asymptotách. Existují-li konečné limity

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q$$

pak je asymptotou přímka $y = kx + q$. Můžeme-li rovnici křivky rozložit (tj. rozložit její pravou stranu, obyčejně dělením čitatele jmenovatelem, má-li tvar zlomku) na dvě části, z nichž jedna má tvar $kx+q$ a druhá zbytek $\varphi(x)$, tj. $f(x) = kx+q+\varphi(x)$ a $\varphi(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, je přímka $y = kx + q$ asymptotou.

7. Zpřesnění grafu křivky provedeme sestavením tabulky souřadnic dalších bodů křivky, tj. ke zvoleným hodnotám x (z definičního oboru funkce) vypočítáme hodnoty y . Do dalších řádků tabulky zapíšeme hodnoty $f'(x)$ a $f''(x)$, ve kterých intervalech je funkce *rostoucí*, ve kterých *klesá*, kde je *vypuklá*, kde je *dutá*, kde jsou *lokální extrémy*, *inflexní body* apod., případně sestavíme dílčí tabulky pro jednotlivé *charakteristické vlastnosti* vyšetřované funkce.

Příklad 6.1.1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

1. Definiční obor $D_f = \mathcal{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

2. Funkce je sudá

$$f(-x) = f(x) : \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}.$$

Funkce není periodická.

3. Stanovíme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru $1, -1$ a v nevlastních bodech $-\infty, +\infty$. Protože je funkce **sudá**, omezíme se jen na vyšetřování nezáporné části. Nejprve vlastnosti funkce v okolí bodu 1 . Ten nepatří do D_f a proto určíme limity funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Pro výpočet limity použijeme substituci $y = 1 - x^2$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2-y}{y} = +\infty$$

¹ proto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Obdobně dojdeme k

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

A konečně v nevlastních bodech $\pm\infty$ je limita

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = 0 - 1 = -1.$$

Výpočtem limit jsme zároveň určili dva absolutní (globální) extrémy a jeden lokální:

- v intervalu $(-1, 1)$ má funkce maximum ∞ a minimum 1 ,
- v intervalech $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ má funkce minimum $-\infty$ a maximum -1 .

4. Nyní vyšetříme zda, případně kolik a jaké, má funkce $f(x)$ průsečíky s osami souřadnic. S osou x nemá funkce žádné průsečíky, protože pro $y = 0$ není definována $H_f = \mathcal{R} - \{-1, 1\}$. Pro $x = 0$ je $y = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$, proto má $f(x)$ právě jeden průsečík s osou y a to $[0, 1]$.
5. Zatím jsme zjistili, že naše funkce není definována v bodech 1 a -1 a proto není spojitá v \mathcal{R} . Nevíme však, jaký je její průběh v jednotlivých intervalích definičního oboru. Abychom získali názornější představu o průběhu funkce, zjistíme má-li derivaci.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+x^2)'(1-x^2) - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

¹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Protože má vlastní derivaci², můžeme určit její vlastnosti v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. V těchto intervalech je $y' > 0$ a proto jde o funkci ryze monotónní, rostoucí³ v daných intervalech⁴. Výpočtem zjistíme druhou derivaci funkce. Ta nám pomůže určit další extrém v intervalu $(0, 1)$ a zároveň vyšetřit **konkávnost a konvexnost**.

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{(4x)'(1-x^2)^2 - (4x)(1-2x^2+x^4)'}{(1-x^2)^4} \\y'' &= \frac{4(1-2x^2+x^4)-4x(-4x+4x^3)}{(1-x^2)^4} \\y'' &= \frac{4(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\y'' &= \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}\end{aligned}$$

Abychom mohli určit lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $(0, 1)$, pomocí druhé derivace, musíme najít kořeny rovnice $f'(x) = 0$. V našem případě

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x_0 = 0,$$

tento kořen⁵ pak dosadíme do druhé derivace, tj.

$$y''(0) = \frac{4(3 \cdot 0^2 + 1)}{(1-0^2)^3} = 4,$$

protože je $f''(x) > 0$, má v bodě x_0 lokální minimum. Můžeme rovněž konstatovat, že funkce nemá inflexní body⁶. Konkávnost a konvexnost funkce v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ vyšetříme pomocí vlastností druhé derivace funkce. Tedy

- $(0, 1) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konvexní**
- $(1, \infty) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konkávní**.

6. Z předchozích výpočtů plyne, že křivka má asymptoty $y = -1, x = \pm 1$.

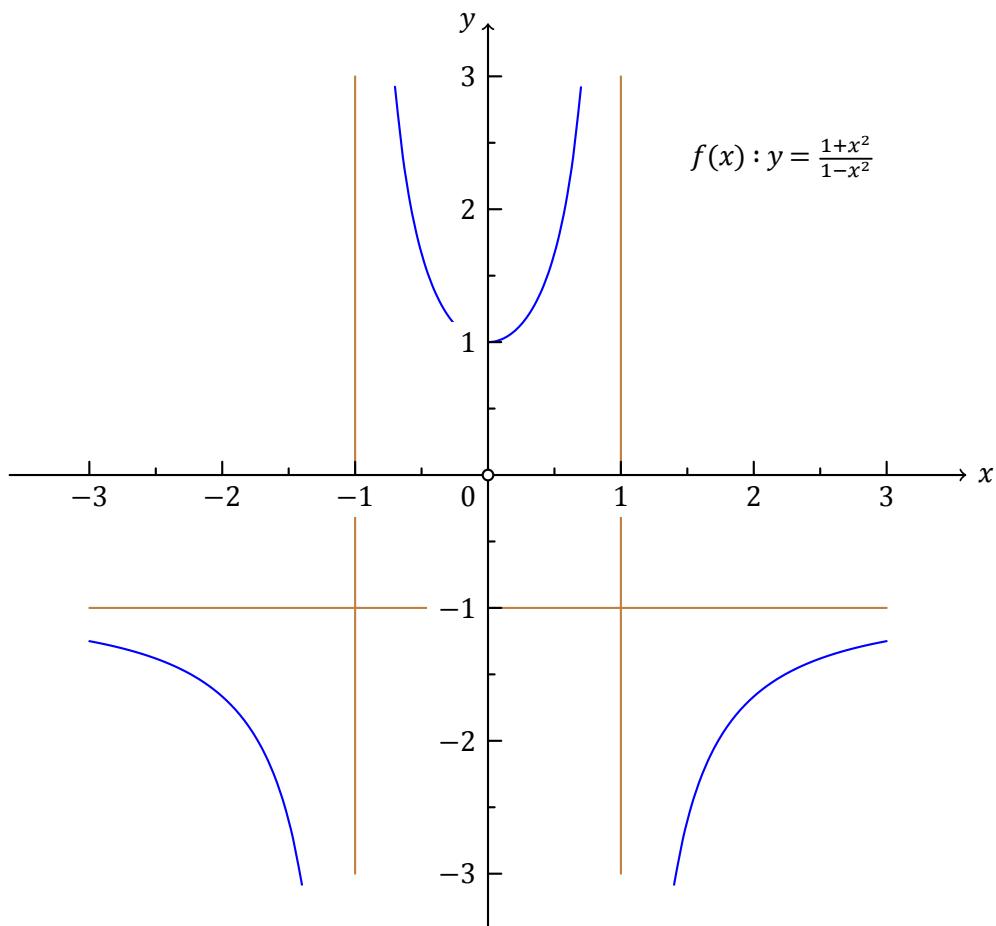
² $f(x)$ je spojitá v intervalech $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ věta s spojité funkci

³Plyne z věty o postačujících podmínkách ryží monotónnosti funkce na intervalu

⁴V intervalech $(-\infty, -1), (-1, 0)$ je funkce klesající.

⁵stacionární bod

⁶Pro existenci inflexního bodu je nutné splnění jedné z podmínek a to buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.



Obrázek 6.1.1: Graf funkce $f(x)$

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on p. 48).

Kapitola 7

Primitivní funkce

Obsah

7.1 Motivace	54
7.1.1 Metody určení primitivní funkce	55
Seznam literatury	66

7.1 Motivace

Zavedením pojmu derivace funkce jsme motivovali důležitým požadavkem definovat okamžitou rychlosť pohybu bodu po přímce. Existuje přirozeně i požadavek opačný, tj. nalézt zákon dráhy pohybu bodu po přímce, je-li dána jeho okamžitá rychlosť jako funkce času. [BMR89, s. 253]

Příklad 7.1.1. Je dána okamžitá rychlosť v pohybu bodu po přímce (ose) x rovnici $v(t) = 2t + 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Najděte zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase $t = 0$ měl bod polohu $x = x_0$.

řešení:

Označíme-li $x(t)$ polohu bodu v okamžiku t , pak $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Hledáme tedy funkci $x = x(t)$, pro níž platí

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad x(0) = x_0.$$

Je ihned patrné, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$x(t) = t^2 + t + C, \tag{7.1.1}$$

kde C je libovolná konstanta. Funkce, která splňuje i druhou podmínu (říkáme ji též počáteční podmínka), najdeme z rovnice 7.1.1 dosazením dané podmínky $t = 0$, $x = x_0$. Dostaneme $x_0 = C$. Dosazením do 7.1.1 za C plyne hledaný zákon dráhy

$$x(t) = t^2 + t + x_0.$$

Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě dané podmínky a zároveň vidíme, že hledaná primitivní funkce daných vlastností je jediná.

Každé takové funkci, jejíž derivací je daná funkce, budeme říkat *primitivní funkce* k dané funkci. Na uvedeném příkladě je patrné, že k dané funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Množinu všech primitivních funkcí se často nazývá **neuričitým integrálem**. Po tomto názorném uvedení do problému přejděme k přesné formulaci základních pojmu.

Definice 7.1.1. Funkce $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval, se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu J právě když, pro všechna $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$ (v krajních bodech intervalu J , pokud k němu patří, jde o derivace jednostrané).

Příklad 7.1.2. K funkci $\sin x$ je primitivní funkcí na libovolném intervalu $J \subset (-\infty, +\infty)$ funkce $-\cos x$, protože $(-\cos x)' = \sin x$. Ale též funkce $3 - \cos x$ je primitivní funkcí k funkci $\sin x$, protože $(3 - \cos x)' = \sin x$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

Je vidět, že rozdíl dvou primitivních funkcí k téže funkci je konstanta. To není náhoda, jak potvrzuje následující věta:

Věta 7.1.1. a) Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu J a c reálná konstanta, pak i funkce $G = F + c$ je primitivní funkcí k funkci f na intervalu J .
 b) Jsou-li funkce F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu J , pak funkce $F - G$ je na intervalu J konstantní.

Důkaz:

Tvrzení a) plyne z definice protože $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Tvrzení b) je důsledek věty 5.1.6.

7.1.1 Metody určení primitivní funkce

Procesu hledání primitivní funkce se často říká integrování nebo integrace (od slova "integrál"), což z matematického hlediska znamená provést inverzní operaci k operaci derivování. Smutnou zprávou je, že na rozdíl od derivování neexistuje obecný vzorec pro integrování součinu či podílu, ani obecný vzorec pro integrování složených funkcí. Při hledání integrálů složitějších funkcí se využívá např. *linearita, metoda per partes, substituční metoda*, popř. některé další speciální metody. Řešitel v mnoha případech musí projevit důvtip a intuici, která mu pomůže nalézt primitivní funkci k dané funkci.

7.1.1.1 Integrování součtu, úprava integrandu a integrování rozkladem

Příklad 7.1.3. $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx$ [Kni+o4, s. 29]

Dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostaneme rozklad integrandu na součet

funkcí, jejich integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x \\ - x^4 \quad - x^2 \end{array} \right) : (x^2 + 1) = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \\ \hline \begin{array}{r} 3x^3 - 4x^2 + 3x \\ - 3x^3 \quad - 3x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} - 4x^2 \\ 4x^2 \quad + 4 \end{array} \\ \hline 4 \end{array}$$

Tedy

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Pro uvedený integrál dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx &= \int \left(x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Příklad 7.1.4. $\int \frac{2x^4 - 5x^2 + 14x + 13}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\}$

Dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostaneme rozklad integrandu na součet funkcí, jejich integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} 2x^4 \quad - 5x^2 + 14x + 13 \\ - 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 \end{array} \right) : (x^2 - x - 2) = 2x^2 + 2x + 1 + \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} \\ \hline \begin{array}{r} 2x^3 \quad - x^2 + 14x \\ - 2x^3 + 2x^2 \quad + 4x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} x^2 + 18x + 13 \\ - x^2 \quad + x \quad + 2 \end{array} \\ \hline 19x + 15 \end{array}$$

Zbytek po dělení představuje integrál, jež je počítán v příkladu 7.1.20 a proto ho vynecháme.

$$\begin{aligned} &= 2 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx + \int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} \ln|x+1| - \frac{53}{3} \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

Příklad 7.1.5. $\int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx$ [Kni+O4, s. 29]

Integrand upravíme přičtením a odečtením výrazu $3x^2$ v čitateli zlomku takto:

$$\frac{3}{(1+x^2)x^2} = \frac{3+3x^2-3x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{1+x^2}$$

Tedy v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$, platí

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{3}{x} - 3 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Příklad 7.1.6. $\int \sqrt{1+\cos 2x} dx$ [Kni+O4, s. 30]

Funkci $\sqrt{1+\cos 2x}$ upravíme na základě goniometrické identity 4.1.18

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

takto

$$\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} |\cos x| = \varepsilon \sqrt{2} \cos x,$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right), \end{cases}$$

n je přirozené číslo. Proto pro x ležící v uvedených intervalech je

$$\int \sqrt{1+\cos 2x} dx = \varepsilon \sqrt{2} \int \cos x dx = \varepsilon \sqrt{2} \sin x + C.$$

Příklad 7.1.7. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ [Kni+O4, s. 30]

Integrand upravíme na součet dvou tabulkových integrálů použitím vzorce

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

takže

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

Příklad 7.1.8. $\int \tan^2 x dx$ [Kni+O4, s. 30]

Funkci napíšeme ve tvaru

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

takže

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

v každém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, k je celé číslo.

Příklad 7.1.9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$ (sin² x cos² x ≠ 0; x ≠ k $\frac{\pi}{2}$; k ∈ Z)

Integrand upravíme pomocí vzorce pro dvojnásobný úhel 4.1.22:

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C.$$

Příklad 7.1.10. $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} dx$ (sin x cos x ≠ 0; x ≠ k $\frac{\pi}{2}$; k ∈ Z)

Integrand rozšíříme o funkci $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}} dx = \int \frac{1}{\tan x} dx = \ln |\tan x| + C$$

7.1.1.2 Integrace racionální funkce

Některé příklady v předchozím odstavci, (viz např. 7.1.3 a 7.1.4) jsme dělením čitatele integrantu jmenovatelem dostali rozklad integrantu na součet racionální funkce (polynomu) a ryze lomené racionální funkce. Integrování polynomu je snadné, neboť jde o součet integrálů tvaru $\int c_k x^k dx$, kde k je celé nezáporné číslo. Omezíme se tedy na integrování ryze lomené racionální funkce, tj. funkce ve tvaru $P(x)/Q(x)$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy, přičemž stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. Taková funkce může vzniknout součtem několika jednoduchých zlomků.

Příklad 7.1.11. Upravte

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+3} = \frac{x^2+x+3+x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+3)} = \frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x-3}$$

Jsme tedy vedeni myšlenkou, zda naopak každá ryze lomená racionální funkce se dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru - budeme jim říkat **parciální zlomky**, které umíme integrovat. Tím se budeme zabývat v dalších odstavcích.

Příklad 7.1.12. $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \quad x \in R$

Kvadratický polynom ve jmenovateli upravíme na čtverec $f(x) = (x + m)^2 + n$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(2x - 1)}{3} + C \end{aligned}$$

Definice 7.1.2. Parciální (částečným) zlomkem, budeme nazývat zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \text{ nebo } \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (7.1.2)$$

A, M, N, α, p, q reálné $p^2 - 4q < 0$, k celé nezáporné.

Integrál prvního zlomku, tj. $\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx$, vypočeme substitucí $x - \alpha = t$, odtud plyne $dx = dt$,

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \int \frac{A}{t^k} dt. \quad (7.1.3)$$

Tento integrál se rovná

$$-\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}} + C. \quad (7.1.4)$$

je-li $k > 1$, a rovná se $A \ln |x - \alpha| + C$, je-li $k = 1$. Výsledek platí na každém intervalu neobsahujícím bod α .

U integrál druhého zlomku uvedeme postup výpočtu pro $k = 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mx}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{N}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x + p) - p}{x^2 + px + q} dx + N \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx. \end{aligned}$$

Z naznačeného postupu je vidět hlavní myšlenka: upravit integrál na lineární kombinaci dvou integrálů, z nichž první má v čitateli integrandu derivaci jmenovatele a je podle příkladu *** roven $\ln|x^2 + px + q|$ kde $x^2 + px + q > 0$ pro $x \in R$ a integrand druhého integrálu má čitatel konstantní.

Výpočet druhého integrálu probíhá takto:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx; \quad (7.1.5)$$

substitucí $x + \frac{p}{2} = t \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ dostaváme dále

$$\int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)(t^2 + 1)} dt$$

po úpravě dostaneme tabulkový integrál

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1}, \quad (7.1.6)$$

jehož řešení je

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan t = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

Z postupu je opět vidět hlavní myšlenka: úprava integrandu na tvar $\frac{1}{t^2+1}$. Jmenovatel $x^2 + px + q$ jsme doplnili na úplný čtverec a užili uvedenou substituci (uvažme, že $q - \frac{p^2}{4} > 0$, protože diskriminant $\frac{p^2}{4} - q$ trojčlenu $x^2 + px + q$ je podle předpokladu záporný). Výsledek platí u obou integrálu v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

7.1.1.3 Substituční metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

Věta 7.1.2. Jestliže

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad (7.1.7)$$

a $u = \varphi(x)$, pak

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)du = F(\varphi(x)) + C \quad (7.1.8)$$

Základem úspěchu při aplikací věty je správný výběr funkce $\varphi(x)$. Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schématicky veden od rov. 7.1.8 ke vzorci rov. 7.1.7.

Příklad 7.1.13. $\int e^{x^{x^2}} dx$

$$\int e^{x^{x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Příklad 7.1.14. $\int x^3 e^{x^4} dx \quad x \in R$

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^4 \quad du = 4x^3 dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{e^u}{4} = \frac{e^{x^4}}{4} + C$$

Funkce typu $f(x) = \sqrt{ax + b}$:

Funkci, jež je dána rovnicí, jež obsahuje polynomy proměnné x ve výrazu $\sqrt{ax + b}$, v němž $ax + b > 0$, $a > 0$, integrujeme pomocí substituce:

$$u = \sqrt{ax + b}, \quad du = \frac{1}{2} \frac{a}{u} dx, \quad dx = 2 \frac{u}{a} du \quad (7.1.9)$$

Je-li potřeba dosadit do integrované funkce také za x , vyjádříme ze substituční rovnice $x = \frac{u^2 - b}{a}$.

Funkce typu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$, $a \neq 0$:

Příklad 7.1.15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$:

Řešení: Užijeme Eulerovu substituci

$$u = x + \sqrt{x^2 + a}, \quad du = \frac{u}{\sqrt{x^2 + a}} dx, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

7.1.1.4 Integrace goniometrických funkcí

7.1.1.5 Integrace po částech - per partes

Ze vztahů pro nalezení diferenciálů $d(uv) = udv + vdu$ a $udv = d(uv) - vdu$ vyplývá vzorec pro metodu integrace per partes:

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{7.1.10}$$

Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenosť pro výběr funkcí u a v . Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím se myslí dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně $\int v du$ lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

Příklad 7.1.16. $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Příklad 7.1.17. $\int \sqrt{x^2 + a} dx$, kde $a \neq 0, x^2 + a > 0$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + a} dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 + a} & dv = 1 \\ du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} & v = x \end{array} \right] \\ x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \right]\end{aligned}$$

Integrál na pravé straně vyjádříme podle příkladu 7.1.15 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$ a výsledek dostaneme ve tvaru

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| \right]$$

Příklad 7.1.18. $\int \arctan x dx \quad x \in R$

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \arctan x & dv = 1 \\ du = \frac{1}{x^2 + 1} & v = x \end{array} \right] = \\ x \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \left[\begin{array}{ll} x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right] = \\ x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} &= \quad x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |t| = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1|\end{aligned}$$

7.1.1.6 Rozklad ryze lomené funkce v parciální zlomky

Nechť je dána racionální funkce $R = \frac{P}{Q}$ s reálnými koeficienty. Můžeme předpokládat, že je *ryze lomená*¹. Pokud by tomu tak nebylo, dostaneme dělením čítatele jmenovatelem zlomku součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

¹tj. stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q

Příklad 7.1.19. $\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx$ [Kni+O4, s. 90]

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 7$ jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 7}.$$

Členy mnohočlenu na pravé straně se řadíme podle mocnin x

$$8x - 31 = x(A + B) + (7A - 2B).$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 8 &= A + B \\ -31 &= -7A - 2B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = 3, B = 5$. Platí tedy (pro všechna $x \neq 2$ a $x \neq 7$)

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x - 7}.$$

$$\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{5}{x - 7} dx = 3 \ln|x - 2| + 5 \ln|x - 7| + C.$$

Výsledek platí v každém intervalu, který neobsahuje body $x = 2, x = 7$.

Příklad 7.1.20. $\int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\}$

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$ jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen:

$$\begin{aligned} \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} \\ 19x + 15 &= A(x - 2) + B(x + 1) \\ 19x + 15 &= x(A + B) - 2A + B \\ 19 &= A + B \\ 15 &= -2A + B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = \frac{4}{3}, B = \frac{53}{3}$.

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{53}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx = \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \frac{53}{3} \ln|x - 2| + C$$

Příklad 7.1.21. $\int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx$ [Knížka, s. 90]

Polynom $Q(x) = x^3 - 4x^2 - x - 4$ má kořeny $\alpha_{1,2} = \pm 1$, $\alpha_3 = -4$, které jsou jednoduché tj. $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 4}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici společným jmenovatelem zlomků pravé strany (polynomem $Q(x)$), dostaneme

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x + 1)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x + 1)$$

čili

$$\begin{aligned} 2x^2 + 34x + 14 &= A(x^2 + 5x + 4) + B(x^2 + 3x - 4) + C(x^2 - 1) \\ 2x^2 + 34x + 14 &= (A + B + C)x^2 + (5A + 3B)x + (4A - 4B - C) \end{aligned}$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů u stejných mocnin x dostaneme pro neznámé koeficienty A, B, C soustavu rovnic

$$A + B + C = 2$$

$$5A + 3B = 34$$

$$4A - 4B - C = 14$$

Řešením této soustavy je $A = 5, B = 3, C = -6$ a tedy

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{5}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} - \frac{6}{x + 4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx &= \int \frac{5}{x - 1} dx + \int \frac{3}{x + 1} dx + \int \frac{6}{x + 4} dx \\ &= 5 \ln|x - 1| + 3 \ln|x + 1| - 6 \ln|x + 4| + C. \end{aligned}$$

Příklad 7.1.22. $\int_a^{\infty} \frac{2x + 3}{2x^3 + 2} dx \quad x \in R - -1$

References

- [BMR89] J. Brabec, F. Martan, and Z. Rozenský. *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, p. 488 (cit. on p. [54](#)).
- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on pp. [55](#), [57](#), [58](#), [64](#), [65](#)).

Kapitola 8

Určitý integrál

Obsah

8.1 Motivace	68
8.1.1 Výpočet integrálu	68
8.2 Vlastnosti určitého integrálu	69
Seznam literatury	72

8.1 Motivace

8.1.1 Výpočet

integrálu

Příklad 8.1.1. Metodou per partes spočítejte integrály: $\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx$

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x dx &= \int e^x dx + \int x \cdot e^x dx \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x\end{aligned}$$

$$\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx = [xe^x]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - e$$

kde integrál

$$\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

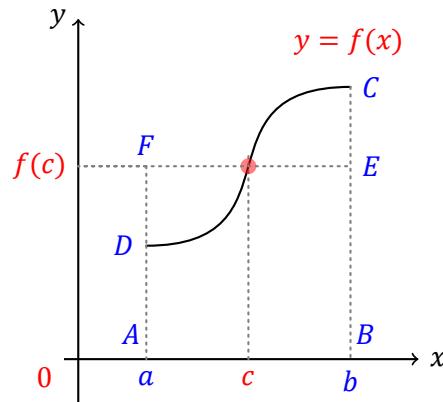
8.2 Vlastnosti určitého integrálu

V této kapitole mluvíme o spojitéch funkciích \Rightarrow příslušné integrály tedy vždy existují.
 Čerpáno z knih: [Kni+o4].

Věta 8.2.1. První věta o střední hodnotě integrálního počtu: Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu (a, b) , existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c). \quad (8.2.1)$$

Důkaz. Použitím Lagrangeovy věty napsané pro funkci $F(x)$, primitivní na intervalu (a, b) k dané funkci $f(x)$. Podmínky věty jsou zřejmě splněny: $F(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) a má všude derivaci $F'(x) = f(x)$. Tedy existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$,



Obrázek 8.2.1

že

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c),$$

čímž je věta dokázána, neboť $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ a $F'(c) = f(c)$. Funkční hodnotu $f(c)$, danou podle (8.2.1) rovnicí

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \quad (8.2.2)$$

nazýváme střední hodnotou.

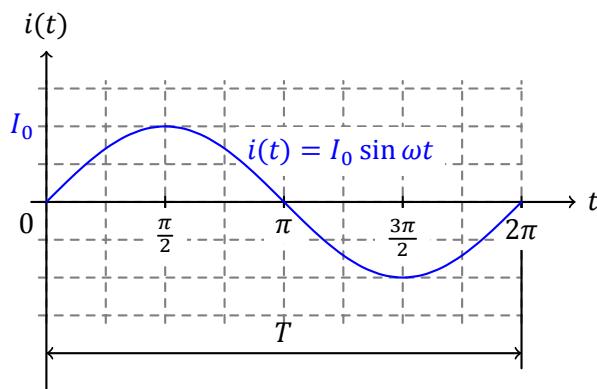


Pro spojitu nezápornou funkci $f(x)$, lze větu o střední hodnotě jednoduše geometricky interpretovat dle (obr.??). Levá strana (8.2.1) určuje obsah křivočarého lichoběžníka $ABCD$, pravá strana obsah obdélníka $ABEF$. Podle této věty nabývá funkce $f(x)$ aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) takové hodnoty $f(c)$, že uvažovaný křivočarý lichoběžník má stejný obsah jako obdélník o základně $b - a$ a výšce $f(c)$ (str. 155 knihy [Kni+O4]).

Příklad 8.2.1. Určete střední hodnotu i_s střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

v časovém intervalu $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$ (v průběhu jedné poloviny periody). I_0 je maximální hodnota proudu (obr. 8.2.2), perioda T je dána vztahem $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Obrázek 8.2.2

Podle 8.2.2 bude

$$\begin{aligned} i_s &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \omega t dt = \frac{2I_0}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2I_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) \\ &= \frac{2I_0}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi} I_0 \doteq 0,637 I_0. \end{aligned}$$

Tato hodnota se rovná intenzitě elektrického proudu, při kterém by vodičem v průběhu uvažované poloviny periody prošel stejný elektrický náboj jako při proudu střídavém.

Příklad 8.2.2. Efektivní hodnota i_{ef} střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

(viz předchozí příklad) je definována jako odmocnina ze střední hodnoty funkce $i^2(t)$ v průběhu jedné periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Tedy

$$\begin{aligned} i_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{I_0^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{I_0^2}{2} \end{aligned}$$

neboť $\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$. Odtud

$$i_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Střídavý proud $i(t) = I_0 \sin \omega t$ má na témže odporu stejný výkon jako stejnosměrný proud o intenzitě $i = 0,707I_0$.

Následující věta může být využita k odhadu některých integrálů

Věta 8.2.2. Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu: Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v intervalu $\langle a, b \rangle$ a je-li funkce $g(x)$ v $\langle a, b \rangle$ nezáporná a nerostoucí, existuje alespoň jeden bod $c \in \langle a, b \rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx. \quad (8.2.3)$$

Zcela obdobnou větu lze vyslovit pro případ, že $g(x)$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a neklesající, tj. na pravé straně 8.2.3 je pak integrál $g(b) \int_c^b f(x) dx$

Příklad 8.2.3. Odhadněte hodnotu integrálu

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (8.2.4)$$

Řešení: Funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ jsou v uvažovaném intervalu $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ spojité a funkce $g(x)$ je kladná a nerostoucí.

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^c \sin x dx = \frac{1}{100\pi} (\cos 100\pi - \cos c)$$

kde c je kladné číslo z intervalu $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$. Dále pro všechna $c \in \langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ platí $0 \leq 1 - \cos c \leq 2$, takže

$$0 \leq \int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{50\pi}.$$

References

- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on pp. [69](#), [70](#)).

Kapitola 9

Řady

Obsah

Seznam literatury	74
---------------------------------------------	-----------

Kapitola 10

Elementární metody řešení diferenciálních rovnic

Obsah

10.1 Diferenciální rovnice 1. řádu	76
Seznam literatury	76

10.1 Diferenciální rovnice 1. řádu

Řada fyzikálních principů má tvar výroku, resp. vztahu mezi jistými veličinami (funkcemi) a jejich změnami, vztavenými ke zvoleným nezávisle proměnným parametrům (čas, souřadnice). Změny (okamžité, lokální) se nejlépe vystihují pomocí derivací. Takový zákon má pak charakter vztahu mezi uvažovanými veličinami a jejich derivacemi. Nejčastěji bývá vztah vyjádřen formou rovnosti:

- Newtonův zákon: okamžitá změna hybnosti $p(t) = m(t) \cdot v(t)$ pohybujícího se objektu je úměrná působící síle $F(t)$ v každém okamžiku t zvoleného časového rozmezí

$$\frac{d}{dt} (m(t) \cdot v(t)) = F(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

- Kirchhoffův zákon pro LR – obvod: v okamžiku t je součet napětí na cívce s indukčnosti L a na rezistoru o odporu R roven napětí $U(t)$ na svorkách zdroje. Tuto rovnost pak zapisujeme ve tvaru (pro $L, R = \text{konst}$)

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri = u(t)$$

, kde $i = i(t)$... funkce popisující závislost proudu na čase.

Chceme-li určit funkci $i = i(t)$ popisující průběh proudu v obvodu tak, aby byl splněn příslušný K.z. a současně, aby byl splněn požadavek na počáteční stav:

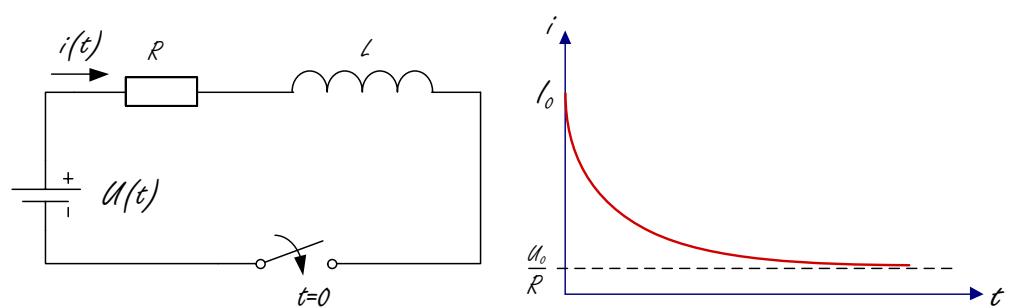
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U, \quad i(0) = I_0, \quad t \in (0, +\infty) \quad (10.1.1)$$

Metodami uvedenými později stanovíme právě jednu funkci $i = i(t)$, která je řešením dané tzv. **počáteční úlohy**.

$$i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad t \in (0, +\infty), \quad (10.1.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{U_0}{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} i(t) = I_0 = i(0)$$

- tedy obvykle formulujeme úlohu najít jistou funkci tak, aby zákon byl splněn tj. Kirchhoffův zákon užijeme k tomu, abychom nalezli funkci $i(t)$
- užijeme-li rovnosti vyjadřující takový zákon k tomu, abychom určili funkci, která v takovém vztahu vystupuje spolu s derivacemi, stává se tento požadavek úlohou, která má charakter rovnice s derivacemi, neboli diferenciální rovnice. Funkce, která požadavek splňuje, se pak nazývá řešení diferenciální rovnice.



Obrázek 10.1.1: Graf průběhu proudu $i(t)$ po sepnutí spínače v době $t = 0$.

Část III

Numerické metody

Kapitola 11

Úvod do numerických metod

Obsah

11.1	Úvodní slovo	82
11.2	Reprezentace čísel ve výpočetní technice	83
11.2.1	Zaokrouhlování	84
11.3	Chyby při numerických výpočtech	85
11.3.1	Zdroje a typy chyb	85
11.3.2	Definice chyb, šíření chyb při výpočtu	86
11.3.3	Absolutní a relativní chyba	86
11.4	Řešení nelineárních rovnic	87
11.4.1	Motivace	87
11.4.2	Metoda bisekce	88

11.1 Úvodní slovo

Numerické metody jsou metody, které na rozdíl od metod analytických poskytujících spojité řešení na určité předem definované oblasti, dávají číselné řešení v předem zvolených diskrétních bodech této oblasti. Na rozdíl od analytických metod toto řešení většinou nebývá přesné, ale představuje pouze jeho aproximaci, která je zatížena určitou chybou. Možnosti analytických metod se již asi třicet let pokládají prakticky za vyčerpané. Drtivá většina problémů (a to zdaleka nejen v oblasti technických věd), které bylo možno analyticky vyřešit, již tehdy byla vyřešena. Při vyčíslování výsledků ovšem v mnoha případech nastávaly značné problémy; spojité řešení bylo například popsáno kombinací vyšších funkcí (Besselovy, Legendrové atd.) v podobě nekonečných řad, přičemž bylo třeba načítat dostatečný počet jejich členů k dosažení požadované přesnosti. A zde se již začaly uplatňovat různé numerické techniky, které ovšem bylo v té době možno realizovat jen na kalkulačkách nebo ze současného pohledu na primitivních počítačích.

Ačkoli základy sofistikovaných numerických metod byly položeny již před více než šedesáti lety, jejich intenzivní a široký rozvoj je spojen teprve s vývojem a zdokonalováním výpočetní techniky v posledních asi čtyřiceti letech a lze říci, že v poslední době s řešením čím dál tím složitějších problémů ze všech vědních oblastí (nestacionární a nelineární úlohy ve 2D a 3D) stále nabývají na významu.

Výsledkem aplikace převážné většiny numerických metod je sestavení velkého systému lineárních či nelineárních algebraických rovnic, který je nutno nějakým způsobem vyřešit existují ovšem numerické techniky i pro jiné účely, jako je například součet různých řad, výpočet určitých integrálů atd., jejich počet však není příliš velký). A v popředí zájmu jsou především dvě otázky:

- jak sestavit onen systém tak, aby počet zmíněných rovnic byl co nejmenší (přičemž ale informace o rozložení hledané veličiny v oblasti je maximální a co nejpřesnější) a
- jak tento systém vyřešit co nejrychleji a s nejmenší možnou chybou.

Na tomto místě je nutno podotknout, že i malá vylepšení stávajících postupů mohou při řešení složitých úloh vedoucích na řešení soustav milionů či desítek milionů rovnic (aktuální stav) zajistit velmi výrazné časové úspory. Samotná realizace jakékoli numerické metody sestává z několika kroků:

- Sestavení matematického modelu dané úlohy. Tento krok je sám o sobě často nesmírně komplikovaný; reálný fyzikální problém musíme mnohdy zjednodušit tak, aby byl vůbec dostupnými prostředky řešitelný, aniž by však vzniklé chyby přesáhly přijatelné hodnoty. Takový matematický model zpravidla sestává z různých rovnic (algebraických, diferenciálních, integrálních, smíšených), neurčitých nebo určitých integrálů a podobně.
- Výběr konkrétní metodiky, jakou tento model budeme řešit. Uvedená metodika by měla být co nejvhodnější z celé řady hledisek, jako je rychlosť výpočtu, spolehlivost, robustnost, přesnost, konvergence, stabilita atd. O těchto pojmech jistě už většinou máme jakousi intuitivní představu, v dalším textu však některé z nich upřesníme. Na základě zvolené metody vypracujeme algoritmus, což je konečné množství instrukcí, které musíme provést, aby se celý výpočet bezezbytku provedl.
- Navržený algoritmus musíme nyní naprogramovat. Přitom lze využít buď nějakého programovacího jazyka (FORTRAN, C++ a další), nebo nějakého prostředí s již předprogramovanými operacemi nebo celými bloky výpočtů (MatLab, Mathematica). V některých případech lze využít i již existujících profesionálních programů, které takový algoritmus obsahují (freeware tohoto typu je velmi řídké). Ty jsou ovšem velmi drahé a uživatel do nich zpravidla nemůže zasahovat za účelem například optimalizace výpočtu.
- Dalším krokem je realizace výpočtu. Zde je kromě provedení samotného výpočtu nutné ověřit, že výsledky jsou korektní. K tomu používáme buď experiment, nebo jinou metodu, která je již pro úlohu daného typu spolehlivě prověřená. Dále ověřujeme celou řadu aspektů, jako je například geometrická konvergence řešení (závislost výsledků na hustotě diskretizační sítě) a popřípadě jiná kritéria, o nichž se více dozvímme později.
- Posledním krokem je vyhodnocení a posouzení získaných výsledků, zpravidla na vizuálním základě, porovnáním, ale i jinak.

11.2 Reprezentace čísel ve výpočetní technice

Při realizaci numerických algoritmů na počítači se lze setkat se dvojí reprezentací čísel, a to pomocí **pevné** nebo **plovoucí desetinné tečky**. Pevná desetinná tečka znamená vždy předem definovaný počet desetinných míst. Pracujeme-li se čtyřmi desetinnými místy, interpretují se následující čísla takto:

8675	8675.0000
3.24	3.2400
-0.000006	-0.0000

Tabulka 11.2.1: Reprezentace čísel v pevné desetinné tečce

Zatímco první dvě čísla jsou zobrazena přesně, třetí číslo nikoli, je zaokrouhleno. Proto je tento způsob nepraktický, při vědeckotechnických výpočtech se neužívá a v dalším textu se jím už nebudeme zabývat.

Daleko pružnější je proto počítání s plovoucí desetinnou tečkou, kdy se v každém čísle respektuje předepsaný počet prvních číslic. V tomto případě se uvedená čísla zobrazují takto:

8675	+0.8675E+04	nebo	+8.675E+03
3.24	+0.3240E+01	nebo	+3.240E+00
-0.000006	-0.6000E-05	nebo	-6.000E-06

Tabulka 11.2.2: Reprezentace čísel v plovoucí desetinné tečce

Každé nenulové číslo a lze reprezentovat jako $a = +m \cdot 10^e$, kde $0.1 < m < 1$ a e je celé číslo. Samozřejmě, číslo m může obsahovat nekonečnou řadu číslic a celé číslo e se může pohybovat od minus nekonečna do nekonečna. To ale v počítačové reprezentaci není možné; zde je číslo m omezeno na konečný počet n číslic a právě tak je omezen i exponent. Číslo a je tedy počítačem approximováno jako $a = \pm m \cdot 10^e$, kde $m = 0.d_1d_2 \dots d_n$. Toto číslo m se nazývá **mantisa** a e **exponent**.

V jednoduché přesnosti má v počítačích e velikost $|e| < 38$, ve dvojitě přesnosti $|e| < 308$. Jsou-li tyto hodnoty překročeny, vzniká chyba známá jako **underflow** nebo **overflow**.

11.2.1 Zaokrouhlování

Čísla jsou v počítačové interpretaci často zaokrouhlována (mají-li v mantise velký počet číslic), poněvadž mantisa m zde může těchto číslic obsahovat pouze n . Pravidla zaokrouhlování jsou jasná. Zopakujeme zde jen to, že čísla typu 7.65 nebo 7.75 (chceme-li zrušit

jedno desetinné místo) zaokrouhlíme tak, že poslední číslice je sudá. Takže zatímco 7.65 zaokrouhlíme na 7.6, 7.75 zaokrouhlíme na 7.8.

Chybu při zaokrouhlování můžeme určit jako (n je počet číslic v mantise m)

$$\left| \frac{m - \tilde{m}}{\tilde{m}} \right| \leq \frac{0.5}{10^{n-1}} \quad (11.2.1)$$

11.3 Chyby při numerických výpočtech

Protože základem numerických metod je získávání přibližných výsledků, je nutné mít vždy představu, jaký rozdíl může být mezi přesným řešením dané úlohy a řešením získaným použitou numerickou metodou.

11.3.1 Zdroje a typy chyb

Pomineme-li jako zdroj chyb člověka dopouštějícího se omylů, můžeme chyby rozdělit na několik základních druhů.

- **Chyby matematického modelu** - vznikají nahrazením reálné fyzikální situace matematickým modelem. Může se jednat například o popis nějakého fyzikálního děje pomocí diferenciální rovnice.
- **Chyby vstupních dat** - jsou způsobeny nepřesnostmi při měření fyzikálních veličin
- **Chyby numerické metody** - vznikají při nahrazení původní matematické úlohy jednodušší numerickou. Často se jedná o nahradu nekonečného procesu procesem konečným, např. při výpočtu hodnoty některé elementární funkce pomocí součtu několika prvních členů její nekonečné Taylorovy řady nebo při approximaci určitého integrálu součtem konečného počtu funkčních hodnot. Odhad této chyby je důležitou součástí řešení každé numerické úlohy.
- **Chyby zaokrouhlovací** - vznikají tím, že při výpočtech pracujeme s čísly zaokrouhlenými na určitý, relativně nevelký počet míst. Tyto chyby se při výpočtu mohou kumulovat, nebo navzájem rušit. Při velkém počtu operací je posouzení jejich vlivu velmi náročné.

11.3.2 Definice chyb, šíření chyb při výpočtu

11.3.3 Absolutní a relativní chyba

Je-li hodnota \underline{c} approximace přesné hodnoty c , je **absolutní chyba** definována jako $\varepsilon = c - \underline{c}$ a **relativní chyba** $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{c}, c \neq 0$. Tato definice se může zdát neužitečná, poněvadž c neznáme. Lze-li však říci, že pokud se approximace \underline{c} blíží k c , můžeme psát $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\underline{c}}, \underline{c} \neq 0$. Bohužel, většinou neznáme ani hodnotu ε . Někdy však její hodnotu můžeme odhadnout vztahem $|\varepsilon| \leq \sigma$ a podobně lze odhadnout pro relativní chybu $|\varepsilon_r| \leq \sigma_r$.

11.3.3.1 Šíření chyb

Meze absolutních chyb při sčítání a odečítání se rovnají součtu příslušných mezí. Meze relativních chyb při násobení a dělení se rovnají součtu mezí jednotlivých relativních chyb.

- Nechť $|x_i - \hat{x}_i| = |\varepsilon_i| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \hat{x}_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (11.3.1)$$

- Nechť dále $|\frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i}| = |\varepsilon_{ri}| \leq \sigma_{ri}, i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n \hat{x}_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i - \varepsilon_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| \doteq \\ \left| \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i} \right| \\ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} \right| \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

kde jsme ale při rozdílu součinů v druhém výrazu zanedbali všechny násobky různých absolutních chyb, tedy členy druhého a vyšších řádů.

11.3.3.2 Podmíněnost numerických úloh a numerická stabilita algoritmů

Při numerickém řešení různých úloh musíme zkoumat, jaký vliv na výsledek mají malé změny ve vstupních hodnotách a zaokrouhlování během výpočtu. Řešení numerických úloh můžeme považovat za postup, kterým přiřazujeme vstupním údajům výstupní data. Je-li toto přiřazení spojité zobrazení, pak říkáme, že numerická úloha je **korektní úloha**, v opačném případě se jedná o úlohu **nekorektní**.

Pro tyto úlohy má zásadní význam relativní citlivost výsledku na malé změny ve vstupních parametrech úlohy. Korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malým relativním změnám vstupních údajů odpovídají malé relativní změny výstupních údajů. Číslo

$$C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}, \quad (11.3.3)$$

nazýváme **číslo podmíněnosti úlohy**. Pro dobře podmíněné úlohy je číslo C_p blízké číslu 1. Pokud malé relativní změny na vstupu způsobí velké relativní změny na výstupu, pak mluvíme o *špatně podmíněné úloze*. Řešení špatně podmíněných úloh je nejlépe se vyhnout, protože výsledky jakéhokoliv algoritmu jsou velmi nespolehlivé. Podobně řekneme, že je algoritmus *dobře podmíněný*, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech. Kromě nepřesnosti ve vstupních údajích ovlivňuje výsledek použitého algoritmu i zaokrouhlování čísel během výpočtu. Je-li vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek malý, mluvíme o *numericky stabilním algoritmu*. *Algoritmus dobré podmíněný a numericky stabilní se nazývá stabilní*.

11.4 Řešení nelineárních rovnic

11.4.1 Motivace

Kořeny nelineárních rovnice $f(x) = 0$ obecně neumíme vyjádřit explicitním vzorcem. K řešení nelineární rovnice proto používáme iterační metody: z jedné nebo několika počátečních approximací hledaného kořene \hat{x} generujeme posloupnost x_0, x_1, x_2, \dots , která ke kořenu \hat{x} konverguje. Pro některé metody stačí, když zadáme interval (a, b) , který obsahuje hledaný kořen. Jiné metody vyžadují, aby počáteční approximace byla k hledanému kořenu dosti blízko; na opakující se metody konvergují mnohem rychleji. Často proto začínáme s "hrubou", avšak spolehlivou metodou, a teprve když jsme dostatečně blízko kořene, přejdeme na "jemnější", rychleji konvergující metodu.

Abychom naše úvahy zjednodušili, omezíme se na problém určení reálného jedno- duchého kořene \hat{x} rovnice $f(x) = 0$, tj. předpokládáme, že $f'(\hat{x}) = 0$. Budeme také

automaticky předpokládat, z funkce $f(x)$ je spojitá a má tolik spojité derivací, kolik je jich v dané situaci zapotřebí.

Počáteční approximaci kořenů rovnice $f(x) = 0$ můžeme zjistit z grafu funkce $f(x)$: ručně, nebo raději pomocí vhodného programu na počítači, vykreslíme funkci $f(x)$ a vyhledáme její průsečíky s osou x .

Jinou možností je sestaveni tabulky $[x_i, f(x_i)]$ pro nějaké dělení:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Příklad 11.4.1. Získejme hrubý odhad kořenů rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$$

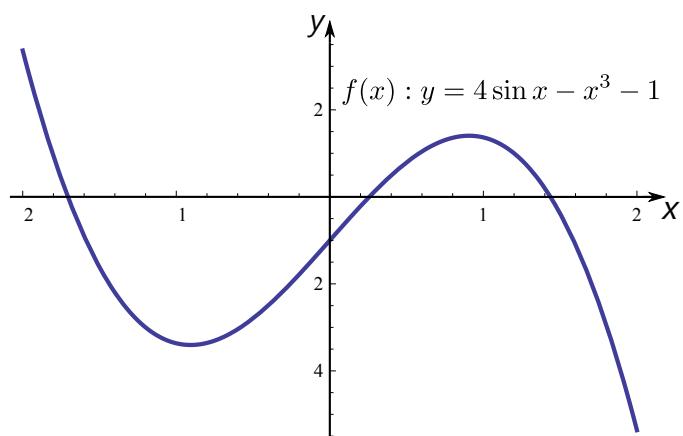
Z obrázku 11.4.1 zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (-1, 0)$ a $x_3^* \in (1, 2)$.

Z obrázku zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (0, 1)$, $x_3^* \in (1, 2)$. Zkusme najít kořeny v těchto intervalech pomocí numerických metod popsaných v následujících odstavcích

11.4.2 Metoda bisekce

Metoda známá také jako **metoda půlení intervalů**, je založena na principu znaménkových změn. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v koncových bodech intervalu (a_0, b_0) opačná znaménka, tj. platí $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Sestrojíme posloupnost intervalů $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$, které obsahují kořen. Intervaly (a_{k+1}, b_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots$, určíme rekurzivně způsobem, který si nyní popíšeme.

Střed intervalu (a_k, b_k) je bod $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Když $f(x_k) = 0$, pak $x_{k+1} = x^*$ je kořen a dál nepokračujeme.



Obrázek 11.4.1: Graf funkce $f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$.

Část IV

Fyzika

Kapitola 12

Historie fyziky

Obsah

12.1 Hlavní etapy vývoje	94
----------------------------------------------------	-----------

12.1 Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egyptané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Kláudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimédovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlosť, zrychlení, síla apod.). Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich dráhách kolem Slunce je táz jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do

spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak zavřil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a též elektromagnetické povahy. V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoručasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlosť světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonova. Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádrech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrín. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou též podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou též povahy,

a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

Kapitola 13

Diferenciální počet vektorových polí

Obsah

13.1 Vektorový počet	98
13.2 Skalární a vektorová pole	100
13.3 Derivace polí - gradient	102
13.4 Operátor nabla	105
13.4.1 Operace s operátorem nabla	106
13.5 Diferenciální rovnice proudění tepla	108
13.6 Druhé derivace vektorových polí	110

13.1 Vektorový počet

V pravoúhlém kartézském systému je každý bod prostoru určen polohovým vektorem \vec{r} , který má složky x, y, z , což budeme zapisovat takto:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (13.1.1)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z . Velikost vektoru \vec{r} určíme ze vztahu

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (13.1.2)$$

Pro osvězení pár faktů z vektorové algebry pro vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ uvádíme následující vztahy:
Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \dots \text{skalár} \quad (13.1.3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \dots \text{vektor} \quad (13.1.4)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \quad (13.1.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (13.1.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (13.1.7)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (13.1.8)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad (13.1.9)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (13.1.10)$$

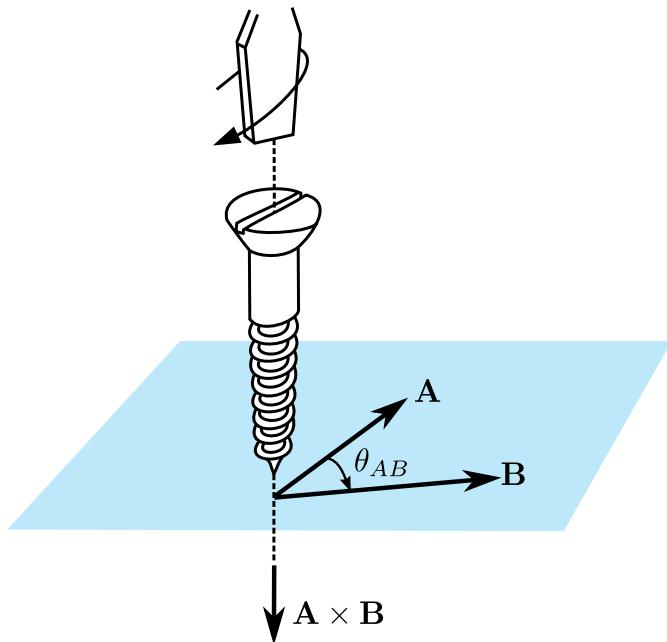
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (13.1.11)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (13.1.12)$$

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (13.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (13.1.14)$$

Rovnost (13.1.13) samozřejmě pouze v limitě, když $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se blíží nule.



Obrázek 13.1.1: Určení směru vektoru $\vec{A} \times \vec{B}$ pomocí pravotočivého šroubu

Vektorový součin vektorů \vec{A} a \vec{B} je definován jako vektor kolmý k vektorům \vec{A} a \vec{B} s velikostí rovnou ploše kosoúhelníku, který oba vektory definují:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |A| |B| \sin \theta \quad (13.1.13)$$

kde θ je úhel svíraný vektory \vec{A} a \vec{B} ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) a \vec{n} je jednotkový vektor kolmý k nim. Takové jednotkové vektory však existují dva; volba závisí na tom, je-li souřadný systém definován jako pravotočivý nebo levotočivý. V pravotočivém souřadném systému lze použít pravidlo jako na obr.[13.1.1](#).

13.2 Skalární a vektorová pole

Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty veličiny. Řečeno jinými slovy, polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru.

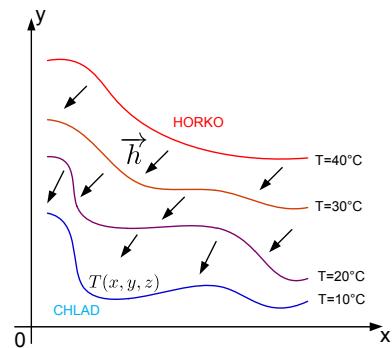
Nejjednodušší možné fyzikální pole je **skalární pole**. Skalárním polem chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit.

Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá určité představy myšlených ploch, proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě *teplotního pole* se tyto plochy nazývají *izotermickými hladinami* nebo *izotermami*.

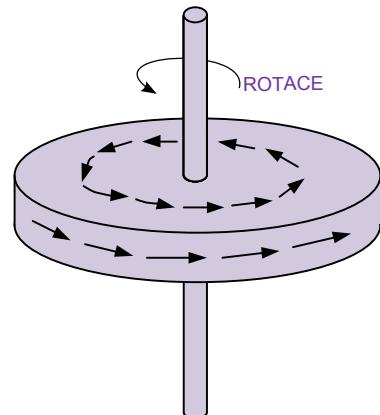
U **vektorových polí** je v každém bodě prostoru dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlosť látky, tvořící těleso je v každém bodě vektor, který je funkcí polohy. V druhém případě uvažujme proudění tepla z teplejších míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. *Hustota tepelného toku* je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji \vec{h} . Její velikost je mírou proudícího tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 13.2.1. Definujeme \vec{h} přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde infinitesimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 13.2.3). Vyjádříme to v symbolech: je-li ΔP tepelná energie, která projde za jednotku času

$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t \quad (13.2.1)$$

kde \vec{e}_t je jednotkový vektor ve směru toku.



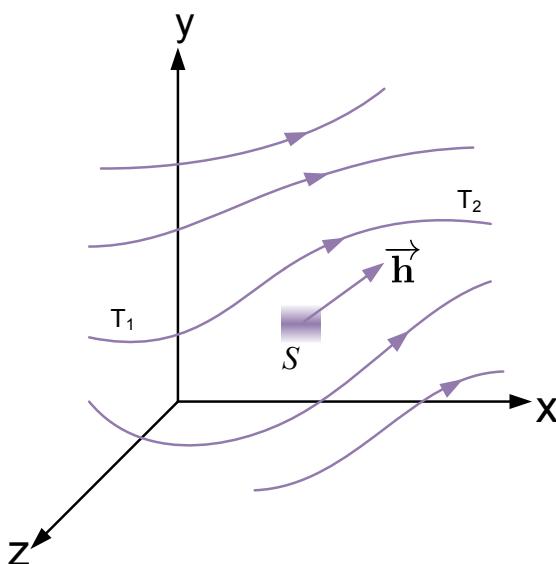
Obrázek 13.2.1: Teplota je příkladem skalárního pole. Každému bodu (x, y, z) v prostoru je přiřazeno číslo $T(x, y, z)$. Všechny body na ploše označené $T = 20^\circ\text{C}$ (zobrazené jako křivka při $z = 0$) mají stejnou teplotu. Šipky jsou ukázkami hustoty tepelného toku \vec{h} .



Obrázek 13.2.2: Rychlosť v rotujícím tělese je příkladem vektorového pole.

Vektor \vec{h} je možno definovat i jiným způsobem

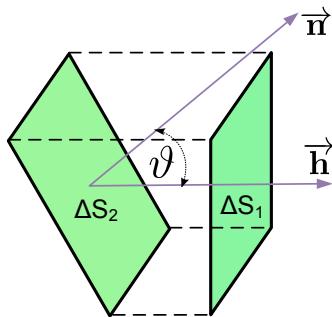
- pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obrázek 13.2.4 znázorňuje plošku ΔS_2 skloněnou pod úhlem ϑ k ploše ΔS_1 kolmé na tok. Jednotkový vektor \vec{n} je kolmý na plošku ΔS_2 . Vektory \vec{n} a \vec{h} svírají úhel ϑ (neboť \vec{h} je kolmé ΔS_1). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou ΔS_2 ? Tok ploškou ΔS_2 je stejný jako ploškou ΔS_1 , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to $\Delta S_1 = S_1 \cos(\vartheta)$. Hustota toku ploškou ΔS_2 je



Obrázek 13.2.3: Hustota tepelného toku představuje vektorové pole. Vektor \vec{h} ukazuje směr proudění. Jeho velikost je rovna energii, která za jednotku času projde elementární ploškou postavenou kolmo na směr proudění, vydělené obsahem této plošky.

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (13.2.2)$$

Tuto rovnici interpretuje tak, že hustotu tepelného toku \vec{h} (teplo prošlé za jednotku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je \vec{n} , udává výraz $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku ΔS_2 je $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za definice \vec{h} . Stejné představy můžeme použít i pro jiná vektorová pole.



Obrázek 13.2.4: Tepelný tok ploškou ΔS_2 je stejný jako tepelný tok ploškou ΔS_1 .

13.3 Derivace polí - gradient

Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle x ? Nebo podle y , nebo z ?

Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry, nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například $\frac{\partial T}{\partial x}$? Je to skalár nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu x , $\frac{\partial T}{\partial x}$ se jistě změní. Ale všimněte si, že máme tři možné derivace: $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$. Protože existují tři derivace a víme, že tři čísla tvoří vektor, tyto tři derivace by mohly představovat složky jednoho vektoru:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = ? \text{ vektor} \quad (13.3.1)$$

Samozřejmě, ne každá tři čísla obecně tvoří vektor. Je tomu tak pouze tehdy, když při pootočení souřadnicové soustavy se složky vektoru správně transformují. Proto je nevyhnutelné prozkoumat, jak se naše tři derivace změní při otočení souřadnicové soustavy. Ukážeme, že rov. 13.3.1 je skutečně vektorem. Při otáčení souřadnicové soustavy se derivace transformují správně.

Můžeme se o tom přesvědčit několika způsoby. Jeden způsob je položit si takovou otázku, na níž lze odpovědět nezávisle na souřadnicové soustavě, a pokusit se vyjádřit odpověď v "invariantním" tvaru. Například jsou-li \vec{A} a \vec{B} vektory a $S = \vec{A} \cdot \vec{B}$, víme, že S je skalárem. I bez zjišťování víme, zda se S mění se změnou souřadnicových soustav. Nemůže, neboť jde o skalární součin dvou vektorů.

Podobně, víme-li, že \vec{B} je vektorem a mám tři čísla B_1, B_2 a B_3 , o kterých zjistíme že

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (13.3.2)$$

kde S je totéž pro libovolnou souřadnicovou soustavu, pak tři čísla B_1, B_2 a B_3 jsou nutně složkami B_x, B_y a B_z nějakého vektoru \vec{B} .

Zvažme případ teplotního pole. Vezměme dva body P_1 a P_2 v malé vzdálenosti $\Delta\vec{r}$ od sebe. Teplota v P_1 je T_1 a v P_2 je T_2 s rozdílem $\Delta T = T_2 - T_1$. Teploty v těchto reálných, fyzikálních bodech určitě nezávisí na volbě os souřadnic. Konkrétně ΔT je číslo nezávislé na souřadnicové soustavě. Je to skalár.

Zvolíme-li nějakou vhodnou soustavu souřadnicových os, můžeme napsat $T_1 = T(x, y, z)$ a $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, kde $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ jsou složky vektoru $\Delta\vec{r}$ (obr. 13.3.1). Vzhledem k rovnosti rov. 13.1.11 můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \quad (13.3.3)$$

Levá strana rovnosti (13.3.3) je skalárem. Pravá je součtem tří součinů obsahujících jako součinitele $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, které jsou složkami vektoru. Z toho vyplývá, že tři čísla

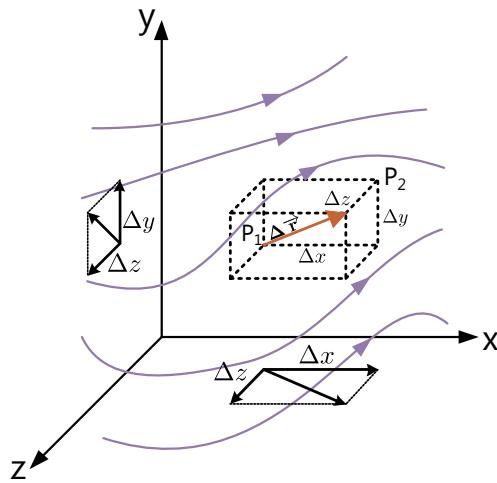
$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Představují také x – ovoou, y – ovoou a z – ovoou složku nějakého vektoru. Pro tento nový vektor použijeme symbol ∇T . Symbol ∇ (nazývaný "nabla") je převráceným Δ a má připomínat derivování. ∇T se čte různě: "nabla T " nebo "gradient T " nebo "grad T ";

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^1 \quad (13.3.4)$$

¹Použijeme-li jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, můžeme psát

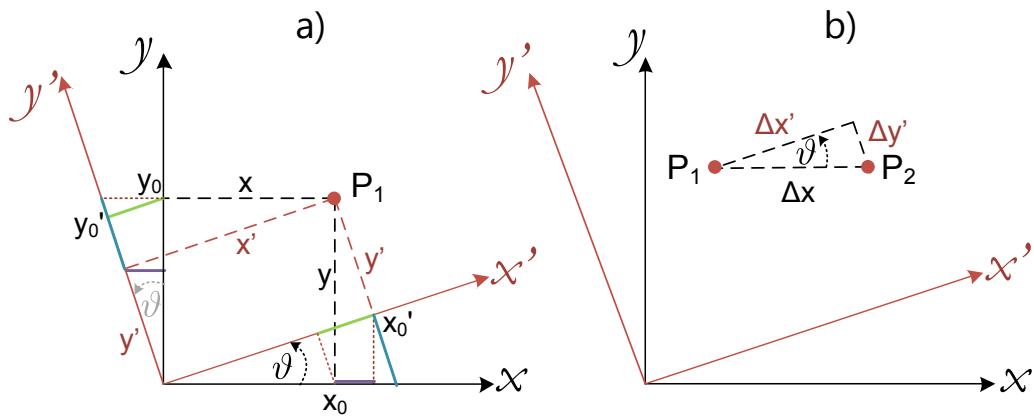
$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$



Obrázek 13.3.1: Vektor \vec{r} , jehož složky jsou $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Použitím této nové symboliky se můžeme pokusit rovnost (13.3.3) přepsat na kompaktnější tvar

$$\Delta T = \nabla T \cdot \vec{r} \quad (13.3.5)$$



Obrázek 13.3.2: a) Transformace do pootočené souřadnicové soustavy; b) Speciální případ, v němž je vektor \vec{r} rovnoběžný s osou x .

Tento vztah, vyjádřený slovy, říká, že rozdíl teplot ve dvou sousedních bodech je roven skalárnímu součinu gradientu T a rozdílu polohových vektorů obou bodů. Tvar rov. 13.3.5 také ilustruje již uvedený důkaz, že ∇T je opravdu vektorem.

Stále ještě nejste přesvědčeni? Ukážeme, že složky ∇T se transformují stejně jako složky \vec{r} . Pokud ano, ∇T je vektor podle naší původní definice vektoru. Abychom si to trochu zjednodušili, položme $z = z'$, takže souřadnici z již nemusíme brát v úvahu.

Uvažujme o soustavě x', y' pootočené o úhel ϑ vzhledem k soustavě xy (obr. 13.3.2). Souřadnice bodu (x, y) vyjádřené v čárkovanej soustavě jsou

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \quad (13.3.6)$$

$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad (13.3.7)$$

vyjádříme-li x a y

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \quad (13.3.8)$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \quad (13.3.9)$$

Transformují-li se nějaká dvojice čísel podle těchto rovnic stejně jako x a y , jde o složky vektoru.

Nyní si všimněme rozdílu teplot ve dvou sousedních bodech P_1 a P_2 , zvolených tak, jak to znázorňuje obr. 13.3.2b. Při výpočtu v souřadnicích x a y můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad (13.3.10)$$

neboť $\Delta y = 0$.

A výpočet v čárkované soustavě? Tam bychom psali

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y' \quad (13.3.11)$$

Podíváme-li se na obr. 13.3.2b, vidíme, že

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad (13.3.12)$$

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta \quad (13.3.13)$$

neboť $\Delta y'$ je záporné při kladném Δx . Dosazením těchto výrazů do rov. 13.3.11 dostaneme

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta = \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta \right) \Delta x \quad (13.3.14)$$

Porovnáním rov. 13.3.14 s rov. 13.3.10 zjistíme, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (13.3.15)$$

Podle tohoto vztahu $\frac{\partial T}{\partial x}$ dostaneme z $\frac{\partial T}{\partial x'}$ a $\frac{\partial T}{\partial y'}$ právě tak jako x z x' a y' (rov. 13.3.8). $\frac{\partial T}{\partial x}$ je tedy x – ovou složkou vektoru. Podobné úvahy by ukázaly, že $\frac{\partial T}{\partial y}$ je y – ová a $\frac{\partial T}{\partial z}$ jeho z – ová složka. $\vec{\nabla}T$ je zajisté vektorem. Jde o vektorové pole odvozené ze skalárního pole T .

13.4 Operátor nabla

Důkaz, že $\vec{\nabla}T$ nebo ∇T je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejné i tehdy, kdyby se T zaměnilo za jakékoliv jiné skalární pole. Transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom T vynechat a nahradit rovnici (13.3.15) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (13.4.1)$$

Ponecháme přitom operátory "hladové po derivování".

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme jej nazvat složkami *vektorového operátoru*. Můžeme psát

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13.4.2)$$

co samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (13.4.3)$$

Gradient jsme abstrahovali od T .

Musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od ∇ . $T\nabla$ je stále operátorem, zatímco ∇T už není "hladovým" operátorem, neboť se nasytíl. Je to opravdový fyzikální vektor, představující rychlosť změny T v prostoru. Víme, že rychlosť změny T v nějakém směru udává složka vektoru ∇T v tomto směru (viz vztah 13.3.5). Z toho vyplývá, že ∇T směřuje tam, kde má největší možnou složku - jinými slovy, směrem, v němž se T mění nejrychleji. **Gradient T má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny T .**

13.4.1 Operace s operátorem nabla

Je možné s vektorovým operátorem ∇ provádět nějaké jiné algebraické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vyjádřením skalárního součinu. Mohly bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}) \quad (13.4.4)$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. ($(\vec{A} \cdot \vec{B})$ je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru ∇ s vektorovým polem, které známe, např. \vec{h} . Vypíšeme-li ho ve složkách

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x \cdot h_x + \nabla_y \cdot h_y + \nabla_z \cdot h_z \quad (13.4.5)$$

nebo

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (13.4.6)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali bychom²

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \quad (13.4.7)$$

což je totéž číslo, které bychom dostali z (rov. 13.4.6), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h} \quad (13.4.8)$$

pro každý bod prostoru. Tedy $\nabla \cdot \vec{h}$ je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíte si uvědomit, že kombinace derivací $\nabla \cdot \vec{h}$ je dost specifická. Existují rozmanité kombinace, např. $\frac{\partial h_y}{\partial x}$, které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina $\nabla \cdot (\text{vektor})$ je ve fyzice neobvyčejně užitečná. Byla nazvána **divergencí** (div \vec{h}).

Například

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{divergence } \vec{h}. \quad (13.4.9)$$

Podobně jako v případě ∇T můžeme najít fyzikální význam i pro $\nabla \cdot \vec{h}$. Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru ∇ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (13.4.10)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz rov. 13.1.6).

$$(\nabla \times \vec{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (13.4.11)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (13.4.12)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (13.4.13)$$

²Na \vec{h} se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je \vec{h} "derivováno" podle x, y a z nebo podle x', y' a z' , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro \vec{h} jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme \vec{h} čárkou.

Kombinace $\nabla \times \vec{h}$ se nazývá **rotace** \vec{h} (rot \vec{h}). O příčině tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor ∇ :

$$\nabla T = \text{vektor} \quad (13.4.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{skalár} \quad (13.4.15)$$

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (13.4.16)$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislém na nějaké souřadnicové soustavě.

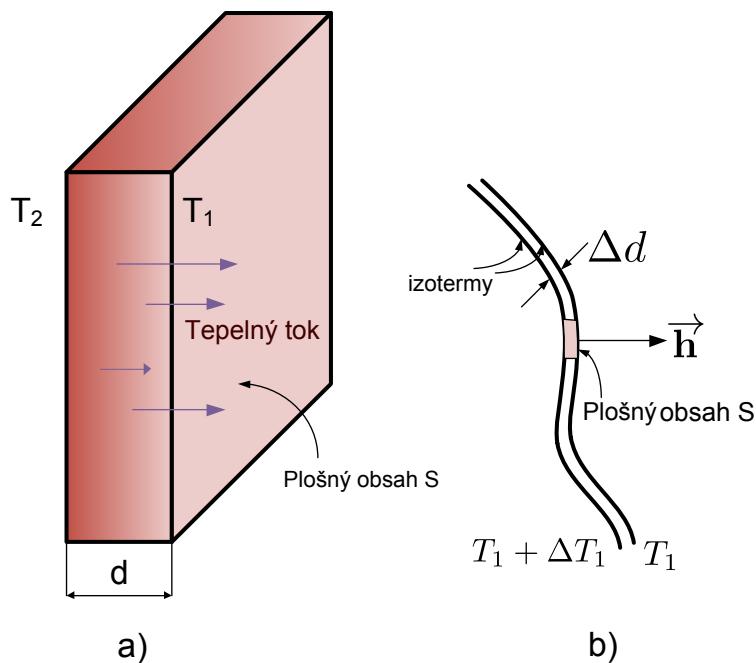
Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru ∇ napišeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetismu - Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \nabla E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (13.4.17)$$

kde ρ (ró) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu, \vec{j} je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

13.5 Diferenciální rovnice proudění tepla

Uvedeme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Vezmeme-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahřejeme na teplotu T_2 , zatímco protilehlou stranu ochladíme na odlišnou teplotu T_1 , materiálem bude proudit teplo ve směru od T_2 k T_1 (obr. 13.5.1).



Obrázek 13.5.1: a) Tepelný tok deskou. b) Infinitezimální destička rovnoběžná s izotermickou hladinou ve velkém kuse látky

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu S stěn i rozdílu teplot $T_2 - T_1$ a nepřímo úměrný vzdálenosti d mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok). Nechť P je tepelná energie, která projde deskou za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda(T_2 - T_1) \frac{S}{d} \quad (13.5.1)$$

Konstanta úměrnosti λ (lambda) se nazývá **součinitel teplotní vodivosti**.

Co se stane ve složitějším případě, řekněme v tělesu nepravidelném tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 13.5.1a, ale v miniaturním měřítku. Nasměrujeme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami obr. 13.5.1b, takže pro destičku bude platit rov. 13.5.1.

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky ΔS , je tepelný tok

$$P = \lambda(\Delta T) \frac{\Delta S}{\Delta d} \quad (13.5.2)$$

kde Δd je tloušťka destičky. $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ jsme definovali jako velikost vektoru \vec{h} ležícího ve směru tepelného toku. Teplo bude proudit od $T_1 + \Delta T_1$ k T_1 a tudíž kolmo na izotermy (obr.

13.5.1b). $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává dále právě rychlosť změny T při změně polohy. Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává maximální rychlosť změny T , a tedy velikost vektoru ∇T . Protože směr ∇T je opačný než směr³ \vec{h} rov. 13.5.2 zapsaná pomocí vektorů bude vypadat takto

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (13.5.3)$$

Rovnice 13.5.3 je diferenciální rovnice vedení tepla v masivních tělesech. Jde o skutečnou vektorovou rovnici. Každá její strana je vektor, je-li λ jen číslo. Je zobecněním speciální rovnice 13.5.2 pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Tato symbolika je užitečný nejen proto, že v této rovnici vypadají jednodušeji, ale i proto, že nejjasněji ukazuje fyzikální obsah rovnic bez odvolání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.

13.6 Druhé derivace vektorových polí

Mohli bychom sestavit následující kombinace:

1. $\nabla \cdot (\nabla T)$
2. $\nabla \times (\nabla T)$
3. $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h})$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$
5. $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

- $\nabla \times (\nabla T)$: má stejný tvar jako $\vec{A} \times (\vec{h}T) = (\vec{A} \times \vec{A}) = 0$, neboť $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

$$\text{rot grad } \vec{T} = \nabla \times \nabla T = 0. \quad (13.6.1)$$

neboť ve složkách

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

což je nula. Stejný výsledek bychom dostali i pro ostatní složky.

- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$: $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ neboť $\vec{A} \times \vec{B}$ je kolmé na \vec{A} a jeho složka ve směru \vec{A} je tedy nulová. Takže

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0. \quad (13.6.2)$$

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, řekněme vektorového pole \vec{A} je nula. Dle předchozího vztahu 13.6.1 je rotace gradientu rovna nule. Bylo by tedy možné, aby bylo \vec{A} gradientem nějaké veličiny, jeho rotace by pak byla nulová.

³Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.

Věta 13.6.1. Je-li $\nabla \times \vec{A} = 0$, existuje ψ takové, že $\vec{A} = \nabla\psi$

Rovnost 13.6.2 říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáme-li se s vektorovým polem, přičemž $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, můžeme z toho usoudit, že \vec{D} je rotací nějakého vektorového pole \vec{C} .

Věta 13.6.2. Je-li $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, existuje \vec{C} takové, že $\vec{D} = \nabla \times \vec{C}$.

- $\nabla \cdot (\nabla T)$: Vypíšeme složky $\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T)$. Potom

$$\nabla \times (\nabla T) = \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_x(\nabla_z T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

. Není třeba dodávat závorky, neboť nehrází záměna.

$$\nabla \cdot (\nabla T) = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T. \quad (13.6.3)$$

Na ∇^2 se díváme jako na nový operátor - **Laoplaceův operátor**:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (13.6.4)$$

- $\nabla \times \nabla \times \vec{h}$: Vzhledem k vektorové rovnosti

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

můžeme rotaci vyjádřit jinak

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \vec{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ??$$

Něco je špatně! Operátory v posledním členu nejsou nasycené. Můžeme však také dobře napsat

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

a proto

$$\nabla \times (\nabla \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h} = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{h}. \quad (13.6.5)$$

- Již jsme se zmínili o všech kombinacích ze seznamu na začátku kapitoly, s výjimkou $\nabla \cdot (\nabla \vec{h})$. To je přípustné vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm nedá říci.

Souhrn:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla^2 T \dots \text{skalární pole} \\ \nabla \times (\nabla T) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) &= \dots \text{vektorové pole} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} \\ (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{h} &= \nabla^2 \vec{h} \dots \text{vektorové pole}\end{aligned}$$

Kapitola 14

Integrální počet vektorových polí

Obsah

14.1 Tok vektorového pole	114
14.2 Tok povrchem krychle. Gaussova věta	116
14.2.1 Tepelná vodivost, rovnice difúze	118

14.1 Tok vektorového pole

Definovali jsme vektor \vec{h} jako teplo procházející jednotkovou plochou za jednotkový čas. Předpokládejme, že uvnitř tělesa vyplněného látkou máme nějakou uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Chtěli bychom zjistit, kolik tepla vytéká z tohoto objemu.

Označme plošný obsah elementu plochy S jako dS . Tento symbol nahrazuje dvojrozměrný diferenciál

$$ds = dx dy.$$

Tok tepla elementární ploškou dS je roven jímu plošnému obsahu vynásobenému složkou \vec{h} kolmou na dS . Už jsme definovali \vec{n} jako jednotkový vektor směřující pod pravým úhlem ven z plochy (obr. 14.1.1). Složka \vec{h} , kterou potřebujeme, je

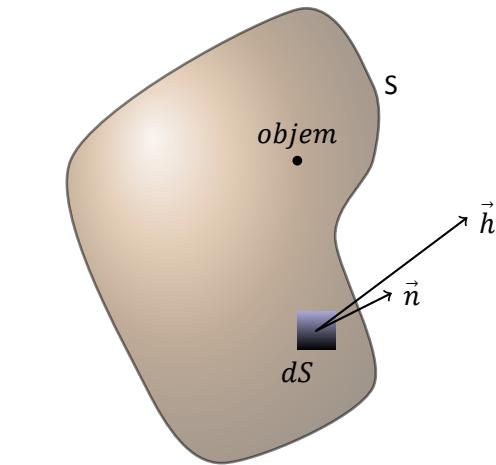
$$h_n = \vec{h} \cdot \vec{n}.$$

Tok ploškou dS pak je

$$\vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (14.1.1)$$

Celkový tepelný tok jakoukoliv plochou dostaneme, sečteme-li příspěvky všech elementárních plošek vytvářející plochu S . Jinými slovy, integrujeme-li 14.1.1 přes celou plochu: Celkový tepelný tok plochou S se rovná

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS^1$$



Obrázek 14.1.1: Uzavřená plocha S vymezuje objem V . Jednotkový vektor \vec{n} udává vnější normálu k plošnému elementu dS a \vec{h} je vektor hustoty tepelného toku pro uvažovaný plošný element.

Tento plošný integrál budeme také nazývat *tokem plochou*. Můžeme to chápat tak, že \vec{h} je hustota proudu tepelného toku a plošný integrál z ní je celkový proud tepla směřující ven z plochy za jednotku času (v joulech za sekundu).

Rádi bychom tuto ideu zobecnili na případ, kdy vektor nepředstavuje tok něčeho konkrétního, mohlo by jít například o elektrické pole. Kdybychom chtěli, jistě bychom

¹Malý kroužek na znaku integrálu znamená, že integrujeme přes uzavřenou plochu.

mohli integrovat normálovou složku elektrického pole plochou. Ačkoliv tu nejde o tok něčeho, nazýváme tuto velčinu tokem.

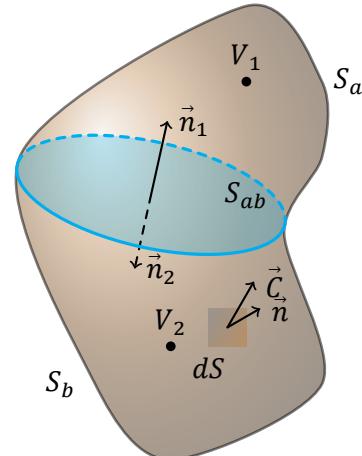
Říkáme tok vektoru \vec{E} plochou $S = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$. Slovo tok zde používáme v obecném významu jako, *plošný integrál normálové složky vektoru*.

Vraťme se k případu tepelného toku a uvažujme situaci, v níž se teplo zachovává. Například si představíme nějakou látku, ve které se po počátečním ohřevu tepelná energie dále ani negeneruje, ani neabsorbuje. Existuje-li pak tok tepla uzvřenou plochou, musí tepelný obsah objemu vymezeného plochou klesat. Tedy v podmírkách, ve kterých se teplo zachovává, tvrdíme, že

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (14.1.2)$$

kde Q je teplo uvnitř plochy. Tok tepla plochou S je roven rychlosti změny celkového tepla Q uvnitř S za čas, vzaté se záporným znaménkem. Takováto interpretace je možná, neboť hovoříme o tepelném toku a kromě toho jsme udělali předpoklad, že teplo se zachovává. O celkovém teple uvnitř objemu bychom nemohli hovořit, kdyby se v tomto objemu teplo generovalo.

Nyní poukážeme na zajímavou vlastnost toku jakéhokoliv vektoru. Můžeme mít na mysli stále vektor tepelného toku, ale vše bude platit i pro jakékoliv vektorové pole \vec{C} . Představme si, že máme uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Rozdělme nyní objem V jakýmsi řezem na dvě části (obr. 14.1.2). Dostaneme tím dvě uzavřené plochy a dva objemy. Objem V_1 ohraničuje plocha S_1 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_a a plochy řezu S_{ab} . Objem V_2 ohraničuje plocha S_2 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_b doplněné řezem S_{ab} . Položme si nyní otázku: Předpokládejme, že vypočítáme tok z plochy S_1 a přičteme ho k toku z plochy S_2 . Je roven tento součet toku z celé plochy S , s níž jsme původně začínaly? Odpověď zní ano. Tok z částí ploch S_{ab} , společnou objema plochám S_1 a S_2 se přesně vyruší. Pro tok vektoru \vec{C} z objemu V_1 můžeme psát:



Obrázek 14.1.2: Objem V uvnitř plochy S je řezem S_{ab} rozdělen na dvě části. Dostáváme tím objem V_1 vymezený plochou $S_1 = S_a + S_{ab}$ a objem V_2 vymezený plochou $S_2 = S_b + S_{ab}$.

- tok plochou S_1 je roven:

$$\int_{S_a} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS \quad (14.1.3)$$

- tok plochou S_2 je roven:

$$\int_{S_b} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (14.1.4)$$

Všimněme si, že v druhém integrálu jsme psali \vec{n}_1 , pro vnější normálu k S_{ab} , patří-li tato k S_1 a \vec{n}_2 patří-li k S_2 , jak ukazuje obr. 14.1.2. Zřejmě $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ takže

$$\int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (14.1.5)$$

Sečteme-li ronvosti 14.1.3 a 14.1.4 přesvědčíme se, že součet toku přes S_1 a S_2 je dán součtem dvou integrálů, které spolu dávají tok původní plochy $S = S_a + S_b$.

Vidíme, že o toku úplnou vnější plochou S je možné uvažovat jako o součtu toků dvou částí, na které se objem V rozdělil. *Takto pro jakýkoliv způsob dělení původního objemu musí obecně platit, že tok vnější plochou, daný původním integrálem, je roven součtu toků ze všech jeho malých vnitřních částí.*

14.2 Tok povrchem krychle. Gaussova věta

Uvažujme krychly jejíž hrany mají směr souřadnicových os tak, jako na obr. 14.2.1. Předpokládejme, že souřadnice jednoho z vrcholu krychle je totožný se začátkem souřadnicové soustavy x, y, z . Nechť Δx je délka hrany krychle ve směru osy x , Δy je délka hrany ve směru osy y a Δz délka hrany ve směru osy z . Chceme najít tok vektorového pole C povrchem krychle. Dostaneme jej sečtením toků každou ze šesti stěn. Nejdříve uvažujeme stěnu na obrázku 14.2.1 označenou jako 1. Tok směřující touto stěnou ven z krychle je dán integrálem záporně vzaté x -ové složky C plohou stěny: Protože máme malou krychly můžeme tento integrál approximovat hodnotou x ve středu stěny (označíme jej jako bod 1) vynásobenou plošným obsahem stěny, tj. $\Delta y \Delta z$:

$$\text{tok z 1} = -C_x \Delta y \Delta z$$

Podobně napíšeme tok stěnou 2:

$$\text{tok z 2} = C_x \Delta y \Delta z$$

Obecně se $C_x(1)$ a $C_x(2)$ trochu liší. Je-li dostatečně malé, můžeme psát

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

Na pravé straně tohoto vztahu bychom ve skutečnosti měli uvést více členů. Všechny však budou obsahovat vyšší mocniny Δx , a proto, uvažujeme-li limitní případ malého Δx , budou zanedbatelné. Takovým způsobem pro tok stěnou 2 vychází

$$\text{tok z 2} = \left(C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z.$$

Sečtením toků stěnami 1 a 2 dostaneme

$$\text{tok z 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

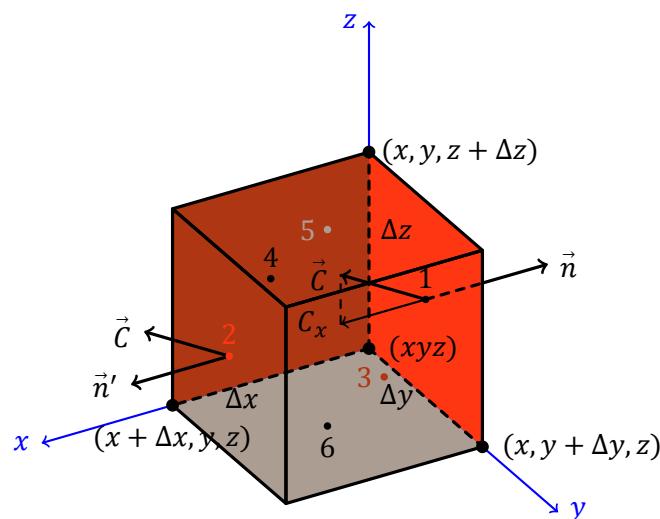
Derivace by se měla počítat ve skutečnosti ve středu stěny 1, tj v bodu $[x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}]$. Ale v limitním případě infinitezimální krychle uděláme pouze zanedbatelnou chybu, počítáme-li je ve vrcholu (x, y, z) .

Provedeme-li stejné úvahy pro každý z dvou párů stěn, dostaneme

$$\text{tok z 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

a

$$\text{tok z 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$



Obrázek 14.2.1: Výpočet toku pole C z malé krychle

Celkový tok všemi stěnami je součtem těchto členů. Dostáváme tedy

$$\int_{\text{box}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Součtem derivací je právě $\nabla \cdot \vec{C}$ a dále $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$, tj objem krychle. Takovýmto způsobem můžeme pro infintezimální krychli psát

$$\int_{\text{box}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V. \quad (14.2.1)$$

Ukázali jsme, že tok z povrchu infinitezimální krychle ven je roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. Nyní vidíme význam divergence vektoru. Divergence vektoru v bodě P je tok - vycházející „proud“ vektoru \vec{C} - připadající na jednotkový objem v okolí P .

Divergenci C jsme uvedli do souvislosti s tokem \vec{C} z každého infinitezimálního objemu. V případě konečného objemu můžeme využít fakt, který jsme už dokázali, že celkový tok z objemu je součtem toků z každé jedné části. To znamená, že divergenci můžeme integrovat přes celý objem. Z toho vyplývá věta, že integrál normálové složky každého vektoru přes jakoukoliv uzavřenou plochu je možné zapsat jako integrál z divergence tohoto vektoru přes objem uzavřený touto plochou. Tato věta byla pojmenována po Gaussovi.

Gaussova věta:

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad (14.2.2)$$

kde S je jakákoli uzavřená plocha a V je objem jí vymezený.

14.2.1 Tepelná vodivost, rovnice difúze

Abychom se lépe seznámili s *Gaussovo větou*, uveďme nějaký případ jejího použití. Vezměme opět případ tepelného toku, například v kovu. Předpokládejme, že máme jednoduchou situaci, kdy všechno teplo bylo o přivedeno už dříve a těleso se nyní pouze ochlazuje. Žádné zdroje tepla už nejsou, takže teplo se zachovává. Kolik je potom tepla uvnitř určitého zvoleného objemu v libovolném čase? Množství tepla se musí zmenšovat, a to právě o množství, které vytéká z objemu jeho povrchem. Kdyby byl náš objem malou krychlí, pak podle vztahu 14.2.1 bychom napsali

$$\text{tok tepla} = \int_{\text{box}} \vec{h} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{h}) \Delta V. \quad (14.2.3)$$

Tato hodnota však musí být rovna rychlosti, kterou se teplo ztrácí z vnitřku krychle. Je-li q teplo připadající na jednotkový objem, $q\Delta V$ je teplo v krychli a rychlosť jeho úbytku je

$$-\frac{d}{dt}(q\Delta V) = -\frac{dq}{dt}\Delta V. \quad (14.2.4)$$

Z porovnání rov. 14.2.3 a 14.2.4 vidíme, že

$$\nabla \cdot \vec{h} = -\frac{dq}{dt}.$$

Podotkněme, že rovnice tohoto tvaru se ve fyzice vyskytuje velmi často. Vyjadřuje Zákon zachování, tomto případě Zákon zachování tepla. Ve vztahu 14.1.2 jsme tentýž fyzikální jev vyjádřili jiným způsobem. Zde máme diferenciální tvar zákona zachování zatímco rovnost 14.1.2 představuje jeho integrální tvar.

Kapitola 15

Speciální teorie relativity

Obsah

15.1 Princip relativity 122

15.2 Lorentzova transformace 124

15.1 Princip relativity

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy ronice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak jej odstranit. Oboje, chybu i korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že m je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlosť. V Einsteinově opraveném vztahu má m hodnotu

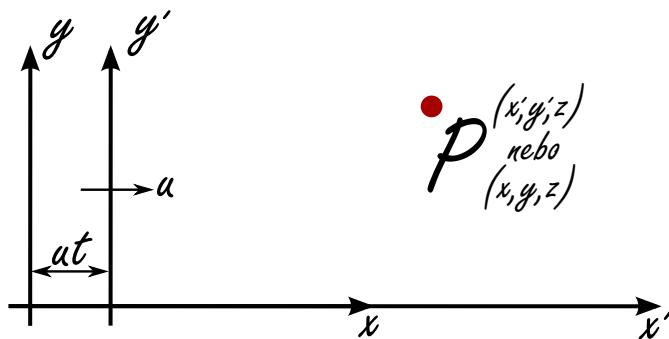
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.1.1)$$

kde m_0 je *klidová hmotnost* (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje) a c je *rychlosť světla*, která je přibližně rovna $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlostí $9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$ a po dosazení do uvedeného vztahu dosaneme korekci hmotnosti ne větší než dvě až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostatečně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosť světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý a proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Proto je zajímavé sledovat, jaké kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona. Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o *speciální teorii relativity* z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou *Obecná teorie relativity*. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ *gravitace*.

Newton byl první, kdo vyslovil *princip relativity* jako jeden z důsledků pohybových zákonů: Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejné ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočare vpřed. To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlosťí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samozřejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je pravda, že ve všech experimentech provedených



Obrázek 15.1.1: Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých \$x\$-ových os.

v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální zákony stejné, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje konstantní rychlostí \$u\$ ve směru osy \$x\$, přičemž měří polohu určitého bodu (obr. 15.1.1). Ve své souřadnicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy \$x\$ jako \$x'\$. Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy \$x\$ ve své souřadnicové soustavě značí jako \$x\$. Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunu za čas \$t\$ o vzdálenost \$ut\$, a jestliže soustavy z počátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (15.1.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetrasformovaly do stejných zákonů v čárkované soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soutavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje či nikoliv.

Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumu elektrických, magnetických a světelných jevů, jež vyustilo v *Maxwellovu teorii elektromagnetického pole*, která jednotně popisuje elektřinu, magnetizmus a světlo. Zdálo se však, že Maxwellovy rovnice nevyhovovaly *principu relativity*, neboť přetrasformujeme-li Maxwellovy rovnice pomocí rovnic 15.1.2, nebudou mít stejný tvar. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měli lišit od jevů v nehybné lodi. Těmito jevy by pak bylo možné určit rychlosť lodi, a ve speciálním případě pomocí vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možné určit i absolutní rychlosť lodi. Jedním z důsledků Maxwellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří vsemi směry stejnou rychlosťí \$c = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}\$. Dalším důsledkem těchto rovnic je, že pohybujeme-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlosťí \$c\$. Tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje vede k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlosť u a že světlo z reflektorů auta za námi nás míjí rychlosť c . Zdiferencováním první rovnice 15.1.2 máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u, \quad (15.1.3)$$

což znamená, že podle *Galileovy transformace* by zdánlivá rychlosť světla měřená z auta nemohla být c , ale $c - u$. Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosti Země, ale všechny selhaly - nedávaly vůbec žádné rychlosti. Ukázalo se, že někde byla chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

15.2 Lorentzova transformace

Když se zjistilo, že s rovnicemi v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileiho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxwellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problému je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si H. A. Lorentz všiml pozoruhodné věci, když použil v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (15.2.1)$$

tvar rovnic se nezměnil. Rovnice 15.2.1 jsou známé jako *Lorentzova transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že všechny fyzikální zákony, by měly být takové, aby se při Lorentzově transformaci něměnily. Jinými slovy, měly bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak se ukázalo jediné co je třeba, je změnit hmotnost m v Newtonových rovnicích podle vztahu 15.1.1. Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejně.

Pro pochopení smyslu této nové transformace nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání prostoru a času.

Kapitola 16

Geometrická optika

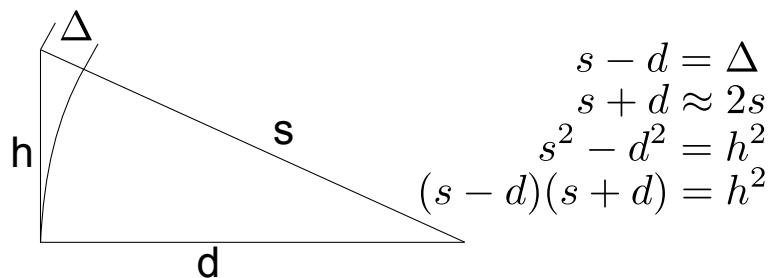
Obsah

16.1 Úvod	126
---------------------	-----

16.1 Úvod

Na několika přístrojích předvedeme approximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější approximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů a přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná.

Abychom mohli pokračovat potřebujeme jeden geometrický vztah a to: máme-li trojúhelník s malou výškou h a velkou základnou d , pak přepona s je delší než základna (viz obr. 16.1.1). Tedy



Obrázek 16.1.1: Trojúhelník s malou výškou a velkou základnou

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (16.1.1)$$

To je celá geometrie, kterou je třeba znát, aby bylo možné diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch.

Část V

Astrofyzika

Kapitola 17

Úvod

Obsah

17.1 Historie astrofyziky	130
17.2 Základní vztahy	130

Astrofyzika je vědní obor ležící na rozhraní *fyziky* a *astronomie*. Zabývá se fyzikou vesmíru, včetně fyzikálních vlastností (svítivost, hustota, teplota, chemické složení) astronomických objektů jako jsou hvězdy, galaxie a mezihvězdná hmota, jakož i jejich vzájemné působení.

Podle metod výzkumu těchto objektů se dělí na *fotometrii*, *spektroskopii*, *radioastronomii*, *astrofyziku rentgenovou*, *infračervenou*, *ultrafialovou* a *neutrinovou*. Každý z těchto podoborů se dále dělí na praktickou a teoretickou část. Praktická získává potřebná data. Teoretická s pomocí fyzikálních zákonů vysvětluje pozorované chování vesmírných těles.

17.1 Historie astrofyziky

17.2 Základní vztahy

- **AU** - *astronomická jednotka*: průměrná vzdálenost Země od Slunce, $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Vzájemné vzdálenosti planet či jiných objektů sluneční soustavy vyjádřené v AU poskytují relativně názorné měřítko vzdáleností těchto objektů od sebe. Přesná hodnota je

$$1AU = 149\,597\,870\,691 \pm 6 \text{ m}$$

Kvůli vyšší přesnosti *Mezinárodní astronomická unie* (International Astronomical Union, IAU) přijala novou definici, podle které je AU délka poloměru nerušené oběžné kruhové dráhy tělesa se zanedbatelnou hmotností, pohybujícího se okolo Slunce rychlostí $0,017\,202\,098\,950$ radiánů za den (86 400 s).

- Vzdálenost Země od Slunce je $1,00 \pm 0,02 \text{ AU}$.
- Měsíc obíhá kolem Země ve vzdálenosti $0,0026 \pm 0,0001 \text{ AU}$.
- Mars je od Slunce vzdálen $1,52 \pm 0,14 \text{ AU}$.
- Jupiter je od Slunce vzdálen $5,20 \pm 0,05 \text{ AU}$.
- Nejvzdálenější člověkem vyrobené těleso, sonda Voyager 1, bylo 31. prosince 2007 ve vzdálenosti $104,93 \text{ AU}$ od Slunce.
- Průměr sluneční soustavy bez *Oortova oblaku* je přibližně 105 AU .
- Průměr sluneční soustavy s Oortovým oblakem se odhaduje na 50 000 až 100 000 AU.
- Nejbližší hvězda (po Slunci), Proxima Centauri, se nachází přibližně ve vzdálenosti 268 000 AU.

- Průměr hvězdy Betelgeuze je $2,57 \text{ AU}$.
- Vzdálenost Slunce od středu Galaxie je přibližně $1,7 \cdot 10^9 \text{ AU}$.
- Velikost viditelného vesmíru je asi $8,66 \cdot 10^{14} \text{ AU}$.
- **I.y.** - světelný rok: vzdálenost, kterou světlo ulétna za jeden rok, $9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$,
- **pc** - parsek, paralaktická sekunda: vzdálenost, ze které by poloměr oběžné dráhy Země byl kolmo k zornému paprsku vidět pod úhlem $1''$, $30,9 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

Příklad 17.2.1. Spočtěte, jakou vzdálenost v metrech vyjadřuje jeden parsek [KČog, s. 3].

řešení: 1 pc (paralaktická sekunda) je vzdálenost, ze které vidíme velkou poloosu oběžné dráhy Země kolem Slunce pod uhlem $\varphi = 1''$. Úhel $1''$ je tak malý, že strany VS a VZ na obrázku prakticky splývají a místo pravého trojúhelníka VSZ můžeme použít definiční vztah úhlu v obloukové míře (velkost úhlu je možné určit jako poměr délky oblouku vymezeného ramenou na kružnici opsané kolem vrcholu k poloměru této kružnice). Proto

$$\varphi = \frac{R_{SZ}}{l} \rightarrow l = \frac{R_{SZ}}{\varphi},$$

kde l je vzdálenost 1 pc v metrech, R_{SZ} je vzdálenost země od Slunce a φ je úhel jedné vteřiny vyjádřený v radiánech.

$$l = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60 \cdot 60} \cdot \frac{2\pi}{360}} \cong 3 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$

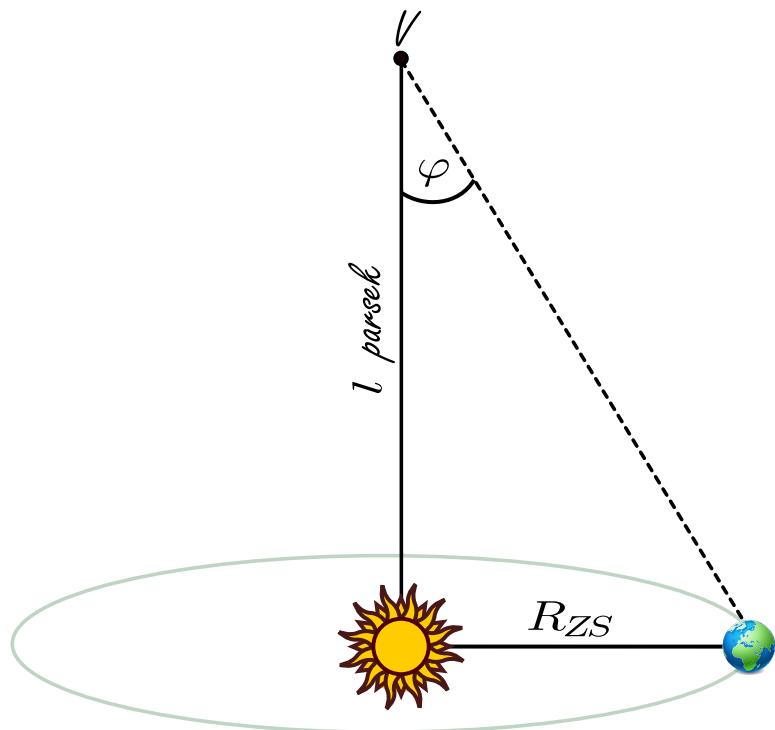
Další jednotkou, kterou se v astrofyzice měří vzdálenost dvou vesmírných těles, je *parallaxa*. Pozorovací místa musí být od sebe výrazně vzdálena, aby například při měření vzdálenosti naší nejbližší hvězdy - *Proxima Centauri* byla parallaxa vůbec měřitelná. Vzdálenost této hvězdy je 4,2 světelných let (nebo 270 000 AU) od Země.

Příklad 17.2.2. Najděte parallaxu *Proximy Centauri*, která je od nás vzdálená asi 4,2 světelného roku [KČog, s. 4].

řešení: Díky pohybu Země kolem Slunce se zdá, že blízké hvězdy opisují oproti vzdáleným elipsu. Úhlový poloměr této elipsy se nazývá *parallaxa hvězdy*. Lze ji změřit jen pro nejbližší hvězdy. Z definice úhlu (jako v předchozím příkladě) tedy vyplývá, že

$$\pi = \frac{R_{ZS}}{l} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

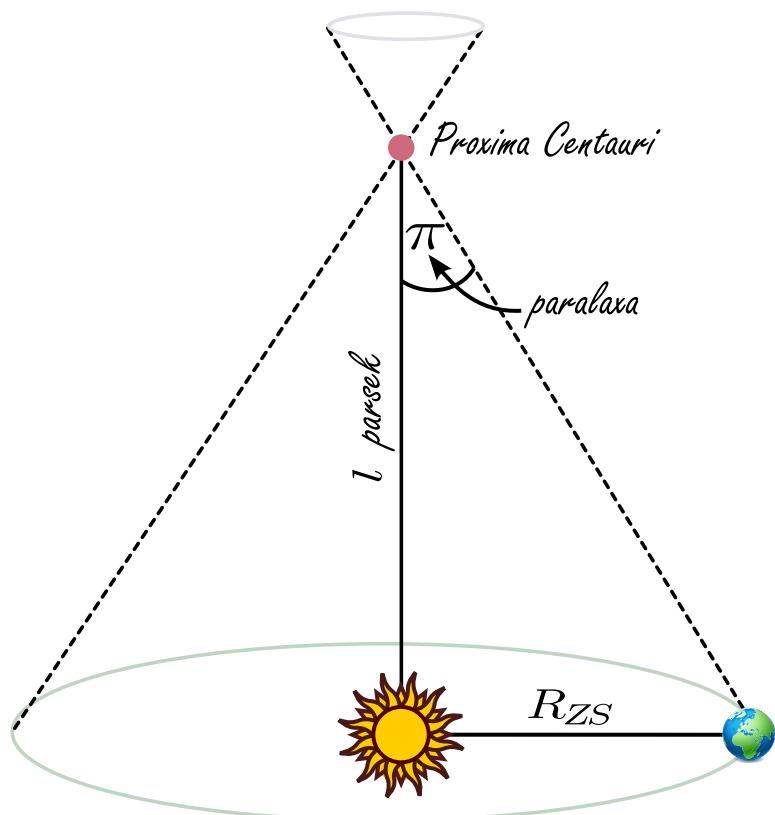
což je přibližně $0.76''$. Vidíme, že i u druhé nejbližší hvězdy po Slunci není parallaxa ani celá $1''$.



Obrázek 17.2.1: Parsek

References

- [KČog9] P. Kulhánek and M. Červenka. *Astrofyzika v příkladech*. Ed. by F. ČVUT. FEL ČVUT, 2009. 87 pp. (cit. on p. [131](#)).



Obrázek 17.2.2: Paralaxa naší nejbližší hvězdy

Část VI

Mechanika

Kapitola 18

Kinematika částice

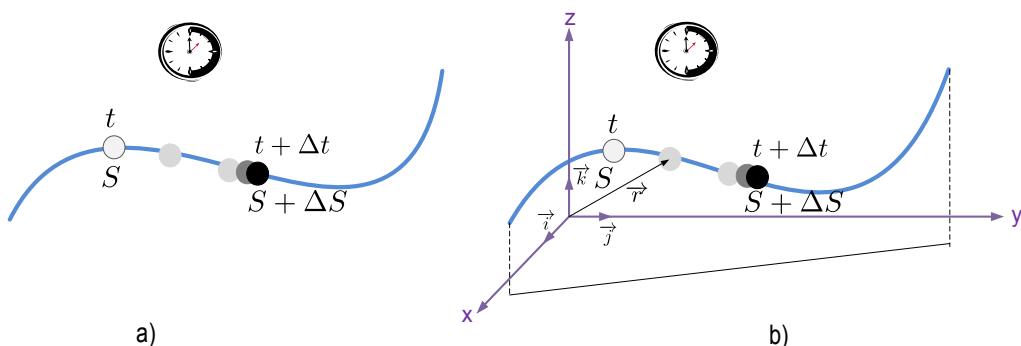
Obsah

18.1	Kinematický popis pohybu částice	138
18.1.1	Základní pohyby a jejich skládání	139
18.1.2	Skládání pohybů	141

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem hmotný bod je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměru částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

18.1 Kinematický popis pohybu částice

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po příčinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, trajektorii, a snažíme se určit jednak tvar této trajektorie a zákon pohybu po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase¹. Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.



Obrázek 18.1.1: Příklad trajektorie částice a zavedení kartézské soustavy souřadnic

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit dráhu částice $s(t)$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 18.1.1). V okamžiku t je částice v bodě daném prošlou dráhou s , v okamžiku $t + \Delta t$ v bodě $s + \Delta s$. Dráha s tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

Přitom můžeme zavést **střední rychlosť částice** v intervalu Δt

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (18.1.1)$$

¹Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrovětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrovětě pohybuje podle zákona kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně přesně stanovit její polohu a rychlosť

okamžitou rychlosť častice v okamžiku t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (18.1.2)$$

a **okamžité zrychlení**

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (18.1.3)$$

Takto zavedené rychlosť a zrychlení jsou skalární funkce času a udávají pouze jak se mení dráha a rychlosť pri pohybu po zadanej trajektorii, ve směru tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu častice v prostoru vzhledem k nějaké vztazné soustavě. Tato soustava, například kartézská, je spojena s nějakým tuhým tělesem a doplněna hodinami umístěnými například v počátku. V místnosti mohou jako kartézské osy sloužit průsečnice stěn a podlahy. Potom udáváme tři kartézské souřadnice častice jako funkce času:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (18.1.4)$$

Soustava tří rovnic (rov. 18.1.4) představuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnici trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rov. 18.1.4 čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (18.1.5)$$

Přitom $s = s[x(t), y(t), z(t)]$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalární rychlosť bude

18.1.1 Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu častice.

18.1.1.1 Pohyb přímočarý

Nechť přímočarý pohyb probíhá podél osy x s počátečními podmínkami $x = x_0$, $v_x = \dot{x} = v_{0x}$ při $t = t_0$. Pak rozlišujeme

- *Pohyb rovnoměrný* s konstantní rychlosťí v_{0x} a nulovým zrychlením $a_x = 0$. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon pohybu:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (18.1.6)$$

- *Pohyb rovnoměrně zrychlený* s konstantním zrychlením a_{0x} kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon rychlosti a zákon pohybu:

$$v = v_0 x + a_{0x} x(t - t_0), \quad (18.1.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{0x} (t - t_0)^2. \quad (18.1.8)$$

Je-li při $t = 0 x = 0, v = 0$ dostaneme známé vztahy

$$v = a_{0x} t, \quad x = \frac{1}{2} a_{0x} t^2$$

- *Pohyb nerovnoměrný* se zrychlením obecně závislým na čase $a(t)$. Pak dostaneme zákon rychlosti a zákon pohybu integrováním

$$v = v_{0x} + \int_{t_0}^t a(t) dt \quad (18.1.9)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (18.1.10)$$

18.1.1.2 Pohyb kruhový

18.1.1.3 Pohyb harmonický

Pohyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového pohybu kolem počátku do jedné z kartézských os. Například v ose y pak máme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (18.1.11)$$

kde y ... výchylka (elongace), A ... amplituda, ω ... úhlová rychlosť [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$], $T = \frac{2\pi}{\omega}$... perioda [s], $f = \frac{1}{T}$... frekvence [Hz], $\omega t + \varphi_0$... fáze, φ_0 ... počáteční fáze při $t = 0$ neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y = \dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (18.1.12)$$

$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (18.1.13)$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlosť předbíhá výchylku o $\frac{\pi}{2}$ a zrychlení o π (je v protifázi).

18.1.2 Skládání pohybů

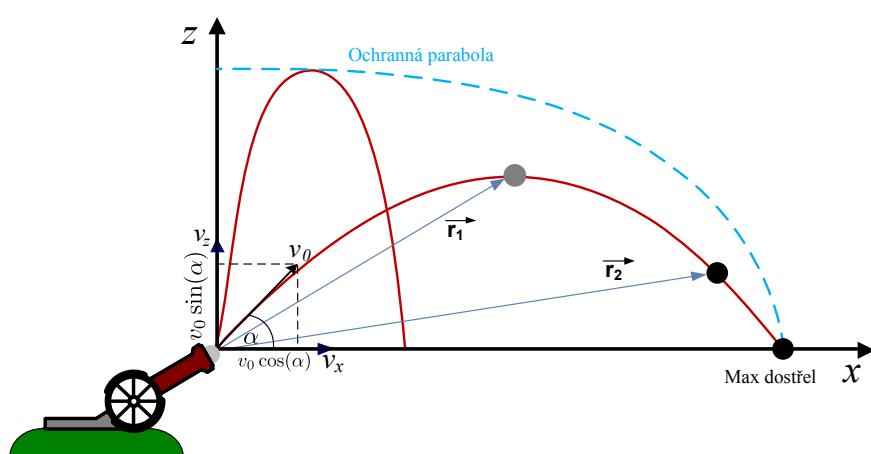
Ačkoliv částice může konat současně několik pohybů, lze je vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skládání pohybu.

18.1.2.1 Skládání kolmých přímočarých pohybů

Se skládáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při *vrhu těles v homogenním tíhovém poli ve vakuu*. Uvažujme rovinný pohyb v rovině x, z , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g .

Příklad 18.1.1. Výstřel z děla (ve vakuu). Dělová koule opouští hlaveň zadanou rychlostí. Určete:

- maximální dostrel pro zadanou ústřovou rychlosť,
- hranice oblasti, ve kterém lze zasáhnout cíl,
- stanovte velikost potřebného náměru děla pro zasazení libovolného cíle uvnitř ochranné paraboly.



Obrázek 18.1.2: K příkladu výpočtu trajektorie projektile.

Řešení: Uvažujte rovinný pohyb v rovině xz , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g . Ve směru osy z tedy probíhá rovnoramenné zrychlený pohyb podle rov. 18.1.8. Vztáhneme-li počáteční podmínky k okamžiku $t = 0$, máme

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_z(t) = v_{0z} - gt \quad (18.1.14)$$

Ve směru osy x je pohyb rovnoramenný:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad v_x(t) = v_{0x} = \text{konst} \quad (18.1.15)$$

Dělová koule opouští hlaveň pod elevačním úhlem α za podmínek dle obr. 18.1.2 platí $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \alpha > 0, v_{0z} = v_0 \sin \alpha > 0$. Jde tedy o skládání rovnoramenného přímočarého pohybu s rychlosí $v_0 \cos \alpha$ ve směru osy x a svislého pohybu vzhůru. Získané rovnice

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad x(t) = v_{0x}t \quad (18.1.16)$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t , dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 = x \tan \alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 \quad (18.1.17)$$

Nyní aplikujeme goniometrický vzorec

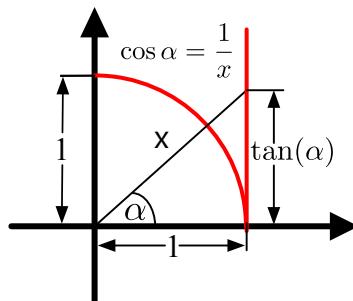
$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

odvozený dle náčrtku na obrázku 18.1.3 a dostáváme rovnici

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha)x^2 \quad (18.1.18)$$

Pohyb projektílu (dělové koule) probíhá po stejné trajektorii, jako šíkmý vrh v homogenním tíhovém poli ve vakuu, tedy po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, délku doletu a celkovou dobu letu.

Obrázek 18.1.3: Goniometrický vzorec $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ lze snadno odvodit z náčrtku pomocí Pythagorovy věty (Přepona pravoúhlého trojúhelníka je $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$)



- Maximální dolet pro daný elevační úhel:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 \quad (18.1.19)$$

Netriviální kořen této kvadratické rovnice je námi hledaný dolet dělové koule

$$x_d = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (18.1.20)$$

- Celková doba letu:

$$t_d = \frac{x_d}{v_{0x}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{gv_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (18.1.21)$$

- Souřadnice vrcholu dráhy: získáme derivováním rov. 18.1.18

$$0 = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 (1 + \tan^2 \alpha)} x_v \quad (18.1.22)$$

$$x_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{2}{2} \quad (18.1.23)$$

$$x_v = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (18.1.24)$$

Souřadnici z_v dostaneme dosazením x_v do rov. 18.1.18

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \frac{v_0^4}{g^2} \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} \quad (18.1.25)$$

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (18.1.26)$$

$$z_v = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (18.1.27)$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu $\frac{\pi}{4}$ a že obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly $\frac{\pi}{4} \pm \Delta\alpha$.

- Stanovení elevačního úhlu pro zasažení zadaných souřadnic $[X_c, Z_c]$ cíle: Opět vycházíme z rov. 18.1.18, ovšem tentokrát nejsou neznáme x a z , ale α : Použijeme substituci $\tan \alpha = p$ a vypočítáme kořeny této kvadratické rovnice:

$$0 = gx^2 p^2 - 2v_0^2 xp + (gx^2 + 2zv_0^2) \quad (18.1.28)$$

$$p_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \quad (18.1.29)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \right) \quad (18.1.30)$$

Je-li cíl zadán v polárních souřadnicích $[r, \varphi]$, lze potřebný náměr stanovit takto:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gr^2 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi v_0^2)}}{gr \cos \varphi} \right) \quad (18.1.31)$$

Pokud ovšem bude diskriminant menší než 0, leží cíl mimo dosah děla. Tj. neexistuje takový náměr děla, kterým by bylo možné cíl zasáhnout. Je-li diskriminant roven nule, jedná se o hranici, za kterou již při dané ústřové rychlosti nelze dostřelit. Body ležící na této obálce tzv. ochranná parabola mohou být zasaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu.

- *Stanovení rovnice ochranné paraboly:* To provedeme tak, že položíme diskriminant rovnice pro $\tan \alpha$ roven nule a dostaneme rovnici obálky

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2) \Rightarrow z = -\frac{v_0^2}{2g^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (18.1.32)$$

```

1 % ===== Zadani =====
2 % Delova koule opousti hlaven zadanou rychlosť .
3 % Urcete maximalni dostrel pro zadanou ustovou rychlosť ,
4 % hranice oblasti , ve ktere lze zasahnout cil a stanovte
5 % velikost potrebneho nameru dela pro zasezeni libovolneho cile
6 % uvnitr ochranne paraboly .
7     namer = 45;           % [ ° ]      namer dela
8     vo      = 210;         % [m/s]      ustova rychlosť
9     go      = 9.81;        % [m/s-2]    gravitacni zrychleni
10    % Angle required to hit coordinate (x,y)
11    cil =[2000,300];
12 % ===== rEsENi =====
13    vxo      = vo*cos(namer/180*pi);
14    vyo      = vo*sin(namer/180*pi);
15    % 1. Pohybove rovnice
16    t_dopad = (2*vyo)/go;
17    t1= 0:t_dopad/20:t_dopad;
18    r1 = [vxo*t1;
19          vyo*t1 - (1/2)*go*t1.^2];
20
21    % 2. Vypocet namera pro zasazení zadaneho cile
22    t_trefa = cil(1)/vxo;
23    t2 = 0:t_trefa/20:t_trefa;
24    % namer alfa - dva koreny !!
25    Diskriminant = sqrt(vo^4-(go*(go*cil(1)^2+2*vo^2*cil(2))));
26    alfa1 = atan((vo^2-Diskriminant)/(go*cil(1)));
27    alfa2 = atan((vo^2+Diskriminant)/(go*cil(1)));
28    namer_alfa1 = alfa1*180/pi;
29    namer_alfa2 = alfa2*180/pi;
30    r2 = [vxo*t2;

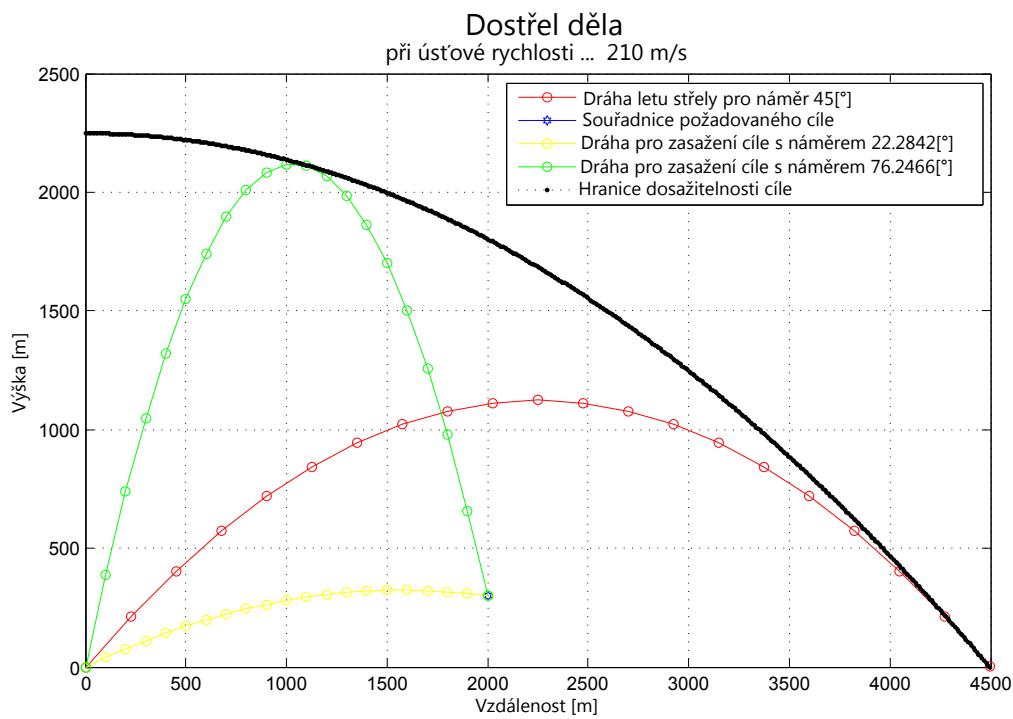
```

```

31      tan(alfa1) *vx0*t2 - (go/(2*vo^2*cos(alfa1)^2)) *
            (vx0*t2).^2;
32      tan(alfa2) *vx0*t2 - (go/(2*vo^2*cos(alfa2)^2)) *
            (vx0*t2).^2];
33
34 % 3. vypocet hranice dosazitelnosti cile - ochranna parabola
35 vx0_max =vo*cos(45/180*pi);
36 vyo_max =vo*sin(45/180*pi);
37 t_max = (2*vyo_max)/go; % max dostrel pri nameru 45 °
38 dostrel_max = vx0_max*t_max % [m]
39 vyska_max = vo^2/(2*go) % [m]
40 t3 = 0:t_max/500:t_max;
41 r3 = [vx0_max*t3; vo^2/(2*go)-go/(2*vo^2)*(vx0_max*t3).^2];
42
43 % graficke zpracovani vysledku
44 % figure;
45 plot(r1(1,:), r1(2,:),'-ro', cil(1), cil(2),'-bh',r2(1,:),
        r2(2,:),'-yo',r2(1,:), r2(3,:),'-go',r3(1,:),
        r3(2,:),':k.','MarkerSize',6)
46 grid on;
47 title ({'\fontsize{16}{Dostrel\udela'},
           '\fontsize{12}{pri\udustove\udrychlosti\udel...}', num2str(vo), ' \udel[m/s]' })
48 xlabel('Vzdalenost\udel[m]')
49 ylabel('Vyska\udel[m]')
50
51 string1 = ['Draha\udletu\udstrelu\udpro\udzadany\udnameru\ud',
             num2str(namer), '\ud[\u00b0]\ud'];
52 string2 = 'Souradnice\udpozadovaneho\udcile';
53 string3 = ['Draha\udpro\udzasazeni\udcile\uds\udnamerem\ud',
             num2str(namer_alfa1), '\ud[\u00b0]\ud'];
54 string4 = ['Draha\udpro\udzasazeni\udcile\uds\udnamerem\ud',
             num2str(namer_alfa2), '\ud[\u00b0]\ud'];
55 string5 = 'Hranice\udosazitelnosti\udcile';
56 legend(string1, string2, string3, string4, string5)

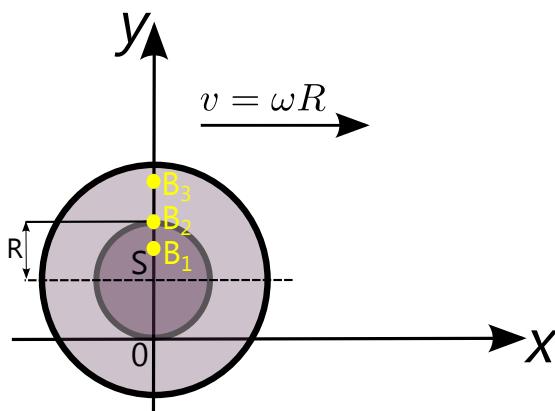
```

Výpis 18.1: kinematika_deло_ve_vakuu.m pro ověření výpočtu balistické dráhy projektlu.



Obrázek 18.1.4: Výpočet trajektorie projektu ve vakuu při ústové rychlosti 210 m/s pomocí sw MATLAB®.

Příklad 18.1.2. Kolo vagónu se valí po vodorovné kolejnici. Uvažujte bod, který je v počátečním okamžiku pod středem kola ve vzdálenosti, která může být menší, rovna nebo větší než vzdálenost středu kola od kolejnice.



Obrázek 18.1.5: Kolo vagónu a tři možné polohy bodu

Určete parametrické rovnice dráhy zvoleného bodu, složky rychlosti a její velikost, složky

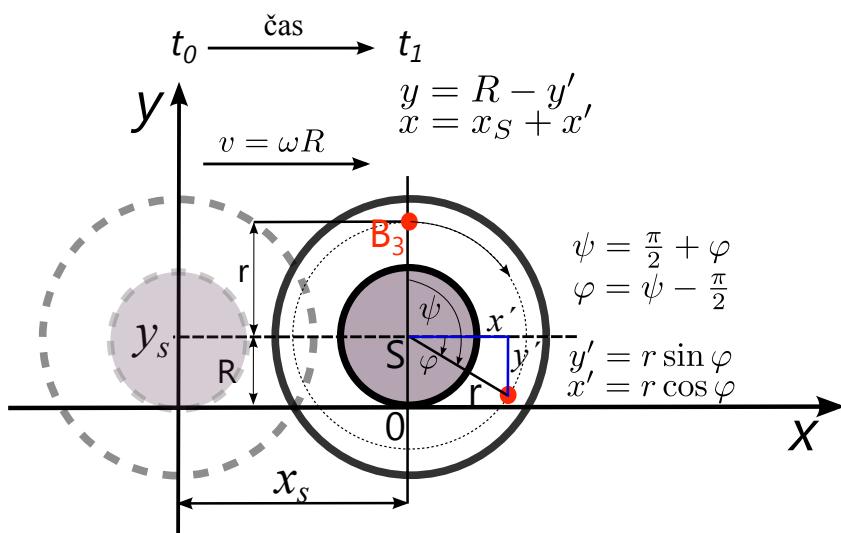
zrychlení a jeho velikost, tečné a normálové zrychlení a poloměr křivosti dráhy. [Sla02, p. 11]

Řešení: Obvodová rychlosť v místě dotyku s kolejnicí je $v = \omega R$, což vzhledem k předpokladu o valení představuje posuvnou rychlosť kola. Parametrické rovnice pro střed kola jsou pak

$$x_S = \omega R t \quad (18.1.33)$$

$$y_S = R \quad (18.1.34)$$

Uvažovaný bod B_3 na obr. 18.1.6 je ve své nové pozici v čase t_1 posunut vůči středu o vzdálenost $r \cdot \sin \omega t$ ve směru osy x a o vzdálenost $r \cdot \cos \omega t$ ve směru osy y . Z obrázku 18.1.6 lze odvodit následující rovnice pro souřadnice libovolného bodu B na kole vagónu.



Obrázek 18.1.6: Náčrt pro odvození parametrických rovnic pohybu libovolně zvoleného bodu na kole vagónu

- ve směru osy x

$$x = x_S + x'$$

$$x = x_S + r \cos(\psi - \frac{\pi}{2})$$

$$x = x_S + r \sin \psi$$

$$x = \omega R t + r \sin \omega t$$

- ve směru osy y

$$\begin{aligned} y &= y_s - y' \\ y &= y_s - r \sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ y &= y_s + r \cos \psi \\ y &= R + r \cos \omega t \end{aligned}$$

takže, parametrické rovnice dráhy mají tvar **cykloidy** viz 18.1.35. .

$$x = \omega R t + r \sin \omega t \quad (18.1.35)$$

$$y = R + r \cos \omega t \quad (18.1.36)$$

- Složky rychlosti:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \omega R + r \omega \cos \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -r \omega \sin \omega t \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2} \end{aligned} \quad (18.1.37)$$

- Složky zrychlení:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r \omega^2 \sin \omega t \quad (18.1.38)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r \omega^2 \cos \omega t \quad (18.1.39)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r \omega^2 \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r \omega^2 \quad (18.1.40)$$

Tento výsledek je superpozicí rovnoměrného kruhového a rovnoměrného přímočarého pohybu.

- Tečné zrychlení dostaneme derivací velikosti rychlosti

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \omega \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \cdot (-1) \cdot 2Rr \omega \sin \omega t \\ a_t &= \frac{r \omega^2 \cdot |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Normálové zrychlení získáme užitím Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \\ a_n &= \sqrt{(r\omega^2)^2 - \left(\frac{Rr\omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \right)^2} \\ a_n &= \frac{r\omega^2 |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Poloměr křivosti R_0 dostaneme ze vztahu $a_n = \frac{v^2}{R_0}$:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\omega^2(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)}{r\omega^2|R \cos \omega t - r|} \\ R_0 &= \frac{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}}{|Rr \cos \omega t - r^2|} \end{aligned}$$

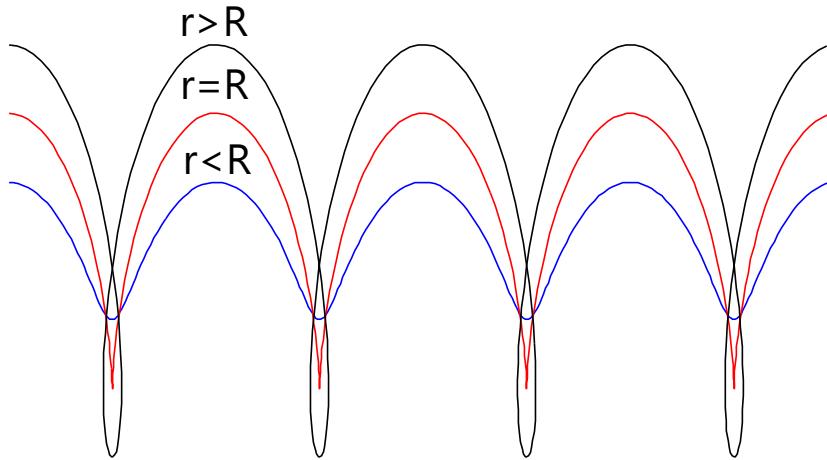
Poloměr křivosti není roven vzdálenosti od středu kola r : druhou bodu není kružnice, nýbrž cykloida (viz obr. 18.1.7).

$$\begin{aligned} (x - \omega Rt)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t \\ (y - R)^2 &= r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t + r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \quad \text{kde } t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{y - R}{r} \\ \left(x - R \arccos \frac{y - R}{r} \right)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

18.1.2.2 Skládání harmonických pohybů v kolmých směrech

Zmíníme se ještě o skládání **harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad y = B \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (18.1.41)$$



Obrázek 18.1.7: Cykloida: pro $B_2 \dots r = R$ je cykloida prostá; $B_3 \dots r > R$ cykloida prodloužená; $B_1 \dots r < R$ cykloida zkrácená; [cykloida.m]

Výsledný pohyb vytváří zajímavé geometrické tvary známé pod názvem Lissajousovy obrazce. Jejich vzhled závisí na poměru frekvencí a na fázovém úhlu [SOo2].

Označíme fázi kmitů ve směru x jako $\omega t + \varphi_{01} = \varphi$, rozdíl fází obou kmitů jako $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \delta$. Dále vyloučíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Máme

$$\sin \varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi + \delta) = \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta = \frac{y}{B} \quad (18.1.42)$$

odkud

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sin \delta} \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \delta \right) \quad (18.1.43)$$

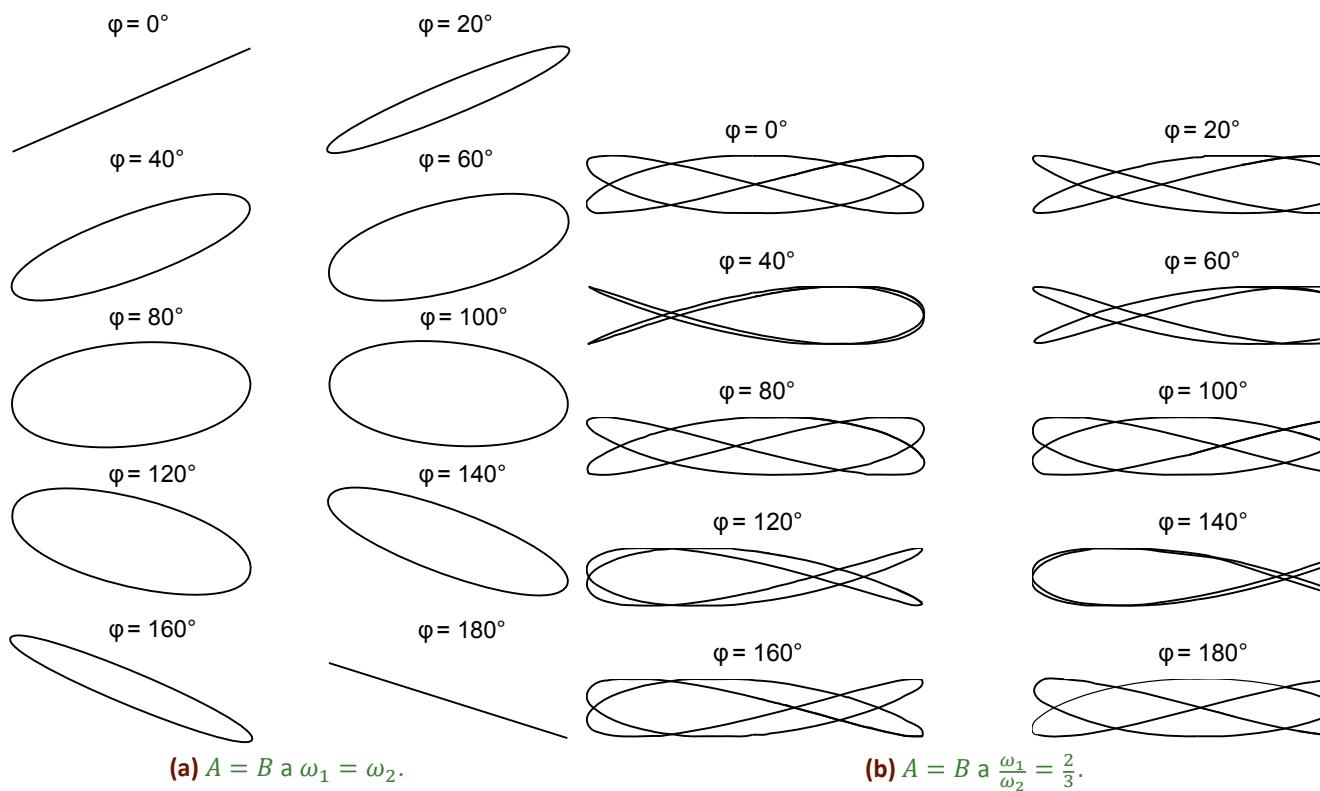
Sečteme-li nyní $\sin^2 \varphi$ a $\cos^2 \varphi$, dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (18.1.44)$$

V závislosti na δ může tato rovnice odpovídat rovnici úsečky, nebo elipsy. Je-li $\delta = n\pi$, probíhají kmity po úsečce, jejíž přímka má směrnici $k = \pm \frac{B}{A}$, je-li $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$, je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (18.1.45)$$

Jsou-li amplitudy obou pohybů stejné, přejde pro $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$ elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých pohybů o stejných frekvencích se setkáváme nejen



Obrázek 18.1.8: Trajektorie harmonických pohybů $x = A \sin(\omega_1 t)$ a $y = B \sin(\omega_2 t + \varphi)$ v kolmých směrech

v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 18.1.8a a obr. 18.1.8b [Što95].

Jsou-li úhlové frekvence kolmých pohybů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce** viz 18.1.8b. Program ukazuje, jak se projevuje změna fázového úhlu při daném poměru frekvencí obou pohybů.

```

1 % Lissajousovy obrazce - vliv fazoveho uhlu
2 %
3 % neni - li pomer frekvenci racionalni cislo
4 % neni krivka uzavrena
5 clear
6 t = 0:0.01:7; i = 0;
7 omega1 = 2; omega2 = 3; % frekvence
8 A = 1; B = 1; % amplitudy
9
10
11 for fi = 0:pi/9:pi
12     x = A*sin(omega1*t); % 1. pohyb

```

```
13      y = B*sin(omega2*t + fi);           % 2. pohyb
14      i=i+1; fi=fi*180/pi;             % prevod na stupne
15      subplot(5,2,i);
16      plot(x,y,'r');
17      axis('off');
18      title(['\phi_i=',num2str(fi),'\circ']);
19 end
```

Výpis 18.2: Lissajous.m vykreslí skládání harmonických pohybů v kolmých směrech.

Kapitola 19

Dynamika částice

Příklad 19.0.3. Dělová koule o hmotnosti $m = 24 \text{ kg}$ opustila hlaveň rychlostí $v = 500 \text{ ms}^{-1}$ v čase $\tau = 0.008 \text{ s}$ po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavni? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

Řešení:

- Délka hlavně: $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v\tau = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0.008 = 2 \text{ m}$
- Síla působící na kouli: $F = m\frac{v}{\tau} = 24 \cdot \frac{500}{0.008} = 1.5 \times 10^6 \text{ N}$
- Vykonaná práce při urychlování koule: $A = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \times 10^6 \text{ J}$

Příklad 19.0.4. Dráha střely s ohledem na odpor prostředí.

Řešení:

Část VII

Teorie elektromagnetického pole

Kapitola 20

Spojité matematické modely polí

Obsah

20.1 Elektrický náboj	159
20.1.1 Vlastnosti elektrického náboje	159
20.2 Působení na dálku versus teorie pole	160
20.3 Elektromagnetické pole	161
20.3.1 Základní pojmy teorie elektromagnetického pole	161
20.3.2 Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky	162
20.3.3 Maxwellovy rovnice	165
20.4 Elektrostatické pole	166
20.5 Stacionární proudové pole	167
20.5.1 Elektrický proud v kovových vodičích	167
20.5.2 Práce a výkon elektrického proudu	172
20.5.3 Ohmův zákon	172
20.5.4 Elektromotorické napětí	176
20.6 Stacionární magnetické pole	177

20.6.1 Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí	182
20.6.2 Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru .	186
20.6.3 Rovnice pro magnetický potenciál	189

20.1 Elektrický náboj

20.1.1 Vlastnosti elektrického náboje

Na základě pokusů s elektřinou víme, že některá tělesa (například skleněná či ebonitová tyč po předchozím tření) mohou za určitých podmínek silově působit na jiná tělesa. Toto silové působení se vysvětluje přítomností elektrických nábojů. Elektrický náboj představuje pro nás výchozí fyzikální veličinu, přičemž mírou jejího množství a rozložení na příslušných tělesech je právě silové působení mezi nimi. Elektrický náboj je veličinou skalární, podobně jako hmotnost, a k jeho určení postačí jediná (reálná) číselná hodnota. Skutečnost, že síly elektrického působení mezi tělesy mohou být jak přitažlivé, tak odpudivé vysvětlujeme tím, že elektrický náboj může nabývat kladných i záporných hodnot - tělesa se souhlasným znamením náboje se přitom odpuzují, tělesa s nesouhlasným znamením náboje se přitahují. Tělesa, která nesou elektrický náboj nazýváme *kladně* či *záporně nabité*, tělesa o nulovém náboji jsou elektricky *neutrální*, nenabité. Často se setkáváme s případem, kdy na tělesech jsou odděleně rozloženy kladné a záporné elektrické náboje o téže absolutní hodnotě. Taková tělesa budou také elektricky silově působit, přestože jejich celkový elektrický náboj je nulový. Říkáme jim *polarizovaná*.

O přítomnosti elektrického náboje se přesvědčujeme pouze na základě jeho silového projevu. Znamená to, že existenci jednoho jediného náboje bychom nemohli nijak odhalit. Kdyby existovaly pouze dva náboje, mohli bychom určit, zda jsou souhlasného či nesouhlasného znamení, nemohli bychom však rozhoudnout ani o znamení, ani o velikosti těchto nábojů. Teprve jsou-li k dispozici alespoň tři náboje, můžeme jeden z nich vybrat jako jednotkový a kladný a ze silového působení určit velikost a znamení druhých nábojů.

1

¹Co je vlastní podstatou elektrického náboje nevíme. Na základě poznatků současné mikrofyziky jej můžeme považovat za jednu z vlastností elementárních částic, která podmiňuje jejich vzájemné působení. Rozlišujeme čtyři základní typy vzájemného působení (*interakce*) mezi elementárními částicemi: gravitační, slané elektromagnetické a silné. Gravitační interakce je univerzální a týká se všech částic. Setkali jsme se s ní v mechanice, její velikost udává Newtonův gravitační zákon a její podstatu se snaží objasnit obecná teorie relativity. Slabá interakce se projevuje u některých typů radioaktivního rozpadu za účasti neutrina. Podobně elektromagnetická interakce se uplatňuje mezi elementárními částicemi a jednou z jejích charakteristik je náboj. Silná interakce existuje mezi částicemi, které nazýváme hadrony, a drží pohromadě atomové jádro, které by se jinak odpudivými elektrickými silami působícími mezi protony musely rozdělit.

Současný rozvoj mikrofyziky naznačuje, že hadrony, které jsme dříve považovali za elementární, mají svoji strukturu a komponenty. Předpokládáme o nich, že jsou tvoreny tzv. kvarky. Na současné úrovni vystupují tedy jako elementární kvarky a lepotny (k nim patří elektron, mion, tauon a odpovídající neutrina), jejich antičástice a dále pak částice, které zprostředkovávají interakci mezi nimi

20.2 Působení na dálku versus teorie pole

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci *Jamese Clerka Maxwella* "Pojednání o elektřině a magnetismu". Maxwell založil svojí teorii z větší části na intuitivních úvahách *Michaela Faradaye*. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovateli interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu "působení na dálku", který předcházel teorii pole.

Co je "působení na dálku"? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše díky své přítomnosti. Jakékoli vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlosť šíření zprostředkovovaného přenosu. To je známo jako "silové působení na dálku", protože kromě objektů působících na sebe "silou" a "vzdáleností" mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námitky proti modelu "působení na dálku", protože odporoval jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit *prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícím se v prostoru mezi objekty*.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (médium) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlostí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled "teorie pole" se tak vyhýbá pojmu "působení na dálku" a nahrazuje jej pojmem "působení nepřetržitým kontaktem". Tento "kontakt" je způsoben tlakem nebo "polem" indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetizmu byla první teorií pole. Na závěr uvedeme definici pojmu "pole", vystihující předchozí ideje:

Definice 20.2.1. *Fyzikální pole jsou vesměs zprostředkovateli vzájemného působení (interakcí) mezi hmotnými objekty. Např. elektromagnetické pole je specifická forma hmoty. Základní vlastnosti má společné s ostatními formami hmoty: je objektivní realitou existující nezávisle na našem vědomí, přísluší mu určitá energie, hmotnost a hybnost, přičemž pro tyto veličiny platí zákony zachování, má kvantovou strukturu (elementární částice elektromagnetického pole se nazývají fotony) a stejně jako ostatní elementární částice mohou projevovat též vlnový charakter. Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem elektromagnetických interakcí v makroskopickém i mikroskopickém měřítku a přitom však může existovat i mimo látkové objekty samostatně ve formě elektromagnetického vlnění.*

20.3 Elektromagnetické pole

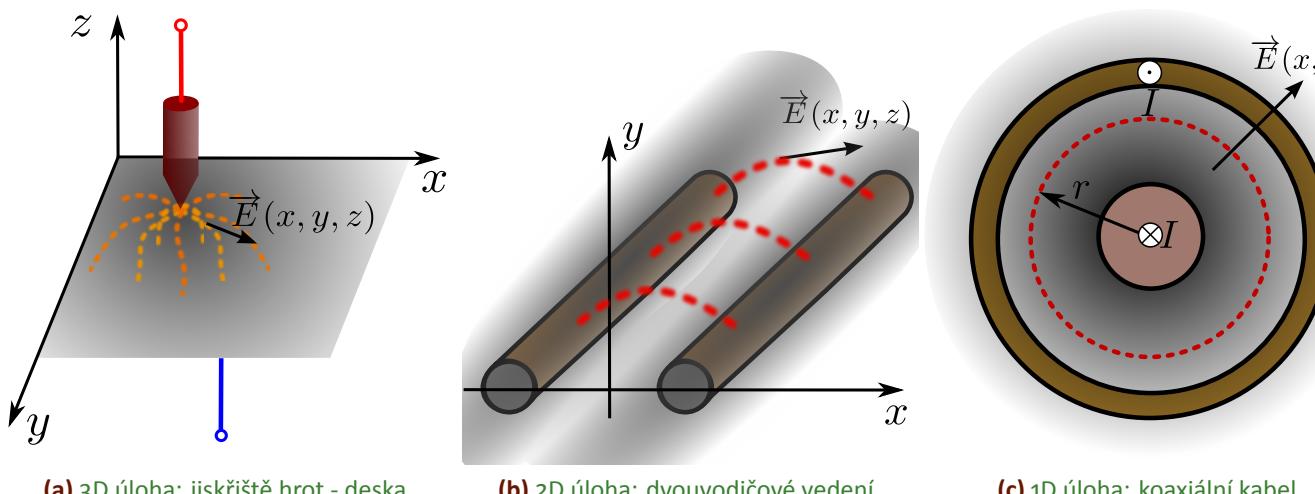
20.3.1 Základní pojmy teorie elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole je rozloženo v prostoru a může se měnit s časem. Veličiny, které toto pole popisují jsou obecně funkci času a tří geometrických souřadnic. Podle časového průběhu rozlišujeme:

1. *pole časově neproměnné*: jsou-li náboje v klidu, budeme hovořit o poli *statickém*, jsou-li v rovnoměrném pohybu (tj. tvoří-li stejnosměrný proud), jde o pole *stationární*.
2. *pole časově proměnné* čili *nestacionární*: jestliže se elektromagnetické pole mění s časem relativně pomalu, nazýváme jej *kvazistacionárním*. Jestliže se mění s časem periodicky, říkáme, že je v *ustáleném stavu*. Speciální případy jsou:
 - *harmonický ustálený stav*: pole se časem mění podle sinové nebo kosinové funkce
 - *neustálený (přechodný) stav*: pole přechází z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tento případ nastane tehdy, když zdroje pole změní své parametry, resp. svou polohu v prostoru.

Podle prostorového průběhu rozlišujeme:

1. *trojrozměrné*: (trojdimenzionální, prostorové pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi tří geometrických souřadnic (např. x, y, z). Označení: *3D pole*.
2. *dvojrozměrné*: (dvojdimenzionální pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi dvou geometrických souřadnic. Dvourozměrné pole je např. pole rovinné (je funkcií souřadnic x, y), nebo pole rotačně souměrné (je funkcií r, z). Označení: *2D pole*.
3. *jednorozměrné*: (jednodimenzionální pole), veličny charakterizující pole jsou funkciemi jedné geometrické souřadnice (např. x , nebo r). Označení: *1D*.
4. *homogenní*: veličiny charakterizující pole jsou v kterémkoliv bodě uvažované oblasti prostoru tytéž. (tj. jsou nezávislé na geometrických souřadnicích).



Obrázek 20.3.1: Příklad trojdimenzionálního a), dojdimenzionálního b) a jednodimenzionálního c), d) pole

20.3.2 Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

Elektrický náboj je *skalární veličinou*. Jednotkou je *coulomb [C]*. Má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$), avšak v technických aplikacích k tomu nepřihlížíme. Náboj Q může být rozložen:

- *prostorově* v objemu V s objemovou hustotou

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad [C \cdot m^{-3}] \quad (20.3.1)$$

- *plošně* na ploše S , s plošnou hustotou

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (20.3.2)$$

- *lineárně* na křivce l , s lineární hustotou

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad [C \cdot m^{-1}] \quad (20.3.3)$$

Rozlišujeme:

- **volné náboje**: mohou se přemisťovat v makroskopických vzdálenostech,
- **vázané náboje**: mohou se přemisťovat jen v mikroskopických vzdálenostech.

Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují); vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

Elektrický proud je znám z každodenního života, přesto je velmi důležité umět tento pojem vnímat jak pro označení „jevu“ (kap. 20.5.1), tak jako fyzikální veličinu, která tento jev kvantitativně popisuje (kap. 20.3.2). Elektrický proud je *skalární fyzikální veličina* ozn. I resp. i , jejíž jednotkou je základní jednotka soustavy SI: *ampér* – [A]. V této soustavě jednotek je ampér definován na základě silových účinků mezi dvěma vodiči, kterými prochází elektrický proud. Tato síla je magnetického původu, avšak magnetické pole vzniká jako důsledek pohybu elektrického náboje. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů.

Připojíme-li vodič ke zdroji elektrického napětí, elektrické pole uvnitř působí elektrickou silou na vodivostní elektrony, vyvolává jejich pohyb a tím vytváří elektrický proud, který je po krátké době *stacionární* (ustálený, nezávislý na čase). Jestliže vodičem projde náboj ΔQ resp. dQ za časový interval Δt resp. dt , lze definovat *průměrný* resp. *okamžitý* proud ve vodiči:

- **průměrný** elektrický proud:

$$I_{AV} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [A],$$

- **okamžitý** elektrický proud (který je limitním případem proudu průměrného, studujeme-li množství náboje, které projde průrezem vodiče za infinitezimální (nekonečně krátký) časový interval):

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad [A].$$

V ustáleném stavu protéká všemi průrezy vodiče stejně velký proud,

- speciálně pohybuje-li se náboj vodičem rovnoměrně, nazýváme proud **stejnosměrným**, $I(t) = \text{konst}$, a platí

$$I_{DC} = \frac{Q}{t} \quad [A]$$

Elektrický proud jako *jev* charakterizuje jednu z forem fyzikálního pohybu, kterou je **uspořádaný pohyb elektricky nabitéch částic** v látce. Přestože jakýkoliv elektrický proud je vždy tvořen pohybujícími se náboji, nemusí všechny pohybující se náboje vytvářet elektrický proud. Ve vodiči dochází ke vzniku trvalého elektrického proudu za těchto podmínek:

- vodič se musí nacházet v trvalém elektrickém poli, což je realizováno pomocí tzv. *zdroje* (generátoru) elektrického napětí,
- ve vodiči musí být přítomny volné nosiče elektrického náboje.

Podle charakteru vnějšího elektrického pole lze rozlišit tři základní druhy proudů:

- **stejnosměrný** proud vzniká tehdy, jestliže má intenzita elektrického pole konstantní orientaci,
- **střídavý** proud ve vodiči vytváří vnější elektrické pole, jehož intenzita periodicky mění svou orientaci na opačnou,
- **stacionární** stejnosměrný proud vzniká ve vodiči, je-li intenzita elektrického pole konstantní co do velikosti, směru i orientace.

Nabité částice představující volný náboj ve vodičích jsou v neustálém chaotickém tepelném pohybu (viz molekulová fyzika a termodynamika). Jedná se o *mikroskopický pohyb*, který nemá za následek makroskopicky pozorovatelné přemístění náboje. Pokud ve vodiči vytvoříme elektrické pole, tepelný pohyb nabitéch částic neustane, ale k náhodné složce rychlosti přibude ještě složka rychlosti ve směru vloženého pole.

Při studiu elektrického proudu v kovových vodičích se zabýváme ustálenými proudy vodivostních elektronů, které v kovu vytváří tzv. *elektronový plyn*. Tyto vodivostní elektrony jsou téměř volné a pohybují se v poli kladných iontů uspořádaných v krystalové mřížce.

Experimentálně lze elektromagnetické pole prokázat silovým působením na elektricky nabité částice. Celkovou sílu \vec{F} lze rozložit na elektrickou sílu \vec{F}_e , nezávislou na tom, zda je nabité částice v klidu nebo v pohybu vůči vztažné soustavě a na magnetickou sílu \vec{F}_m , působící jen na pohybující se částice. Elektromagnetické pole má tedy dvě složky: **elektrické pole**, působící na náboj silou \vec{F}_e a **magnetické pole**, působící na pohybující se náboj silou \vec{F}_m [Mayo1, s. 13].

Intenzita elektrického pole \vec{E} je vektorovou veličinou charakterizující *elektrické pole*. Je definována jako **síla působící na nepohybující se jednotkový bodový náboj**:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (20.3.4)$$

kde \vec{F}_e je elektrická síla působící na náboj Q .

Magnetická indukce \vec{B} je vektorovou veličinou charakterizující *magnetické pole*. Je definovována vztahem

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad [T] \quad (20.3.5)$$

kde \vec{F}_m je magnetická síla působící na náboj Q pohybující se rychlostí \vec{v} . Jednotkou je *tesla* [T].

Síla, jež působí elektromagnetické pole na pohybující se náboj se nazývá **Lorentzova síla**

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [N] \quad (20.3.6)$$

20.3.3 Maxwellovy rovnice

Makroskopická teorie elektromagnetického pole v klasickém pojetí vychází ze základních zákonů vyjádřených *Maxwellovými rovnicemi* (MR). Lze je zapsat buď v **integrálním**, nebo **diferenciálním tvaru**. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté prostorové oblasti Ω , kdežto v diferenciálním tvaru ve vnitřním bodě této oblasti. Soustavu vlastních MR představují první čtyři páry rovnic; často se k nim připojuje jako další základní rovnice elektromagnetického pole rovnice kontinuity pro vodivý proud. Její integrální a diferenciální tvar reprezentují poslední dvě rovnice.

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot } \vec{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (20.3.7)$$

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20.3.8)$$

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho_v \quad (20.3.9)$$

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (20.3.10)$$

$$\int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{div } \vec{J} = -\frac{d\rho_v}{dt} \quad (20.3.11)$$

Předpokládá se, že všechny křivky a plochy v integrálním tvaru MR jsou po částech hladké a všechny integrované veličiny jsou po částech spojité funkce. Pak je zaručena existence integrálů v těchto rovnicích. V diferenciálním tvaru MR se předpokládají pouze **regulární body** oblastí, což jsou body, v nichž jsou veličiny \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} a \mathbf{H} spojité a spojité differencovatelné funkce; nejsou jimi tedy např. body rozhraní dvou různých prostředí, v elektrickém poli body v nichž jsou umístěny diskrétní náboje, v magnetickém poli body proudových vláken atd.

20.4 Elektrostatické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou elektrické náboje. Náboje se nepohybují (tj. nedochází k elektrickému proudu) a tedy nevzniká magnetické pole. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
3. MR	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	$\text{rot } \vec{D} = \rho$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$		

Tabulka 20.4.1: Základní rovnice elektrostatického pole

20.5 Stacionární proudové pole

V elektrostatice (tj. elektrickém poli nepohybujících se nábojů) neexistuje trvalý elektrický proud. Zdroje napětí (galvanické články, termočlánky, dynama aj.) mají tu vlastnost, že na jejich záporné svorce je trvale nadbytek elektronů, a na jejich kladné svorce jejich nedostatek. Těmito zdroji můžeme ve vodiči trvale udržovat elektrické pole a tedy i tok nosičů elektřiny. Jestliže se *náboje pohybují konstantní rychlostí*, hovoříme o *stacionárním elektrickém proudu*. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
Zákon kontinuity	$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div } \vec{J} = 0$
Ohmův zákon	$I = GU = \frac{U}{R}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$

Tabulka 20.5.1: Základní rovnice stacionárního proudového pole

20.5.1 Elektrický proud v kovových vodičích

V předchozí kapitole 20.3.2 bylo o elektrickém proudu pojednáváno jako o skalární fyzikální veličině. V této kapitole nás bude zajímat makroskopický pohled na „jev“ známý jako *elektrický proud*.

Zopakujme, že elektrickým proudem je méněn uspořádaný pohyb elektrických nábojů, a aby se tyto náboje mohly pohybovat, musí být volné - jsou přítomny v látkách, které nazýváme **vodiče**. Vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (elektrony v kovech, uhlíku a v polovodičích) anebo obojí znaménka (kladné a záporné ionty v elektrolytech, ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Volné nositele náboje (elektrony, ionty) lze rovněž oddělit od těchto látek (vodičů) a vytvořit elektrický proud ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Z vodičů mají největší význam **kovy**, které jsou polykrystalickými látkami s kovovou vazbou. Každý mikroskopický monokrystal kovu má pevnou krystalovou mříž sestavenou z kladných iontů, mezi nimiž se přetržitě pohybují *volné elektrony* rychlostmi, jejichž velikost je statisticky proměnná (co do velikosti i směru). Střední hodnota rychlosti (jako vektoru) všech elektronů je nulová. Střední hodnota rychlosti určitého elektronu je závislá na teplotě vodiče. Elektrony konají tzv. *termický pohyb*. Rychlosti neuspořádaných termických pohybů dosahují jen o několik řádů větších hodnot, než kmity iontů v krystalech mřížky.

Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. ke galvanickému článku), začne statisticky převládat uspořádaný pohyb nosičů kladného (záporného) náboje ve směru (proti směru) vnějšího pole nad termickým pohybem, což v makroskopickém měřítku pozorujeme jako **makroskopický elektrický proud**. Jsou-li ve vodiči přítomny nosiče náboje obou polarit, dojde k pohybu ve vzájemně opačných směrech, přičemž směr toku nosičů kladného náboje se historicky ztotožňuje se směrem toku elektrického proudu. U kovových vodičů je tedy směr proudu právě opačný, než směr toku elektronů, jenž tento elektrický proud tvoří.

Velikost (intenzitu) proudu posuzujeme podle velikosti náboje obojí polarity, který projde určitým průřezem vodiče ve vzájemně opačných směrech za jednotku času. Projde-li průřezem vodiče celkově náboj dQ za čas dt , bude tok náboje vodičem charakterizovat skalární veličina

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A], \quad (20.5.1)$$

která se nazývá **elektrický proud** ($1C \cdot s^{-1} = 1A$ čteno *ampér*). Tato jednotka patří mezi základní jednotky SI soustavy.

Pro *stacionární* (tj. časově neproměnný - ustálený) proud můžeme obecný výraz 20.5.1 nahradit rovnicí

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (20.5.2)$$

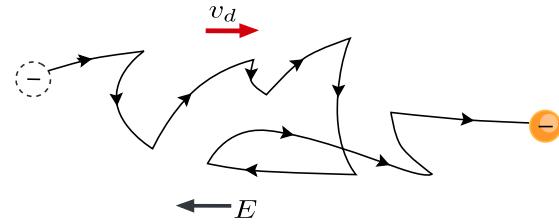
Jedná-li se o rovnoměrný pohyb bodového náboje Q po kružnici s periodou T , resp. s úhlovou rychlostí ω , můžeme vzniklý ustálený proud vyjádřit rovnicí

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}. \quad (20.5.3)$$

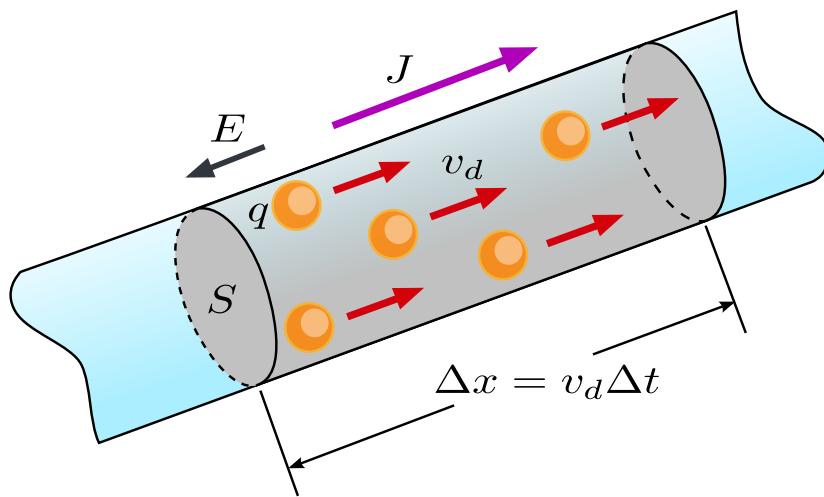
Bude-li se element náboje dQ pohybovat v lineárním útvaru rychlostí $v = \frac{dQ}{dt}$, bude po dosazení do rov. 20.5.1 reprezentovat elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl} v = \tau v, \quad (20.5.4)$$

kde τ je *délková hustota* náboje a v je velikost *okamžité rychlosti* náboje v uvažovaném místě lineárního útvaru.



Obrázek 20.5.1: Pohyb elektronu ve vodiči. Fyzikálně je v_d průměrná rychlosť nosičů náboje uvnitř vodiče, ktorý je vložen do vnějšího elektrického pole. Ve skutečnosti sa ale elektron vodiči nepohybuje po príme, jeho pohyb je chaotický.



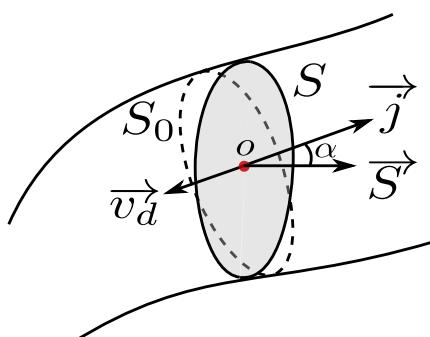
Obrázek 20.5.2: Směr elektrického proudu byl implicitně stanoven jako směr pohybu kladných nábojů. Nositeli elektrického náboje uvnitř vodičů jsou ovšem záporně nabité volné elektrony, které se tedy dle konvence pohybují proti směru elektrického proudu. Elektrický proud může protékat pevnými látkami (kovy, polovodiči), kapalinami (elektrolyty) a ionizovanými plyny. Látky, které nevedou elektrický proud, nazýváme nevodiči, izolanty

Elektrický proud je veličina, která obecně popisuje prostorový jev. Omezíme se nyní na běžný případ vodiče, jako je na obr. 20.5.2, který má volné náboje jen jedné polarity (u kovových vodičů jde o elektrony) a označme ρ_0 prostorovou hustotu volného náboje a v_d velikost usměrněné rychlosti jejich nositelů (elektronů). Pak za čas dt projde průřezem o obsahu S_0 ($S_0 \perp v_d$) náboj $dQ = \rho_0 S_0 v_d dt$. Elektrický proud vyjádřený rov. 20.5.1 můžeme přepsat do tvaru

$$I = \rho_0 S_0 v_d = -e n_0 S_0 v_d, \quad (20.5.5)$$

kde $n_0 = \frac{\rho_0}{-e}$ je počet nositelů volného náboje (tj. v našem případě elektronů, z nichž každý nese náboj $-e$ v jednotkovém objemu vodiče, přičemž pro elektrony zřejmě je $\rho_0 < 0$).

Rovinnou plochou S průřezu můžeme zavést jako vektor $\nu r S$, který má směr daný normálou k ploše a pravidlem pravé ruky (ukazují-li prsty pravé ruky směr oběhu po hraniční křivce plochy, ukáže palec směr plochy jako vektoru \mathbf{S}). Protože driftová rychlosť v_d je také vektor, nebudeme obecně



Obrázek 20.5.3: Rovinná plocha $S = S_0 \cos \alpha$

uvažovat vektory \mathbf{S}, \mathbf{v}_d o stejném směru a rovnici 20.5.5 přepíšeme do obecnějšího tvaru

$$I = \rho_0 \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{v}_d = jS \cos \alpha = jS_0, \quad (20.5.6)$$

kde $S_0 = S$ pro $\alpha = 0$ (viz obr. 20.5.3) a

$$\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{v}_d, \quad (20.5.7)$$

je proudová hustota. Je to vektor o velikosti

$$j = \frac{I}{S \cos \alpha} = \frac{I}{S_0} \quad A \cdot m^{-2}, \quad (20.5.8)$$

obecněji

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (20.5.9)$$

a o směru vektoru driftové rychlosti nositelů kladného náboje. Pro případ nositelů volného náboje - elektronů má proudová hustota opačný směr než driftová rychlosť v_d (obr. 20.5.3).

Velikost vektoru \mathbf{j} má význam plošné hustoty elektrického proudu v uvažovaném místě průřezu. Jednotkou je $A \cdot m^{-2}$.

Nebude-li proudová hustota na uvažovaném průřezu konstantní, bude celkový elektrický proud procházející průřezem o obsahu S dán integrálem

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (20.5.10)$$

Příklad 20.5.1. Driftová rychlosť elektronů ve vodiči: *Vodičem z jednomocné mědi o průřezu $S_0 = 1 \text{ mm}^2$ prochází elektrický proud $I = 5 \text{ A}$. Vypočítejte:*

- počet volných elektronů v jednotkovém objemu Cu,
- úhrnný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu,
- driftovou rychlosť volných elektronů při proudu I.

Měd má poměrnou atomovou hmotnost $A_r = 63,54$ a hustotu² $s = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení:

- Jeden mol mědi o molové hmotnosti $M = 0,06354 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ a o molovém objemu

$$V_m = \frac{M}{s} = \frac{63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{8,93 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} = 7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

obsahuje $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23}$ jednoatomových molekul Cu na jeden mol, z nichž každý má volný jeden (valenční) elektron. Tedy počet volných elektronů v jednotkovém objemu je

$$n_0 = \frac{N_A}{V_m} = \frac{s N_A}{M} = \frac{6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

- Úhrnný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu mědi je

$$Q_v = -e \cdot n_0 = -1,36 \cdot 10^{10} \text{ Cm}^{-3}.$$

- Velikost driftové rychlosti určíme ze vztahu $I = -en_0v_dS_0 = -Q_vv_dS_0$ tj.

$$v_d = \left| \frac{I}{Q_v S_0} \right| = \frac{5}{1,36 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{C} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{Cm}^{-3} \cdot \text{m}^2} = 3676 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,3676 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Z provedených výpočtů si můžeme udělat názor o mikroskopických poměrech v kovových vodičích: počet volných nositelů náboje - elektronů a jejich úhrnný náboj v jednotkovém objemu je značný a proto driftová rychlosť elektronů potřebná k vyvolání proudu běžné velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá (doslova hlemýždí).

Příklad 20.5.2. Elektricky neutrální měděná mince o hmotnosti $m = 3,11 \text{ g}$ obsahuje stejně množství kladného a záporného náboje. Jaké je velikost kladného (nebo záporného) náboje obsaženého v minci?

Řešení:

Neutrální atom má záporný náboj $Z \cdot e$, představovaný jeho elektryny a kladný náboj o stejné velikosti představovaný protony v jádře. Pro měd je atomové číslo Z rovno 29, tj. atom mědi má 29 protonů, a je-li elektricky neutrální, také 29 elektronů.

²Pro hustotu budeme používat alternativní značku s , s ohledem na kolizi značky ρ , jež označuje hustotu náboje.

Náboj o velikosti Q_v , který hledáme je roven NZ_e , kde N je počet atomů obsažených v jednom molu (Avogadrova konstanta: $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Počet molů mědi v minci $\frac{m}{M}$, kde $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotností mědi:

$$N = N_A \cdot \frac{m}{M} = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \frac{3,11 \text{ g}}{63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2,95 \cdot 10^{22}.$$

Velikost celkového kladného (záporného) náboje v minci je pak

$$Q_v = NZ_e = 2,95 \cdot 10^{22} \cdot 29 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 137039 \text{ C}$$

To je obrovský náboj. Pro srovnání: třeme-li ebonitovou tyč vlněnou látkou, můžeme na tyč přemístit steží náboj o velikosti 10^{-9} C .

20.5.2 Práce a výkon elektrického proudu

Příklad 20.5.3. Za jakou dobu uvede ponorný vodič o příkonu 600 W do varu 1 l vody o počáteční teplotě 20°C . Uvažujte měrnou teplou kapacitu vody $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Výměnu tepla s okolím neuvažujte.

Řešení:

Pro var vody bude zapotřebí tepla dle rovnice $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$. Potřebná elektrická práce je $Q_e = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$ a tedy dobu ohřevu stanovíme z rovnice:

$$\begin{aligned} P \cdot t &= m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{m \cdot c}{P} \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{1 \cdot 4200}{600} \cdot (100 - 20) \\ t &= 560 \text{ s} \end{aligned}$$

20.5.3 Ohmův zákon

Uvažujme vodič u něhož jsou volnými nositeli náboje *elektrony*. Nyní v mezích klasické mechaniky kvantitativně popíšeme mechanismus vedení proudu, který povede k všeobecně známému **Ohmovu zákonu**

Umístíme-li vodič do elektrického pole o intenzitě \vec{E} (např. připojením ke galvanickému článku), působí na každý volný elektron síla $\vec{F} = -e\vec{E}$, která mu podle Newtonova zákona udělí zrychlení $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}$ proti směru vnějšího pole. Tím získávají chaoticky

se pohybující elektrony ještě složku rychlosti v protisměru vloženého elektrického pole \vec{E} a dojde tedy k usměrnění driftového pohybu volných elektronů a v souladu s kapitolou 20.5.1 pozorujeme, že ve vodiči vznikl makroskopický elektrický proud.

Pohyb elektronu se ovšem neobejde bez sňážek s ionty v krystalové mřížce. Dráhu, kterou se elektronu podaří urazit, nazýváme *volnou dráhou* d . Průměrná doba mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami nechť je τ za tuto dobu se bude elektron rovnoměrně urychlovat a těsně před následující srážkou jeho rychlosť dosáhne maxima tj. $\vec{v}_{max} = \vec{a} \cdot \tau$. Nás ovšem zajímá průměrná rychlosť (*driftová rychlosť*) na volné dráze průměrné velikosti:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{v}_{max}}{2} = -\frac{e\tau}{2m_e}\vec{E} \quad (20.5.11)$$

Proudová hustota 20.5.7 bude

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{v}_d = -en_0 \vec{v}_d = -\frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \vec{E} \quad (20.5.12)$$

Koefficient úměrnosti

$$\gamma = \frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \quad (20.5.13)$$

je závislý na počtu nositelů (elektronů) n_0 v jednotkovém objemu a na době τ , neboli na délce volné dráhy. Veličina γ se nazývá *měrná elektrická vodivost* neboli **konduktivita látky**. Protože dobu τ nelze přímo měřit, určuje se γ experimentálně. Přitom se zjišťuje, že pro určitou teplotu zkoumané látky je γ konstantní.

Po zevedení pojmu měrná elektrická vodivost látky 20.5.13, můžeme výraz 20.5.12 přepsat do výsledného tvaru

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (20.5.14)$$

který se v literatuře označuje jako *Ohmův zákon v diferenciálním tvaru* (i když se v pravém slova smyslu o diferenciální tvar nejedná). Výstižnější je označení *lokální tvar Ohmova zákona*, protože výraz 20.5.14 se vztahuje na určité místo, resp. bod, vodivého prostředí. Vztah říká, že proudová hustota v určitém bodě vodivého prostředí je přímo úměrná intenzitě vloženého elektrického pole v tomto bodě (platí pro určitou teplotu prostředí).

Uvažujme nyní lineární homogenní vodič délky l a příčného průřezu o obsahu S_0 , připojený ke zdroji o napětí U . Pak intenzita pole uvnitř vodiče bude mít konstantní velikost $E = \frac{U}{l}$. Dosadíme-li za velikost proudové hustoty $j = \frac{I}{S_0}$ do 20.5.14, dostaneme vztah

$$\frac{I}{S_0} = \gamma \frac{U}{l}, \quad (20.5.15)$$

z něhož vyplývá známý vztah

$$U = \frac{l}{\gamma S_0} I = RI, \quad (20.5.16)$$

kde

$$R = \frac{l}{\gamma S_0} = \rho \frac{l}{S_0}, \quad (20.5.17)$$

je **elektrický odpor** uvažovaného lineárního vodiče, přičemž $\rho = \frac{1}{\gamma}$ je *měrný elektrický odpor (rezistivita)*³. Výraz 20.5.17 představuje klasický Ohmův zákon experimentálně objevený r. 1826 G. S. Ohmem. Jednotky:

- elektrický odpor: V A^{-1} ,
- měrný elektrický odpor: $\Omega \text{ m}$,
- měrná elektrická vodivost: $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Příklad 20.5.4. Zemnicí elektroda: Uvažujte zemnicí elektrodu ve tvaru koule o poloměru $a = 200 \text{ mm}$, uloženou do zeminy v hloubce, která je značně větší než je poloměr a . Pro jednoduchost řešení dále předpokládejte, že přívodní drát je od zeminy izolován (obr. 20.5.4). Zemina má měrnou vodivost $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Při zkratu teče přívodním drátem proud $I = 50 \text{ A}$. Vypočítejte:

(a) Závislost potenciálu $\varphi = \varphi(r)$ elektrického pole, které se vytvoří v zemině při zkratu, kde r je vzdálenost od středu elektrody. Potenciál normujte volbou $\varphi(\infty) = 0$.

(b) Zemnicí odpor elektrody, který je definován vztahem

$$R_z = \frac{U_z}{I_z},$$

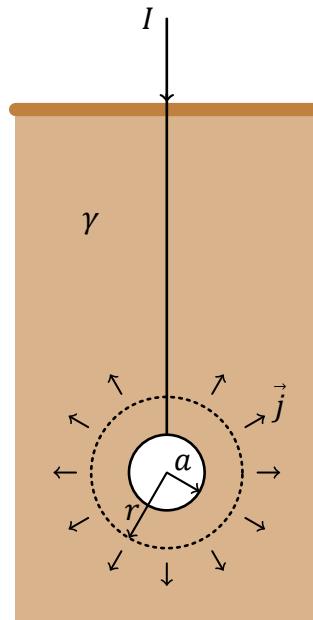
kde $U_z = \varphi(a) - \varphi(b)$ je zemnicí napětí

(c) Ztrátový výkon při zkratu.

Řešení: Ekvipotenciální a proudové plochy mají zřejmě kulový tvar se středem totožným s geometrickým středem elektrody. Proudová hustota na kulové ploše obecného poloměru r (viz. obr. 20.5.4) je

$$\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{n},$$

³Zde je další kolize značky ρ . Nyní se tomuto problému vyhneme využíváním pouze konduktivity, jenž se častěji používá v teorii elektromagnetického pole.



Obrázek 20.5.4: Zemnicí elektroda

kde \vec{n} je jednotkový vektor ve směru normály. Pak v bodech na této ploše musí být elektrické pole o intenzitě \vec{E} , kterou určíme ze vztahu

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{n}.$$

Závislost potenciálu $\varphi = \varphi(r)$ tohoto elektrického pole stanovíme pomocí následujícího integrálu kde integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky $\varphi(\infty) = 0$, odkud $C = 0$. Hledaná závislost potenciálu je

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma r}, \quad r \in (a, \infty).$$

Zemina, v níž je uložena elektroda, je vastně rezistorem, jehož jeden okraj tvoří elektroda a druhým okrajem je nekonečně rozlehý vodivý prostor. Potenciální rozdíl mezi těmito okraji je

$$U_z = \varphi(a) - \varphi(\infty) = \frac{I}{4\pi\gamma a},$$

odkud zemnicí odpor

$$R_z = \frac{U_z}{I} = \frac{I}{4\pi\gamma a} = 22,1 \Omega$$

a ztrátový výkon

$$P_z = R_z \cdot I^2 = 55,3 \text{ kW}.$$

20.5.4 Elektromotorické napětí

Uzavřený proudový okruh C , nechť je v dynamické rovnováze - prochází jím ustálený elektrický proud. Uvažujme pro jednoduchost představy kladný náboj - ten se musí pohybovat ve směru klesajícího potenciálu (záporný náboj ve směru stoupajícího potenciálu). Je-li okruh uzavřený, musí kladné náboje opět vystoupit na místo s vyšším potenciálem - musí se tedy pohybovat proti elektrostatickým silám. Proto proti úbytku

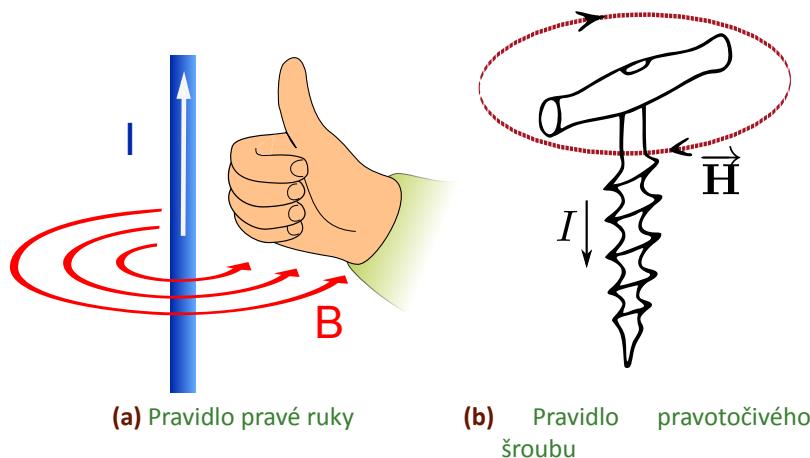
20.6 Stacionární magnetické pole

Zdrojem stacionárního magnetického pole jsou stejnosměrné proudy nebo permanentní magnety. Základní rovnice stacionárního magnetického pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
1. MR	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\text{rot } \vec{H} = \mathbf{J}$
4. MR	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$		

Tabulka 20.6.1: Základní rovnice magnetického stacionárního pole

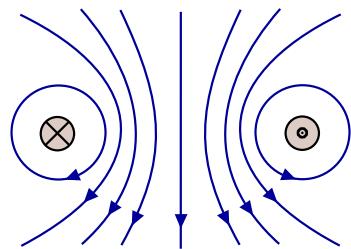
Směr vektoru \mathbf{H} se prakticky určí například *pravidlem pravotočivého šroubu*: vodič nahradíme šroubem (s pravotočivým závitem) a otáčíme jím tak, aby se pohyboval ve směru proudu; směr otáčení pak udává směr vektoru \mathbf{H} . Vše je názorně vysvětleno na obrázku 20.6.1b. Podobných pomůcek existuje více, např. *pravidlo pravé ruky*: vodič uchopíme do dlaně pravé ruky tak, aby palec ukazoval směr proudu; prsty pak ukazují směr vektoru \mathbf{H} , obr. 20.6.1a.



Obrázek 20.6.1: Určení směru vektoru \mathbf{H} : a) pravidlem pravé ruky; b) pravidlem pravotočivého šroubu

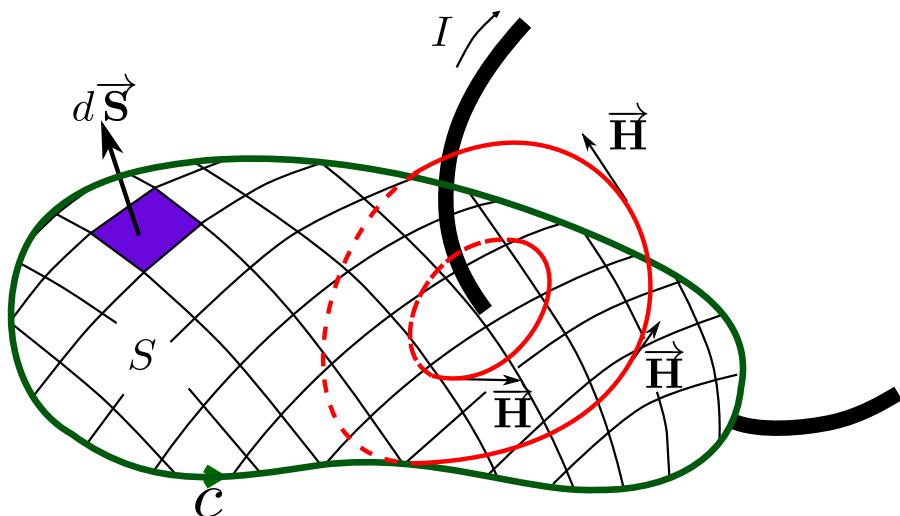
K procvičení téhoto pravidel je na obr. 20.6.2 vyznačen směr indukčních čar kruhového závitu. Označení \otimes vyjadřuje proud vstupující do nákresny (symbol letícího šípu od pozorovatele) a označením \odot proud vystupující z nákresny (symbol hrotu šípu).

Rovnice 20.6.1 představuje **zákon celkového proudu** vyjadřující, rovnost oběhového magnetické napětí na libovolné uzavřené orientované křivce c proudu, který je s křivkou c spřažen. "Spřaženým proudem" rozumíme proud, který prochází libovolnou plochou S , jež je ohraničena křivkou c , přičemž plocha S je orientována vůči křivce c pravotočivě (obr. 20.6.3). [Mayo1, s. 55].

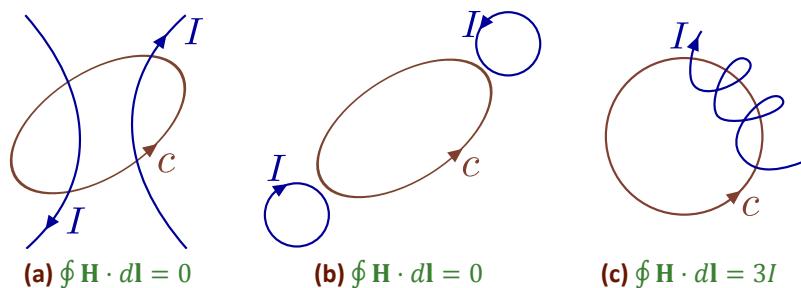


Obrázek 20.6.2: Indukční čáry kruhového závitu.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (20.6.1)$$



Obrázek 20.6.3: K zákonu celkového proudu



Obrázek 20.6.4: K pojmu "proud spřažený s křivkou" pro tři různé případy křivky c .

Základní úlohou řešení stacionárních proudových magnetických polí je určení rozložení veličin \mathbf{H} a \mathbf{B} v prostoru, je-li dáno prostorové a materiálové uspořádání a elek-

trické proudy vybuzují řešené magnetické pole.

V následujících úlohách se omezíme na analýzu jednodušších, souměrných magnetických polí v lineárním izotropním alespoň po částech homogenním prostředí. Pro zjednodušení budeme zanedbávat deformaci magnetického pole v okrajových oblastech a nebudeme uvažovat vliv blízkosti nesymetrického rozhraní a vliv blízkosti druhého zdroje magnetického pole. (Pro přesnější řešení by pak bylo nutné použít tzv. *metodu zrcadlení*.) Některá složitější pole lze rozdělit na několik jednodušších polí souměrného charakteru, resp. typického uspořádání. Vzhledem k tomu, že v předpokládaném lineárním prostředí ($\mu = \text{konst}$) platí pro stacionární magnetické pole *princip superpozice*, lze samostatně vyřešit nejpreve dílčí jednodušší pole jednotlivých prudů I_j a po jejich superpozici

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j(I_j), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j(I_j) \quad (20.6.2)$$

získáme výsledné pole celkového proudu [Kot99, s. 181].

Metodou přímé aplikace I. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru pro stacionární magnetické pole proudové

$$\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_c H \cos \alpha dl = I_c \quad (20.6.3)$$

lze jednoduše použít tehdy, je-li ze zadанé úlohy zřejmá taková symetrie pole, že lze z nekonečně mnoha uzavřených křivek, splňující rov. 20.6.3, nalézt takovou integrační dráhu c , která obepíná proud I_c vytvářející magnetické pole a v jejichž bodech platí podmínka

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = \text{konst}, \quad (20.6.4)$$

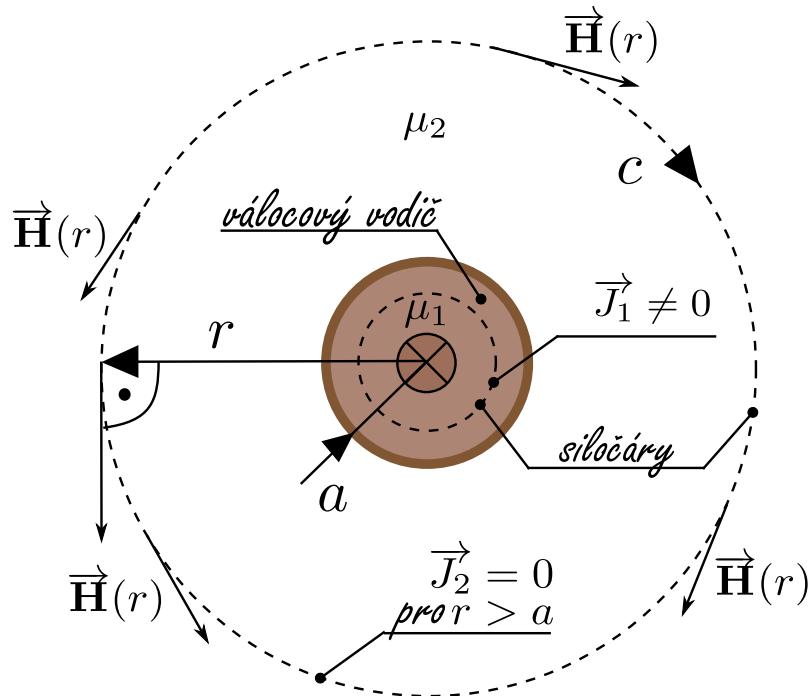
speciálně

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = 0. \quad (20.6.5)$$

Podmínka $\alpha = 0$, tj. $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{l}$ je identicky splněna na siločáře magnetického pole. Siločáry souměrných stacionárních magnetických polí splňují tedy podmínu 20.6.5 a řešení rovnice 20.6.3 při integraci po takovéto siločáře je jednoduché

$$\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \underbrace{\oint_c dl}_{l_c} = I_c \rightarrow H = \frac{I_c}{l_c} \quad (20.6.6)$$

kde l_c je délka integrační dráhy c splňující podmínu 20.6.5.



Obrázek 20.6.5: Pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

Klasickým případem takovéto úlohy je magnetické pole *dlouhého přímého válcového vodiče* o poloměru a , délky l protékaného proudem I rozloženým po průřezu souměrně kolem osy vodiče, tzn. obecně s hustotou $J = J(r)$. Z osové (rotační) symetrie vyplývá, že siločáry magnetického pole mají tvar soustředných kružnic se středem v ose vodiče, ležících v rovině kolmé na osu vodiče obr. 20.6.5. Úlohy proto řešíme ve válcových souřadnicích s osou z totožnou s osou vodiče. Za předpokladu, že průměr vodiče je zanedbatelný vůči jeho délce lze zanedbat deformaci pole vlivem konců válcového vodiče a přejít na rovinný problém v polárních souřadnicích. Z důvodu osové souměrnosti je však pole závislé jen na vzdálenosti r od osy vodiče tj.

$$H = H(r), \quad B = B(r).$$

Na kruhových siločárách je tedy splněna podmínka 20.6.5 a z l. Maxwellovy rovnice 20.6.3

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cos 0 \oint_C dl = I(r), \quad (20.6.7)$$

kde c je kružnice o poloměru r a proud $I(r)$ je dán rovnicí

$$I(r) = \int_{S(r)} \mathbf{J}(r) d\mathbf{S} = \int_0^r J(r) 2\pi r dr \quad (20.6.8)$$

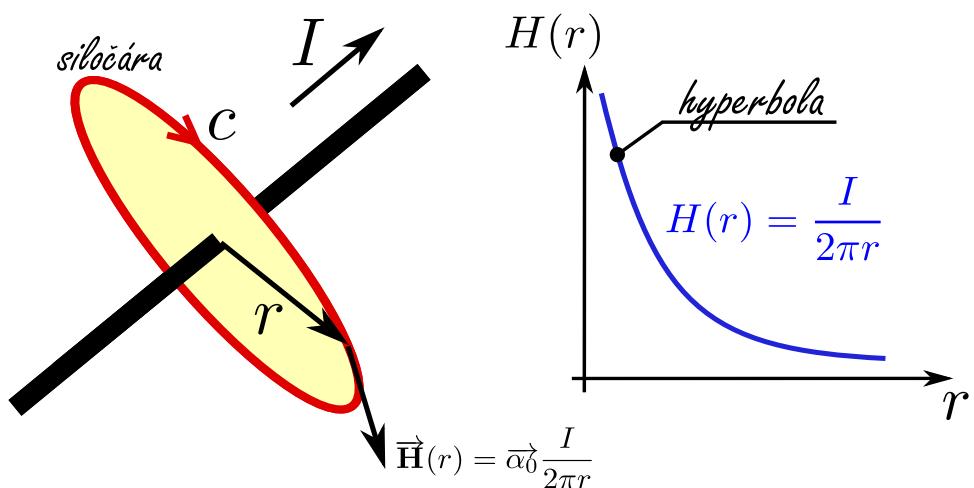
je proud protékající přes kruhovou plochu $S(r)$ ohraničenou kružnicí o poloměru r . Pak intenzita magnetického pole ve vzdálenosti r od osy vodiče má velikost

$$H = H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r}, \quad (20.6.9)$$

a magnetická indukce

$$B = B(r) = \frac{\mu I(r)}{2\pi r}, \quad (20.6.10)$$

přičemž μ je *permeabilita* v bodech na poloměru r . Magnetické pole v okolí kruhového přímého vodiče protékaného proudem I viz obr. 20.6.6 je tedy v souladu s předchozími úvahami dáno výrazy [Kot99, s. 183 - 185]:



Obrázek 20.6.6: Průběh intenzity magnetického pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

$$H = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}. \quad (20.6.11)$$

Jelikož 1. MR má nenulovou pravou stranu v magnetickém poli obecně není splněna nutná a postačující podmínka, aby magnetické napětí

$$\int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{m_{MN}} \quad [A] \quad (20.6.12)$$

nezáviselo na tvaru integrační cesty l z M do N . Tedy obecně nelze zavést *skalární magnetický potenciál*. Magnetické pole je tedy obecně **vírové (nepotenciální)**.

Všimněme si však speciálních případů, kdy pravá strana 1. MR je nulová a tedy magnetické pole bude **nevírové (magnetostatické)**. K tomu dochází buď v oblasti kde

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (20.6.13)$$

tj. takové v němž neexistuje uzavřená křivka c spřažená s nějakým proudem, nebo v takovém bodu, v němž platí

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = 0 \quad (20.6.14)$$

tj. v bodu v němž je $\mathbf{J} = 0$.

Analogicky jako v elektrostatice, lze pak zavést magnetický potenciál φ_m vztahem

$$\mathbf{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m. \quad (20.6.15)$$

Jednotkou φ_m je *ampér* [A]. Pro magnetické napětí mezi body M, N platí analogicky

$$U_{MN} = \int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varphi_m(M) - \varphi_m(N), \quad (20.6.16)$$

nezávisle na integrační cestě l .

20.6.1 Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí

Z předchozí kapitoly vyplývá, že intenzitu magnetického pole \mathbf{H} lze stanovit pomocí vztahu $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ tehdy, víme-li předem, že daným bodem prochází silová čára, na níž je intenzita pole konstantní, $H_s = \text{konst.}$ V tomto případě se křikový integrál změní v pouhý součin intenzity pole a délky silové čáry

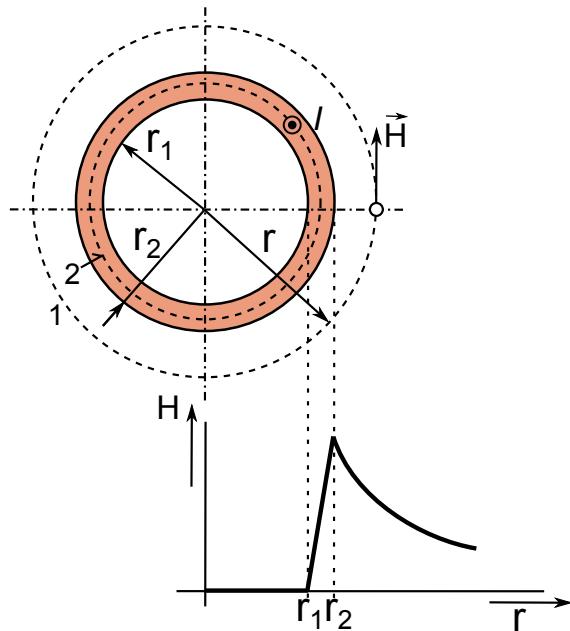
$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_s \oint_C d\mathbf{l} = H_s \cdot l_s \quad (20.6.17)$$

takže lze vypočítat intenzitu pole

$$H_s = \frac{I}{l_s}$$

pro body silové čary.

Tohoto postupu lze použít i tam, kde uvedená podmínka není splněna, avšak pole lze vyjádřit superpozicí dílčích polí, z nich každé tuto podmínu splňuje, viz příklad 20.6.2.



Obrázek 20.6.7: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého dutého válcového vodiče protékaného proudem

Příklad 20.6.1. Stanovte intenzitu magnetického pole $H = f(r)$ dlouhého dutého válcového vodiče podle obr. 20.6.7 při rovnoměrném rozložení proudu I po průřezu.

Vodič s rovnoměrně rozloženým proudem podle obr. 20.6.7 je rotačně souměrný podle své osy a tedy i jeho magnetické pole je souměrné. Silové čáry jsou soustředné kružnice, vektor \mathbf{H} , jenž má směr tečny ke kružnici, je po celé délce kružnice stejně velký. Lze tedy snadno použít integrálního tvaru 1. MR (zákon celkového proudu)

Pro body ležící vně vodiče obepíná kruhová integrační dráha (vedená po silové čáře 1) celý proud vodiče I a platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I \quad (20.6.18)$$

takže intenzita pole je

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (20.6.19)$$

Ve stěně dutého magnetického vodiče jsou silové čáry rovněž kružnice, neboť magnetické pole je i zde souměrné. Tyto siločáry však obepínají jen část proudu I' vodiče pro obě siločáry 2 platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I' = \pi(r^2 - r_1^2)J \quad (20.6.20)$$

kde J je hustota proudu ve vodiči

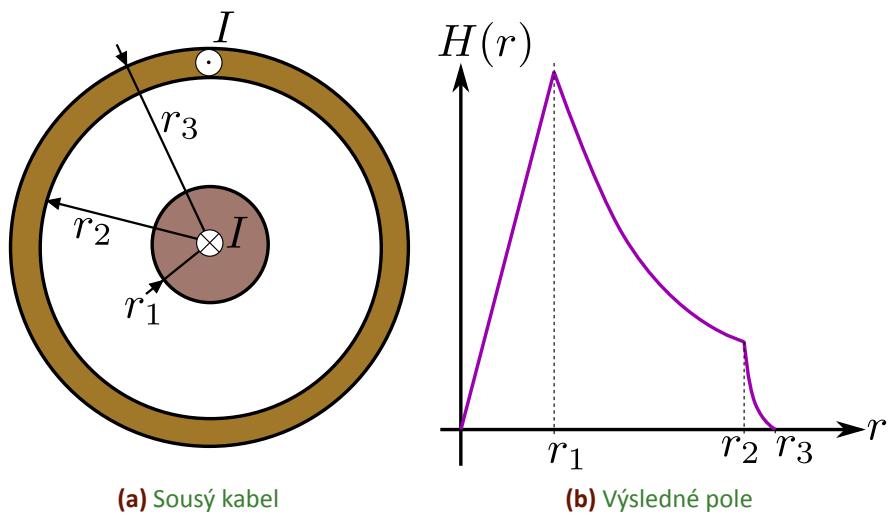
$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \quad (20.6.21)$$

Ve stěně vodiče je tedy intenzita pole

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (20.6.22)$$

V dutině vodiče je intenzita rovna nule. Vzhledem k souměrnosti pole by i zde muselo platit $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r$. Protože dráha s poloměrem $r < r_1$ neobepíná žádný proud, je $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ a tedy musí být $H = 0$.

Příklad 20.6.2. Stanovote intenzitu magnetického pole dlouhého sousého kabelu podle obr. 20.6.8a. Středním vodičem (žilou) prochází proud I a týž proud opačného smyslu prochází vnějším vodičem (pláštěm). Proud jsou rovnoramenně rozloženy po průřezech vodičů. Nakreslete graf průběhu $H = f(r)$ [DM70, s. 92], [Kot99, s. 195].



Obrázek 20.6.8: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého sousošího kabelu protékáného proudem: a) náčrt; b) $H = f(r)$

Řešení: Rovnici 20.6.17 aplikujeme na jednotlivé intervaly osově souměrného starionárního magnetického pole, přičemž se prakticky jedná o superpozici dvou polí. V oblasti $r < r_2$ se uplatňuje pouze pole vnitřního válcového vodiče (žily), pro $r > r_2$ přistupuje sousosé pole vnějšího trubkového vodiče.

- Pro oblast $r < r_1$ je vzhedem k

$$\begin{aligned} dI &= \mathbf{J}d\mathbf{S} \\ I(r) &= \int_S dI = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{S} = \int_S J \cos \beta dS \\ &= \left| \begin{array}{ll} \beta = 0 & H = \text{konst} \\ S = \pi r^2 & dS = 2\pi r dr \end{array} \right| = J \int_0^r 2\pi r dr = J\pi r^2 \end{aligned}$$

hledané řešení 1. MR dáno

$$\oint_C \mathbf{H}d\mathbf{l} = H_1 2\pi r = I(r) = J\pi r^2$$

kde celková proudová hustota je

$$J = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

a tedy

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r$$

- Pro oblast $r_2 > r > r_1$ řešíme v podstatě pole vně osamoceného válcového vodiče $I(r)$ a tedy

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

- Pro $r > r_3$ je magnetické pole vytvářeno celým proudem žíly I a příslušnou částí proudu pláště $J\pi(r^2 - r_2^2)$, kde proudová hustota

$$J = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

má opačnou orientaci oproti proudové hustotě žíly.

Pak

$$\begin{aligned} I(r) &= I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\ \oint_C \mathbf{H}d\mathbf{l} &= H_3 2\pi r = I(r) \\ H_3 &= \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme superpozicí opačně orientovaných polí

$$H_3 = H'_3 - H''_3 = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

Pruběh $H(r)$ je na obr. 20.6.8b.

20.6.2 Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru

Nechť je opět magnetické pole vyvoláno konstantním el. proudem $I = \text{konst}$. Jak vyplývá z předchozí kapitoly, základním vztahem pro toto pole je *Ampérův zákon*

$$\oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = I$$

Zvolme za integrační dráhu c obvod malé plošky ΔS , jíž prochází proud $\Delta I = J_n \Delta S$, kde J_n je průměr vektoru hustoty proudu do směru normály plošky ΔS (předpokládáme, že ploška ΔS je dostatečně malá, aby se dalo počítat s konstantní hustotou proudu v celém jejím rozsahu) [Trn72, s. 13]. Pro zvolený případ platí

$$\oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \Delta S \rightarrow \frac{1}{\Delta S} \oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (20.6.23)$$

Pro $\Delta S \rightarrow 0$ zavedeme označení

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{\Delta S} \oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (20.6.24)$$

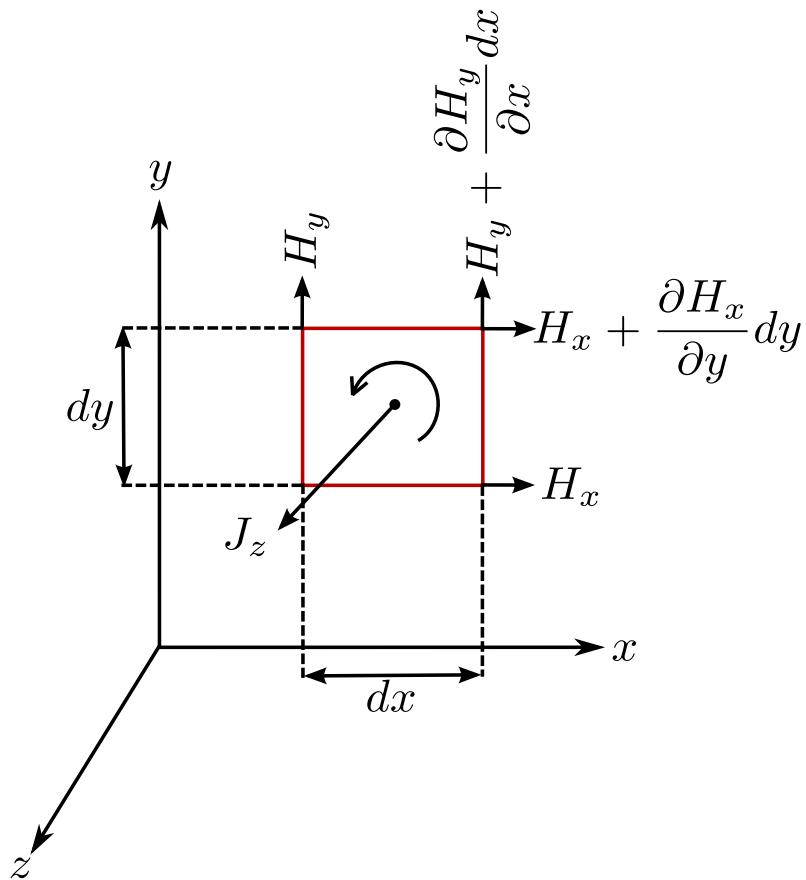
Rovnice 20.6.24 říká, že *rotace vektoru \mathbf{H}* , ($\text{rot} \vec{H}$), jehož průměr do určitého směru je roven průměru vektoru hustoty proudu do tohoto směru. Z uvedených vztahů je patrný fyzikální význam rotace vektoru \mathbf{H} . Je to vektor, jehož velikost je rovna oběhovému magnetickému napětí po dráze v rovině kolmé k vektoru hustoty proudu, vztaženém k ploše obepínané oběhovou dráhou (v nehomogenní poli to platí pro případ, že se plocha dráhy blíží k nule).

Při použití pravoúhlé soustavy kartézských souřadnic x , y a z jsou průměry vektoru $\text{rot} \vec{H}$ do jednotlivých os

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = J_x, \quad \text{rot}_y \mathbf{H} = J_y, \quad \text{rot}_z \mathbf{H} = J_z \quad (20.6.25)$$

Průmět $\text{rot}_x \mathbf{H}$ je dán oběhovým magnetickým napětím po obvodu plošky $dydz$ a platí

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{1}{dydz} \oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{dydz} \left[H_y dy + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right) dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{dydz} \left[\left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \right) dy - H_z dz \right] \\ &= \frac{1}{dydz} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz \right] = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z\end{aligned}\quad (20.6.26)$$



Obrázek 20.6.9: K odvození pojmu $\text{rot}_z \mathbf{H}$

tedy dostáváme

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \quad (20.6.27)$$

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \\ \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z\end{aligned}$$

Pro pravoúhlé souřadnice x, y, z můžeme tedy vztah $\text{rot} \vec{H} = \mathbf{J}$ rozepsat na tvar

$$\begin{aligned}\text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} \text{rot}_x \mathbf{H} + \mathbf{j} \text{rot}_y \mathbf{H} + \mathbf{k} \text{rot}_z \mathbf{H} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{i} J_x + \mathbf{j} J_y + \mathbf{k} J_z = \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (20.6.28)$$

Rotaci vektoru $\text{rot} \vec{H}$ můžeme též symbolicky vyjádřit vektorovým součinem Hamiltonova operátoru a vektoru \mathbf{H}

$$\text{rot} \vec{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z) \quad (20.6.29)$$

nebo také determinantu

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (20.6.30)$$

Pro případ použití cylindrických souřadnic r, φ, z lze odvodit podobně

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi \\ \text{rot}_z \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = J_z\end{aligned}\quad (20.6.31)$$

a pro případ použití sférických souřadnic r, φ, ϑ

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right] = J_\varphi \\ \text{rot}_\vartheta \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi \sin \vartheta) \right] = J_\vartheta\end{aligned}\quad (20.6.32)$$

Podobně jako v elektrickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q$ vztahem $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, tak i v magnetickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ vztahem $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, nebo též v kartézských souřadnicích x, y a z jako

$$\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

20.6.3 Rovnice pro magnetický potenciál

V regulárních bodech lineárního homogenního izotropního magnetika platí pro φ_m

Laplaceova rovnice

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (20.6.33)$$

Důkaz plyne z rovnice $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ a rovnice $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu \vec{H} = \operatorname{div} \mu (-\operatorname{grad} \varphi_m).$$

Pro $\mu = \text{konst}$ dostáváme $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m = 0$, což je rovnice 20.6.33.

Na rozhraní mezi dvěma magneticky různými prostředími neplatí Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru a tedy ani Laplaceova rovnice 20.6.33. Podmínky pro \mathbf{H} a \mathbf{B} na rozhraní vyjádříme pomocí skalárního magnetického potenciálu

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (20.6.34)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (20.6.35)$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ jsou derivace ve směru normály k rozhraní.

20.6.3.1 Vektorový magnetický potenciál

V elektrostatice jsme pro usnadnění mnohých problémů zavedli skalární elektrický potenciál - lze jej zavést vždy, neboť elektrostatické pole je vždy potenciální. Magnetické pole je však obecně vírové. Lze jej popsat skalárním potenciálem jen ve speciálních případech, tj. jestliže je polem potenciálním. Obecně je však zavedení skalárního potenciálu nepřípustné. Lze i pak zavést nějakou veličinu (analogickou skálárnímu potenciálu), s níž by se pracovalo snáze, než přímo s vektory pole?

Dříve než definujeme vektorový magnetický potenciál, zopakujme zavedení skalárního potenciálu v elektrostatice. Vyjdeme z 2. MR a z rovnice známé z vektorové analýzy:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_m = 0.$$

V magnetickém poli vyjdeme ze 4. MR a z jiné identity pro vektorovou funkci \mathbf{A} , známe z vektorové analýzy:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{divrot} \vec{A} = 0$$

odtud

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (20.6.36)$$

References

- [DM70] M. Dufek and M. Mikulec. *Příklady z teoretické elektrotechniky*. Ed. by K. František. SNTL, 1970, p. 380 (cit. on p. [184](#)).
- [Kot99] J. Kotlan. *Základy teoretické elektrotechniky*. Ed. by F. elektrotechnická. ZČU Plzeň, 1999, p. 258. 258 pp. (cit. on pp. [179](#), [181](#), [184](#)).
- [Mayo1] D. Mayer. *Teorie elektromagnetického pole*. Ed. by Z. Benešová. Západočeská univerzita v Plzni, 2001. 355 pp. (cit. on pp. [165](#), [178](#)).
- [Trn72] Z. Trnka. *Teoretická elektrotechnika*. Nakladatelství technické literatury Praha, 1972, p. 410. 410 pp. (cit. on p. [186](#)).

Část VIII

Signály a soustavy

Kapitola 21

Číslicové signály - posloupnosti

Obsah

21.1	Základní typy posloupností	194
21.2	Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	195
21.3	Základní operace s posloupností	196

Číslicové signály (matematicky posloupnosti čísel) [USo2] jsou v literatuře označovány symboly $x_n, x(n)$, nebo $x[nT]$, kde n je celé číslo a označuje pořadí prvku v posloupnosti¹. Poslední uvedený symbol $x[nT]$ zdůrazňuje souvislost číslicového signálu se signálem spojitým v čase(analogovým signálem), ze kterého vznikl vzorkováním a kvantováním. Symbol T označuje použitý *vzorkovací krok*. Jeho převrácená hodnota je rovna *vzorkovací frekvenci* $f_s = \frac{1}{T}$.

21.1 Základní typy posloupností

- **Jednotkový impuls**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (21.1.1)$$

- **Jednotkový skok**

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (21.1.2)$$

- **Reálná exponenciální posloupnost**

$$x[n] = A\alpha^n, n \geq 0, \quad (21.1.3)$$

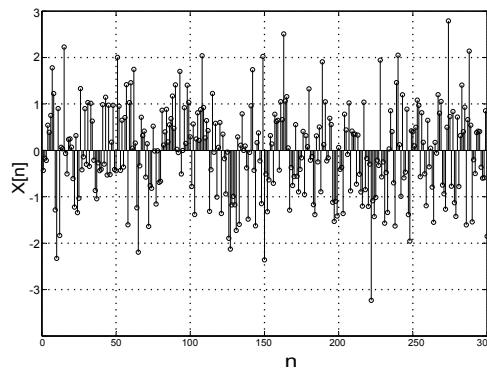
- **Chirp signál**

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi f_{max} n^2}{(N-1)f_s}\right), \quad (21.1.4)$$

kde f_{max} je maximální požadovaný kmitočet, který musí být menší než polovina vzorkovacího kmitočtu $f_{max} < \frac{f_s}{2}$ a N je celkový počet vzorků.

- **Pseudonáhodná posloupnost** je posloupnost, která nahrazuje ideální bílý šum. Tuto posloupnost lze generovat různými algoritmy, které zaručují velmi dlouhou periodicitu generované posloupnosti. Má-li tato posloupnost aproximovat bílý šum, musí co nejlépe splňovat požadavek nekorelovanosti sousedních vzorků (tedy konstantní spektrální výkonové hustoty) a nulové střední hodnoty. Často je požadován i jednotkový rozptyl.

¹Takto zavedené označení je nejednoznačné, neboť nerozlišuje mezi celou posloupností a jejím jediným prvkem. Posloupnost by měla být správně označena např. symbolem $\{x[n]\}$, zatímco symbol $x[n]$ by měl být vyhrazen pro její jeden prvek. Nicméně uvedené značení je všeobecně používáno.



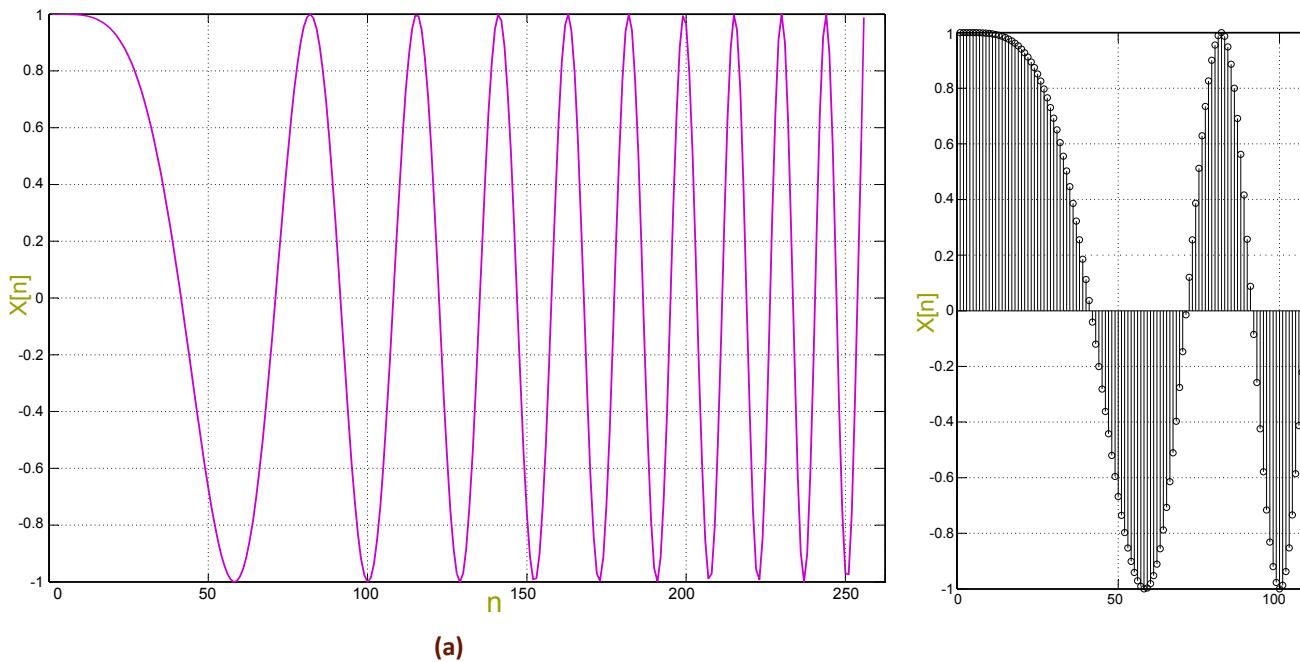
Obrázek 21.1.1: Příklad pseudonáhodné posloupnosti generované pomocí funkce `randn(1, 300)` v MATLABu

21.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu

Příklad 21.2.1. Generujte signál s lineárně rostoucím kmitočtem "chirp signál", maximální kmitočet $f_{max} = 20\text{Hz}$, amplituda $A = 1$, vzorkovaný kmitočtem $f_s = 64\text{Hz}$.

```

1 % CHIRP SIGNaL
2 % =====
3 clear all; close all;
4 % generovani universalniho vektoru
5 N      = 256; % pocet prvku
6 fs     = 256; % vzorkovaci kmitocet v Hz
7 fmax   = 20;  % maximalni kmitocet v Hz
8 Amax   = 1;   % amplituda signalu
9 A2     = 0.5; % amplituda signalu
10 % casovy vektor s N prvky
11 t      = linspace(0, (N-1)*(1/fs), N);
12 % generovani signalu s linearne rostoucim kmitoctem
13 kosinus = chirp(t,0,1,20);
14 %vykresleni
15 figure(1)
16 stem(1:N, kosinus(1:N), 'k'); % diskretni forma
17 plot(1:N, kosinus(1:N), 'k'); % spojita forma
18 xlabel('n')
19 ylabel('X[n]')
20 title(['Chirp signal: fmax=' , num2str(fmax) , ' Hz, fs=' , num2str(fs) , ' Hz'])
21 grid on;
```



Obrázek 21.2.1: Chirp signál: Signál s lineárně rostoucím kmitočtem s maximální frekvencí 20 Hz vzorkovaný 254 Hz. Grafická reprezentace číslicových signálů bývá buď ve spojité formě (a) nebo v diskrétní formě (b)

Výpis 21.1: `gen_chirp_signal.m`. Generuje chirp signál

21.3 Základní operace s posloupností

V dalším textu budeme používat tři základní lineární operace [USo2] zobrazené na 21.3.1:

- součin signálu $x[n]$ a reálné konstanty b :

$$w[n] = bx[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tato operace je v praxi realizována násobičkou a je zdrojem numerických chyb, tedy kvantizačního šumu, který produkuje číslicová zařízení.

- součet signálu $x[n]$ a signálu $y[n]$:

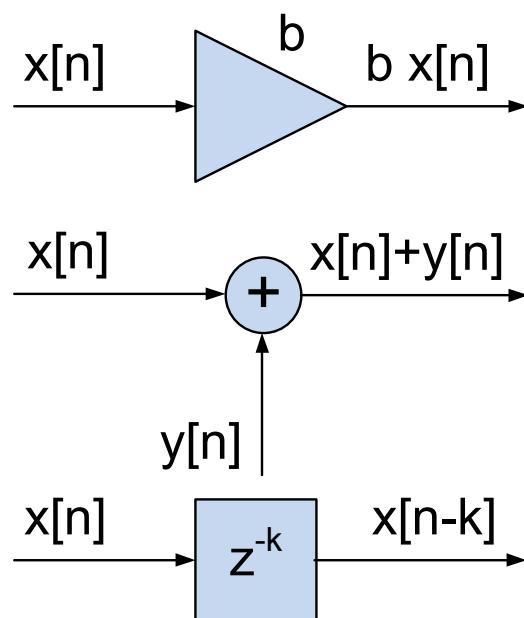
$$v[n] = x[n] + y[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto operaci provádí sčítačka. Při neošetření může tato operace generovat hrubé chyby.

- zpoždění signálu $x[n]$ o k vzorkovacích kroků:

$$y[n] = x[n - k], n = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, M$$

Hodnoty $x[-k], k = 1, 2, \dots, M$ se nazývají *počáteční podmínky*. V digitálních implementacích provádíme operaci zpoždění paměťového registru pro každou jednotku požadovaného zpoždění z^{-1} .



Obrázek 21.3.1: Symboly základních operací

Kapitola 22

Vlastnosti a popis lineárních systémů

Obsah

22.1 Linearita, časová invariance a kauzalita	200
22.1.1 Konvoluce v diskrétních a spojitých systémech	201
22.2 Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce	205
22.2.1 Spojité systémy	205

Na soustavu obvodů můžeme nahlížet jako na seskupení (množinu) navzájem souvisejících součástí, ke kterému je určen vstupní signál x , zvaný buzení a výstupní signál y , označovaný jako odezva. Z hlediska vlastností jde o systém představující "černou skříňku", jejíž vlastnosti můžeme identifikovat analýzou vstupního a výstupního signálu [BLV07].



Obrázek 22.0.1: Symbol soustavy s jedním vstupem a jedním výstupem

- Systémy se spojitým časem (na vstupu i výstupu pracují se spojitými signály) - relace mezi vstupem a výstupem můžeme symbolicky zapsat:

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\} \quad (22.0.1)$$

kde S je obecný popis systémové funkce, přiřazující vstupní veličině $x(t)$ odezvu $y(t)$. Z rovnice je zřejmé, že u spojité (analogové) soustavy výstupní signál závisí na všech hodnotách vstupního signálu, nikoli jen na některých jeho hodnotách v určitých časových okamžicích.

- Systémy pracující s diskrétním časem lze obdobně symbolicky vyjádřit relací vstup/výstup ve tvaru:

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} \quad (22.0.2)$$

kde \mathcal{S} je tentokrát systémový operátor přiřazení posloupnosti $x[n] \rightarrow y[n]$. U diskrétních systémů se zpracovávají posloupnosti hodnot signálů, získaných vzorkováním spojitého signálu

22.1 Linearita, časová invariance a kauzalita

Linearita systémů ve spojité diskrétní oblasti má velký význam, neboť dovoluje využívat princip superpozice k zjednodušování úloh jejich analýzy a syntézy.

Předpokládejme, že na vstupu lineárního diskrétního systému jsou přivedeny dva signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$. Účinky obou vstupních signálů na výstupní signál lze zkoumat odděleně a podle principu superpozice je na výstupu sečist. Označme dílčí odezvy $y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$ a $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$, potom je

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} \quad (22.1.1)$$

Analogický vztah platí i pro lineární spojitý systém, tedy

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = S\{x_1(t) + x_2(t)\} \quad (22.1.2)$$

Jedná-li se o systém časově invariantní, jsou události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí), nikoliv na každém časovém okamžiku samostatně. Systém je časově invariantní, jestliže časový posun ve vstupní signálu vede ke stejnemu posunu výstupního signálu. Odezva diskrétního systému na posunutý vstupní signál $x[n - m]$ je pak určen vztahem

$$y[n - m] = S\{x[n - m]\} \quad (22.1.3)$$

a obdobně pro odezvu spojité soustavy na posunutý (zpožděný) vstupní signál $x(t - \tau)$ platí analogicky rovnice

$$y(t - \tau) = S\{x(t - \tau)\}. \quad (22.1.4)$$

Kauzální, příčinný systém je systém, u kterého výstupní signál závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu.

22.1.1 Konvoluce v diskrétních a spojitéch systémech

[BLV07] Významnou charakteristikou lineárních časově invariantních systémů LTI je **impulzní odezva**. Její znalost umožňuje stanovit odezvu systému na obecný signál, lze ji využít i při syntéze systému.

$$h[n] = S\{\delta[n]\}. \quad (22.1.5)$$

Mějme diskrétní LTI systém, na jehož vstup je přiveden jednotkový diskrétní impulz¹. Jednotkový impulz je posloupnost $\delta[n] = 0$ pro všechna n s výjimkou $\delta[0] = 1$. Odezva systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ se nazývá impulzní odezva a platí

$$h[n - m] = S\{\delta[n - m]\}. \quad (22.1.6)$$

Vzhledem časové invariantnosti, posunutému jednotkovému impulzu odpovídá posunutá impulzní odezva, tedy

$$1[n] = \sum_{m=0}^n [n - m] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots. \quad (22.1.7)$$

Jednotkový skok $1[n]$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat součtem

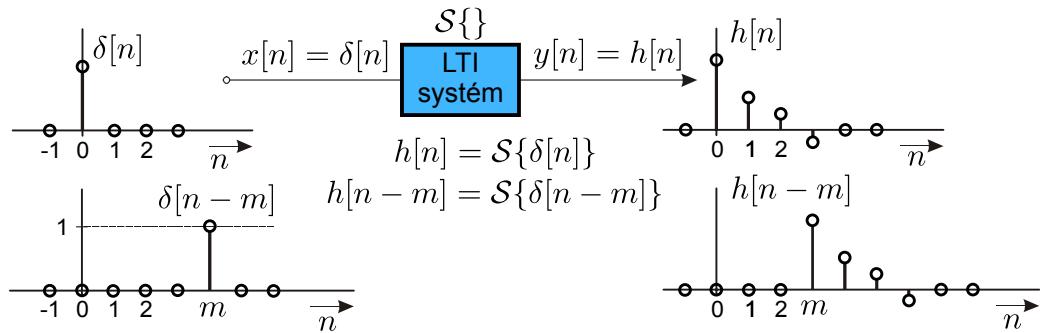
$$s[n] = S\{1[n]\} = S\left\{\sum_{m=0}^n [n - m]\right\} = \sum_{m=0}^n S\{\delta[n - m]\}. \quad (22.1.8)$$

¹Nesmíme zaměňovat s Diracovým (také jednotkovým) impulzem.

Odezva systému na jednotkový skok $1[n]$ se nazývá **přechodová odezva** $s[n]$ a platí

$$s[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} = \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (22.1.9)$$

Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$, resp. na posunutý impulz $\delta[n-m]$, bude $h[n]$ resp. $h[n-m]$ - viz obr. 22.1.1.



Obrázek 22.1.1: Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ a posunutý impulz $\delta[n-m]$

Postupná úprava rovnice (22.1.9) je umožněna díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m]. \quad (22.1.10)$$

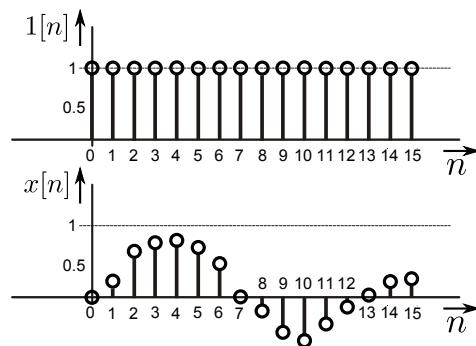
Poznamenejme, že formou (22.1.10) lze zapsat každý diskrétní signál.

Na obr. 22.1.2 znázorněna souvislost mezi posloupností jedniček a diskrétním signálem. *Posloupnost jedniček tvoří bázi pro diskrétní signály*. Každá komponenta diskrétního signálu je vyjádřena součinem $x[m]\delta[n-m]$. V uvedeném příkladě jde o posloupnost příslušnou jednotkovému skoku

$$1[n] = \sum_{m=0}^{15} \delta[n-m] \quad (22.1.11)$$

a odpovídající posloupnost konečného signálu

$$x[n] = \sum_{m=0}^{15} x[m] \delta[n-m]. \quad (22.1.12)$$



Obrázek 22.1.2: Posloupnost jednotkového skoku $1[n]$ a signálu $x[n]$

Princip superpozice dovoluje získat odezvu systému jako sumu odezv na jednotlivé dílčí součásti vstupního signálu, které v rovnici (22.1.10) tvoří vážené jednotlivé impulzy, ze kterých je signál složen

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (22.1.13)$$

Protože platí (22.1.5) a v důsledku časové invariance vyplývá z rovnice 22.1.13 **konvoluční suma**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (22.1.14)$$

Uvedli jsme, že u kauzálního systému závisí výstupní signál $y[n]$ pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$, takže v konvoluční sumě 22.1.14

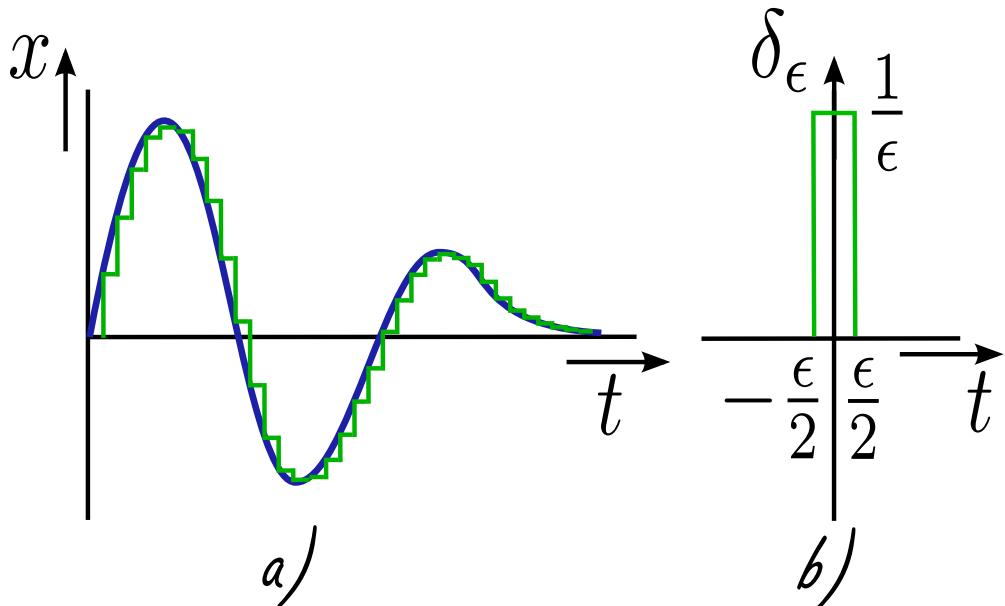
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (22.1.15)$$

musíme položit všechny členy impulzní odezvy $h[k] = 0$ pro $k < 0$. Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má pak tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (22.1.16)$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n < 0$ a $x[n] \neq 0, y[n] \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]. \quad (22.1.17)$$



Obrázek 22.1.3: a) Aproximace spojitého průběhu signálu, b) K odvození jednotkové impulsní funkce

Podobně můžeme postupovat i v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém *konvoluční integrál*. Vraťme se k výrazu 22.1.10 kterým jsme vyjádřili libovolný diskrétní signál. Pro případ spojitého signálu vytvořme analogickou formu zápisu využívající jednotkový impuls. Průběh obecného spojitého lze podle obr. 22.1.3 approximovat stupňovitým průběhem, který můžeme vyjádřit jako sumu posunutých (zpožděných) impulsů. Výchozí approximující impuls lze vyjádřit vztahem

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (22.1.18)$$

a je znázorněn na obr. 22.1.3. Jednotkový (Diracův) impuls má jednotkovou plochu. Matematicky můžeme Diracův impuls definovat výrazem

$$\delta_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t). \quad (22.1.19)$$

Aproximaci spojitého průběhu $x(t)$ impulsy 22.1.18 lze vyjádřit rovnicí

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon) \epsilon. \quad (22.1.20)$$

Zmenšování šířky impulsů $\epsilon \rightarrow 0$ se chyba approximace zmenšuje a výraz přejde v limitu

$$x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon) \epsilon. \quad (22.1.21)$$

V limitě kdy $\epsilon \rightarrow 0$, můžeme sumu nahradit integrálem, dále součin $m\epsilon$ integrační proměnnou τ a ϵ jejím diferenciálem. Obdržíme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (22.1.22)$$

Vztahem 22.1.22 jsme spojitý průběh signálu vyjádřili jako sumu nekonečného počtu posunutých jednotkových impulsů váženou jeho okamžitými hodnotami. Předpokládejme dále, že na vstup lineárního časově invariantního spojitého systému je převeden jednotkový (Diracův) impuls a systém vytvoří odezvu $h(t)$. V případě obecného vstupního spojitého signálu $x(t)$ approximovaného vztahem 22.1.22, bude odezva analogového systému

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (22.1.23)$$

Uvedený integrál nazýváme **konvoluci** a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (22.1.24)$$

Funkce $h(t)$ představuje *impulsní odezvu*. Jedná se o výstupní signál systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t). \quad (22.1.25)$$

Z důvodů *kauzality*, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \text{ pro } |t| \geq 0, \quad (22.1.26)$$

$$h(t) = 0 \text{ pro } |t| < 0. \quad (22.1.27)$$

Potom můžeme konvoluční integrál 22.1.23 zapsat ve tvarem

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (22.1.28)$$

22.2 Popis spojitéch a diskrétních systémů, přenosová funkce

22.2.1 Spojité systémy

Lineární časově invariantní (LTI) spojity systém je obecně popsán soustavou integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, kterou lze postupným derivováním změnit

na soustavu diferenciálních rovnic. Předpokládejme budící (nezávislou) veličinu $x(t)$ a odevzdu (závislou) výstupní veličinu $y(t)$, pak eliminací ostatních proměnných bude soustava popsána jedinou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (22.2.1)$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n a b_0, b_1, \dots, b_m jsou konstanty charakterizující lineární systém. Obecné řešení $y(t)$ rovnice 22.2.1 se sestává ze dvou částí, z řešení *homogenní rovnice a parťkulárního řešení*. K řešení je třeba znát počáteční podmínky pro $y(t)$ a jeho derivace ve výchozím okamžiku.

S použitím *Laplaceovy transformace při nulových počátečních podmínkách* má rovnice (22.2.1) tvar

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j X(p), \quad (22.2.2)$$

kde $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ a $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ jsou Laplaceovy obrazy vstupní a výstupní veličiny, p je Laplaceův operátor derivace a také komplexní kmitočet $p = \sigma + j\omega$. Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ ku obrazu vstupní veličiny $X(p)$, při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (22.2.3)$$

Vzhledem k rovnici (22.2.2) je $H(p)$ racionálně lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{j=1}^m (p - p_{0j})}{\prod_{i=1}^n (p - p_{\infty i})} \quad (22.2.4)$$

kde p_{0j} jsou kořeny polynomu čitatele a představují **nulové body** a kořeny jmenovatele $p_{\infty i}$ jsou **póly** přenosové funkce, $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$ je násobná konstanta.

Kmitočtové charakteristiky získáme z přenosové funkce substitucí

$$p = j\omega, \quad (22.2.5)$$

ve které ω je úhlový kmitočet. Platí tedy

$$H(p) |_{p=j\omega} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = M(\omega) e^{j\Phi(\omega)}, \quad (22.2.6)$$

kde $M(\omega)$ je **modulová charakteristika** a $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$ se nazývá **fázová charakteristika**. Skupinové zpoždění je definováno jako záporně vzatá derivace fázové charakteristiky podle kmitočtu

$$\tau(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\arg H(j\omega)}{d\omega}. \quad (22.2.7)$$

V předchozí kapitole jsme ukázali, že *relace vstup/výstup LTI systému* souvisí prostřednictvím *konvoluce*

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (22.2.8)$$

Přenosová funkce je Laplaceova transformace impulzní odezvy $h(t)$

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt, \quad (22.2.9)$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)X(p). \quad (22.2.10)$$

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako integrál impulzní odezvy

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau, \quad (22.2.11)$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}. \quad (22.2.12)$$

Algoritmus výpočtu impulzní odezvy z přenosové funkce je založen na výpočtu reziduů a rozkladu racionálně lomené funkce $H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}$ na částečné zlomky. Pokud má tato funkce jednoduché póly, rozklad má tvar².

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{k_\mu}{p - p_{\infty_\mu}} = \frac{k_1}{p - p_{\infty_1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty_2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty_n}} \quad (22.2.13)$$

kde k_μ se nazývají rezidua v pólech p_{∞_μ}) a platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} (p - p_{\infty_\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty_\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty_\mu}}} = Q(p_{\infty_\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty_\mu})} \end{aligned} \quad (22.2.14)$$

²Násobnost kořenů $N(p)$ neuvažujeme, protože se v LTI obvodech neuplatňuje

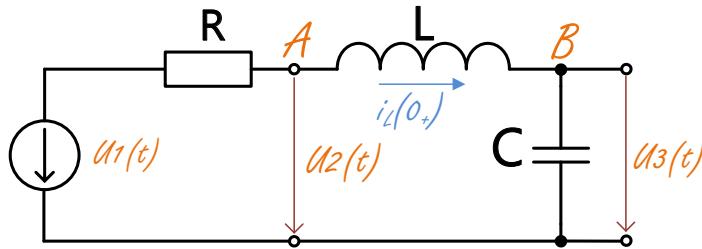
Impulzní odezva je pak dána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \sum_{\mu=1}^n k_\mu e^{p_{\infty_\mu} t} \quad (22.2.15)$$

Póly jsou obecně komplexní $p_{\infty_\mu} = \alpha_\mu + j\beta_\mu$, nebo reálné $p_{\infty_\mu} = \alpha_\mu$. Jsou to kořeny rovnice $N(p) = 0$. Rovnice 22.2.15 je důležitá i proto, že z ní poznáme, zda analogová soustava je stabilní. Je patrné, že soustava bude stabilní, jestliže bude $\Re\{p_{\infty_\mu}\} = \alpha_\mu < 0$, tj. leží-li kořeny p_{∞_μ} v otevřené levé polovině komplexní roviny $p_{\infty_\mu} = \sigma + j\omega$. Imaginární osa $j\omega$ jemezí stability, pravá polovina je oblastí nestability. Polynom, který má kořeny v levé otevřené polovině se označuje **Hurwitzův polynom**.

Příklad 22.2.1. Lineární spojitý systém je dán zapojením dle obrázku. Určete:

1. diferenciální rovnici pro odezvu $u_2(t)$, je-li na vstupu buzen napětím $u_1(t)$,
2. přenos napětí $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$,
3. impulsní odezvu $h(t)$.



Obrázek 22.2.1: Zapojení obvodu RLC.

Řešení:

Pro zapojení dle obrázku získáme metodou uzlových napětí integrodiferenciální rovnice pro uzly A a B:

$$A : \frac{u_3(t) - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_3(\tau) - u_2(\tau)) d\tau + i_L(0_+) = 0 \quad (22.2.16)$$

$$B : \frac{1}{L} \int_0^t (u_2(\tau) - u_3(\tau)) d\tau + C \frac{du_c}{dt} - i_L(0_+) = 0$$

Derivováním a eliminací $u_3(t)$ z původních rovnic dostaneme pro odezvu $u_2(t)$ diferenciální rovnici II. řádu

$$\frac{d}{dt}(B) : u_2(t) - u_3(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow u_3(t) = u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2}$$

$\frac{d}{dt}(B) \rightarrow (A)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (LC \frac{d^2 u_2(\tau)}{dt^2}) d\tau + i_L(0_+) &= 0 \\ u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t) + RC \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right]_0^t + Ri_L(0_+) &= 0 \end{aligned}$$

Při nulových počátečních podmínkách: $\frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} = 0, i_L(0_+) = 0$ dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (22.2.17)$$

V Laplaceově transformaci platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right] &= pU_2(p) - u_2(0) \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} \right] &= p^2 U_2(p) - pu_2(0) - u_2(0), \text{ kde } u_2(0) = \frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} \end{aligned}$$

při nulových počátečních podmínkách

$$p^2 LCU_2(p) + pRCU_2(p) + U_2(p) = U_1(p) \quad (22.2.18)$$

Odtud vyplývá **přenosová funkce** $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (22.2.19)$$

K nalezení **impulsní odezvy** nejprve určíme póly přenosové funkce řešením rovnice $N(p) = 0$

$$p_{\infty_{12}} = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (22.2.20)$$

přenosovou funkci pak upravíme do tvaru

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_{\infty_1}) \cdot (p - p_{\infty_2})}, \quad K = \frac{1}{LC} \quad (22.2.21)$$

- Uvažujeme-li jednoduché póly a bude-li $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom z rov. 22.2.20 vyplývají dva reálné různé póly. Přenosovou funkci tedy můžeme zapsat obecným tvarem:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a_1} + \frac{k_2}{p + a_2} \quad (22.2.22)$$

kde $p_{\infty_1} = -a_1$, $p_{\infty_2} = -a_2$, Rezidua $k_1 = \frac{K}{a_2 - a_1}$, $k_2 = \frac{K}{a_1 - a_2}$ určíme z rov. 22.2.14.
Impulsní odezvu pak vypočteme užitím rov. 22.2.15.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \frac{K}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{K}{a_1 - a_2} e^{-a_2 t} \quad (22.2.23)$$

- Když bude $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, obdržíme dvojici komplexně sdružených pólů a přenosovou funkci může obecně zapsat takto:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a - jb} + \frac{k_2}{p + a + jb} \quad (22.2.24)$$

kde $p_{\infty_1} = -a + jb$, $p_{\infty_2} = -a - jb$. Rezidua v pôlech jsou dány výrazy $k_1 = -\frac{jk}{2b}$, $k_2 = \frac{jK}{2b}$. Impulzní odezvu opět určíme užitím rov. 22.2.15.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-e^{jbt} + e^{-jbt})] \\ &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-\cos(bt) - j \sin(bt) + \cos(bt) - j \sin(bt))] \\ &= \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) \end{aligned} \quad (22.2.25)$$

Pro stavební prvky: $R = 1k\Omega$, $L = 11.5mH$, $C = 22.5nF$ ukazuje výpis m-file *SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m* symbolický způsob řešení operátorových obvodových rovnic pomocí MATLABu. Jde o typ **dolní propust**, jehož přenosová funkce má tvar:

$$H(p) = \frac{3.9506 \cdot 10^9}{p^2 + 8.8889 \cdot 10^4 p + 3.9506 \cdot 10^9}.$$

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 15
3 % Vyreste symbolicky soustavy operatorovych obvodovych
4 % rovnic a vyjadrete prenosovu funkci
5 %
6 f1 = '(U3-U1)/R+U(U3-U2)/(p*L)';
7 f2 = 'p*C*U2+U(U2-U3)/(p*L)';
8 % symbolickie reseni rovnic
9 rU = solve(f1, f2, 'U2, U3');
10 % vyber pole U2, resp. U1 z datove struktury rU
11 rU.U2 % uzlove napeti U2
12 rU.U3 % uzlove napeti U3
13 % Prenosova funkce
14 P = rU.U2/'U1'
```

```

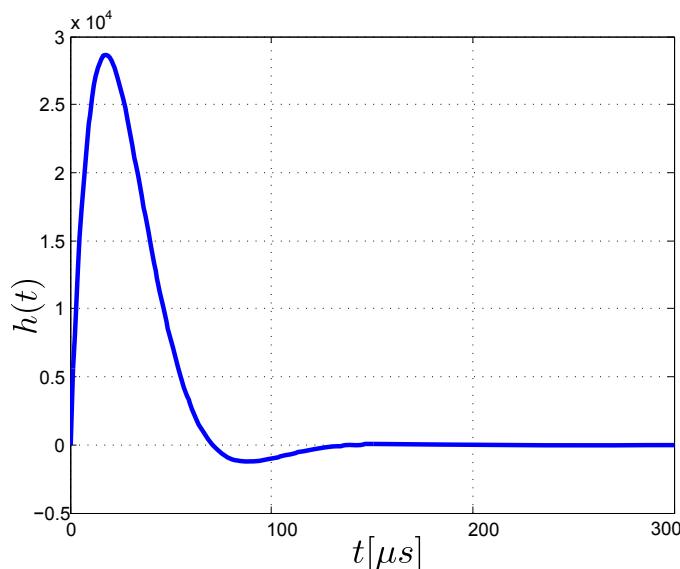
15 % symbolicka substituce
16 nP = subs(P, {'R', 'C', 'L'}, {1e3, 22.5e-9, 11.25e-3})
17 % nastaveni formatu zobrazeni cisel napr: 3.1416e+000
18 format short e
19 % citatel(numerator) a jmenovatel(denominator)
20 % symbolickeho výrazu
21 [num, den] = numden(nP) % num/den
22 % symbolické vyjádření polynomu prevede na vektorové
23 % vyjádření - A(1): první prvek vektoru (koeficient u
24 % nejvyšší mocniny polynomu)
25 N = sym2poly(den)
26 roots(N)
27 % H(p)=Q(p)/N(p)
28 % koeficient u nejvyšší mocniny ve jmenovateli bude 1
29 Q = sym2poly(num)/N(1)
30 N = N/N(1)

```

Výpis 22.1: SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m

Impulzní charakteristiku obdržíme dosazením do vztahu 22.2.25

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) = 8.8890 \cdot 10^4 e^{-4.4444 \cdot 10^4 t} \sin(4.4444 \cdot 10^4 t).$$



Obrázek 22.2.2: Impulzní charakteristika

Z hlediska analýzy obvodů v kmitočtové oblasti je výhodné sestavovat obvodové rovnice (metodami uzlových napětí a smyčkových proudů) přímo v operátorovém tvaru.

Kirchhoffovy zákony pro uzavřenou smyčku a proudu do uzlu pak mají tvar

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

Metodou uzlových napětí pro zapojení na obr. 22.2.1 obdržíme rovnice

$$\frac{U_3(p) - U_1(p)}{R} + \frac{U_3(p) - U_2(p)}{pL} = 0 \quad (22.2.26)$$

$$pCU_2(p) + \frac{U_2(p) - U_3(p)}{pL} = 0 \quad (22.2.27)$$

Na rozdíl od 22.2.16 jde o algebraické rovnice, ze kterých eliminací uzlového napětí $U_3(p)$ vyplývá přenosová funkce 22.2.19

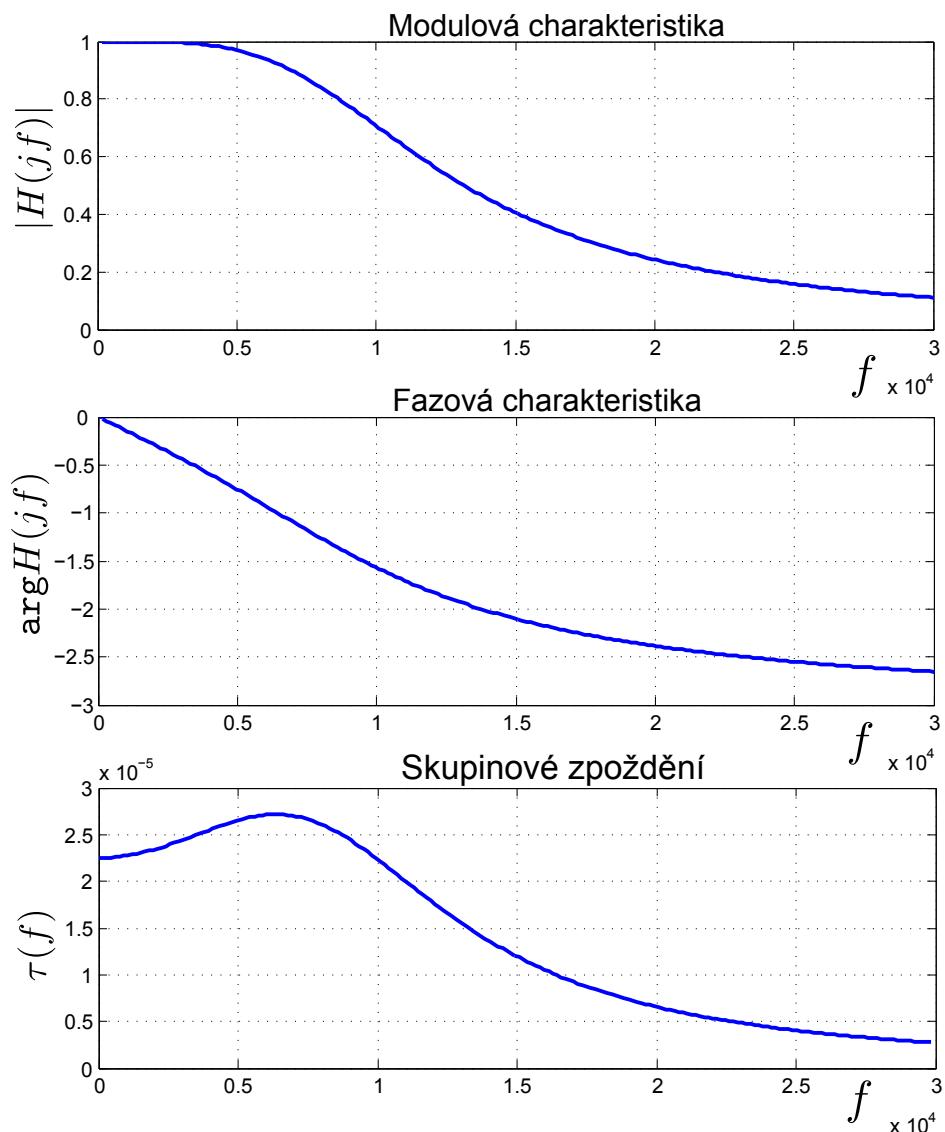
$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Dosazením za $p = j\omega$ lze z přenosové funkce vyjádřit modulovou charakteristiku $H(j\omega)$ a fázovou charakteristiku $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$. Skupinové zpoždění vyplývá ze vztahu 22.2.7. Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění jsou na obr. 22.2.3.

Filtr má maximálně plochou modulovou charakteristiku přenosu. Mezní kmitočet propustného pásma je $f_p = 10\text{kHz}$, při kterém je $|H(j\omega_p)| = 0.707$. Tato hodnota odpovídá poklesu modulové charakteristiky o 3dB .

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 16
3 % Vykreslete modulovou, fazovou charakteristiku,
4 % charakteristiku skupinoveho zpozdeni a
5 % impulzni odezvu prenosove fce
6 % Q(p)           3.9506e+009
7 % H(p) = _____ = _____
8 % N(p)   p^2 + 8.8889e+004p + 3.9506e+009
9 %
10 Q = 3.9506e+009;
11 N = [1, 8.8889e+004, 3.9506e+009];
12 f = linspace(0, 3e4, 200);
13 w = 2*pi*f;
14 %komplexni frekvencki odezva z analogove prenosove fce
15 H = freqs(Q, N, w);
16 figure(1)
17 plot(f, abs(H)); grid;
18 xlabel f
19 ylabel '|H(jf)|'
```



Obrázek 22.2.3: Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění filtru

```

20 title 'Modulova\u00e1 charakteristika'
21 figure(2)
22 plot(f, phase(H)); grid
23 xlabel f; ylabel 'arg\u00e1H(jf)';
24 title 'Fazova\u00e1 charakteristika'
25 % diff(X) – difere\u0101e prvku vektoru
26 % [X(2)\u2013X(1) X(3)\u2013X(2) ... X(n)\u2013X(n\u20131)]
27 t = diff(-phase(H))./diff(w); % approximace derivace
28 figure(3)
29 plot(f(1:199), t); grid

```

```
30 xlabel f; ylabel '\tau(f)';  
31 title 'Skupinovezpozdeni'  
32 % vektorove vyjadreni prevede na symbolicke vyjadreni  
33 P = poly2sym(Q)/poly2sym(N)  
34 % inverzni Laplaceova transformace  
35 ih = ilaplace(P)  
36 % konverze racionalniho cisla na desetinne cislo  
37 vpa(ih,5)  
38 figure(4)  
39 t = linspace(0, 3e-4, 200);  
40 plot(t, subs(ih)); grid  
41 xlabel f; ylabel 'h(t)';  
42 title 'Impulznizodezva'
```

Výpis 22.2: SAS_exam_03_Hp.m

Část IX

Teorie elektrických obvodů

Kapitola 23

Základy elektrických obvodů

Obsah

23.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů	218
23.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	218
23.2.1 Ilustrativní příklad	219
23.2.2 Pravidla pro sestavování rovnic	220
23.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí	221
23.3.1 Metoda razítok	222
23.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	223
23.5 Napěťový dělič	225

Ke každému skutečnému, fyzicky realizovanému, elektrickému obvodu lze nakreslit **obvodové schéma**. Toto schéma je vlastně *obvodovým modelem* skutečného obvodu. Obvodový model je sestaven ze základních obvodových prvků - **dvojpólů**. Název plyne z důležité topologické vlastnosti dvojpólů - mají dvě svorky [PVo4, s. 12].

Základních obvodových prvků je celkem pět: rezistor, cívka, kondenzátor, ideální zdroj napětí, ideální zdroj proudu. Zdůrazněme následující skutečnosti:

- Každý ze základních prvků je uvažován jako **ideální** (nemá žádné jiné parazitní vlastnosti).
- Kombinací základních prvků vznikne **náhradní zapojení** skutečného prvku, včetně jeho parazitních vlastností.
- Z pěti základních prvků je tedy možno sestavit **libovolný obvodový model** (elektrický obvod) **pasivní i aktivní**.
- U **aktivních obvodů** (např. zesilovačů) se uplatňují řiditelné, neboli parametrické prvky. Typickým příkladem je bipolární tranzistor, jenž je řízen proudem do báze.

23.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů

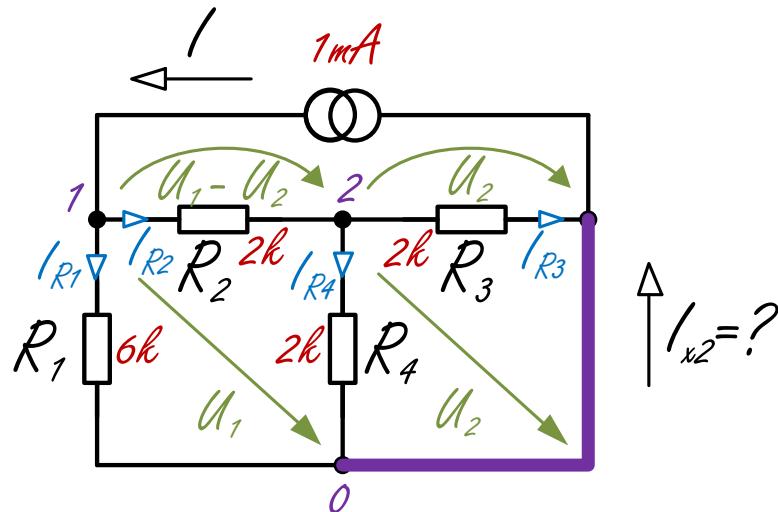
23.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)

Metoda uzlových napětí je založena na tomto postupu:

- Jeden z uzel obvodu se prohlásí za tzv. **referenční uzel**. Přiřadí se mu číslo 0, případně v počítačovém simulátoru značka uzemnění. Vzhledem k tomuto uzlu se budou vztahovat napětí ostatních uzel obvodu. Tato napětí se nazývají **uzlová napětí** a tvoří **soustavu neznámých obvodových veličin** metody. Je vhodné orientovat všechna uzlová napětí tak, aby čítací šipky směřovaly do referenčního uzlu. Uzlová napětí jsou neznámými metody i tehdy, je-li naším konečným cílem počítat jiné obvodové veličiny. Každé napětí a každý proud v obvodu jsou totiž vyjádřitelné jako lineární kombinace uzlových napětí.
- Pro každý uzel obvodu, vyjma referenčního, sestavíme rovnici 1. KZ ve tvaru: *součet proudů tekoucích dovnitř uzlu z vnějších zdrojů proudu = součtu proudů vytékajících větvemi obvodu ven z uzlu*.
- Rovnice vyřešíme, tj. získáme velikosti uzlových napětí. Z nich pak dopočteme požadovaný výsledek analýzy.

23.2.1 Ilustrativní příklad

Metodu uzlových napětí lze objasnit na příkladu zapojení na obr. 23.2.1. Je třeba určit proud I_{x2} . Nejprve očíslovujeme uzly. Zvolíme referenční uzel a přiřadíme mu číslo 0. Zde



Obrázek 23.2.1: Řešení obvodu metodu uzlových napětí - MUN [Bioo4, s. 62]

je třeba zdůraznit, že referenční uzel je možno volit zcela libovolně. Většinou se volí tak, aby případné hledané napětí bylo rovno jednomu z napětí uzlových. Dále si všimneme, že uzel, v němž je se spojuje rezistor R_3 a proudový zdroj, je vlastně součástí referenčního uzlu a jako takový se přídavně nečísluje - má již označení 0.

Vyznačená uzlová napětí U_1 a U_2 tvoří soustavu dvou neznámých, k níž musíme sestavit dvě rovnice. Budou to rovnice 1. KZ pro uzly 1 a 2. Protože počítáme proud I_{x2} , postačí určit uzlové napětí U_2 . Z něj totiž snadno určíme proud rezistorem R_3 a z něj I_{x2} .

Podle obr. 23.2.1 napíšeme 1. KZ pro rovnováhu proudů v uzlech 1 a 2:

$$\begin{aligned} \text{uzel1 : } I &= I_{R1} + I_{R2} \\ \text{uzel2 : } 0 &= -I_{R1} + I_{R2} + I_{R4} \end{aligned} \quad (23.2.1)$$

Orientaci čítacích šipek větvových proudů můžeme volit naprosto libovolně. Pokud se v orientaci zmýlíme, vyjde u daného proudu opačné znaménko.

Větvové proudy na pravé straně rovnic vyjádříme pomocí větvových vodivostí a větvových napětí, která závisí na uzlových napětí (viz obr. 23.2.1):

$$\begin{aligned} uzel1 : I &= G_1 U_1 + G_2(U_1 - U_2) \\ uzel2 : 0 &= -G_2(U_1 - U_2) + G_3 U_2 + G_4 U_2 \end{aligned} \quad (23.2.2)$$

Vytknutím neznámých upravíme rovnice na konečný tvar

$$\begin{aligned} uzel1 : I &= (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 \\ uzel2 : 0 &= -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 \end{aligned} \quad (23.2.3)$$

Dosadíme-li vodivosti v [mS], vyjdou proudy na levé straně v [mA]

$$\begin{aligned} uzel1 : 1 &= \frac{2}{3}U_1 - \frac{1}{2}U_2 \\ uzel2 : 0 &= -\frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2}U_2 \end{aligned} \quad (23.2.4)$$

Tyto rovnice dívají řešení

$$[U_1, U_2] = \left[2, \frac{2}{3} \right] V \quad (23.2.5)$$

Pohledem na schéma 23.2.1 zjistíme, že při $U_2 = \frac{2}{3}V$ bude proud $I_{R3} = \frac{1}{3}mA$ a hledaný proud I_{x2} vychází z 1. KZ

$$I_{x2} = I - I_{R3} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}mA. \quad (23.2.6)$$

23.2.2 Pravidla pro sestavování rovnic

Nyní pustíme se do zobecnění poznatků z předchozího příkladu. Rovnice 23.2.4 zapíšeme v maticovém tvaru Porovnáme-li maticovou rovnici s původním schématem obvodu 23.2.1 dospějeme k následujícím pravidlům:

$$\begin{array}{l} \text{uzel 1: } \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline U_1 & U_2 \\ \hline G_1 + G_2 & -G_2 \\ \hline -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline U_2 \\ \hline \end{array} \\ \text{uzel 2: } \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

- Pravidlo o sestavení vektoru budicích proudů na levé straně maticové rovnice:
 - V i-tém řádku je algebraický součet proudů, tekoucích dovnitř i-tého uzlu z vnějších zdrojů proudu.
- Pravidla o sestavení čtvercové vodivostní (admitanční) matice:
 - Prvek i, j na hlavní diagonále obsahuje součet všech vodivostí (admitancí), které jsou připojeny k uzlu i .
 - Prvek $i, j (i \neq j)$ mimo hlavní diagonálu obsahuje záporně vzatý součet všech vodivostí, které jsou připojeny bezprostředně mezi uzly i a j .

Základní lineární dvojpóly (R, L, C) jsou reciprocní, tzn. chovají se stejně ve směru obou uzelů. Jinými slovy, jejich impedance je v obou případech stejná. Proto u obvodů s těmito součástkami vykazují admitanční matice *symetrii*, tj. prvky matice i, j a j, i jsou totožné.

23.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí

Výhodou metody uzlových napětí je její snadná algoritmizace: algoritmus pro sestavení soustavy rovnic přímo ze schématu je velmi jednoduchý a lze jej tedy implementovat do počítačových programů pro analýzu a simulaci. Nevýhodou metody ovšem je, že neumožnuje analyzovat obvody se zdroji napětí a součástkami, které nemají admitanční rovnici. Bohužel, k těmto součástkám patří nejen například takové prvky jako je obyčejný transformátor, ale i různé operační zesilovače, konvejory, a další moderní analogové prvky [Bio04, s. 77].

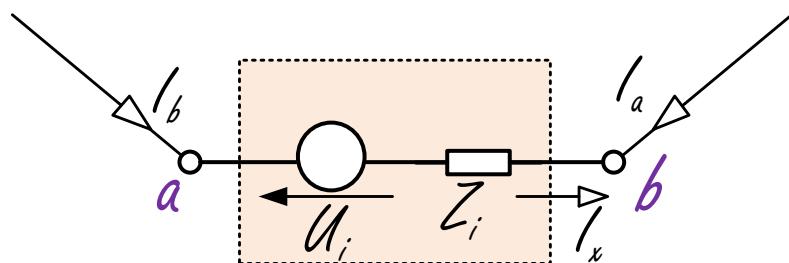
Proto klasická metoda MUN musí být podrobena určité modifikaci, která jednak zachová její výhodu - snadnou algoritmizovatelnost - jednak umožní analyzovat lineární obvody bez výše uvedených omezení. Jsou to metody:

- Metoda razítek
- Metoda zakázaného řádku
- Metoda U/I

23.3.1 Metoda razítek

Každý "problémový" prvek je popsán minimálně jednou přídavnou rovnicí a o stejný počet obohatí množinu neznámých. Současně dojde k modifikaci některých původních rovnic 1. KZ. Maticová rovnice pak získá zvláštní strukturu: k původní admitanční matici MUN přibudou řádky a sloupce, jejichž prvky obecně nemají rozměr admitancí. Jsou to tzv. *razítka* přídavných elektrických prvků. Celá matice se pak nazývá **pseudoadmitanční**. Zvětšení rozměru soustavy rovnic obvykle při počítačové analýze nemusí být na závadu. Při ručním řešení jde však prakticky vždy o problém [Bio04, s. 78].

Uvažujme obvod popsán rovnicemi klasické MUN. Mezi uzly a a b obvodu do datečně připojíme obecný dvojpól, který je popsán svým Théveninovým modelem podle obr. 23.3.1. Včleněním dvojpólu dojde ke změně napěťových a proudových poměrů v obvodu. Dvojpólem bude protékat proud I_x , který modifikuje proudové poměry mezi v uzlech a a b . Dojde i k změně původních uzlových napětí.



Obrázek 23.3.1: Začlenění obecného lineárního dvojpólu, popsánoho Théveninovým modelem do obvodu [Bio04, s. 78]

Původní rovnice popisující rovnováhu proudů v uzlu a musí být na pravě straně doplněna o proud I_x , vytékající ven z uzlu, a v uzlu b o proud I_x se záporným znaménkem, protože vtéká dovnitř uzlu b . Navíc uzlová napětí U_a a U_b jsou nyní vázána podmínkou

$$Z_i I_x + U_b = U_i + U_a, \text{ nebo } U_i = Z_i I_x + U_b - U_a \quad (23.3.1)$$

Všechny tyto modifikace lze zahrnout do nové soustavy rovnic MMUN:

Vektor neznámých uzlových napětí je rozšířen o další neznámou, I_x . Počet rovnic je rovněž zvětšen o jedničku, a to o výše uvedenou podmínce mezi uzlovými napětími U_a a U_b . Přitom napětí U_i je začleněno do vektoru známých budicích veličin na levé straně. Modifikace rovnic 1. KZ pro uzly a a b je provedena zápisem $+1$ a -1 do sloupce " I_x ".

Právě provedený zápis je návodem, jak pomocí MMUN analyzovat například obvody obsahující zdroj napětí. Impedance Z_i může být i nulová, pak se bude jednat o ideální zdroj napětí. Při $U_i = 0$ a $I_i = 0$ lze modelovat zkrat mezi uzly a počítat proud, tekoucí tímto zkratem.

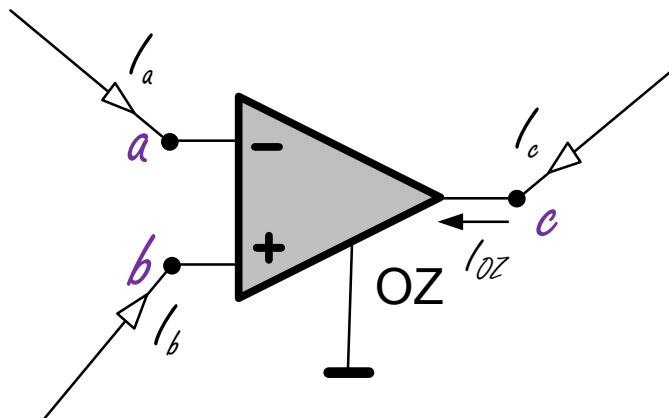
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} U_a \\ I_a \\ \hline U_b \\ I_b \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \hline U_i \\ I_i \end{array} \\
 a \\
 b
 \end{array} = \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 U_a & U_b & & & I_x \\
 I_a & I_a & \dots & +1 & U_a \\
 I_b & I_b & \dots & -1 & U_b \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 U_i & U_i & \dots & Z_i & I_x
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

razítka

Obrázek 23.3.2: Razítka v pseudoadmitanční matici [Bio04, s. 79]

23.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA

Ideální OPAMP, na obr. 23.4.1 po vložení do obvodu způsobí ztotožnění uzlových napětí U_a a U_b , a modifikaci proudových poměrů v uzlu c .



Obrázek 23.4.1: Ideální operační zesilovač typu VFA

Ve spodním přídavném řádku je zapsána rovnice

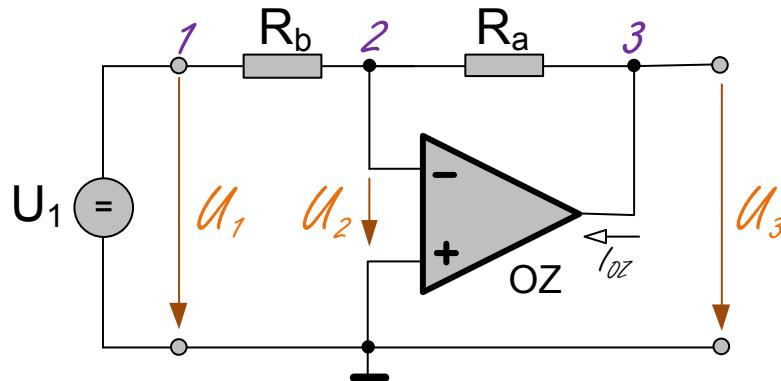
$$0 = 1 \cdot U_a - 1 \cdot U_b \quad (23.4.1)$$

Výsledek řešení se nezmění, jestliže obě strany této rovnice vynásobíme libovolným nenulovým číslem. Ve spodním řádku tedy může být namísto $[1, -1]$ například $[15, -15]$. Je-li jeden ze vstupů OZ spojený s referenčním uzlem, neobjeví se příslušné uzlové napětí v rovnicích a proto v posledním řádku bude figurovat jen jedna jednička místo uvedené dvojice. Jednička v řádku c a sloupci I_{OZ} reprezentuje připočtení proudu I_{OZ} do celkové bilance proudů, vytékající z uzlu c .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & U_a & U_b & U_c & & I_{OZ} \\
 \hline
 a & I_a & & & \dots & \\
 b & I_b & & & \dots & \\
 c & I_c & & & \dots & +1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 & +1 & -1 & & \dots & I_{OZ} \\
 \hline
 \end{array} \\
 = \\
 \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & U_a & U_b & U_c & & I_{OZ} \\
 \hline
 a & I_a & & & \dots & \\
 b & I_b & & & \dots & \\
 c & I_c & & & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 & +1 & -1 & & \dots & I_{OZ} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Obrázek 23.4.2: MMUN - pro ideální OPAMP typu VFA

Příklad 23.4.1. Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 23.4.3. Napište rovnice MMUN.



Obrázek 23.4.3: Invertující zesilovač

Rovnice MMUN budou v maticovém zápisu vypadat takto: Předposlední rovnice říká, že uzlové napětí U_1 je rovno napětí signálového zdroje U_{IN} . Jednička v posledním řádku reprezentuje jednoduchou rovnici $U_2 = 0$. Ačkoliv je obvod poměrně jednoduchý, je pro ruční řešení neefektivní, neboť jsme získali soustavu o 5 rovnic a 5 neznámých.

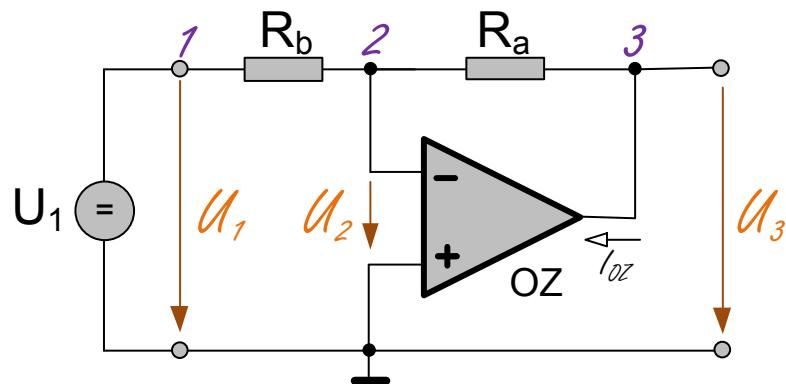
Příklad 23.4.2. Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 23.4.4. Napište rovnice MMUN.

Příklad 23.4.3. Uvažujme diferenciální zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 23.4.5. Napište rovnice MMUN.

U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
G_b	$-G_b$		-1		U_1	
$-G_b$	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

* =

Tabulka 23.4.1: Invertující zesilovač



Obrázek 23.4.4: Neinvertující zesilovač

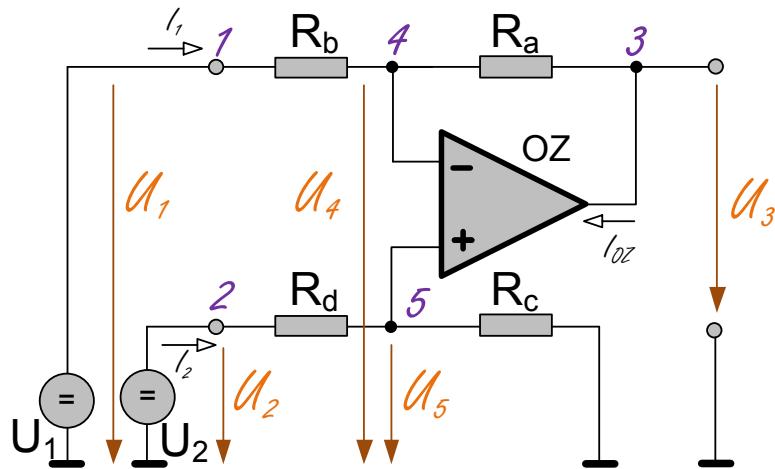
U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
			-1		U_1	
	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

* =

Tabulka 23.4.2: Neinvertující zesilovač

23.5 Napěťový dělič

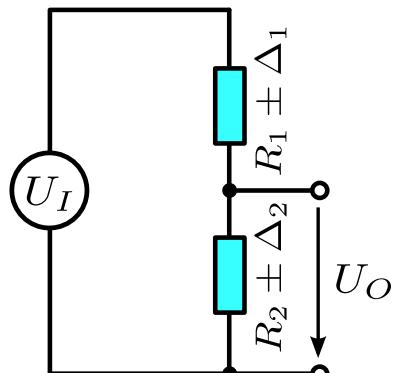
V elektronických soustavách se největších přesností dosahuje u rezistorů, kde je standardně zaručována chyba menší než 1%, u přesných 0.1% a u velmi přesných 0.01%.



Obrázek 23.4.5: Diferenciální zesilovač

Tabulka 23.4.3: Diferenciální zesilovač

Bude nás zajímat jaký vliv má tolerance rezistorů na výsledný poměr výstupního ku vstupnímu napětí a také, zda-li při různě zvoleném poměru těchto rezistorů se bude měnit velikost chyby, ačkoliv budou mít stejnou přesnost. Intuitivně předpokládáme, že nejnepríznivější situace nastane, když hodnoty použitych rezistorů padnou na opačné strany tolerančních pásem, jenž reprezentuje Δ_1 a Δ_2 tj. $R_2 - \Delta_2 R_2$ a $R_1 + \Delta_1 R_1$ nebo $R_2 + \Delta_2 R_2$



Obrázek 23.5.1

a $R_1 = \Delta_1 R_1$. V obou případech bude chyba stejná, proto si vybereme například první případ a zapišeme (rov. 23.5.1).

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2 - \Delta_2 R_2}{R_1 + \Delta_1 R_1 + R_2 - \Delta_2 R_2} \quad (23.5.1)$$

a po úpravě

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2}$$

Polynom ve jmenovateli rozvineme do následující podoby

$$[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) = (1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 + (1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1$$

$$(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 = [(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - (1 + \Delta_1)R_2 - (1 - \Delta_2)R_1$$

a získáme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - [(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}$$

Nyní vydělíme jmenovatel i čitatel $(R_1 + R_2)$ a dostaneme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta_2)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)] - \frac{[(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (23.5.2)$$

Standardně rezistory volíme se stejnou tolerancí, tedy $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ a získáme výslednou rovnici pro poměr $\frac{U_o}{U_i}$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta) + (1 - \Delta)] - \frac{[(1 + \Delta)R_2 + (1 - \Delta)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (23.5.3)$$

Řekněme například, že pro návrh děliče máme k dispozici rezistory s tolerancí 1% a vstupní napětí je 1 V. Obvod, ve kterém je dělič použit, umožňuje volit různé poměry, ale jejich součet je konstantní. Na otázku jaký poměr zvolit, abychom při dané toleranci rezistorů dostali výstupní napětí s největší přesností odpovídá následující tabulka.

R_1	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$19k\Omega$
R_2	$19k\Omega$	$10k\Omega$	$1k\Omega$
U_{out}	0,950	0,500	0,050
U_{out}^*	0,949	0,495	0,049
$\varepsilon_r[\%]$	0,101	1,000	1,883

Tabulka 23.5.1

Kapitola 24

Dynamické pochody v lineárních obvodech

Obsah

24.1 Fyzikální podstata přechodných dějů	230
24.1.1 Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti	231
24.2 Přechodný jev kmitavého obvodu	235

24.1 Fyzikální podstata přechodných dějů

V obvodu, který je v ustáleném stavu, nechť dojde buďto

- ke změně parametru aktivního prvku (např. připojení nebo odpojení zdroje napětí nebo proudu),
- ke změně parametru pasivního prvku (např. zvětšení nebo zmenšení odporu, indukčnosti nebo kapacity),
- ke změně topologické struktury (např. přerušení větve, spojení větve nakrátko, připojení další větve).

Kteroukoliv z uvedených změn dostaneme nový obvod jemuž přísluší nový *ustálený stav*; tento stav však nenastane okamžitě. Zmíněná změna přiveze obvod do *neustáleného stavu*, v němž odezvy napětí a proudů - nazýváme je **přechodnými jevy** - se postupně přibližují k hodnotám nového ustáleného stavu. Přechodné jevy, ač - přesně vzato - probíhají v nekonečně dlouhé době, jsou v praxi jevy krátkodobými, neboť odezvy se trvale "dostatečně těsně" přibliží k hodnotám nového stavu již v poměrně krátké době - v běžných případech jsou to mikrosekundy až milisekundy.

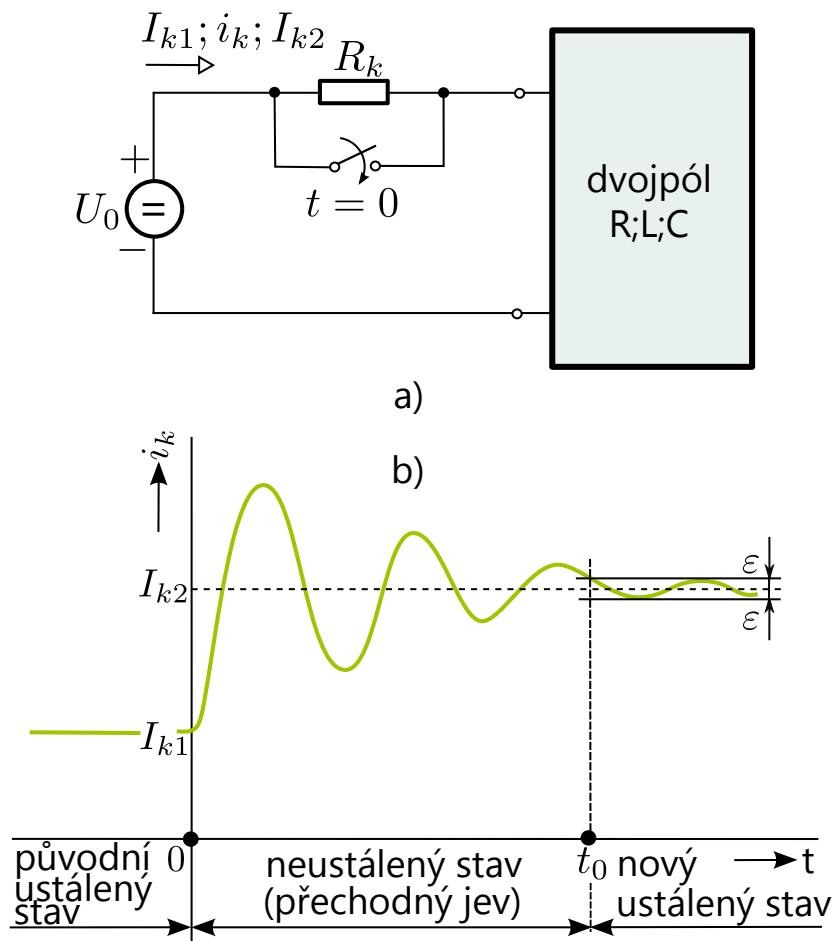
Naskytá se otázka, proč odezvy obvodu obecně nepřecházejí z původního do nového ustáleného stavu skokem a proč dochází k neustálenému stavu obvodu. Obvod má elektromagnetickou energii $W(t)$, která je součtem energií elektrického pole kondenzátoru $W_e(t)$ a energií magnetického pole cívek $W_m(t)$. Elektromagnetická energie obvodu

$$W(t) = \sum_k W_{e_k}(t) + \sum_k W_{m_k}(t)$$

je tedy funkcí napětí na jeho kondenzátorech a proudů v jeho cívkách. Protože tyto veličiny určují energetický stav obvodu, nazýváme je **stavovými veličinami**.

Elektrické výkony P v reálném elektrickém obvodu mají z fyzikálních důvodů vždy konečnou hodnotu. U obvodů, které jsou dostatečně adekvátními modely respektujícími tuto skutečnost (nazýváme je obvody s konečnými výkony) je to postačující podmínkou pro to, aby jejich energie $W = W(t)$ byla spojitou funkcí času (neboť $P = \frac{dW}{dt}$). Z uvedených vztahů pro energii obvodu $W(t)$ je patrné, že $W = W(t)$ bude spojitou funkcí, jsou-li stavové veličiny *spojitými funkcemi*. To znamená, že hodnota stavových veličin v okamžiku před vznikem přechodného jevu je táž jako v okamžiku po jeho vzniku. Pro přechodný jev v okamžiku $t = 0$ platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0_-} u_c(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} u_c(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0_-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} i_L(t) \quad (24.1.1)$$



Obrázek 24.1.1: K objasnění pojmu "neustálený stav" a "přechodný jev"

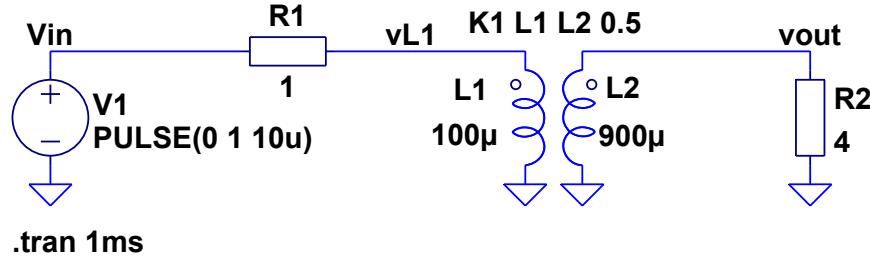
24.1.1 Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti

Příklad 24.1.1. Transformátor: Na primární vinutí vzduchového transformátoru s činitelem $k < 1$ je v čase $t = 0$ připojen zdroj napětí $U_1 = \text{konst}$. Formulujte postup pro výpočet odezv $i_1(t)$ a $i_2(t)$ pro obecné parametry zapojení a výsledky ověřte simulací pro následující hodnoty: $U_1 = 1V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, transformátor má převod $1 : 3$.

Klasické řešení: Podle II. Kirchhoffova zákona platí soustava rovnic:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_1 \quad (24.1.2)$$

A transformer with two windings, 1 to 3 turns winding ratio



Obrázek 24.1.2: Transformer.asc: Zapojení vzduchového transformátoru pro simulaci v programu LTSpice

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (24.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + L_1 \lambda & L_{12} \lambda \\ L_{12} \lambda & R_2 + L_2 \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (24.1.4)$$

$$(R_1 + L_1 \lambda) - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (24.1.5)$$

$$R_1 R_2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + L_1 L_2 \lambda - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (24.1.6)$$

$$\lambda^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + R_1 R_2 = L_1 L_2 \quad (24.1.7)$$

$$\lambda^2 \left(\frac{L_1 L_2 - L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) + \left(\frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2} \right) \lambda + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0 \quad (24.1.8)$$

Zavedeme-li $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$, $k = \frac{L_1^2}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $k^2 = \frac{L_1^2}{L_1 L_2}$, $\sigma = 1 - k^2$ dostaneme

$$\sigma \lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{\tau_2} = 0 \quad (24.1.9)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\sigma \tau_1 \tau_2} = 0 \quad (24.1.10)$$

Je-li $\lambda_1 = -\beta + \alpha$ a $\lambda_2 = -\beta - \alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (24.1.11)$$

$$\beta = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)^2 + \frac{4\sigma}{\tau_1 \tau_2}} \quad (24.1.12)$$

Jelikož $k < 1$; je $0 < \sigma < 1$; rozborem rovnice 24.1.12 plyne, že pak je $\alpha \neq 0$, reálné. Soustava rovnic 24.1.2 má tedy obecné řešení

$$i_1(t) = i_{10} + i_{1p} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{U_0}{R} \quad (24.1.13)$$

$$i_2(t) = i_{20} + i_{2p} = K_3 e^{\lambda_1 t} + K_4 e^{\lambda_2 t} \quad (24.1.14)$$

Integrační konstanty K_1, K_2, K_3 a K_4 určíme z matematických počátečních podmínek: $i_1(0) = i_2(0) = 0$ (což jsou zároveň fyzikální počáteční podmínky) a $\frac{di_1}{dt}|_{t=0}, \frac{di_2}{dt}|_{t=0}$, které určíme z rovnic 24.1.2 pro $t = 0$:

$$L_1 i'_1 + L_{12} i'_2 = U_0 \Rightarrow i'_1 = \left(\frac{U_0 - L_{12} i'_2}{L_1} \right) \quad (24.1.15)$$

$$L_2 i'_2 + L_{12} i'_1 = 0 \quad (24.1.16)$$

Dále postupujeme tak, že do druhé rovnice dosadíme vyjádřenou první derivaci primárního proudu z první rovnice a získáme vztah pro první derivaci sekundárního proudu v čase $t = 0$:

$$\frac{di_1}{dt}|_{t=0} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (24.1.17)$$

$$\frac{di_2}{dt}|_{t=0} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (24.1.18)$$

Aplikací těchto počátečních podmínek na obecné řešení 24.1.13 plynou vztahy

$$i_1(0) = K_1 + K_2 + \frac{U_0}{R} ; \quad \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \quad (24.1.19)$$

$$i_2(0) = K_3 + K_4 ; \quad -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_3 + \lambda_2 K_4 \quad (24.1.20)$$

Z první a třetí rovnice vypočítáme $K_1; K_2$, ze druhé a čtvrté rovnice $K_3; K_4$. Dosazením do rovnice 24.1.13 dostaneme po úpravě odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$. Speciálně pro $R_1 = R_2 = R; L_1 = L_2 = L$ je

$$i_1(t) = \frac{U_0}{2R} \left(2 - e^{-\frac{t}{\tau_3}} - e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (24.1.21)$$

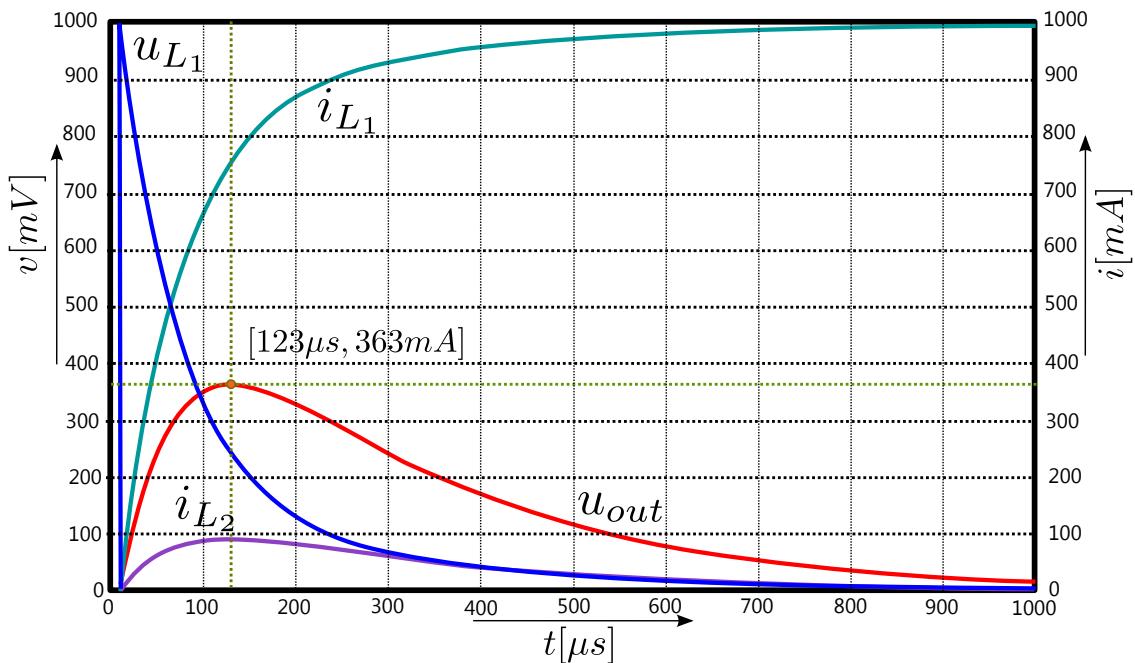
$$i_2(t) = \frac{U_0}{2R} \left(-e^{-\frac{t}{\tau_3}} + e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (24.1.22)$$

kde je $\tau_3 = \frac{L+L_{12}}{R}; \tau_4 = \frac{L-L_{12}}{R}$

Operátorové řešení: Laplaceovou transformací rovnice 24.1.2 dostáváme

$$(R_1 + pL_1)I_1(p) + pL_{12}I_2(p) = \frac{U_0}{p} \quad (24.1.23)$$

$$pL_{12}I_1(p) + (R_2 + pL_2)I_2(p) = 0 \quad (24.1.24)$$



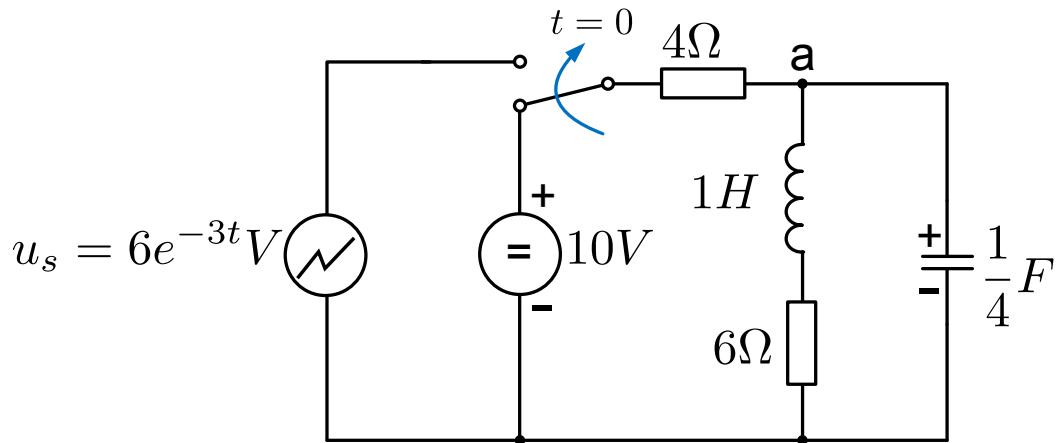
Obrázek 24.1.3: Odezva na jednotkový skok transformátoru s parametry: $k = 0.5, L_1 = 100\mu H, L_2 = 900\mu H$

Zavedeme $\sigma; \tau_1; \tau_2$, vypočítáme obrazy proudů a jejich zpětnou transformací dostaneme rovnice pro odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$.

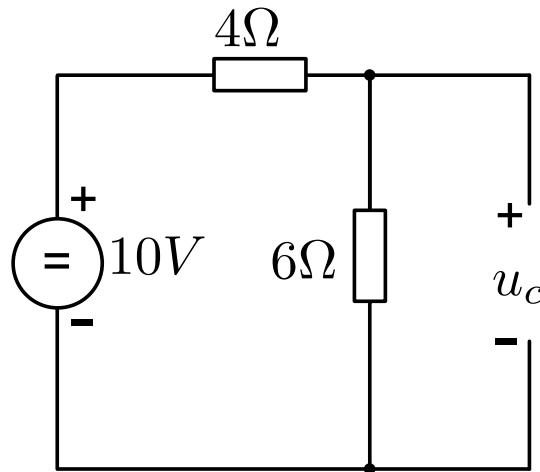
Příklad 24.1.2. Najděte odezvu napětí na kondenzátoru $u_c(t)$ obvodu na obrázku 24.1.4 pro $t > 0$. (zdroj [Dorf])

Řešení: Nejdříve stanovíme počáteční podmínky, které vyplývají z ustáleného stavu v době $t = 0^-$. Obvod na obr. 24.1.4 můžeme překreslit do podoby na obr. 24.1.5

$$u_c(t) = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad [V] \quad (24.1.25)$$



Obrázek 24.1.4: Obvod k příkladu 24.1.2



Obrázek 24.1.5: Obvod k příkladu 24.1.2

24.2 Přechodný jev kmitavého obvodu

Kmitavým obvodem máme na mysli obvod s jedním stupněm volnosti, složeného z odporu R , kapacity C a indukčnosti L , zapojených v sérii. Je jedním z nejdůležitějších případů elektrotechnické praxe. Dosud probírané případy (obvod RL a RC) jsou vždy určitým zjednodušením úplného obvodu s jedním stupněm volnosti, vzniklé tak, že buď indukčnost obvodu, nebo kapacita jsou zanedbatelné vzhledem k ostatním prvkům. Rozbor přechodného stavu kmitavého obvodu (dále stručně obvodu RLC) umožňuje stanovit směrnice pro možnost tohoto zjednodušení a jeho důsledky.

Zopakujme, že přechodný stav, je vždy dán superpozicí nového ustáleného stavu a vlastní přechodné složky, jejíž průběh závisí jen na vlastnostech obvodu a počátečních podmínkách (a nikoliv na průběhu vstupního signálu), proto nejdříve budeme řešit tzv. *volný stav obvodu*, tj. stav, kdy vnější působení na vstupu je nulové. Za těchto okolností může v obvodu existovat přechodný jev, je-li v obvodu (tj. v akumulačních prvcích) na počátku nahromaděná určitá energie. Vzhledem k tomu, že to může být jednou energie elektrického pole v kondenzátoru, jednou energie magnetického pole v cívce, je počáteční stav úplně určen, známe-li hodnoty napětí na kapacitě a proudu v indukčnosti v počátečním okamžiku; matematicky vyjádřeno, stanovíme počáteční podmínky vždy ve tvaru

$$u_C(0) = U_{C_0} \quad i(0) = I_0. \quad (24.2.1)$$

Protože za volného stavu jsou vstupní svorky spojeny *nakrátko*, je rovnice pro proud v obvodu

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (24.2.2)$$

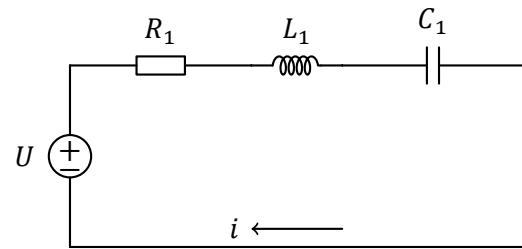
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + U_{C_0} = 0 \quad (24.2.3)$$

Řešení provedem pomocí Laplaceovy transformace. K přihlédnutím k počátečním podmínkám [24.2.2](#) dostaneme rovnici

$$I(p)(R + Lp + \frac{1}{pC}) = I_0L - \frac{U_{C_0}}{p}, \quad (24.2.4)$$

a z ní

$$I(p) = \frac{pCLI_0 - CU_{C_0}}{p^2LC + pRC + 1}. \quad (24.2.5)$$



Obrázek 24.2.1: Schéma sériového kmítavého obvodu

Kapitola 25

Lineární obvody v harmonickém ustáleném stavu

Obsah

25.1 Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty	238
25.2 Obvody s nastavitelnými parametry	242

V této kapitole se seznámíme se *symbolicko-komplexní metodou* (SKM), jež má základní důležitost pro teorii obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Potom prozkoumáme vlastnosti jednodušších obvodů v tomto stavu a metody jejich analýzy. Posléze pojednáme o elektrickém výkonu v obvodech a o nejdůležitějších otázkách přenosu energie [May75, s. 60].

25.1 Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty

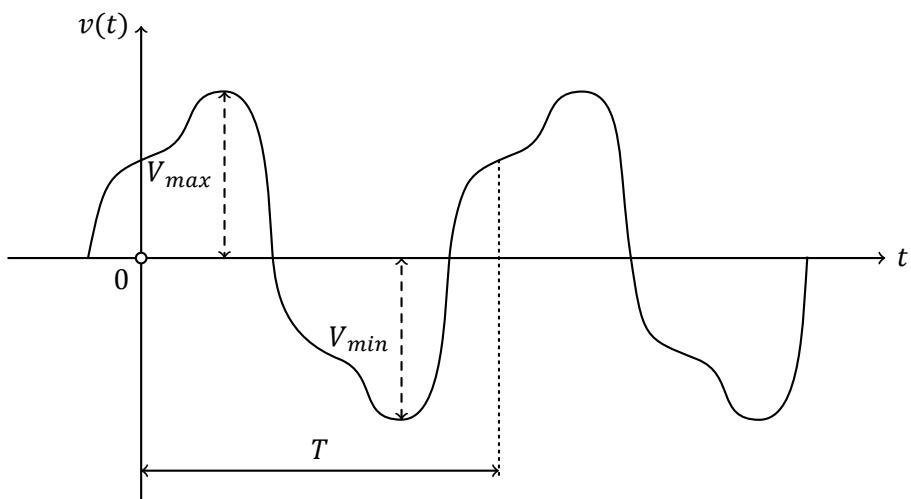
Periodickou veličinou nazýváme takovou veličinu v , jejíž závislost na čase lze vyjádřit periodickou funkcí, pro níž existuje konstanta $T > 0$ taková, že pro každé t platí vztah

$$v(t + T) = v(t), \quad (25.1.1)$$

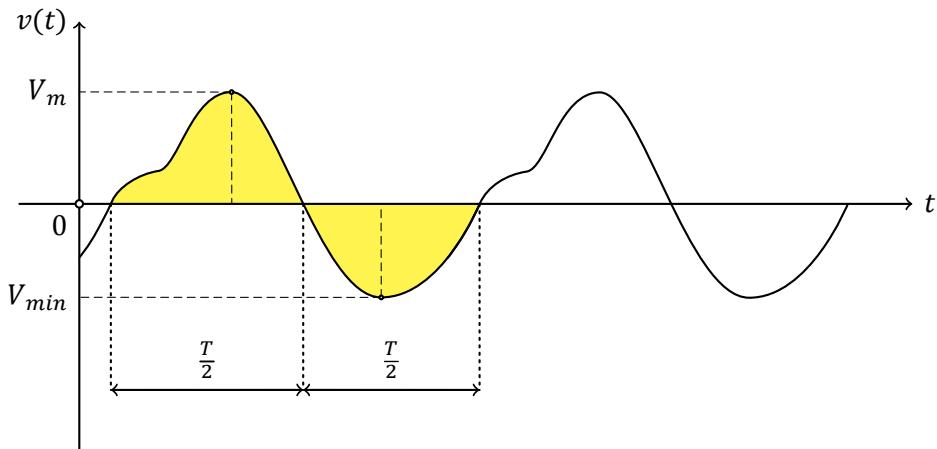
Konstanta T se nazývá **perioda** resp. *doba kmitu*. V aplikacích se zpravidla používá nejmenší kladná perioda, tzv. *základní perioda*; pro stručnost budeme hovořit pouze o periodě. Je-li dána periodická veličina na jakémkoliv intervalu $(t_0, t_0 + T)$, je tím zřejmě definována pro všechna $t > t_0$. Průběh veličiny v na jakémkoliv intervalu délky T se nazývá **cyklem**. Počet cyklů za jednotku času (za sekundu) udává **kmitočet**, nebo též **frekvenci** periodické veličiny

$$f = \frac{1}{T}, \quad (25.1.2)$$

V elektrotechnice rozdělujeme periodické veličiny do dvou skupin:

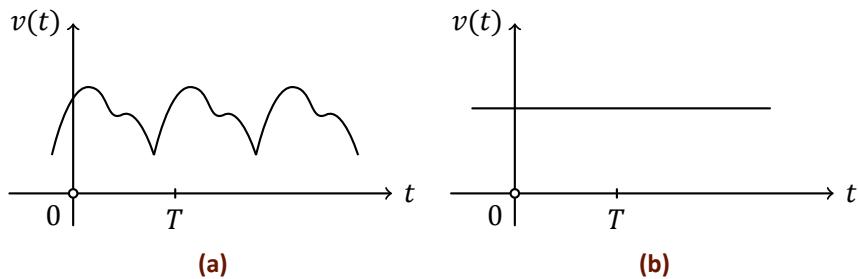


Obrázek 25.1.1: Příklad **periodické veličiny** $v = v(t)$ pro kterou platí $v(t + T) = v(t)$



Obrázek 25.1.2: Časový průběh **střídavé veličiny** $v = v(t)$, pro kterou platí, že obsahy ploch v jednom cyklu nad osou t a pod osou t jsou totožné

- Veličiny v , jež během svého cyklu změní znaménko (obr.25.1.1) nazýváme **kmitavé**. Speciálním případem kmitavých veličin jsou **střídavé veličiny**, jež mají tu vlastnost, že po dobu $T/2$ jsou trvale kladné, po dobu $T/2$ naopak záporné a obsahy ploch omezených grafem funkce $v = v(t)$ v jednom cyklu nad osou t a pod osou t jsou *totožné* (obr. 25.1.2).
- Veličiny v , jež *nemění své znaménko*, tj. jsou trvale kladné nebo trvale záporné (obr.25.1.3) nazýváme **pulsující**. Speciálním případem jsou **stejnosměrné veličiny**, které nemění svou hodnotu, tj. $v = \text{konst}$ (obr.25.1.3 (b)).



Obrázek 25.1.3: Časový průběh pulsující periodické veličiny a konstantní veličiny

Praktický význam mají zejména tyto hodnoty periodických veličin:

- *Maximální hodnota* V_m periodické veličiny v , tj. největší hodnota, které tato veličina dosahuje $v_m = \max v(t)$

- *Minimální hodnota* V_{min} periodické veličiny v , tj. nejmenší hodnota, které tato veličina dosahuje $v_m = \min v(t)$

Maximální a minimální hodnoty střídavé veličiny se nazývají též *vrcholovými hodnotami* (kladnými nebo zápornými), obr. 25.1.1 a 25.1.2.

Střední hodnota veličiny v v intervalu $\langle t_i, t_j \rangle$ je

$$V_s = \frac{1}{t_j - t_i} \int_{t_i}^{t_j} v(t) dt \quad (25.1.3)$$

U periodické veličiny se spravidla počítá střední hodnota v jedno cyklu. U střídavé veličiny je v jednom cyklu $V_s = 0$, a proto střední hodnotu vyjadřujeme v takovém intervalu v němž je $v \geq 0$.

Efektivní hodnota periodické veličiny v intervalu $\langle 0, T \rangle$ je

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (25.1.4)$$

U periodických napětí a proudů má praktický význam především jejich efektivní hodnota. Efektivní hodnotu periodického proudu $i = i(t)$ procházejícího konstatním odporem R lze interpretovat jako stejnosměrný proud I , při němž se za dobu T vydine v odporu R stejná tepelná energie, jako průchodem proudu i . Podle Joulova-Lenzova zákona je totiž

$$RI^2T = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt} \quad (25.1.5)$$

z čehož lze určit I v souladu s rovnicí 25.1.4. Obdobně lze fyzikálně interpretovat efektivní hodnotu napětí.

Střední hodnotu periodického proudu $i = i(t)$ lze fyzikálně interpretovat jako stejnosměrný proud I_s , jimž se za dobu T přenese stejný náboj Q jako proudem i :

$$Q = I_s T = \int_0^T i(t) dt \quad (25.1.6)$$

z čehož plyne I_s v souladu s rovnicí 25.1.3.

Efektivní hodnotu napětí (proudů) lze změřit např. feromagnetickým, elektrodynamickým nebo tepelným voltmetrem (ampérmetrem). Střední hodnotu napětí (proudů) magnetoelektrickým voltmetrem (ampérmetrem) a střední hodnotu výkonu elektrodynamickým wattmetrem.

Střídavou veličinu v lze též do jisté míry charakterizovat činitelem tvaru β , činitelem výkyvu γ a činitelem plnění α definovanými vztahy

$$\beta = \frac{V}{V_s}, \quad \gamma = \frac{V_m}{V}, \quad \alpha = \frac{V_s}{V_m} \quad (25.1.7)$$

Je zřejmé, že platí $\alpha\beta\gamma = 1$.

V elektrotechnice mají velkou důležitost periodická napětí a proudy, jejichž závislost je dána sinusovou nebo kosinusovou funkcí, tj.

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (25.1.8)$$

nebo

$$v = V_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (25.1.9)$$

kde V_m , ω , φ jsou konstanty (obr. 25.1.4)

Jelikož, tato napětí, resp. proudy představují *harmonické kmity*, nazýváme je *harmonicky proměnné*, nebo krátce *harmonická napětí* resp. *harmonická proudy*. Konstanta V_m je maximální hodnota, či-li *amplituda*, $\omega t + \varphi$ je *fáze*, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ je *úhlový kmitočet* a φ je *počáteční fáze* harmonické funkce.

Rozdíl fází dvou harmonických veličin (stejného kmitočtu) nazýváme *fázový posun*.

Příklad 25.1.1. Pro harmonickou veličinu, určete efektivní hodnotu, střední hodnotu, činitele tvaru, činitele výkyvu a činitele plnění

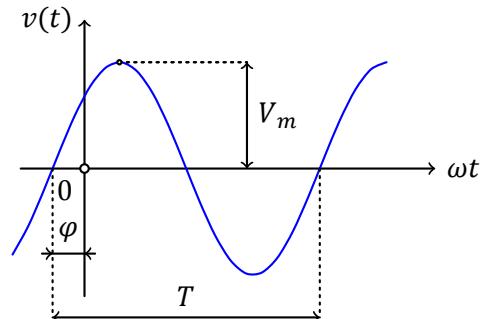
Řešení: Efektivní hodnota je:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \doteq 0.707 V_m \end{aligned} \quad (25.1.10)$$

Podrobný výpočet tohoto integrálu pomocí substituce $\omega t + \varphi = \frac{\alpha}{2}$ je poněkud zdlouhavější:

$$\omega t + \varphi = \frac{\alpha}{2} \rightarrow 2(\omega t + \varphi) = \alpha$$

$$\omega dt = \frac{1}{2} d\alpha \rightarrow dt = \frac{1}{2\omega} d\alpha$$



Obrázek 25.1.4: Harmonická funkce $v = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ resp. $v = V_m \cos(\omega t + \varphi')$ kde je $\varphi' = \varphi - \frac{T}{4}$

Nesmíme zapomenout přepočítat meze $\alpha_d|_{t=0} = 2\varphi$ a $\alpha_h|_{t=T} = 4\pi + 2\varphi$ nového integrálu.

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{V_m}{2T\omega} \int_{\alpha_d}^{\alpha_h} \cos^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{V_m}{4\pi} \int_{\alpha_d}^{\alpha_h} \frac{1 + \cos \alpha}{2} d\alpha = \frac{V_m}{4\pi} \left(\frac{\alpha}{2}|_{\alpha_d}^{\alpha_h} + \frac{1}{2} \sin \alpha|_{\alpha_d}^{\alpha_h} \right) \\ &= \frac{V_m}{4\pi} \left(2\pi + \varphi - \varphi + \frac{1}{2} \sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) = \frac{V_m}{2}. \end{aligned}$$

Při zjednoušování integrálu je užito goniometrického vzorce $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ a faktu $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Střední hodnota kladné půlvlny je

$$V_s = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4} - \frac{\varphi}{\omega}}^{\frac{T}{4} - \frac{\varphi}{\omega}} V_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\varphi}{\omega}}^{-\frac{T}{2} - \frac{\varphi}{\omega}} V_m \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{2}{\pi} V_m \doteq 0,637 V_m$$

činitele tvaru, výkyvu a plnění jsou

$$\beta = \frac{V}{V_s} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,111; \quad \gamma = \frac{V_m}{V} = \sqrt{2} \doteq 1.414; \quad \alpha = \frac{V_s}{V_m} = \frac{2}{\pi} \doteq 0,637$$

25.2 Obvody s nastavitelnými parametry

V praxi se setkáváme s obvody, u nichž lze (spojitě nebo stupňovitě) nastavit odporníku, kapacitu kondenzátoru, vlastní nebo vzájemnou indukčnost cívek, amplitudu, fázi nebo kmitočet zdroje (napětí nebo proud). Nazveme je *obvody s nastavitelnými parametry*.

References

- [May75] D. Mayer. *Úvod do teorie elektrických obvodů*. Západočeská univerzita v Plzni, 1975. 355 pp. (cit. on p. 238).

Část X

Elektronické součástky

Kapitola 26

Základní zákony elektromagnetismu

Obsah

26.1 Zákon elektromagnetické indukce	246
26.2 Spřažený tok vzduchové cívky	254
26.3 Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem	255

V této teoreticky změřené kapitole budou shrnuty základní fyzikální zákony, kterými se řídí elektromagnetické jevy a jejichž znalost bude nezbytná při studiu následujících praktičtěji zaměřených kapitol. Mzi nejdůležitější patří zákon elektromagnetické indukce. Velký praktický váznam má jeho zobecnění i pro případy nejsložitější, jakými jsou *nelineární* a navíc *parametrické* magnetické obody. Důležitým pojmem je *spřažený* magnetický tok cívky. Pro hlubší pochopení všech zákonitostí bude vhodné upozornit na *topologické vlastnosti* elektromagnetického pole. Ukazuje se totiž, že topologický přístup je velice užitečný a silným nástrojem, který významně usnadňuje pochopení [Maxwellových rovnic](#) se všemi jejich důsledky [Pat11, s. 6]. Topologii elektromagnetického pole je proto věnována celá kapitola [27](#)

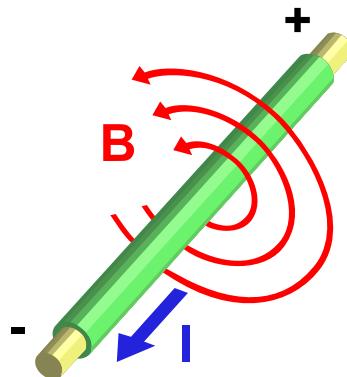
Základní veličinou pro popis magnetických polí a jejich účinků je *vektor magnetické indukce* - **B**. Dle soustavy SI je jednotkou magnetické indukce *tesla* [T] a projevuje se silovými účinky na vodiče protékané proudy a indukováním napětí při jeho změně. Je proto dobře měřitelný. První rovnice (Ampérův zákon) ze souboru Maxwellových rovnic určuje rovnost oběhového integrálu magnetické indukce po uzavřené křivce proudům protékaných vodiči, jež jsou touto křivkou uzavřeny.

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (26.0.1)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m je magnetická konstanta - **permeabilita vakua**. Elektrické proudy jsou stále obklopeny magnetickými poli. Tato pole se dají zesílit cívou s magnetickým jádrem. Na tomto jevu je založen jeden z elementárních principů elektrotechniky.

Protože je tento zákon stěžejní k pochopení ostatních principů, je vhodné si také uvědomit vztah jednotky magnetické indukce k základním jednotkám soustavy SI:

$$1T = 1 \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1 \frac{kg}{C \cdot s} = 1 \frac{kg}{A \cdot s^2} = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$



Obrázek 26.0.1: Elektrický proud ve vodiči způsobuje vznik magnetické pole v jeho okolí.

26.1 Zákon elektromagnetické indukce

Základní laboratorní experimenty, vedoucí k odhalení existence elektromagnetické indukce, uskutečnil *Faraday*¹ r. 1831. Matematickou formulaci *indukčního zákona* v podobě

¹Michael Faraday (1791 - 1867), samouk, zakladatel klasické elektrodynamiky, vynikající experimentátor: Zavedl pojem fyzikálního prostorového pole pomocí siločar, tzv. "trubic"

rovnice

$$u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (26.1.1)$$

stanovil již on sám, postupně význam zákona formálně upřesňovali další badatelé např. *Neumann*² kolem roku 1845. Konečné znění Maxwellovy teorie včetně formulace indukčního zákona do podoby II. Maxwellovy rovnice budoval Maxwell³ velmi pozvolna, v období 1855 až 1873. Z historického pohledu je zajímavé a důležité, že přesné *kvantitativní* experimenty s elektromagnetickou indukcí byly v té době uskutečnitelné pouze pomocí **balistického galvanoměru**. Lze odhadnout, že nebýt tohoto přístroje, přesná matematická formulace indukčního zákona by se praděpodobně opozdila o několik let. Kupodivu, z psychologického hlediska je i v současnosti velmi vhodné vysvětlit princip indukčního zákona pomocí historických pokusů s balistickým galvanoměrem.

Jako každý elektromagnetický měnič energie (tj. motor), obsahuje i *magnetoelektrické měřicí ústrojí* galvanoměru dva akumulátory energie: moment setrvačnosti J otočné části a indukčnost cívky L . Jedná se tedy o kmitavou soustavu 2. řádu. Každou takovou soustavu lze kriticky, případně nadkriticky tlumit - především zařazením tlumícího odporu vhodné velikosti do série s měřicím systémem (tlumení vlivem mechanického třejí je úmyslně konstrukčně potlačeno na zanedbatelnou úroveň). Balistický galvanoměr je cíleně konstruován s velkým momentem setrvačnosti J a s malou tuhostí k_d direkčních pružin, aby měl dlouhou dobu kmitu $T_G = 2\pi\sqrt{J/k_d}$ několik sekund. Proteče-li galvanoměrem krátký proudový impuls $i(t)$ o celkové délce t_i podle obr. 26.1.1, pak lze snadno dokázat, že za předpokladu $t_i \ll T_G$ je první maximální výchylka α_{max} tlumeného pohybu ukazatele přímo úměrná celkovému náboji Q proudového impulsu podle rovnice

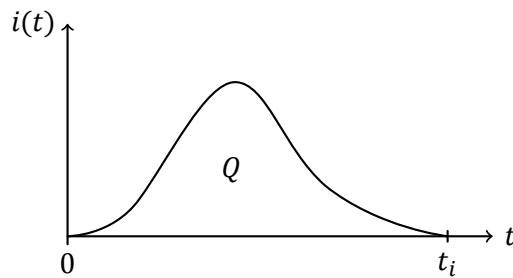
$$\alpha_{max} = k_b Q = k_b \int_0^{t_i} i(t) dt, \quad (26.1.2)$$

kde k_b je *balistická konstanta* použitého galvanoměru. Balistický galvanoměr tedy pracuje jako *integrátor* proudu v přesném matematickém smyslu.

Uvažujme experiment uspořádaný podle obr. 26.1.2. V uzavřeném obvodu galvanoměru se nachází celkový odpor R a tuhá samonosná cívka v podobě kruhového závitu, připojená na dlouhé ohebné zkroucené přívody. Husté zkroucení zajišťuje, že do samotných přívodů se nemůže indukovat žádné napětí, pohybuje-li se cívka v magnetickém poli permanentního magnetu. Při rychlém přesunu z polohy I do vzdálené polohy

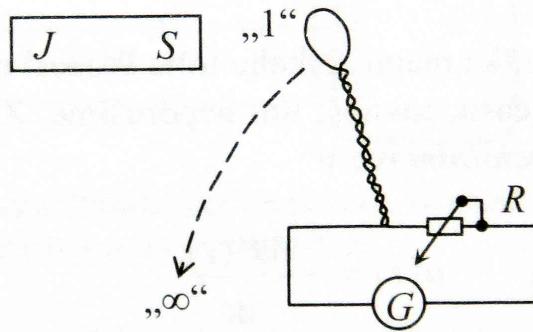
²Franz Ernst Neumann (1798 - 1895), teoretický fyzik, matematik, mineralog. Definoval pojem magnetický vektorový potenciál, formuloval Neumannův vzorec pro vzájemnou indukčnost dvou smyček. Učitel G. R. Kirchhoffa.

³James Clark Maxwell (1831 - 1879), teoretický fyzik, působil na Trinity College university v Cambridge, na King's College v Londýně, posléze první ředitel Cavendishovy laboratoře na univerzitě v Cambridge. Původně se zabýval teoretickou mechanikou a kinetickou teorií plynů. Soustavu čtyř Maxwellových rovnic odvodil především na základě mechanicko-elektrických analogií.



Obrázek 26.1.1: Příklad krátkého proudového impulsu prošlého balistickým galvanoměrem.

∞ klesne v cívce magnetický tok na nulu, časová změna toku zapříčiní vznik indukovaného napětí, napětí protlačí obvodem proudový impuls odpovídající přibližně obr. 26.1.1.



Obrázek 26.1.2: Uspořádání experimentálního pracovište s balistickým galvanoměrem

Za předpokladu kritického nebo nadkritického tlumení má odpor R relativně velkou hodnotu. Proto lze s dobrou přesností zanedbat vnitřní indukčnost měřicího systému galvanoměru a uvažovat, že celé napětí $u(t)$, indukované v cívce při jejím pohybu, spočine pouze na odporu. V uzavřeném okruhu o celkovém odporu R pak platí Ohmův zákon ve tvaru

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}. \quad (26.1.3)$$

Dosadíme-li rovnici 26.1.3 do 26.1.2, po úpravě získáme vztah

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \frac{\alpha_{max} R}{k_b}. \quad (26.1.4)$$

Experimentálně je možno dospět ke dvěma stěžejním poznatkům:

- Při přesunu cívky z polohy 1 do polohy ∞ nezávisí výchylka α_{max} na rychlosti pohybu. (Za předpokladu $t_i \ll T_G$, což je omezení dané nedokonalostí přístroje a nijak nesouvisí se zkoumaným jevem.)

- Při přesunu cívky z polohy l do polohy ∞ zůstává součin $(\alpha_{max} \times R)$ stále konstantní, ménime-li úmyslně velikost odporu R . To jest: při k-násobném zvýšení odporu klesne výchlka k-krát a naopak.

V poloze „1“ prochází plochou cívky magnetický tok Ψ . V poloze „ ∞ “ je zřejmě magnetický tok cívky nulový, tedy $\Psi_\infty = 0$. S ohledem na rovnici (26.1.4) lze pak oba experimentální poznatky interpretovat jediným možným způsobem:

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \text{konst} = \Psi - \Psi_\infty = \Psi. \quad (26.1.5)$$

Experiment lze opakovat s cívkami libovolných rozměrů, tvarů i počtu závitů. Výsledky budou kvalitativně stejné. Veličina Ψ se nazývá *spředený magnetický tok* cívky. Je to míra interakce cívky s magnetickým polem, které spojitě prostupuje celou plochou cívky. Rovnici (26.1.5) lze vyjádřit slovně: Spřadený magnetický tok cívky je úměrný časovému integrálu svorkového napětí na zkoumané cívce. Je určitě výhodné zvolit jedničku jako konstantu úměrnosti mezi tokem Ψ a integrálem napětí. *Pak bude velikost spřadeného toku přímo rovna integrálu napětí.* Určitý integrál v rovnici (26.1.5) lze nahradit integrálem neurčitým, pak je ale nutno přidat obecnou počáteční integrační konstantu Ψ_0 v newtonovském smyslu. Získáme tak zákon elektromagnetické indukce (indukční zákon) v integrálním tvaru

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad [Wb; V, s]. \quad (26.1.6)$$

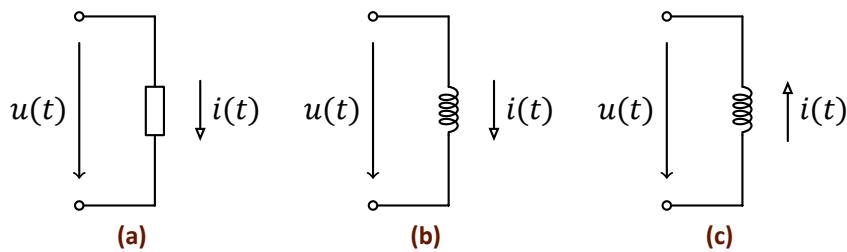
Z rovnice (26.1.6) plyne, že jednotka magnetického toku Weber⁴ má rozdíl [Vs], Budeme-li obě strany rovnice derivovat podle času, rovnost tím neporušíme. Získáme tak ryze matematickou cestou indukční zákon v diferenciálním tvaru

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad \text{resp.} \quad u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (26.1.7)$$

Obě rovnice (26.1.7a), (26.1.7b) se liší znaménkem + nebo – na pravé straně. Volba znaménka souvisí s domluvou, který režim cívky považujeme za základní: zda režim *spotřebičový* podle rovnice (26.1.7a), nebo režim *zdrojový* podle rovnice (26.1.7b). Oba režimy jakéhokoli dvojpólu jsou totiž jednoznačně definovány vzájemnou orientací napětí a proudu podle obr. ???. Odpor nemůže nikdy pracovat jako zdroj, proto slouží jako „normál“ definující *spotřebičovou* orientaci svorkových veličin. Oba režimy cívky se liší níže popsaným způsobem.

Spotřebičový režim:

⁴Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), teoretický fyzik, působil na univerzitách v Gottingenu a v Lipsku. Zakladatel předrelativistické elektrodynamiky. Určil totiž sílu mezi náboji v závislosti nejen na vzdálenosti, ale i na rychlosti a zrychlení, jeho teorie je ale platná pouze pro $v \ll c$. Blízký spolupracovník Gausse.



Obrázek 26.1.3: Vzájemná orientace okamžité hodnoty proudu a napětí ve spotřebičovém a zdrojovém režimu: a) Odpor je vždy spotřebičem. b) Cívka ve spotřebičovém režimu. c) Cívka ve zdrojovém režimu.

- Orientace svorkového napětí $u(t)$ je vůči proudu $i(t)$ souhlasná. Platí rovnice (26.1.7a).
- Cívka je připojena na zdroj napětí $u(t)$, odebírá z něj proud $i(t)$, tedy odebírá ze zdroje elektrickou energii a chová se jako spotřebič. Tuto energii přeměňuje na energii magnetického pole.
- Mezi směrem proudu a směrem toku platí *pravidlo pravé ruky*, PPR.

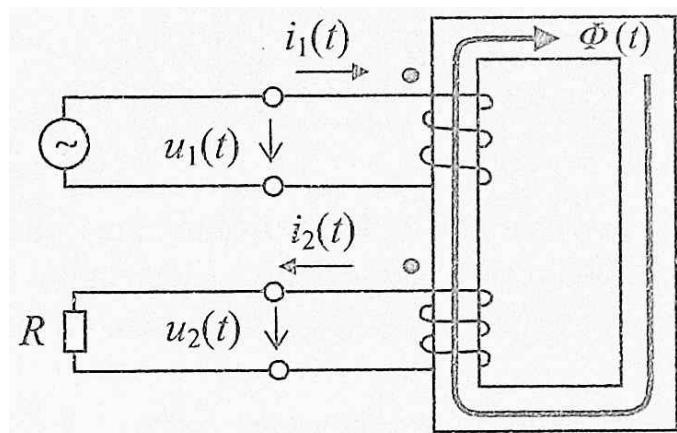
Zdrojový režim:

- Orientace svorkového napětí $u(t)$ je vůči proudu $i(t)$ nesouhlasná. Platí rovnice (26.1.7b).
- Cívka je vložena do proměnného magnetického pole $B(t)$, na jejích svorkách vzniká indukované napětí $u(t)$ (zastaralý výraz: „elektromotorická síla“). Z cívky se stal zdroj elektrického napětí $u(t)$, tj. generátor. Připojíme-li na svorky odporovou zátěž, začne do ní generátor dodávat elektrickou energii.⁵

Z uvedených skutečností lze učinit následující závěr. Volba znaménka v rovnicích (26.1.7a, b) je věcí dohody, ale pouze v tom smyslu, zda zvolíme za základní režim spotřebičový či zdrojový⁶. Například při analýze měničů ve výkonové elektronice je ustáleným zvykem

⁵Faraday s Maxwellem se znali osobně a po dohodě pokládali zdrojový režim cívky za základní, tedy pracovali s rovnicí (26.1.7b). Maxwell navíc pracoval s pojmem „electromotive force P' “, který svým významem přesně odpovídá dnešní „intenzitě elektrického pole“. Postupem času byl doslově přeloženému výrazu „elektromotorická síla“ nešťastně přiřazen v české i zahraniční literatuře význam „napětí“, což ještě více zvýšilo zmitek. Proto je rozumné výraz „elektromotorická síla“ vůbec nepoužívat.

⁶Ojediněle se v literatuře, např. v [5], vyskytne názor, že znaménko v rovnicích (26.1.7a, b) je určeno tím, zda je cívka navinuta pravotočivě nebo levotočivě. To je chybné tvrzení. Pravotočivost či levotočivost cívky naprostě nijak nesouvisí se schopnosti cívky pracovat ve zdrojovém nebo spotřebičovém režimu.



Obrázek 26.1.4: Princip transformátoru. Primární cívka pracuje ve spotřebičovém režimu (PPR), sekundární cívka ve zdrojovém režimu (PLR)

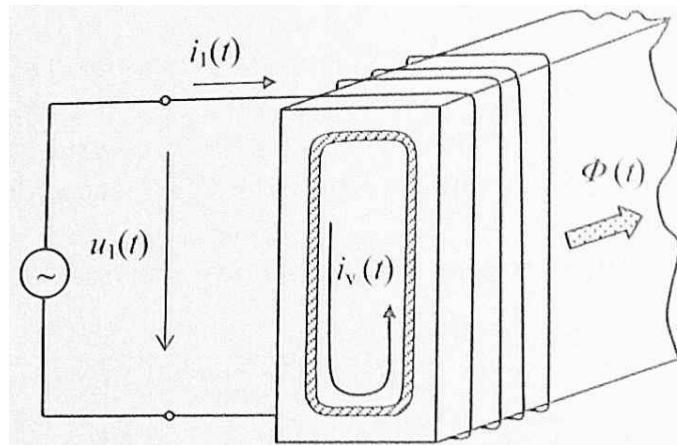
zvolit označení proudu a napětí na indukčnosti podle obr. ??b. Bez ohledu na tuto volbu musíme v konkrétní situaci vždy pečlivě rozlišovat, ve kterém režimu se cívka skutečně nachází. Příklad: primární cívka transformátoru se nachází vždy ve spotřebičovém režimu, sekundární cívka vždy ve zdrojovém režimu. Se zdrojovým či spotřebičovým režimem úzce souvisí *Lenzův princip*⁷. Jedná se o zvláštní případ obecnějšího přírodního principu, vyjadřitelného jako „zákon akce a reakce“. V elektromagnetismu má zákon následující tvar:

Lenzův princip: Proud indukovaný v uzavřené vodivé smyčce vyvolá magnetické pole, které působí vždy proti původnímu budicímu poli, díky němuž indukovaný proud vznikl.

Všimněme si, že zmíněná „uzavřená vodivá smyčka“ se nachází *zdrojovém režimu*: je vložena do magnetického pole, indukuje se v ní napětí $u(t)$, které protlačí vodivým obvodem proud $i(t)$. Proud má ve *zdrojovém režimu* takový směr, že působí proti budicímu magnetickému poli. Příkladem je již zmíněná sekundární cívka transformátoru podle Obr. 1.1-*/« nebo uzavřená smyčka vířivého proudu ve vnitřním prostoru transformátorového plechu podle Obr. 1.1-5.

Integrací rovnice (26.1.7a) lze zpětně dojít k integrálnímu tvaru (26.1.6). Je nutno zdůraznit, že obě rovnice jsou naprostě rovnocenné, navzájem převoditelné, obě nesou stejné množství informace, žádná není důležitější než druhá. Je pravdou, že z psychologického pohledu je indukční zákon snáze pochopitelný v *diferenciálním* tvaru (26.1.7). Pro hluboké porozumění magnetickým jevům je však nezbytné uvědomit si především jeho *integrální* podobu (26.1.6) se všemi matematickými důsledky:

⁷Heinrich Lenz (1804-1865), estonský fyzik, působil na univerzitě v Petrohradu. Princip po něm pojmenovaný objevil r. 1833.

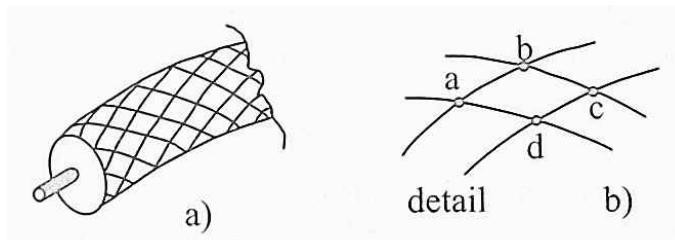


Obrázek 26.1.5: Vznik vřívového proudu uvnitř elektricky vodivého transformátorového plechu. Budicí cívka pracuje ve spotřebičovém režimu (PPR). Elementární smyčka vřívového proudu odpovídá sekundárnímu vinutí a pracuje ve zdrojovém režimu (PLR).

- Spřažený tok je roven integrálu napětí. Zákon platí *univerzálně*, bez ohledu na *linearitu* či *nelineárnu* magnetického obvodu. Rovnice (26.1.6) totiž definuje funkční závislost $\Psi = \Psi(u)$ mezi tokem a napětím, nikoli závislost $\Psi = \Psi(i)$ mezi *tokem a proudem*. Případná nelinearity se totiž týká výlučně závislosti $\Psi = \Psi(i)$, a tudíž nijak nenarušuje platnost rovnice (26.1.6).
- Z předchozího bodu plyne, že v obecném *nelineárním* případě není tok Ψ přímo úměrný proudu i . Přímá úměra $\Psi = Li$ totiž platí pouze ve zvláštním případě *lineárního* magnetického obvodu.
- Rovnice (26.1.6) platí ve spotřebičovém i generátorovém režimu cívky. Problém se znaménkem zůstává stejný jako u rovnice (26.1.7).
- V uzavřené *supravodivé* smyčce platí vždy $u = 0$, i když jí teče konstantní ss. proud. Neurčitý integrál v rovnici (26.1.6) má pak nulovou hodnotu $\int 0 dt = 0$, a zřejmě tedy platí $\Psi(t) = \Psi_0$, kde Ψ_0 je *libovolná* počáteční integrační konstanta. Fyzikálně má konstanta význam počátečního toku, který je v cívce naintegrován z předchozích dějů. Případ $\Psi_0 \neq 0$ odpovídá nabuzenému supravodivému magnetu, jehož tok $\Psi(t) = \Psi_0 = \text{konst.}$ se s časem nemění. Nabuzený supravodivý magnet se proto chová jako *permanentní* magnet. Případ $\Psi_0 = 0$ odpovídá magnetickému stínění pomocí závitu *nakrátko*, např. tzv. Faradayova klec, nebo stínění koaxiálního kabelu podle obr. 26.1.6. Každé oko **a-b-c-d** stínícího pláště tvoří „supravodivý“ závit nakrátko, v němž platí $u = 0$, tedy $\Psi = \int 0 dt = 0$. Proto se do vnitřního prostoru ohraničeného pláště nemůže zvenčí dostat žádné *střídavé* rušivé magnetické pole (jedině pole *stejnosměrné* Ψ_{ss} , ale to je neškodné, protože

nezpůsobuje vznik rušivého napětí ve středním vodiči kabelu; derivace konstanty je totiž nulová: $u(t) = \frac{d\Psi_{ss}}{dt} = 0$.

Na otázku „Proč je magnetický tok úměrný integrálu napětí?“ lze odpovědět pouze následujícím způsobem: „Protože je to jeden ze základních zákonů přírody, jehož správnost se nepodařilo experimentálně nikdy vyvrátit, nýbrž vždy pouze potvrdit.“ Deduktivní odvození indukčního zákona z vyšších přírodních zákonitostí není na úrovni klasické fyziky možné, není uskutečnitelné ani na vyšší úrovni *kvantové elektrodynamiky*⁸. Za povšimnutí stojí, že v diferenciální formě (26.1.7) nebylo přesné kvantitativní ověření indukčního zákona v době objevu proveditelné s ohledem na možnosti tehdejšího přístrojového vybavení. Experiment v nehomogenním poli podle obr. 26.1.2 by byl i v současnosti velmi těžko vyhodnotitelný. Naopak, ověření v integrálním tvaru je velmi snadné⁹. To opravňuje k domněnce vyslovené v historickém úvodu kapitoly.



Obrázek 26.1.6: Plášť koaxiálního kabelu. Každé oko a-b-c-d tvoří závit nakrátko.

Příklad 26.1.1. Supravodivá cívka podle obr. 26.1.7 začne být v okamžiku $t = 0$ napájena ideálním zdrojem napětí $u(t)$. Později na ni začne působit vnější magnetické pole přibližujícího se permanentního magnetu. Jaký vliv bude mít PM na velikost spřaženého toku cívky?

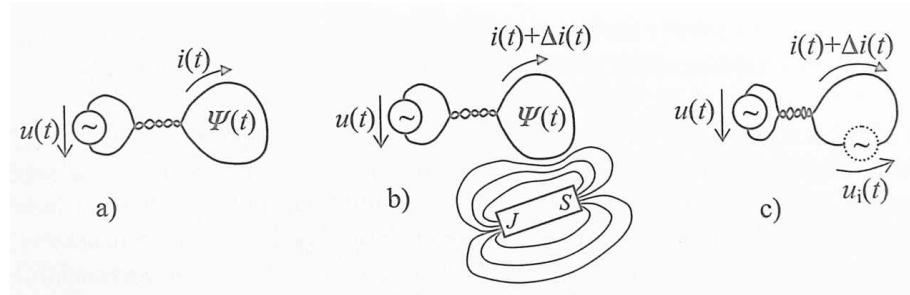
Odpověď plyne přímo z rovnice (26.1.6): $\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt$.

Ze zadání příkladu vyplývá, že počáteční integrační konstanta je nulová. Neurčitý integrál je možno nahradit integrálem určitým. Velikost spřaženého toku je tvrdě definována přiloženým napětím, tedy hodnotou určitého integrálu. Proto externí magnetické

⁸Za objev kvantové elektrodynamiky obdržel Richard P. Feynman (1918-1988) Nobelovu cenu v r. 1965 (Feynmanovy fázorové diagramy a Feynmanův dráhový integrál; nositelé elektromagnetických sil jsou fotony). Vynikající teoretický fyzik, ale i praktik. Celoživotně působil na kalifornském technickém institutu. Během druhé světové války byl členem týmu pracujícího na vývoji americké atomové bomby v Los Alamos (projekt Manhattan).

⁹V současnosti by byl balistický galvanoměr nahrazen operačním zesilovačem zapojeným jako integrační zesilovač. Ten by zpracovával signál ze snímače proudu, např. z proudového bočníku. Po odeznamu proudového impulsu by na výstupu zesilovače zůstalo naintegrováno určité konstantní napětí, jehož velikost by analogicky odpovídala maximální výchylce α_{max} galvanoměru.

pole nemůže spřažený tok cívky nijak změnit. Ideální napěťový zdroj má nulový vnitřní odpor. Proto se supravodivá cívka napájená tímto zdrojem stále chová jako supravodivý závit nakrátko, do něhož nemůže vniknout žádná siločára externího magnetického pole.



Obrázek 26.1.7: K příkladu, a) Supravodivá cívka je napájena ideálním napěťovým zdrojem, b) Později na ni začne působit externí pole pohybujícího se magnetu, c) Náhradní zapojení.

Jev lze vysvětlit následovně. Pohybující se magnet indukuje v cívce přídavné indukované napětí $u(t)$. Toto napětí se přičte k napětí napájecímu a způsobí změnu proudu $\Delta i(t)$ tekoucího cívkou. Podle Lenzova principu začne tento přídavný proud působit proti poli PM. Přídavný proud $\Delta i(t)$ má přesně takovou velikost a směr, že uvnitř závitu dokonale vykompenzuje a zruší externí pole magnetu. Vnější pozorovatel tedy vidí, že supravodivý závit se chová jako magnetický izolant, jemuž se siločáry externího pole vyhnou, a celkový tok cívky není přítomností magnetu nijak ovlivněn. Celá soustava se navíc chová jako elektromechanický měnič energie (tj. motor), který je schopen pracovat v motorovém nebo generátorovém režimu. Pohybující se magnet totiž koná nebo spotřebovává mechanickou práci, protože na něj působí síla. Podle vzájemné okamžité orientace vektorů síly a rychlosti pracuje celá soustava buď jako motor (koná mechanickou práci), nebo jako generátor (spotřebovává mechanickou energii a ukládá ji do zdroje napětí).

26.2 Spřažený tok vzduchové cívky

Experiment s galvanometrem popsaný v předchozí kapitole lze uskutečnit podrobněji ve čtyřech následujících modifikacích označených čísly 1 až 4. Pro vyšší přehlednost budou těmito čísly systgematicky značeny i veličiny v jednotlivých pokusech. Ze čtyř postupně gradujících experimentů vyplýne geometrická interpretace pojmu *spřažený tok* vzduchové cívky. Poznámka: V následujících experimentech se pokusná cívka nachází v generátorovém režimu. Učiníme však dohodu, že velikost toku budeme pro jednoduchost uvažovat v absolutní hodnotě, tj. bez ohledu na znaménko [Pat11, s. 12].

Experiment č. 1: Podle Obr ** je na ohebných zkroucených přívodech umístěna tuhá samonosná cívka, která má jeden závit o ploše ΔS . Plocha musí být *malá*, aby bylo možno předpokládat, že magnetické pole v těsném okolí cívky je *homogenní* (vektor indukce \mathbf{B}_1 , musí být v rámci cívky konstantní). Malé rovinné ploše závitu je pak možno přiřadit vektor $\Delta \mathbf{S}_1$, jehož směr je kolmý na onu rovinu. Opakováním pokusu při různých úhlech α_1 , různě velkých plochách a různě velké indukci lze snadno zjistit, že velikost toku je přímo úměrná:

- veličině $\cos \alpha_1$,
- ploše závitu $\Delta S_1 \equiv \Delta S$,
- magnetické indukce B_1 .

To vede k jednoznačnému závěru, že tok lze vyjádřit jako skalární součin vektoru plochy a vektoru mg. indukce v daném místě „l“:

$$\int_0^{t_i} u(t) dt = \Psi_1 = B_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1. \quad (26.2.1)$$

26.3 Spřažený tok cívky s feromagnetickým jádrem

Principiálně není transformátor nic jiného než soustava vzájemně magneticky vázaných cívek. Pro jednoduchost je v dalším popisu uvažován transformátor s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím, přičemž všechny závěry bude možné později rozšířit i na složitější systémy. Při odvozování matematického modelu transformátoru vyjdeme z Faradayova zákona elektromagnetické indukce (druhá Maxwellova rovnice), který říká, že časová změna magnetického pole vytvoří výrové pole elektrické:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (26.3.1)$$

Vztah platí, uvažujeme-li nulovou velikost posuvného proudu tj. polarizačního a Maxwellova proudu. Tvoří-li smyčku l tenký vodič, indukuje se v něm napětí:

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (26.3.2)$$

V rov. 26.3.2 je úmyslně vynecháno záporné znaménko na pravé straně rovnice. To platí, je-li na vodič (cívku) pohlíženo jako na spotřebič napájený ze zdroje napětí (což odpovídá

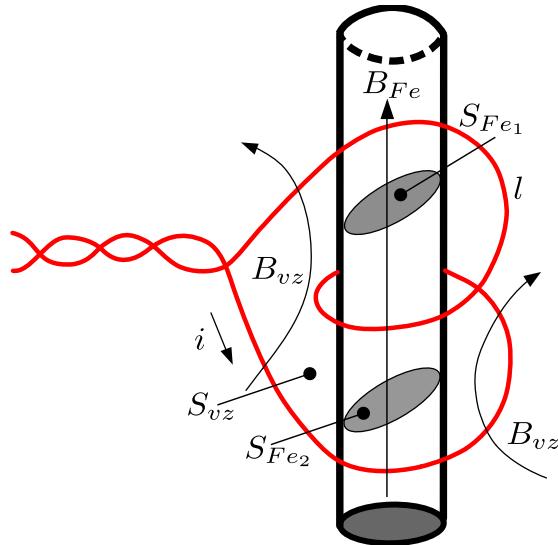
funkci primárního vinutí transformátoru). Takováto cívka vytvoří časově proměnné magnetické pole:

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t)dt \quad (26.3.3)$$

Konstanta Ψ_0 představuje Newtonovou počáteční integrační konstantu, funkce $\Psi(t)$ tzv. **spřažený magnetický tok s cívkou**. Je vidět, že *velikost spřaženého magnetického toku je úměrná pouze velikosti integrálu napětí na cívce, nemusí již být přímo úměrná proudu cívkou* (to platí jen ve speciálním případě lineárních magnetických obvodů). Tento poznatek je velice důležitý, magnetický tok bude stejný jak pro vzduchové cívky, tak pro cívky s feromagnetickým jádrem (rozdíl bude spočívat pouze v průběhu a velikosti proudu cívky). Sycení jádra transformátoru napájeného ze zdroje napětí je závislé pouze na průběhu tohoto napětí. Pro spřažený magnetický tok cívky dále platí:

$$\Psi(t) = \oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \quad (26.3.4)$$

kde S je orientovaná ohraničená plocha, jejíž hranice je tvořena křivkou l , viz probíhající osou vodiče po celé jeho délce. Tento vztah platí zcela obecně pro jakákoli prostředí, v nichž se magnetické pole nachází a pro libovolné tvary plochy S . Při návrhu transformátoru obvykle známe průběh spřaženého magnetického toku. Je vidět, že některé in-



Obrázek 26.3.1: Část magnetického obvodu se dvěma závity primárního vinutí.

dukční čáry B_{vz} neprocházejí materiálem jádra, jedná se o tzv. **rozptyl**. Přesný průběh spřaženého magnetického toku bychom získali aplikací rov. 26.3.4, který bychom pro

tento konkrétní případ mohli upravit do podoby

$$\Psi(t) = \int \mathbf{B}_{vz}(t) \cdot d\mathbf{S}_{vz} + \sum_{i=1}^N \int \mathbf{B}_{Fe}(t) \cdot d\mathbf{S}_{Fe_i} \quad (26.3.5)$$

Protože vyčíslení tohoto vztahu je velice obtížné, zavedeme určité zjednodušující podmínky:

- zanedbáme rozptyl $B_{Fe} \gg B_{vz}$,
- magnetická indukce B_{Fe} je ve feromagnetiku rozložena homogenně a siločáry jsou kolmé k průřezu jádra.

Pak pro spřažený magnetický tok můžeme psát

$$\Psi(t) = N \cdot B_{Fe}(t) \cdot S_{Fe} = N \cdot \Phi(t) \quad (26.3.6)$$

Rov. 26.3.6 by platila přesně, pokud by všechny indukční čáry \mathbf{B} protnuly plochu S_{Fe} N-krátk. Ve skutečnosti ale všechny siločáry neprochází všemi závity a vztah platí jen přibližně. Chyba je malá u feromagnetických obvodů (transformátory, cívky s feromagnetickým jádrem), kde je magnetická vodivost materiálu mnohonásobně větší, než magnetická vodivost vzduchu (řádově 1000x) a rozptyl je tudíž zanedbatelný. Velká je tato chyba například u vzduchových cívek, kde je rov. 26.3.6 nepoužitelná.

$$\begin{array}{lll} \Psi & \cong & N\Phi \\ \Phi & = & B_{Fe}S_{Fe} \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{lll} \Psi(t) & \cong & N\Phi(t), \\ \Phi(t) & = & B_{Fe}(t)S_{Fe}. \end{array} \quad (26.3.7)$$

V literatuře bývá někdy spřažený tok cívky Ψ bez vysvětlení definován pomocí rovnice. To je nutno považovat za nešťastné. Za prvé se nejedná o "definici", ale o výsledek značně složitých výpočtů, za druhé tato rovnice *principiálně není přesná*

References

- [Pat11] M. Patočka. *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektronice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. VUTIUM, 2011, p. 564. ISBN: 9788021440036 (cit. on pp. 246, 254).

Kapitola 27

Topologické vlastnosti elektromagnetického pole

Obsah

27.1 Topologie diskrétních útvarů	262
27.1.1 Základní pojmy teorie grafů	262

V předchozích kapitolách byly na mnohých místech zdůrazňovány některé topologické souvislosti. Kapitola o topologii je úmyslně zařazena až následně, jednak aby shrnula získané poznatky a vtiskla jim určitý řád, jednak aby čtenář již měl předchozí konkrétní představy o některých abstraktních pojmech [Pat11, s. 40].

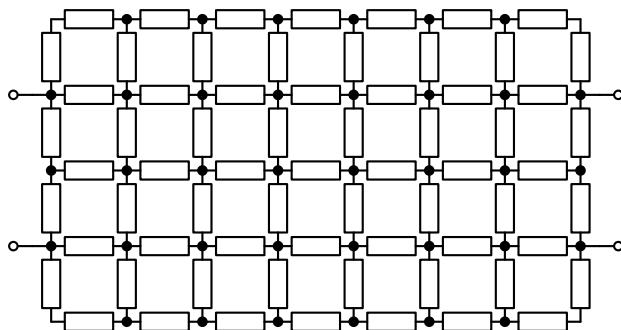
Topologie je matematická disciplína, patřící do vyšších pater v hierarchii matematiky. Topologie se zájvá prostorovými útvary, podobně jako geometrie. Na rozdíl od geometrie ji však nezajímají *kvantitativní* ukazatele zkoumaných geometrických útvarů, nýbrž určité vyšší obecnější *kvalitativní* ukazatele. S nadsázkou lze říci, že je to "geometrie, která nic neměří". Topologie se dělí na dvě zdánlivě odlišné disciplíny:

- *Topologie diskrétních útvarů* neboli *teorie grafů* - zabývá se diskrétními prostorovými útvary, tj. *grafy*. Graf sestává z *uzlů* propojených *hranami*. Hrany mohou být *orientované* nebo *neorientované*. Všechny diskrétní elektrické obvody jsou *neorientovanými* grafy. Proto i všechny známe metody řešení diskrétních elektrických obvodů (metoda Kirchhoffových zákonů, metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí) podléhají zákonitostem diskrétní topologie.
- *Topologie spojitych útvarů* - zabývá se spojitými prostorovými útvary, tj. *plochami a křivkami* v prostorech libovolné dimenze. Patří sem všechny elektrické obvody s *parametry spojite rozprostřenými* v 3D prostoru. Takovým útvarem je např. krabice naplněná elektricky vodivým grafitovým práškem, do níž umístíme v libovolných místech dvě nebo více elektrod. Intuitivně tušíme, že v prostoru krabice budeme pracovat s ekvipotenciálami v podobě *ploch* nebo se siločárami v podobě *křivek* atd.

Elektrické obvody se chovají poněkud jinak než obvody magnetické:

- V *elektrických* obvodech je poměr mezi měrnou elektrickou vodivostí *vodičů* a *izolantů* minimálně 10^{12} , obvykle i větší. Proto lze snadno pomocí vodiče obaleného izolantem docílit toho, že elektrický proud teče pouze prostorově vymezenými *diskrétními* cestami. Pak je pochopitelné, že vhodným a *absolutně přesným* nástrojem k analýze elektrického obvodu je *topologie diskrétních útvarů*.
- V *magnetických* obvodech je poměr mezi měrnou magnetickou vodivostí (permeabilitou) *vodičů* a *izolantů* typicky 10^3 , což je dáno relativní permeabilitou feromagnetik vůči vakuu. Vakuum je tedy *velmi špatný* magnetický izolant a lepší v přírodě bohužel neexistuje. V této situaci je obtížné realizovat ryze diskrétní magnetický obvod, protože železo neumíme "obalit" kvalitním magnetickým izolantem. U cívky se železným jádrem podle obr. 26.3.1 v kapitole 26.3 jsme ukázali, že rozptylový

tok vzdušných cest činí řádově 1 % až 5 % z toku celkového. Takový obvod je sice již řešitelný metodami *diskrétní topologie*, ale pouze přibližně. Je to běžný inženýrský postup, který se v praxi velmi úspěšně používá. Pokud však rozptylový tok nehceme nebo nemůžeme zanedbat, je nezbytné pracovat metodami *topologie spojitých útvarů*¹. Berme to jako ukázku, že mezi oběma topologiemi je hluboký vztah, i když není na první pohled patrný.



Obrázek 27.0.1: Pasivní dvojbran v podobě husté vodivostní sítě

Na první pohled se zdá, že obě topologie využívají natolik odlišných matematických postupů, že spolu tyto disciplíny nijak nesouvisí. Opak je pravdu. Mezi oběma panuje hluboký vztah, obě vycházejí ze stejných základů. Vysvětlení lze hledat na obr. 27.0.1. Je zde nakreslen *přenosový dvojbran* se zcela obecnou vnitřní strukturou, která může mít např. podobu husté vodivostní² sítě, ve které mají jednotlivé vodivosti nahodile různé hodnoty. S ohledem na dobře známé analogie je lhostejné, zda se jedná o *elektrický* nebo *magnetický* obvod. Nakreslený obvod je zcela určitě *diskrétní*, bude tedy řešen některou klasickou diskrétní metodu, např. metodou smyčkových proudů nebo metodou uzlových napětí. Výpočtem zjistíme, že z pohledu vstupní a výstupní brány má dvojbran konkrétní přenosové parametry (napěťový přenos naprázdno, proudový přenos nakrátko, vstupní impedanci naprázdno, nakrátko, atd.) Učíme následující myšlenkový pokus: vodivostní síť budem neustále zjemňovat. Tj., ve smíru vodorovném i svislém budeme zvyšovat počty prvků, ale tak, aby celková vodivost na jednotku délky zůstávala v dané oblasti *konstantní*. Výsledkem zjemňování bude v limitním případě vznik *spojité* vodivé desky (např. izolační podložka nastříkaná elketricky vodivým odpornovým lakem). Mezi původním diskrétním obvodem a deskou zřejmě platí následující souvislosti:

- Původní diskrétní vodivosti byly nahodile různé → deska bude *nehomogenní, anizotropní*.

¹Všimněme si ale, že ke zjednodušeným výrazům pro výpočet spřaženého toku v *diskrétním* obvodu jsme dospěli pomocí integrálních metod, které používá topologie *spojitých útvarů*

²V magnetických obvodech je psychologicky výhodnější pracovat s magnetickými vodivostmi než s magnetickými odpory (reluktancemi). Permeabilita má totiž význam *měrné magnetické vodivosti*

- Původní diskrétní vodivosti byly stejně velké ve směru x a stejně velké (ale s jinou hodnotou ve směru y) → deska bude *homogenní anizotropní*.
- Všechny diskrétní vodivosti měly stejnou hodnotu → deska bude *homogenní, izotropní*.

Intuitivně tušíme, že vytvořená *spojitá* deska³ bude mít všechny přenosové parametry číselně shodné s původním *diskrétním* obvodem. Přitom ale u desky nelze tyto parametry určit klasickými diskrétními metodami (nelze určit matici obvodu). Je nutný přechod od diskrétních operací k operacím integrálním, tedy od topologie *diskrétních útvarů* k topologii *spojitých útvarů*. Z uvedeného myšlenkového pokusu plyne, že v *limitním případě* velmi jemné síť musí dát diskrétní i spojité operace stejný kvantitativní výsledek. Na tomto poznatku je založeno přibližné řešení spojitých prostorových polí *metodami konečných prvků*.

Především jsme ovšem chtěli ukázat, že mezi diskrétními a spojitymi topologickými metodami není zásadního rozdílu, obě vycházejí ze stejných základů a v limitním případě spolu splývají.

27.1 Topologie diskrétních útvarů

Cílem této kapitoly je především vysvětlit *princip reciprocity* v pasivních elektrických obvodech a pomocí něho odvodit počet stupňů *volnosti* elektrických obvodů. Zvláštním případem obvodu je *pasivní přenosový dvojbran*, u kterého bude dokázáno, že má vždy *tři stupně volnosti*. Tento poznatek má totiž mimořádný význam v teorii *transformátorů*, který je právě typickým představitelem přenosového dvojbranu. V kapitolách zabývajících se transformátorem - především jeho náhradním zapojením - se budeme odvolávat na výsledky získané v této kapitole.

27.1.1 Základní pojmy teorie grafů

Názvosloví a základní pojmy teorie grafů lze shrnout do následujících bodů:

- Základním pojmem je *graf* (graf orientovaný, neorientovaný). Graf je vlastně „schéma“ příslušného obvodu s vynechanými obvodovými prvky.

³Uvedený příklad se týká dvojrozměrné desky. Příklad lze jistě zobecnit na trojrozměrné objekty (lze si představit krabici naplněnou vodivým grafitovým práškem, do které zavedeme čtyři bodové elektrody).

- Graf sestává z *uzlů* a *hran*.
- Uzel je spojení alespoň tří hran⁴.
- Hrana může být *orientovaná* (je jí přiřazen směr), *neorientovaná* (nemá přiřazen směr). V elektrotechnice se používají výhradně neorientované hrany - tedy i grafy (vlastnosti obvodových prvků R, L, C jsou nezávislé na směru proudu).
- *Úplný strom*: nepřerušená celistvá soustava nejmenšího počtu hran, která spojuje všechny uzly grafu.
- *Nezávislá hrana*: hrana nepatřící do úplného stromu.
- *Nezávislá smyčka*: uzavřená smyčka, která musí obsahovat nezávislou hranu, tj. hranu nepatřící do úplného stromu.
- Nezávislých smyček je tolik, kolik je nezávislých hran.

Označme v grafu: Počet uzelů: $q + 1$ Počet hran úplného stromu: q Počet hran (počet neznámých proudů): p Počet nezávislých hran (nezávislých smyček): $n = p - q$

References

- [Pat11] M. Patočka. *Magnetické jevy a obvody ve výkonové elektronice, měřicí technice a silnoproudé elektrotechnice*. VUTIUM, 2011, p. 564. ISBN: 9788021440036 (cit. on p. 260).

⁴Spojení dvou hran je elektrický bod, nikoli uzel.

Kapitola 28

Teorie transformátoru

Obsah

28.1	Transformátor jako lineární pasivní dvojbran	268
28.1.1	Předpoklady analýzy	268
28.1.2	Princip reciprocity u transformátoru	269
28.2	Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou	269
28.3	Princip činnosti, základní konstrukční provedení	271
28.4	Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	273
28.4.1	Situace při sekundárním vinutí naprázdno	273
28.4.2	Situace při zatížení sekundárního vinutí	275
28.5	Ztráty v reálném transformátoru	278
28.5.1	Joulový ztráty ve vinutí	278
28.5.2	Hysterezní ztráty v jádře	279
28.5.3	Ztráty vířivými proudy v jádře	281
28.6	Rozptyl transformátoru	281

28.7 Cívky s feromagnetickým jádrem	282
28.7.1 Fyzikální rozbor a příprava pro návrh	282
28.7.2 Důsledky a význam použití vzduchové mezery	282
28.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	283

Před zahájením studia této kapitoly je naprosto nezbytné nejdříve pročíst kapitolu 27 a seznámit se s *principem reciprocity* v pasivních přenosových soustavách, s *počtem stupňů volnosti* pasivních soustav, s popisem přenosového dvojbranu pomocí matic typu \mathbb{Z} , \mathbb{Y} a \mathbb{H} a konečně se základními *přenosovými parametry* dvojbranu.

Zvláštním a neobvyklým cílem této kapitoly je, kromě jiného, podání dvou nezávislých matematických důkazů, že *přesných* náhradních zapojení transformátoru lze sestrojit *nekonečně mnoho*, přičemž pouze dvě z nich, tj. Γ -článek a obrácený Γ -článek mají mimořádný význam. Bude ukázáno, že používání klasického T-článku je sice možné, ale je zbytečně složité! Bude podán matematický důkaz, že lpění na náhradním zapojení v podobě T-článku postrádá jakýkoli fyzikální i matematický smysl a v žádném případě nepřináší žádné výhody. Stejné výsledky můžeme nalézt ve [22], [23]. Tyto moderní postupy lze porovnat s klasickou teorií, uvedenou např. ve [20], [21].

Problematika transformátoru je rozdělena do dvou základních částí. V první je transformátor představen jako lineární pasivní dvojbran, ve druhé jako nelineární pasivní dvojbran. Postupně bude věnována pozornost následujícím tématům.

Transformátor jako lineární pasivní dvojbran:

- Princip reciprocity. Počet stupňů volnosti.
- Názvosloví a klasifikace transformátorů.
- Názvosloví a klasifikace přípustných modelů transformátoru.
- Základní fyzikální model ve tvaru impedanční \mathbb{Z} -matice.
- Model transformátoru *napětí* ve tvaru hybridní $\mathbb{H}_{\mathbb{U}}$ -matice.
- Model transformátoru *proudu* ve tvaru hybridní $\mathbb{H}_{\mathbb{I}}$ -matice.
- *Ekvivalentní* zapojení transformátoru. Z něho plynoucí experimentální identifikace parametrů.
- *Náhradní* zapojení transformátoru. Dvě odlišné metody hledání náhradního zapojení:
 - metoda separace rozptylových indukčností,
 - metoda stejně vstupní impedance.

Obě metody vedou k témuž výsledku: přesných náhradních zapojení existuje nekonečně mnoho. Lze je rozdělit do dvou tříd: třída fyzikálně *realizovatelných* třída *nerealizovatelných* zapojení (ale přesto matematicky korektních). Vypovídací schopnost náhradního zapojení.

- Vztah mezi Hopkinsonovými činiteli rozptylu v a činitelem vazby k .

Transformátor jako nelineární pasivní dvojbran:

- Matematický model transformátoru napětí a proudu s nelineární magnetizační charakteristikou feromagnetika, bez uvažování hystereze.
- Teoretické zdůvodnění známého experimentálního faktu, že nelinearity magnetizační charakteristiky nemá negativní vliv na linearitu *napěťového přenosu* transformátoru.

28.1 Transformátor jako lineární pasivní dvojbran

Při řešení drtivé většiny problémů vyskytujících se v technické praxi je možno pohlížet na transformátor jako na lineární přenosový dvojbran.

28.1.1 Předpoklady analýzy

Transformátor podle obr. 28.1.1 je typickým představitelem pasivního přenosového dvojbranu. Analýza transformátoru bude provedena za následujících předpokladů:

- Magnetizační charakteristika feromagnetického obvodu je lineární.
- Na obrázku je úmyslná odchylka oproti obvyklému značení směru sekundárního proudu. Jeho směr je totiž volen ve shodě s předpokladem, že transformátor je na výstupu zatížen pasivní zátěží pracující ve spotřebičovém režimu, tj. odporem. Jsou-li začátky obou vinutí označeny tečkami, pak pro okamžité hodnoty proudů i napětí jsou orientace všech čtyř šipek správné, tj. ve shodě se skutečností. Toto je důležitý předpoklad, který z psychologického hlediska zvláště studentům velmi usnadňuje analýzu a pochopení činnosti (není pedagogicky vhodné komplikovat analýzu neprůhledným režimem, s aktivní zátěží na sekundáru).
- Neexistují vířivé ztráty ve feromagnetiku. Vířivé ztráty však bude možno na základě získaných výsledků velmi přesně analyzovat a přidat do modelu transformátoru.
- Neexistují hysterezní ztráty ve feromagnetiku. Navíc problém hystereze nepřísluší do oblasti lineárních obvodů.

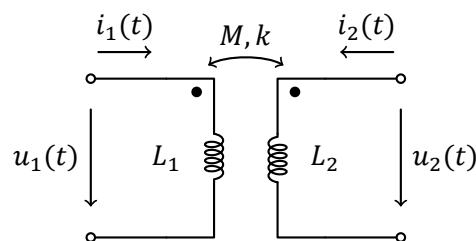
- Neexistují Jouleovy ztráty v mědi. Klademe tedy předpoklad $R_{Cu1} = 0$, $R_{Cu2} = 0$. Tato podmínka však neubírá na obecnosti řešení. Odpor primárního vinutí lze totiž snadno separovat mimo transformátor a myšlenkově zahrnout do vnitřní impedance napájecího zdroje, podobně odpor sekundárního vinutí lze zahrnout do impedance zátěže. Oba odpory je možno do matematického modelu velmi snadno zpětně znova začlenit.
- Nejsou uvažovány parazitní kapacity jednotlivých vinutí ani kapacita mezi oběma vinutími.

28.1.2 Princip reciprocity u transformátoru

Princip reciprocity je nejobecnější vlastností všech pasivních přenosových soustav, jak bylo dokázáno v kap. 27. Princip reciprocity souvisí se známým poznatkem, že \mathbb{Z} - i \mathbb{Y} -matice každého lineárního pasivního elektrického obvodu je vždy symetrická podle hlavní diagonály. To znamená, že vždy platí $z_{ij} = z_{ji}$ a současně $y_{ij} = y_{ji}$. Všimněme si, že \mathbb{Z} -matice (17.3.1-2) transformátoru skutečně vyhovuje principu reciprocity, až na znaménko. Obě záporná znaménka v matici jsou důsledkem změny směru proudu $i_2(t)$ na opačný (realistický), podle Obr. 17.1.1-1, a nejsou na závadu. Platnost principu reciprocity u transformátoru je velmi důležitá, protože v platnosti principu spočívá jediná možnost jak dokázat, že vzájemná indukčnost a činitel vazby transformátoru jsou pro oba směry přenosu stejné, tj. že platí $M_{21} = M_{12} = M' \cdot 2$ - (17.1.2-1), (17.1.2-2) Oba vztahy jsou neomylně platné pro „dva jakkoli libovolně v prostoru tvarované vodiče, a to buď bez

28.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou

Bylo již řečeno, že časový průběh spřaženého magnetického toku je úměrný integrálu napětí na cívce, nemusí však již být přímo úměrný proudu cívky. Indukované napětí



Obrázek 28.1.1: Schématická značka transformátoru. Orientace okamžitých hodnot vstupních a výstupních signálů s respektováním pasivní zátěže ve spotřebičovém režimu.

je jednoznačně určeno rov. 26.3.2. Spřažený magnetický tok je obecnou funkcí proudu cívky, přičemž proud je funkci času:

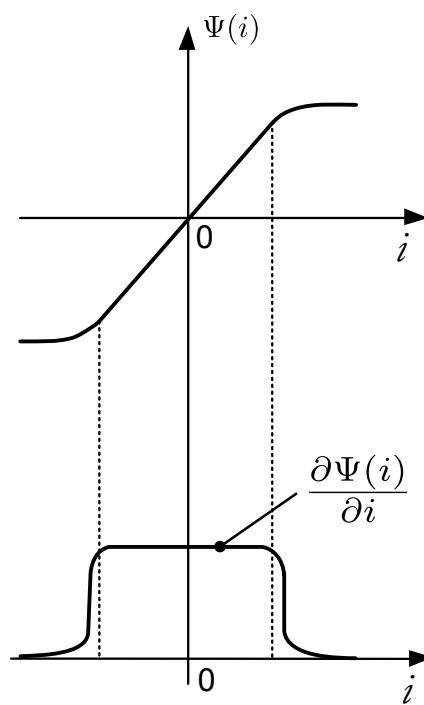
$$\Psi(t) = f[i(t)] \quad (28.2.1)$$

Dosadíme-li rov. 28.2.1 do rov. 26.3.2 a použijeme-li větu o derivaci složené funkce¹, obdržíme pro napětí na cívce:

$$u(t) = \frac{d}{dt}f[i(t)] = \frac{\Psi(i)}{di} \frac{di}{dt} = L_d \cdot \frac{di}{dt} \quad (28.2.2)$$

kde $L_d = \frac{d\Psi(i)}{di}$ má význam **diferenciální indukčnosti**. Ta může být ve speciálních případech konstantní, ale ve většině reálných aplikací je funkci proudu cívky. Jako příklad uvedeme transformátor s feromagnetickým jádrem. Zde je závislost spřaženého magnetického toku na proudu silně nelineárně závislá, obr.28.2.1 . Potom mluvíme o nelineárních magnetických obvodech.

Na obr. 28.2.1 je zobrazena **statická magnetizační charakteristika** a její derivace, představující průběh diferenciální indukčnosti vinutí v závislosti na proudu. Vidíme, že pro malé proudy je indukčnost největší s rostoucím prudem prudce klesá, nastane-li tzv. přesycení magnetického obvodu transformátoru. Tomuto režimu se snažíme správným návrhem transformátoru vyhnout. Velmi často se v technické praxi zavádí zjednodušení, při kterém se reálný magnetický obvod linearizuje - diferenciální indukčnost je považována za konstantní (nezávislá na proudu cívky). Mluvíme pak o lineárních magnetických obvodech. Toto zjednodušení je použitelné pouze tehdy, pokud reálný magnetický obvod (transformátor) provozujeme v určitých mezích magnetizačního proudu, kdy se skutečná indukčnost příliš nemění. Nelineární magnetizační charakteristika na obr. 28.2.1 se linearizuje do podoby na obr. 28.2.2.



Obrázek 28.2.1: Statická magnetizační charakteristika transformátoru s feromagnetickým jádrem a závislost diferenciální indukčnosti na proudu.

¹Je-li $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, potom derivace y podle proměnné x je rovna derivaci y podle proměnné u , násobené derivací u podle proměnné x

Závislost spřaženého magnetického toku na proudu cívkou je tedy lineární ($L = \text{konst}$) viz obr. 28.2.2:

$$\Psi(t) = f[i(t)] = L \cdot i(t) \quad (28.2.3)$$

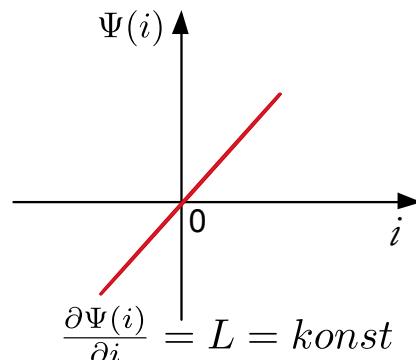
Dosazením spřaženého magnetického toku do Faradayova zákona elektromagnetické indukce - rov. 26.3.2

$$u(t) = \frac{d}{dt}f[i(t)] = \frac{d}{dt}[L \cdot i] = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (28.2.4)$$

Ve zvláštním případě stejnosměrných veličin, kdy proud má lineární charakter, přejde vztah 28.2.3 do tvaru, který představuje tzv. **statickou definici indukčnosti**.

$$\Psi(t) = L \cdot I \quad (28.2.5)$$

Je ale třeba zdůraznit, že rov. 28.2.3, rov. 28.2.4 a rov. 28.2.5 platí pouze pro lineární magnetické obvody. Jestliže jsou použity při matematickém popisu transformátorů nebo cívek s feromagnetickým jádrem, je třeba mít na paměti, že tento linearizovaný model lze použít jen v určitém omezeném rozsahu daným skutečnou magnetizační charakteristikou. Nicméně, lineární model transformátoru je pro svou jednoduchost často používán.



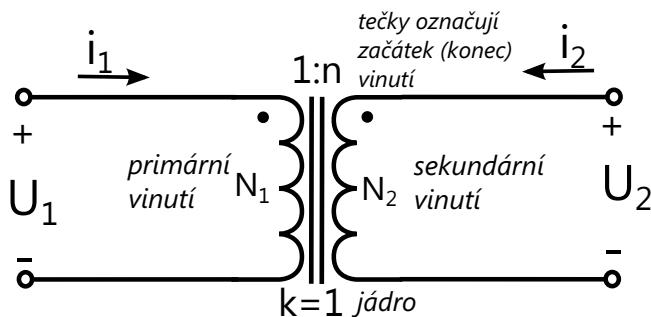
Obrázek 28.2.2: Linearizovaná magnetizační charakteristika. Směrnice této přímky je právě rovna L

28.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení

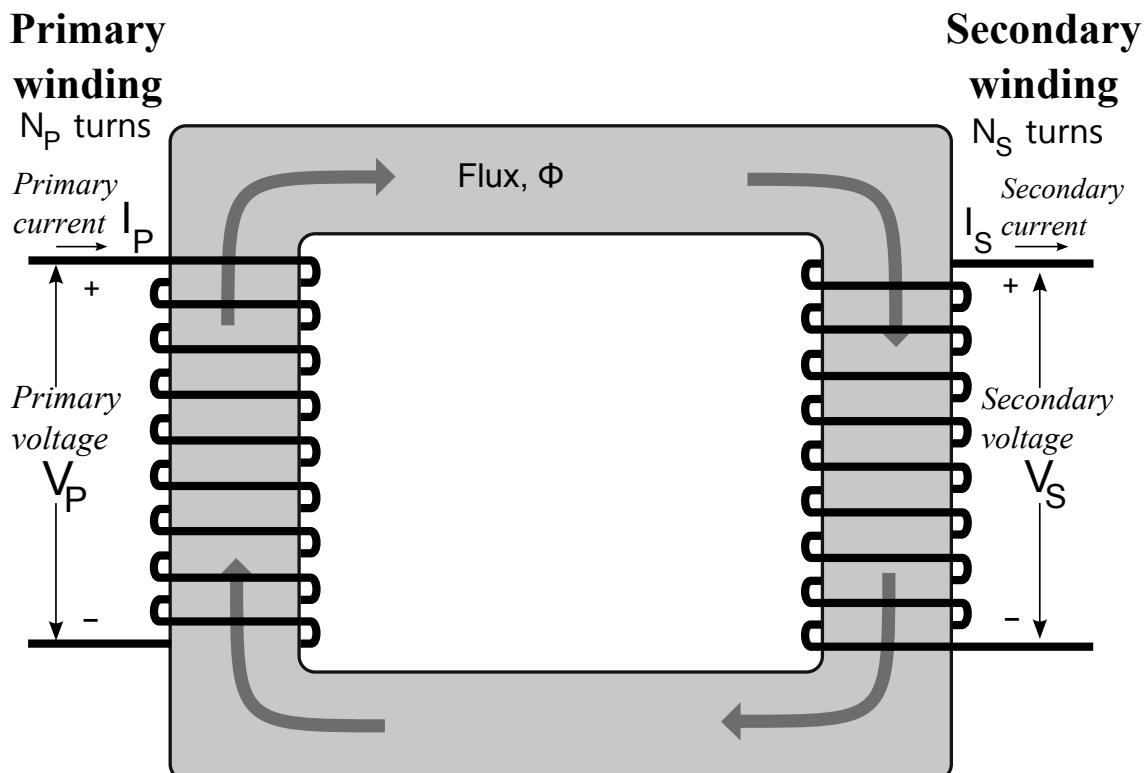
Definice 28.3.1. *Transformátor je elektrický netočivý stroj, který umožňuje přenášet elektrickou energii z jednoho obvodu do jiného pomocí vzájemné elektromagnetické indukce. To znamená, že mění její parametry (napětí, proudy), přitom forma energie na vstupu i výstupu zůstává elektrická.*

Transformátory jsou nezbytnou součástí řady elektrotechnických zařízení, počínaje vazebními a napájecími transformátory sdělovacích a polovodičových zařízení až k transformátorům blokovým a přenosovým, užívaným v energetice. Jejich výkony se pohybují od zlomků VA do stovek MVA. Podobně je tomu s jejich napětími od malých až po vvn. Zásadně transformátory mohou být jedno nebo vícefázové (obvykle třífázové)

Princip transformátoru je založen na **zákonu elektromagnetické indukce** - tedy magnetický tok vybuzený jedním vinutím indukuje napětí ve vinutí druhém (primář,



(a) Schématická značka transformátoru s jádrem



(b) Principiální provedení transformátoru se dvěma vinutími

Obrázek 28.3.1: Ideální transformátor s jádrem, s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím. Tečky označují začátky (resp. konec) vinutí. Význam má jejich poloha tečky vůči druhé. Budeme-li je chápat jako začátky vinutí, měl by se drát primáru a sekundáru vinout tak, jak je naznačeno na obrázku

sekundár). Obrázek 28.3.1b ukazuje, že magnetický tok je z jednoho vinutí do druhého veden prostřednictvím magnetického obvodu. Fyzikální princip vychází z **2. Maxwellovy rovnice 26.3.1**.

Převod transformátoru

$$n = \frac{N_1}{N_2}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (28.3.1)$$

28.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru

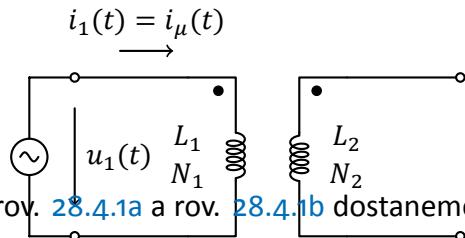
Uvažujme pro začátek transformátor s dokonale těsnou vazbou, tedy s *činitelem vazby* $k = 1$, s *nulovým rozptylovým magnetickým tokem* a s *konečnou velikostí indukčnosti* L_1 a L_2 *primárního a sekundárního vinutí*

28.4.1 Situace při sekundárním vinutí naprázdno

Podle indukčního zákona platí pro primární a sekundární napětí

$$u_1(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (28.4.1a)$$

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (28.4.1b)$$



kde $\Phi_\mu(t)$ je magnetický tok v jádře. Porovnáním rov. 28.4.1a a rov. 28.4.1b dostaneme následující rovnici:

$$u_2(t) = u_1(t) \frac{N_2}{N_1} \quad \text{Obrázek 28.4.1: Transformátor naprázdno.} \quad (28.4.2)$$

Je zřejmé, že $u_1(t)$ a $u_2(t)$ mohou mít sice různou velikost, ale mají zcela stejný časový průběh. Z rov. 28.4.1a plyne, že magnetický tok je jednoznačně určen časovým integrálem z přiloženého primárního napětí:

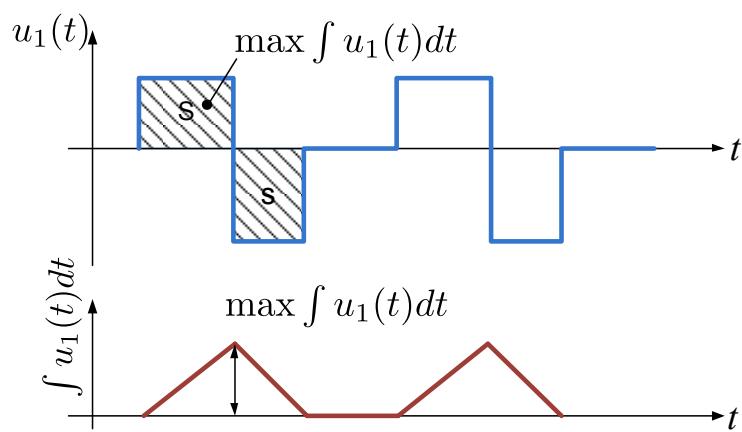
$$\Phi_\mu(t) = \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} + \Phi_{\mu_{poc}} \quad (28.4.3)$$

Primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu, tj. nesmí mít stejnosměrnou složku, jinak by magnetický tok rostl nade všechny meze (v praxi do přesycení). Velikost integrační konstanty $\Phi_{\mu_{poc}}$ závisí na konkrétním režimu transformátoru. Z rovnice také plyne užitečný vztah:

$$\Delta\Phi_\mu(t) = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1} \quad (28.4.4)$$

Je-li $u_1(t)$ periodická funkce s nulovou střední hodnotou, pak neurčitý integrál z $u_1(t)$ je rovněž periodická funkce, jejíž střední hodnota již ovšem nulová být nemusí (viz obr. 28.4.2). Φ_μ je rozkmit magnetického toku v jádře transformátoru. Z rovnice 28.4.3 je patrné, že bez bližší znalosti režimu transformátoru sice nelze přesně stanovit meze, v nichž se magnetický tok periodicky pohybuje, ale dle rov. 28.4.4 umíme přesně stanovit rozkmit toku čili vzdálenost mezí. Pro předpokládané homogenní rozložení pole ve feromagnetickém jádře lze určit rozkmit magnetické indukce:

$$\Delta B_\mu(t) = \frac{\Delta\Phi_\mu(t)}{S} = \frac{\max |\int u_1(t)dt|}{N_1 S} \quad (28.4.5)$$



Obrázek 28.4.2: Znázornění časového integrálu primárního napětí transformátoru.

pro *lineární* magnetické obvody vztah mezi tokem a magnetizačním proudem:

$$N_1 \Phi_\mu(t) = L_1 i_\mu(t) \quad (28.4.6)$$

Proud $i_\mu(t)$ je primární proud při sekundárním vinutí naprázdno, tzv. **magnetizační proud**. Je tedy přímo úměrný magnetickému toku $\Phi_\mu(t)$.

$$i_\mu(t) = \frac{N_1 \Phi_\mu(t)}{L_1} \quad (28.4.7)$$

Dosadíme-li za $\Phi_\mu(t)$ rov. 28.4.3 uvedené na stránce 273, dostaneme známý vztah mezi proudem a napětím cívky, vyjádřený v integrálním tvaru:

$$i_\mu(t) = i_{\mu_{poc}} + \frac{1}{L_1} \int u_1(t) dt \quad (28.4.8)$$

Opět vidíme, že primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu.

28.4.2 Situace při zatížení sekundárního vinutí

Rovnice 28.4.2 až rov. 28.4.8 zůstávají v platnosti. Připojíme-li k sekundárnímu vinutí zátěž, začne téci sekundární proud $i_2(t)$. Např. pro odporovou zátěž bude platit

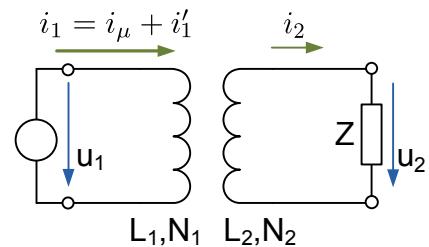
$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (28.4.9)$$

Se sekundárním proudem je svázán magnetický tok $\Phi_2(t)$

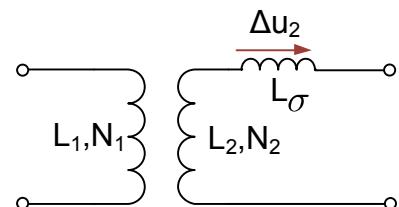
$$\Phi_2(t) = \frac{L_2 i_2(t)}{N_2} \quad (28.4.10)$$

Proud $i_2(t)$, tedy i tok $\Phi_2(t)$, mohou mít bohužel stejnosměrnou složku (zátěží může být např. jednocestný usměrňovač). Stejnosměrnou složku proudu však transformátor obecně neumí přetrasformovat na primární stranu a pak dochází ke stejnosměrné předmagnetizaci jádra (sekundární proud stejnosměrnou složku obsahuje, primární proud nikoli). Jedná se o škodlivý jev, který může způsobit, zvláště při větších proudech i přesycení magnetického obvodu. Jev nastává např. při napájení transformátoru ze sítě. Síť se totiž jeví v průběhu celé pracovní periody jako napěťový zdroj s malou vnitřní impedancí. Za zvláštních okolností transformátor stejnosměrnou složku transformovat umí, např. v jednočinném propustném měniči. Zde je transformátor po určitou část periody od primárního zdroje odpojen, v té chvíli se vnitřní impedance primárního zdroje jeví jako nekonečně velká. Oba typy napájení je nutno rozlišovat.

Dále proto uvažujeme pouze takové typy zátěží, které stejnosměrnou složku nevytvářejí (např.



Obrázek 28.4.3: Transformátor zatížený.



Obrázek 28.4.4: Zjednodušená přestava rozptylu reálného transformátoru.

zátěž typu dvoucestný můstkový usměrňovač již tuto nečistotu nemá). Pak při uvažování dokonalé vazby, tj. při činiteli vazby $k = 1$, je v celém magnetickém obvodu sekundární tok $\Phi_2(t)$ plně vykompenzován primárním tokem $\Phi_1(t)$ stejné velikosti, ale opačného znaménka. Tok $\Phi_1(t)$ je svázán s "přídavným" primárním proudem, tedy proudem pře-transformovaným ze sekundáru na primár - nazvaný jako $i'_1(t)$. Proud vzniká v primárním vinutí v důsledku Lenzova pravidla. Je zodpovědný za čerpání energie z primárního napájecího zdroje a jeho existence je současně v souladu se zákonem zachování energie

$$\Phi_1(t) = \frac{L_1 i'_1}{N_1} = \Phi_2(t) \quad (28.4.11)$$

Srovnáním rov. 28.4.10 a rov. 28.4.11 obdržíme známý vztah pro transformaci proudů:

$$i'_1(t) = i_2(t) \frac{L_2 N_1}{N_2 L_1} = i_2(t) \frac{N_2^2 N_1}{N_2 N_1^2} = i_2(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (28.4.12)$$

Celkový primární proud $i_1(t)$ tedy při zatížení transformátoru sestává ze dvou zcela nezávislých složek. Jednou složkou je magnetizační proud $i_\mu(t)$, který tekl už i ve stavu naprázdno (a nyní při zatížení se nezměnil) a druhou je výše zmínovaný přetransformovaný proud $i'_1(t)$:

$$i_1(t) = i'_1(t) + i_\mu(t) \quad (28.4.13)$$

Z dosud uvedených skutečnosti plyne důležitý závěr: tok v jádře zůstává nezměněn i při zatížení, je tedy stále roven původnímu toku $\Phi_\mu(t)$, protože tok $\Phi_1(t)$ od proudu $i'_1(t)$ a tok $\Phi_2(t)$ od proudu $i_2(t)$ se plně kompenzují. *Sycení jádra u bezrozptylového transformátoru tedy vůbec nezávisí na velikosti zatěžovacího proudu, tedy ani na velikosti přenášeného výkonu!*

Reálné transformátory mají vždy určitý rozptylový tok. Ten je svázán s tzv. rozptylovými indukčnostmi (primární a sekundární): Takový transformátor si můžeme představit jako transformátor bezrozptylový s připojenými indukčnostmi $L_{\sigma 1}$ do série s primárním vinutím a $L_{\sigma 2}$ do série se sekundárním vinutím. Z hlediska vnějšího chování transformátoru lze uvažovat i jedinou rozptylovou indukčnost L_σ , přepočtenou jen na sekundární stranu (viz obr. 28.4.4).

Tento tok je samozřejmě svázán s úbytkem sekundárního napětí $\Delta u_2(t)$ na L_σ . Čili rozptylová indukčnost způsobuje nenulovou výstupní reaktanci transformátoru, Transformátor je pak "měkký", zatěžovací proud způsobí úbytek napětí:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_\sigma(t)}{dt} \quad (28.4.14)$$

Skutečný transformátor má navíc nenulové odpory vodičů, na kterých vznikají podle Ohmova zákona další úbytky napětí a navíc Joulovu ztrátu.

Vraťme se nyní znovu k transformátoru bezrozptylovému, s dokonalou vazbou, a předpokládejme, že jeho vinutí mají navíc nulový odpor (supravodič). Pak na nich nevzniká průchodem proudu žádný ztrátový výkon a proudy $i_2(t)$ a $i'_1(t)$ lze libovolně zvyšovat. Jejich magnetické účinky se dokonale zruší, nemají tedy vliv na velikost sycení v jádře a transformátorem lze přenášet "libovolně" velký výkon (ve skutečnosti však omezený tzv. kritickou proudovou hustotou supravodiče, při níž zaniká supravodivý jev - pro niob asi 50 A/mm^2).

U měděného (hliníkového) vinutí je nutno volit průřez vodičů úměrný proudu, aby nebyla překročena povolená proudová hustota s ohledem na přehřátí vodičů vlivem Joulova tepla. Rovnice 28.4.5 navíc napovídá, že musíme volit určitý počet primárních závitů N_1 , abychom nepřekročili maximální sycení jádra. N_1 je tím větší, čím je větší maximum - amplituda časového integrálu primárního napětí a čím menší průřez má jádro. Má-li se pak vinutí vtěsnat do okénka jádra, nelze zvyšovat průřez vodiče a tím i proudovou zatížitelnost libovolně. Díky tomu lze s daným průřezem magnetického obvodu S a průřezem okénka S_0 realizovat transformátor schopný přenést jen určitý omezený výkon.

Je tedy zřejmé, že maximální výkon bude přímo úměrný ploše okénka S_0 , protože čím je S_0 větší, tím tlustší vodiče můžeme použít a tím větší proudy (výkon) je možno transformovat. Kromě toho je maximální výkon přímo úměrný i průřezu magnetického obvodu S , protože čím je S větší, tím méně závitů N_1 potřebujeme pro dané sycení, viz rov. 28.4.5, a proto mohou být opět tlustší vodiče. Čili lze napsat:

$$P_{max} \approx S \cdot S_0 \quad (28.4.15)$$

Zamyslíme-li se nad rov. 28.4.5, lze úměru rov. 28.4.15 ještě doplnit. Maximální hodnota sycení tj. maximum funkce $B(t)$ je přímo úměrná maximu funkce časového integrálu primárního napětí. Uvažujme, že napětí neobsahuje stejnosměrnou složku, je periodické s kmitočtem f , ale jinak libovolného tvaru, tj. libovolného obsahu vyšších harmonických.

Pak je maximum časového integrálu takového primárního napětí (maximum toku, amplituda toku) zcela jistě konečné a nepřímo úměrné kmitočtu. To znamená, že zvýšime-li kmitočet n-krát při zachování amplitudy a tvaru napětí, klesne maximum integrálu n-krát a bude moci být dle rov. 28.4.5 také n-krát méně závitů N_1 , aby sycení zůstalo stejné. Pak ve stejném poměru n můžeme zvýšit průřez vodičů, aniž bychom se báli, že se vinutí nevejde do okénka. Lze pak přenášet n-krát větší proud a výkon (napětí se nezměnila,

pouze vzrostl kmitočet). Čili maximální výkon je přímo úměrný kmitočtu. Rovnici 28.4.15 lze proto doplnit:

$$P_{max} \approx f \cdot S \cdot S_0 \quad (28.4.16)$$

Pro jádra z plechu EI z křemíkové oceli lze pomocí tohoto vztahu s uvažováním přímé úměry mezi S_0 a S , odvodit vztah

$$P_{max} \approx S^2 \quad [W, cm^2] \quad (28.4.17)$$

Ten předpokládá maximální sycení $1T$, proudovou hustotu asi $2,5A/mm^2$ a kmitočet $50Hz$. A týká se opravdu jen EI jader, protože při jeho odvození byla uvažována konkrétní závislost mezi S_0 a S pro tato jádra.

Ze vztahu rov. 28.4.16 vidíme, že zvyšování pracovního kmitočtu umožňuje přenášet větší výkon při zachování rozměrů jádra. To je základem filosofie všech spínaných zdrojů (měničů) s transformátorem. Kmitočet však nelze u reálného transformátoru zvyšovat nade všechny meze. Omezení představují hysterezní a vířivé ztráty v jádře a dále rozptylová indukčnost.

28.5 Ztráty v reálném transformátoru

28.5.1 Joulový ztráty ve vinutí

Joulový (ohmický) ztráty vznikají na odporu vinutí průchodem proudu. Tato skutečnost nutí zvyšovat průřez vodičů a způsobuje tak nutné zvyšování plochy okénka jádra S_0 a zvětšování celého transformátoru.

Z hlediska těchto ztrát se primární a sekundární vinutí chovají jako lineární odpory R_1 a R_2 . Joulový ztráty jsou proto úměrné kvadrátu efektivní hodnoty procházejícího proudu a jsou dány vztahem:

$$P_R = R_1 I_{1ef}^2 + R_2 I_{2ef}^2 \quad (28.5.1)$$

Efektivní hodnota proudů procházejících vinutími obecně není úměrná přenášenému činnému výkonu a může být v praxi někdy nečekaně vysoká. Např. u síťového transformátoru se sekundárním usměrňovačem a filtračním kondenzátorem bez vyrovnávací nárazové tlumivky. Zde odebíraný sekundární proud $i_2(t)$ a tedy přetrasformovaná složka primárního proudu $i'_1(t)$ tvar úzkých nabíjecích impulsů s velkou amplitudou. Jeho

celková efektivní hodnota je několikrát větší než efektivního hodnota užitečné 1. harmonické, která se v tomto případě pouze samotná podílí na přenosu činného výkonu. Ten je totiž dán součinem efektivní hodnoty harmonického sekundárního napětí, efektivní hodnoty pouze 1. harmonické sekundárního proudu a $\cos \phi$ oné 1. harmonické proudů!

Pro omezení ohřevu vinutí na přípustnou mez je nutno omezit odpory vinutí. Při návrhu pracujeme s tzv. dovolenou proudovou hustotou J . Teče-li proud rovnoměrně celou plochou průřezu vodiče, platí vztahy:

$$J_1 = \frac{I_{1ef}}{S_1} \quad J_2 = \frac{I_{2ef}}{S_2} \quad (28.5.2)$$

S_1 a S_2 jsou průřezy primárního a sekundárního vinutí.

Doporučená hodnota J se pohybuje v případě měděných vodičů v rozmezí 1,5 až $7A/mm^2$. Pro větší transformátory s velkým objemem vinutí je třeba volit vždy hustotu menší. Při konstantní proudové hustotě totiž celkový Joulov ztrátový výkon roste s třetí mocninou lineárních rozměrů cívky, chladící povrch pouze s druhou mocninou. Vinutí těsně pod chladícím povrchem mohou mít větší proudovou hustotu než vinutí vnitřní.

Bez nuceného proudění vzduchu volíme u toroidních transformátorů hustotu J v rozsahu 2 až $5A/mm^2$, podle velikosti a počtu vrstev vinutí. U malých hrníčkových feritových jader lze volit nouzově až $4,5A/mm^2$. U běžně užívaných síťových transformátorů s mnohovrstvými cívками vinutými na kostrách se doporučuje hodnota $1,5A/mm^2$ (pro velké transformátory) až $3,5A/mm^2$ (pro malé transformátory). Při použití nuceného proudění vzduchu může být hustota J větší.

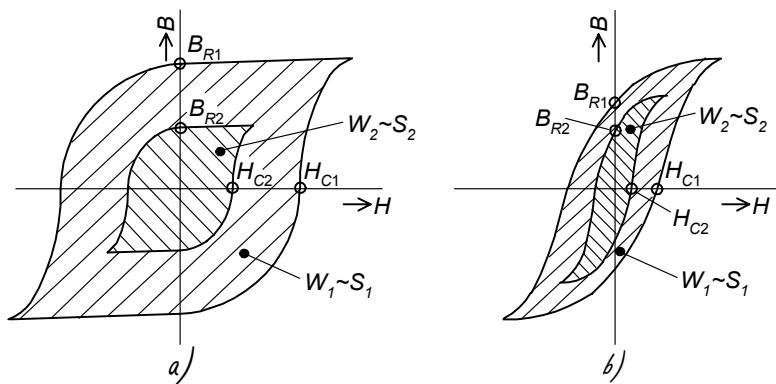
U transformátorů pracujících na vysokém kmitočtu musíme počítat s uplatněním **skinefektu**, díky němuž proud teče jen ve vrstvě pod povrchem vodiče a střední část tlustého vodiče by tak byla nevyužita.

28.5.2 Hysterezní ztráty v jádře

Hysterezní ztráty souvisejí s energií W potřebnou na přemagnetování jádra. Energie W je úměrná ploše hysterezní smyčky (viz. obr. 3.5). Plocha hysterezní smyčky má fyzikální rozměr J/m^3 , jedná se tedy o objemovou hustotu ztrátové energie. Ta je pak velká pro materiály magneticky tvrdé, se širokou hysterezní smyčkou tj. s velkou *remanencí* B_R a *koercitivní intenzitou* H_C . Takové materiály proto nejsou pro jádra transformátoru vhodná. Naopak požadujeme materiály magneticky měkké, s co nejužší hysterezní smyčkou a s co nejmenší remanentní indukcí.

Je zřejmé, že velikost plochy hysterezní smyčky S a tedy i energie W souvisí nejen s vlastnostmi materiálu B_R a H_C , ale i s amplitudou indukce B_m . Přibližně platí, že plocha S je úměrná kvadrátu B_m . (viz. obr. 3.5). Hysterezní ztrátový výkon je dán součinem této energie W a pracovního kmitočtu f , v jehož „rytmu“ dochází k přemagnetovávání.

$$P_h = W \cdot f \approx B_m^2 \cdot f^2 \quad (28.5.3)$$



Obrázek 28.5.1: Hysterezní smyčka feromagnetického materiálu:

- a) magneticky tvrdý materiál,
- b) magneticky měkký materiál.

- Budeme-li měnit kmitočet a současně zachovávat sycení, tzn. budeme udržovat konstantní poměr amplitudy $u_1(t)$ a kmitočtu f při proměnném počtu závitů N_1 – viz rozbor vztahu (28.4.5). Pak bude díky konstantnímu sycení B_m i konstantní energie W . Ze vztahu (28.5.3) je pak vidět, že hysterezní ztráty budou přímo úměrné kmitočtu.

$$P_h \approx f \quad (28.5.4)$$

Toto je typický případ transformátoru v pulsních měničích, kdy volíme vysoký kmitočet za účelem snížení N_1 (aby se vinutí mohlo vinout tlustším vodičem) při zachování (nepřekročení) dovoleného sycení.

- Měníme-li kmitočet a současně zachovávat týž transformátor (totéž N_1 a S) a tutéž amplitudu $u_1(t)$. Pak z rozboru vztahu (28.4.5) vyplývá, že indukce bude nepřímo úměrná kmitočtu. Čili ze vztahu (28.5.3) pak vidíme, že hysterezní ztráty budou *hyperbolicky*, nepřímo úměrně, klesat s rostoucím kmitočtem.

$$P_h \approx \frac{1}{f} \quad (28.5.5)$$

Tento režim transformátoru se nazývá *odbuзовací*, neboť při růstu kmitočtu klesá indukce. V pulsních měničích by ale takový režim neměl žádný význam, protože bychom sice zvýšili kmitočet, ale museli bychom použít stále stejný objemný a těžký transformátor s velkým N_1 , stanoveným pro původní nízký kmitočet.

28.5.3 Ztráty vířivými proudy v jádře

28.6 Rozptyl transformátoru

Vraťme se nyní k zjednodušenému modelu rozptylu z obr. 28.4.4. Pro velikost rozptylové indukčnosti L_σ platí:

$$L_\sigma = \lambda_\sigma \cdot N_2^2 \quad (28.6.1)$$

kde λ_σ je *magnetická vodivost rozptylového magnetického obvodu*. Rozptylovou indukčnost L_σ (tj. sekundární rozptylovou indukčnost plus primární rozptylovou indukčnost přepočtenou na sekundární stranu) je nutno chápat jako indukčnost určující výstupní reaktanci transformátoru napájeného ovšem z ideálního napěťového primárního zdroje. Lze ji snadno změřit, zkratujeme-li primární vinutí a měříme sekundární indukčnost $L_{2,k}$:

$$L_\sigma = L_{2,k} = L_2(1 - k^2) \quad (28.6.2)$$

kde k má význam *činitele vazby* a lze jej určit ze známého vztahu:

$$k = \frac{M}{L_1 L_2} \quad (28.6.3)$$

Zajímá nás ovšem **výstupní reaktance** ωL_σ , nikoliv samotná indukčnost L_σ , neboť napěťový úbytek je úměrný (při harmonickém průběhu napětí):

$$\Delta u_2(t) \approx \omega L_\sigma \quad (28.6.4)$$

Je zřejmé, že při konstantní rozptylové indukčnosti může být transformátor na vysokých kmitočtech naprosto nepoužitelný (měkký). Pak nezbývá, než velmi úzkostlivě a co nejvíce minimalizovat rozptylovou indukčnost. Je proto nutné podle rov. 28.6.1 minimalizovat rozptylovou magnetickou vodivost λ_σ . Ta je přibližně určena rovnicí:

$$\lambda_\sigma = \mu_0 \frac{S_\sigma}{l_\sigma} \quad (28.6.5)$$

kde $\mu_0 = 4 \cdot \pi 10^{-7} H/m$ je *permeabilita vakua*. S_σ a l_σ jsou **ekvivalentní průřez a délka rozptylových cest**. Protože nelze snížit permeabilitu vzduchu, je nutno upravit geometrii

jádra a současně zabezpečit co největší poměr permeability jádra k permeabilitě okolního prostředí. Jádro musí mít tvar bez ostrých zlomů ve směru magnetického toku, nejlépe kruhový tvar, tj. *toroidní jádro*. Je důležitá velká magnetická vodivost jádra λ . Ta je dána vztahem:

$$\lambda = \mu_r \mu_0 \frac{S}{l} \quad (28.6.6)$$

μ_r je *relativní permeabilita materiálu*, S je *průřez jádra*, l je *délka střední siločáry*. Nestačí jen velká permeabilita μ_r , ale i velký poměr $\frac{S}{l}$. Pro minimalizaci rozptylu jsou proto vhodná "baculatější" jádra s velkým S a malým l (často například několik toroidů s malým průměrem tj. malým l paralelně pro dosažení velkého S). Tím ale vzniká problém malého okénka S_0 pro vinutí, což znemožňuje vinout vodiči s velkým průřezem a přenášet tak velké výkony. Tyto protichůdné požadavky na tvar jádra bývají kritické a je nutno je v návrhu kompromisně vyřešit.

Rozptylovou indukčnost dále zmenšíme způsobem vinutí. Jsou-li vinutí na kostřičce, pak je vineme na sebe, nikoliv vedle sebe s přepážkou. Blíže jádru umístíme vinutí s menším počtem závitů. Vhodné je také střídavé prokládání jednotlivých vrstev primárního a sekundárního vinutí, roste však neúměrně pracnost (cena) a klesá činitel plnění okénka. *Bifilární vinutí* s nejtěsnější vazbou nelze uskutečnit v případě rozdílných počtu závitů (což je téměř vždy) a v případě nároků na izolační pevnost mezi vinutími rozprostřenými rovnoměrně po obvodu celého toroidu.

Poznámka k transformátorům obecně (nejen síťovým)

Všimněme si, že v celém výkladu není nikde zmínka o použití *vzduchové mezery v magnetickém obvodu jádra*. V kapitole Cívky s feromagnetickým jádrem je zamýšlení o vzduchových mezerách v magnetických obvodech a je zde vysvětlen jedený případ, kdy má smysl mezeru v transformátoru použít. Je zde ukázáno, že v případě předpokladu platnosti rov. 28.4.4 (což je mimo jiné případ běžných napájecích transformátorů) je použití vzduchové mezery bezúčelné a škodlivé, vede totiž ke vzrůstu magnetizačního proudu a zvýšení rozptylových toků.

28.7 Cívky s feromagnetickým jádrem

28.7.1 Fyzikální rozbor a příprava pro návrh

28.7.2 Důsledky a význam použití vzduchové mezery

28.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů

Pro správnou volbu průřezu drátu pro vinutí je nutné stanovit přípustné oteplení, které je určeno efektivní hodnotou proudu. Pro nejčastější průběhy proudů jsem odvodil vztahy pro výpočet efektivních hodnot.

- Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.1a:

$$\begin{aligned}
 I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} t \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \int_0^{\delta T} t^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\delta T} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{I_{max}^2}{(\delta T)^2} \frac{(\delta T)^3}{3} = I_{max}^2 \frac{\delta}{3}
 \end{aligned} \tag{28.8.1}$$

- Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.1b: Pravý průběh na obrázku 28.8.1b je speciálním případem levého průběhu jehož efektivní hodnotu snadno určíme jako $I_{max} \sqrt{\frac{1}{3}}$. Pro úplnost provedeme výpočet následujícím způsobem

$$I_{ef}^2 = I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2 = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} + I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} = I_{max}^2 \frac{1}{3} \tag{28.8.2}$$

výpočet dílčí efektivní hodnoty proudu I_{ef2} :

$$\begin{aligned}
 I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^T \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \tau = t - \delta T \Rightarrow \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt \Rightarrow \tau_d = 0 \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)} \tau \right)^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}^2}{T(\delta-1)} \tau + \left(\frac{I_{max}}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\
 &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\tau + \frac{2}{T(\delta-1)} \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{1}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)}
 \end{aligned} \tag{28.8.3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{I_{max}^2}{T} \left(T(1 - \delta) - T(1 - \delta) + \frac{T}{3}(1 - \delta) \right) \\ &= I_{max}^2 \frac{1 - \delta}{3} \end{aligned}$$

3. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku [28.8.2](#):

$$I_{ef} = I_{max}. \quad (28.8.4)$$

4. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.3:

$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{2I_{max}\delta} \quad (28.8.5)$$

$$I_{ef1}^2 = I_{ef2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (28.8.6)$$

5. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.4:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (28.8.7)$$

6. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.5:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(I_{max} - I_n + \frac{I_n}{\delta T} t \right)^2 dt \quad (28.8.8)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{2I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 t^2 \right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{t^3}{3} \right)_0^{\delta T}$$

$$= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 \delta T + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} \delta T^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{\delta T^3}{3} \right)$$

$$= \delta \left((I_{max} - I_n)^2 + I_n \cdot (I_{max} - I_n) + \frac{I_n^2}{3} \right)$$

$$= \delta \left(I_{max}^2 - 2I_{max}I_n + I_n^2 + I_{max}I_n - I_n^2 + \frac{I_n^2}{3} \right)$$

$$= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \quad (28.8.9)$$

7. Výpočet efektívnej hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.6:

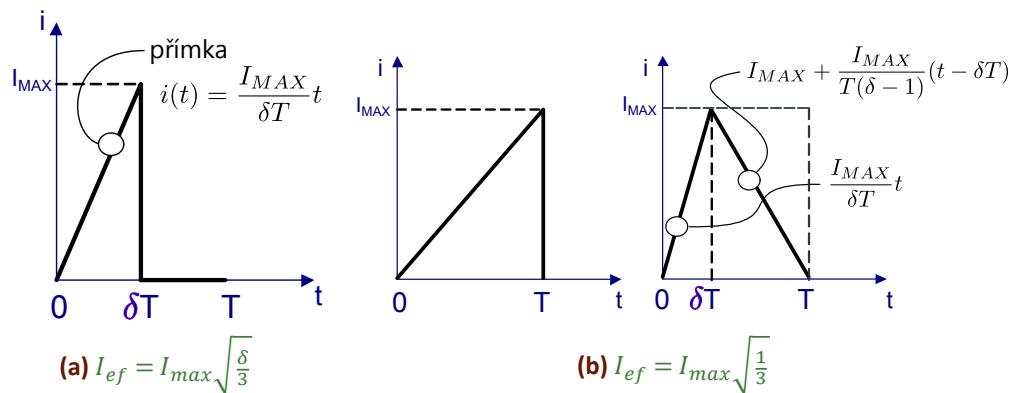
$$I_{ef1}^2 = \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \quad (28.8.10)$$

$$\begin{aligned} I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \\ &= \text{meze :} \begin{pmatrix} \tau = t - \delta T & \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt & \tau_d = 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left[I_{max}^2 \tau + \frac{I_{max}I_n}{T(\delta-1)} \tau^2 + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\ &= (1-\delta) \left[I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3} \right] \end{aligned}$$

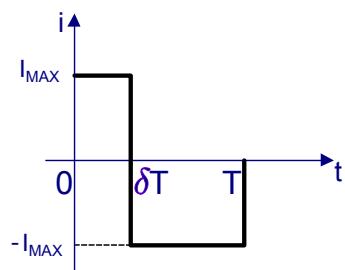
$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3}} \quad (28.8.11)$$

8. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 28.8.7:

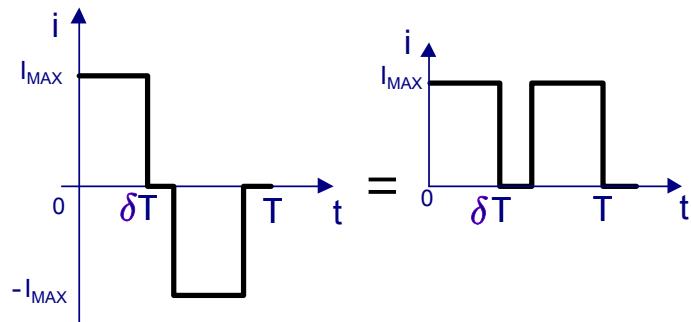
$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} (I_{max} \sin(t))^2 dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^{\delta T} \sin^2(t) dt \quad (28.8.12) \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \underbrace{\frac{\sin(t) \cos(t)}{2}}_{\sin(\delta T)=0} \right]_0^{\delta T} = I_{max} \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$



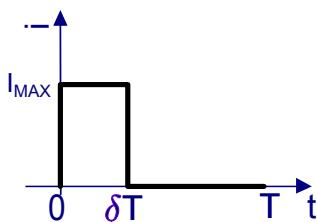
Obrázek 28.8.1: Typické průběhy proudů, jejichž efektivní hodnotu je nutné stanovit při dimenzování vinutých komponent.



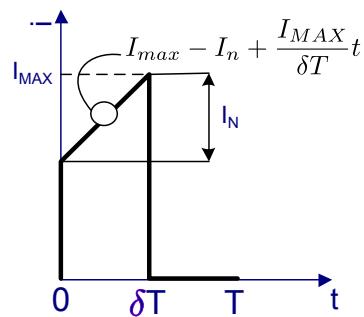
Obrázek 28.8.2: $I_{ef} = I_{max}$



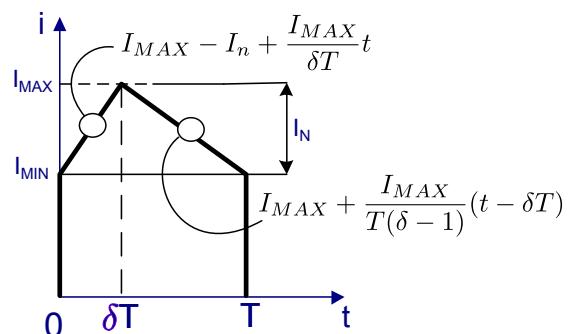
Obrázek 28.8.3: $I_{ef} = I_{max} \sqrt{2\delta}$



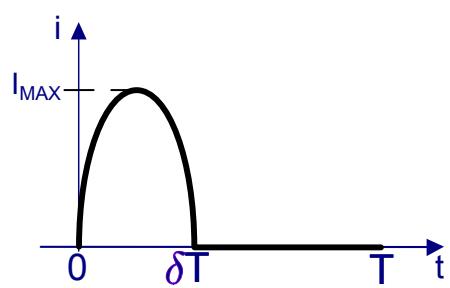
Obrázek 28.8.4: $I_{ef} = I_{max}\sqrt{\delta}$



Obrázek 28.8.5: $I_{ef} = I_{max}\sqrt{\delta \left(I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max} \right)}$



Obrázek 28.8.6: $I_{ef} = \sqrt{I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max}}$



Obrázek 28.8.7: $I_{ef} = \sqrt{I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max}}$

Část XI

Senzory a akční členy

Kapitola 29

Snímače tepelných veličin

Obsah

29.1 Základní pojmy	294
29.1.1 Elektrické teploměry	295
29.1.2 Odporové snímače	295

29.1 Základní pojmy

Teplota je charakteristika tepelného stavu hmoty. V obecném významu je to vlastnost předmětů a okolí, kterou je člověk schopen vnímat a přiřadit jí pocity studeného, teplého či horkého. V přírodních a technických vědách a jejich aplikacích je to *skalární intenzivní veličina*, která je vzhledem ke svému pravděpodobnostnímu charakteru vhodná k popisu stavu ustálených makroskopických systémů. Teplota souvisí s kinetickou energií čistic látky.

Teplota je základní fyzikální veličinou soustavy SI s jednotkou kelvin (K) a vedlejší jednotkou stupeň Celsia ($^{\circ}\text{C}$). Nejnižší možnou teplotou je teplota absolutní nuly (0 K; $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$), ke které se lze libovolně přiblížit, avšak nelze jí dosáhnout.

Do této skupiny patří především rozsáhlá část snímačů teploty. Z hlediska měřených veličin můžeme provést následující rozdělení.

1. Snímače teploty

a. Snímače pro dotykové měření

- elektrické
 - odporové kovové
 - odporové polovodičové
 - termoelektrické
 - polovodičové
- dilatační
- termoelektrické
- tlakové
- speciální

b. Snímače pro bezdotykové měření

- monochromatické pyrometry
- pásmové pyrometry
- radiační pyrometry

2. Snímače tepla

3. Snímače tepelného toku

29.1.1 Elektrické teploměry

29.1.2 Odporové snímače

Odporové snímače využívají princip změny elektrického oporu vlivem změny teploty. Základním požadavkem kladeným na materiál snímače je co největší a stálý teplotní součinitel odporu a zároveň co největší měrný odpor. Pro tyto účely se používají kovové a polovodičové materiály.

29.1.2.1 Kovové odporové snímače

Jsou to především čisté kovy, které se používají pro realizaci vlastního odporového článku. Požadavkem je, aby nereagovaly s izolačním nebo ochranným krytem. Jakékoli chemické nebo fyzikální vlivy by mohly způsobit nestálost odporu při stálé teplotě. Použitý materiál nemá vykazovat změnu teplotního součinitele odporu s časem (stárnutí) a hysterezi. Nejčastěji používanými materiály je *platina*, *nikl*, *měď*, *slitina stříbro-zlato* a další [Zeh83, s. 96].

Platina je výhodná pro velkou chemickou stálost, vysokou teplotou tavení a možností dosažení vysoké čistoty. Pro snímače teploty se používá tzv. fyzikálně čistá platina, jejíž čistota se pohybuje kolem 99,93 až 99,99 % Pt. Měření ukázala, že změny základního odporu u sériově vyráběných přesných teploměru se pohybí kolem $5 \times 10^{-6} R_0$ (což odpovídá 0,001 K), u nejlepších teploměrů je tato hodnota ještě o řadu menší. Proto se používá platina pro etalonový teploměr v oblasti teplot –259,34 °C až 630,74 °C.

Závislost odporu na teplotě pro rozsah 0 až 630 °C se vyjadřuje rovnicí

$$R_\vartheta = R_0(1 + A\vartheta + B\vartheta^2) \quad (29.1.1)$$

kde R_0 je odpor při 0 °C, ϑ ... teplota ve °C, A ... konstanta ($3,9075 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$), B ... konstanta ($-0,575 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$).

V rozmezí od 0 °C do –190 °C se vyjadřuje závislost odporu na teplotě rovnicí

$$R_\vartheta = R_0[1 + A\vartheta + B\vartheta^2 + C(\vartheta - 100)\vartheta^3] \quad (29.1.2)$$

kde C je konstanta ($-4 \times 10^{12} \text{ } ^\circ\text{C}$).

References

- [Zeh83] K. Zehnula. *Snímače neelektrických veličin*. SNTL, 1983, p. 372 (cit. on p. 295).

Část XII

Analogové elektronické systémy

Kapitola 30

Počítačová simulace v elektrotechnice

Obsah

30.1 Historie 300

30.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV 301

30.1 Historie

V roce 1971 vytvořil student „University of California“, Berkeley, USA *Larry Nagel* program SPICE1 (*SPICE = Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*). Program umožňoval analýzu dějů v obvodech, obsahujících zejména bipolární a unipolární tranzistory. O věrohodnost výsledků bylo usilováno propracovaností modelů i matematických algoritmů řešení rovnic. Uživatel měl navíc možnost rozšiřování sortimentu analyzovaných součástek technikou makromodelů zakladáním tzv. *podobvodů* (*subcircuits*) SPICE. Protože program byl v podstatě volně šířitelný, stal se brzo standardním simulačním nástrojem pro elektrotechnické úlohy. Usilovně se pracovalo na jeho zdokonalování.

V roce 1975 byla představena verze SPICE2 s podstatně vylepšenými modely i numerickými algoritmy. Tato verze byla v průběhu téměř 20 let postupně zdokonalována na Berkeleyské univerzitě až do dnes všeobecně známého standardu SPICE2G.6, který byl v r. 1983 zpřístupněn k volnému používání. Zdrojové texty SPICE1 a SPICE2 byly napsány ve Fortranu. Vzhledem k zvýšenému využívání unixových pracovních stanic padlo v Berkeley rozhodnutí přepsat SPICE2 do jazyka C. Tak začala vznikat verze SPICE3. Dnes je rozšířena verze SPICE3F.2. Oproti SPICE2G.6 se vyznačuje řadou vylepšení, ovšem z různých důvodů došlo k ztrátě zpětné kompatibility se SPICE2G.6.

S růstem výkonnosti počítačů PC byly programy, dosud běžící na výkonných pracovních stanicích, přepisovány na programy spustitelné na „PCčkách“. Tak vznikl standard PSpice. Dnes existuje více simulačních programů, které využívají v podstatě tři ne zcela kompatibilní standardy: SPICE2, SPICE3, PSPICE. Všechny lze rozdělit na tzv. „*Spice-like*“ a „*Spice-compatible*“ simulátory.

Označení „*Spice-like*“ znamená, že simulátor je schopen generovat podobné výsledky analýzy jako SPICE, avšak nemusí být schopen číst standardní vstupní soubory SPICE. Typickými příklady jsou staré verze programů Micro-Cap nebo TINA, program apod. Termínem „*Spice-compatible*“ se označují simulační programy, které dokáží číst standardní vstupní soubory SPICE, provádět klasické SPICE analýzy, a generovat výsledky v standardním SPICE2G.6 tvaru. Ze současných programů jsou to například PSpice, HSpice (standard SPICE3), WINSpice (standard SPICE3), MicroCap od verze IV, Multisim, LTspice (standard SPICE3) a další.

Kromě toho existují programy pro simulaci obvodů, které nemají s výše uvedenými skupinami programů mnoho společného. Jedná se zejména o jednoúčelové programy, specializované na analýzy obvodů, které nelze realizovat programy typu SPICE. Programy typu „*SPICE-compatible*“ jsou široce využívány mimo jiné proto, že umožňují neomezené rozšiřování sortimentu modelovaných součástek o nové typy, jejichž modely se průběžně objevují na webu a následně i v inovovaných knihovnách nových verzí programů. Na akademických pracovištích i v průmyslu je oblíbeným produktem OrcadPSpice.[[Bio05](#), s. 10]

30.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV

Kapitola 31

Zesilovače

Obsah

31.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	304
31.1.1 Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru	304

V této kapitole se budeme zabývat rozbory vlastností základních obvodů a jejich účelným spojováním do funkčních bloků určených pro zesilování signálů. [NUo1, p. 101]

31.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače

Přesný výpočet tranzistorového zesilovače vychází z určení dvojbranových parametrů tranzistoru a pokračuje sestavením matice obvodu a řešením této matice. Při použití vybraných rovnic matematických modelů pro programy SPICE lze dojít ke zjednodušenému řešení, ve kterém se některé parametry zanedbají a sestavené náhradní schema pak řešit libovolnou metodou. Přesto dostaneme výsledky s přesností, která pro obvyklé technické řešení postačuje.

31.1.1 Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru

Převodní charakteristika udává závislost výstupního proudu na vstupním napětí. Pro zapojení SE představuje převodní charakteristiku exponenciální závislost kolektorového proudu na napětí mezi bází a emitorem. Strmost je dána derivací funkce (tečnou) v daném pracovním bodě a odpovídá paramетru y_{21} .

Kapitola 32

Operační zesilovače

Obsah

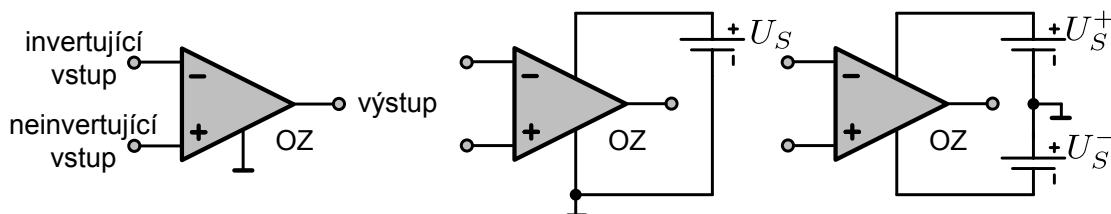
32.1	Úvod	306
32.2	Parametry operačního zesilovače	307
32.2.1	Lineární parametry a lineární model	307
32.2.2	Nelineární parametry	308
32.3	Ideální operační obvod	309
32.3.1	Paralelní operační obvod	309
32.3.2	Sériový operační obvod	310
32.3.3	Složený operační obvod	310

32.1 Úvod

Operační zesilovače (OZ, aj: opamp) původně vznikly jako složité elektronické obvody pro náročné použití při zpracování analogových (spojitě se měnících) stejnosměrných a nízkofrekvenčních střídavých signálů v analogových počítačích. Moderní polovodičová technologie umožnila vytvoření OZ v podobě levných integrovaných obvodů s malým počtem vývodů, které mají nepatrnou spotřebu, jsou odolné proti přetížení a umožňují jednoduše realizovat nejrůznější elektronická zařízení.

Svůj název získaly z dob *analogových počítačů*, ve kterých se používaly k realizaci matematických operací. Tyto integrované obvody se svými vlastnostmi blíží *ideálnímu zesilovačům napětí*. Jejich zesílení bez vnější zpětné vazby se blíží nekonečnu (10^7). Vstupní odpor je velmi velký ($10^4\Omega$) a výstupní odpor je malý (10Ω). Kmitočtový rozsah sahá od stejnosměrného signálu do desítek megahertzů. Vlastní šum a zkreslení zesilovače jsou rovněž malé. V dnešním pojetí je možné vymezit operační zesilovač jako **stejnosměrný zesilovač** s velkým zesílením a malým vlastním rušením, schopný stabilní činnosti v uzavřené zpětnovazební smyčce [Doso5, s. 5].

Směr signálového toku operačním zesilovačem (dále je OZ) od vstupu k výstupu je vyznačen trojúhelníkovým tvarem jeho symbolické značky na obr. 32.1.1.



Obrázek 32.1.1: Symbolická značka OP s vyznačenými signálovými svorkami (a) a skutečná realizace zemní svorky (b, c)

Shrnutí

1. Operační zesilovač má čtyři signálové svorky, i když se často kreslí jen tři - oba vstupy a výstup. Čtvrtou signálovou svorkou je zem.
2. Souhlasné napětí u_{CM} je totožné s napětím jeho neinvertujícího vstupu u^+ .
3. Ideální operační zesilovač má za všech okolností nulové diferenční vstupní napětí a nulové vstupní proudy.

32.2 Parametry operačního zesilovače

Ideální operační zesilovač je nedosažitelná abstrakce. K posouzení kvality skutečného operačního zesilovače slouží řada funkčních parametrů jako soubor dat, která lze zjistit měřením na svorkách.

Operační zesilovač, jako každý aktivní elektronický obvod, je obvod nelineární. Funkční charakteristiky OZ však připouštějí linearizaci bez přílišného odklonu od skutečnosti. Odpovídající kvazilineární parametry jsou podkladem lineárního modelu OZ. Ostatní parametry jsou podstatné nonlinearity, které tvoří meze jeho lineární oblasti.

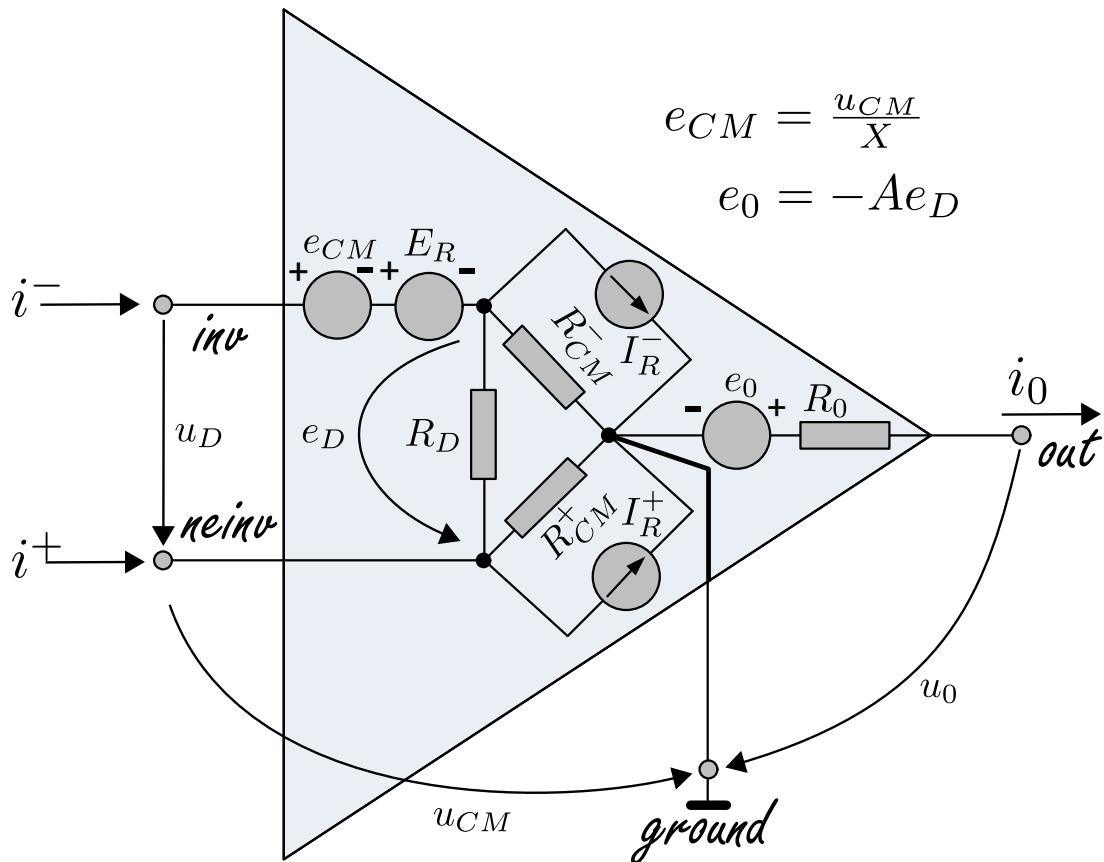
32.2.1 Lineární parametry a lineární model

Obr. 32.2.1 ukazuje úplný *lineární* model operačního zesilovače. Se zřetelem k pozdější analýze chyb operačního obvodu je vhodné rozdělit znázorněné lineární parametry na **aditivní** a **multiplikativní**.

- Aditivní parametry zahrnují náhradní rušivé zdroje náhodných fluktuací: E_R , I_R^- , I_R^+ , které způsobují aditivní chyby operačního obvodu nezávislé na jeho signálovém vybuzení.
- Multiplikativní parametry představované čtyřmi odpory R_D , R_{CM}^- , R_{CM}^+ , R_0 a dvěma řídicími konstantami $-A$, $1/X$ závislých generátorů, vystihují pasivní a přenosové vlastnosti OZ způsobují multiplikativní chyby operačních obvodů úměrné jeho signálovému vybuzení.

Vnitřní, na svorkách neměřitelný napěťový úbytek e_D na odporu R_D zastává v tomto modelu vazbu mezi vstupem a výstupem.

Při práci s proměnnými signály v časové nebo frekvenční oblasti se význam použitých symbolů vhodně rozšíří na impedance, operátorové přenosy apod.



Obrázek 32.2.1: Lineární model operačního zesilovače

32.2.2 Nelineární parametry

Chyby, které provázejí approximaci skutečného operačního zesilovače lineárním modelem, se zvětšují se vstupním a výstupním vybuzením. To se týká zejména linearizace převodní charakteristiky naprázdno $u_0(u_D)$ výrazem $-A(u_D - E_R - e_{CM})$, výstupní charakteristiky $u_0(i_0)$ výrazem $e_0 - R_0 i_0$ a vstupní charakteristiky $e_{CM}(u_{CM})$ výrazem u_{CM}/X . Skutečný průběh každé z těchto charakteristik se vyznačuje velmi ostrým kolenem, při jehož překročení ztrácejí lineární parametry smysl. Signálové vybuzení, které přísluší tomuto kolenu, tak vymezuje dosti přesně oblast lineárního chování [Doso5, s. 29].

Třem svorkovým proměnným u_{CM}, u_0, i_0 přísluší tři statické *nelinearity* (omezení rozkmitu) a tři dynamické *nelinearity* (omezení rychlosti)

32.3 Ideální operační obvod

32.3.1 Paralelní operační obvod

Napěťový invertor ukazuje, že vstupní signálový proud může být generován také synteticky, kombinací napěťového signálového zdroje a sériového rezistoru. Takovým způsobem vytvořený *napěťový invertor* na obr. * je jedním z nejčastějších operačních obvodů.

Vstupní napětí u_s je celé vloženo na rezistor R_1 (jeho pravý konec je virtuálně uzemněn) a vyvolává ekvivalentní vstupní proud $\frac{u_s}{R_1}$. Tento přítékající proud je kompenzován proudem $-\frac{u_0}{R_2}$ odsávaným přes zpětnovazební rezistor R_2 do výstupu operačního zesilovače

$$\frac{u_s}{R_1} = -\frac{u_0}{R_2}.$$

Ideální operační rovnice

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1}u_s. \quad (32.3.1)$$

Vyjadřuje úměrnost signálových napětí $-u_0$ a u_s velikostem přilehlých rezistorů R_2 a R_1 . Pro snadnější zapamatování se nabízí představa dvouramenné páky s délkami ramen R_1 a R_2 , otočné v bodě odpovídajícímu virtuální zemi, která přenáší výchylku u_s levého konce na výchylku u_0 pravého konce v opačné polaritě.

Zesílení napěťového invertoru

$$G_i = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (32.3.2)$$

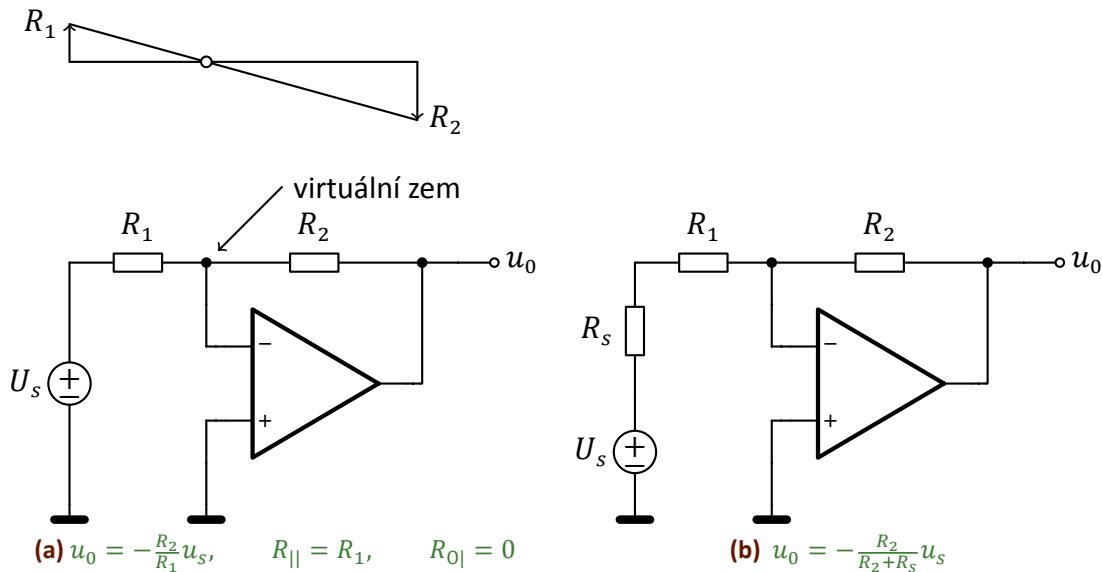
je záporné a nastavitelné v širokých mezích od 0 do ∞ výběrem rezistorů R_1 a R_2 . Zvláštním případem je jednotkový invertor se stejnými rezistory $R_1 = R_2$, který prostě invertuje polaritu vstupního napětí:

$$u_0 = -u_s, \quad G_i = -1.$$

Výstupní odpor napěťového invertoru je ideálně nulový. Jeho vstupní odpor však ztrácí onen vyhrazení charakter typický pro kanonické operační obvody a nabývá indiferentní velikosti

$$R_{||} = R_1, \quad (32.3.3)$$

rovné velikosti virtuálně uzemněného rezistoru R_1 .



Obrázek 32.3.1: Napěťový invertor. Jeho mechanickou analogií je dvouramenná páka (a). Přítomnost vnitřního odporu signálového zdroje R_s v operační rovnici je důsledkem konečného vstupního odporu $R_{||} = R_1$ (b).

Napěťový invertor zatěžuje signálový zdroj (obr. *). To se projevuje poklesem svorkového napětí signálového zdroje o úbytek na vnitřním odporu R_s , nebo jinak řečeno, přítomností nedefinovaného a nestáleého vnitřního odporu R_s v operační rovnici invertoru:

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1 + R_s} U_s. \quad (32.3.4)$$

Taková vlastnost se obvykle považuje za nedostatek.

32.3.2 Sériový operační obvod

32.3.3 Složený operační obvod

Operační obvody, které není možné zahrnout do předcházejích dvou velkých tříd, se vyznačují:

- signálovým buzením obou vstupů operačního zesilovače,
- násobnou zpětnou vazbou,
- kombinací záporné a kladné zpětné vazby,

- použitím několika operačních zesilovačů,
- nestandardním zapojením operačního zesilovače.

32.3.3.1 Signálové buzení obou vstupů

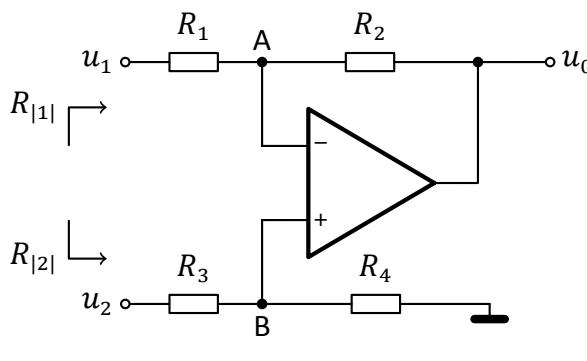
Rozdílový zesilovač na obr. 32.3.2 je lineární operační obvod se dvěma vstupy. Jeho výstupní napětí se najde superpozicí [Doso5, s. 126].

Nechť působí napětí u_1 a napětí u_2 je nulové. Neinvertující vstup operačního zesilovače je uzemněn přes paralelní kombinaci rezistorů R_3 a R_4 . Operační obvod představuje napěťový invertor a první složka výstupního napětí má velikost

$$-\frac{R_2}{R_1}u_1.$$

Nechť působí napětí u_2 a napětí u_1 je nulové. Operační obvod představuje neinvertující zesilovač s předřazeným děličem R_3 a R_4 a druhá složka výstupního napětí má velikost

$$u_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = u_2 \frac{R_2/R_1 + 1}{R_4/R_3 + 1} \cdot \frac{R_4}{R_3}.$$



rovnice:

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$u_0 = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1)$$

$$R_{|1|} = R_1$$

$$R_{|2|} = R_3 + R_4$$

$$R_{0|} = 0$$

Obrázek 32.3.2: Rozdílový zesilovač. Podmínky potlačení souhlasné složky vstupních napětí u_1 a u_2 je poměrové vyvážení zpětnovazebních rezistorů, $R_4/R_3 = R_2/R_1$. S ohledem na offset se obvykle volí uplná symetrie, tj. $R_4 = R_2$ a $R_3 = R_1$.

Současné působení obou vstupních napětí ve vyváženém operačním obvodě

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1},$$

přísluší výstupní napětí

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1), \quad (32.3.5)$$

úměrné rozdílu vstupních napětí bez ohledu na jejich absolutní velikost. Odtud název operačního obvodu. Důvod zařazení napěťového děliče (R_3, R_4) je zřejmý - dělič sjednocuje zesílení invertujícího a neinvertujícího vstupu, která se liší absolutně o jednotku.

Dvěma vstupům přísluší dva vstupní odpory. První vstupní odpor

$$R_{|1|} = R_1$$

je roven velikosti rezistoru R_1 , protože vnitřní odpor bodu A^1 je nulový. Druhý vstupní odpor

$$R_{|2|} = R_3 + R_4$$

je roven součtu rezistorů R_3 a R_4 , protože vnitřní odpor zbytku operačního obvodu v bodě B je nekonečný. Tyto dva vstupní odpory jsou různé, i když jsou obě větve (R_1, R_2) a (R_3, R_4) stejné.

Vstupní odpory $R_{|1|}$ a $R_{|2|}$ přísluší dvěma samostatným uzemněným zdrojům signálových napětí u_1 a u_2 podle 32.3.2. Volnému (izolovanému) signálovému napěťovému zdroji připojenému diferenčně mezi vstupy rozdílového zesilovače, by příslušel diferenční vstupní odpor

$$R_{|D|} = R_1 + R_3,$$

rovný součtové velikosti rezistorů $R_{|1|}$ a $R_{|3|}$, protože body A a B jsou virtuálně zkratovány.

¹obdoba virtuální země

Kapitola 33

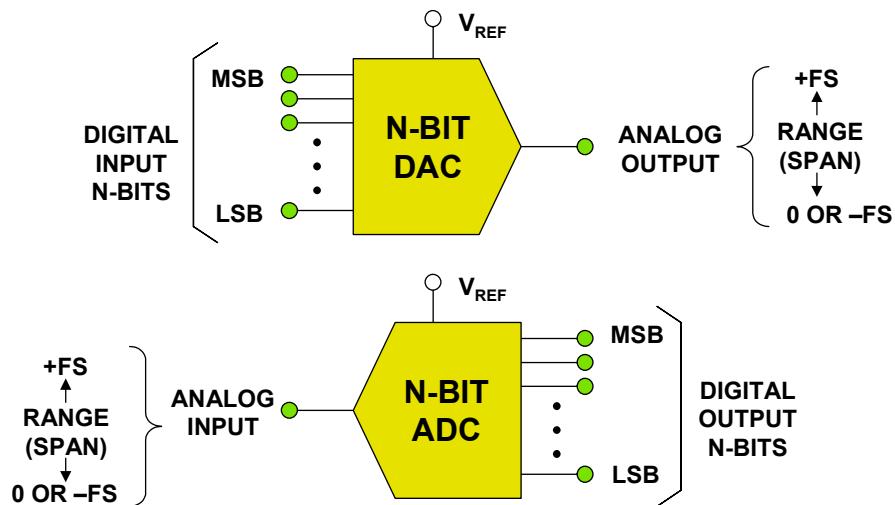
Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Obsah

33.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	314
33.1.1 Základní struktura převodníků	315
33.1.2 Statické a dynamické parametry převodníků	315
33.1.3 Vzorkování	316
33.1.4 Kvantování	316
33.1.5 Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC	320
33.2 Principy A/D převodníků	323
33.3 Převod číslicového signálu na analogový	324
33.3.1 DA převodník DACo800	326

33.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Při zpracování analogového signálu je jednou z důležitých funkcí převod tohoto signálu z analogové podoby do číslicové a naopak. Proto jsou analogově-číslicové převodníky resp. číslicově-analogové převodníky (ADC - Analog-to-Digital Converter), (DAC - Digital-to-Analog Converter) velmi důležitými prvky jakékoli systému zpracovávajícího signál [Haz+10, s. 11]. Na obrázku 33.1.1 je definováno rozhraní obou typů převodníku.



Obrázek 33.1.1: Definice rozhraní bloku analogově-číslicového (ADC) a číslicově-analogového (DAC) převodníku

Analogově-číslicové převodníky (Analog-to-Digital Converters) slouží k převedení analogového signálu na signál číslicový. Pro A/D převodník má analogová stupnice vstupního signálu délku FS (*Full scale*), udávanou např. ve voltech. Stupnice číslicového signálu pak vyznačuje diskrétní hodnoty výstupu, které převodník generuje při převodu analogového signálu [NUO1, s. 202].

Číslicově-analogové převodníky (Digital-to-Analog Converters) slouží k opačnému procesu, tedy k převedení číslicového signálu na signál analogový, což by šlo realizovat pomocí lineárního digitálního potenciometru a připojeného zdroje referenčního napětí na jeho vstupu [NUO1, s. 208]. Pro N-bitové binární slovo by musel mít $n - 1$ rezistorů a n resp. $2n - 1$ spínačů. To je monoliticky téměř nerealizovatelné již pro osmi- a vícebitové slovo. Řešení převodníků proto musí být mnohem úspornější, i když úspory budou vykoupeny jinými nevýhodami, případně omezeními pro jejich použití.

33.1.1 Základní struktura převodníků

Obě skupiny převodníků mohou typicky obsahovat komparátory, číslicové obvody, spínače, integrátory, vzorkovací obvody a/nebo pasivní součástky. Nezbytnou a důležitou součástí je i přesný zdroj referenčního napětí. V mnoha případech pak také platí, že DAC je jednou z částí ADC.

Analogově číslicový převod můžeme pomyslně rozložit do tří etap [ŠS10].

1. Převod signálu se spojitým časem na signál s diskrétním časem. Tomuto převodu říkáme vzorkování.
2. Kvantování vzorku s cílem vyjádřit vzorky konečnou množinou čísel. Tento krok je provázen vznikem tzv. kvantovacího šumu. Uvedený jev souvisí s nelineárním zkreslením známým z teorie obvodů.
3. Kódování spočívající zpravidla v binárním vyjádření čísel představujících velikosti vzorku.

33.1.2 Statické a dynamické parametry převodníků

Statické parametry převodníků jsou určovány pomocí *převodní charakteristiky*, zatím co dynamické vlastnosti se vyhodnocují z kmitočtového spektra převodníku [Haz+10, s. 11].

- rozsah,
- integrální a diferenciální nelinearity (*integral - INL, differential - DNL nonlinearity*),
- rozlišení převodníku (*resolution*),
- přesnost (*accuracy*),
- chyba monotónnosti,
- chyba nastavení nuly (*offset error*),
- hystereze a další.

K hlavním dynamickým parametrům patří

- odstup signál - šum (*signal to noise ratio - SNR*) kap. [33.1.5.1](#),
- efektivní počet bitů (*effective number of bits - ENOB*),
- harmonické zkreslení (*total harmonic distortion - THD*),
- odstup signál-šum a zkreslení (*signal to noise and distortion - SINAD*),
- dynamický rozsah bez parazitních složek (*spurious free dynamic range - SFDR*),
- šum - vrcholový, efektivní (*noise - peak, rms*),
- doba přepnutí a ustálení.

33.1.3 Vzorkování

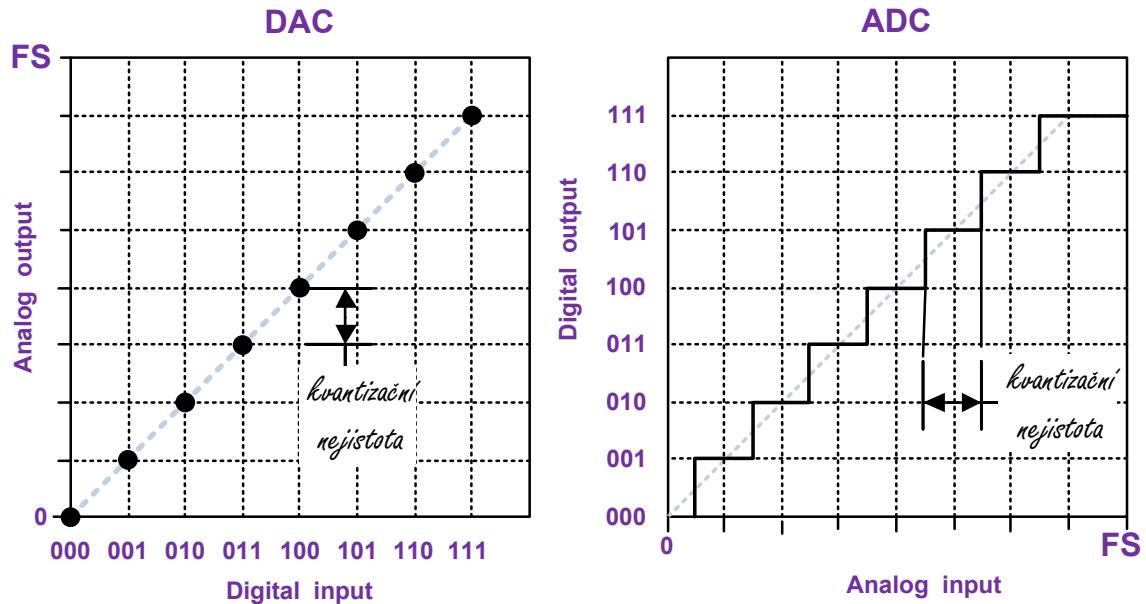
33.1.4 Kvantování

Pro přechod od časově spojitého signálu se spojitou množinou hodnot k číslicovému signálu, je nutné provést (výškové) kvantování, tj. kvantování hodnot signálu, které je patrné z obrázku [33.1.4](#). Je zřejmé, že mapování spojitého intervalu vstupních hodnot na diskrétní hodnoty digitálního výstupu způsobí, že každá hodnota digitálního výstupu platí pro vstupní signál měnící se v určitém podintervalu. Délka podintervalu, pro který platí jedna hodnota digitálního výstupu se nazývá **kvantizační krok převodníku - Q**, jenž je roven bitu s nejnižší váhou - LSB.

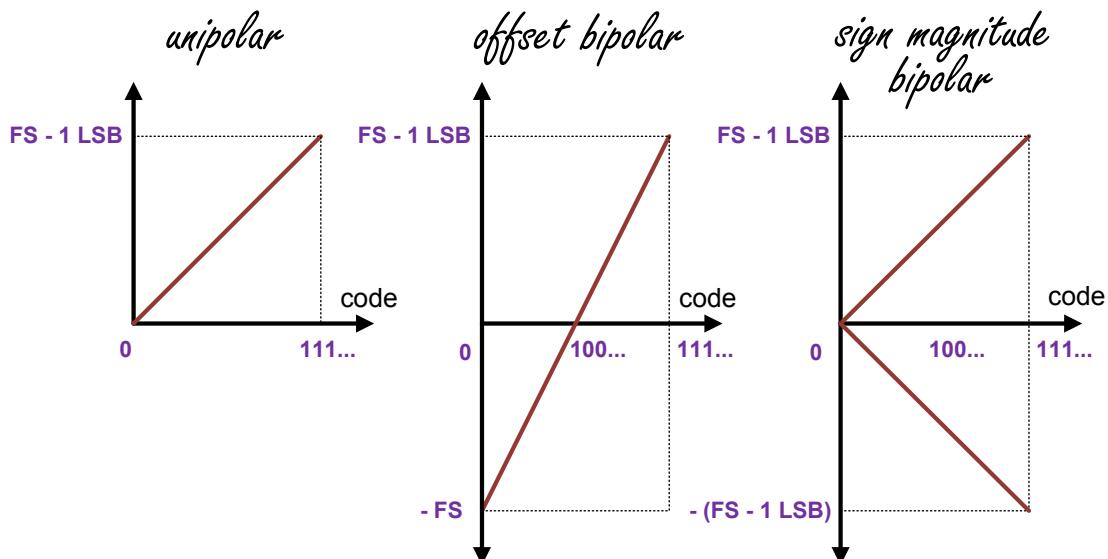
Převodní charakteristika DA i AD převodníku je znázorněna na obr. [33.1.2](#). Analogový signál je spojitý a číslicový signál vyjadřuje jen jeho vybrané diskrétní hodnoty. Proto je převodní charakteristika nespojitá. Naproti tomu digitální vstup vytvoří na výstupu pouze omezený počet hodnot výstupního signálu.

Počet úrovní AD převodníku, do kterého je rozdělen rozsah vstupního analogového signálu definuje **rozlišovací schopnost ADC** a lze ji vyjádřit různými způsoby, jak ukazuje tabulka [33.1.1](#) pro 2 až 24bitového převodníku.

Kvantizační chyba, jejíž průběh je na obr. [33.1.4](#), v dynamickém režimu, tj. při časových změnách vstupní analogové veličiny, způsobuje **kvantizační šum**. Ten lze pozorovat např. tehdy, kdy čísla získaná z převodníku A/D jsou vedena do převodníku D/A a jím je analogový signál rekonstruován. Rekonstruovaný signál se jeví jako signál původní, avšak se superponovaným rušivým signálem. Vzájemným odečtení rekonstruovaného a



Obrázek 33.1.2: Ideální přenosová funkce 3bitového unipolárního AD a DA převodníku. V případě DA převodníku je přenosová funkce tvořena osmi body, nikoliv čárou.



Obrázek 33.1.3: Unipolární a bipolární převodníky [Kes04]

původního signálu, dostaneme samostatný rušivý signál, který lze podrobit analýze. Pokud je vzorkovací signál nekorelovaný se vzorkovaným signálem, je možno kvantizační šum považovat za náhodný. Vztah mezi původním signálem a signálem degradovaným

Rozlišení N	2^N	Napětí 10V FS	ppm FS	% FS	dB FS
2-bit	4	2.5 V	250000	25	-12
4-bit	16	625 mV	62500	6,25	-24
6-bit	64	156 mV	15625	1,56	-36
8-bit	256	39,1 mV	3906	0,39	-48
10-bit	1024	9,77 mV	977	0,098	-60
12-bit	4096	2.44 mV	244	0,024	-72
14-bit	16384	610 μ V	61	0,061	-84
16-bit	65536	153 μ V	15	0,0015	-96
18-bit	262144	38 μ	4	0,0004	-108
20-bit	1048576	9.54 μ	1	0,0001	-120
22-bit	4194304	2.38 μ	0,24	0,000024	-132
24-bit	16777216	596 nV	0,06	0,000006	-144

Tabulka 33.1.1: Porovnání rozlišovací schopnosti AD převodníku s různou délhou výstupního slova.

Z tabulky vyplývá, že kvantizační krok 24bitového ADC odpovídá velikosti úbytku na rezistoru $2, 2k\Omega$ při teplotě $25^\circ C$, který vzniká vlivem tepelného šumu (viz Johnsonův šum) jenž je při šířce pásma 10 kHz roven 600 nV.

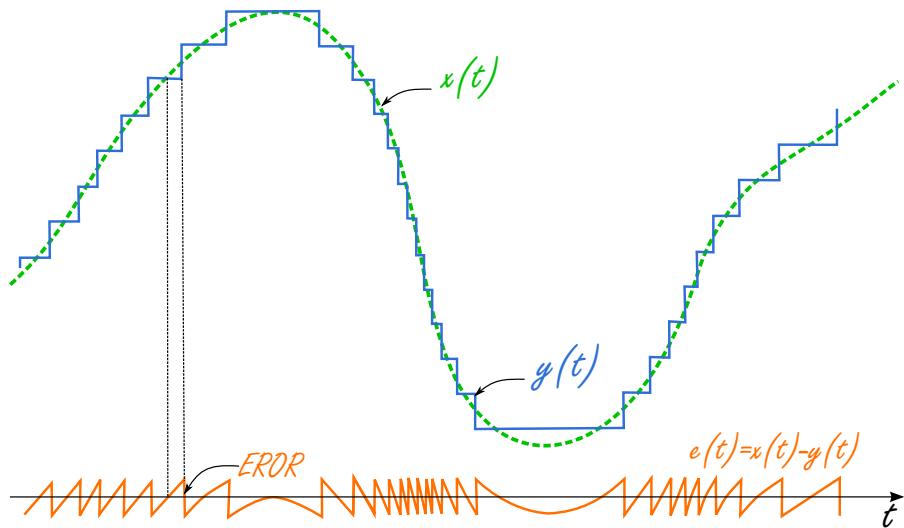
kvantizačním šumem vyjadřuje parametr - SNR

- SNR - Signal to Noise Ratio: poměr signálu k šumu

$$SNR = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{(y(t) - x(t))^2\}} \quad (33.1.1)$$

- $E\{\cdot\}$... operátor průměrování
- $x(t)$... vstupní analogový signál
- $y(t)$... rekonstruovaný kvantovaný signál

Kvantizační chybu lze approximovat nekorelovaným pilovým průběhem s amplitudou špička-špička rovnou kvantizačnímu kroku Q . Ačkoliv takto provedená analýza (viz kapitola 33.1.5) není přesná, v běžných aplikacích zcela postačuje.



Obrázek 33.1.4: Kvantizační chyba je rovna rozdílu původního $x(t)$ a kvantovaného signálu v úrovni $y(t)$ [WRB48]

Na obr. 33.1.5 je kvantování realizováno tak, že je zajištěna minimální chyba kvantování, tj. převodník provádí operaci zaokrouhlování na nejbližší hodnotu. To znamená, že např. číslo jedna bude generováno vstupem v intervalu $1 \pm 0,5V$, je-li FS rovno 8V a máme-li k dispozici osm kvantizačních úrovní.

Převodník, který má v celém intervalu předváděných vstupních hodnot konstantní kvantizační krok, se též označuje jako lineární kvantizér. Převodník s přirozeným binárním kódem o N bitech je schopen na analogové straně reprezentovat $n-1$ nenulových úrovní analogové veličiny, přičemž platí

$$n = 2^N \quad (33.1.2)$$

A jede-li o lineární N -bitový kvantizér, můžeme vyjádřit kvantizační krok vztahem

$$Q = \frac{FS}{n} = \frac{FS}{2^N} \quad (33.1.3)$$

Nejvyšší úroveň vstupní veličiny A pak bude

$$A_{max} = \frac{n-1}{n} + \frac{Q}{2} \quad (33.1.4)$$

V sekvenci bitů binárního čísla generovaného převodníkem se zpravidla první bit, který představuje nejvyšší binární řád, označuje MSB (*Most Significant Bit*), tedy nejvýznamnější bit. Poslední bit, tj. bit v poloze nejnižšího rádu, má označení LSB

(*Least Significant Bit*), tedy nejméně významný bit. Je zřejmé, že LSB jednoznačně určuje základní krok na ose číslicového signálu. Dojde-li ke změně pouze v hodnotě LSB, změní se analogová hodnota právě o kvantizační krok. LSB tedy na analogové straně určuje rozlišovací schopnost převodníku. Např. osmibitový převodník má rozlišovací schopnost $FS/256$, tj. přibližně $0,4\%$. Je-li $FS = 2V$, musí rozlišit 8 mV [NU01, s. 203].

Vzhledem k diskretizaci hodnot původního analogového signálu při převodu A/D dochází ke *kvantizačním chybám*. Je-li např. vstupní veličinou okamžité napětí u_a a této hodnotě odpovídá na výstupu číslo D , pak kvantizační chybu ε_q lze vyjádřit takto:

$$\varepsilon_q = u_a - FS \frac{D}{2^N} \quad (33.1.5)$$

33.1.5 Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC

V předchozí kapitole byla nastíněna možnost approximace kvantizační chyby jakéhokoliv AC signálu v časové oblasti (viz 33.1.4) nekorelovaným pilovým průběhem, za cenu určité nepřesnosti vyvážené jednodušším matematickým aparátem.

Vyjděme tedy z převodní charakteristiky ideálního N-bitového převodníku zatížené kvantizační chybou, tak jak je znázorněna na obr. 33.1.5. Z té je patrné, že chyba může v absolutní hodnotě dosáhnout maximálně $e(t) = \frac{Q}{2}$, resp. $\pm \frac{1}{2}LSB$ a v rámci kvantizačního kroku ji lze popsat přímkou se strmostí s :

$$e(t) = st, -\frac{Q}{2s} < t < +\frac{Q}{2s}.$$

Statisticky je pravděpodobnost jejího rozložení $1/Q$ a je rovnoměrná od $-\frac{Q}{2}$ do $+\frac{Q}{2}$.

Z výše uvedeného plyne, že okamžitá hodnota kvantizační chyby $\varepsilon_q(t) = y(t) - x(t)$ může dosáhnout rozkmitu maximálně $\pm \frac{Q}{2}$ a jelikož předpokládáme rovnoměrné rozložení hodnot, je hustota pravděpodobnosti amplitud rovna $\frac{1}{Q}$.

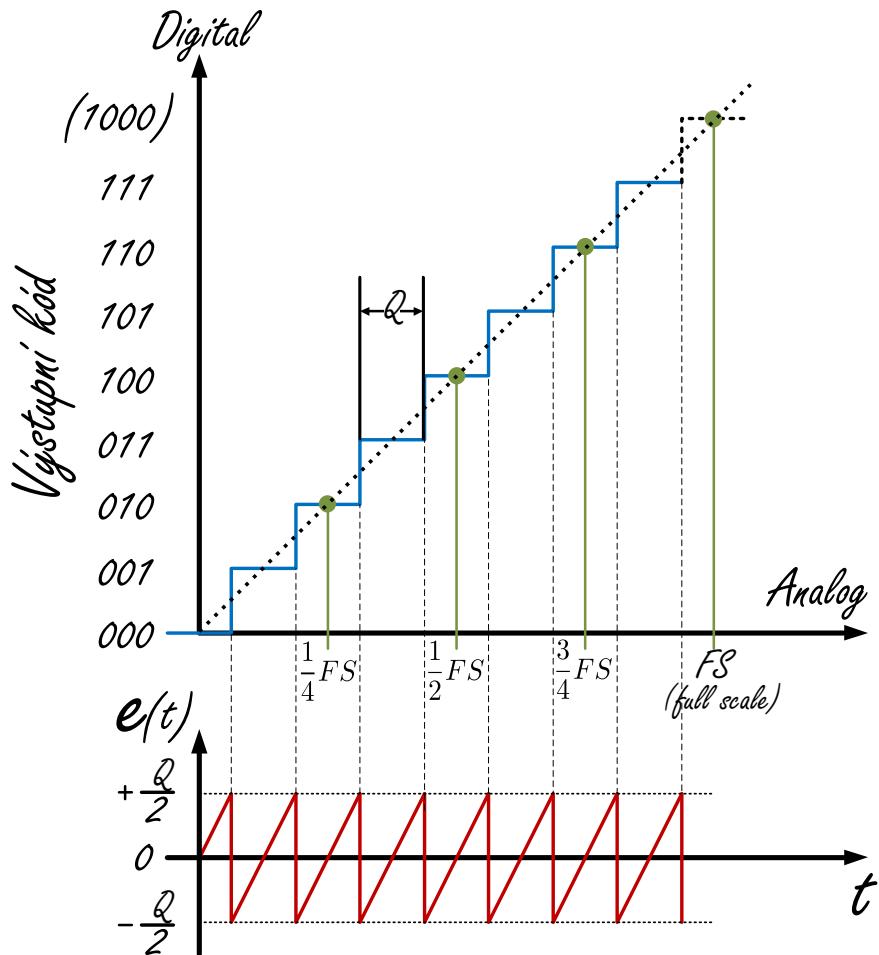
Kvantizační šum σ^2 je definován jako výkon (rozptyl) střídavé složky kvantizační chyby ε_q a jeho efektivní hodnotu σ můžeme odvodit pomocí věty o druhém centrálním momentu nebo výpočtem efektivní hodnoty v časové oblasti.

1. V pravděpodobnostním počtu je K-tý moment definován jako:

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$$

tedy

$$e(t) = \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (x - x_0)^2 p(x) dx = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2}{12}$$



Obrázek 33.1.5: Převodní charakteristika ideálních převodníků a závislost chyby kvantizace na vstupní analogové hodnotě

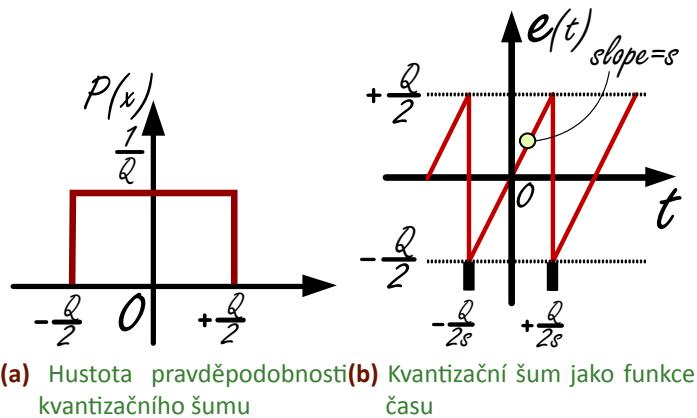
2. V časové oblasti má kvantizační šum pilový průběh viz obr. 33.1.6b. Z definičního integrálu efektivní hodnoty dostaneme

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (st)^2 dt = \frac{Q^2}{12}.$$

Též můžeme využít znalosti efektivní hodnoty pro průběh tohoto typu: $\frac{U_m}{\sqrt{3}}$ a dosazením za $U_m = \frac{Q}{2}$ získáme opět stejný výsledek jako při výpočtu integrálu

Tedy efektivní hodnota kvantizačního šumu ideálního N-bitového převodníku je:

$$e(t) = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (33.1.6)$$



Obrázek 33.1.6: K odvození efektivní hodnoty kvantizačního šumu

Předpokládejme na vstupu převodníku ustálený harmonický signál o amplitudě X . Dále předpokládejme, že signál s amplitudou X_m by pokryl celý rozsah převodníku FS . Pak se dá ze vztahu 33.1.1 vyjádřit odstup signálu od šumu SNR ideálního N -bitového převodníku jako podíl jejich výkonů resp. kvadrátu efektivních hodnot signálu a šumu v decibelech vztahem

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 \quad (33.1.7)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = 10 \log \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 = 20 \log \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \quad (33.1.8)$$

(33.1.9)

$$SNR = 1,76 + 6,02N + 20 \log \left(\frac{X}{X_m} \right) \quad (33.1.10)$$

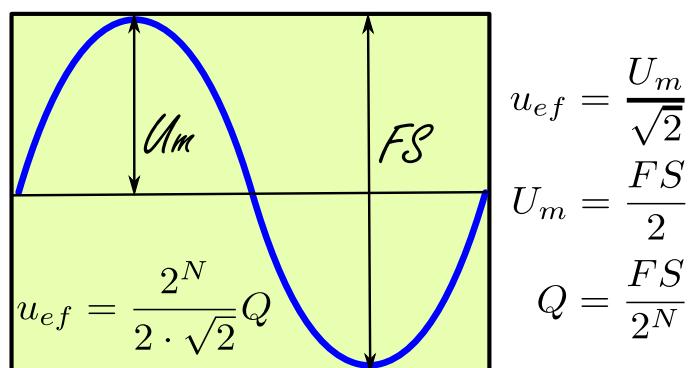
Lze tedy říci, že každý bit navíc v digitálním výstupu A/D převodníku přinese zlepšení odstupu signálu od šumu o 6 dB. Naproti tomu je třeba vědět, že uvedený výraz počítá s harmonickým signálem různého rozkmitu. Při zmenšování amplitudy bude relativní podíl šumu v signálu vyšší. Poměry se také mohou velmi změnit, když signál nebude mít harmonický charakter.

33.1.5.1 Odstup signálu od šumu

Z předchozí kapitoly víme, že SNR je definován jako poměr výkonu signálu k výkonu šumu ($výkon = ef.hodnota^2$). Pro samotný kvantizační šum platí:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{\frac{2^N}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot Q}{\frac{Q}{\sqrt{12}}} \right)^2 = N20 \log 2 + 20 \log \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{12}} \quad (33.1.11)$$

$$SNR_{dB} = 6,02 \cdot N + 1,76 dB$$



Obrázek 33.1.7

Tato hodnota platí pouze pro ideální převodník pouze s kvantizační chybou, a sinusový signál s rozkmitem přes celý rozsah převodníku. Skutečný převodník má ovšem vlivem dalších chyb SNR menší než SNR určený pouze pro kvantizační šum. Tato hodnota se nazývá SINAD nebo SNDR - *Signal-to-Noise and Distortion ratio*.

Známe-li SNR skutečného převodníku, můžeme určit počet efektivních bitu N_{ef} tzn. *efektivní rozlišitelnost převodníku*. Ten je vždy menší než N .

$$N_{ef} = \frac{SNR - 1,76}{6,02} \quad (33.1.12)$$

33.2 Principy A/D převodníků

Převod analogového signálu na číslo lze uskutečnit několika různými postupy:[NUo1]

1. Vstupní signál se porovnává s kvantovanou referenční veličinou a komparátory okamžitě vyhodnotí, který z nich je větší. Přímým výstupním údajem je binární číslicové slovo.
2. Vstupní signál i referenční veličina se v určité časové sekvenci zavádějí do integrátoru a komparátor na jeho výstupu určuje sekvenci impulsů, vypovídající o hodnotě vstupní analogové veličiny. Informací o vstupní veličině dále přenáší počet impulsů, jejich kmitočet nebo kódovaná sekvence impulsů. Tato informace může být převedena číslicovým blokem (obvykle blokem DSP) na binární číslicové slovo.

Bývá také používáno třídění na *převodníky s přímým a nepřímým vyhodnocením analogové veličiny*.

- *Převodníky s přímým vyhodnocením* porovnávají hodnoty analogové veličiny s vybranými kvatizačními úrovněmi současně nebo postupně, a to tak, že každá úroveň má vlastní komparátor. K těmto převodníkům patří *převodníky paralelní a kaskádní*.
- K nepřímému převodu můžeme využít postupného provolávání vstupní veličiny s vhodnými vzorky referenčního napětí, dodávanými na vstup jediného komparátoru v pořadí a velikosti řízené logickými obvody. U těchto převodníků je vstupní analogová veličina porovnávaná s výstupní veličinou převodníku D/A, přičemž je číslicový vstup tohoto převodníku měněn tak, aby se obě veličiny k sobě přiblížovaly. Pokud se k sobě dostatečně přiblíží, je převod ukončen. I zde jsou v podstatě jen dvě jednoduché možnosti přiblížování výstup převodníku D/A k určité úrovni vstupní veličiny: buď se přiblížování děje se stálým krokem, kdy jde o krování po jednotlivých kvantovacích úrovních (*převodníky sledovací*), nebo postupnou approximací (*převodníky approximační*), kdy první krok rozhoduje o hodnotě MSB, další kroky porovnávají binárně zmenšované hodnoty odpovídající jednotlivým binárním řádům s tím, že poslední krok určí hodnotu LSB.
- Jinou možností nepřímého převodu A/D je převést hodnotu vstupní veličiny na takový parametr pomocného signálu, který se pak dá snadno převést na číslicový údaj. Tímto parametrem je nejčastěji kmitočet, jindy to může být i počet impulzů v určitém časovém intervalu nebo kódovaná sekvence impulsů. U těchto převodníků j kromě komparátoru typickým funkčním blokem integrátor.

33.3 Převod číslicového signálu na analogový

Číslicově-analogové převodníky převádějí číslicový signál zpravidla ve formě binárně kódovaného čísla na proud nebo napětí.

$$U_A = D \cdot U_{REF} \quad I_A = D \cdot I_{REF} \quad (33.3.1)$$

kde U_{REF} , I_{REF} jsou referenční napětí a proud určující rozsah výstupní veličiny. Je-li referenční napětí konstantní jedná se o klasické převodníky DAC. Při proměnném referenčním napětí se jedná o násobící převodníky MDAC, které realizují násobení časově proměnného referenčního spojitého a vstupního číslicového signálu. Hodnota číslicového signálu D se vyjadřuje ve dvojkovém nebo dvojkově desítkovém (BCD) kódu. Ve dvojkovém kódu:

$$D_B = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{-i} \quad (33.3.2)$$

n je počet bitů dvojkového čísla. Bit a_1 s nejvyšší vahou $1/2$ se označuje **MSB**, bit a_n s nejnižší vahou 2^{-n} se označuje **LSB**. Maximální hodnota číslicového signálu $D_{MAX} = 1 - 2^{-n}$ a proto maximální hodnota výstupní veličiny je vždy o 1 LSB menší, než je rozsah převodníku. Veličina $2^{-n} \cdot U_{REF}$, resp. $2^{-n} \cdot I_{REF}$ se nazývá **kvantum referenčního napětí nebo proudu** a určuje **rozlišitelnost** převodníku. Převodní funkci D/A převodníku můžeme v případě binárního kódu vyjádřit vztahem

$$U_A = U_{REF} \cdot (a_n 2^{-n} + a_{n-1} 2^{-(n-1)} + \dots + a_1 2^{-1}) \quad (33.3.3)$$

Statické vlastnosti D/A převodníku jsou určeny převodní charakteristikou, která je obvykle lineární (obr. 33.3.1). Převodní charakteristika reálného DA převodníku je zatížena chybou nuly, chybou zisku, integrální a diferenciální nelinearitou a monotónností převodu.

Z převodní charakteristiky lze tedy určit následující parametry převodníku:

- Chybu nuly (posunu) ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta U_0}{U_{REF}} \quad (33.3.4)$$

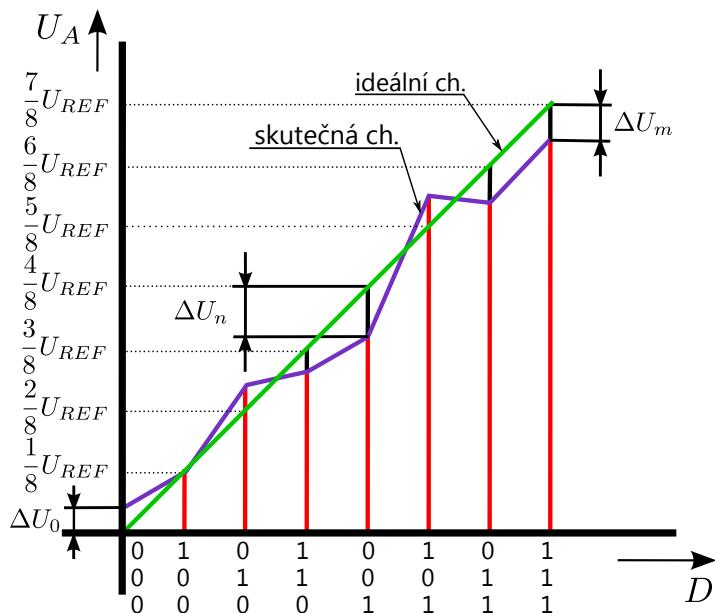
- Chybu měřítka (zesílení) ε_m

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta U_m - \Delta U_0}{U_{REF}} \quad (33.3.5)$$

- Integrální nelinearitu I_{NL} jako maximální odchylku výstupního napětí skutečného převodníku od ideální hodnoty v celém rozsahu převodníku

$$I_{NL} = \frac{\max \Delta U_n}{U_{REF}} \quad (33.3.6)$$

Všechny tyto chyby se vyjadřují buď v procentech jmenovitého rozsahu U_{REF} převodníku, nebo v jednotkách ideální kvantizační úrovně (kvanta) $q = 2^{-n} \cdot U_{REF}$.



Obrázek 33.3.1: Statická převodní charakteristika 3 bitového DA převodníku

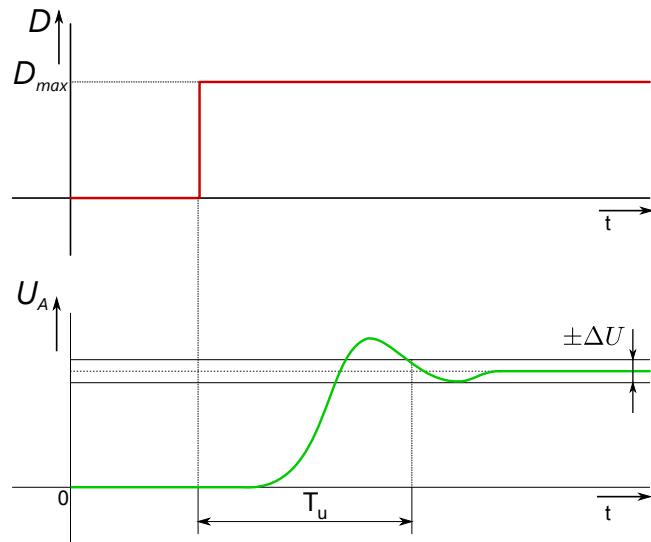
Dynamické vlastnosti D/A převodníku jsou charakterizovány **dobou ustálení** T_u (obr. 33.3.2), potřebnou k ustálení výstupního signálu na jmenovitou hodnotu se zadanou chybou ΔU obvykle $\pm 0.5LSB$.

U násobících D/A převodníků se navíc určuje kmitočtový rozsah referenčního napětí kmitočtem f_m , při kterém poklesne výstupní napětí převodníku o $3dB$ oproti stejnosměrnému napětí při maximální hodnotě číslicového signálu.

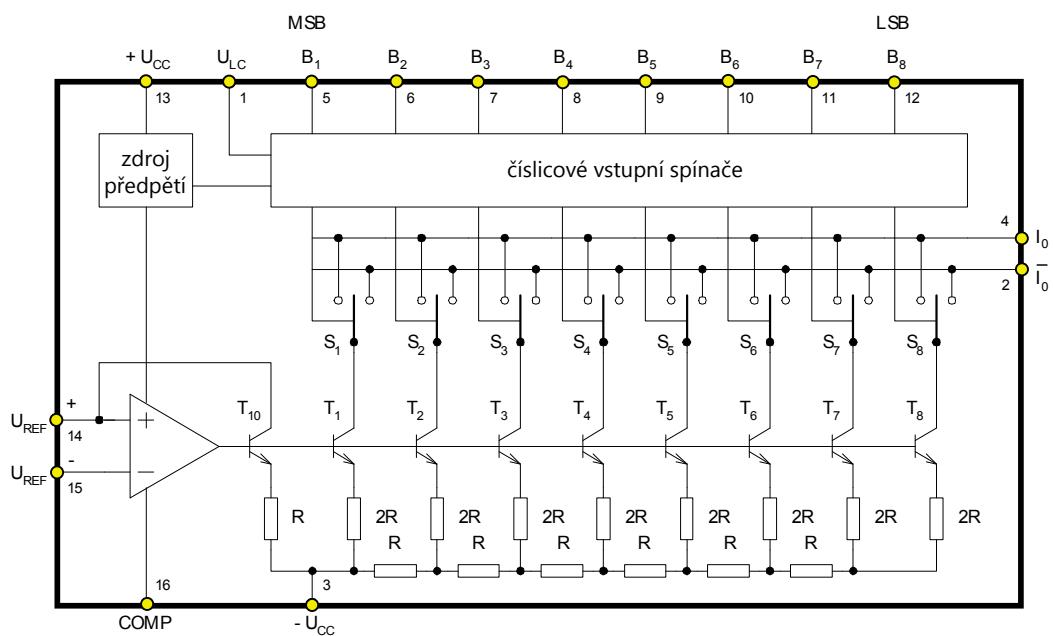
33.3.1 DA převodník DAC0800

D/A převodník DAC0800 je velmi rychlý násobící D/A převodník s rozlišením 8 bitů, pracující na principu spínaných proudových zdrojů (viz obr. 33.3.3).

Vstup převodníku je proudový, proudový výstup je řešen jako komplementární. IO v sobě slučuje proudové spínače, váhové odpory a řídící zesilovač. Analogová reference, přesné vnější odpory, korekční kondenzátor a výstupní zesilovač se připojují vně převodníku. Převodník DAC0800 generuje váhové proudy do komplementárních proudových sběrnic I_0 a \bar{I}_0 prostřednictvím spínaných proudových zdrojů s tranzistory T_1 až T_8 a odporovou sítí $R - 2R$ viz obr. 33.3.3. Při úrovni H na číslicových vstupech B_1 až B_8 připojí spínače S_1 až S_8 příslušné váhové proudy na výstup I_0 a při úrovni L na výstup \bar{I}_0 .



Obrázek 33.3.2: Doba ustálení T_a DA převodníku. Je to celková doba od změny vstupního kódu do ustálení analogového výstupu s přesností $\pm \frac{1}{2} LSB$

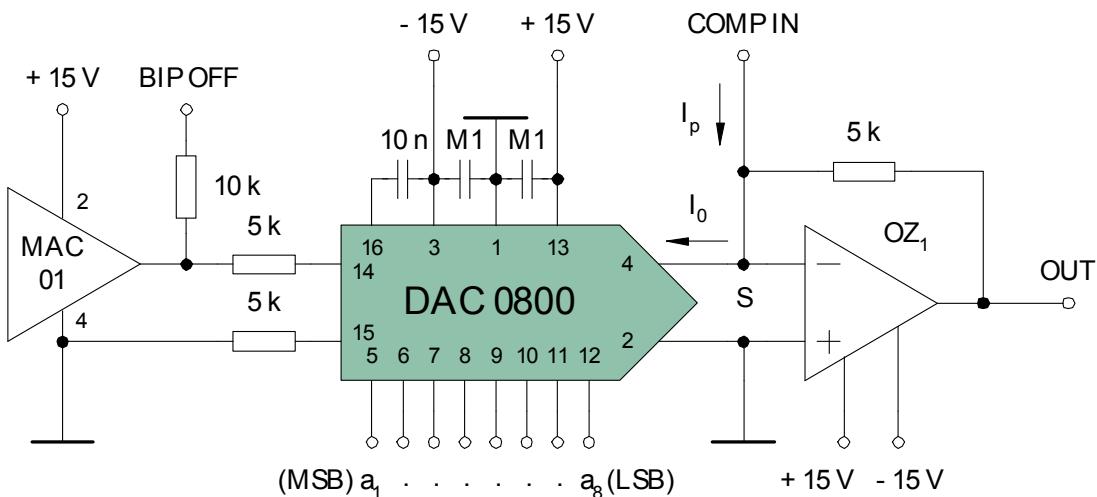


Obrázek 33.3.3: Blokové schéma DA převodníku DAC0800

Nezávislost váhových proudů na teplotních změnách zajišťuje referenční zdroj proudu s tranzistorem T_{10} a zesilovačem Z, ke kterému se připojuje referenční proud o

jmenovité hodnotě $2mA$. Kondenzátor s kapacitou $10nF$ připojený mezi vývody 3 a 16 slouží ke kmitočtové kompenzaci zesilovače Z. Číslicové vstupy S_1 až B_8 řídí spínače S_1 až S_8 prostřednictvím převodníku úrovní, přičemž svorkou V_{LC} (pin 1) lze volit slučitelnost převodníku s obvody TTL, DTL, CMOS atd.

Vstupní referenční proud I_{REF} je odvozen pomocí vnějšího přesného odporu R_{REF} ze zdroje referenčního napětí U_{REF} . Souběh referenčního proudu a plného výstupního proudu I_{FS} je zachován v rozpětí dvou dekád proměnné unipolární reference a umožňuje použít IO též jako násobící převodník. Výstupní proudy I_0 , \bar{I}_0 z vysokoimpedančních výstupů se mohou využívat přímo nebo pomocí vnějších odporů, popřípadě pomocí OZ, se mohou převést na napětí. Převodník pracuje se vstupním přímým binárním kódem při využití přímého proudového výstupu I_0 nebo se vstupním komplementárním binárním kódem, využije-li se doplňkový proudový výstup \bar{I}_0 . Rozhodovací úroveň číslicových vstupů lze z vnějšku nastavit na potřebnou hodnotu. Proto lze k řízení převodníku DAC0800 použít všechny běžně používané řady log. obvodů.



Obrázek 33.3.4: Příklad zapojení převodníku DAC0800

Příklad zapojení D/A převodníku je na obr. 33.3.4. Obsahuje kromě vlastního D/A převodníku DAC0800 zdroj referenčního napětí MAC01 se jmenovitým referenčním napětím $+10V$ a invertor se zesilovačem, pracujícím ve funkci převodníku proudu na napětí pro realizaci napěťového výstupu převodníku. Funkce je následující: Napětí $+10V$ z MAC01 je pomocí odporu $5k\Omega$ převedeno na proud $I_{REF} = 2mA$, který je přiveden do kladného referenčního vstupu DAC0800, kde je vynásoben nastavenou hodnotou číslicového signálu, zadanou pomocí osmi dvoupolohových přepínačů. Poté se proud $-2 \cdot (1 - 2^{-8}) mA$ objeví na výstupu I_0 a invertující zesilovač převede na odpovídající napětí. Zpětnovazební rezistor zesilovače $5k\Omega$ určuje rozsah výstupního napětí o až 10

V (unipolární režim). Jsou-li svorky BIP OFF a COMP IN propojeny, pak do sčítacího bodu S je přiveden proud $I_p = I_{REF}/2$ tj. 1 mA ($I_p = 10V/10k\Omega$) opačného směru než I_0 , který způsobí trvalý posun výstupní napěťové úrovně převodníku o $-5V$, takže rozsah převodníku bude $\pm 5V$ (bipolární režim) a hodnota výstupního napětí je určena dvojkovým kódem s posunutím (MSB určuje polaritu výstupního napětí).

Kapitola 34

Kmitočtové filtry

Obsah

34.1 Základní vlastnosti kmitočtových filtrů	333
34.1.1 Kmitočtové filtry a jejich použití	333
34.2 Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky	339
34.2.1 Průchod signálu kmitočtovým filtrem a přenosové kmitočtové charakteristiky filtrů	339
34.3 Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů	340
34.3.1 Filtry s přenosovou funkcí 1. řádu	340
34.3.2 Filtry s přenosovou funkcí 2. řádu	340
34.3.3 Přenosové funkce vyšších řádů	340
34.3.4 Citlivost a tolerance přenosových vlastností filtrů	340
34.4 Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu	340
34.4.1 Návrh filtrů RC	340
34.4.2 Návrh filtrů RLC 2. řádu	340
34.4.3 Návrh fázovacích článků RLC 1. a 2. řádu	340
34.5 Filtry RLC vyšších řádů	340

34.6 Filtry ARC 2. řádu	340
34.6.1 Základní principy funkce filtrů ARC	340
34.6.2 Obvody s náhradou cívky	341
34.6.3 Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností	341
34.6.4 Vliv reálných odporů a kondenzátorů	341
34.7 Filtry ARC vyšších řádů	342
34.8 Filtry se spínanými kapacitory	342
34.9 Zvláštní typy a aplikace kmitočtových filtrů	342

34.1 Základní vlastnosti kmitočtových filtrů

34.1.1 Kmitočtové filtry a jejich použití

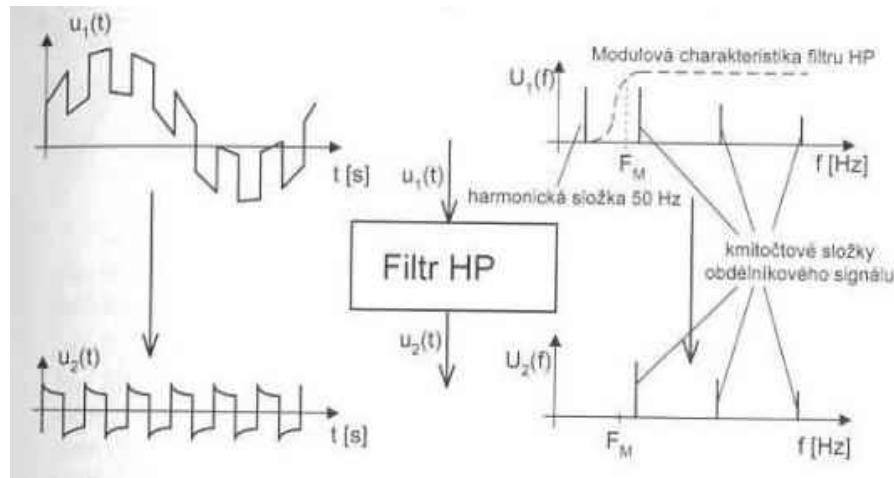
Kmitočtové filtry jsou lineární elektrické obvody, používané v mnoha oblastech elektrotechniky a elektroniky. Jejich hlavním úkolem je výběr (selekce) *kmitočtových složek* procházejícího signálu podle jejich kmitočtů. Filtry obvykle některé kmitočtové složky signálů *propouštějí* bez útlumu (oblast se nazývá propustným pásmem), jiné kmitočtové složky *potlačují* (pásma potlačení, útlumu, nebo nepropustné pásmo). Tyto vlastnosti obvykle vyjadřujeme *modulovou (amplitudovou) kmitočtovou charakteristikou* (závislost modulu napěťového přenosu na kmitočtu).

Příklad použití kmitočtového filtru ukazuje názorně obr. 34.1.1. Užitečný obdélníkový signál byl znehodnocen nízkofrekvenční rušivou harmonickou složkou (pronikající např. z napájecí střídavé sítě - kmitočet sítě je nižší, než kmitočty užitečných složek), signál je označen v grafu jako $u_1(t)$. Jak je z obrázku vidět, filtr typu horní propust propustil všechny kmitočtové složky s mezním kmitočtem vyšším než f_M (složky obdélníkového signálu) a potlačil tak nízkofrekvenční rušivou harmonickou složku, výsledný signál je v grafu označen jako $u_2(t)$. Z obr 34.1.1 je zřejmé, že vliv kmitočtových filtrů na signál je dobře patrný zvláště při znázornění procesu filtrace v kmitočtové oblasti pomocí kmitočtového spektra - tedy pomocí rozkladu signálu na jeho jednotlivé harmonické složky.

Průchod signálu filtrem vede též obvykle k *časovému zpoždění signálu*, což je důsledkem fázových posuvů (zpoždění) procházejících harmonických kmitočtových složek signálu. Tyto vlivy obvykle vyjadřujeme *fázovou kmitočtovou charakteristikou*. Jejich vliv na výstupní signál je též zřejmý při znázornění signálu a vlastností filtru v *časové oblasti* (např. odezva na jednotkový skok). Fázové vlivy filtru na signál v propustném kmitočtovém pásmu se v časové oblasti projevují např. jako nežádoucí překmity či zvlnění průběhu signálu. V příkladu z obr. 34.1.1 (filtr typu horní propust) způsobil tento efekt zešikmení horních a spodních hran obdélníkového signálu. Uvedené vlivy je možné vhodnou volbou filtru minimalizovat. Na druhé straně ale existují případy, kdy těchto vlastností filtrů záměrně využíváme, např. ve fázovacích a zpožďovacích obvodech.

34.1.1.1 Oblasti a příklady použití kmitočtových filtrů

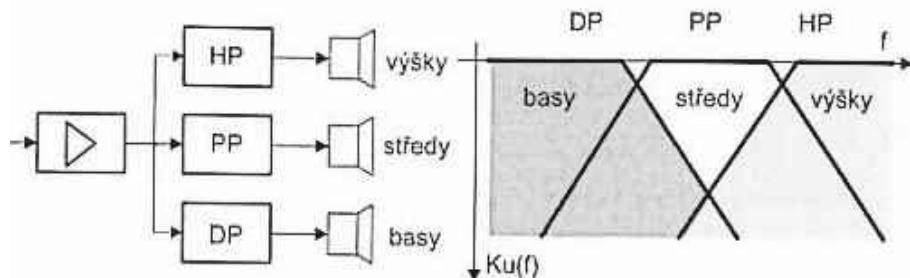
Kmitočtové filtry patří mezi základní stavební bloky pro zpracování signálů. V radiotechnice je časté použití pásmových propustí pro výběr přijímaných signálů (vstupní obvody přijímačů, mezifrekvenční filtry), dolních propustí a horních propustí jako výhybek pro



Obrázek 34.1.1: Příklad selekce kmitočtových složek signálu filtrem typu horní propust pro potlačení nízkofrekvenční rušivé složky (např. kmitočet sítě 50 Hz)

rozdělení kmitočtových pásem v anténních obvodech a předzesilovačích, pásmových zádrží pro rejekci (potlačení) rušících signálů, dolních propustí pro různé typy demodulátorů atd. Moderní komunikační systémy s rozloženým spektrem vyžadují také jako jeden z důležitých bloků přijímače filtr typu pásmová propust. Obdobné je využití filtrů v telekomunikacích, při přenosu dat apod.

V elektroakustice se velmi často využívají korekční filtry (nastavitelné korektory hloubek, výšek, pásmové korektory, korektory kmitočtových charakteristik dynamických přenosek, magnetofonových hlav), různé typy filtrů v systémech omezení šumu (Dolby apod.). Dolní, horní a pásmové propusti tvoří kmitočtové výhybky pro reproduktorové soustavy (pasivní i aktivní), jak ukazuje obr. 34.1.2. V oblasti elektronické hudby se využívají i různé filtry pro zabarvení zvuku a realizaci zvláštních zvukových efektů.



Obrázek 34.1.2: Příklad použití filtrů v kmitočtových výhybkách reproduktorových soustav

Kmitočtové filtry se využívají také v oblasti *měřicí techniky*. Velmi často jsou to filtry pro výběr měřeného kmitočtového pásma, obzvláště pak v různých typech

selektivních měření (selektivní voltmetry, měřiče harmonického a dalších typů zkreslení, různá vysokofrekvenční měření). Pro akustická měření se využívá několika typů váhových filtrů pro měření úrovně akustického signálu (modeluje se vnímání lidského ucha). Často se využívá korektorů kmitočtových vlastností snímacích čidel. I přes rozvoj číslicových kmitočtových filtrů je výhodné u slabých a hodně zarušených signálů provést před A-D převodem analogovou předfiltraci pro podstatné zvýšení dynamického rozsahu systému.

Zvláštní skupinu aplikací tvoří filtry typu dolní propust v systémech pro převod analogového signálu na číslicový. Pro splnění vzorkovacího teorému je zde v mnoha případech potřebné použít *antialiasingový filtr* pro zamezení překládání rušivého spektra do užitečného signálu a na výstupu takového systému obdobný rekonstrukční filtr. Kmitočtové filtry se používají často v *regulační technice*, speciální odrušovací filtry nacházejí uplatnění v *silnoproudé elektrotechnice*. Takto bychom mohli vyjmenovat mnoho dalších aplikací.

Lze říci, že neexistuje oblast elektrotechniky a elektroniky, kde se alespoň v omezené míře nevyužívají kmitočtové filtry. Základní orientace a znalost problematiky kmitočtových filtrů je proto potřebná prakticky pro každého tvůrčího pracovníka v elektrotechnice.

34.1.1.2 Způsoby realizací kmitočtových filtrů

Kmitočtové filtry můžeme v praxi realizovat mnoha odlišnými způsoby, které do určité míry určují i některé podstatné provozní vlastnosti filtru. Nejhodnější způsob realizace je potřebné si pro daný účel optimálně vybrat. Tyto způsoby realizací lze rozdělit orientačně do tří hlavních skupin:

- Realizace z **diskrétních prvků** (odpory, kondenzátory, cívky, operační zesilovače apod), kde si každý uživatel může s menšími či většími problémy sestavit filtr přesné podle svých požadavků.
- Realizace v podobě **integrovaného bloku** je obvykle menší, levnější a lépe propracovaná, protože ji výrobce vyrábí ve velkých sériích vhodnou technologií. Na druhé straně si však uživatel obvykle nemůže upravit tento filtr podle svých speciálních požadavků a musí přesně dodržet podmínky zapojení podle výrobce.
- Realizace s **číslicovými filtry** spočívá v číslicovém zpracování signálu, kdy číslicovou interpretaci signálu matematicky upravujeme tak, aby výsledný signál měl po zpětném převodu shodné (či dokonce lepší) vlastnosti jako po průchodu normálním kmitočtovým filtrem. Matematicky tak modelujeme požadované vlastnosti filtrů a

tímto způsobem lze dokonce realizovat i některé funkce a vlastnosti, které běžnými analogovými filtry nelze dosáhnout. Při realizaci jsme však omezeni na prostředí číslicového zpracování signálu (převodníky, počítač či signálový procesor, vhodný program). Značným omezením může být i maximální rychlosť výpočtu počítače a vzorkování a tím i použitelné kmitočtové pásmo filtru.

Jak je z tohoto dělení zřejmé, pro optimální výběr realizace filtru neexistuje univerzální návod, vždy záleží na podmírkách úlohy. Jde-li o úlohu, kdy řešíme číslicové zpracování signálu a máme dostatečnou výpočetní kapacitu daného prostředku, zvolíme číslicový filtr. V jiných případech (vysoký kmitočet signálů, slabý a zarušený signál, jde-li o výkonovou aplikaci apod.), použijeme analogový filtr. Při tomto řešení dáváme přednost standardnímu integrovanému filtru profesionální výroby (např. mezifrekvenční filtry přijímačů). Pokud však našim požadavkům plně nevyhovuje, musíme navrhnut a vyrobit filtr požadovaných vlastností z dostupných diskrétních součástek. Složitost a rozmanitost vlastností jednotlivých realizací filtrů ukazuje i jejich následující podrobnější přehled, který rozděluje jednotlivé typy filtrů podle použitých stavebních prvků:

- **Filtry RC** vynikají svou jednoduchostí, dostupností a nízkou cenou výchozích součástek, rezistorů a kondenzátorů. Plné však u nich platí: za málo peněz - málo muziky. Praktické využití mají jen jednoduché filtry prvního řádu a druhého řádu s nízkým činitelem jakosti ($Q < 0,5$). Filtry RC vyšších řádů se v praxi používají výjimečně.
- **Filtry RLC** umožňují realizovat teoreticky libovolný typ filtru. Jejich omezení vyplývá především z použití cívek. Ty jsou obzvláště pro nízké kmitočty (velké hodnoty L) rozměrné, drahé a ztrátové (malý činitel jakosti Q). Obecné je také použití filtrů RLC omezeno vlastními ztrátami cívek a kondenzátorů a také tolerancí a stabilitou jejich hodnot pro propusti a zádrže s velmi malou relativní šírkou pásma. Obvykle jsou používány v kmitočtovém rozsahu od 100 kHz do 300 MHz, pro nižší kmitočty jen výjimečně. Pro kmitočty nad hranicí asi 300 MHz se výrazně projevují parazitní vlastnosti prvků a je lépe využít realizaci s rozprostřenými parametry - viz následující bod.
- **Mikrovlnné filtry** jsou realizací RLC filtrů v oblasti mikrovln ($f \gg 300 \text{ MHz}$), kde již nelze použít prvky se soustředěnými parametry (R, L, C), ale používá se odpovídající realizace s rozloženými parametry jako jsou vlnovody, mikropásková vedení, koaxiální vedení apod.
- **Filtry ARC** (známé také jako *aktivní filtry RC*) v principu nahrazují filtry RLC. Místo cívek používají rezistory, kondenzátory a aktivní prvky, nejčastěji operační zesilovače. Mají obdobné vlastnosti jako filtry RLC, ale vzhledem k vlastnostem aktivních prvků se jejich použití omezuje nejčastěji na kmitočtové pásmo přibližně 0,1 Hz

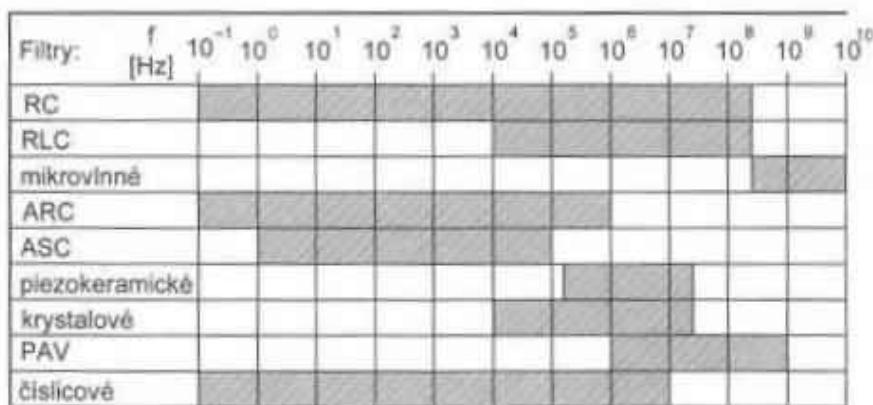
až 100 kHz. Současný pokrok v technologii aktivních prvků však umožňuje využití těchto filtrů na stále vyšších kmitočtech (dnes již řádové jednotky až desítky MHz), i když toto použití je zatím málo rozšířené. Kmitočtově jsou tedy vhodným doplňkem k filtrům RLC. Oproti nim mají výhodu i v snazší nastavitelnosti a laditelnosti změnou hodnot odporů. Jejich nevýhodou je na druhé straně potřeba napájení aktivních prvků. Objevují se i jejich specifické modifikace využívající parazitních vlastností aktivních prvků (R nebo C) jako stavebních prvků - filtry AC, AR apod.

- **Filtry ASC**, známé též jako *filtry se spínánými kapacitory* jsou speciální modifikaci filtru ARC, které místo odporů používají přepínané kondenzátory. Jejich hlavní výhodou je možnost poměrně snadné monolitické integrace v porovnání s filtry ARC. Některé typy můžeme zakoupit jako integrované obvody. Jejich mezní kmitočet je určen spínacím kmitočtem a jsou tedy snadno přeladitelné. Lze je řadit již do skupiny integrovaných filtrů, nicméně jsou zde možnosti určitého přizpůsobení požadavkům, a to jednak přeladěním, jednak také dostupnosti integrovaných nastavitelných bloků 2. rádu. Na druhé straně je však tento typ realizace kmitočtově ještě více omezen než filtry ARC a má navíc problémy s vyšším driftem, s určitým průnikem spínacího signálu do užitečného signálu a „schodovitostí“ výsledného signálu, způsobenou spínáním. Spínací kmitočet bývá 50× až 100× vyšší než mezní kmitočet filtru, což do určité míry minimalizuje spínání vzniklý projev diskretizace signálu v časové oblasti a možný aliasingový efekt (překládání spektra rušivého signálu do spektra užitečného signálu).
- **Elektromechanické filtry** jsou historicky nejstarší „integrované“ filtry. Vycházejí z principu převodu elektrického signálu na mechanický, využitím některé formy mechanické rezonance a zpětného převodu výsledného mechanického signálu na elektrický. Chovají se tedy vesměs jako pásmové propusti. Podle typu mechanického rezonátoru je lze dělit na různé skupiny. Dříve byly používány např. magnetostrickní filtry a dnes jsou používané nejčastěji piezokeramické filtry (např. mezifrekvenční filtry 455 kHz a 10,7 MHz). Zvláštním typem je *krystalový filtr*, který odpovídá v podstatě složenému rezonančnímu obvodu s vysokým činitelem jakosti (řádové 10 000) a vysokou stabilitou rezonančního kmitočtu. Nejčastěji se využívá ve stabilních oscilátorech. Vzhledem k vysokému a nenastavitelnému činiteli jakosti a nenastavitelnému rezonančnímu kmitočtu se krystaly jako filtry používají velmi omezené. Zapojením většího počtu krystalů s velmi přesným výběrem lze realizovat úzký pásmový filtr pro speciální aplikace jako např. úzkopásmové mezifrekvenční filtry s vysokým rezonančním kmitočtem.
- **Filtry s PAV** (s povrchovou akustickou vlnou, anglická zkratka SAW) jsou poměrně novým typem integrovaných filtrů, založených na principu vyzařování, šíření a fázového, kmitočtově závislého skládání povrchových akustických vln. Realizují se tak, že se nanese na nosnou keramickou destičku soustava vysílacích a přijímacích

piezoelektrických zářičů, jejichž tvar a funkci lze přirovnat k dvěma Yagiho anténám. Obdobně jako u antén je rozměry a polohou zářičů tvarována přenosová kmitočtová charakteristika filtru. V porovnání s elektromechanickými filtry mohou realizovat podstatně širokopásmovější obvody. Proto se s výhodou používají, např. jako obrazové mezifrekvenční filtry v televizorech a v mnoha dalších aplikacích pro vysoké kmitočty. Na druhou stranu je jejich použití částečně omezeno vyšším průchozím útlumem.

- **Filtry CCD** (*charge coupled devices - nábojové vázané obvody*) jsou dalším speciálním typem aplikace s časové diskrétním charakterem (např. jako filtry ASC). Využívá se u nich technologie známá např. z CCD televizních kamer a princip spočívá v postupném posuvu a fázově závislém sčítání jednotlivých „nábojových vzorků“).
- **Číslicové filtry** jsou oproti předchozím filtrům odlišnou („softwarovou“) realizací funkce filtrů, jejich princip byl popsán v předchozím odstavci.

Uvedený přehled potvrzuje značnou různorodost konečných realizací filtrů. Z přehledu vlastností jednotlivých typů kmitočtových filtrů je zřejmá i obtížnost úlohy konstruktéra při výběru optimálního způsobu realizace. Pro rychlejší orientaci o použitelnosti uvedených filtrů z hlediska kmitočtového pásma je možné využít tab. 34.1.3. Meze použití jednotlivých způsobů realizací je nutno chápat jen jako orientační, protože závisí nejen na současném stavu technologie, ale i na mnoha různých parametrech a požadavcích kladených na filtry.

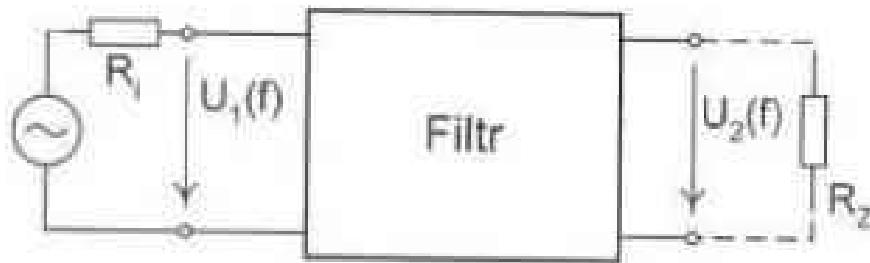


Obrázek 34.1.3: Orientační znázornění kmitočtových pásem použitelnosti jednotlivých typů realizaci filtrů

34.2 Popis přenosových vlastností filtrů, jejich charakteristiky

34.2.1 Průchod signálu kmitočtovým filtrem a přenosové kmitočtové charakteristiky filtrů

Základní zapojení filtru připojeného ke zdroji harmonického signálu je uvedeno na obr. 34.2.1. Prochází-li přes kmitočtový filtr harmonický signál s amplitudou U_1 , kmitočtem f_1 a fází φ_1 , získáme na výstupu filtru opět harmonický signál se stejným kmitočtem, ale jinou velikostí amplitudy a fáze (U_2 , φ_2).



Obrázek 34.2.1: Filtr jako dvojbran

Přenos napětí K_U harmonického signálu filtrem lze pro daný kmitočet f vyjádřit komplexním výrazem

$$K_U = K_U \cdot e^{j\varphi} = \frac{U_2 e^{j\varphi_2}}{U_1 e^{j\varphi_1}}, \quad (34.2.1)$$

který můžeme rozdělit na *reálnou* a *imaginární* část. Častěji ale používáme vyjádření přenosu pomocí *modulu* a *argumentu*

$$K_U = \frac{U_2}{U_1}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (34.2.2)$$

kde modul K_U je poměr amplitud výstupního a vstupního signálu a argument φ je výsledný fázový posuv (časový rozdíl vztažený na periodu) mezi výstupním a vstupním signálem jako rozdíl fází výstupního signálu φ_2 a vstupního signálu φ_1 . Modul přenosu K_U je bezrozměrné číslo a často se udává v logaritmické míře, kdy platí $K_U[\text{dB}] = 20 \log K_U$. Toto běžné používané vyjádření umožňuje grafické znázornění velkého rozsahu hodnot.

34.3 Přenosové vlastnosti a charakteristiky základních typů filtrů

34.3.1 Filtry s přenosovou funkcí 1. řádu

34.3.2 Filtry s přenosovou funkcí 2. řádu

34.3.3 Přenosové funkce vyšších řádů

34.3.4 Citlivost a tolerance přenosových vlastností filtrů

34.4 Návrh filtrů RC a RLC 1. a 2. řádu

34.4.1 Návrh filtrů RC

34.4.2 Návrh filtrů RLC 2. řádu

34.4.3 Návrh fázovacích článků RLC 1. a 2. řádu

34.5 Filtry RLC vyšších řádů

34.6 Filtry ARC 2. řádu

34.6.1 Základní principy funkce filtrů ARC

Při realizaci filtrů RLC pro nízké kmitočty jsou největší problémy s kvalitou, rozměry a cenou cívek. Proto se pro nízké kmitočty s výhodou nahrazují **aktivními filtry RC** (filtry ARC). Jejich základní princip spočívá v "náhradě" cívky pomocí zapojení *aktivního prvku* (operační zesilovač, tranzistor) se dvěma rezistory a kapacitou. Nahradit cívku můžeme v zásadě dvěma základními způsoby. První spočívá v použití obvodu, který přímo nahrazuje cívku jako dvojpól a vykazuje mezi určitými svorkami příslušnou indukčnost. Druhý princip, jak bude ukázáno dále, nahrazuje cívku nepřímo, pomocí transformace výchozího LRC obvodu na ekvivalentně se chovající strukturu RCD, která indukční prvek neobsahuje, ale na druhou stranu potřebuje *syntetický prvek D* - dvojný kapacitor (kmitočtově závislý negativní rezistor).

34.6.2 Obvody s náhradou cívky

Aktivní filtry ARC, které vycházejí z filtru RLC a využívají k tomu přímou či nepřímou náhradu cívek, mají velké množství různých variant zapojení. Objasnění jejich funkce představuje i řadu různých pohledů na činnost filtru. V oblasti návrhu ARC filtru převažují dva hlavní přístupy. Velmi názorný je takový přístup, který vytváří obvody, vykazující na vstupních svorkách induktivní impedanci. Ty lze využít jako přímou náhradu indukčnosti ve filtru RLC. Zřejmě nejčastější je ale takový pohled, kdy vytváříme celý obvod ARC s přenosovou funkci 2. řádu jako ekvivalenci obvodu LRC 2. řádu, přičemž přímá náhrada cívky v obvodu nemusí být na první pohled zřejmá.

34.6.3 Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností

Stavebními prvky filtrů ARC jsou rezistory, kapacitory a aktivní prvky, jak již bylo naznačeno v předešlém textu. I pro nejjednodušší posouzení funkce, klasifikaci a výběr optimálního zapojení filtrů ARC je potřeba rozumět alespoň základním vlivům reálných vlastností těchto stavebních prvků na výsledné parametry ARC obvodu.

34.6.4 Vliv reálných odporů a kondenzátorů

(C_1 , i C_2) vytvářejí se zbytkem obvodu rezonanční obvod RLC, lze vliv jejich ztrát modelovat sériovým či paralelním spojením ideálního kapacitoru s rezistorem. Tento vliv lze posuzovat v principu shodně jako u filtrů RLC. Při ideálních vlastnostech zbývající části obvodu určuje hodnotu činitele jakosti celkového obvodu činitel jakosti reálného kondenzátoru $Q_c = \frac{1}{tg\delta}$. Jeho hodnota musí být proto podstatně vyšší než výsledná funkční hodnota činitele jakosti celého obvodu (alespoň 10×). Při nižších hodnotách je třeba tento vliv brát v úvahu a pokud je to možné, kompenzujeme jej snížením vnějšího zatlumení tak, aby výsledné Q odpovídalo požadovanému. Je potřebné si uvědomit, že ztráty kondenzátorů může obdobně zvýšit i sériové či paralelní spojení kondenzátorů s parazitními odpory, jako je např. vnitřní odpor zdroje, parazitní vstupní a výstupní odpor aktivních prvků apod.

34.7 Filtry ARC vyšších řádů**34.8 Filtry se spínanými kapacitory****34.9 Zváštní typy a aplikace kmitočtových filtrů**

Část XIII

Elektronické napájecí zdroje

Kapitola 35

Spojité regulované napájecí zdroje

Obsah

35.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích	346
35.2 Neřízené usměrňovače	346
35.2.1 Usměrňovače s nesetrvačnou zátěží	346
35.2.2 Usměrňovače se sběrným kondenzátorem (s RC zátěží)	346
35.2.3 Usměrňovače s nárazovou tlumivkou (s RL zátěží)	346
35.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí	347
35.3.1 Nelineární (parametrické) stabilizátory	348
35.3.2 Lineární spojité stabilizátory	351
35.4 Násobiče napětí	352
35.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů	352
35.5.1 Pojistky	352

35.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích

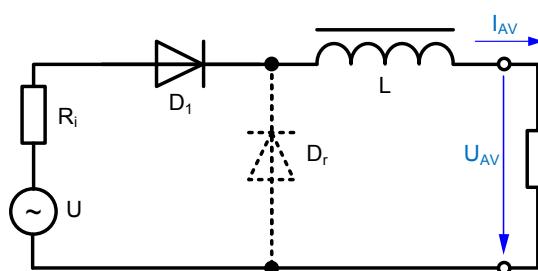
35.2 Neřízené usměrňovače

35.2.1 Usměrňovače s nesetrvačnou zátěží

35.2.2 Usměrňovače se sběrným kondenzátorem (s RC zátěží)

35.2.3 Usměrňovače s nárazovou tlumivkou (s RL zátěží)

Základní schéma zapojení je na obr. 35.2.1. Obsah vyšších rušivých harmonických produktů lze snížit sériově se zátěží zapojeným obvodem typu hornofrekvenční zádrž. I zde je filtrační účinek závislý na poměru zatěžovací konstanty $\tau_L = \frac{L}{R_L}$ a doby periody $T = \frac{1}{f}$ - je to činitel $K = \tau_L/T$. ($K \uparrow: \tau_L \uparrow, T \downarrow \Rightarrow L \uparrow, R_L \downarrow$). Tyto usměrňovače jsou tedy výhodné pro zátěže typu "malé napětí x velký proud". I tady lze elegantně podpořit velkou hodnotu koeficientu K tím, že obvod budeme napájet signálem o vysokém kmitočtu. Zatím co v případě RC zátěže byl kondenzátor pamětí napětí, tady použitá tlumivka je naopak pamětí proudu. Z toho důvodu je např. jednocestné zapojení s nárazovou tlumivkou fyzikálně nevhodné, protože mohou nastat jen dva krajní (a oba špatné) případy.



Obrázek 35.2.1: Jednocestný jednofázový usměrňovač RL zátěží.

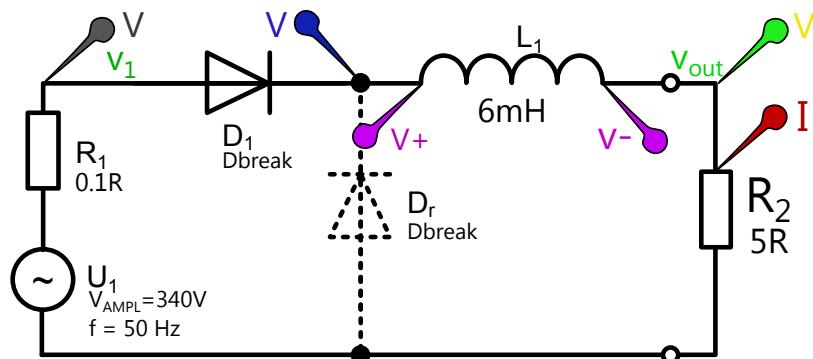
- Bude-li indukčnost veliká (v limitě nekonečná), pak podle Lenzova pravidla udrží proud v obvodu (je celý v sérii) na stálé hodnotě i co do směru, dioda se nemůže vůbec uzavřít a obvod nemůže usměrňovat - nebude mít střídavou složku.

- Naopak při malé hodnotě (proti jakési kritické) dioda zavře, obvod se přeruší a energie magnetického pole cívky (je vázána existencí proudu) se nemůže uplatnit v překlenutí mezer dodávky energie na výstup. Při dalším otevření diody můžou navíc nastat přechodné děje.

Existuje však velice jednoduchá a plně funkční úprava a tou je doplnění jednocestného usměrňovače tzv. **rekuperační (nulovou) diodou** - D_R (kreslena čárkovaně viz obr. 35.2.1). Při uzavření hlavní diody D_1 se tlumivka snaží držet proud obvodem ve stejné velikosti a ve stejném směru a tento proud otevře rekuperační diodu D_R .

Mezi filtrací se sběrným kondenzátorem (RC zátěží) a s nárazovou tlumivkou (RL zátěží) je ještě zajímavý rozdíl: filtrace paralelním kondenzátorem pracuje s hyperbolicky se měnící impedancí $X_C = \frac{1}{\omega C}$ a potlačení vysokých čísel harmonických je čím dál tím menší. Obvod se sériovou tlumivkou pracuje s impedancí $X_L = \omega L$ a potlačující efekt lineárně roste. *Zvlnění na RC zátěži má proto obvykle dosti značný obsah vysokých harmonických a je pilovitého průběhu. Zvlnění na RL zátěži je za stejných podmínek K harmonicky čistší a má charakter sinusovky.*

Příklad 35.2.1. Proveďte simulaci vyznačených obvodových veličin obvodu na obrázku 35.2.2 se zadanými hodnotami prvků v programu PSpice¹.

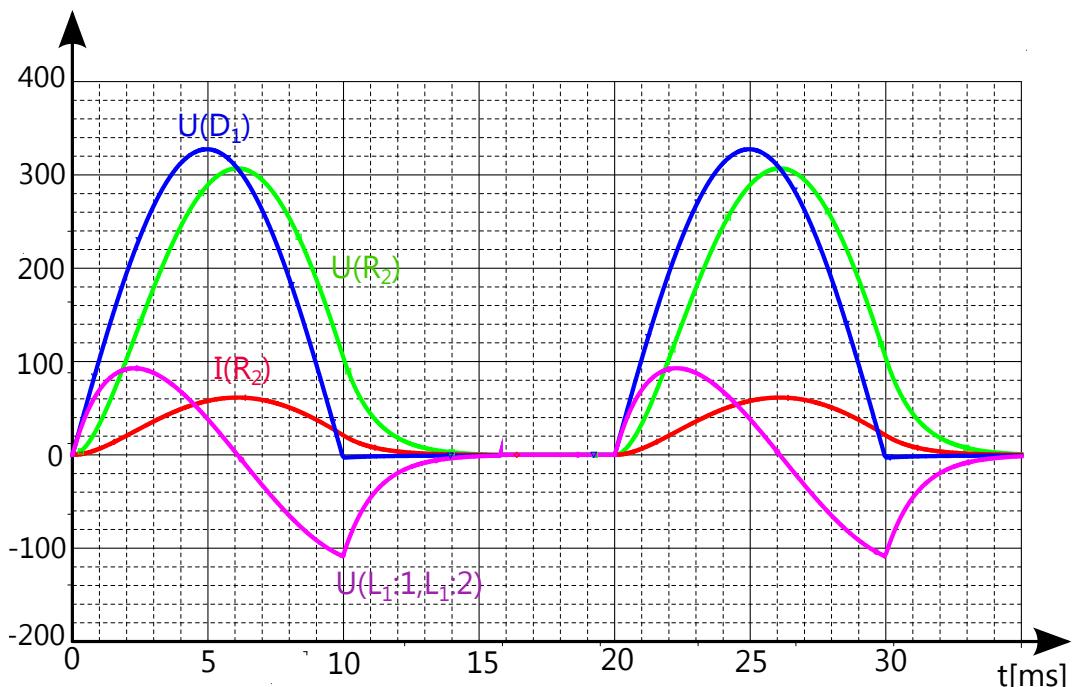


Obrázek 35.2.2: Neřízený Jednofázový usměrňovač s nulovou diodou. Simulované veličiny jsou vyznačeny barevnými markery.

35.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí

Stabilizátory napětí na svém výstupu konstantní napětí v pokud možno co nejširším rozsahu odebíraného výstupního proudu a dodávaného vstupního napětí [VZ01]

¹Simulace je provedena v programu OrCAD PSpice ver. 16.3

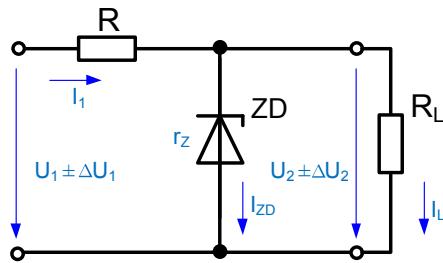


Obrázek 35.2.3: Průběhy vyznačených veličin jednofázového neřízeného usměrňovače s RL zátěží (6mH, 5Ω) a nulovou diodou [ENZ/SIMoo2]

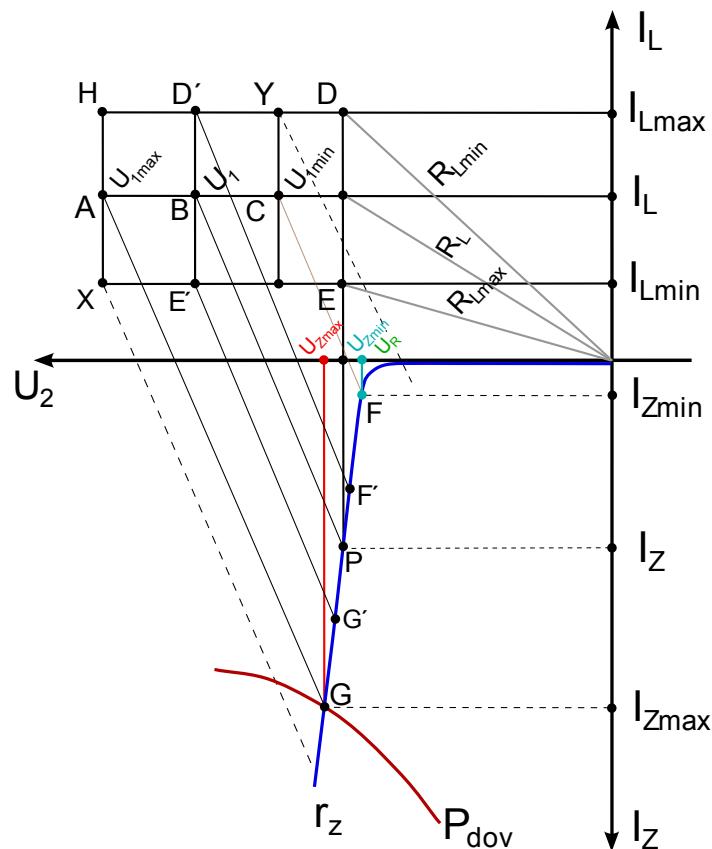
- nelineární (parametrické) stabilizátory napětí,
- lineární spojité stabilizátory napětí

35.3.1 Nelineární (parametrické) stabilizátory

Využívají vlastností VA charakteristik některých jako je otevřený PN přechod, Zenerovy diody, termistory a jiné. Pro tyto účely potřebujeme tzv. prvky triodového typu u kterých platí, že *dynamický vnitřní odpor je podstatně nižší jak statický*. Tedy $R_{dyn} < R_{stat}$. Pro naše účely jsou nejčastěji používané Zenerovy diody a dvojpólové integrované napěťové referenční obvody. Zenerovy diody jsou vyráběny jako malovýkonové (anodová ztráta do 1W) a výkonové (obvykle 10W a více). Pro referenční účely jsou často doplněny dalšími pomocnými kompenzačními prvky. Vlastní princip nelineárního spojitého stabilizátoru (podivný název „parametrický“ nebude používat) je velice prostý: obvod dle obr. 35.3.1 tvoří dělič s horním odporem lineárním a dolním (je paralelně k zátěži) tvořeným popsaným nelineárním odporem triodového typu. Za těchto okolností má tento obvod pochopitelně přenos dynamický podstatně menší jak statický a tedy je to stabilizátor napětí.



Obrázek 35.3.1: Nelineární spojitý stabilizátor napětí



Obrázek 35.3.2: Grafické řešení nelineárního stabilizátoru

Řešení je výhodné v grafické podobě - obr. 35.3.2. Ve třetím kvadrantu je nakreslena VA charakteristika². Bod B odpovídá zvolenému vstupnímu napětí U_1 a výstupnímu proudu I_2 a tedy i velikosti odporu R_L . Úloha může být nyní dána např. kolísáním vstupního napětí od $U_{1\max}$ do $U_{1\min}$ (body A a C), nebo kolísáním zátěže nebo proudu I_2 (

²Je typická určitým Zenerovým napětím U_Z , sklonem pracovní části VA charakteristiky (dynamickým vnitřním odporem r_z) a dovolenou anodovou ztrátou P_{dov} . Tato ztráta závisí na způsobu chlazení.

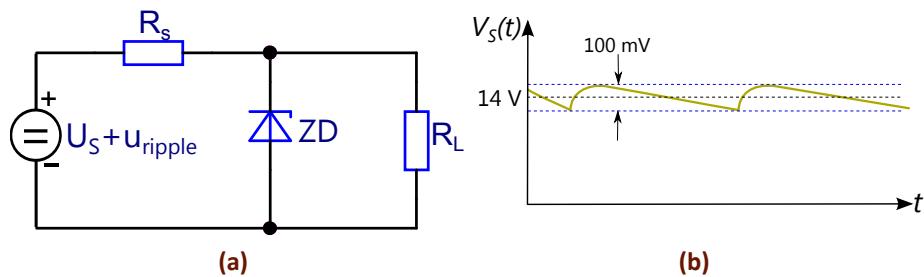
body E' a D'). Při současném působení změn vznikne obrazec (přibližně obdélník) X, E, D, H, což je geometrické místo možných stavů obvodů. Na vlastní VA charakteristice prvku pro volený "předřadný" odpor R vzniknou body G, P a F a to je grafické řešení. Vidíme, kdy hrozí "zhasnutí" nebo přetížení Zenerovy diody. Projekcí bodu G, P a F na vodorovnou osu zjistíme okamžité hodnoty výstupního napětí stabilizátoru U_2 a jeho kolísání ΔU_2 . Lze snadno odečíst zvládnutelné kolísání vstupního napětí či velikosti zátěže atd. Z obrázku je také vidět, že zlepšení stabilizačního účinku obvodu lze dosáhnout zvětšením vstupního napětí (větší odpor R) nebo výběrem diody s menším dynamickým odporem r_z . Velice vtipná možnost zlepšení přenosových vlastností stabilizátoru je při náhradě lineárního odporu R nelineárním prvkem s pentodovým charakterem VA charakteristiky. Může to být třeba bipolární nebo lépe unipolární tranzistor. Pak vlastně Zenerovu diodu napájíme zdrojem konstantního proudu a to je hojně využíváno v integrovaných stabilizátorech.

Z obr. 35.3.1 lze snadno odvodit činitel napěťové stabilizace

$$S_u = \frac{\Delta u_{vst}}{\Delta u_{vyst}} = \frac{R + r_z \parallel R_L}{r_z \parallel R_L} \cong \frac{R + r_z}{r_z}, \text{ kde } r_z \ll R_L \quad (35.3.1)$$

Příklad 35.3.1. Vliv nenulového dynamického odporu Zenerovy diody na zvlnění výstupního napětí [Rizo3] str. 369.

Zadání: $U_S = 14V; u_{ripple} = 100mV; U_Z = 8V; r_z = 10\Omega; R_S = 50\Omega; R_L = 150\Omega$.



Obrázek 35.3.3: K příkladu nenulového dynamického odporu Zenerovy diody na přenos zvlnění ze vstupního napětí na výstupní napětí

Řešení: Abychom stanovili velikost výstupního napětí, amplitudu zvlnění napětí na zátěži a mohli také určit vliv velikosti dynamického odporu r_z , vyděme z náhradního lineárního obvodu na obrázku 35.3.4.

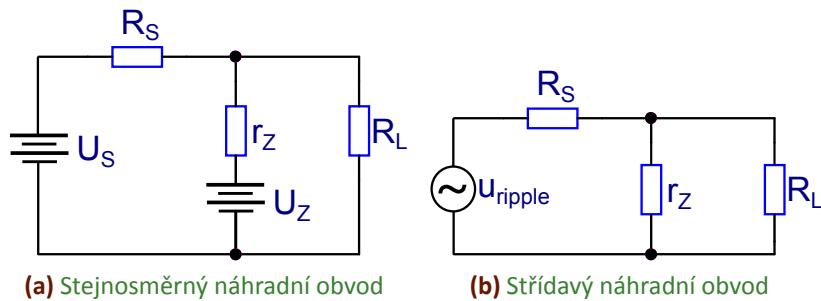
1. Stejnosměrný ekvivalentní obvod:

$$U_L = U_S \frac{R_L \parallel r_z}{R_S + R_L \parallel r_z} + U_z \frac{R_S \parallel R_L}{r_z + R_S \parallel R_L} = 2.21 + 6.32 = 8.53V \quad (35.3.2)$$

2. Střídavý ekvivalentní obvod:

$$u_L = v_{ripple} \frac{r_z \parallel R_L}{R_S + r_z \parallel R_L} = 0.016V \quad (35.3.3)$$

Tedy jedna šestina zvlnění vstupního napětí se přenese na výstupní svorky stabilizátoru.



Obrázek 35.3.4: Stabilizátor se ZD lze pro výpočet jeho ss chování v okolí pracovního bodu linearizovat pomocí NLO

Schopnost stabilizace je horší, čím větší má Zenerova dioda dynamický odpor r_z . Proto musí být r_z výrazně nižší, než hodnoty rezistorů R_S a R_L (viz rov. 35.3.3).

35.3.2 Lineární spojité stabilizátory

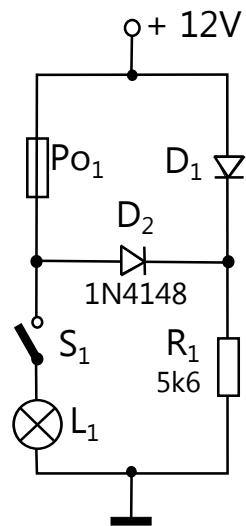
35.4 Násobiče napětí

35.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů

35.5.1 Pojistky

35.5.1.1 Signalizace přerušené pojistky

Rozsvícením svítivé diody D_1 , je uživatel upozorněn na přerušenou tavnou pojistku Po_1 v zařízení napájeném malým napětím. Je-li pojistka v pořádku, je při zapnutém vypínači S_1 na svítivé diodě napětí tvořené úbytky na pojistce a otevřené diodě D_2 , jenž nestačí pro její rozsvícení. Jakmile se však pojistka přeruší, dioda D_1 se rozsvítí. Průchodu proudu spotřebičem přes D_2 při sepnutém vypínači S_1 brání její polarizace.



Obrázek 35.5.1: Obvod signalizující přerušení pojistky v nízkonapěťovém obvodu.

Kapitola 36

Impulzně regulované napájecí zdroje

Obsah

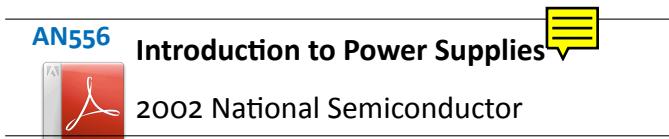
36.1	Úvod	355
36.2	Impulzní regulace ve výkonové elektronice	355
36.3	DC/DC měniče bez transformátoru	358
36.3.1	Vymezení pojmu a základních požadavků	358
36.3.2	Step-down converter (snižující neinvertující měnič)	362
36.3.3	Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)	364
36.3.4	Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou)	365
36.3.5	Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)	365
36.3.6	SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)	365
36.4	DC/DC měniče s transformátorem	366
36.4.1	Jednočinný propustný měnič	366
36.4.2	Jednočinný blokující měnič	374

36.5 Metody regulace spínaných zdrojů	376
36.5.1 Základy impulzní regulace	376
36.5.2 Regulační smyčka	376
36.6 Sbírka zapojení neizolovaných měničů	378
36.6.1 Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem	378

36.1 Úvod

Spínané napájecí zdroje plní funkci stejnou jako zdroje se spojitou regulací. Výkonné člen spínacích zdrojů je však zatěžován impulzně, tj. střídavě spínán a rozepínán. Lze tedy využít výhody impulzního režimu, tj. odebírat impulzní výkon podstatně větší, než je trvalý výkon při lineárním režimu regulátoru s týmž výkonovým členem. Spínací zdroje mají obecně větší účinnost než zdroje se spojitou regulací. Jsou výhodné zvláště tam, kde je velký rozdíl napětí na vstupu a výstupu regulátoru a kde jsou požadované malé rozměry. Impulzní regulace zajistí stabilizované výstupní napětí i pro velké změny vstupního napětí; účinnost zdroje se při tom téměř nemění. I přes větší obvodovou složitost jsou ekonomicky výhodnější, neboť jejich použití vede k podstatné energetické úspoře.

Impulzně regulované zdroje však mají v porovnání se zdroji s lineární regulací i některé nevýhodné vlastnosti, například pomalejší reakci výstupního napětí na rychlé změny zatěžovacího výstupního proudu. Při požadavku malého zvlnění výstupního napětí se nesmí zanedbat vliv impulzního charakteru těchto zdrojů. Impulzně regulované zdroje jsou také zdrojem rušivých signálů, které jsou generovány spínacími prvky [Ham96, s. 112].

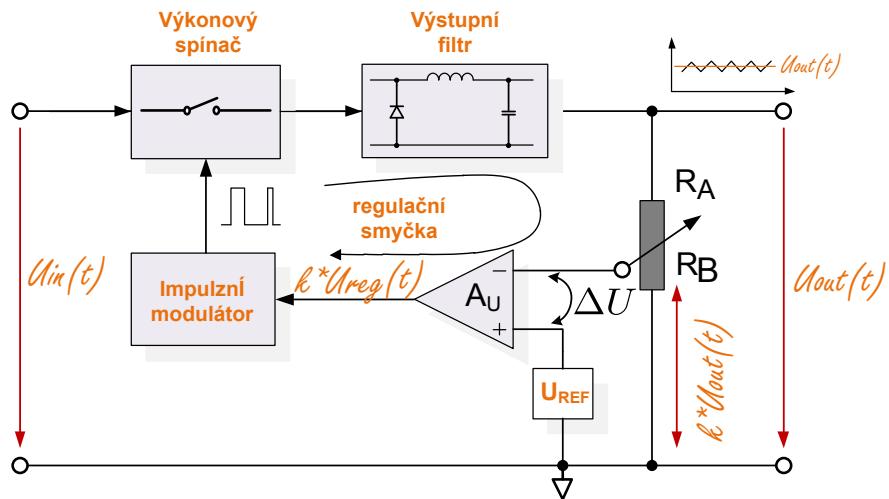


36.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice

Základním principem a současně odlišností impulzní regulace od regulace klasické je v její *nespojitost*. To znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí stabilizováno zásahy regulačního člena pouze v určitých, časově omezených intervalech. Podstata regulačního člena (regulátoru) tedy spočívá v řízení vzájemných časových relací aktivního a pasivního intervalu pracovního cyklu v závislosti na velikosti zesílené regulační odchylky.

Akční člen je tedy řízen dvouhodnotovým signálem, mající význam *zapnutí* nebo *vypnutí* výkonové součástky. Následující příklad demonstriuje, jak lze tento signál vytvořit pomocí **pulzně-šířkové modulace** v simulátoru **LTS spice**. V simulacích některých topologií spínaných zdrojů bude místo zdroje s lineárně narůstajícím výstupním napětím viz obr. 36.2.3 použita regulační odchylka.

Srovnáme-li pro názornost klasický a impulzní regulátor na úrovni blokových schémat, vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál



Obrázek 36.2.1: Základní schéma impulzního regulátoru

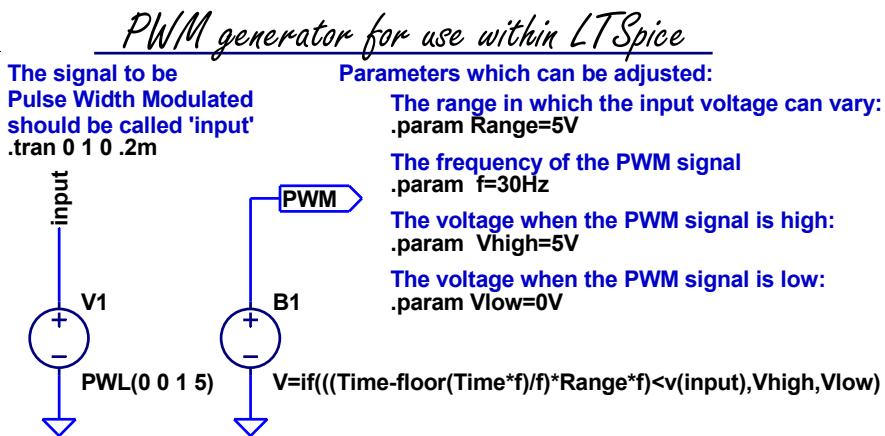
U_{REF} , zesilovač regulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprosto odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpor výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní. Z toho, jak je již známo, vyplývá velká poměrná výkonová ztráta na regulačním členu a tedy i malá účinnost spojité regulace za běžných provozních podmínek.

Impulzní regulace obr. 36.2.1 umožňuje výrazně snížit výkonovou ztráту na regulačním členu. V tomto případě pracuje regulační prvek (tranzistor) jako řízený spínač. Proud jím tedy prochází pouze po určitý interval pracovního cyklu. Přitom okamžitá výkonová ztráta v aktivním (sepnutém) stavu je vzhledem k $U_{CES} \rightarrow 0$ řádově menší, než u lineárního regulátoru. Další předností je, že velikost ztráty v podstatě nezávisí na rozdílu vstupního a výstupního napětí, ale prakticky pouze na kolektorovém proudu tranzistoru.

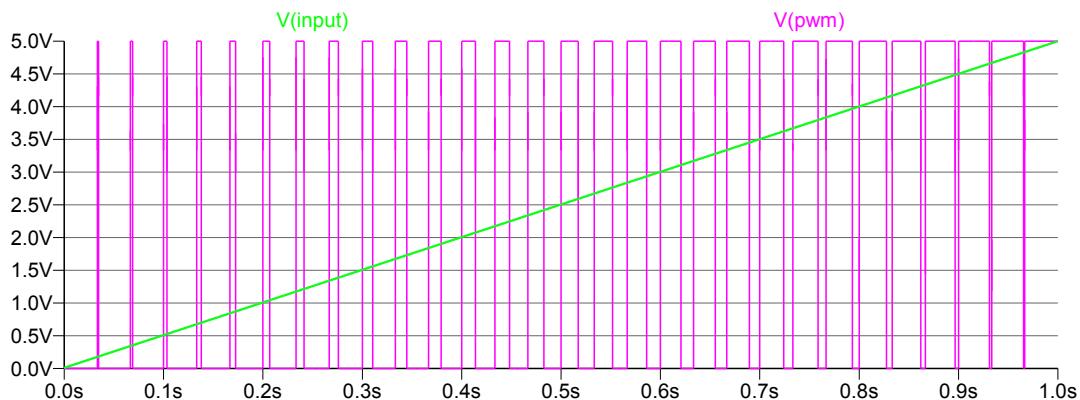
Možnost použít spínací regulační člen při stabilizaci stejnosměrného napětí je podmíněna jeho vzájemnou součinností s filtračním členem, který na rozdíl od aplikace ve spojitém regulátoru musí mít výrazný akumulační charakter. Uspořádání filtru, který je pro větší výkony vždy typu LC, je podřízeno topologii měniče. Princip činnosti nerozlučně vázané dvojice spínač - akumulační výstupní filtr spočívá v akumulaci energie, která je v aktivním intervalu odebrána ze zdroje, aby mohla být v následujícím pasivním intervalu (spínač vypnut) dodávána z filtru do zátěže [Ham96, s. 121].

Příklad 36.2.1. Na obr. 36.2.2 je realizován generátor šířkově modulovaného signálu pro simulátor LTSpice, jenž s výhodou využívá komponenty B-source, umožňující behaviorální popis požadovaného průběhu. Podrobnějším pohledem na zápis rovnic dle obr.



Obrázek 36.2.2: Realizace PWM generátoru pomocí komponenty B-source (*Arbitrary behavioral voltage or current source*) v LTSpice (soubor pwm. asc)

36.2.2, lze dojít k závěru, že zdroj B1 na svém výstupu využívá hodnotu parametru V_{high} , nebo V_{low} , podle výsledku rozhodovací funkce if . Tj. jestliže $Time - f \lfloor Time * f \rfloor / f * Range * f$ je větší než $V(input)$, bude na výstupu $V_{high} = 5V$, v opačném případě $V_{low} = 0V$. Funkce $floor$ zaokrouhluje hodnotu svého argumentu na celé číslo (*integer*), což vede na schodovitý průběh a funkce *Time* umožňuje do vztahu vnést okamžitou hodnotu simulaci času. Vzájemný odečtení získáme pilový průběh, kterým se komparuje s okamžitou hodnotou zdroje $V(input)$.



Obrázek 36.2.3: Výstupní signál $V(\text{pwm})$ z PWM generátoru na obr. 36.2.2 má-li rozhodovací napětí $V(\text{in})$ lineární charakter

36.3 DC/DC měniče bez transformátoru

36.3.1 Vymezení pojmu a základních požadavků

DC - DC měniče jsou obvody sloužící k regulaci elektrické energie, které mění vstupní stejnosměrné napětí U_1 na jiné výstupní stejnosměrné napětí U_2 . Budeme se přitom zabývat měniči tzv. *napěťového typu*, což jsou měniče napájené konstantním vstupním napětím z napěťového zdroje, nikoliv proudem, z proudového zdroje. V této kapitole se omezíme pouze na měniče bez transformátoru, které tedy neumožňují galvanické oddělení výstupu od vstupu [NVP99].

Každý měnič sestává z vlastního silového obvodu a řídicí elektroniky (regulačních obvodů). Silové obvody nesmí využívat při regulaci energie rezistorů a proto se mohou skládat jen ze **spínačů** a **akumulačních prvků**, tj. *indukčnosti a kapacit*.

36.3.1.1 Napájecí zdroj a zátěž měniče

DC/DC měniče mohou přenášet energii z principu oběma směry. Mohou tedy čerpat energii ze zdroje a dodávat ji do zátěže nebo také opačně energii čerpat ze zátěže a dodávat ji do zdroje. Pojmy zátěž a zdroj je proto nutné chápat v širším slova smyslu.

- Zdrojem s konstantním napětím U_1 , schopným dodávat i akumulovat energii, je akumulátor. Použijeme-li jako zdroj např. usměrňovač se sběrným kondenzátorem, pak není schopen dlouhodobě jímat energii z měniče, tj. dlouhodobě nesmí ve střední hodnotě převládat směr proudu do kladné svorky zdroje (krátkodobě, v okamžité hodnotě, je takový směr možný). Nabíjením sběrného kondenzátoru by totiž rostlo napětí U_1 . Tomu lze zabránit přeměnou dodávané energie na teplo ve vybijecím rezistoru, či na Zenerově diodě, zapojené paralelně ke sběrnému kondenzátoru.
- Z hlediska schopnosti spotřeby či dodávky energie, lze rozlišovat zátěž *aktivní* a *pasivní*. Aktivní zátěží je opět např. akumulátor, ale třeba i stejnosměrný motor. Jeho náhradní zapojení, platné v ustáleném stavu, je uvedeno na obr. 11). Vnitřní rotační (pohybové) indukované napětí je úměrně otáčkám, proud pak momentu na hřídeli a to včetně znamének.

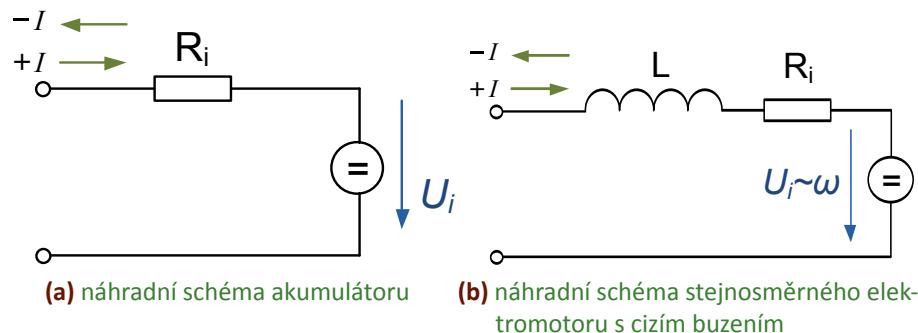
Teče-li proud ve střední hodnotě do zátěže ($+I$), pak motor pohání, tj. mění elektrickou energii na mechanickou (pracuje v *motorickém režimu*). Teče-li ze zátěže ($-I$), pak motor brzdí, tj. mění z vnějšku dodávanou mechanickou energii na energii elektrickou (pracuje v *generátorickém režimu*).

36.3.1.2 Pracovní kvadranty

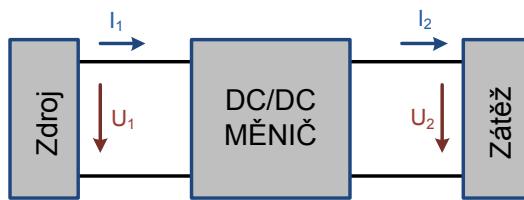
Označme si vstupní a výstupní napětí a proud měniče podle obr. 36.3.2. Podle polarity výstupního napětí U_2 a výstupního proudu I_2 může měnič pracovat ve čtyřech kvadrantech tzv. **VA-roviny** (viz obr. 36.3.3).

V kvadrantech 1 i 3 dodává měnič energii do zátěže. Je-li zátěží motor, tak pohání. Pasivní zátěže mohou pracovat pouze v těchto kvadrantech. V kvadrantech 2 a 4 dodává aktivní zátěž energii zpět do měniče. Jde-li o motor¹, pak brzdí.

¹Velikost napětí ss. motoru je úměrná otáčkám (rychlosti), polarita je dána směrem otáčení (uvažujeme



Obrázek 36.3.1: Aktivní zátěž.

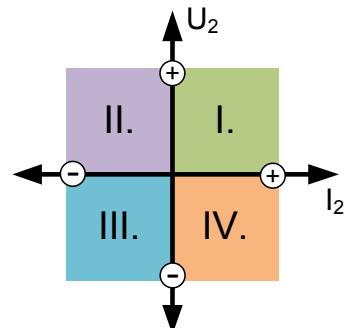


Obrázek 36.3.2: Označení vstupních a výstupních veličin DC/DC měniče.

36.3.1.3 Možnosti zapojení silového obvodu

Na první pohled jsou zřejmá určitá omezení:

- Indukčnost nikdy nesmí být zapojena paralelně ke vstupu či výstupu (protože tam je napětí s nenulovou střední hodnotou).
- Kapacita nikdy nesmí být zapojena do série se vstupní nebo výstupní svorkou měniče (protože tudy prochází proud s nenulovou střední hodnotou).
- Jako akumulační prvek nelze použít samostatně kapacitu, není-li v obvodu použita ještě indukčnost (protože by v měniči napěťového typu docházelo k nepřípustnému nárazovému nabíjení kondenzátoru zkratovým proudem). Čili měnič napěťového typu musí obsahovat alespoň jednu indukčnost.
- Žádný spínač nesmí zkratovat vstup ani výstup měniče.

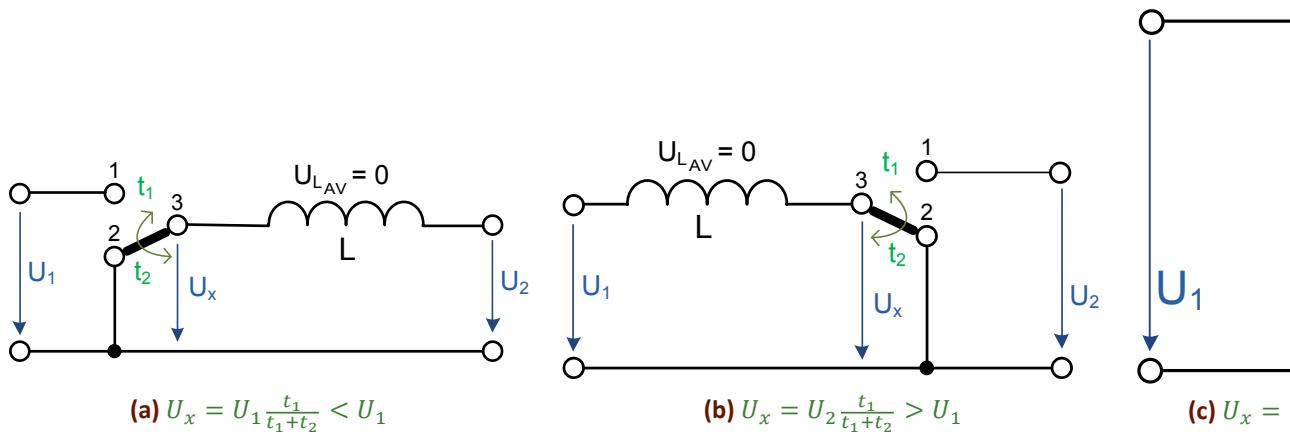


Obrázek 36.3.3: Pracovní kvadranty ve VA rovině.

36.3.1.4 Nejjednodušší měniče s jediným akumulačním prvkem

Pro výchozí představu, vysvětlující princip činnosti, vytvoříme silový obvod měniče ze dvou prvků. Bude to indukčnost L a ideální přepínač. Vezmeme-li v úvahu omezení z kap. 36.3.1.3, existují podle obr. 36.3.4 jen tři způsoby, jak takový měnič zapojit [NVP99].

motor s cizím buzením, např. s permanentními magnety). Velikost proudu je úměrná momentu na hřídeli, polarita je opět dáná směrem momentu, tj. zda motor brzdí či pohání. Je třeba si povšimnout, že přechod mezi generátorickým a motorickým režimem mezi kvadranty 2 a 1 nebo mezi 3 a 4 (tj. takový, kdy se nemění polarita napětí, ale jen proudu) vůbec nemusí být na hřídeli motoru opticky pozorovatelný, neboť v dané chvíli přechodu se změní jen znaménko momentu (proudu) a přesto otáčky hřídele mohou být konstantní.



Obrázek 36.3.4: Principiální schémata DC/DC měničů s jediným akumulačním prvkem.

Označme střední hodnotu napětí mezi společným uzlem přepínače 3 a zemí jako U_x . Předpokládejme, že přepínač je ovládán periodickým signálem s periodou T a s nastavitelnou střídou, takže po dobu t_1 spojuje svorky 3 - 1 a po dobu $t_2 = T - t_1$ pak svorky 3 - 2. Popišme nyní nejzákladnější vlastnosti tří měničů z obr. 36.3.4.

1. Střední hodnota U_x na obr. 36.3.4a musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (36.3.1)$$

Výstupní napětí je rovno U_x , neboť střední hodnota napětí na indukčnosti L musí být nulová. Platí proto:

$$U_2 = U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (36.3.2)$$

Výstupní napětí je vždy menší než vstupní a má stejnou polaritu. Jde tedy o měnič **snižující a neinvertující**. Jeho jiné názvy jsou: **step-down, chopper, buck, propustný měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 1 a 2. Čili měnič je schopen dávat napětí U_2 jediné polarity, ale proud I_2 muže téci oběma směry (je-li to umožněno - aktivní zátěž).

2. Střední hodnota U_x na obr. 36.3.4b musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1 \quad (36.3.3)$$

Vstupní napětí U_1 je rovno U_x (nulová střední hodnota napětí na indukčnosti L). Odsud pro U_2 platí:

$$U_2 = U_1 \frac{t_1 + t_2}{t_1} > U_1 \quad (36.3.4)$$

Střední hodnota výstupního napětí je vyšší než vstupní napětí a má stejnou polaritu. Jde tedy o *zvyšující* a *neinvertující* měnič. Jiný název je měnič **step-up, boost**. Možné pracovní kvadranty² jsou opět 1 a 2.

3. Střední hodnota U_x na obr. 36.3.4c musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1 \quad (36.3.5)$$

Protože U_x je střední hodnota napětí na indukčnosti L, musí platit $U_x = 0$ tj.

$$U_1 = -\frac{t_1}{t_2} U_1 <> -U_1 \quad (36.3.6)$$

Výstupní napětí má opačnou polaritu než vstupní, jde tedy o měnič *invertující*. Velikost výstupního napětí může být větší i menší než vstupní. Vžité názvy jsou měnič **buck-boost**, měnič se společnou tlumivkou, **blokující měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 3 a 4.

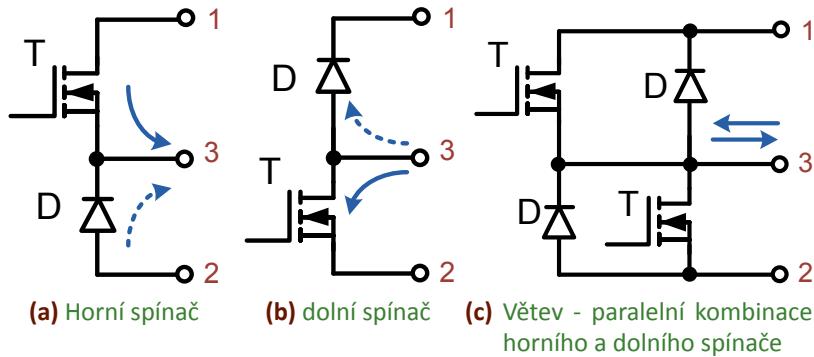
36.3.1.5 Prakticky realizované silové obvody

Kap. ?? ukazuje, že elektronicky ovládaný přepínač tvoří základní stavební kámen každého měniče. Tyto přepínače se ve skutečných obvodech realizují pomocí tzv. horních a dolních spínačů, což jsou *trojpóly* podle obr. 36.3.5.

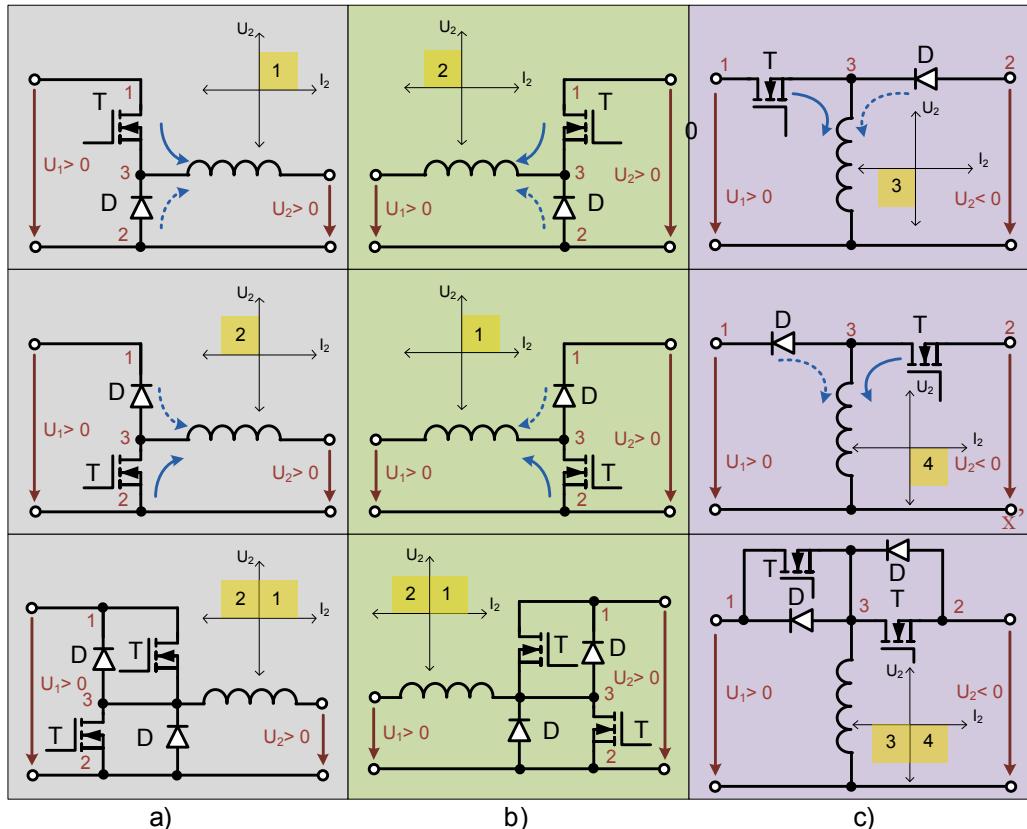
36.3.2 Step-down converter (snižující neinvertující měnič)

Jedná se o měnič s horním spínačem. Další jeho používané názvy jsou: propustný měnič, chopper, buck. *Pracuje v 1. kvadrantu*.

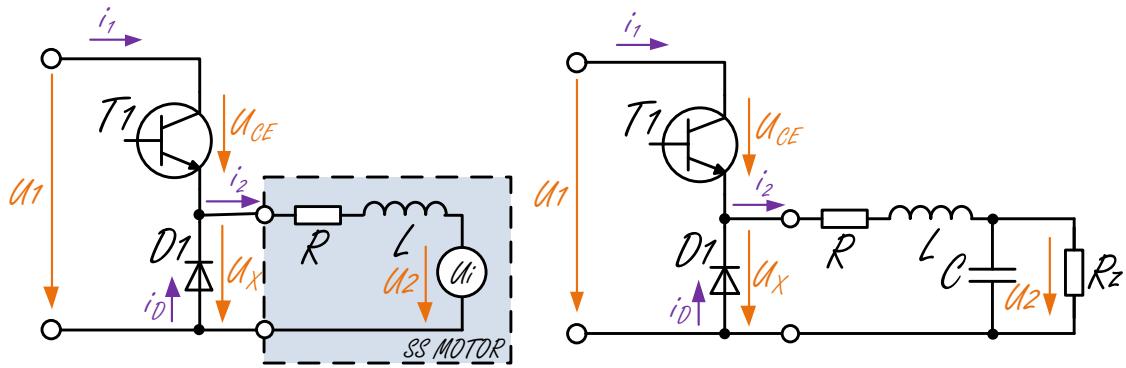
²Měnič 36.3.4a pracující v kvadrantu 1 je měničem 36.3.4b pracujícím v kvadrantu 2. Naopak 36.3.4a v kvadrantu 2 je 36.3.4b v kvadrantu 1. Čili 36.3.4a a 36.3.4b je vlastně týž obvod, pouze zaměňuje vstup a výstup.



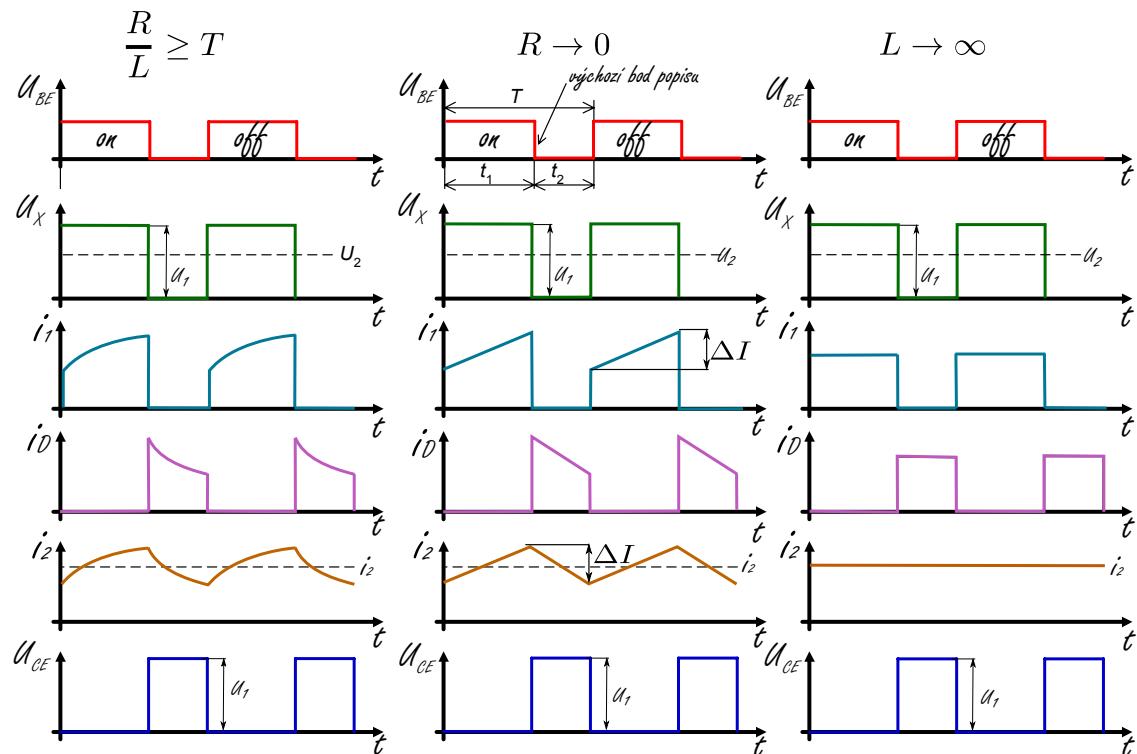
Obrázek 36.3.5: Horní a dolní spínač.



Obrázek 36.3.6: Skutečné silové obvody měničů z obr. 36.3.4 a jejich pracovní kvadranty: a) měnič snižující neinvertující (step-down), b) měnič zvyšující neinvertující (step-up), c) měnič invertující (buck-boost)

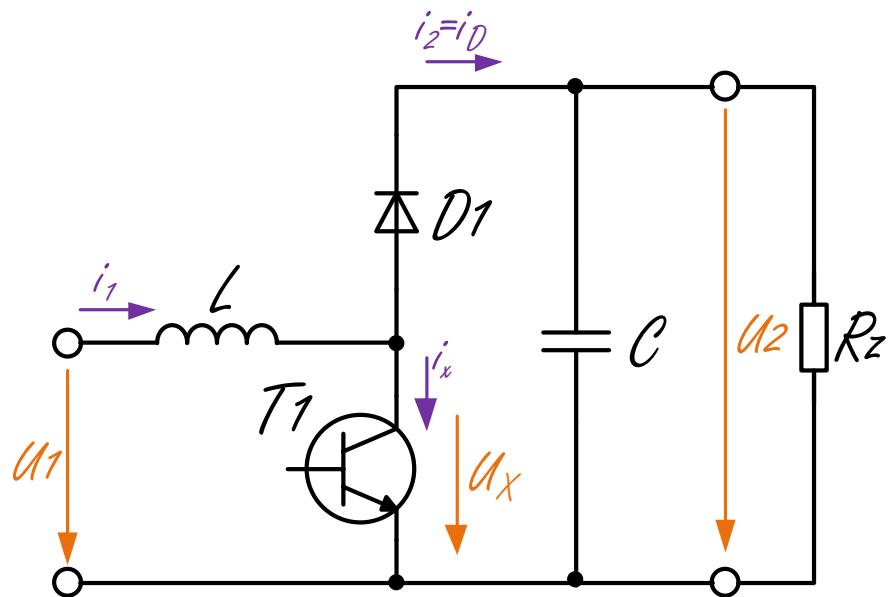


Obrázek 36.3.7: Snižující měnič pracující v prvním kvadrantu s aktivní zátěží typu stejnosměrný motor nebo s LC filtrem



Obrázek 36.3.8: Průběhy napětí a proudů snižujícího měniče

36.3.3 Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)



Obrázek 36.3.9: Zvyšujícího měnič pracující v prvním kvadrantu - Schéma zapojení

36.3.4 Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou)

36.3.5 Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)

36.3.6 SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)

36.4 DC/DC měniče s transformátorem

Základní popis DC/DC měničů bez transformátoru, provedený v kap. 36.3, platí i pro měniče s transformátorem. Doplňením vhodně zapojeného vf. impulsního transformátoru je umožněno galvanické oddělení výstupního a vstupního napětí a transformaci napětí a proudů. Nejčastěji se v praxi setkáme s transformátorovými verzemi měniče propustného z kap. 36.3.2 a měniče blokujícího z kap. 36.3.3 Existuje i transformátorová verze měniče Čukova z kap. 36.3.5.

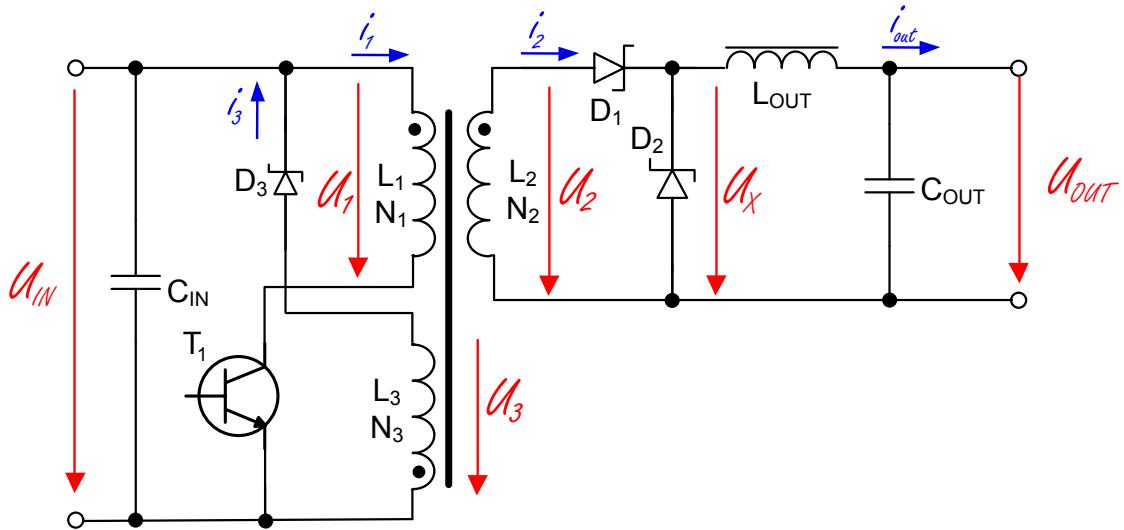
Snižující měnič z kap. 36.3.2 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič propustný**, neboť díky transformátoru lze převodovým poměrem zajistit výstupní napětí i vyšší než vstupní (názvy „*snižující měnič*“ a „*step-down*“ by tedy byly zavádějící). Princip činnosti však v hrubých rysech zůstává stejný.

Invertující měnič se společnou tlumivkou z kap. 36.3.4 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako měnič blokující, neboť díky transformátoru lze vyrobit napětí libovolné polarity (název „*invertující měnič*“ proto pozbývá výstižnosti).

Základní stavební kameny měničů bez transformátoru tj. horní spínač a dolní spínač (kap. 36.3.1.5) tvoří základ i u měničů s transformátorem, i když v zapojeních jsou tranzistor a jeho protilehlá dioda rozděleny tím, že je tranzistor na primární straně a dioda na sekundární. Použití transformátoru navíc vyžaduje demagnetizační obvody (zajistění nulové střední hodnoty primárního napětí) a další výstupní usměrňovací diodu (diody). To vše vede k tomu, že transformátorové měniče jsou *jednokvadrantové*. Výstupní napětí má jedinou možnou polaritu a výstupní proud jediný možný směr takový, že zátěž se chová vždy jako spotřebič, nikoli jako generátor.

36.4.1 Topologie Forward (Jednočinný propustný měnič)

Již z označení vyplývá, že k přenosu energie ze vstupního do výstupního obvodu dochází v aktivním intervalu 0 až δT , během něhož se současně akumuluje energie v magnetickém poli tlumivky L_{OUT} . Po dobu zbyvající části periody $(1 - \delta)T$ je tlumivka od transformátoru oddělena a na výstup dodává energii nahromaděnou v magnetickém poli. Vzhledem k *blokujícímu měniči* je zde výhoda účinného LC filtru tvořeného tlumivkou a výstupním kondenzátorem C_{OUT} po dobu celého pracovního cyklu. Ve srovnání s blokujícím měničem je tedy možné dosáhnout řádově menší dynamické odchylky $\Delta U_{OUT}(t)$. Navíc proud tekoucí L_{OUT} , skládající se z ustálené složky I_{OUT} a pilovitého průběhu Δi_L má spojitý charakter v průběhu celé periody T .



Obrázek 36.4.1: Propustný měnič s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

36.4.1.1 Popis činnosti

Nyní se věnujme podrobnějšímu rozboru funkce propustného měniče. Interval δT začíná **sepnutím tranzistoru T_1** kladným impulzem z řídicích obvodů do jeho báze [Ham96, s. 131], které přivede vstupní napětí na primární vinutí N_1 . V kapitole 28.4.1 byl odvozen vztah 28.4.4 pro magnetizační tok v jádře transformátoru. Pro nynější případ platí $u_1(t) = U_{in}$. Pak 28.4.4 nabude tvaru [NVP99, s. 104]:

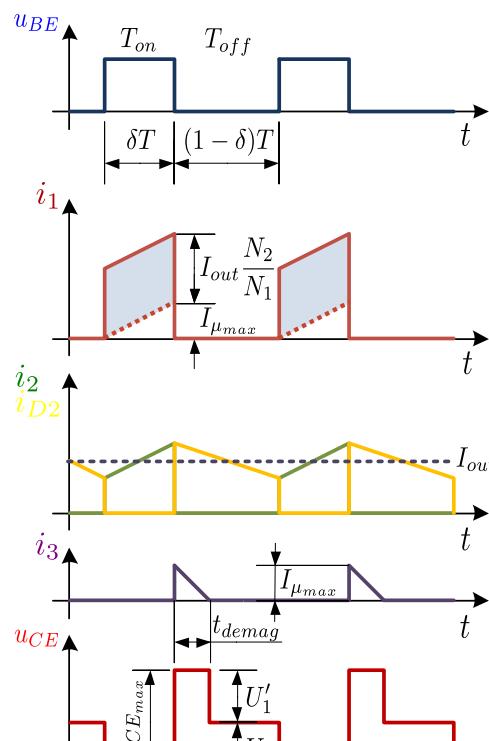
$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{N_1} U_{in} t \quad (36.4.1)$$

Takže po zapnutí tranzistoru tok lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci doby zapnutí δT bude mít své maximum

$$\Phi_{\mu_{max}} = \frac{1}{N_1} U_{in} \delta T \quad (36.4.2)$$

Během doby δT bude sekundární napětí $u_2(t)$:

$$u_2(t) = N_2 \frac{\Phi_\mu(t)}{dt} = \frac{N_2}{N_1} U_{in} = U_2 \quad (36.4.3)$$



Čili během doby δT je sekundární napětí konstantní. Protože jde o kladné napětí, je D_1 otevřená, D_2 zavřená a výstupní proud I_{out} musí téci ze sekundárního vinutí transformátoru.

Kolektorovým obvodem a primárním vinutím N_1 teče proud i_{prim} . Propustně polarizovanou diodou D_1 prochází transformovaný vstupní proud přes L_{out} do zátěže a výstupního filtračního kondenzátoru C_{OUT} . Tento sekundární proud i_2 se časem lineárně zvětšuje od určitého $I_{L_{min}}$ a zároveň se lineárně zvětšuje také proud i_1 , závislého na převodu transformátoru. Z kapitoly 28.4.1 víme, že primární proud zatíženého transformátoru bude mít hodnotu

$$i_1(t) = i_\mu(t) + I_2 \frac{N_2}{N_1} \quad (36.4.4)$$

Pro magnetizační proud $i_\mu(t)$ přitom platí vztah (28.4.8). V našem případě je $u_1(t) = U_{in}$ a proto tento vztah dostane konkrétní podobu:

$$i_\mu(t) = \frac{U_1 t}{L_1} \quad (36.4.5)$$

Vidíme, že stejně jako tok $\Phi_\mu(t)$ tak i magnetizační proud $i_\mu(t)$ lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci δT má magnetizační proud své maximum:

$$i_{\mu_{max}}(t) = \frac{U_1 \delta T}{L_1} \quad (36.4.6)$$

Během doby δT je odebírána energie ze zdroje U_{in} (složka $I_{out} \frac{N_2}{N_1}$ primárního proudu) a dodávána do zátěže.

Nyní vypneme tranzistor T_1 . Proud $i_1(t)$ musí téměř skokem zaniknout. V jádře ale existuje na konci doby δT magnetický tok $\Phi_{\mu_{max}}$, odpovídající proudu $I_{\mu_{max}}$. Celková energie magnetického pole v okamžiku vypínání tranzistoru činí $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}^2$. Proud primárního vinutí je tranzistorem násilně přerušen.

Předpokládejme nejdříve, že neexistuje demagnetizační vinutí N_3 . Pak by při skokovém zániku primárního magnetizačního proudu stejně prudce zanikl i s ním svázaný tok $\Phi_{\mu_{max}}$. Pokles toku s obrovskou (teoreticky nekonečnou) strmostí $-\frac{d\Phi}{dt}$ způsobí vznik napěťového Diracova impulsu, opačné polarity oproti stavu v době δT , kdy tok narůstal. Tímto impulsem, přičteným k napětí U_1 , je napěťově namáhan zavírající se tranzistor. Přitom se celá energie $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}$ přemění na křemíkovém čipu v teplo a je příčinou jeho neodvratné destrukce. U reálného tranzistoru je velikost napěťového impulsu vždy omezena průrazným napětím tranzistoru. Nikdy totiž není tranzistor natolik pomalý, že by omezujícím faktorem byla malá strmost $-\frac{di_c}{dt}$ zániku kolektorového proudu během vypínání. Destrukční energetické účinky však zůstávají v každém případě zcela ekvivalentní.

Aby popsaná situace nenastala, je zde demagnetizační vinutí N_3 . Děj pak bude vypadat takto: Po vypnutí tranzistoru T_1 se opravdu na primárním vinutí objeví napětí U'_1 opačné polarity, než bylo U_1 v sepnutém stavu, viz. obr. 36.4.2. Toto napětí však bude mít přesně definovanou velikost, kterou „dovolí“ vinutí N_3 . Na tom se totiž objeví také indukované napětí u_3 . Vzhledem k obrácené orientaci vinutí vůči N_1 bude mít záporný pól „na zemi“ a kladný pól na diodě D_2 . Toto napětí by „chtělo“ být opět teoreticky nekonečné, ale D_2 se otevře a pracuje v součinnosti se zdrojem U_1 jako napěťový omezovač, omezující napětí u_3 na velikost U_1 . Celá magnetizační energie $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}$ je vinutím N_3 odevzdána zpět do zdroje. Pak je zřejmé, že napětí indukované v primárním vinutí musí být:

$$U'_1 = u_3 \frac{N_1}{N_3} = U_1 \frac{N_1}{N_3} \quad (36.4.7)$$

Tento stav, kdy $u_1 = -U_1$ a $u_3 = U_1$, trvá po dobu, než tok $\Phi_\mu(t)$ klesne z počáteční hodnoty $\Phi_{\mu_{max}}$ na nulu. K tomu je třeba konečné doby t_{demag} , neboť U_1 není nekonečné a proto strmost poklesu $\frac{d\Phi}{dt}$ nemůže být nekonečně velká. Velikost U_1 je v této době konstantní a proto klesá tok lineárně. Celý jev se nazývá *demagnetizací jádra*.

Během demagnetizace se předává magnetizační energie jádra zpět do zdroje pomocí proudu $i_3(t)$. Proud $i_3(t)$ je přímo úměrný klesajícímu toku $\Phi_\mu(t)$ takto:

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \int u_3 dt = \frac{1}{L_3} \int \frac{N_3 d\Phi_\mu(t)}{dt} dt = \frac{N_3 \Phi_\mu(t)}{L_3} \quad (36.4.8)$$

Po skončení demagnetizace (uplynutí t_{demag}) je již magnetický tok nulový, jádro je energeticky neutrální, proto i napětí u_1, u_2, u_3 skokem zanikají na nulu. V neutrálním stavu soustava setrvává až do skončení doby $(1 - \delta)T$, tj. do zapnutí tranzistoru.

Pro magnetický tok během procesu demagnetizace musí platit:

$$\Phi_\mu(t) = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{U'_1 t}{N_1} \quad (36.4.9)$$

Po uplynutí t_{demag} je tok nulový. Položíme-li tedy $\Phi_\mu(t)$ dle (36.4.9) rovný nule, lze odsud vyjádřit t_{demag} .

$$t_{demag} = \frac{N_1 \Phi_{\mu_{max}}}{U'_1} \quad (36.4.10)$$

Za $\Phi_{\mu_{max}}$ dosadíme vztah (36.4.2) a za U_1 vztah (36.4.7). Tím dostaneme:

$$t_{demag} = \frac{N_3}{N_1} \delta T \quad (36.4.11)$$

Je zřejmé, že musíme zajistit, aby $(1 - \delta)T > t_{demag}$, jinak by tok ještě nestačil úplně zaniknout a už bychom znova spínali tranzistor. V průběhu dalšího sepnutí by se tok (a magnetizační proud) zvýšil opět o hodnotu $\Phi_{\mu_{max}}$ (resp. $I_{\mu_{max}}$, ale už z nenulové počáteční hodnoty a tak by neustále vzrůstal (během dalších period by se „aintegroval“ teoreticky na hodnotu $\rightarrow \infty$), až by došlo k přesycení jádra a tím k prudkému lavinovitému růstu magnetizačního proudu (neboť by současně klesla indukčnost L_1). Jev by postupoval až do zničení tranzistoru. Z výše uvedeného důvodu musí být maximální střída δ omezena na hodnotu:

$$\delta_{max} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{demag}} \quad (36.4.12)$$

Dosazením (36.4.11) za t_{demag} dostaneme:

$$\delta_{max} = \frac{N_1}{N_1 + N_3} \quad (36.4.13)$$

Výstupní napětí U_{out} je rovno *střední hodnotě napětí* u_X a platí proto:

$$U_{out} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (36.4.14)$$

36.4.1.2 Proudové a napěťové dimenzování součástek

V době t_{demag} je tranzistor namáhán napětím $U_{CE_{max}}$:

$$U_{CE_{max}} = U_1 + U'_1 = U_1 + \frac{N_3}{N_1} U_1 = U_1 \frac{N_1 + N_3}{N_1} \quad (36.4.15)$$

- Volíme-li $N_3 < N_1$, je $U'_1 > U_1$ a tedy namáhání $U_{CE_{max}} > 2U_1$. Zato je ale maximální dovolená střída $\delta_{max} > 0,5$ a je tedy větší maximální dosažitelné výstupní napětí.

- Volíme-li $N_3 > N_1$, je $U'_1 < U_1$ a je tedy $U_1 < U_{CE_{max}} < 2U_1$. Zato je ale maximální dovolená střída $\delta_{max} < 0,5$ a je tedy menší maximální dosažitelné výstupní napětí.

Volba poměru N_3/N_1 proto záleží na tom, co je v dané aplikaci více kritické, zda napěťové namáhání tranzistoru, či co největší dosažitelné výstupní napětí (s neměnným převodem N_2/N_1). V praxi se nejčastěji volí $N_3 = N_1$ z důvodů snadného souběžného (*bifilárního*) vinutí obou cívek - viz později.

- *Proudové a dimenzování T_1 :*

Zanedbáme-li magnetizační proud, pak lze psát, viz. obr. 36.4.2, pro špičkovou, střední a efektivní hodnotu kolektorového proudu tranzistoru následující rovnice:

$$I_{1_{max}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \quad (36.4.16)$$

$$I_{1_{av}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (36.4.17)$$

$$I_{1_{rms}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\delta} \quad (36.4.18)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_1 :*

$$I_{D_{1max}} = I_{out} \quad (36.4.19)$$

$$I_{D_{1av}} = I_{out} \delta \quad (36.4.20)$$

$$I_{D_{1rms}} = I_{out} \sqrt{\delta} \quad (36.4.21)$$

$$U_{D_{1Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_3} \quad (36.4.22)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_2 :*

$$I_{D_{2max}} = I_{out} \quad (36.4.23)$$

$$I_{D_{2av}} = I_{out} (1 - \delta) \quad (36.4.24)$$

$$I_{D_{2rms}} = I_{out} \sqrt{1 - \delta} \quad (36.4.25)$$

$$U_{D_{2Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (36.4.26)$$

- Proudové a napěťové dimenzování D_3 :

$$I_{D_{3max}} = I_3 = I_{\mu_{max}} \frac{N_1}{N_3} = \frac{U_1 \delta_{max} T}{L_1} \cdot \frac{N_1}{N_3} \quad (36.4.27)$$

$$I_{D_{3av}} = I_{3_{av}} = \frac{I_3}{2} \delta \quad (36.4.28)$$

$$I_{D_{3rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_{demag}} \left(I_3 \frac{t}{t_{demag}} \right)^2 dt} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t_{demag}}{T}} \quad (36.4.29)$$

$$U_{D_{3Rmax}} = U_1 + U_1 \frac{N_3}{N_1} \quad (36.4.30)$$

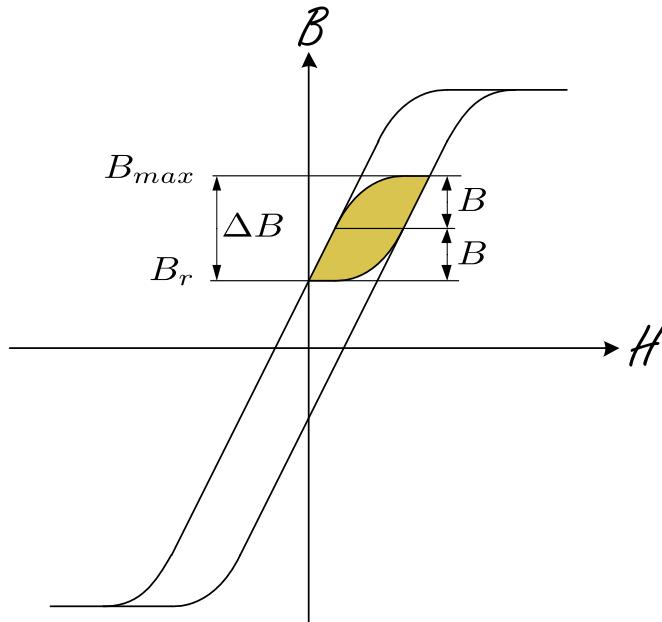
Poznámka 36.4.1. Všimneme si, že funkce tohoto měniče je kromě transformátoru zcela analogická funkci snižujícího měniče z kap. 36.3.2. Horní spínač je zde rozdělen tak, že tranzistor je na primární straně (pro větší podobnost s obr. 36.3.7 lze v obr. 36.4.1 vzájemně zaměnit umístění tranzistoru a primárního vinutí transformátoru, tj. z kladného pólu U_{in} nejprve tranzistor). Dioda D_2 , tvořící s tranzistorem horní spínač, je až na sekundární straně. Dioda D_1 jen odděluje výstupní obvod od sekundárního napětí v době, kdy je záporné, protože toto napětí nemůže mít nenulovou stejnosměrnou složku (stejně tak ani napětí u_1 a u_3).

36.4.1.3 Přehled metod demagnetizace jádra transformátoru

V kapitole 36.4.1.1 byl popsán jeden z možných způsobů, jak demagnetizovat jádro transformátoru, tak aby v dalším pracovním cyklu nedošlo k posunu pracovního bodu magnetického materiálu jádra a následně k jeho přesycení. Velikost magnetizačního proudu je dle vztahu 36.4.6 dána poměrem napěťové plochy $U_{in} \cdot t_{on}$ přiložené na vinutí primární cívky a hodnotou její magnetizační indukčnosti ($L_{mag} = L_1$)

$$i_{mag} = \frac{U_{prim} \cdot t_{on}}{L_{mag}}$$

Pracovní oblast transformátoru je v prvním kvadrantu, jak naznačuje obr. 36.4.3, neboť polovodičový spínač přikládá mezi svorky primárního vinutí pouze unipolární pulzy. Měnič se také proto nazývá jednočinný, protože energie je ze zdroje předávána do zátěže pouze jedenkrát za periodu, v jednom tzv. aktivním běhu, tj. v době t_{on} , kdy je tranzistor sepnut a magnetická indukce se v jádře zvyšuje z hodnoty remanentní indukce B_r o velikost magnetického zdvihu ΔB .



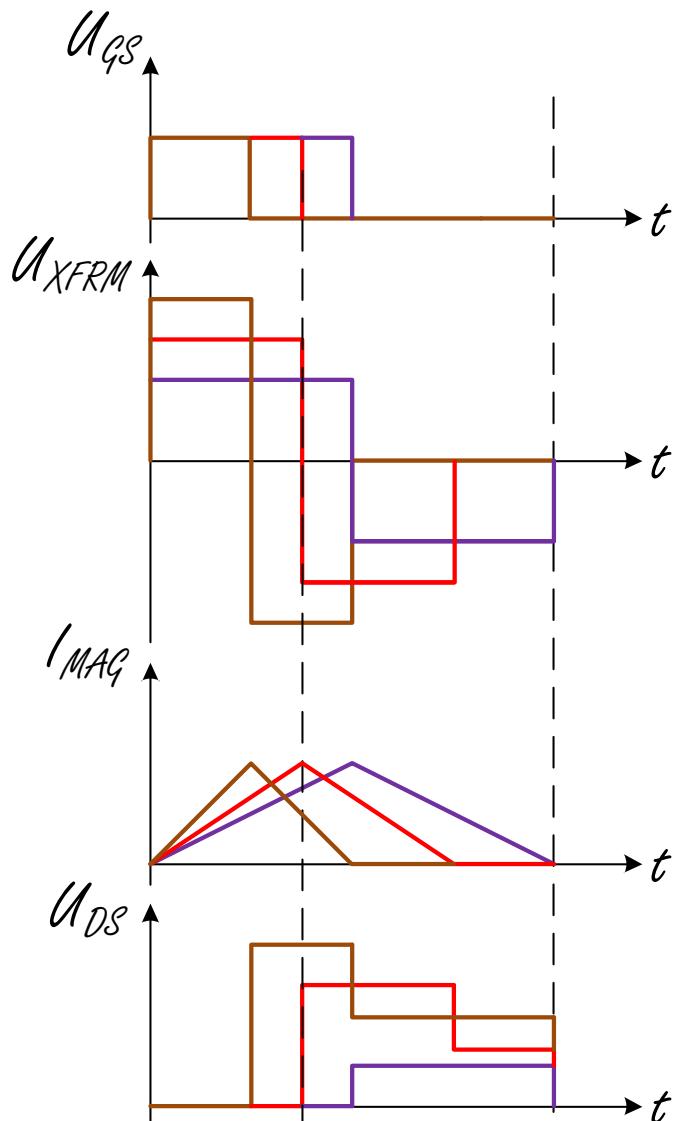
Obrázek 36.4.3: Transformátor jednočinného propustného měniče pracuje v prvním kvadrantu hysterezní smyčky

Pokud bychom měřili magnetizační proud primárního vinutí, dospěli bychom k průběhům na obr. 36.4.4, jenž vykazují stejnou vrcholovou hodnotu pro různé hodnoty vstupního napětí. Je to dáno tím, že pokud měnič během měření pracoval v uzavřené regulační smyčce, bude součin $V_{in} \cdot t_{on}$ konstantní a za předpokladu, že magnetizační indukčnost je též neměnná, pak dle předchozí rovnice dospějeme $i_{mag_{max}} = konst.$

36.4.1.4 Jednočinný propustný měnič s aktivním clampingem

36.4.1.5 Vlastnosti měniče

Obecně pro všechny varianty propustných měničů s transformátorem lze říci, že jsou vhodné pro přenos velkých výkonu. Je to dáno principem činnosti, kdy proud podílející se na přenosu výkonu se nepodílí na magnetizaci jádra transformátoru (teče v době t_{on} a to jak na sekundární straně tak i na primární – kompenzace magnetických účinků). Může se proto zvyšovat, aniž by rostlo sycení jádra transformátoru. Toto sycení je určeno pouze integrálem primárního napětí a počtem primárních závitů. Lze proto zvýšením pracovního kmitočtu docílit zmenšení velikosti transformátoru, jak to bylo vysvětleno na konci kap. 28.4.

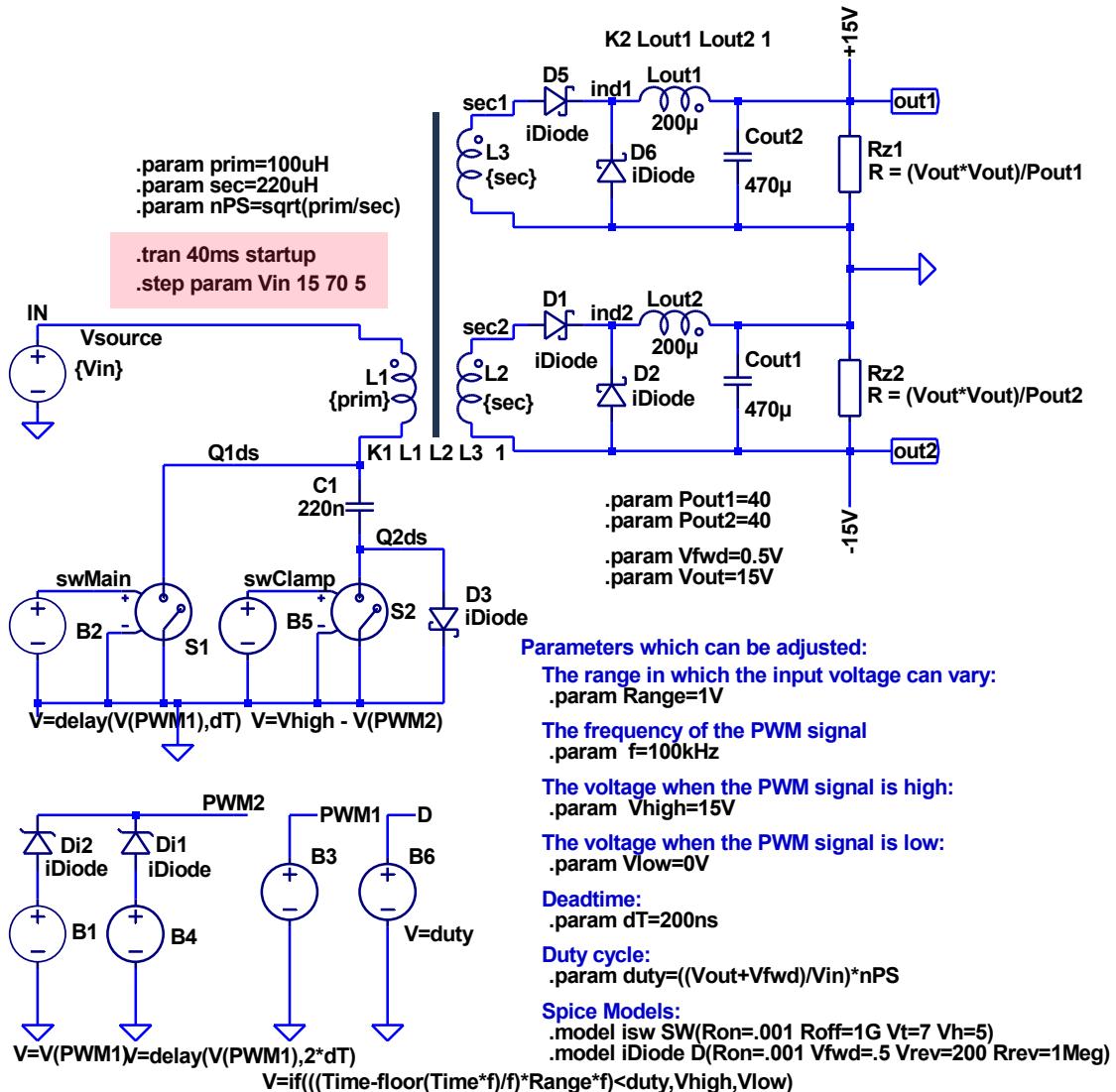


Obrázek 36.4.4: Vrcholová hodnota magnetizačního proudu je konstantní pro jakékoli velikosti vstupního napětí, neboť regulační smyčka zajistí, aby napěťová plocha $V_{in} \cdot t_{on}$ byla konstantní

36.4.2 Jednočinný blokující měnič

Základem tohoto měniče je „invertující měnič se společnou tlumivkou“ z kapitoly 36.3.4. Všimneme si, že z původního schématu (obr. 8.12) vymizela tlumivka, jejíž funkci nyní zastane transformátor. Princip činnosti je vlastně úplně stejný, pokud si uvědomíme, že jádro nynějšího transformátoru je magnetováno stejně jako jádro tlumivky na obr. 8.12, viz. průběh $i_L(t)$ v obr. 8.12 a průběh $\Phi_\mu(t)$ v obr. 9.8. Jediný rozdíl je v tom, že stejných

Model of the forward converter with active clamping technique



Obrázek 36.4.5: Propustný měnič s aktivním clampingem

magnetických poměrů je nyní dosaženo pomocí dvou vinutí místo původního jednoho (v době t_1 pomocí L_1 a v době t_2 pomocí L_2). Tím se dosáhne galvanického oddělení. Vznikl tak transformátor, ovšem režim jeho činnosti je takový, že magnetické účinky v jádře se podobají tlumivce. Režim je zcela odlišný od režimu transformátoru v propustných měničích.

36.5 Metody regulace spínaných zdrojů

36.5.1 Základy impulzní regulace

Základním principem a současně odlišností impulsní regulace od regulace klasické je její nespojitost. To v zásadě znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí $U_o ut$ stabilizováno zásahy regulačního členu pouze v určitých, časově omezených intervalech T_a . [Ham96]

Srovnejme pro názornost klasický a impulsní regulátor na úrovni blokových schémat. (obr. 4.1 a obr. 5.9). Vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál U_{REF} , zesilovač regulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprosto odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpor výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní.

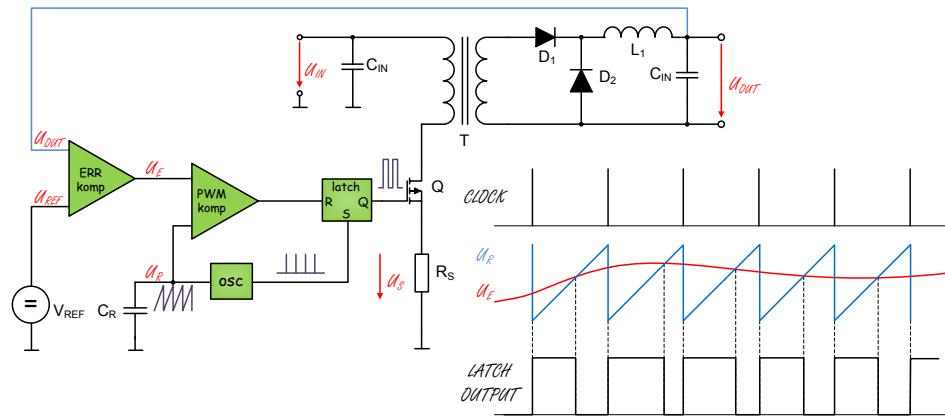
36.5.2 Regulační smyčka

36.5.2.1 Porovnání regulátoru s napěťovým a proudovým řízením

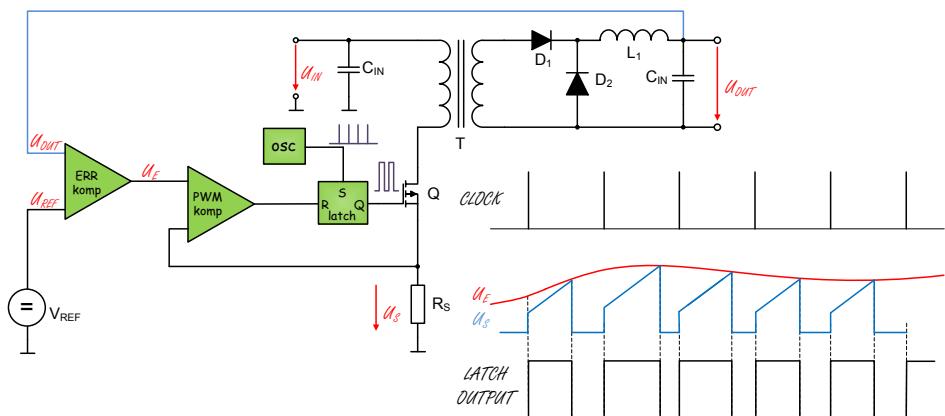
The current mode control method uses two control loops –an inner, current control loop and an outer loop for voltage control. Figure 1 shows a forward converter (buck family) using current mode control. When the switching transistor is on, current through Rsense is proportional to the upward ramping filter inductor current. When the ramp voltage Vs reaches Ve (the amplified output voltage error), the switching transistor turns off. Thus, the outer voltage control loop defines the level at which the inner loop regulates peak current through the switch and through the filter inductor. [SLUP075]

Výhody:

- Input voltage feed-forward, resulting in good open-loop line regulation.
- Simplified loop –inductor pole and 2nd order characteristic eliminated.
- Optimum large-signal behavior.



Obrázek 36.5.1: Regulátor s napěťovým řízením - Voltage mode control [[Mam99]]



Obrázek 36.5.2: Regulátor s proudovým řízením - Current mode control [[Mam99]]

- No conditional loop stability problems.
- Flux balancing (symmetry correction) in push-pull circuits.
- Automatic pulse-by-pulse current limiting.
- Current sharing of paralleled supplies for modular power systems.
- Less complexity/cost (current sense/amp is not an added complication).

Nevýhody (continuous mode only):

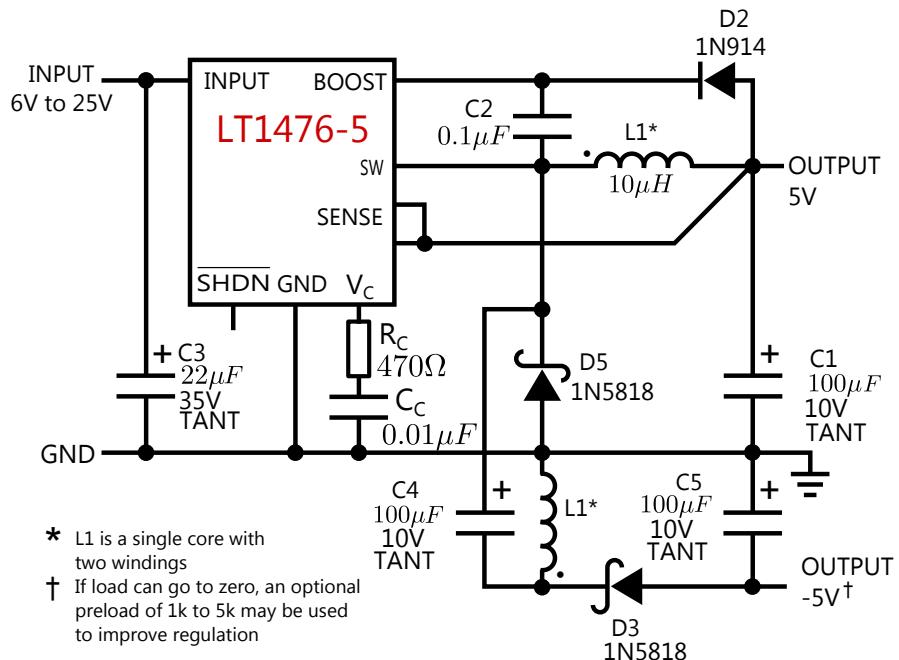
- Peak/avg. current error and instability –slope compensation
- Noise immunity is worse because of shallower ramp.
- Half Bridge runaway
- DC open loop load regulation is worse.
- (1-D) current error in Boost or Flyback circuits.
- Loop irregularities with multiple output buck circuits.

36.6 Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů

Existují dvě možnosti, jak provádět řízení pomocí PWM odlišující se *typem zpětné vazby*, která je buď čistě **napěťovou vazbou** (*voltage mode control*), nebo *napěťovou vazbou s vnitřní proudovou smyčkou* (*current mode control*). V následující diskusi se pokusíme konzistentním způsobem vysvětlit vlastnosti obou řídících algoritmů (slua119)

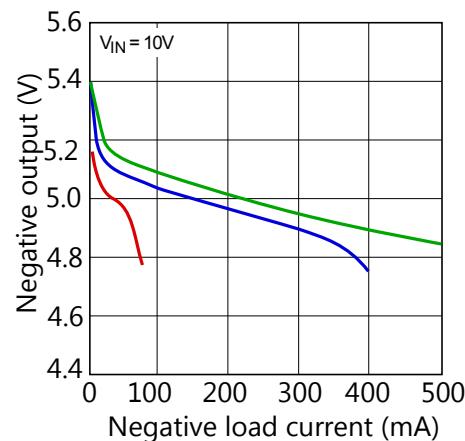
36.6.1 Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem

Toto řešení na obr. 36.6.1 nabízí spínaný zdroj symetrického napětí za použití několika dalších součástek a induktoru s dvojím vinutím. Základní části zdroje je napěťový regulátor snižující vstupní kladné napětí založený na obvodu *LT1376-5* se spínacím kmitočtem 500 kHz a možností zatížení proudem až 1,5 A.



Obrázek 36.6.1: Spínaný zdroj napětí $\pm 5V$ vystačí s jedinou indukčností s dvojím vinutím. [Nelo8].
Linear Technology Corp. (Dual Output Regulator Uses Only One Inductor)

Druhá polovina induktoru L_1 společně s D_3 , C_5 a C_4 je určena pro tvorbu záporného napětí pomocí **SEPIC topologie - Single Ended Primary Inductance Converter**. Kondenzátor C_4 vnucuje oběma vinutím stejné napětí. Bez něho pracuje tato část jako blokující měnič (**flyback**), která by sice poskytla $-5V$, ale jen naprázdno se značnou závislostí na zátěži (nedokonalá vazba mezi vinutími).



Obrázek 36.6.2: Zatěžovací charakteristika záporné větve.

Část XIV

Číslicové elektronické systémy

Kapitola 37

Číslicové systémy a signály

Obsah

37.1	Co je číslicový systém	384
37.1.1	Dvojstavové signály	384
37.2	Kombinační logické funkce	385
37.2.1	Realizace kombinačních logických funkcí	385
37.2.2	Základní pravidla Booleovy algebry	385
37.2.3	Zjednodušování zápisu logické funkce	386

37.1 Co je číslicový systém

V číslicovém systému se pracuje se signály, které mají jen konečný počet diskrétních hodnot. Tím se liší od systémů analogových, u kterých jsou signály spojité, tj. mohou ve vymezeném rozsahu nabývat nekonečný počet hodnot. V číslicovém systému může i čas být veličinou diskrétní, tj. signály se mohou měnit jen v určitých okamžicích. Takovéto číslicové systémy se pak nazývají **synchronní** - na rozdíl od systémů **asynchronních**, u kterých ke změnám signálů může docházet kdykoliv. Synchronní systémy jsou podstatně častější, neboť existence přesně stanovených okamžiků změn signálů zavádí "pořádek" do časování signálů v systému a tím usnadňuje jeho konstrukci i výrobu v podobě integrovaných obvodů. Přesné časování je zajištěno hodinovými (taktovacími) impulsy, což je velmi významný signál systému [Pino6, s. 14].

Číslicové systémy se dělí na dvě skupiny

- **kombinační systémy**,
- **sekvenční systémy**.

U kombinačních systémů jsou výstupní signály závislé pouze na momentálních vstupních signálech. U sekvenčních systémů jsou výstupní signály závislé nejen na momentálních vstupních signálech, ale i na vstupních signálech v minulosti. Systém tedy má *vnitřní paměť*.

37.1.1 Dvojstavové signály

Jak již bylo řečeno, číslicové signály mají jen konečný počet diskrétních hodnot. V naprosté většině jrou to právě jen dvě hodnoty. Dvouhodnotové nebo dvoustavové signály snižují nároky na výrobní tolerance. Bylo tak možné zavést výrobní postupy, které umožňují hromadnou a levnou výrobu součástek.

Předpokládejme, že číslicové součástky jsou napájeny kladným napětím $+U_{CC}$. Jedna hodnota bude vyjádřena nižším napětím, druhá vyšším napětím. Dvě možné hodnoty signálu označíme jako '0' a '1' (v souladu se značením v [Boolově algebře](#)).

37.2 Kombinační logické funkce

Základním pojmem při úvahách o kombinačních systémech představuje pojem kombinační logická funkce. *Kombinační logická funkce* je pravidlo přiřazující každé kombinaci hodnot **0** a **1** přiřazených vstupním proměnným z definičního oboru funkce jedinou hodnotu výstupní proměnné. Pro daný počet vstupních proměnných je těchto funkcí konečný počet. Kombinační logické funkce mohou být úplně nebo neúplně určené. *Úplně určená kombinační logická funkce* je taková funkce, jejíž definiční obor zahrnuje všechny kombinace vstupních proměnných. U *neúplně určené kombinační logické funkce* její definiční obor nezahrnuje některé tyto kombinace. Kombinací se zde rozumí kombinace hodnot **0** a **1** přiřazených jednotlivým vstupním proměnným. Úplně určeným funkcím se někdy říká úplné funkce, funkcím neúplně určeným pak neúplné funkce.

37.2.1 Realizace kombinačních logických funkcí

Nejčastěji se v digitální technice setkáme s těmito způsoby realizace kombinační logické funkce:

- pomocí digitálních integrovaných obvodu typu NAND, NOR (popř. AND, OR) a dalších obvodů realizujících základní kombinační logické funkce - např. AND-OR-INVERT, EX-OR atd.,
- pomocí multiplexeru a demultiplexeru,
- pomocí speciálních kombinačních integrovaných obvodu (převodníky kódu, generátory parity, sčítací, násobičky a podobně - sem patří i použití multiplexeru a demultiplexeru),
- pomocí paměti (např. PROM a EEPROM),
- pomocí programovatelných logických obvodu (PLD).

37.2.1.1 Použití multiplexerů a demultiplexerů k realizaci kombinačních logických funkcí

37.2.2 Základní pravidla Booleovy algebry

Nejdůležitější postuláty:

$$x + 0 = x \quad x \cdot 0 = 0 | x + 1 = 1 \quad x \cdot 1 = 1 \quad \text{Univerzální vazba} \quad (37.2.1)$$

$$x + \bar{x} = 1 | x \cdot \bar{x} = 0 \quad \text{Doplňek} \quad (37.2.2)$$

$$x + x = x | x \cdot x = x \quad \text{Idempotence} \quad (37.2.3)$$

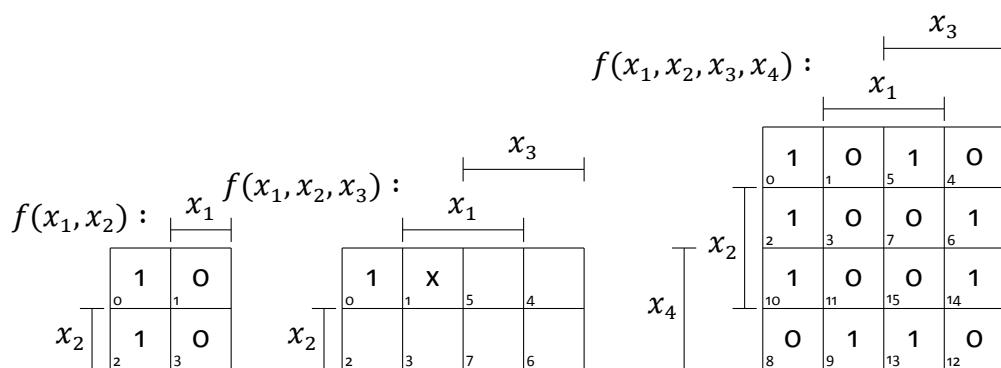
37.2.3 Zjednodušování zápisu logické funkce

Logická funkce vyjádřená úplnou součtovou (disjunktivní) nebo součinovou (konjunktivní) formou z pravdivostní tabulky není jediným možným zápisem logické funkce. Dá se většinou nalézt jednodušší algebraický zápis, z něhož můžeme předpokládat, že povede na realizaci méně složitého číslicového obvodu. Který ze zápisů logické funkce povede na minimální složitost obvodu závisí nejen na použitých logických členech, ale též na dalších kritériích: zpozdění, spotřeba obvodu, jeho spolehlivost, potlačení hazardních stavů, atd. První metodou je *algebraická minimalizace*,

37.2.3.1 Karnaughova metoda minimalizace pomocí mapy

Jednou z možností grafického zápisu logické funkce je mapa. Nejpoužívanější je **Karnaughova mapa** (čti "karnau"). Mapa je uspořádána do čtverce či obdélníka a to tak, že *sousední pole* se liší vždy jen v jedné proměnné.

Mapu chápáme jako uspořádaný zápis pravdivostní tabulky vzniklou transformací řádku tabulky na jedno pole mapy [PS94, s. 25]. Tedy, každé pole mapy jednoznačně odpovídá určité kombinaci všech proměnných. Nalézá-li se pole pod pruhem vyznačeným u proměnné, bude tato proměnná nenegovaná. Nalézá-li se mimo pruh, bude proměnná negovaná. Tak např. pole označené jako x v mapě pro tři proměnné bude odpovídat kombinaci $x_1 \bar{x}_2 x_3$. Jak je názorně vidět, z pravdivostní tabulky funkce lze snadno sestavit její mapu a naopak. Řádkům pravdivostní tabulky, ve kterých je funkční hodnota 1, odpovídají pole mapy s vepsanou jedničkou; obdobně to platí i pro nuly. V mapě lze znázornit i neurčené stavy prázdným políčkem (nebo pomlčkou) [Wak99, s. 219].



Obrázek 37.2.1: Příklad Karnaughovy mapy pro dvě, tři a čtyři proměnné

Přiřazení kombinací hodnot vstupních proměnných (součinů) jednotlivým polím mapy se označuje jako *kódování*. Řádky i sloupce Karnaughovy mapy jsou kódovány

Index	x_4	x_3	x_2	x_1	f	Index	x_4	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

Tabulka 37.2.1: Pravdivostní tabulka logické funkce čtyř proměnných, kterou se pokusíme vyjádřit také pomocí Karnaughovy mapy

Grayovým kódem. Základní vlastností Grayova kódu je to, že sousední slova konstantí délky se liší pouze v jedné proměnné. Tuto vlastnost splňuje i první a poslední kódové slovo (kód je uzavřen sám do sebe) viz 37.2.2. Právě tato vlastnost je využita při konstrukci Karnaughovy mapy - souřadnice polí jsou uspořádány tak, že u sousedních polí se liší jen v jedné proměnné. Tudíž geometricky sousedící pole jsou sousední i v algebraickém smyslu (liší se v jediné proměnné).

Každé pole s hodnotou 1 odpovídá **mintermu** z pravdivostní tabulky. Sousední pole tedy odpovídají mintermům lišícím se jen jednou proměnnou, a ty lze spojovat do **implikantů**. Sousední jsou i pole na okrajích mapy, neboť i ta se liší jen v jedné proměnné (konce řádek, konce sloupců a rohy mapy). Spojováním výrazů sousedních políček provádíme minimalizaci, která díky jasnému geometrickému postupu vyhýbá problematickému hledání těchto součtů nebo součinů.

Spojování polí se vyznačí **smyčkou**. Pole po dvojcích sousední lze spojovat do větších smyček, ty opět do větších atd. Každá smyčka tedy musí mít stranu dlouhou právě 2^k polí, kde k je celé kladné číslo. Smyčky zahrnují 2 pole, 4 pole, 8 polí, atd. Každá smyčka v mapě odpovídá implikantu funkce. Princip minimalizace spočívá v pokrytí všech jedniček¹ (a libovolných neurčených stavů) soustavou smyček pro součtovou formu, přičemž:

- smyčky musí být co možná největší,

¹nul pro součinovou formu

Číslo	Binární kód	Grayův kód
	x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Tabulka 37.2.2: Binární a Grayův kód pro tři proměnné

- smyček musí být co nejmenší počet.

Tento princip je ilustrován na následující mapě funkce čtyř proměnných. Jako příklad vezmeme funkci definovanou pravdivostní tabulkou 37.2.1. Odpovídající Karnaughova mapa pro čtyři proměnné je na obrázku 37.2.1. Základní součtový tvar této funkce je dán rovnici:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3 x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &+ x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4. \end{aligned} \quad (37.2.4)$$

V mapě můžeme vytvořit celkem čtyři smyčky, kterými spojíme sousední políčka. Všimněme si, že některé smyčky se částečně překrývají. To však nevadí, protože k logické funkci můžeme na základě postulátu 37.2.3 (*idempotence*) přidat tentýž součin několikrát.

Smyčka ze dvou políček označená na mapě 37.2.2 jako č. 1, může být vyjádřena:

$$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3 x_4} = \overline{x_1 x_3 x_4} (\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_1 x_3 x_4} \quad (37.2.5)$$

Smyčka ze čtyř polí na pravé a levé straně (označená č. 2):

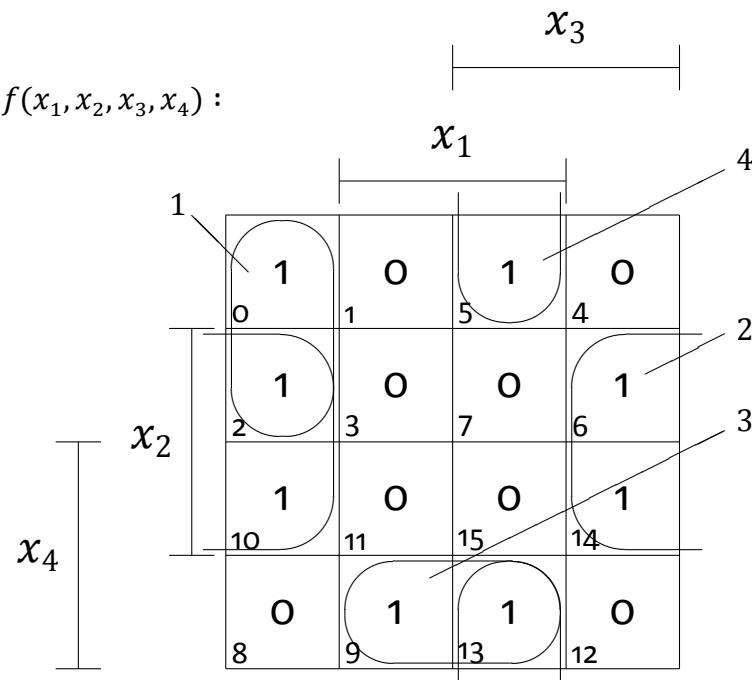
$$\begin{aligned} \overline{x_1} x_2 \overline{x_3 x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 &= \\ \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} (\overline{x_4} + x_4) + \overline{x_1} x_2 x_3 (\overline{x_4} + x_4) &= \\ \overline{x_1} x_2 (\overline{x_3} + x_3) &= \overline{x_1} x_2 \end{aligned} \quad (37.2.6)$$

Smyčka ze dvou polí v poslední řádce (označená č. 3):

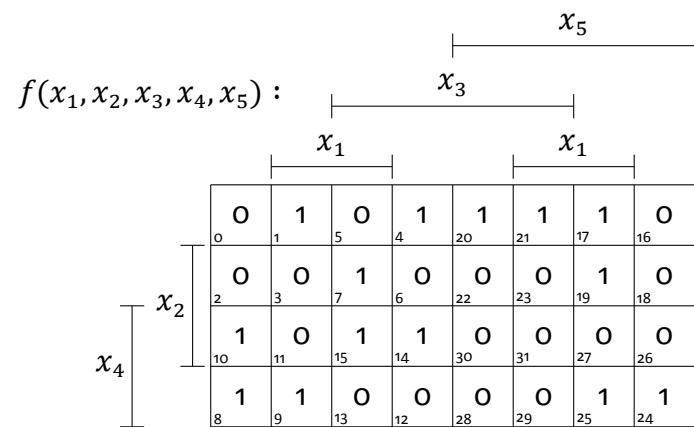
$$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 = \quad (37.2.7)$$

References

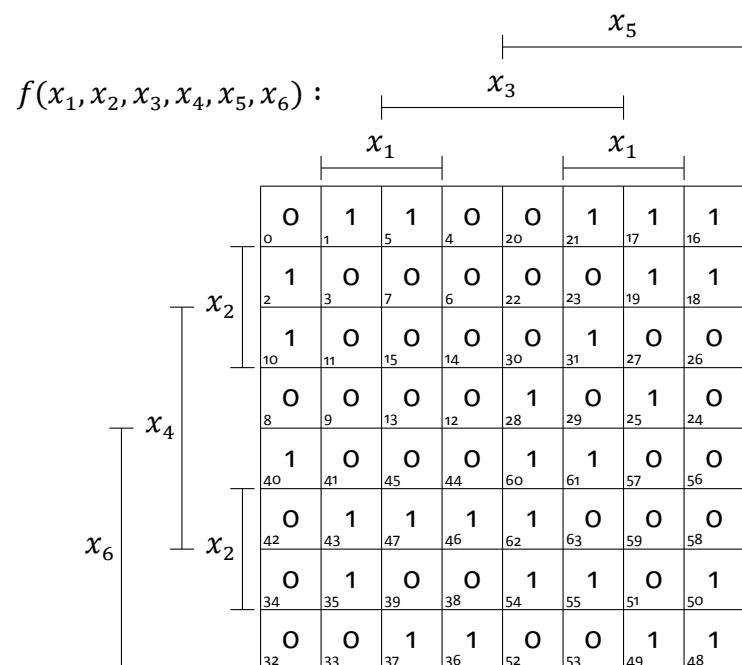
- [Pin06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on p. [384](#)).
- [PS94] J. Podlešák and P. Skalicky. *Spínací a číslicová technika*. ČVUT, 1994 (cit. on p. [386](#)).
- [Wak99] J. F. Wakerly. *Digital Design Principles and Practices*. PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. [386](#)).



Obrázek 37.2.2: Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy. Zakreslené smyčky byly vytvořeny tak, aby každá zahrnovala co největší počet polí s vepsanou jedničkou.



Obrázek 37.2.3: Příklad Karnaughovy mapy pro pět proměnných



Obrázek 37.2.4: Příklad Karnaughovy mapy pro šest proměnných

Kapitola 38

Číslicové součástky a technologie

Obsah

38.1	Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	392
38.1.1	Vlastnosti logických hradel	392
38.2	Bipolární digitální obvody	392
38.3	Unipolární digitální obvody	393
38.4	Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	394
38.4.1	$3.3V \rightarrow 5V$	395
38.4.2	$5V \rightarrow 3.3V$	398

38.1 Rozdelení číslicových integrovaných obvodů

Logické integrované obvody zpracovávají nespojité signály, které nabývají jen konečného malého počtu úrovní. Naprostá většina dnes vyráběných logických IO využívá pouze dvou logických úrovní pracujících s dvojkovou číselnou soustavou. Jejich funkci a vzájemné spojování do soustav lze popsat pomocí Booleovy algebry (viz kap. 37.2.2) [MKPO2, p. 8].

Digitální IO se vyrábějí v technologii *bipolární* (kap. 38.2) i *unipolární* 38.3 (především MOS). Základní kriteria, podle kterých posuzujeme kvalitu (vhodnost pro danou aplikaci) jednotlivých druhů (tříd) digitálních obvodů jsou:

- rychlosť,
- příkon,
- odolnosť proti rušení,
- široký rozsah pracovních teplot,
- nízké rušení generované vlastním obvodem (proudové špičky při změnách stavu),
- snadnost realizace složitějších logických funkcí,
- dosažitelná hodnota základních hradel a možnosti velké integrace,
- nízká cena.

Tyto požadavky splňuje každá třída digitálních obvodů pouze částečně. Proto se ve výrobě udržuje několik různých tříd digitálních obvodů, z nichž každá má zdůrazněnou některou z výše uvedených vlastností tak, jak to odpovídá její fyzikální podstatě.

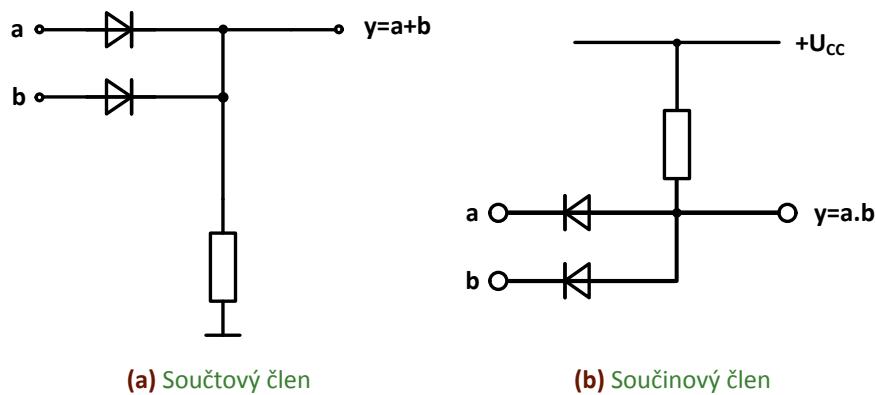
38.1.1 Vlastnosti logických hradel

38.2 Bipolární digitální obvody

V bipolární technologii jsou skupiny logických obvodů charakterizovány z hlediska režimu činnosti tranzistorů a tvoří dvě základní skupiny. Jsou to logické IO - s tranzistory pracujícími:

- v saturaci: tranzistor spínán z vypnutého stavu do saturace,
- v nesaturačním - aktivním režimu: tranzistor přepínán mezi stavem vypnutým (nebo slabě sepnutým) a aktivním (nesaturačním) módem.

V obou skupinách je přepínanou součástkou *tranzistor NPN*. *Komplementární tranzistor PNP* je využíván pouze jako zatěžovací prvek nebo jako proudový zdroj; pro tyto účely se rovněž využívá i rezistor.



Obrázek 38.2.1: Diodová logika

38.3 Unipolární digitální obvody

38.4 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd

Vyskytne-li se v číslicovém návrhu potřeba použít logická hradla z odlišných napěťových tříd, budeme postaveni před problém jejich vzájemného propojení zachovávající jejich funkčnost. Pro správnou volbu vhodného napěťového přizpůsobení logických hradel z různých rodin, je nutné znát nejen jejich rozhodovací napětí, ale také následující parametry, které jsou uvedeny v tabulce 38.4.1 [Mico6, p. 22]:

- maximální úroveň logické '0' na vstupu hradla - $V_{IL_{max}}$
- minimální úroveň logické '1' na vstupu hradla - $V_{IH_{min}}$
- maximální úroveň logické '0' na výstupu hradla - $V_{OL_{max}}$
- minimální úroveň logické '1' na výstupu hradla - $V_{OH_{min}}$

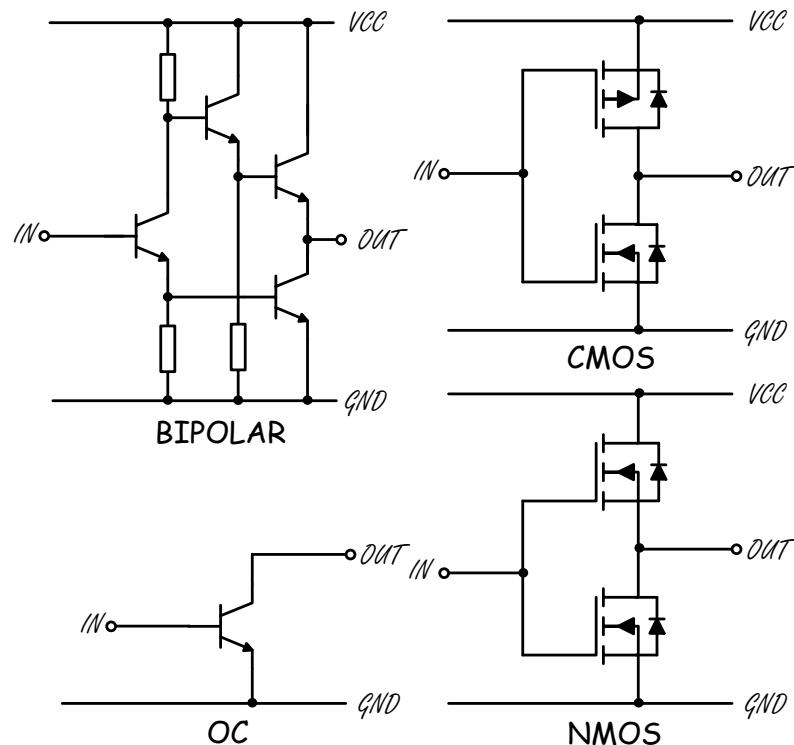
	$V_{OH_{min}}$	$V_{OL_{max}}$	$V_{IH_{min}}$	$V_{IL_{max}}$
5V TTL	2.4V	0.5V	2.0V	0.8
3.3V LVTTL	2.4V	0.4V	2.0V	0.8
5V CMOS $(V_{CC}-0.3V)$	4.7V $(V_{CC}-0.3V)$	0.5V	3.5V $(0.7 \times V_{CC})$	1.5V $(0.3 \times V_{CC})$
3.3V LVCMOS $(V_{CC}-0.3V)$	3.0V $(V_{CC}-0.3V)$	0.5V	2.3V $(0.7 \times V_{CC})$	1.0V $(0.3 \times V_{CC})$

Tabulka 38.4.1: Rozhodovací úrovně napěťových tříd: 5V TTL, 3.3V LVTTL, 5V CMOS, 3.3V LVCMOS

Úroveň logické nuly a jedničky na výstupu určuje konstrukce koncové části digitálního obvodu. Nejčastější provedení jsou na obr. 38.4.1. Jsou-li různé digitální obvody připojeny na společnou sběrnici, může dojít k situaci, kdy některý z výstupních vývodů bude buzen vyšším napětím než je napájecí napětí příslušného obvodu. I v tomto případě výstupní část digitálního obvodu rozhoduje o výsledném chování. Shrňme základní vlastnosti technologií číslicových obvodů uvedených na obr. 38.4.1:

- Bipolární koncový stupeň nedovoluje plný rozkmit výstupního signálu. Je-li obvod napájen 5 V, je výstup při úrovni H limitován na $V_{CC} - 2 \times V_{BE}$ (cca 3.6V). To je hodnota, která na rozhraní 3 V systému nezpůsobuje příliš velký napěťový rozdíl, a tedy proudu, tekoucímu z napájecího zdroje 5 V systému do zdroje 3 V systému.

- Výstupní napětí typické CMOS součástky se prakticky pohybuje v rozsahu GND - VCC.
- Některé součástky mají výstup typu *open kolektor* - OC resp. *open drain* - OD, tj. neexistuje vnitřní obvod, jenž by uvedl výstup do stavu H. K tomu je zapotřebí *pull-up* rezistoru, který připojí výstup k napětí, které může být i vyšší než je napájecí - VCC. Očividně, tento způsob umožnuje relativně snadné rozhraní, ale pro dosažení vyšších rychlostí je nutné volit relativně malý odpor, což zvyšuje spotřebu.
- U NMOS stupně je podobně jako u bipolárního stupně výstupní napětí logické úrovně H omezeno úbytkem na kanálu horní NMOS tranzistoru na $V_{CC} - V_{TH} \approx 3,5$ V. Obvykle je tedy možné přímé řízení 3V systému.



Obrázek 38.4.1: Koncové stupně bipolárních, CMOS, NMOS obvodů a obvodů s otevřeným kolektorem [Tin95, p. 2]

38.4.1 3.3V → 5V

Nejjednodušším a nejvíce žádoucím způsobem je přímé připojení 3.3V výstupu k 5V vstupu, což lze provést pouze v případě, že jsou splněny následující požadavky:

- $V_{OH}(3.3V) > V_{IH}(5V)$,
- $V_{OL}(3.3V) < V_{IL}(5V)$.

Hodnoty prahových napětí logické nuly a jedničky v předchozí tabulce 38.4.1 dokládají, že v případě logiky 3.3V LVCMS a 5V TTL je možné použít přímého připojení.

Pokud oba tyto požadavky nejsou splněny, je třeba použít na rozhraní obou logik přizpůsobovací obvody, popsané v následujících textu.

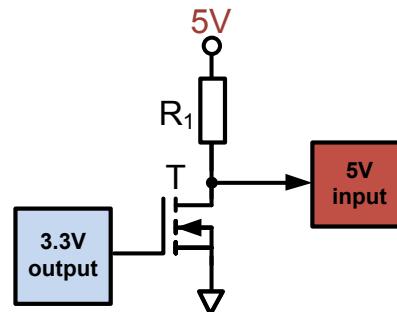
38.4.1.1 MOSFET Translator

Levné a jednoduché řešení problému vzájemného přizpůsobení logických obvodů odlišných napěťových tříd, pro které platí $V_{OH}(3.3V) < V_{IH}(5V)$ nabízí použití MOSFETu s prahovým napětím

$$V_{GS_{th,max}} < V_{OH_{min}}.$$

Při výběru hodnoty R_1 je třeba vzít v úvahu:

- spínací rychlosť vstupu,
- zvýšení spotřeby díky proudu přes rezistor R_1 .



Obrázek 38.4.2: 3.3V → 5V: N-MOSFET

Při změně logické úrovně '0' → '1' na vstupu 5V logiky je nutné počítat se zpožděním, které je dáno časovou konstantou RC článku, tvořeného rezistorem R_1 a celkovou kapacitou na vstupu hradla. Důsledkem je tedy určitá minimální spínací perioda:

$$T_{SW_{min}} = 3 \cdot R_1 \cdot C_{IN},$$

která je vyšší, čím nižší spotřeby se návrhář snaží dosáhnout ($R_1 \uparrow$). Zpoždění při spínání '1' → '0' má příznivější hodnotu, neboť $R_{dsON} \ll R_1$.

38.4.1.2 Diodový Offset

Hodnoty vstupního prahového napětí 5V CMOS a výstupní prahová napětí pro 3.3V LVTTL a LVCMS jsou uvedeny v tabulce 38.4.2

Threshold	5V CMOS IN	3.3V LVTTL OUT	3.3V LVC MOS OUT
High	$> 3.5V$	$> 2.4V$	$> 3.0V$
Low	$< 1.5V$	$< 0.4V$	$< 0.5V$

Tabulka 38.4.2: Přehled vstupní a výstupních prahových napětí různých logik, chceme-li ke vstupu 5V CMOS připojit 3.3V LVTTL nebo 3.3V LVC MOS. [Tin95]

Všimněme si, že obě prahová napětí vstupu 5V CMOS logiky jsou o volt vyšší než u výstupu 3.3V logiky. Zapotřebí je tedy obvod, který zvyšuje vysokou a nízkou úroveň prahového napětí.

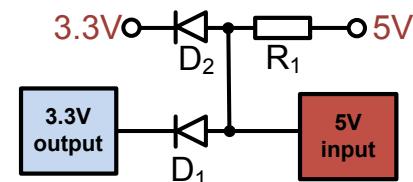
Pokud bychom vytvořili posunutí o alespoň 0.7V pro obě úrovně prahového napětí, dosáhli bychom vzájemného přizpůsobení. Obvod na obr. 38.4.3, posuneme hodnotu nízké úrovně výstupního prahového napětí o úbytek v propustném směru diody D_1 (typicky 0.7V), na 1.1V až 1.2V. Úroveň vysokého prahového napětí se nastavuje pomocí pull-up rezistoru a diody D_2 vázané na 3.3V napájení. Výstupní napětí je tedy také posunuto přibližně 0,7V nad 3,3V napájení, tj. na 4,0 až 4.1V, což je vysoko nad 3,5V prahem vstupu 5V CMOS logiky.

Poznámka 38.4.1. Aby obvod fungoval správně, musí být pull-up rezistor podstatně menší než vstupní odpor 5V CMOS logiky, aby se zabránilo snížení výstupního napětí díky efektu vstupního odporového děliče a také musí být dostatečně velký, aby proud tekoucí do 3.3V napájení a výstupu hradla byl v mezích specifikace.

38.4.1.3 Komparátor

Základní funkce komparátoru je následující:

- napětí na invertující (-) vstupu je větší než na neinvertujícím vstupu (+), výstup komparátoru se nastaví do nízké úrovně,
- je-li napětí na neinvertujícím vstupu (+) větší než na invertujícím vstupu (-), výstup komparátoru se nastaví do vysoké úrovně.



Obrázek 38.4.3: 3.3V → 5V: Diodový offset

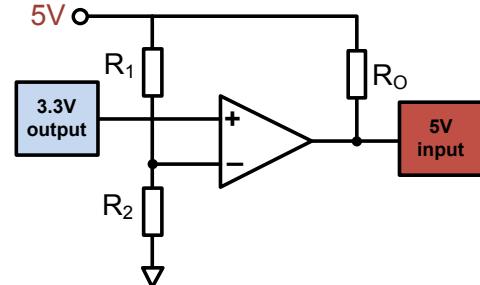
Výpočet hodnoty odporu R_1 a R_2 :

Poměr R_1 a R_2 je závislý na napětí logické nuly a jedničky na výstupu hradla 3.3V logiky. Invertující vstup by měl být nastaven do poloviny mezi prahovými hladinami V_{OL} a V_{OH} . Pro LVCMOS je toto napětí rovno

$$1.75V = \frac{3V + 0.5V}{2}.$$

Budeme-li volit velikost R_2 , pak hodnotu odporu R_1 snadno dopočítáme dle následující rovnice:

$$R_1 = R_2 \left(\frac{5V}{1.75V} - 1 \right).$$

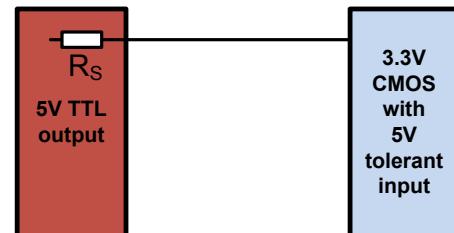


Obrázek 38.4.4: 3.3V → 5V: Komparátor;
 $R_1 = 1,8k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$

38.4.2 5V → 3.3V

38.4.2.1 Přímé propojení

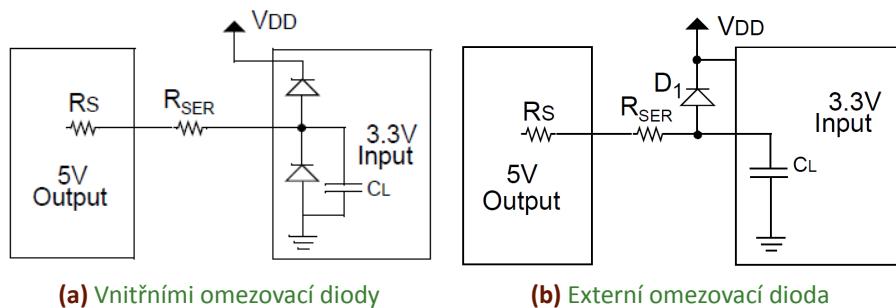
Hradla napěťové třídy 5V mají výstupy s typickými prahovými hodnotami $V_{OH} = 4,7V$, $V_{OL} = 0,4V$ zatímco hradla 3.3V LVCMOS mají vstupy s prahovými hodnotami $V_{IH} = 0,7 \times V_{DD}$, $V_{IL} = 0,2 \times V_{DD}$. Je-li tedy na 5V výstupu logická nula, bude také správně interpretována 3V vstupem, neboť platí $V_{OL} = 0,4 < V_{IL} = 0,8$. Ani v případě logické jedničky nevzniká žádný konflikt, neboť $V_{OH} = 4,7 > V_{IH} = 2,1$. Pokud je tedy 3V vstup 5V tolerantní, je možné přímé propojení, v opačném případě je třeba použít některou z následujících technik.



Obrázek 38.4.5: 5V → 3,3V: Přímé propojení

38.4.2.2 Diodový omezovač

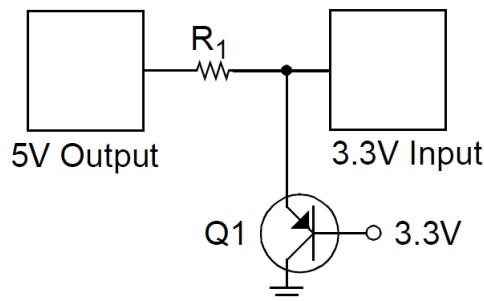
Některé digitální obvody mají své vstupy chráněny vnitřními omezovacími diodami tzv. diode clamp (obr. 38.4.6a). Proteče-li těmito diodami větší proud než udávají katalogové hodnoty, může dojít k poškození vstupu, nebo v lepším případě k efektu latching-up. Typický 5V výstup má kolem 10Ω , proto chceme-li využít těchto diod,



Obrázek 38.4.6: $5V \rightarrow 3,3V$: Použití omezovacích diod pro ochranu vstupu integrovaného obvodu

musíme přidat sériový odpor, jenž limituje velikost propustného proudu. Nepříjemný důsledkem je ovšem vzniklý RC článek se vstupní kapacitou hradla C_L , který snižuje rychlosť. Není-li vstup takto chráněn je možné jej doplnit externí diodou dle obr. 38.4.6b.

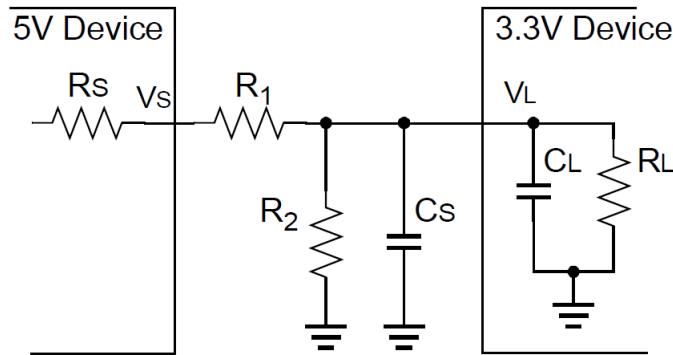
Dalším problémem je proud, injektovaný z 5V výstupu skrz omezovovací diodu do 3.3V napájení. Tento proud může způsobit zvýšení napájecího napětí 3.3V obvodů, což může vést k jejich zničení. Proto lze s výhodou použít PNP tranzistor zapojený dle obr. 38.4.7.



Obrázek 38.4.7: $5V \rightarrow 3,3V$: Active clamp - Přechod báze-emitor funguje jako omezovací dioda, ovšem s tím rozdílem, že jen malé procento celkového proudu z $5V$ výstupu teče do $3,3V$ napájení. Převážná část teče kolektorem do země. Poměr bázového a kolektorového proudu je určen proudovým zesílením tranzistoru, které je typicky 10 až 400

38.4.2.3 Napěťový dělič

A simple resistor divider can be used to reduce the output of a 5V device to levels appropriate for a 3.3V device input. An equivalent circuit of this interface is shown in Figure 38.4.8. Typically, the source resistance, R_S , is very small (less than 10 ohms) so



Obrázek 38.4.8: 5V → 3,3V: napěťový děliš

its affect on R_1 will be negligible provided that R_1 is chosen to be much larger than R_s . At the receive end, the load resistance, R_L , is very large (greater than 500 k ohms) so its affect on R_2 will be negligible provided that R_2 is chosen to be much less than R_L .

There is a trade-off between power dissipation and transition times. To keep the power requirements of the interface circuit at a minimum, the series resistance of R_1 and R_2 should be as large as possible. However, the load capacitance, which is the combination of the stray capacitance, C_s , and the 3.3V device input capacitance, C_L , can adversely affect the rise and fall times of the input signal. Rise and fall times can be unacceptably long if R_1 and R_2 are too large.

Neglecting the affects of R_s and R_L , the formula for determining the values for R_1 and R_2 is given by Equation 38.4.1.

$$\frac{V_s}{R_1 + R_2} = \frac{V_L}{R_2} \quad (38.4.1)$$

$$R_1 = \frac{(V_s - V_L)}{V_L} R_2 \quad (38.4.2)$$

$$R_1 = 0,515 \cdot R_2 \quad (38.4.3)$$

The formula for determining the rise and fall times is given in Equation 38.4.4. For circuit analysis, the Thevenin equivalent is used to determine the applied voltage, V_A , and the series resistance, R . The Thevenin equivalent is defined as the open circuit voltage divided by the short circuit current. The Thevenin equivalent, R , is determined to be $0.66 \cdot R_1$ and the Thevenin equivalent, V_A , is determined to be $0.66 \cdot V_s$ for the circuit shown in Figure 38.4.8 according to the limitations imposed by Equation 38.4.4.

$$t = -R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{V_F - V_A}{V_I - V_A}\right) \quad (38.4.4)$$

kde t = Rise or Fall time, $R = 0.66 \cdot R_1$, $C = C_S + C_L$, V_I = Initial voltage on C (V_L), V_F = Final voltage on C (V_L), V_A = Applied voltage ($0.66 \cdot V_S$).

Příklad 38.4.1. As an example, suppose the following conditions exist:

- Stray capacitance = 30 pF,
- Load capacitance = 5 pF,
- Maximum rise time from 0.3V to 3V $\leq 1 \mu\text{s}$
- Applied source voltage $V_S = 5\text{V}$

Solve Equation 38.4.4 for R :

$$R = -\frac{t}{C \cdot \ln \frac{V_F - V_A}{V_I - V_A}}$$

Substitute values:

$$R = -\frac{10 \cdot 10^{-7}}{35 \cdot 10^{-12} \cdot \ln \frac{3 - 0.66 \cdot 5}{0.3 - 0.66 \cdot 5}}$$

Thevenin equivalent maximum R :

$$R = 12408$$

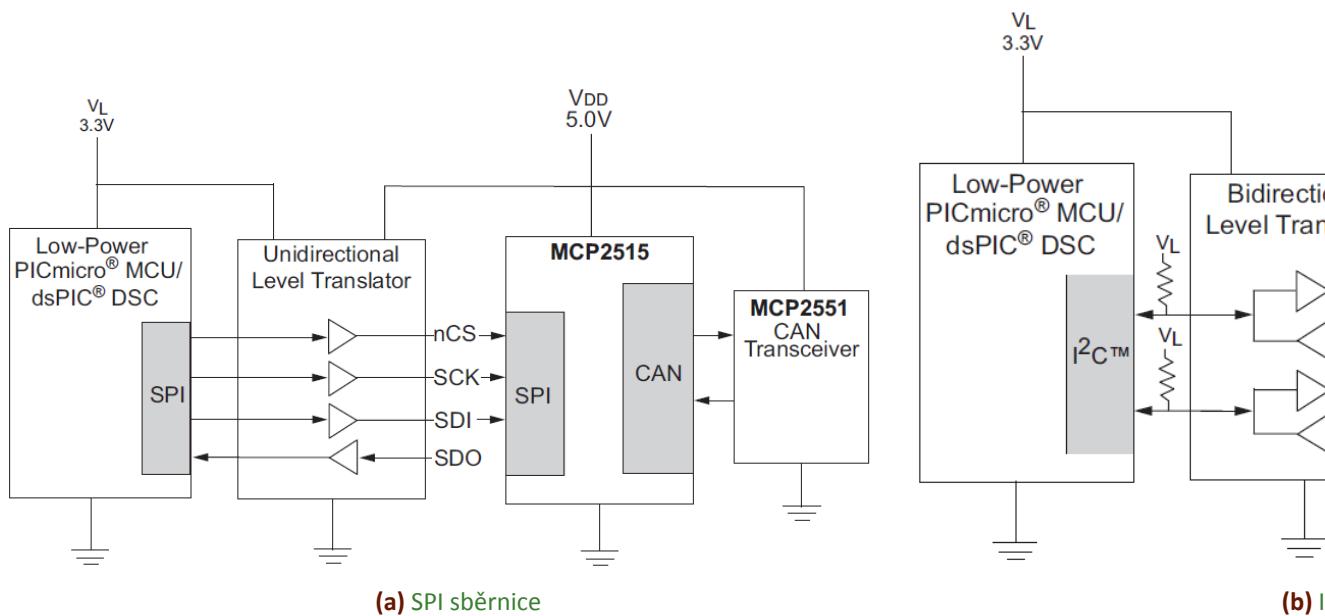
Solve for maximum R_1 and R_2 :

$$R_1 = 0.66 \cdot R \quad R_2 = \frac{R_1}{0.515} \quad (38.4.5)$$

$$R_1 = 8190 \quad R_2 = 15902 \quad (38.4.6)$$

38.4.2.4 Level translator

While level translation can be done discretely, it is often preferred to use an integrated solution. Level translators are available in a wide range of capabilities. There are unidirectional and bidirectional configurations, different voltage translations and different speeds, all giving the user the ability to select the best solution.



Obrázek 38.4.9: $5V \rightarrow 3.3V$: Board-level communication between devices (e.g., MCU to peripheral) is most often done by either SPI or I²C. For SPI, it may be appropriate to use a unidirectional level translator and for I²C, it is necessary to use a bidirectional solution.

References

- [Mic06] Microchip. “3V Tips ‘n Tricks”. In: *Microchip DS41285A* (2006), p. 56 (cit. on p. [394](#)).
- [MKP02] V. Musil, J. Kolouch, and R. Prokop. *Návrh digitálních integrovaných obvodů a jazyk VHDL*. Ed. by V. Brno. VUT Brno, 2002 (cit. on p. [392](#)).
- [Tin95] T. A. Tinus van de Wouw. “Interfacing 3V and 5V applications”. In: *Philips Semiconductors AN240* (Sept. 1995), p. 11 (cit. on pp. [395](#), [397](#)).

Část XV

Mikroprocesorová technika

Kapitola 39

Procesory AVR

Obsah

39.1	AVR Architektura	406
39.1.1	Strojový cyklus	406
39.1.2	Prefetch a pipelining	406

39.1 AVR Architektura

AVR architektura vychází z koncepce rychle přístupného registrového pole, které obsahuje 32 obecně použitelných registrů délky 8 bitů. Přístup do registrového pole je proveden v jediném strojovém cyklu. To znamená, že během jednoho strojového cyklu lze vykonat jednu aritmeticko-logickou operaci¹

Tato technika, umožňuje vyšší výkon ve srovnání s mikrokontroléry řady 8051, které disponují instrukcemi o délce od 12 do 48 hodinových cyklů, navíc se pro výpočty musí používat akumulátor, který je jen jeden. Registrové pole lze v tomto smyslu chápat jako skupinu akumulátorů.

39.1.1 Strojový cyklus

Strojový cyklus mikrokontrolérů AVR přímo odpovídá hodinovému cyklu. Nedochází k žádnému dělení hodinových cyklů jako například u mikrokontrolérů řady 8051²

39.1.2 Prefetch a pipelining

Mikrokontroléry AVR používají jednoduchý *předvýběr instrukce* (**prefetch**) umožňující *jednofázové zřetězení instrukcí* (**pipelining**)

¹oba operandy aritmeticko-logické operace jsou načteny z registrového pole, operace je provedena a výsledek směruje opět do registrového pole v jediném strojovém cyklu

²jeden strojový cyklus obsahuje 12 hodinových cyklů

Kapitola 40

ANSI-C pro mikrokontroléry

Obsah

40.1 Stručný úvod	408
-----------------------------	-----

40.1 Stručný úvod

Část XVI

Programovatelné logické obvody

Kapitola 41

Architektura

Obsah

41.1	Typy struktur programovatelných logických obvodů	412
41.1.1	Historie	412
41.1.2	Obvody typu Simple Programmable Logic Device	416
41.1.3	Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD . .	421
41.1.4	Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA	422
41.1.5	Terminologie	423
41.2	Dynamické parametry PLD	425

41.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů

Programovatelný logický obvod nebo programovatelné logické zařízení, často také PLD (*programmable logic device*) nebo FPD (*Field-Programmable Device*), je elektronická součástka (obvod) používaná pro vytváření digitálních obvodů. Na rozdíl od hradel, registrů a jiných digitálních obvodů není funkce zařízení tohoto druhu v době výroby ještě definovaná. Než může být PLD použito, musí být nejprve naprogramováno.

41.1.1 Historie

Historické kořeny moderních programovatelných polí jsou v prvních programovatelných pamětech typu PROM (*firma Radiation, 1970*) a jejich zákaznický programovatelných verzích EPROM (*Intel, 1971*) a EEPROM (*Intel, 1978*). Paměť PROM lze využít pro realizaci kombinačních logických funkcí tak, že paměť využijeme jako tzv. *vyhledávací tabulku LUT* (angl. *Lookup Table*). V tomto případě přivádíme na adresové vodiče PROM paměti vstupní signály (proměnné). Obsah paměti PROM vytvoříme tak, že na adresy jejichž hodnota je tvořena vektorem hodnot vstupních proměnných uložíme hodnoty, které jsou tvořeny vektory požadovaných výstupních hodnot. Výstupní datové signály paměti PROM pak reprezentují výstupy kombinací logiky. Tímto způsobem můžeme např. paměti PROM o velikosti 2 Kb s organizací 256x8 bitů (8 adresových vodičů, 8 datových vodičů), vytvořit programovatelný logický obvod, kterým lze realizovat 8 kombinačních funkcí s 8 vstupními signály (proměnnými). Výhodou takovéto realizace je, že všechny realizované funkce mají stejné zpoždění ze vstupu na výstup a to pro všechny možné kombinace vstupních hodnot. Na principu generátorů logických funkcí pomocí paměti (LUT) je založena funkce obvodů FPGA.

Permanentní paměti, jako takové, ale neumožňovaly úspornou realizaci logické funkce. Mezi první programovatelné logické obvody lze zařadit obvody PLA (angl. *Programmable Logic Array*), neboť v roce 1970 společnost Texas Instruments - TI podařilo vyvinout maskou programovatelný integrovaný obvod TMS2000, založený na paměti ROAM (angl. *Read Only Associative Memory*) společnosti IBM. TMS2000 disponoval 17 vstupy, 18 výstupy s 8 JK klopnými obvody. Obvod bylo možné programovat modifikací vodivé propojovací masky během výroby (tj. koncový uživatel jej nemohl programovat). Obvody PLA obsahovaly pole hradel AND následované polem hradel OR. Logická funkce tedy vznikala v disjunktivní formě, tj. jako součet součinů. Tento způsob tvorby logické funkce se uchytil a na tomto principu je založena funkce dnešních obvodů architektur SPLD a CPLD. Nicméně se tyto obvody na trhu příliš neprosadily.

Vývoj však pokračoval dál a v roce 1975 přišla na trh firma Signetics Corporation s obvody nazvanými FPLA - (*Field Programmable Logic Array*), konkrétně se

jednalo o obvod 82S100. Po převzetí firmy Signetics firmou Philips byl tento obvod označován také jako PLS100. Obvody FPLA tvořilo programovatelné pole AND následované programovatelným polem hradel OR. Tyto obvody však měly poměrně dlouhou dobu přenosu signálu ze vstupu na výstup. Pro návrh obvodů neexistoval žádný jazyk, a tak musel návrhář nastavovat přímo hodnoty jednotlivých programovatelných buňek. Tyto nevýhody spolu s poměrně vysokou cenou způsobili malé rozšíření těchto obvodů.

Dalším významným krokem bylo uvedení obvodů PAL - (*Programmable Logic Array*). Tyto obvody navrhla firma MMI - Monolithic Memories, Inc v roce 1978. Obvody PAL vycházeli z obvodů FPLA a obsahovaly programovatelné pole hradel AND, které bylo následováno pevným neprogramovatelným polem hradel OR. Ke každému hradlu OR tak bylo možno připojit pouze omezený počet výstupů hradel AND (součinů). Díky tomuto zjednodušení došlo ke snížení doby přenosu signálu ze vstupu na výstup. Oba tyto typy obvodů FPLA i PLA byly totiž založeny na bipolární PROM technologii s programovatelnými pojistkami tzv. *fusible-link*. Programování bylo realizováno vstříknutím dostatečně velkého náboje, který způsobil přepálení vybrané vnitřní pojistky. Zbývající neporušené pojistky se staly součástí implementovaného číslicový obvodu. Pojistky ovšem zvyšují zpozdění signálu v obvodu, zvětšují složitost a ve výsledku i cenu. Počet součinů, které byly připojeny na vstup hradla OR, byl na základě praktických zkušeností stanoven na osm. Velkou výhodou těchto obvodů bylo, že se daly programovat v tehdy již běžných programátorech pamětí PROM. Mezi první obvody řady PAL patří například PAL16L8 (komboinační výstupy) a PAL16R8 (výstupy s registry).

Firma MMI dále napsala pro tyto obvody návrhový software, který umožňoval popsat číslicový systém pomocí velmi jednoduchého jazyka ve formě booleovských rovnic a z něj pak vygenerovat výstup, jímž bylo možné obvody PAL naprogramovat. Tím došlo k významnému zjednodušení vlastního návrhu obsahu těchto obvodů. Tento software se jmenoval PALASM (*PAL Assembler*) a firma MMI ho zveřejnila ve formě zdrojového kódu napsaného v jazyce FORTRAN. Program PALASM umožňoval dokonce softwarovou simulaci navrženého obvodu. Díky funkcím návrhu a simulace lze PALASM označit za první návrhový systém pro PLD obvody. Všechny zmíněné obvody dnes řadíme do první generace PLD obvodů. Za zmínu ještě stojí, že firmy **Signetics Corporation** a **MMI** již mezi dnešními výrobci programovatelných obvodů nenajdeme.

Vývoj v oblasti PLD obvodů pokračoval a postupně se začaly objevovat nové PLD obvody, které řadíme již do druhé generace. V roce 1983 uvedla firma AMD (*Advanced Micro Devices*) obvod PAL22V10. Tento obvod byl založen na obvodech PAL popsaných v předchozím odstavci, přinesl však jedno významné vylepšení, a to tzv. **výstupní makrobuňku** (OLMC - angl. *Output Logic Macro Cell*). Tyto obvody bývají označovány jako obvody PAL s makrobuňkou. Výstupní makrobuňka byla umístěna na každém výstupu obvodu. Každou makrobuňku bylo možné naprogramovat buď jako kombinační nebo registrový výstup. Dále bylo možné u jakékoli makrobuňky programovat, zda má být

výstup v přímé nebo negované formě. Výstup makrobuňky byl třístavový, ovládaný jedním logickým součinem, což umožňovalo přepnutí makrobuňky z výstupního režimu do funkce vstupu. Tento typ obvodu vyrábělo svého času kromě firmy AMD mnoho dalších firem, např. Cypress Semiconductor, Lattice Semiconductor a Texas Instruments.

Všechny dosud zmíněné obvody měly jednu nevýhodu - byly programovatelné pouze jednou (OTP - *One Time Programmable*). Díky rozvoje technologie u pamětí EPROM se dostala tato technologie i do oblasti PLD obvodů a tudíž se na trhu objevili PLD obvody, jejichž obsah bylo možné smazat pomocí ultrafialového záření - obvody lze opakovaně mazat a znova programovat.

V roce 1984 vstoupila na scénu firma DATA I/O se svým návrhovým systémem **ABEL**, jenž disponoval jazykem vyšší úrovně, určený pro popis číslicových systémů (HDL - *Hardware Description Language*), který byl nazván stejně jako návrhový systém, tj ABEL - *Advanced Boolean Expression Language*. Jazykem ABEL lze popsat číslicový systém pomocí booleovských rovnic, pravdivostní tabulky a stavových automatů, přičemž tyto způsoby je možné kombinovat. Práva na jazyk ABEL získala po několika akvizicích firma XILINX. Tento jazyk již sedmou revizi a dodnes ho některé současné návrhové systémy podporují (např. Xilinx a Lattice Semiconductor). Pro návrh nových číslicových systémů založených na PLD obvodech se však doporučuje používat některý z novějších HDL jazyků, např. jazyk VHDL nebo jazyk Verilog.

Další vývoj PLD obvodů pokračoval s nástupem technologie pamětí EEPROM a jejím využití v PLD obvodech. Této nové technologie bylo využito zejména u PLD obvodů označovaných jako GAL - *Generic Array Logic*. Obvody GAL lze zařadit do třetí generace PLD obvodů. Obvody typu GAL jsou také zařazovány do třídy jednoduchých programovatelných obvodů (SPLD).

Na konci osmdesátých let minulého století nastává v oblasti PLD obvodů bouřlivý vývoj. Vývojem a výrobou PLD se na konci osmdesátých a začátkem devadesátých let již zabývá mnoho firem a vývoj PLD obvodů již nelze od této doby přehledně rozdělit ani stručně popsat. V průběhu tohoto období vznikají nové řady PLD obvodů, nazývané CPLD - *Complex Programmable Logic Device*. Jmenujme např. alespoň obvody MACH firmy AMD a dále vznik první řady obvodů MAX, kterou společně vyvinula firma ALTERA a Cypress Semiconductor. Nové obvody v této době na trh uvádí také firma XILINX (řady XC7200 a XC7300), QuickLogic, Lattice Semiconductor a tak by bylo možné pokračovat dál a dál. Z uvedeného je vidět, že cesta vývoje PLD obvodů nebyla a není ani dnes nijak přímočará a byla navíc od svých počátků provázena soudními spory firem o patentová práva a tato situace trvá dodnes.

Lze však říci, že od začátku devadesátých let vyvíjí většina firem dvě od sebe velmi odlišné architektury PLD obvodů. První je architektura CPLD obvodů, založená na

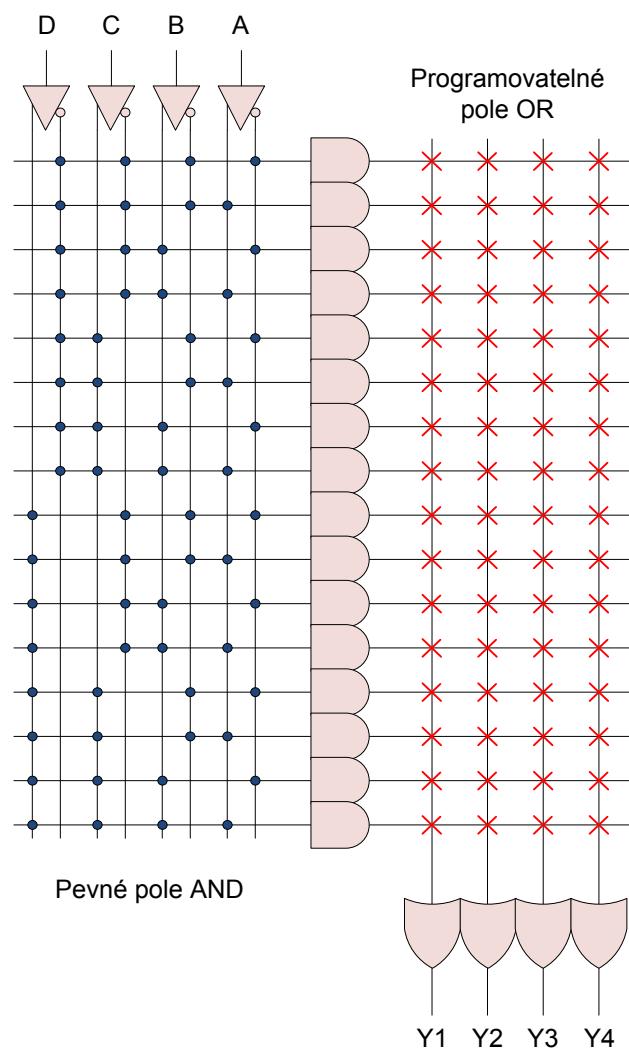
programovatelné matici hradel AND, hradlech OR a makrobuňkách (vychází tedy z původní koncepce obvodů PAL) a na programovatelných místech používá buňky EEPROM nebo FLASH.

Kvůli rostoucí velikosti obvodů se začalo později místo rozšiřování logických funkcí užívat spíše skládání více matic PLD obvodů do jednoho pouzdra. Vznikly tak obvody, které dnes nazýváme CPLD (*Complex Programmable Logic Device, Altera, 1988*). Od CPLD byl už pak jen malý krok k prvním FPGA obvodům (*Xilinx, 1984*). Dnes dostupná FPGA se ovšem od architektur z poloviny osmdesátých let významně odlišují. Trendem je pozvolný příklon k hrubozrnným architekturám; obvodům, které kromě elementárních programovatelných logických bloků obsahují také další komplexní podpůrné bloky.

41.1.2 Obvody typu Simple Programmable Logic Device

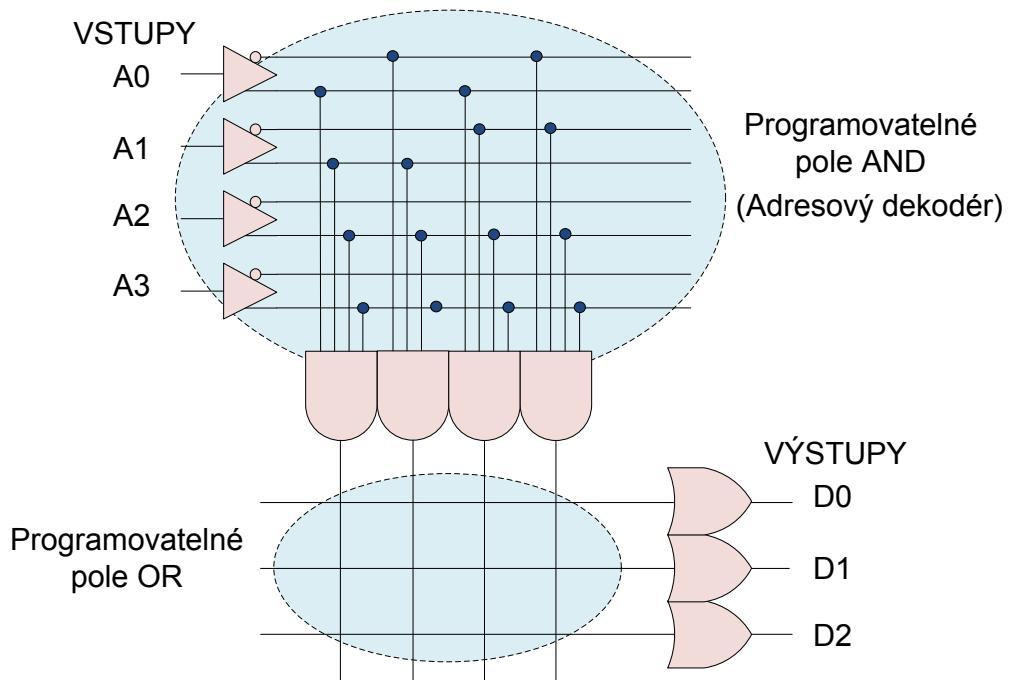
41.1.2.1 Programmable Read Only Memory (PROM)

Po mnoho let nebyly obvody PROM *Programmable Read Only Memory* zařazovány do skupiny programovatelných logických obvodů, ačkoliv většina nejmenších PROM (např. 32x8) byly používány jako logické prvky (dekodéry, převodní tabulky kódů, znakové generátory).



Obrázek 41.1.1: PLD typu Programmable Read Only Memory (PROM)

Obvody PROM představuje matici paměťových buněk, jejíž řádky jsou adresovatelné vstupní signály a datové sloupce představují výstupní signály. Počet adresových a datových signálů determinuje rozměr matice. Např. 4 vstupní signály umožňují adresaci 16 řádků, 4 datové signály indikují, že každý řádek se skládá ze 4 paměťových buněk. Z pohledu architektury obvodů PLD obsahují PROM pevné propojovací pole hradel AND, následované programovatelným polem hradel OR (viz obr. 41.1.1)



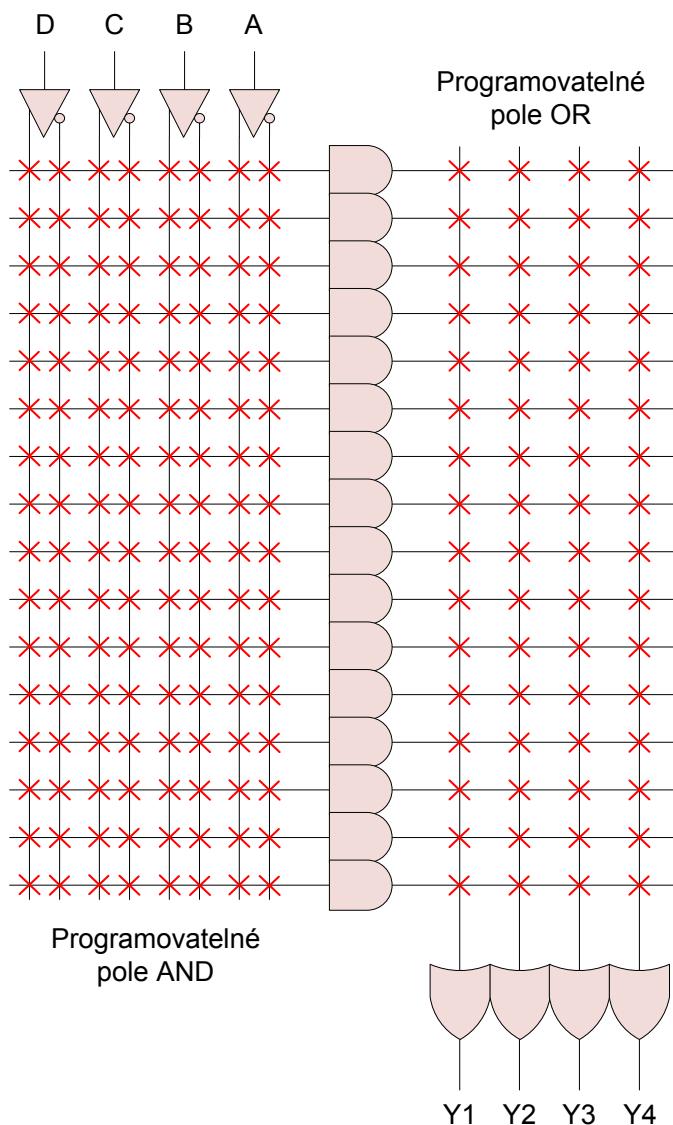
Obrázek 41.1.2: Schéma obvodu PROM

Všeobecně platí, že obvody PROM jsou nevhodnějším kandidátem implementace takových aplikací, které vyžadují, aby na každou kombinaci vstupních signálů byla jiná odezva výstupních signálů. Překážkou je omezení počtu vstupních signálů, eventuálně je limitující také velikost programovatelné matice. Její velikost se přidáním nového vstupu vždy zdvojnásobí (omezení počtu vstupních signálů jistým způsobem řeší obvody typu PAL viz kap. 41.1.2.3)[LŠS93, s. 59].

Na obr. 41.1.2 je uvedena architektura obvodu PROM prostřednictvím symboliky obvodů PLD. Každý term odpovídá jedné z jeho adres. Programovatelná hradlo OR odpovídají datovým bitům obvodu PROM (výstupní slovo). Např. PROM velikosti 32×8 představuje obvod PLD s 5 vstupy, 32 součinovými termi ($32 = 2^5$) a 8 programovatelnými výstupními OR hradly.

41.1.2.2 PLD typu Programmable Logic Array (PLA)

Obvody PLA(*Programmable Logic Array*) patří k průkopníkům v oblasti programovatelných logických polí. Obsahují programovatelné pole hradel AND a zároveň i programovatelné pole hradel OR (viz obr. 41.1.3). Vstupní signály jsou přivedeny v přímém i invertovaném stavu do pole AND hradel.



Obrázek 41.1.3: Architektura obvodů PLA

Oproti obvodům PROM, mají obvody PLA toto pole programovatelné, takže je možné snadno vytvořit součinové termíny z libovolné kombinace vstupních (přímých i

negovaných) signálů. Součinové termy jsou přivedeny do programovatelného pole OR hradel, které umožňuje připojení libovolného termu k libovolnému hradlu OR. Jeden term může být přiveden na vstup i několika hradel OR. Na jejich výstupu je formována požadovaná logická funkce ve tvaru "součtu součinů".

Je-li obvod PLD vybaven programovatelným polem AND, jako je tomu u obvodů PLA (a i např. u PAL kapitola [41.1.2.3](#)), může být využita pouze polovina programovatelných spínačů propojovacího pole. Tato skutečnost je zřejmá, protože vstupní signály jsou do pole přivedeny v přímém i invertovaném tvaru a v žádném součin se nemůže současně vyskytovat přímý i invertovaný signál (součin by vždy nabýval hodnoty logická nula). Takže nejméně polovina (a v praxi i více, protože všechny součiny vždy neobsahují všechny veličiny) není při konstrukcích logických funkcí využita. Je tedy zřejmé, jak neefektivně je využita plocha křemíkového čipu, na kterém je obvod typu PLA realizován. Tato skutečnost stimuluje další vývoj a vznik nových architektur obvodů PLD [[LŠS93](#), s. 63].

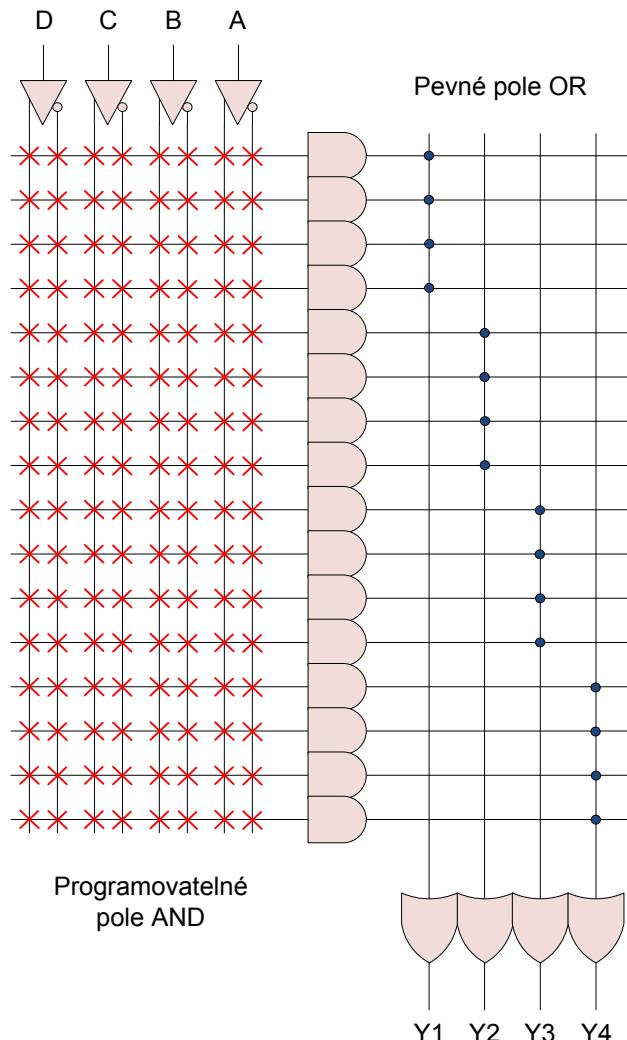
41.1.2.3 PLD typu Programmable Array Logic (PAL)

Obvody typu PAL jsou dalším z typů programovatelných logických obvodů. Jsou to PLD obvody s programovatelným polem hradel AND a pevným poler hradel OR. K jednomu hradlu OR lze připojit pouze omezený počet součinových termů, přičemž nelze současně jeden term připojit k několika hradlům OR.

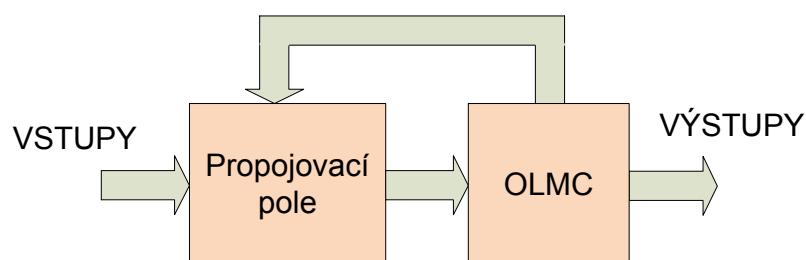
Jednoduší architektura oproti v té době existujícím FPLA obvodům, umožnila zkrácení doby přenosu signálu. Obvody PAL byly navrženy tak, aby "vypadaly" jako standardní obvody PROM a mohly tak být programovány standardními programátory obvodů PROM. Tím se výrobci obvodů PAL vyvarovali požadavků na dodatečné vývojové prostředí, jak tomu bylo v době uvedení na trh v případě FPLA obvodů.

41.1.2.4 PLD typu Simple Programmable Logic Device - SPLD

Obvody typu GAL (*Generic Array Logic*) patří do skupiny elektricky reprogramovatelných obvodů PLD (EEPLD - *Electrically Erasable Programmable Logic Device*). Z hlediska klasifikace PLD obvodů lze obvody GAL charakterizovat jako obvody s programovatelným polem AND hradel a pevným polem hradel OR. Významná odlišnost od obvodů PAL spočívá v možnosti elektrického reprogramování a využití makrobuňky (Output Logic Macrocell) na výstupech obvodu.



Obrázek 41.1.4: Architektura obvodů PAL



Obrázek 41.1.5: Obecná struktura obvodu GAL

41.1.3 Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD

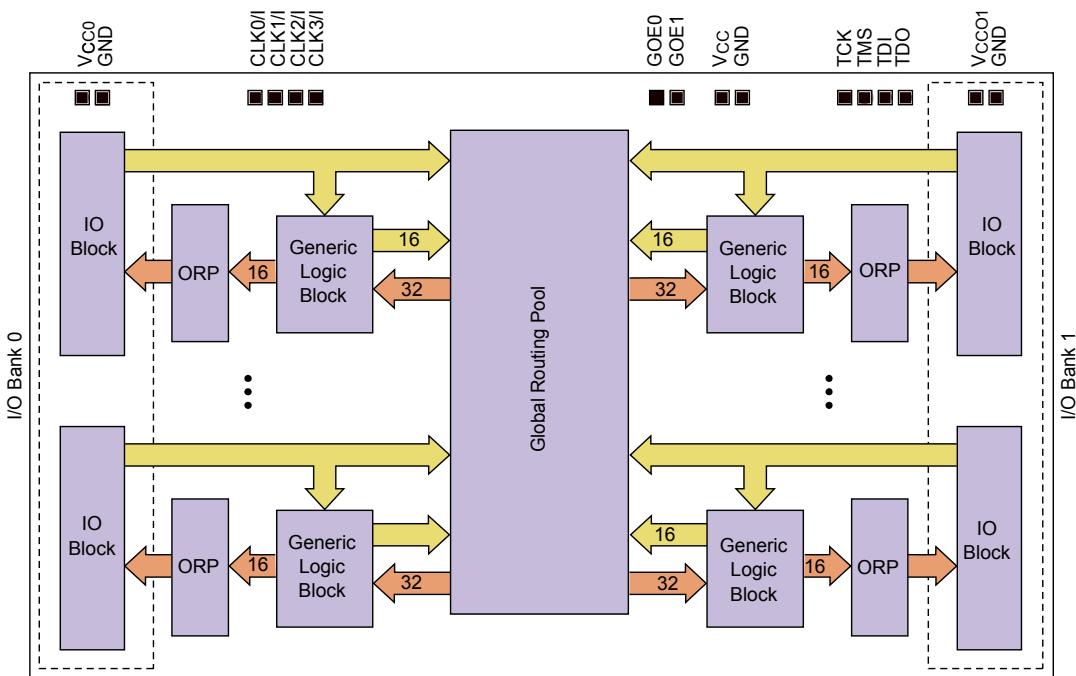
Obvody typu CPLD patří podobně jako obvody SPLD do skupiny elektricky reprogramovatelných PLD obvodů (EEPLD). Většina CPLD obvodů je programovatelná v cílovém systému, nesou tedy i označení ISP (*In-system programming*). Tyto obvody jsou typické, podobně jako obvody GAL, svou programovatelnou maticí hradel AND následovanou hradlem OR a makrobuňkou. Na výstupu hradla OR je tak stejně jako u obvodů GAL formována pořadovaná logická funkce ve tvaru *součtu součinů*. Od obvodů GAL se však obvody CPLD liší hlavně velkým centrálním propojovacím polem. Makrobuňky jsou sdruženy do větších skupin a tvoří tzv. **funkční bloky** [Pino6, p 279]. Pro architekturu obvodů CPLD jsou charakteristické tyto čtyři struktury:

- velké centrální propojovací pole (*Global Routing Pool*),
- programovatelné funkční bloky (*Generic Logic Block - GLB*), uspořádané kolem propojovacího pole, sestávající z:
 - programovatelné matice AND,
 - několika makrobuňek,
 - alokátoru součinů,
- výstupní propojovací pole (*Output Routing Pool - ORP*),
- vsutpní/výstupní bloky (*I/O Blocks*).

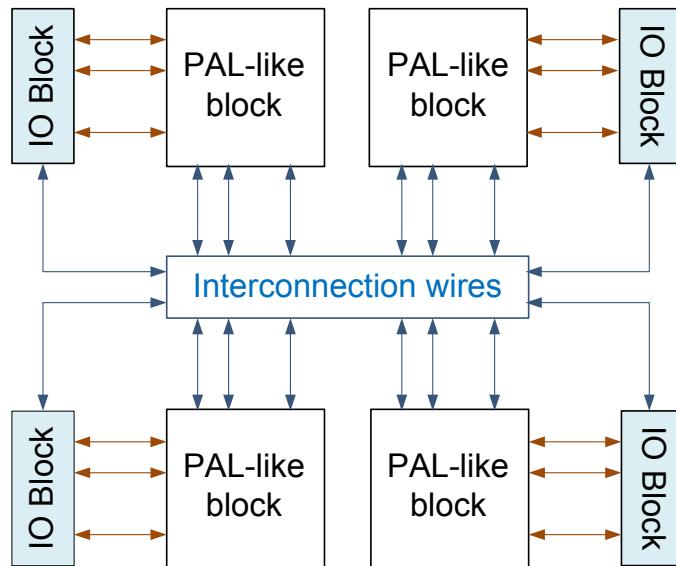
Všechny výše uvedené stavební prkny mají u různých výrobců různá označení, jejich význam a funkce je však velmi podobná. Pomocí makrobuňek lze realizovat různě složité kombinační a sekvenční logické či paměťové funkce. Přes programovatelné **vstupní/výstupní bloky** lze přivádět vstupní signály z vývodů obvodu nebo naopak vyvádě výstupní signály. Na rozdíl od jednodušších SPLD, kde vstupní/výstupní obvody jsou přímo spojeny s makrobuňkou, jsou však u CPLD zásadně od makrobuňek odděleny a tvoří samostatný I/O blok, do kterého mohou výstupní signály z makrobuňek vstupovat přes programovatelné **výstupní propojovací pole**. Tím se všeobecně zlepší využití jak makrobuňek, tak výstupních obvodů.

Všechny vstupní/výstupní bloky a všechny makrobuňky lze spolu vzájemně propojit pomocí **centrálního programovatelného propojovacího pole**.

41.1.4 Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA



Obrázek 41.1.6: Architektura CPLD ispMACH4000 společnosti Lattice



Obrázek 41.1.7: Obecná struktura obvodu CPLD

41.1.5 Terminologie

- **PLA** — *Programmable Logic Array* nebo také **FPLA** *Field Programmable Logic Array*: Obvod obsahuje matici AND za nímž následuje matice OR, jež jsou obě programovatelné.
- **PAL** - *Programmable Array Logic*¹: Relativně jednoduchý PLD obvod obsahující programovatelnou matici AND, za níž následuje pevná matici OR (obr.41.1.4).
- **SPLD** — *Simple programmable logic device*: Označení je společné pro PLA a PAL struktury.
- **CPLD** — *Complex programmable logic device*: Název zahrnuje obvody jejichž složitost je někde mezi architekturami obvodů PAL a FPGA a nese rysy obou těchto architektur. Základním stavebním blokem je tzv. *makrobuňka*, která realizuje logický výraz ve tvaru normální disjunktivní formy.
- **FPGA** — *Field-Programmable Gate Array*: Obvody mají z programovatelných obvodů nejobecnější strukturu a obsahují nejvíce logiky. Základním stavebním blokem jsou logické buňky (*logic elements*; Altera), nebo také řezy (*slices*; Xilinx), jež jsou zpravidla sdruženy do větších logických bloků² (*logic array block*, LAB; Altera) resp.

¹obchodní známka je v současnosti ve vlastnictví společnosti Lattice Semiconductor

²Výrobci FPGA obvodů používají vlastní názvosloví k popisu jejich architektur.

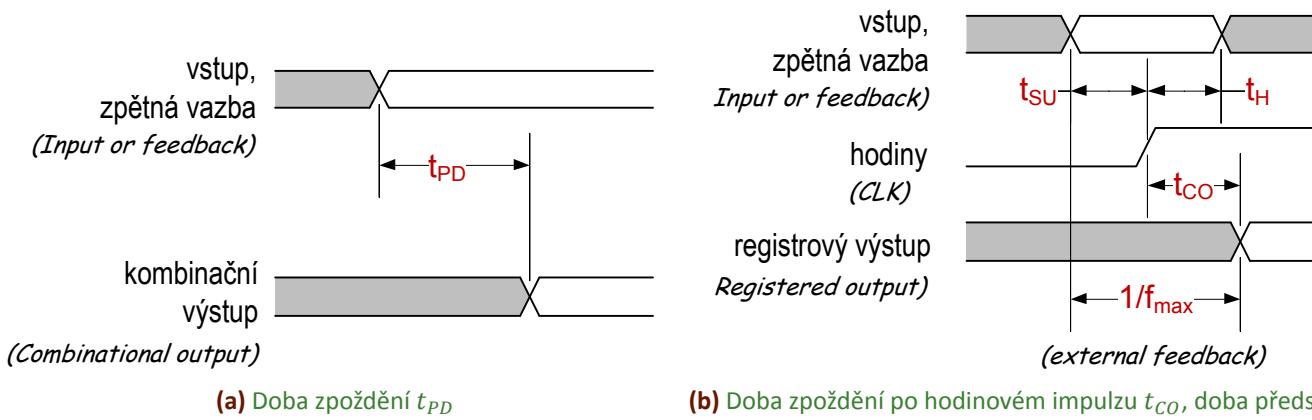
(*configurable logic block*, CLB; Xilinx). Logické buňky obsahují tzv. vyhledávací tabulkou (*Look-up table*, LUT), která dovoluje realizovat jednoduché kombinační funkce. LUT má obvykle čtyři vstupní signály, které mají význam indexu (pointeru) do této tabulky. K propojení CLB slouží programovatelná propojovací struktura PI (*programmable interconnect*).

41.2 Dynamické parametry PLD

Programovatelné logické obvody mohou pracovat jako obvody kombinační, nebo častěji jako obvody sekvenční [Wak99, p 593]. Symboly pro doby jenž jsou dále popsány, se v různých firemních publikacích liší, význam však zůstáva.

- t_{PD} - *doba zpoždění* - ve funkci kombinančního obvodu t_{PD} je doba od změny signálů na vstupech obvodu do změny signálů na jeho výstupech. Je podstatná pro režim bez hodinových impulzů u ryze kombinančního obvodu. U sekvenčního obvodu *Mealyho* typu je to zpoždění obvodu v době mezi hodinovými impulzy,
- t_{CO} - *doba zpoždění po hodinovém impulzu* - doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu,
- t_{CF} - opět se jedná o zpoždění jako v předchozím případě, tj. je to doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu registru, jenž je ovšem veden jako zpětnovazební vstup. Běžně platí, že $t_{CF} < t_{CO}$ a pokud jej výrobce neuvádí, lze předpokládat $t_{CF} = t_{CO}$
- t_{SU} - *doba předstihu* - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní až do aktivní hrany hodinového impulzu,
- t_H - *doba přesahu* - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní po aktivní hraně hodinového impulzu,
- f_{max} - *maximální kmitočet hodinových impulzů* - Je to nejvyšší frekvence, na které zařízení může pracovat spolehlivě a je ekvivalentní k převrácené hodnotě minimální periody hodinových impulzů.

Dynamické parametry u programovatelných logických obvodů jsou závislé na vnitřních cestách signálů. U obvodů CPLD je situace jednodušší, neboť cesty signálů jsou do jisté míry pevně dány a jedná se jen o jejich výběr. Výrobci uvádějí korekční vztahy pro výše uvedené doby, kterými jsou respektovány logické zátěže a způsob využití vnitřních bloků. Složitější situace je u obvodů FPGA, kde cesty signálů nejsou předem definovány a v procesu návrhu budou teprve vyvrtány. Jednotlivé doby proto musí dodatečně doložit návrhový systém [Pino6, p 288].



Obrázek 41.2.1: Základní dynamické parametry PLD: t_{PD} , t_{CO} , t_{CF} , t_{SU} , t_H , f_{max}

References

- [LŠS93] M. Líška, V. Šula, and J. Strelec. *Programovatelná logická pole*. Grada Publishing, spol. s.r.o., 1993, p. 456. ISBN: 80-85623-26-9 (cit. on pp. 417, 419).
- [Pin06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on pp. 421, 425).
- [Wak99] J. F. Wakerly. *Digital Design Principles and Practices*. PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. 425).

Kapitola 42

Jazyk VHDL

Obsah

42.1 Návrh číslicového obvodu	428
42.1.1 Popis číslicové funkce	428
42.2 Úvod	429
42.3 Základní vlastnosti jazyka VHDL	430
42.4 Logické úrovně	431
42.5 Souběžné příkazy	432
42.6 Sekvenční příkazy	433
42.7 Technologicky nezávislá část návrhu	433
42.7.1 Dynamicky řízené sekvenční obvody	433
42.7.2 Staticky řízené sekvenční obvody	434
42.7.3 Kombinační obvody	434
42.8 Knihovna LPM	434
42.8.1 Posuvný registr - lpm shiftreg	434

42.1 Návrh číslicového obvodu

42.1.1 Popis číslicové funkce

Máme-li představu o funkci a struktuře budoucího číslicového obvodu, nastupuje proces *zachycení návrhu* (design entry, design capture), při kterém je nutné naše představy přenést do počítačem zpracovatelné formy. Tuto úlohu, lze splnit na různých úrovních abstrakce [Šťa10, s. 19]:

- **hradlové/schématické** - navrhujeme přímo kreslením schématu budoucího obvodu. Výhodou tohoto postupu je jeho srozumitelnost a zachycení skutečné podoby návrhu - co máme ve schématu je to, co se realizuje. Nevýhody nicméně převyšují výhody. Kreslení schéma je obvykle specifické pro zvolený obvod, protože často používáme struktury, které jsou k dispozici jen na příslušném PLD obvodu. Konverze do jiného obvodu, znamená překleslení schématu. Vlastní proces kreslení je pomalý a únavný, protože pracujeme na nízké úrovni abstrakce - kreslíme obvod hradlido po hradle. Chceme-li například realizovat stavový automat, musíme nejprve zminimalizovat jeho přechodovou a výstupní funkci a pak nakreslit schéma. Snadno se můžeme dostat do situace, kdy je nutné kompletní překreslení.
- **meziregistrových přenosů** - tzv. RTL (*Register Transfer Level*). RTL popis je dnes standardním prostřekdem pro popis číslicové funkce. Číslicové synchronní obvody se skládají ze dvou základních typů logických bloků: paměťových prvků (registru) a kombinačních funkcí. Na úrovni abstrakce, číslicový obvod popisujeme tak, že jednotlivé struktury popíšme pomocí těchto dvou typů logiky a doplníme informací o jejich vzájemném propojení (odkud, kam a přes jaké kombinancí logické funkce jsou přelévána data mezi registry). Popis obvodu je realizován v textové podobě pomocí zápisu ve speciálním programovacím jazyku (HDL - *Hardware Description Language*). Pro popis se používají nejčastěji jazyk VHDL a Verilog. Použití RTL úrovně má nesporné výhody: získáme technologicky nezávislý popis obvodu na relativně vysoké úrovni abstrakce, přičemž jeden řádek zdrojového kódu je v hardware reprezentován typicky desítkami/stovkami hradel. To zvyšuje produktivitu práce, zpřehledňuje vlastní návrh, zjednoduší přenos návrhu mezi různými technologiemi a zrychluje jak vlastní návrh, tak pozdější opravy. Jedinou nevýhodou je nevhodnost pro ryze asynchronní návrh, to ale není při práci s hradlovými poli omezující, neboť hradlová pole jsou určena právě pro synchronní číslicové obvody.
- **algoritmické** - neustále se zkracující délka návrhového cyklu spolu s rostoucí komplexitou navrhovaných systémů nutí návrháře používat stále vyšší úrovně abstrakce.

Architektura na RTL úrovni je navrhována vždy s ohledem ke skutečnému časování obvodu a použitěm paralelizmu. Systém je na této úrovni narvržen s odpovídajícím počtem výpočetních jednotek, řídicích bloků, sběrnic, apod. Problém nastává v okamžiku, kdy v pozdějších fázích návrhu zjistíme, že navržená architektura nesplňuje očekávání. Právě odstranění informace o paralelismu a časování ze zdrojového kódu je přínosem *algoritmické syntézy*. Funkce bloku je popsána v některém z jazyků na "vyšší úrovni" - např. ANSI C, Handel-C, SystemC, nebo System Verilogu. Příslušný syntézní nástroj pak dostane informaci o počtu funkčních jednotek a časování ve formě jednoduchých omezení (například povolíme použít nejvíše dvou násobiček a dvou sčítáček) a na základě předloženého algoritmu vygeneruje RTL kód výsledného systému (datových cest i řídicích bloků). Každá změna v architektuře je triviální - zjistíme-li, že výpočetní výkon systému je příliš nízký, stačí jen znova spustit syntézní proces s jiným počtem aritmetických jednotek. Rychlosť celého procesu umožňuje vyzkoušet celou řadu alternativ architektury a najít nejvhodnější kompromis mezi plochou a rychlosťí obvodu. Zjednodušuje se i verifikace. Použitelnost algoritmické syntézy zatím omezuje fakt, že výsledek není tak dobrý v porovnání s návrhem od profesionála.

42.2 Úvod

Název VHDL představuje akronym — VHSIC Hardware Description Language. Samo označení VHSIC je další akronym představující název projektu, v rámci něhož byl jazyk VHDL zpracován, a znamená Very High Speed Integrated Circuits. I když označení VHDL v tomto kontextu není příliš přiléhavé, vžilo se a obecně se používá. Jazyk VHDL byl původně využit především pro modelování a simulaci rozsáhlých systémů. Na mnoha jeho konstruktech je to znát, některé z nich nemají pro syntézu vůbec význam. Zde se však budeme zabývat především použitím jazyka VHDL k vytváření modelů určených pro syntézu číslicových systémů. České termíny budou v prvním výskytu zapsány tučně. Často tyto termíny nejsou ustálené, a proto budeme uvádět i jejich anglické ekvivalenty, které již většinou mají ustálenou podobu.

42.3 Základní vlastnosti jazyka VHDL

- Je to otevřený standard (*open standard*). K jeho použití pro sestavení návrhových systémů není třeba licence jeho vlastníka, jako je tomu u jiných jazyků HDL (například u jazyka ABEL). To je jeden z důvodů, proč je tento jazyk v návrhových systémech často používán.
- Umožňuje pracovat na návrhu, aniž je předtím zvolen cílový obvod. Ten může být zvolen až v okamžiku, kdy jsou známy definitivní požadavky na prostředí, v němž má navrhovaný systém pracovat, a je možno cílový obvod měnit podle potřeby při zachování textu popisujícího systém, může být zvolen obvod PLD nebo FPGA (*Device-independent design*).
- Je možno provést simulaci navrženého obvodu na základě téhož zdrojového textu, který pak bude použit pro syntézu a implementaci v cílovém obvodu. Zdrojový text je možno zpracovávat v různých simulátorech a v syntetizérech různých výrobců. Odsimulovaný text může být použit v dalších projektech s různými cílovými obvody, což je podporováno hierarchickou strukturou jazyka. Této vlastnosti jazyka se říká přenositelnost (*portability*) kódu.
- V případě úspěšného zavedení výrobku na trh lze popis modelu systému v jazyku VHDL použít jako podklad pro jeho implementaci do obvodů **ASIC** vhodných pro velké sérii.

Některé námítky proti VHDL:

- Jazyk VHDL je dosti „upovídaný“, jazykové konstrukty nejsou navrženy tak, aby zdrojový text byl stručný a při popisu modelu určitého systému se setkáme s opakováním bloků stejného znění. Ty je však možno snadno vytvářet využitím kopírování a podobných možností současných editorů.
- V jazyku VHDL je možno vytvořit neefektivní konstrukce, efektivnost nebo její nedostatek nemusí být na první pohled ze zdrojového textu patrné. To je však vlastnost i jiných jazyků vyšší úrovně a výsledná efektivnost konstrukce závisí nejen na kvalitě programových návrhových prostředků, ale také na zkušenosti konstruktéra (návrháře).

Základní verze jazyka VHDL byla přijata jako standard IEEE číslo 1076 v roce 1987. Konstrukty odpovídající tomuto standardu se označují jako konstrukty jazyka VHDL-87. Podobně jako další standardy IEEE, i tento standard se v pravidelném pětiletém intervalu

aktualizuje. Upravená verze standardu byla přijata v roce 1993, odkazuje se na ni jako na standard VHDL - 93.

Vedle jazyka VHDL se setkáme také s jazykem Verilog, který má podobné použití. Uvádí se, že jazyk VHDL je rozšířený zejména v Evropě, zatímco Verilog se používá hlavně v asijských zemích. V USA se používají oba tyto jazyky.

Vyjadřovací schopnosti jazyku VHDL jsou dány příkazy, jenž mají souběžný nebo sekvenční charakter. Některé příkazy jsou jen jednoho druhu, jiné mohou být obojího druhu. Toto rozlišení se týká toho, ve které části popisu se příkazy mohou používat. Pro stručnost budeme dále mluvit o souběžných a o sekvenčních příkazech, i když jde spíše o to, kde se tyto příkazy nacházejí či mohou nacházet. V následujících kapitolách jsou příkazy rozděleny do dvou velkých skupin:

- **Souběžné příkazy** (*concurrent statements*): zapisují se v textu jazyka mimo procesy, definice funkcí a procedur.
- **Sekvenční příkazy** (*sequential statements*): slouží k algoritmickému vyjádření popisu. Tyto příkazy mohou být zapsány jen v procesech, v definicích funkcí a procedur.

42.4 Logické úrovně

Od jazyka určeného k návrhu a modelování integrovaných obvodů očekáváme schopnost modelovat základní logické úrovně - *log. 0* a *log. 1*. Ty jsou pro jednoduché simulace postačující, ale již například pro návrh a modelování třístavových budičů sběrnic potřebujeme mít možnost pracovat se stavem vysoké impedance *Z*. Dalším jednoduchým příkladem může být modelování zkratu na sběrnici, který může vzniknout v situaci, kdy dva budiče budí jeden spoj opačnými logickými úrovněmi. Balíček *std_logic_1164* knihovny IEEE pro tyto účely zavádí *devítistavovou logiku*.

- 'U': uninitialized. This signal hasn't been set yet.
- 'X': unknown. Impossible to determine this value/result.
- 'o': logic 0
- '1': logic 1
- 'Z': High Impedance

- 'W': Weak signal, can't tell if it should be 0 or 1.
- 'L': Weak signal that should probably go to 0
- 'H': Weak signal that should probably go to 1
- '-': Don't care.

Všimněme si, že tato knihovna je připojena všemi ukázkovými kódy. Logický signál, který má popsaných hodnot nabývat, je pak definován jako signál typu `std_logic`, nebo `std_logic_vector` pokud se jedná o sběrnici. Pomocí nich modelujeme standardní propojení logických prvků, tj. "obyčený kus drátu". [[Šta10](#), s. 51]

42.5 Souběžné příkazy

42.6 Sekvenční příkazy

42.7 Technologicky nezávislá část návrhu

V následujícím textu jsou uvedeny základní způsoby popisu chování sekvenčních (např. klopné obvody) a kombinačních obvodů. Klopné obvody jsou rozdělovány na **hranově citlivé** a **úrovňově citlivé**. Je možné je popsat jako *jednobitové paměti*. Hranově citlivý klopný obvod je obvod řízený změnou na vstupu synchronizace (*clock input*). Bývá označován "*flip-flop*". Úrovňově citlivý klopný obvod je nazýván v české terminologii *zdrž*. Obvykle je však srozumitelný anglický název "*latch*".

42.7.1 Dynamicky řízené sekvenční obvody

Obvody řízené změnou signálu na vstupu synchronizace jsou ve VHDL popisovány použitím příkazu `process` a podmíněného příkazu `if`. V podmíněném příkazu jsou rozlišovány události (`events`), které znamenají vzestupnou hranu nebo sestupnou hranu signálu na vstupu synchronizace. Při popisu je možné použít dvou různých zápisů, ve kterých se objevuje atribut události synchronizačního signálu `clk'event` nebo volání funkce.

- `(clk'event and clk='1')` vzestupná hrana signálu
- `(clk'event and clk='0')` sestupná hrana signálu
- `rising_edge(clk)` volání funkce vzestupné hrany
- `falling_edge(clk)` volání funkce sestupné hrany

Uvedené příklady ukazují možnosti vyjádření vzestupné a sestupné hrany ve VHDL. Vyjádření pomocí atributu je častěji používané, protože tento konstrukt je rozeznatelný při syntéze obvodového řešení. Nicméně použití volání funkce je výhodnější při simulaci, protože nastává pouze při změně signálu `clk` z $0 \rightarrow 1$ a z $1 \rightarrow 0$, ale ne z $X \rightarrow 1$ nebo z $0 \rightarrow X$, které nepředstavují platný přechod z jednoho stavu do druhého. Devět hodnot signálu, které jsou označované jako `std_logic` jsou určeny k modelování poruchových stavů logické sítě. Jsou to hodnoty '`U`', '`X`', '`0`', '`1`', '`Z`', '`W`', '`L`', '`H`', '`-`'.

42.7.2 Staticky řízené sekvenční obvody

V následujících odstavcích jsou popisovány klopné obvody řízené úrovní synchronizačního signálu, které jsou známé pod názvem **zdrž** (*latch*).

42.7.3 Kombinační obvody

42.8 Knihovna LPM

Knihovna **LPM** (angl. *Library of Parametrized module*) obsahuje parametrizovatelné moduly jako jsou hrada, čítače, multiplexory, klopné obvody, aritmetické a paměťové funkce.

Standard LPM byl navržen v roce 1990 jako jedna z možností pro efektivní návrh číslicových systémů do odlišných technologií, jako jsou např. obvody PLD, hradlová pole a standardní buňky. Předběžná verze standardu vyšla v roce 1991, další úprava předběžné verze pak v roce 1992. Standard byl přijat organizací EIA (angl. *Electronic Industries Alliance*) v dubnu roku 1993 jako doplněk do standardu EDIF.

EDIF je formát pro přenos návrhu mezi návrhovými nástroji různých výrobců. Formát EDIF popisuje syntaxi, která reprezentuje logický netlist. LPM do něj pak přidává množinu funkcí, která popisuje logické operace netlistu. Před rozšířením o LPM musel každý EDIF netlist typicky obsahovat technologicky specifické logické funkce, které zabranovaly tomu, aby byl návrh ve větší míře nezávislý na cílové technologii [Pino06, s. 72].

42.8.1 Posuvný registr - lpm shiftreg

```
1 ____* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *  
2 ____* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *  
3 ____* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *  
4 library IEEE;  
5 use IEEE.std_logic_1164.all;  
6 use IEEE.std_logic_arith.all;  
7  
8 entity LPM_SHIFTREG is  
9     generic (  
10         — Width of the data[] and q ports. (Required)
```

Jméno	Popis	komentář
data[]	Data input to the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH.
clock	Positive-edge-triggered clock	Vstup hodinového signálu.
enable	Clock enable input	Blokuje hodinový signál.
shiftin	Serial shift data input	Pro funkci je nutné použít alespoň jeden ze signálů data[], aset, aclr, sset, sclr, a/nebo shiftin.
load	Synchronous parallel load	(1) load operation (podmínka: enable = 1); (0) shift operation (výchozí).
aclr	Asynchronous clear input	Signál aclr má vyšší prioritu než signál aset.
aset	Asynchronous set input	Naplní registr g[] hodnotou LPM_AVALUE
sclr	Synchronous clear input	Signál sclr má vyšší prioritu než signál sset.
sset	Synchronous set input	Naplní registr g[] hodnotou LPM_SVALUE
q[]	Data output from the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH. Vyžaduje shiftout.
shiftout	Serial shift data output	Vyžaduje registr q[].

Tabulka 42.8.1: Popis portů komponenty lpm_shiftreg.

```

11      lpm_width      : natural;
12      lpm_direction : string := "LEFT";
13      — Constant value that is loaded when aset is high.
14      lpm_avalue     : string := "UNUSED";
15      — Constant value that is loaded on the rising edge of
16      — clock when sset is high.
17      lpm_svalue     : string := "UNUSED";
18      lpm_pvalue     : string := "UNUSED";
19      lpm_type       : string := "L_SHIFTREG";
20      lpm_hint       : string := "UNUSED"
21  );
22  port (
23      — Data input to the shift register.
24      data : in std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) := (OTHERS
25          => '0');
26      — Positive-edge-triggered clock. (Required)
27      clock : in std_logic;
28      — Clock enable input
29      enable : in std_logic := '1';
30      — Serial shift data input.
31      shiftin : in std_logic := '1';
32      — Synchronous parallel load. High (1): load operation; low
33      — (0): shift operation.
34      load : in std_logic := '0';
35      — Asynchronous clear input.
36      aclr : in std_logic := '0';
37      — Asynchronous set input.
38      aset : in std_logic := '0';
39      — Synchronous clear input.
40      sclr : in std_logic := '0';
41      — Synchronous set input.
42      sset : in std_logic := '0';
43      — Data output from the shift register.
44      q : out std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0);
45      — Serial shift data output.
46      shiftout : out std_logic
47  );
48 end LPM_SHIFTREG;
49
50 architecture LPM_SYN of LPM_SHIFTREG is
51 — FUNCTION DECLARATION
52 function conv_STR_to_VECT (str : string) return
53     std_logic_vector is
54     — conversion string to std_logic_vector

```

```

51  variable len      : integer := str'length;
52  variable ivalue : std_logic_vector(lpm_width+4 downto 0) := 
53    (others => '0');
54  variable digit   : std_logic_vector(3 downto 0) := (others =>
55    '0');
56  variable ten     : std_logic_vector(3 downto 0) := "1010";
57 begin
58  if (str /= "UNUSED") then
59    for i in 1 to len loop
60      case str(i) is
61        when '0' => digit := "0000";
62        when '1' => digit := "0001";
63        when '2' => digit := "0010";
64        when '3' => digit := "0011";
65        when '4' => digit := "0100";
66        when '5' => digit := "0101";
67        when '6' => digit := "0110";
68        when '7' => digit := "0111";
69        when '8' => digit := "1000";
70        when '9' => digit := "1001";
71        when others =>
72          ASSERT FALSE
73          REPORT "Illegal character "& str(i) & " in string"
74            parameter!
75          SEVERITY ERROR;
76      end case;
77      ivalue(lpm_width+3 downto 0) :=
78        unsigned(ivalue(lpm_width-1 downto 0)) * unsigned(ten)
79        + unsigned(digit);
80    end loop;
81  end if;
82  return ivalue(lpm_width-1 downto 0);
83 end conv_STR_to_VECT;
84
85
86 begin
87 — PROCESS DECLARATION
88  — basic error checking for invalid parameters

```

```

89   MSG: process
90   begin
91     if (lpm_width <= 0) then
92       ASSERT FALSE
93       REPORT "Value of lpm_width parameter must be greater than
94         0!" severity error;
95     end if;
96     wait;
97   end process MSG;
98
99  process (tmp_init)
100 begin
101   if (tmp_init = '1') then
102     init <= '1';
103   end if;
104 end process;
105
106 process (clock, aclr, aset, init)
107 begin
108   variable avalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
109     conv_STR_to_VECT(lpm_avalue);
110   variable svalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
111     conv_STR_to_VECT(lpm_svalue);
112   variable pvalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
113     conv_STR_to_VECT(lpm_pvalue);
114
115   — INITIALIZE TO PVALUE —
116   if (init = '0') then
117     if (lpm_pvalue /= "UNUSED") then
118       i_q <= pvalue;
119     end if;
120     if ((lpm_direction = "LEFT") or (lpm_direction =
121       "UNUSED")) then
122       i_shiftout_pos <= lpm_width-1;
123     elsif (lpm_direction = "RIGHT") then
124       i_shiftout_pos <= 0;
125     else
126       ASSERT FALSE
127       REPORT "Illegal lpm_direction property value for
128         LPM_SHIFTREG!"
129       SEVERITY error;
130     end if;
131     tmp_init <= '1';
132   elsif (aclr = '1') then

```

```
127      i_q <= (OTHERS => '0');
128      elsif (aset = '1') then
129          if (lpm_avalue = "UNUSED") then
130              i_q <= (OTHERS => '1');
131          else
132              i_q <= avalue;
133          end if;
134      elsif (rising_edge(clock)) then
135          if (enable = '1') then
136              if (sclr = '1') then
137                  i_q <= (OTHERS => '0');
138              elsif (sset = '1') then
139                  if (lpm_svalue = "UNUSED") then
140                      i_q <= (OTHERS => '1');
141                  else
142                      i_q <= svalue;
143                  end if;
144              elsif (load = '1') then
145                  i_q <= data;
146              else
147                  if (lpm_width < 2) then
148                      i_q(o) <= shiftin;
149                  elsif (lpm_direction = "LEFT") then
150                      i_q <= (i_q(lpm_width-2 downto 0) & shiftin);
151                  else
152                      i_q <= (shiftin & i_q(lpm_width-1 downto 1));
153                  end if;
154              end if;
155          end if;
156      end process;
157
158      q <= i_q;
159      shiftout <= i_q(i_shiftout_pos);
160
161  end LPM_SYN;
```


Část XVII

Elektromagnetická kompatibilita

Kapitola 43

Vlastnosti plošných spojů

Část XVIII

C

Kapitola 44

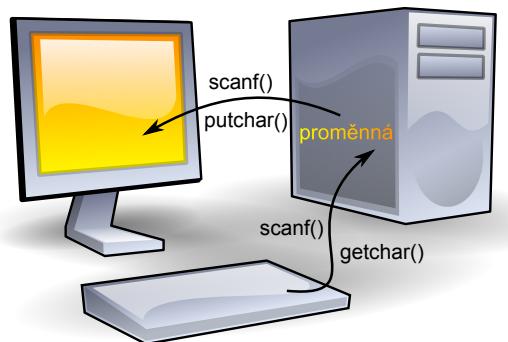
Terminálový vstup a výstup

Obsah

44.1 Hlavičkový soubor stdio.h	448
44.2 Standardní vstup a výstup znaku	448
44.3 Standardní vstup a výstup řetězců	450
44.4 Formátovaný standardní vstup a výstup	450
44.5 Souhrnné cvičení	450

Jazyk C, narození od Pascalu, ne definuje žádnou I/O (vstupně/výstupní - Input/Output) operaci jako část jazyka. Nezbytné vstupy a výstupy jsou řešeny tak, že standardní knihovna obsahuje několik funkcí, které I/O zajišťují.

Nejvíce strojově závislé akce jsou I/O operace a tímto způsobem se tedy důsledně oddělují strojově závislé a strojově nezávislé části jazyka. Tato skutečnost je pak významným přínosem při vytváření komplikátoru pro jiný počítač.



Obrázek 44.0.1: Operace pro terminálový vstup a výstup

44.1 Hlavičkový soubor stdio.h

Aby bylo možno správně používat všechny funkce pro vstupu a výstupu, je nutné na začátku programu připojit "popis" těchto funkcí. Ten se nachází v hlavičkovém (*header*) souboru stdio.h:

```
#include <stdio.h> //zde není středník
```

Od tohoto okamžiku je pak možné používat dále popsané funkce.

44.2 Standardní vstup a výstup znaku

Výstup jednoho znaku zajišťuje putchar() a vstup jednoho znaku funkce getchar().

- `int putchar(int c);`
- `int getchar(void);`

Obě funkce pracují s proměnnými **int** a ne **char**.

```

1  ****
2  /* Cteni_tisk_znaku.C */
3  /* Cteni a tisk znaku */
4  /* P. Herout   10.1991 */
5  ****
6  #include <stdio.h>
7
8 main()
9 {
10    int c;
11
12    printf("\nZadej znak:");
13    c = getchar() + 1;
14    printf("%c (ASCII %d)\n", c, c);
15 }
```

Výpis 44.1: Cteni_tisk_znaku.c Čtení a tisk znaku ze standardního vstupu na standardní výstup.

Příklad 44.2.1. Čtení znaku ze standardního vstupu a jejich zápis na standardní výstup  ukazuje následující program, představující jednoduchou variantu příkazu kopírování souboru (nutno ovšem přesměrovat vstup a výstup).

```

1  ****
2  /* CPY.C */
3  /* CoPY character */
4  ****
5
6  #include <stdio.h>
7
8 int main(void)
9 {
10    int c;
11
12    while ((c = getchar()) != EOF)
13        putchar(c);
14    return 0;
15 }
```

Výpis 44.2: CPY.c Kopíruje znak ze standardního vstupu na standardní výstup.

44.3 Standardní vstup a výstup řetězců

Standardní vstup a výstup řetězců je jednoduchou nadstavbou nad čtením znaku. Obě funkce,

- `char *gets(char *s);`
- `int puts(const char *s);`

pracují s řetězci. `gets()` načte do znakového pole vstupní řetězec az do konce řádku, symbol '`\n`' není do znakového pole zapsán. Ukazatel na pole (načtený řetězec) je rovněž návratovou hodnotou. Chybu signalizuje návrat `NULL`. `puts()` zapíše řetězec na výstup a přidá přechod na nový řádek '`\n`'. Chybu představuje návratové `EOF`, jinak vrací kladné cele číslo.

Jednoduchost použití skrývá velké nebezpečí. Funkce `gets()` nemá informaci o délce oblasti vymezené pro čtený řetězec. Je-li oblast kratší, než vstupní řádek, dojde jeho načtením velmi pravděpodobně k přepsání paměťové oblasti související s vyhrazenou pamětí. A to se všemi důsledky z toho vyplývajícími.

44.4 Formátovaný standardní vstup a výstup

44.5 Souhrnné cvičení

Příklad 44.5.1. Vytvořte program, který vygeneruje ASCII tabulku se čtyřmi sloupcí ve formátu [znak/kód/znak/kód]. Rozsah tabulky definujte pomocí dvou symbolických konstant `MIN_ASCII`, `MAX_ASCII`.

```

1  ****
2  /* ASCII.C
3  /* Generate ASCII table
4  ****
5  #include <stdio.h>
6  #include <conio.h>
7
8  #define MIN_ASCII 32
9  #define MAX_ASCII 127
10 #define BASE ' '
11 #define TABLE_HEADING "\tASCII\t\tASCII\nChar\tCode\tChar\tCode\n"

```

```
12  
13 char ascii_table_tittle []= "„„„„„„„„ASCII„„CODE„„TABLE";  
14  
15 main ()  
16 {  
17     int index = 0, i, task = 0;  
18  
19     printf ("%s\n", ascii_table_tittle);  
20     printf ("-----\n");  
21     printf ("%s", TABLE_HEADING);  
22     printf ("=====*\n");  
23  
24     while (task < MAX_ASCII)  
25     {  
26         for (i = 0; i < 2; i++)  
27         {  
28             task = BASE + index + i;  
29             printf ("%c\t%d\t", task, task);  
30         }  
31         printf ("\n");  
32         index += 2;  
33     } /* end while */  
34  
35     while (!kbhit());  
36     return 0;  
37 }
```

Výpis 44.3: **ASCII.c** Generuje ASCII tabulku na terminálu.

Kapitola 45

Pointery

Obsah

45.1 Základy práce s pointery	454
-----------------------------------------	-----

Pointery (též ukazatele nebo směrníky) jsou „*srdce a duše jazyka C*“. Pointer je proměnná, jako každá jiná, pouze hodnota uložená v této proměnné má jiný význam. Pointer představuje *adresu paměti* a na této adrese se teprve ukryvá příslušná hodnota. Pointer je tedy proměnná uchovávající paměťovou adresu.[Her94]

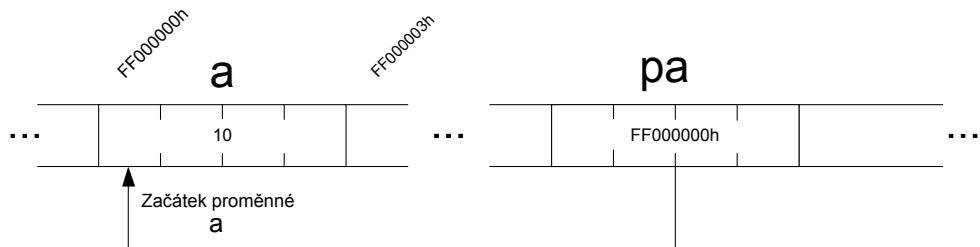
45.1 Základy práce s pointery

Příklad 45.1.1. Vytvořte funkce kopírující prvky jednoho pole do druhého pomocí indexu i ukazatele.

```

1  ****
2  /* soubor CPYARRY.C */
3  /* na funkciích kopirujicich prvky jednoho pole do druheho */
4  /* ukazuje pristup k prvkum pole pomocí indexu i pomocí */
5  /* ukazatele, tedy pointerovou aritmetiku */
6  ****
7  #include <stdio.h>
8
9 #define N      6
10
11 void copy_array1(int *a, int *b, int n)
12 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
13 {
14     register int i = 0;
15     for (; i < n; i++)
16         b[i] = a[i];
17 }
18
19 void copy_array2(int *a, int *b, int n)
20 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku

```



Obrázek 45.1.1: Princip ukazatele v paměti

```
21  {
22      while (n-- > 0)
23          *b++ = *a++;
24  }
25
26  void print_array(int *p, int n)
27  // vytiskne celociselné pole o n prvcích
28  // zacne a skonci na novem radku
29  {
30      puts("");
31      while (n-- > 0)
32          printf("\t%d", *p++);
33      puts("");
34  }
35
36  int main()
37  {
38      int pole1[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
39      pole2[N], dim1;
40      dim1 = sizeof(pole1) / sizeof(int);
41
42      print_array(pole1, dim1);
43      copy_array1(pole1, pole2, N);
44      print_array(pole2, N);
45      copy_array2(pole1 + 3, pole2, N);
46      print_array(pole2, N);
47      return 0;
48 }
```

Výpis 45.1: CPYARRY.C Kopíruje prvky jednoho pole do druhého.

Výstup programu:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6
4 5 6 7 8 9
```


Kapitola 46

Preprocesor jazyka C

Obsah

46.1	Připojení externích souborů	458
46.2	Definice maker	458
46.2.1	Symbolické konstanty	458
46.2.2	Makra	458
46.3	Podmíněný překlad	458

Preprocesor interpretuje jednoduché direktivy pro vložení zdrojového kódu z jiného souboru (**#include**), definice maker (**#define**) a podmíněné vložení kódu (**#if**). C preprocesor přijímá tyto direktivy:

#define	#elif	#else	#endif
#error	#if	#ifdef	#ifndef
#include	#line	#pragma	#undef

Tabulka 46.0.1: Seznam platných direktiv jazyka C

46.1 Připojení externích souborů

46.2 Definice maker

Definice maker ve významu rozsahů polí je typickým příkladem použití preprocesoru. Ve zdrojovém textu se neodvoláváme na magická čísla, ale na vhodně symbolicky pojmenovaná makra, která zvýší čitelnost programu.

Pro větší přehlednost rozdělme makra na

- symbolické konstanty,
- makra

Klíčem nechť je skutečnost, že makro na rozdíl od symbolické konstanty má argumenty.

46.2.1 Symbolické konstanty

46.2.2 Makra

46.3 Podmíněný překlad

Preprocesor může během své činnosti vyhodnocovat, je-li nějaké makro definováno, či nikoliv. Při použití klíčového slova preprocesoru **defined** pak může spojovat taková vyhodnocení do rozsáhlejších logických výrazů. Argument **defined** nemusí být uzavřen do závorek. Může se však vyskytnout jen za **#if** nebo **#elif**. Například si ukažme složitější podmínu:

Část XIX

ANSI/C++

Kapitola 47

Přehled jazyka C++

Obsah

47.1	Objektově orientované programování	462
47.1.1	Třídy: první nahlédnutí	463
47.1.2	Některé rozdíly mezi C a C++	469
47.1.3	Úvod do přetěžování funkcí	471
47.1.4	Práce s ukazateli	473

C++ je rozšířená verze jazyka C. C++ zahrnuje vše, co je součástí jazyka C, a přidává podporu objektově orientovaného programování (zkráceně OOP). C++ navíc obsahuje mnohá vylepšení, a prvky, které z něj jednoduše dělají "lepší C", nezávisle na objektově orientovaném programování. Kromě několika málo zanedbatelných výjimek platí, že C je podmnožinou jazyka C++.

Poněvadž byl C++ vytvořen pro podporu OOP, začne následující podkapitola popisem OOP. Je důležité si uvědomit, že jazyka C++ může být použito i pro psaní programů, které nejsou objektově orientovány. Tato kapitola, kromě představení nejdůležitějších vlastností jazyka C++, diskutuje především o rozdílech mezi způsoby programování v C a v C++ [Sch01, p. 20].

47.1 Objektově orientované programování

Objektově orientované programování je výkonný způsob jak přistupovat k úloze programování. Již od raných začátků bylo programování spojováno s rozličnými metodologiemi. V každém kritickém momentě během vývoje programování byly vytvářeny nové přístupy, které pomohly programátorům zvládat stále složitější programy. První programy byly vytvářeny pouhým nastavením přepínačů na panelu počítače. Tento postup byl vhodný pouze pro velmi malé programy. Později vytvořený jazyk symbolických instrukcí již umožňoval psaní delších programů. K dalšímu vývoji došlo v roce 1955, kdy byl vytvořen první programovací jazyk vysoké úrovně - FORTRAN.

S využitím programovacího jazyka vysoké úrovně byl programátor schopen psát programy o délce několika tisících řádků. Nejstarší metodou použitou pro programování byl *ad hoc* přístup "všechno jde". Jestliže to bylo přípustné pro relativně krátké programy, pak u rozsáhlých programů to vedlo k vytváření nečitelných a nezvládnutelných "špagety kódů"

Eliminaci "špagety kódů" umožnil až vznik *strukturovaných programovacích jazyků* v šedesátých letech. Byly to jazyky Algol a Pascal. Volně lze interpretovat, že je-li jazyk C strukturovaný, pak typ programování, které v něm provádíme, by se mohl označit jako strukturované programování. Strukturované programování se opírá o dobře definované řídící struktury, bloky kódů, vyloučení příkazů GOTO, lokální (stand-alone) podprogramy, které podporují rekurzi, a lokální proměnné.

Přestože strukturované programování přinášelo výborné výsledky, když bylo použito pro středně složité programy, v mnoha bodech zklamalo, když program přesáhl určitou velikost. K tomuto účelu bylo vytvořeno objektově orientované programování.

OOP vzalo nejlepší myšlenky včleněné do strukturovaného programování a zkombinovalo je s výkonnými novými koncepty, které dovolují organizovat programy mnohem efektivněji.

Obecně všechny OOP jazyky sdílejí tři definované vlastnosti:

- zapouzdření (encapsulation),
- polymorfismus (polymorphism),
- dědičnost (inheritance).

47.1.1 Třídy: první nahlédnutí

Snad nejdůležitějším samostatným prvkem jazyka C++ je **třída**. Je to mechanismus používaný pro vytváření objektů. Jako taková, je třída srdcem mnoha prvků jazyka C++. Třídy jsou pro programování v C++ tak významné, že je vhodné předložit na tomto místě jejich stručný přehled.

Definice 47.1.1 (Třída). *Třída je základním obecným pojmem klasifikace, jak při návrhu uspořádávat informace do smysluplné entity. Základním pojmem je objekt, **instance třídy**, jako konkrétní případ realizace předpisu. Objekt si „pamatuje“ svůj stav (v podobě **dat** čili **atributů**) a zveřejněním některých svých operací (nazývaných **metody**) poskytuje rozhraní, jak s ním pracovat. Při používání objektu nás zajímá, jaké operace (služby) poskytuje, ale ne, jakým způsobem to provádí - to je princip zapouzdření. Jestli to provádí sám nebo využije služeb jiných objektů, je celkem jedno. Vlastní implementaci pak můžeme změnit (např. zefektivnit), aniž by se to dotklo všech, kteří objekt používají.*

*Abstrakce objektu, která v architektuře programu podchycuje na obecné úrovni podstatu všech objektů podobného typu, se nazývá **třída**. Třída je předpis, jak vyrobit objekt daného typu.*

Příklad 47.1.1. Nechť má sousedka (chápejme ji jako objekt) má nějaké jméno, je nějak vysoká, umí chodit a umí mluvit. Totéž platí i pro mne. Mohu tedy při modelování téhoto dvou objektů, sousedky a mě, abstrahovat od nepodstatných dílčích odlišností a díky této abstrakci vytvořit obecnou třídu Člověk, která bude mít atributy jméno a příjmení (obojí je nějaký řetězec znaků) a metody chodit a mluvit.

Třída je deklarována klíčovým slovem **class**. Syntaxe deklarace **class** je podobná její struktuře. V obecné formě vypadá takto

```
class jméno–řtídy {
    // privátní–funkce a členy
public:
    // veřejné funkce a členy
} seznam–ůobjekt
```

Seznam objektů je v deklaraci třídy nepovinný. Stejně jako struktura, se mohou objekty třídy deklarovat později. Zatímco jméno třídy je také nepovinné, z praktického hlediska je vlastně vždy potřeba. Je to proto, že se jméno třídy stává novým typem jména použitého k deklaraci objektů třídy.

Funkce a členy deklarovány uvnitř třídy jsou označeny jako *členy této třídy*. Znamená to, že jsou přístupné pouze pro ostatní členy třídy. Pro deklaraci členů veřejné třídy se použije klíčové slovo **public** s dvojtečkou. Všechny funkce a členy deklarovány za tímto specifikátorem jsou přístupné jak pro členy třídy, tak i pro další části programu, které obsahují třídu.

Toto je jednoduchá deklarace třídy:

```
class myclass {
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};
```

Tato třída má pouze jednu privátní proměnnou nazvanou **a** a dvě veřejné funkce **set_a()** a **get_a()**. Tyto funkce jsou deklarovány uvnitř třídy pomocí jejich **prototypů**. Funkce, které jsou deklarovány jako součásti třídy se nazývají *členské funkce*.

Jelikož je **a** privátní, není dostupné pro žádný kód vně **myclass**. Ovšem funkce **set_a()** a **get_a()** jsou členy **myclass**, takže mají k **a** přístup. **set_a()** a **get_a()** jsou deklarovány jako veřejné členy **myclass** a mohou být volány každou částí programu, která **myclass** obsahuje.

Ačkoliv jsou funkce **set_a()** a **get_a()** deklarovány v **myclass**, nejsou ještě definovány. Aby jsem definoval členskou funkci, musím spojit typové jméno třídy se jménem funkce. To se udělá uvozením jména funkce jménem třídy se dvojicí dvojteček. Dvojice dvojteček se nazývá *operátor rozlišení oblasti* (scope resolution operator). Následující příklad ukazuje, jak jsou členské funkce **set_a()** a **get_a()** definovány:

```
void myclass :: set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass :: get_a()
{
    return a;
}
```

Jak `get_a()`, tak i `set_a()` mají přístup k `a`, které je privátní v `myclass`. Poněvadž `get_a()` i `set_a()` jsou členy `myclass`, mohou přímo přistupovat k jejím soukromým datům.

Obecně se pro definici členské funkce musí použít následující tvar:

```
re-type jméno-třídy :: jmého-funkce (seznam-úparametr)
{
    // článek funkce
}
```

Deklarace `myclass` nedefinuje žádný objekt typu `myclass`. Definuje pouze typ objektu, který bude vytvořen, když bude deklarován. Pro vytvoření objektu se použije jako specifikátor jméno třídy. Například tento řádek deklaruje dva objekty typu `myclass`:

```
myclass ob1, ob2; //toto jsou objekty typu myclass
```

Jakmile je vytvořen objekt třídy, může se program odkazovat na jeho veřejné členy pomocí tečkových operátorů bezmála takovým způsobem, jímž jsou prvky struktury zpřístupněny. Dle předcházející deklarace objektů volají následující příkazy `set_a()` pro objekty `ob1` a `ob2`:

```
ob1.set_a(10); // nastaví verzi ob1 na 10
ob2.set_a(99); // nastaví verzi ob2 na 99
```

Každý objekt obsahuje vlastní kopii všech dat deklarovaných uvnitř třídy. Znamená to, že a náležející `ob1` je odlišné a různé od a navázaného na `ob2`.

Příklad 47.1.2. Tento program předvádí `myClass`, popsanou výše v textu. Nastavuje hodnoty `a` pro `ob1` a `ob2`, a pak zobrazuje hodnotu `a` pro každý objekt.



```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass {
    // privatni vzhledem k myclass
```

```

int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};

void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}

int main()
{
    myclass ob1, ob2;

    ob1.set_a(10);
    ob2.set_a(99);

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}

```

Program by měl na obrazovce zobrazit hodnoty 10 a 99.

Příklad 47.1.3. V `myClass` z předchozího příkladu je `a` privátní. Znamená to, že k ní mohou přímo přistupovat pouze členské funkce z `myClass`. (To je důvodem, proč je vyžadována veřejná funkce `get_a()`). Tedy při pokusu o přístup k privátnímu členu třídy z některé části programu, která není členem třídy, objeví se při překladu chyba. Pokud je `myClass` definována tak, jak bylo předvedeno v předešlém příkladě, pak následující volání funkce `main()` zapříčiní chybu:

```

// Toto je fragment obsahující chybu.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    myclass ob1, ob2;
    ob1.a = 10; // ERROR! ůžneme řpistupovat
                 // k privátnímu členu
    ob2.a = 99; // dle čnelenských funkcí.

```

```

cout << ob1.get_a() << "\n";
cout << ob2.get_a() << "\n";

return 0;
}

```

Příklad 47.1.4. Stejně jako mohou existovat funkce veřejného členu, mohou existovat i proměnné veřejného členu. Jestliže například *a* bylo deklarováno ve veřejné části *myClass*, lze se na ně odkazovat z kterékoli části programu, jak je předvedeno dále:



```

#include <iostream>
using namespace std;

class myclass {
public:
// nyní je a řveejně
int a;
// a nyní není řpoteba set_a() a get_a()
};

int main()
{
myclass ob1, ob2;

ob1.a = 10;
ob2.a = 99;

cout << ob1.a << "\n";
cout << ob2.a << "\n";

return 0;
}

```

Protože je v tomto příkladě *a* deklarováno jako veřejný člen *myClass*, je přímo přístupné z *main()*. Pro přístup k *a* je použit tečkový operátor. Obvykle, když se volá členská funkce nebo se přistupuje k členské proměnné z vnějšího prostředí mimo třídu, je nutná plná specifikace daná jménem objektu i s tečkovým operátorem následovaným jménem člena, aby bylo jasné, na kterého člena objektu se odkazuje.

Příklad 47.1.5. Aby byla ukázána síla objektů, následující program vytváří třídu pojmenovanou *stack*, která implementuje zásobník použitelný například pro uchování znaků:

```
#include <iostream>
using namespace std;
```

```
#define SIZE 10

// Deklaruje tridu stack pro znaky
class stack{
    char stck[SIZE];      // uklada zasobnik
    int tos;               // index vrcholu zasobniku
public:
    void init();           // inicializace stack
    void push(char ch);   // vlozeni znaku do stack
    char pop();            // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::init()
{
    tos = 0;
}

// Vsunuti znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    stack s1, s2; // vytvoreni dvou zasobniku
    int i;

    // inicializace zasobniku
    s1.init();
    s2.init();
```

```
// vložení znaku do zásobníku
s1.push(a);
s2.push(x);
s1.push(b);
s2.push(y);
s1.push(c);
s2.push(z);

// vyjmout znaku ze zásobníku
for(i=0; i<3; i++)
    cout << "Pop s1:" << s1.pop() << "\n";
for(i=0; i<3; i++)
    cout << "Pop s2:" << s2.pop() << "\n";

return 0;
}
```

\end{lstlisting}

Program zobrazí následující výstupy:

```
Pop s1: c
Pop s1: b
Pop s1: a
Pop s2: z
Pop s2: y
Pop s2: x
```

Podívej se na program ještě jednou. Třída `stack` obsahuje dvě privátní proměnné: `stck` a `tos`. Pole `stck` uchovává znaky umístěné v zásobníku a `tos` obsahuje index horní úrovně zásobníku. Veřejné funkce zásobníku jsou `init()`, `push()` a `pop()` a slouží k inicializaci zásobníku, vkládání hodnoty a k vyjmutí hodnoty. Uvnitř `main()` jsou vytvořeny dva zásobníky `s1` a `s2` a do každého z nich jsou vloženy tři znaky. Je důležité uvědomit si, že každý zásobníkový objekt je oddělený od druhého. To znamená, že znaky vložené do `s1` nemohou žádným způsobem ovlivnit znaky vložené do `s2`. Každý objekt obsahuje vlastní kopii `stck` a `tos`. To je základní princip pro pochopení objektů. Ačkoliv všechny objekty třídy sdílejí své členské funkce, každý objekt vytváří a udržuje svá vlastní data.

47.1.2 Některé rozdíly mezi C a C++

Ačkoliv je jazyk C++ rozšířenou množinou jazyka C, existují mezi nimi drobné rozdíly a bylo by dobré se s nimi na začátku seznámit. Především, když v C nemá funkce žádné

parametry, její prototyp má v seznamu parametrů funkce slovo **void**. Například když v "céčku" funkce nazvaná `f1()` nemá parametry (a vrací **char**), pak její prototyp bude vypadat následovně:

```
char f1( void );
```

Přestože v C++ zůstává `void` stále jako volitelný, bude se prototyp pro `f1()` psát běžně takto:

```
char f1();
```

C++ se odlišuje od C tím, že je v něm specifikován prázdný seznam parametrů. Kdyby se předchozí prototyp objevil v programu C, pak se to bude chápat, že o parametrech nebylo řečeno nic. V C++ to znamená, že funkce nemá parametry. Proto tedy v předchozím příkladě nebyl využit k deklaraci prázdného seznamu explicitně parametr `void`. (Použití parametru `void` k deklaraci prázdného seznamu parametrů není zakázáno; je to pouze nadbytečné. Jelikož většina programů C++ usiluje o téměř posvátném zanícením o výkonnost, neuvidíš téměř nikdy, že by bylo `void` tímto způsobem použito.) Zapamatuj si, že v C++ jsou následující dvě deklarace zcela rovnocenné:

```
char f1();  
char f1( void );
```

Další drobná diference mezi C a C++ spočívá v tom, že v programech C++ musí mít všechny funkce prototypy. Zapamatuj si, že v C jsou prototypy doporučeny, ale technicky jsou nepovinné. V C++ jsou však vyžadovány. Jak je patrno z příkladu v předchozí části, prototyp členské funkce obsažený v třídě slouží rovněž jako její obecný prototyp a žádný další samostatný prototyp již není požadován. Třetím rozdílem mezi C a C++ je, když je funkce deklarována aby vracela hodnotu, musí hodnotu opravdu vracet. Jestliže má totiž funkce jiný návratový typ než `void`, musí pak každý příkaz `return` uvnitř funkce obsahovat hodnotu. V C není vyžadováno, aby vracely hodnotu funkce, které nejsou `void`. Jestliže hodnota neexistuje, "vrací se" jakási nahodilá hodnota.

Jestliže v C nespecifikujete explicitně návratový typ funkce, předpokládá se návratový typ `integer`. V C++ bylo toto pravidlo potlačeno, a proto musíš explicitně deklarovat všechny návratové typy funkcí. Další rozdíl mezi C a C++ je, že v programech C budeš muset brát ohled na to, kde mohou být lokální proměnné deklarovány. V C mohou být lokální proměnné deklarovány pouze na začátku bloku před všemi "výkonnými" příkazy. V C++ mohou být lokální proměnné deklarovány kdekoli. Výhodou tohoto přístupu je, že lokální proměnné mohou být deklarovány ta, kde budou poprvé použity, což může napomoci v prevenci před nechtěnými vedlejšími účinky.

Konečně také v C++ definuje datový typ **bool** pro uložení hodnot Boolean (popř. pravda/nepravda). C++ rovněž definuje klíčová slova **true** a **false**, která jsou jedinými

hodnotami, které může hodnota typu Boolean nabývat. V C++ je výstupní hodnotou relačních a logických operátorů hodnota typu **bool** a všechny podmíněné příkazy musí hodnotu **bool** vyhodnocovat. V C je hodnota **true** nenulová a hodnota **false** odpovídá nule. Tak je to i v C++, poněvadž při použití v booleánských výrazech je každá nenulová hodnota automaticky převedena na **true** a každá nulová hodnota je převedena na **false**. Funguje to i opačným směrem. Když je booleánská hodnota použita ve výrazech **integer**, pak se **true** převádí na 1 a **false** na 0. Přidání **bool** umožňuje důkladnější ověřování typů a poskytuje způsob, jak navzájem rozlišovat Boolean a **integer**. Využívání je samozřejmě nepovinné, ale **bool** je nejvhodlnější.

47.1.3 Úvod do přetěžování funkcí

Po třídách je snad nejdůležitější a vše postupující vlastností C++ přetěžování funkcí. Přetěžování funkcí nejen poskytuje mechanismus jímž C++ poskytuje jeden typ polymorfismu, ale také utváří základ, na němž může být programovací prostředí dynamicky rozšiřováno. Kvůli důležitosti přetěžování je v následujících odstavcích předložen stručný úvod.¹

V C++ mohou dvě nebo více funkcí sdílet stejné jméno, pokud se liší typy jejich argumentů nebo jejich počet anebo se liší obojí.

Je velmi snadné přetížit funkci: jednoduše deklaruješ a definuješ všechny požadované verze. Správnou verzi překladač automaticky vybere dle počtu nebo typu argumentů použitých při volání funkce.

Příklad 47.1.6. Následující program definuje tři funkce pro výpočet absolutní hodnoty nazvané **abs()** - pro každý typ dat jednu.

```
#include <iostream>
using namespace std;

// Přetízení abs() třemi způsoby
int abs(int n);
long abs (long n);
double abs (double n);

int main()
{
    cout << "Absolute value of -10" << abs(-10) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10L" << abs(-10L) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10.01" << abs(-10.01) << "\n";
}
```

¹V C++ lze přetěžovat i operátory.

```

    return o;
}

// abs() pro hodnoty int
int abs(int n)
{
    cout << "In integer abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty long
long abs (long n)
{
    cout << "In Long abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty double
double abs (double n)
{
    cout << "In double abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

```

Překladač automaticky volá správně jednu ze tří verzí `abs()` dle typu dat, která jsou uvedena v argumentu. Program vytvoří následující výstup:

In integer abs() Absolute value of -10: 10

In long abs() Absolute value of -10L: 10

In double abs() Absolute value of -10.01: 10.01

Uvedený příklad je velmi jednoduchý, nicméně ukazuje význam přetěžování funkcí. Jelikož lze jediné jméno použít k popisu obecné třídy činností, je umělá složitost, která vyplývá z použití tří mírně odlišných jmen - v tomto případě `abs()`, `labs()` a `fabs()` - snadno eliminována.

Příklad 47.1.7.

```

#include <iostream>
using namespace std;

void date(char *date) // datum jako retezec

```

```
void date(int month, int day, int year) // datum jako cisla

int main()
{
    date("11/22/2010");
    date(11, 22, 2010 );
}

// Datum jako retezec.
void date(char *date)
{
    cout << "Date:" << date << "\n";
}

// Datum jako integer
void date(int month, int day, int year)
{
    cout << "Date:" << month << "/";
    cout << day << "/" << year << "\n";
}
```

Příklad 47.1.7 ilustruje jak může přetížení funkce zajistit mnohem přirozenější přístup k funkci. Protože je poměrně běžné, že je datum reprezentováno buď řetězcem, nebo třemi celočíselnými hodnotami obsahující den, měsíc a rok, záleží jen na uživateli, aby vybral tu nejpohodlnější formu, dle dané situace

47.1.4 Práce s ukazateli

Příklad 47.1.8. Práce s ukazateli:

```

        // to num.
        // No * in front of p_num.
cout << "*p_num is " << *p_num << "\n"; // Prints value
                                                // of num.
cout << "p_num is " << p_num << "\n"; // Prints location
                                                // of num.
return 0;
}

```

Výstup programu:

```

num is 123
The address of num is 0x28ff44
*p_num is 123
p_num is 0x28ff44

```

Příklad 47.1.9. Napište funkci *swap* která prohodí hodnoty dvou proměnných typu *int*. Výsledek funkce *swap* vytiskněte na výstupu terminálu.

```

// Program that includes a function that swaps
// any two integers passed to it
#include <iostream>
using namespace std;
void swap(int &num1, int &num2);
int main()
{
    int i=10, j=20;
    cout << "\n\nBefore swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    swap(i, j);
    cout << "\n\nAfter swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    return 0;
}

void swap(int &num1, int &num2)
{
    int temp;           // Variable that holds
                        // in-between swapped value.
    temp = num1;        // The calling function's variables
    num1 = num2;        // (and not copies of them) are
    num2 = temp;        // changed in this function.
    return;
}

```

Výstup programu:

Before swap, i is 10 and j is 20

After swap, i is 20 and j is 10

Příklad 47.1.10. Následující příklad ukazuje použití **ukazatele na funkci**. Program se nejprve zeptá, zda se má provádět sčítání nebo násobení. Podle této odpovědi vloží do proměnné *operation* ukazatel na funkci *add* nebo na funkci *multiply*. Dále zadáme dvě čísla, která se použijí jako parametry vybrané funkce.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int add(int a, int b)
{
    return a+b;
}
int multiply(int a, int b)
{
    return a*b;
}
int main()
{
    int (*operation) (int , int );
    int x, y, sel;
    cout << "We will add(1) or multiply(2)?";
    do {
        cin >> sel;
    } while (sel != 1 && sel != 2);
    if (sel == 1) operation = add;
    if (sel == 2) operation = multiply;
    cout << "Enter two integers:" ;
    cin >> x >> y;
    cout << "Result is " << operation(x, y) << endl;
    return 0;
}
```


Kapitola 48

Úvod do tříd

Obsah

48.1 Funkce konstruktor a destruktur	478
------------------------------------------------	-----

48.1 Funkce konstruktor a destruktur

Je zcela běžné, že některé části programu vyžadují inicializaci. Potřeba inicializace je mnohem častější, když se pracuje s objekty. K ošetření této situace poskytuje C++ funkci konstruktor, která může být vložena do deklarace třídy. Všechny inicializace, které je nutno na objektu provést, může automaticky vykonat konstruktor. Konstruktor má stejné jméno jako třída, jejíž je součástí a nemá návratový typ (není to ani povoleno). Následující příklad ukazuje krátkou třídu, jež obsahuje konstruktor.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    void show();
};

myclass :: myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

void myclass :: show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

V tomto jednoduchém příkladě je hodnota a inicializována konstruktorem `myclass()`. Konstruktor je volán při vytváření objektu ob. Objekt je vytvářen tehdy, když se provádí jeho deklarační příkaz. V C++ je deklarační příkaz proměnné vlastně "příkazem činnosti".

Když se programuje v C, lze deklarační příkazy považovat za zavádění proměnných. Ovšem v C++, poněvadž objekt může mít konstruktor, bude ve skutečnosti příkaz pro deklaraci proměnné vyvolávat celou řadu činností.

Pro globální objekty je konstruktor objektu volán jen jednou, když se program začíná poprvé spouštět. Pro lokální objekty je konstruktor volán pokaždé, když je prováděn deklarační příkaz. Doplňkem konstruktoru je destruktur. Tato funkce volána, když je objekt rušen. Když se pracuje s objekty, je běžné, že se musí provést v souvislosti s rušením objektu určité akce (např. uvolnění zabrané paměti). Následující třída již destruktur obsahuje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass();      // konstruktor
    ~myclass();    // destruktur
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

myclass::~myclass()
{
    cout << "Destructing...\n"
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

Destrukter třídy je volán, když je objekt rušen. Lokální objekty jsou rušeny, když odcházejí mimo oblast. Globální objekty jsou rušeny, když program končí.

Není možné získat adresu konstruktoru nebo destruktoru.

Příklad 48.1.1. Třída *stack* vytvořená v příkladu 47.1.5 vyžadovala inicializační funkci k nastavení proměnné pro index zásobníku. To je přesně ten druh operací, pro něž byl konstruktor navržen. Zde je vylepšení verze třídy *stack*, která používá konstruktor pro automatickou inicializaci zásobníkového objektu po jeho vytvoření:

```
#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklarace tridy znakového objektu
class stack{
    char stck[SIZE];      // uklada zasobnik
    int tos;               // index vrcholu zasobniku
public:
    stack();                // konstruktor
    void push(char ch);   // vlozeni znaku do stack
    char pop();             // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::stack()
{
    cout << "Constructing a stack\n";
    tos = 0;
}

// Vlozeni znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
}
```

```

    return stck[ tos ];
}

int main()
{
    // vytvori dva zasobniky, ktere se
    // automaticky inicializuj
    stack s1, s2;
    int i;

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push(a);
    s2.push(x);
    s1.push(b);
    s2.push(y);
    s1.push(c);
    s2.push(z);

    //vyjmouti znaku ze zasobniku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop_s1:" << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop_s2:" << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}

```

Je Vidět, že úloha inicializace je konstruktorem provedena automaticky lépe, než pomocí samostatné funkce, která by musela být explicitně volána programem. Když je inicializace provedena automaticky při vytváření objektu, eliminuje to možnost, že by kvůli výskytu chyby inicializace neproběhla. Je to další cesta, jak omezit složitost programu.

Příklad 48.1.2. Tento příklad předvádí nutnost existence nejen konstruktoru, ale i destruktora. Vytváří se zde jednoduchá řetězová třída, nazvaná `strtype`, která obsahuje řetězec a jeho délku. Když je objekt `strtype` vytvořen, je mu přidělena paměť pro uložení řetězce a jeho počáteční hodnota je nastavena na 0. Když je objekt `strtype` zrušen, je paměť uvolněna.

```

#include <iostream>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
using namespace std;

#define SIZE 255

class strtype {
    char *p;

```

```
int len;
public:
    strtype(); // konstruktor
    ~strtype(); // destruktor
    void set(char *ptr);
    void show();
};

// inicializace retezcového objektu
strtype::strtype()
{
    p = (char *) malloc(SIZE);
    if(!p) {
        cout << "Allocation_error\n";
        exit(1);
    }
    *p = '\0';
    len = 0;
}

strtype::~strtype()
{
    cout << "Freeing_p\n";
    free(p);
}

void strtype::set(char *ptr)
{
    if(strlen(p) >= SIZE) {
        cout << "String_too_big\n";
        return;
    }
    strcpy(p, ptr);
    len = strlen(p);
}

void strtype::show()
{
    cout << p << "-_length:_ " << len;
    cout << "\n";
}

int main()
{
    strtype s1, s2;

    s1.set("This_is_a_test.");
    s2.set("I_like_C++.");
```

```
s1.show();  
s2.show();  
  
return 0;  
}
```

Tento program používá pro přidělení a uvolnění paměti funkce `malloc` a `free`.
Přestože to funguje perfektně, dále je ukázáno, že v C++ se používá jiný způsob pro
dynamickou správu paměti.

Část XX

Elektrické měřicí systémy

Kapitola 49

LabView

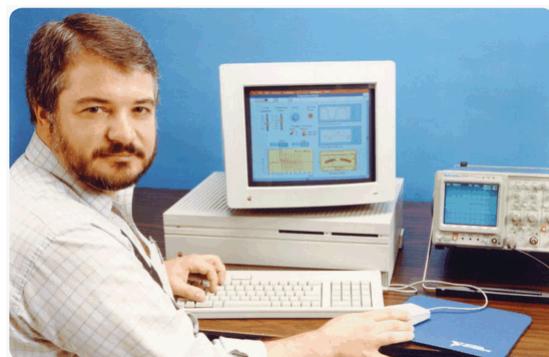
Obsah

49.1 Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView	488
49.2 Základní části virtuálního přístroje	489
49.2.1 Čelní panel	489
49.2.2 Blokové schéma	489
49.2.3 Ikona a konektor	489
49.3 Práce s grafy	489
49.3.1 Rozdělení grafů	490
49.3.2 Datové struktury pro indikátory grafů	491

49.1 Filosofie a součásti vývojového prostředí LabView

Základním záměrem vývojových pracovníků firmy National Instruments bylo dát do rukou inženýrů nástroj podobné efektivity pružnosti a síly jako je tabulkový procesor v rukou finančního manažera. Myšlenka, na níž stojí efektivita vývojového prostředí LabVIEW I daného na trh v roce 1986 pro platformu počítačů Macintosh je jednoduchá a vznikla původně na půdě Texaské univerzity ve skupince nadšenců kolem duchovního 'otce' tohoto systému Jeffa Kodovského. Vychází se zde z poznatku, že tím, kdo ví, co měřit, jak analyzovat a jak prezentovat data, je technik, který nemusí být sám zkušeným programátorem. Své představy tedy předává programátorovi obvykle v podobě blokového schématu. Programátor toto schéma potom převádí do syntaxe zvoleného programovacího jazyka, což je činnost poměrně zdlouhavá a náročná na přesnost a nepřináší již do procesu měření obvykle žádné další nové informace.

Cílem vývojového prostředí LabVIEW je to, aby blokové schéma bylo koncovým tvarem aplikace, který se již dále nebude převádět do textové podoby. LabVIEW (Laboratory Virtual Instruments Engineering Workbench) je obecným vývojovým prostředím s bohatými knihovnami pro vytváření aplikací zaměřených do oblasti měření ve všech fázích tohoto procesu - tj. sběru, analýzy a prezentace naměřených dat. Podporuje všechny čtyři základní způsoby sběru dat do počítače (z měřicích přístrojů přes rozhraní RS 232 nebo GPIB, ze zásuvných multifunkčních karet a ze systému na bázi VXI sběrnice). Poskytuje uživateli plnohodnotný programovací jazyk se všemi odpovídajícími datovými a programovými strukturami v grafické podobě - tzv. G jazyk (Graphical language) [Žído2, p. 21].



Obrázek 49.1.1: Jeff Kodovsky prezentuje ranou verzi programu LabVIEW. Psal se rok 1988. Kredit: National Instruments, [11]

LabVIEW je tedy vývojovým prostředím na úrovni např. C jazyka, ale na rozdíl od něj není orientován textově, ale graficky.. Výsledný produkt tohoto vývojového prostředí se nazývá virtuálním přístrojem (Virtual Instrument), protože svými projevy a činností připomíná klasický přístroj ve své fyzické podobě.

Virtuální přístroj jako základní jednotka aplikace vytvořené v tomto vývojovém prostředí obsahuje:

- interaktivní grafické rozhraní (Graphical User Interface - GUI) ke koncovému uživateli - tzv. čelní panel (Front Panel), který simuluje čelní panel fyzického přístroje. Obsahuje prvky pro ovládání a indikaci (knoflíky, tlačítka, LED indikátory, grafy ...). Tento čelní panel ovládá uživatel myší nebo z klávesnice.
- činnost virtuálního přístroje je dána jeho blokovým schématem (Block Diagram). Toto blokové schéma je vytvořeno ikonami reprezentujícími v koncových blocích ovládací a indikační prvky čelního panelu a ve svých uzlových blocích jsou to bloky zpracovávající procházející data. Tento blokový diagram je zdrojovou podobou každé aplikace.
- virtuální přístroj má hierarchickou a modulární strukturu. Lze jej používat jako celý program nebo jeho jednotlivé podprogramy, které se nazývají podřízenými virtuálními přístroji (SubVI). Součástí každého virtuálního přístroje je jeho ikona, kterou je prezentován v blokovém schématu a konektor s přípojnými místy pro vstupní a výstupní signály.

Těmito charakteristickými rysy naplňuje vývojové prostředí LabVIEW podmínky modulárního programování. Svou aplikaci dělí uživatel na jednotlivé úlohy, pro které vytváří dílčí virtuální přístroje (subVI) a z nich potom buduje celou aplikaci jejich spojováním do výsledného virtuálního přístroje. Na závěr lze celou aplikaci přeložit do EXE tvaru a provozovat nezávisle na vývojovém prostředí. Díky možnosti vyzkoušet funkci každého dílčího virtuálního přístroje nezávisle na jiných a díky bohaté škále ladicích prostředků je ladění aplikace velmi snadné.

49.2 Základní části virtuálního přístroje

49.2.1 Čelní panel

49.2.2 Blokové schéma

49.2.3 Ikona a konektor

49.3 Práce s grafy

Součástí grafického rozhraní k uživateli tvořeného ve vývojovém prostředí LabVIEW čelním panelem virtuálního přístroje jsou velmi často i grafy. Z hlediska dělení objektů

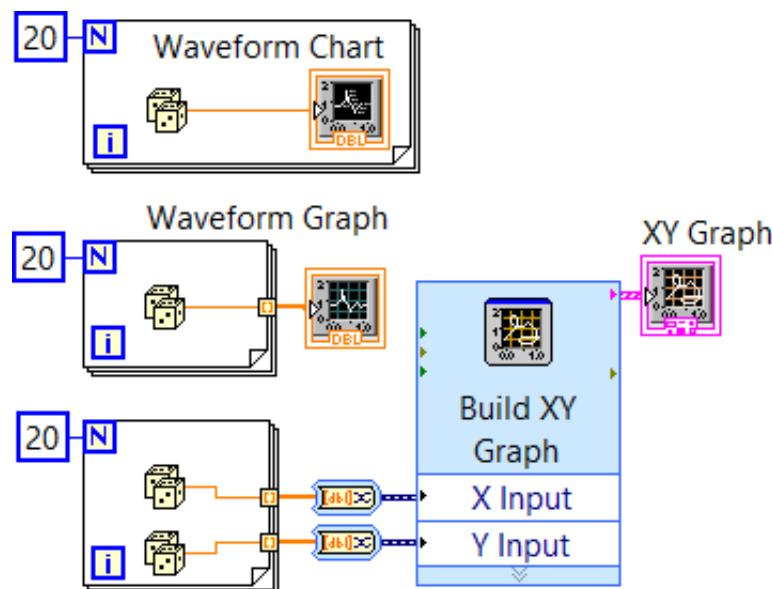
čelního panelu na prvky ovládací (směr toku informace od uživatele k systému) a indikační (směr toku informace od systému k uživateli) se jedná prakticky vždy o objekty indikační. Indikátor grafu tedy představuje dvouozměrný displej určený pro zobrazení jednoho nebo více průběhů.

49.3.1 Rozdelení grafů

Ve vývojovém prostředí LabVIEW lze indikátory grafů zásadně rozdělit podle dvou hledisek:

- podle způsobu předávání dat a zobrazení průběhů v grafu:
 - **statické indikátory** (Graphs), kde pro zobrazení jednoho či více průběhů je nutné předem připravit data popisující celý průběh, popř. průběhy a předat je objektu statického grafu jako celek, graf je zobrazen jednorázově podle zadání dat pro osu nezávisle proměnné se statické grafy dělí na:
 - * průběhové (časové) grafy (waveform graph), u kterých se předpokládá rovnoměrné rozdělení bodů tvořících graf na ose x dané počátkem a přírůstkem - nejčastěji se tento typ grafu používá pro zobrazení časového průběhu veličiny
 - * XY grafy (XY graph), u kterých se předpokládá libovolné rozdělení bodů tvořících graf na ose x - s využitím tohoto typu grafu je možno zobrazit libovolný průběh v kartézských souřadnicích
 - **registrační indikátory** (CHARTS), kde vstupní data jsou předávána bod po bodu, popř. jako bloky dat představující úseky zobrazovaného průběhu. Registrační graf postupně doplňuje průběh tak, jak jsou mu dodávána vstupní data.
- podle počtu dimenzí grafu:
 - grafy dvouozměrné - statické i registrační
 - grafy tříozměrné zobrazované v ploše - statické i registrační
 - grafy tříozměrné zobrazované v axonometrickém pohledu s možností natáčení

Jak již bylo řečeno, Waveform Chart se používá pro zobrazení postupně vznikajících průběhů - data pro zobrazení jsou na indikátor grafu posílána postupně. Pokud bychom VI z obrázku 49.3.1 opakovaně spouštěli, byl by vygenerovaný průběh připojen na konec předchozího průběhu. Tím by se graf postupně zaplňoval. Při definování tohoto typu indikátoru grafu je vhodné aby uživatel mimo jiné určil:



Obrázek 49.3.1: Demonstrace rozdílu mezi registračním grafem (Waveform chart) a statickým grafem (Waveform Graph). Pro úplnost je zde zastoupen i XY graph.

- šířku zobrazovaného průběhu v počtu bodů - lze si to představit jako okno dané šířky, přes které se dívám na zobrazovaný průběh – zadává se jako dolní a horní mez při popisu osy x
- šířku zapamatované části grafu v počtu bodů, která je obvykle větší než šířka zobrazovaného průběhu a umožňuje mi tak podívat se i na starší data, která se nevejdou do zobrazované části průběhu – zadává se přes roletové menu v položce Chart History Length.

49.3.2 Datové struktury pro indikátory grafů

Podle zvoleného typu grafu je nutno pro něj připravit i vhodnou datovou strukturu odpovídající vybranému typu grafu a počtu požadovaných průběhů v něm zobrazených. V následujícím popisu datových struktur je použita tato konvence:

- $[y]$ představuje jednorozměrné pole prvků y
- $y1, y2, y3$ představuje cluster s prvky $y1, y2$ a $y3$

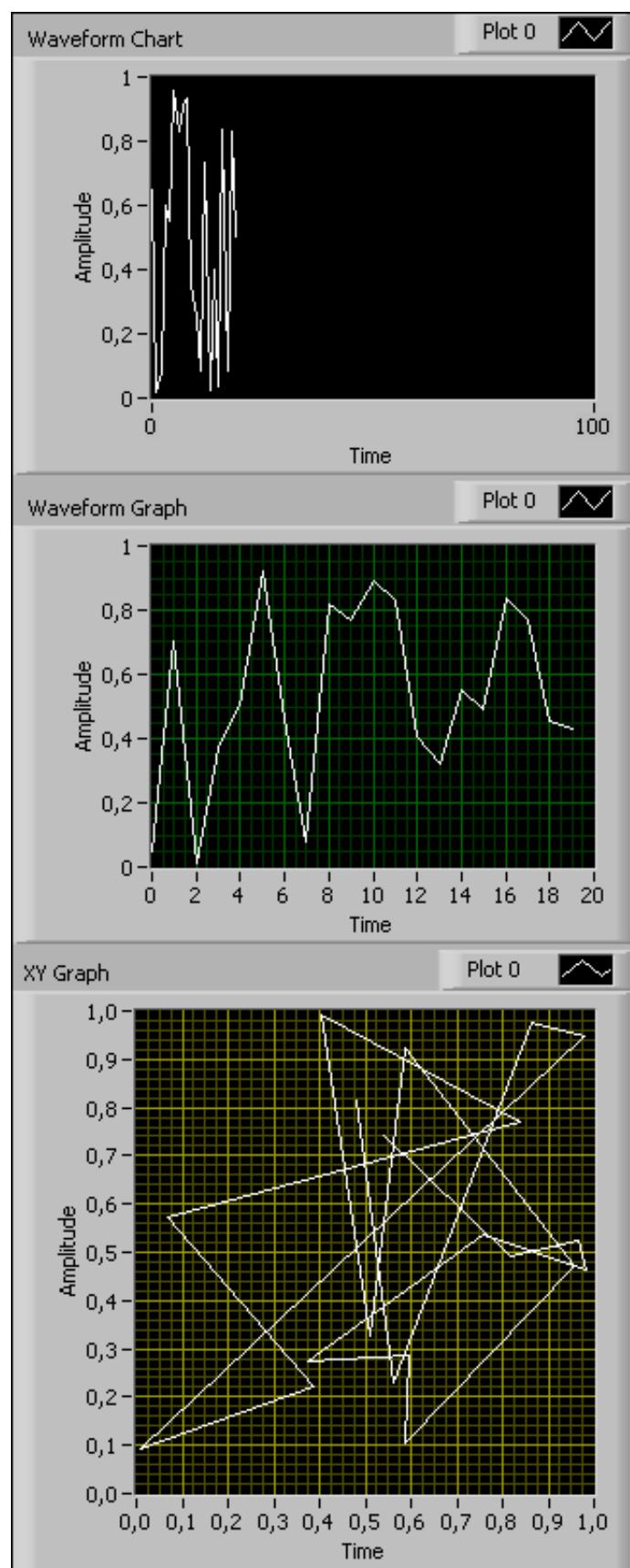
Pro programové vytvoření odpovídajících datových struktur se používá:

- v případě pole funkce Build Array nebo zapnutá indexace na výstupu z programových struktur cyklu typu FOR a typu WHILE.
- v případě clusteru funkce Bundle eventuálně funkce Bundle by Name

V případě složitějších datových struktur se tyto funkce kombinují, přičemž se postupuje od středu definice datové struktury k okrajům.

References

- [11] "Jeff Kodosky Predicts an Exciting Future for LabVIEW". In: *NI-Instrumentation Newsletter 1396* (2011), p. 2 (cit. on p. [488](#)).
- [Žído2] J. Žídek. "Grafické programování ve vývojovém prostředí LabVIEW". In: (2002), p. 215 (cit. on p. [488](#)).



Obrázek 49.3.2: Demonstrace rozdílu mezi registračním grafem (Waveform chart) a statickým grafem (Waveform Graph). Pro úplnost je zde zastoupen i XY graph

Část XXI

Výkonová elektronika

Kapitola 50

Měniče s vnější komutací

Obsah

50.1 Takt a komutace	498
--------------------------------	-----

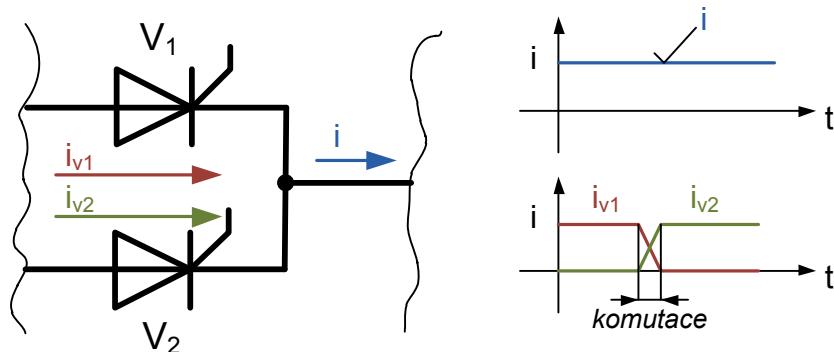
50.1 Takt a komutace

Spínáním hlavních polovodičových součástek v *hlavním obvodu* měniče nebo spínače je realizována žádaná funkce, tj. přeměna parametrů elektrické energie, u měničů, a spínání u spínačů. *Vedlejší obvod*, včetně vedlejších polovodičových součástek, zajišťuje činnost hlavního obvodu (např. vypínání hlavních tyristorů). Každá část hlavního obvodu mezi dvěma uzly je *hlavní větev*. Každá část vedlejšího obvodu mezi dvěma uzly je *vedlejší větev*.

Takt je časový interval mezi dvěma po sobě následujícími změnami vodivosti větví měniče či spínače. Označujeme jej značkami sepnutých součástek. Tak např. takt V₁, V₂ je časový interval, ve kterém jsou sepnuty součástky V₁, V₂.

Komutace větví měniče (spínače) je elektromagnetický děj v obvodu měniče (spínače) charakterizovaný přechodem proudu z jedné větve měniče (spínače) na druhou aniž by byl přerušen proud odtékající z (nebo přítékající do) uzlu obou větví. Termín komutace měniče (spínače) nelze zaměňovat s termínem komutace polovodičové součástky. Ke komutaci běžné dochází po sepnutí polovodičové součástky jedné z komutujících větví, *Sepnutí a nárůst proudu v této větvi, pokles proudu a nakonec vypnutí polovodičové součástky ve druhé větvi, umožňuje komutační napětí působící na obě větve*.

- **Vnější komutace** (dříve označována jako přirozená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným vně měniče. Užšími termíny síťová komutace nebo zátěžová komutace je blíže určován původ komutačního napětí.
- **Vlastní komutace** (dříve označována jako nucená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným ve vlastním obvodu měniče.
- **Přímá komutace** probíhá v jednom komutačním taktu (obr. 50.1.1), přímo z jedné hlavní větve na druhou. Přímou komutaci je možno označit též jako jednostupňovou.



Obrázek 50.1.1: Komutace.

Kapitola 51

Polovodičové součástky výkonové elektroniky

Obsah

51.1 MOSFET tranzistory	500
51.1.1 Odhad ztrátového výkonu tranzistoru	500

51.1 MOSFET tranzistory

51.1.1 Odhad ztrátového výkonu tranzistoru

Odhad ztrátového výkonu bude proveden pro potřeby výběru optimálního MOSFET tranzistoru pro danou výkonovou aplikaci

51.1.1.1 Typy ztrát v MOSFET struktuře a antiparalelní diodě

Celkové ztrát ve spínacím režimu lze rozdělit do tří složek:

- **Vodivostní ztráty** (Conduction losses)
- **Spínací ztráty** (Switching losses)
- **Blokovací ztráty** (Blocking "leakage" losses)

$$P_{TOTAL} = P_C + P_{SW} + P_B \doteq P_C + P_{SW} \quad (51.1.1)$$

Kapitola 52

Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů

Obsah

52.1	Úvod	503
52.2	Výkonové tranzistory MOS	504
52.2.1	Princip funkce tranzistoru MOS	504
52.2.2	Struktury tranzistorů MOS	504
52.2.3	Statické parametry	504
52.2.4	Výkonový tranzistor ve spínacím režimu	504
52.3	Tranzistory IGBT	504
52.3.1	Statické parametry	504
52.3.2	Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT	504
52.4	Metody řízení spínacího procesu	504
52.4.1	Vliv velikosti hradlového odporu	504
52.4.2	Aktivní řízení spínání (Active gate control)	504
52.5	Způsoby detekce nadproudů	506
52.5.1	Uvažované typy zkratových obvodů ve větvi výkonového měniče s indukční zátěží	508

52.5.2 Monitorování velikosti kolektorového napětí	509
52.5.3 Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping	509

52.1 Úvod

V obecném smyslu se pojmem budič výkonové součástky rozumí určité rozhraní mezi řídicí jednotkou a výkonovou součástkou. Základní funkcí je přizpůsobit logické řídicí signály způsobu ovládání hradla výkonové součástky. S rostoucím instalovaným výkonem a spínací frekvencí výkonového elektronického systému jsou na budiče kladený vyšší nároky. Častým požadavkem je spínání výkonové součástky na plovoucím potenciálu vůči řídicímu signálu. Z toho vyplývá nutnost galvanického oddělení řídicích signálů na rozhraní mezi řídicími a výkonovými obvody elektronického systému. Ve většině aplikací jsou také na galvanické oddělení kladený ještě bezpečnostní požadavky. Můžeme se proto setkat s budiči, které mají řídicí signály galvanicky odděleny, ačkoliv výkonový spínač pracuje na stejném potenciálu jako řídicí elektronika, nebo například s budiči s dvojitou izolací.

Při spínání často dochází k potenciálovým skokům mezi hradlem a řídicí elektronikou, což klade mimořádné požadavky na kvalitu galvanického oddělení a odolnost proti rušení vlivem du/dt . Budič tudíž vyžaduje vlastní, rovněž galvanicky oddělený napájecí zdroj, který je jednoznačně řešen vždy impulsním transformátorkem. Velmi důležitou součástí budiče jsou rychlé elektronické ochrany, jejich úkolem je zajistit "nezničitelnost" výkonového spínače. Informaci o nestandardním stavu kterékoliv ochrany je nutno hlásit zpět do řídicího systému.

V následující kapitole se budeme věnovat konstrukci a návrhu budičů pro výkonové spínače typu IGBT pro trakční aplikace. Při provozu nejen trakčních měničů, se během spínacího procesu IGBT prvku generují vysoké strmosti kolektorového napětí a proudu, které vytváří rušení (EMI) a přepěťové špičky při vypínání. Jelikož budič představuje elektronický obvod, pracující ve velmi těsné blízkosti výkonového spínače, existuje vždy elektromagnetická vazba, přes kterou se šíří rušení a je tedy nezbytné zkoumat jeho odolnost. Zpomalení spínacího procesu sice omezuje generované strmosti, ale vede ke zvyšování ztrát. Dosažení optimálního kompromisu mezi úrovní rušení a výkonovou ztrátou vede na konstrukci komplexních budičů, které spínací proces výkonové součástky kontrolují ve všech jeho fázích.

52.2 Výkonové tranzistory MOS

52.2.1 Princip funkce tranzistoru MOS

52.2.2 Struktury tranzistorů MOS

52.2.3 Statické parametry

52.2.4 Výkonový tranzistor ve spínacím režimu

52.2.4.1 Zapínací proces

52.2.4.2 Vypínací proces

52.3 Tranzistory IGBT

52.3.1 Statické parametry

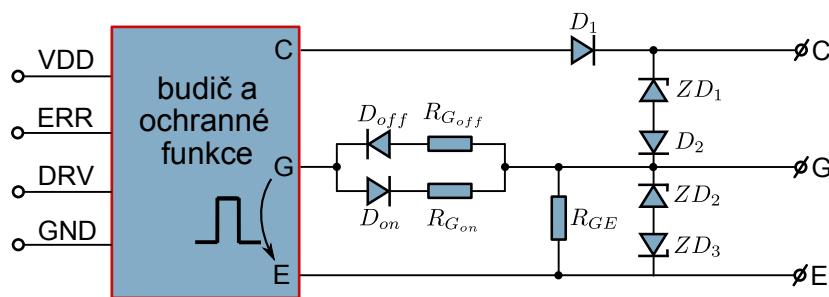
52.3.2 Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT

52.4 Metody řízení spínacího procesu

52.4.1 Vliv velikosti hradlového odporu

52.4.2 Aktivní řízení spínání (Active gate control)

Příklad budiče IGBT s čistě odporovým řízením spínacího procesu je na obrázku 52.4.1, z něhož je patrné, že při zapínání tranzistoru je na hradlo připojeno napětí $U_{d_{ON}}$ přes předřazený zapínací rezistor $R_{G_{ON}}$ a analogickým způsobem při vypínání je předřazen rezistor $R_{G_{OFF}}$. Spínací proces je tedy řízen pouze těmito rezistancemi. Na obrázku 52.4.1 jsou též vyznačeny základní ochrany:



Obrázek 52.4.1: Princip budiče s čistě odporovým řízením spínání společně se základními ochranami IGBT

- **Gate-Emitter-clamping (ZD2, ZD3),**
- **desaturation-monitoring (D1),**
- **overvoltage clamping (ZD1),**

které obvykle zajišťují činnost IGBT v bezpečné pracovní oblasti (Safe operating area - SOA) i během vystavení tranzistoru nejhorším pracovním podmínkám, jako jsou například zkrat nebo přepětí.

There are some drawbacks of the resistive control. There is no separate influence on collector current and collector emitter voltage in the switching interval. The switching losses increase relatively strong with higher RG. Varying the gate resistance influences both the switching and delay times. Often it is not possible to control overvoltages at turn-off sufficiently and in case of series connection of IGBTs additional measures are to be taken. To avoid these drawbacks and to adapt and optimize the switching behaviour to the requirements, the gate drive can be controlled actively. A lot of work has been done and published in this field, mostly for IGBTs in series connection or for high power [3, 4]. There are only few investigations aimed at the power range below high power [5], where because of extreme sensitivity to costs only a limited number of additional electronic components are allowed.

52.4.2.1 Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového proudu (dI/dt control)

Je-li $U_{GE} = U_{d_{ON}} > U_{GE_{th}}$ je IGBT spínač ve vodivém stavu a pouze celková parazitní indukčnost v obvodu zkratového proudu omezuje dI/dt kolektorového proudu. Doporučovanou možností jak redukovat maximální kolektorový proud $I_{C_{max}}$ a také maximální $dI_C/dt|_{max}$ je snížení hradlového napětí U_{GE} . Pro odvození závislosti strmosti

kolektorového proudu na hradlovém napětí vyjděme z náhradního schématu dle obr. 52.4.2 a idealizovaných průběhů spínacího a vypínacího procesu výkonového spínače dle obrázku *. Kolektorový proud v saturaci je možné vyjádřit vztahem

$$I_C = g_m \cdot (U_{GE} - U_{GE_{th}}) \quad (52.4.1)$$

kde g_m označuje transkonduktanci, $U_{GE_{th}}$ je prahové napětí (threshold voltage)

$$I_G = C_{GS} \frac{dU_{GS}}{dt} \quad (52.4.2)$$

$$\frac{dI_C}{dt} = g_m \frac{dU_{GS}}{dt} = \frac{g_m}{C_{GS}} \cdot I_G \quad (52.4.3)$$

Je-li $U_Z > U_{L_{SE}} + U_{GE}$ pak neprochází proud skrz větev omezovače na obr. 52.4.3 a můžeme sestavit náhradní rovnici dle obr. **. Hradlový proud vyjádříme z rovnice (52.4.3) a dosadíme do rov. 52.4.4.

$$U_{d_{ON}} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}})I_G + U_{GS} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (52.4.4)$$

$$U_{d_{ON}} - U_{GS} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} \frac{dI_C}{dt} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (52.4.5)$$

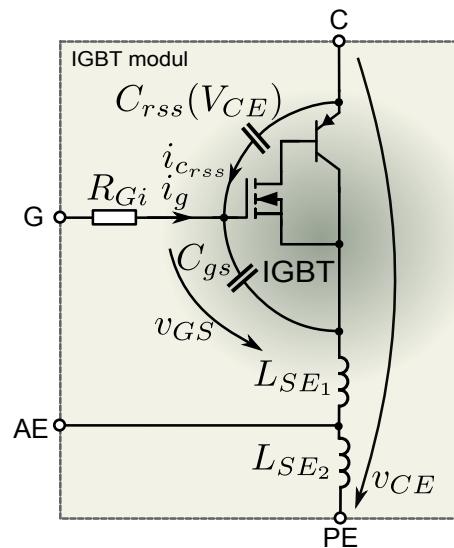
$$\frac{dI_C}{dt} = \frac{U_{d_{ON}} - U_{GS}}{(R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} + L_{SE_1}} \quad (52.4.6)$$

52.4.2.2 Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového napětí (dU/dt control)

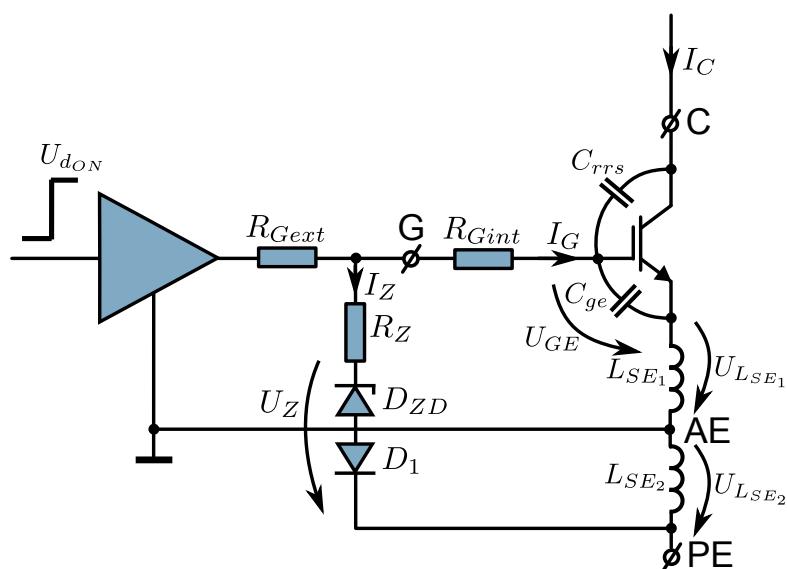
Jednoduchý způsob realizace tohoto způsobu řízení

52.5 Způsoby detekce nadproudu

Vysoká spolehlivost provozu výkonového systému, je v současnosti standardním požadavkem moderní komerční aplikace IGBT. Ochrana výkonových prvků před destrukcí v případě nadproudu je tedy nezbytná a bývá řešena následujícími konvenčními metodami:



Obrázek 52.4.2: Náhradní schéma IGBT modulu (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)



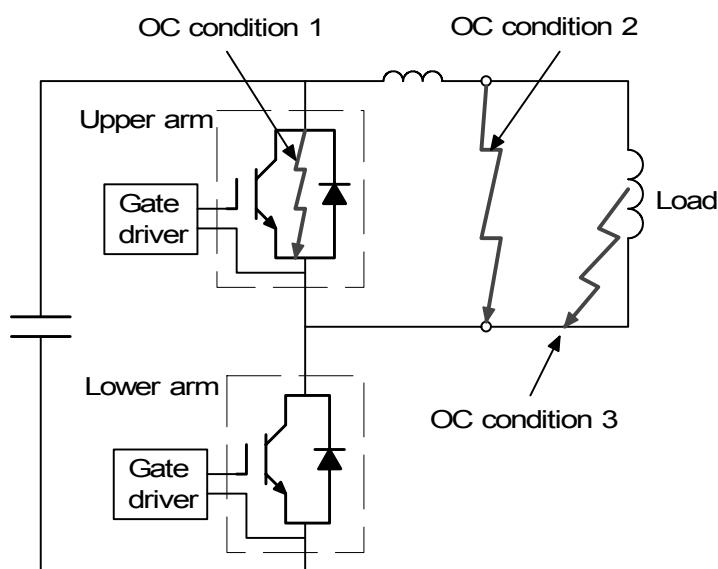
Obrázek 52.4.3: Obvod budiče se zavedenou zpětnou vazbou od di/dt tvořenou součástkami R_Z , $ZD1$, $D1$ (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)

- hlídání hodnoty kolektorového napětí U_{CE} - collector-emitter voltage monitoring method (viz 52.5.2),
- proudový transformátor - current transformer (CT).

První metoda je velice jednoduchá a její princip spočívá ve vyhodnocování úbytku mezi kolektorem a emitorem sepnutého tranzistoru. Problém nastává u vysokonapěťových aplikací, kde je nutné použít vysokonapěťovou signálovou diodu a navíc ochrana nefunguje během přechodného děje spínacího procesu, protože napětí U_{CE} klesá pomalu. Je tedy vhodné používat tuto ochranu v kombinaci s jinou. Širokému použití proudových transformátorů jen pro ochranné účely brání především cena spolu s velkým počtem kusů pro pokrytí všech možných kombinací zkratových obvodů, jež v dané aplikaci mohou nastat.

Následující kapitoly budou věnovány metodám detekce poruchového stavu a způsobům bezpečného vypnutí IGBT i v těchto nepříznivých režimech. Nejprve bude nutné kategorizovat možné poruchové režimy podle chování IGBT. Zajištění těchto funkcí je náplní moderního budiče IGBT.

52.5.1 Uvažované typy zkratových obvodů ve větví výkonového měniče s indukční zátěží



Obrázek 52.5.1: Znázornění třech uvažovaných zkratových obvodů ve věti výkonového měniče s indukční zátěží

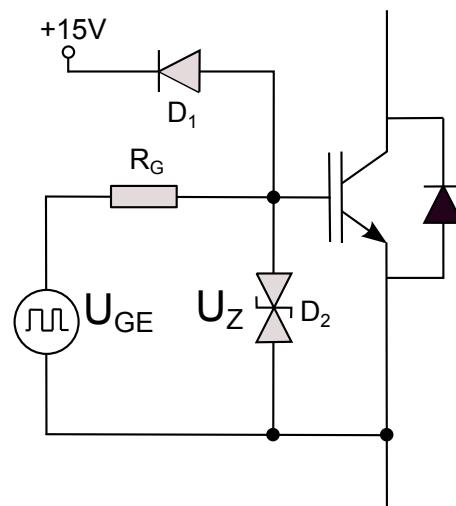
52.5.2 Monitorování velikosti kolektorového napětí

52.5.3 Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping

$$U_{Z_{GE}} = U_Z \cdot (1 + \alpha_T \cdot \Delta\vartheta_j) \cdot (1 + T_V) \leq U_{GE_{peak}}, \quad (52.5.1)$$

$$U_{GE_{max}} \leq U_Z \cdot (1 - T_V) \quad (52.5.2)$$

kde: U_Z ... jmenovité napětí transilu; $U_{GE_{peak}}$... špičková hodnota hradlového napětí - při zkratu: $\leq 17,5V$; α_T ... teplotní koeficient transilu; $\Delta\vartheta_j$... oteplení nad jmenovitou teplotou okolí $25^{\circ}C$; T_V ... katalogová tolerance transilu



Obrázek 52.5.2: Jednoduchá realizace omezovače hradlového napětí pomocí Shottkyho diody nebo tranzilu

Na obrázku 52.5.2 jsou znázorněny dvě jednoduché možnosti. V případě použití transilu je nutné dbát zvýšenou pozornost jeho výběru. Průrazné napětí musí mít co nejnižší rozptyl a při změně teploty okolí nesmí v běžném provozu omezovat budicí signál. Těmto požadavkům nejlépe vyhovuje transil 1.5KE16CA:

- $\alpha_T = 8 \cdot 10^{-4}$ ($12mV/K$),
- $\Delta\vartheta_j = 50K$ (předpoklad),
- $T_V = 5\%$,

z čehož vyplývají následující kontrolní rovnice

$$U_Z(@ + 75^\circ C; +5\%) = 17,53V \approx U_{GE_{peak}} \quad (52.5.3)$$

$$U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%) = 14,53V \approx U_{GE_{min}} \quad (52.5.4)$$

$$U_Z(@ + 25^\circ C; -5\%) = 15,20V \geq U_{GE_{max}} \quad (52.5.5)$$

V případě krajní hodnoty $U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%)$ dojde při buzení $U_{GE} = \pm 15V$ ke krátkodobé aktivaci ochranného transilu, což způsobí jeho ohřátí a posunutí hladiny U_Z .

Efektivita varianty se Shottkyho diodou (viz obr. 52.5.2) je závislá na velikosti parazitní indukčnosti mezi hradlem a kondenzátorem zdroje budiče. Zdroj budiče musí také zajistit aby napětí na tomto kondenzátoru při funkci ochrany nevzrůstalo.

Část XXII

Elektrické přístroje

Kapitola 53

Teorie elektrického oblouku

Obsah

53.1	Teorie spínacího oblouku	514
53.1.1	Plazma elektrického oblouku	514
53.1.2	Charakteristika vypínačního pochodu	514
53.1.3	Elektrický oblouk a jeho zhášení	518
53.1.4	Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového	518

53.1 Teorie spínacího oblouku

53.1.1 Plazma elektrického oblouku

Ve spínací technice se zabýváme plazmatem vznikajícím hořením elektrického oblouku při spínání elektrických obvodů. Dále popisované vlastnosti elektrického oblouku jsou rozpracovány pro druh plazmatu hořící ve vypínací dráze zhášecích komor vypínačů. Toto plazma se charakterizuje jako vysokotlaké (tlaky plynu vyšší než 0,1 MPa) a elektrické proudy řádově kiloampéry. Pozornost bude soustředěna zejména na elektrický oblouk hořící v tlakoplynových zhášecích komorách při vypínání elektrických obvodů. V tlakoplynových zhášecích komorách byl oblouk nejvíce prozkoumán u tlakovzdušného principu a u vypínačů s plynem SF₆ [BV83, s. 3].

53.1.2 Charakteristika vypínacího pochodu

53.1.2.1 Základní uspořádání zhášecích komor

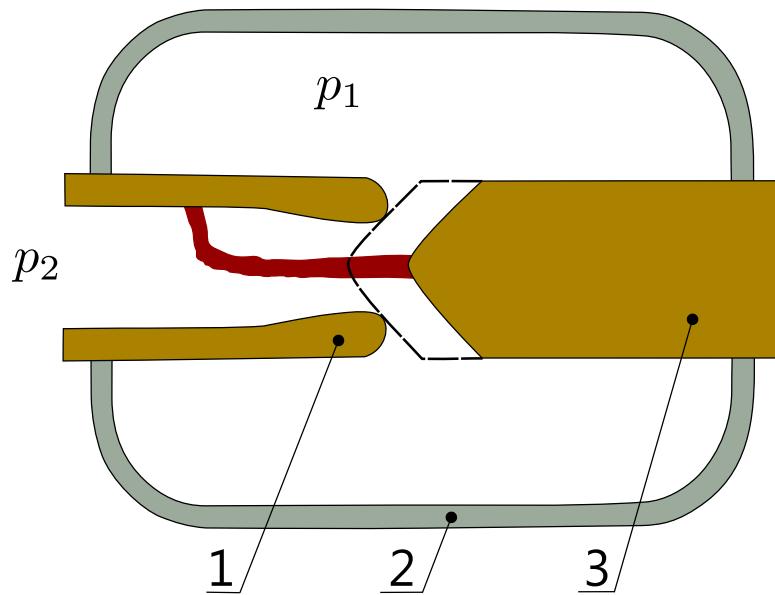
Základním uspořádáním zhášecích komor lze rozdělit z hlediska proudění plynu na zhášecí komory:

- s jednostranným prouděním,
- s dvoustranným prouděním.

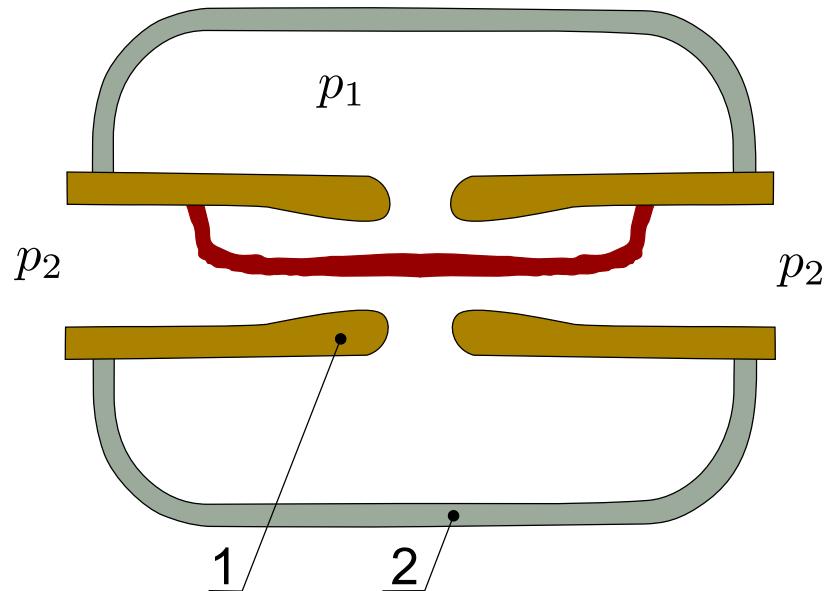
Na obrázcích je schématicky znázorněn oblouk, který je axiálně ofukován plynem z prostoru zhášecí komory s tlakem p_1 přes zhášecí trysky dutinou kontaktů do výfuku, kde je nižší tlak p_2 .

Legenda:

1. Zhášecí tryska
2. Tlaková izolační nádoba
3. Kontakt
 - p_1 ... tlak ve zhášecí komoře
 - p_2 ... tlak ve výfukovém prostoru



Obrázek 53.1.1: Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s jednostranným prouděním.



Obrázek 53.1.2: Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s dvoustranným prouděním.

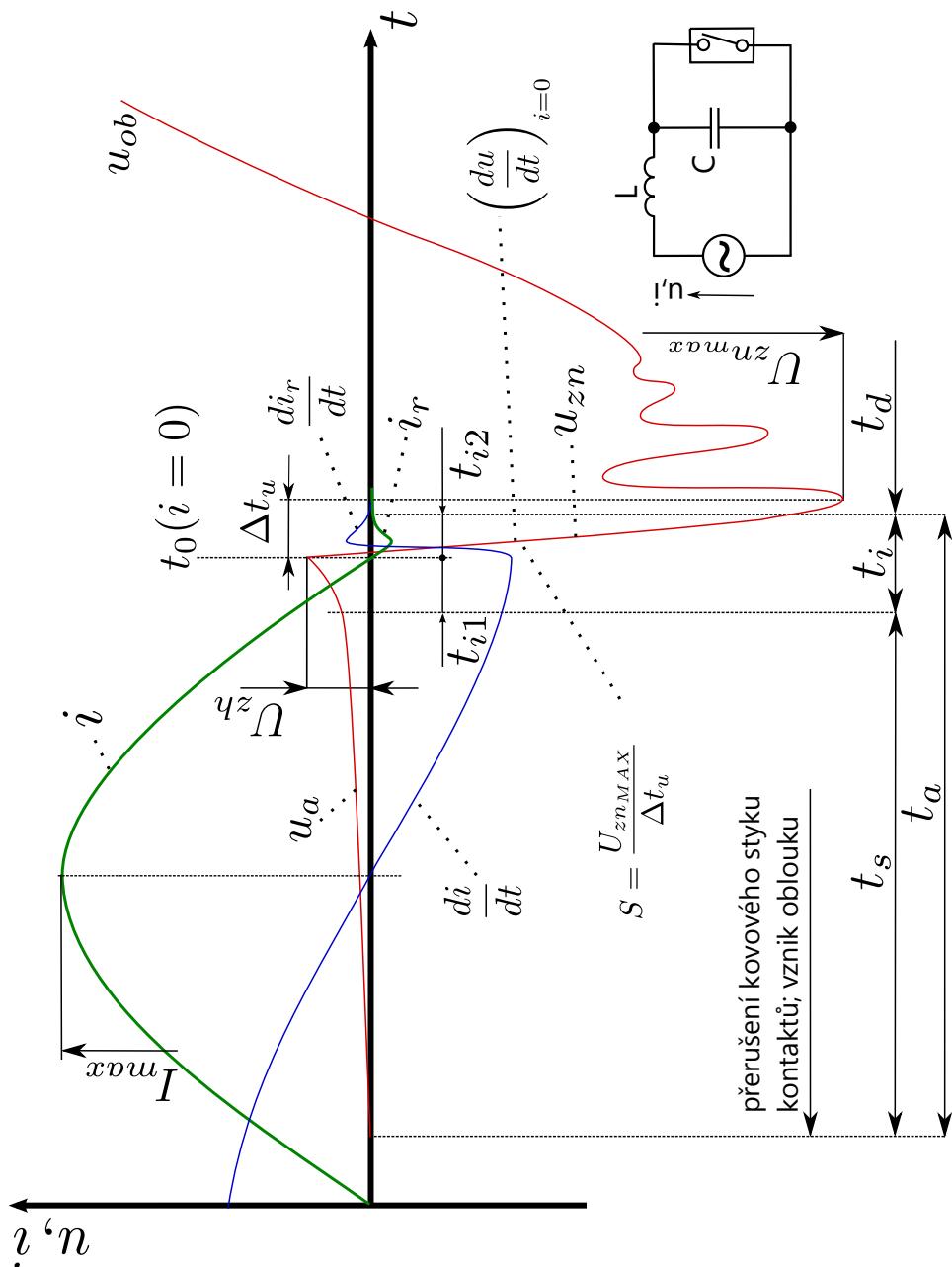
53.1.2.2 Tři základní intervaly vypínačího pochodu

Vypínačí pochod lze z hlediska zkoušení vypínačů rozdělit do tří základních intervalů:

1. t_s … **Silnoproudý interval**
2. t_i … **Interakční interval**
3. t_d … **Dielektrický interval**

- t_s … silnoproudý interval
- t_i … interakční interval
 - t_{i1} … interval výrazné změny obloukového napětí
 - t_{i2} … interval zbytkového proudu
- t_d … dielektrický interval
- t_a … doba hoření oblouku
- $\frac{di}{dt}$ … derivace proudu podle času
- i_r … zbytkový proud
- $\frac{di_r}{dt}$ … derivace zbytkového proudu podle času
- u_a … napětí oblouku
- U_{zh} … zhášecí amplituda napětí
- $U_{zn_{max}}$ … maximální hodnota zotaveného napětí
- u_{0b} … obnovené napětí
- S … strmost zotaveného napětí (podle IEC)
- Δt_u … doba od průchodu proudu nulou do okamžiku protnutí tečny obalující křivku u_{zn} v hodnotě $U_{zn_{max}}$
- $\frac{du}{dt}|_{i=0}$ … okamžitá strmost zotaveného napětí v nulové hodnotě proudu

Charakteristické parametry vypínače v intervalech vypínačího pochodu:



Obrázek 53.1.3: Základní intervaly vypínačího pochodu.

- $\mathbf{t}_s : i, I_{max}, u_a$
- $\mathbf{t}_a : \frac{di}{dt}, i_r, \frac{du}{dt}, u_{zn}, U_{zn_{max}}$
- $\mathbf{t}_d : \frac{du}{dt}, S, U_{zn_{max}}$

Rozdělení vypínacího pochodu do těchto intervalů umožňuje snadněji specifikovat základní kritéria, kterým musí zhášecí komora vyhovovat při vypínání. Při vypínání střídavého proudu charakter proudění plynu závisí nejen na časově proměnlivém zdvihu kontaktů, druhu plynu a tlakových poměrech, ale i na předcházejícím proudu, přičemž všechny veličiny jsou vzájemně závislé. Hranice intervalů však lze určit jen přibližně, protože jsou závislé na kmitočtu proudu a na časové konstantě oblouku. Časová konstanta oblouku je proměnlivá nejen s velikostí proudu, ale závisí i na uspořádání zhášecí komory.

53.1.3 Elektrický oblouk a jeho zhášení

53.1.4 Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového

Jak bylo uvedeno v předchozích kapitolách, ve zhášecí komoře výkonových vypínačů po zhasnutí oblouku ještě zůstává po krátkou dobu mezi elektrodami zbytkové plazma, které obsahuje značný počet volných elektronů. Je-li toto množství kolem 10^{14} až 10^{15} elektronů v metru krychlovém, pak je splněna podmínka pro tvorbu *elektronových lavin* nebo *strimérů* a strmě stoupající zotavené napětí může způsobit jiskrový výboj, který přejde okamžitě v obloukový opětný zápal. Protože v plazmě oblouku je hustota elektronů závislá na její teplotě, nemá-li dojít k opětnému zápalu, musí plazmu dobře fungující vypínač rychle ochladit. Chladící pochod je podmíněn vlastností plynu vyjádřenou textbf{teplelnou vodivostí} $[\frac{W}{K \cdot m}]$, kterou způsobují tyto dva dílčí jevy:

- Odvod kinetické energie plynu, který probíhá při vzájemných srážkách molekul rozkmitaných tepelnou energií plynu,
- Disociace molekul, kdy při rozkladech molekul na základní atomy se při nepružných srážkách pohlcuje disociační energie a tím se kinetická energie molekul přeměňuje na potenciální energii atomů. Tato se odvádí difúzí do oblasti plynu s nízkou teplotou.

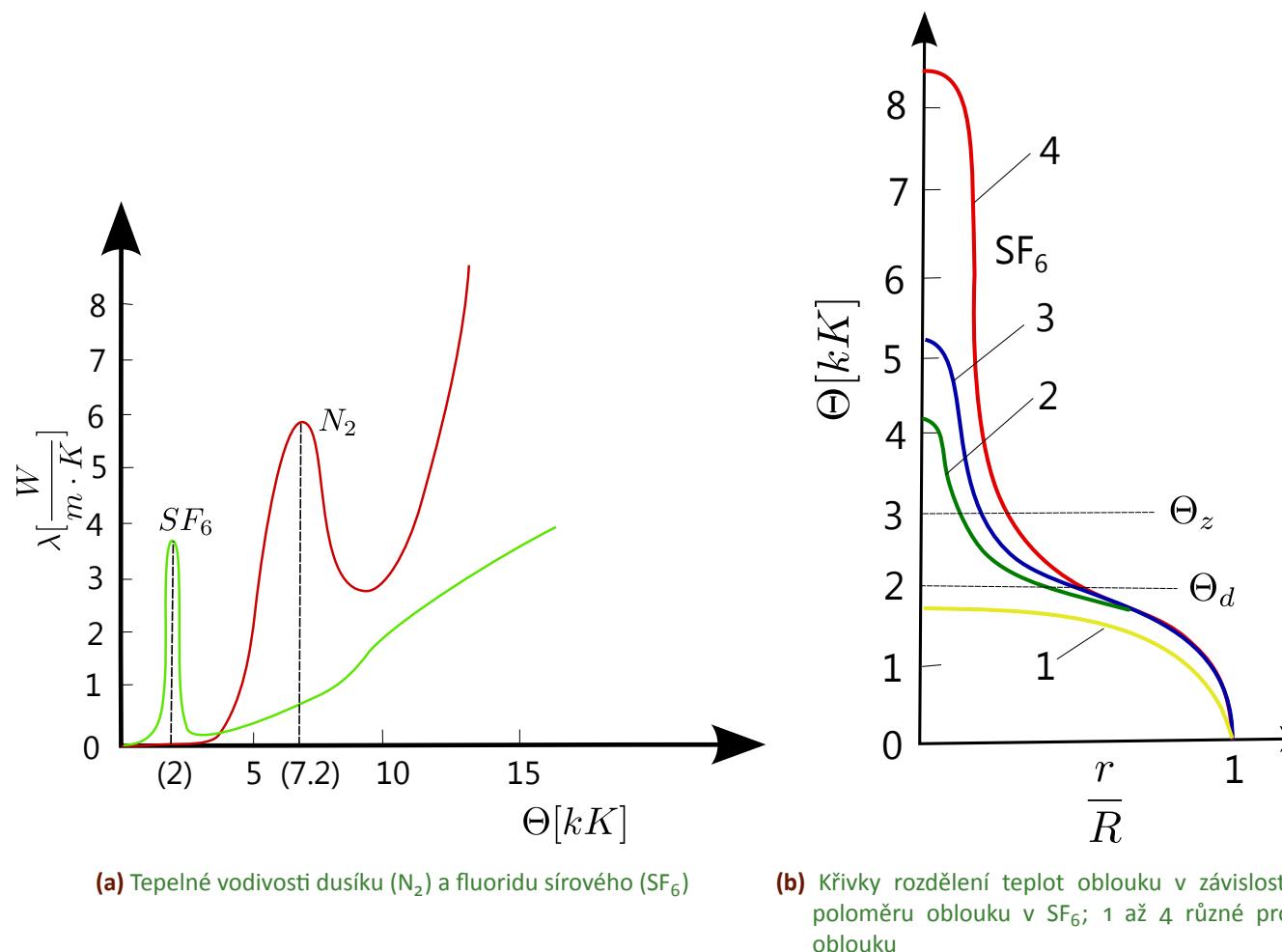
Disociace molekul nastává jen v úzkém teplotním intervalu charakterizovaném **disociační teplotou** Θ_d . Proto má křivka tepelné vodivosti plynu kolem teploty Θ_d značně vyjádřené maximum.

- Plyn SF_6 : $\Theta_d = 2500K$.
- Plyn N_2 (vzduch): $\Theta_d = 7500K$.

Rozdílné teploty Θ_d jsou způsobeny tím, že disociační energie molekuly dusíku N_2 je $14.5eV$, zatímco síra S disociuje z molekuly SF_6 již při energii $10.4eV$. Průběh křivek tepelných vodivostí různých plynů dovoluje současně odhadnout prostorové rozdělení teplot v elektrickém oblouku, neboť v místech s *maximální tepelnou vodivostí je minimální teplotní spád (gradient)*. Proto se v křivkách znázorňující rozdělení teploty oblouku v závislosti na jeho poloměru objevují v okolí disociačních teplot pro dusík N_2 a SF_6 znatelné zlomy pro různé velikost proudů. Z těchto průběhů je také možné určit dvě zcela rozdílné oblasti oblouku:

- **Trup oblouku:** velmi jasně zářící oblast s vysokými teplotami ležícími nad Θ_d
- **Plášť oblouku:** difúzně svítivá část oblouku s teplotami dosahujícími maximálně Θ_d

Důležitost disociační teploty Θ_d molekuly plynu zvlášť vyniká při sledování rychlosti zmenšování hustoty elektronů ve zbytkové plazmě oblouku, která je kritériem vzniku elektrického výboje mezi kontakty. Protože ve žhavém trupu je úbytek hustoty elektronů stokrát rychlejší než ve vnějším pláště oblouku, zaniká po nule proudu nejprve zářivý trup oblouku. *Zotavené napětí* působí již jen na *plášť oblouku*, v němž se hustota elektronů zmenšuje jen velmi zvolna. Protože kritickou veličinou pro elektrický výboj v plynném prostředí je hustota elektronů kolem $10^{14}/m^3$, bylo z kinetické teorie plynů odvozeno, že tento stav odpovídá přibližně teplotě kolem **3000 K**.



Obrázek 53.1.4: Základní charakteristiky oblouku hořícího v plynech SF_6 a porovnání s dusíkem

Bibliography

- [Bio04] D. Biolek. *Řešíme elektronické obvody aneb kniha o jejich analýze*. Vol. 1. BEN - technická literatura, 2004, p. 520. ISBN: 80-7300-125-X (cit. on pp. [219](#), [221–223](#)).
- [Bio05] D. Biolek. *Modelování a simulace v mikroelektronice*. VUT Brno, 2005 (cit. on p. [300](#)).
- [BLV07] J. Bičák, M. Laipert, and M. Vlček. *Lineární obvody a systémy*. nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN: 978-80-01-03649-5 (cit. on pp. [200](#), [201](#)).
- [BV83] K. Bárta and Z. Vostracký. *Spínače velmi vysokého napětí*. SNTL/ALFA, 1983. ISBN: 80-03-00044-0 (cit. on p. [514](#)).
- [Dos05] J. Dostál. *Operační zesilovače*. Vol. 1. vydání. Nakladatelství BEN, 2005, p. 536. ISBN: 80-7300-049-0 (cit. on pp. [306](#), [308](#), [311](#)).
- [Ham96] J. Hammerbauer. *Elektrické napájecí zdroje a akumulátory*. Plzeň: Vydavatelství ZČU, 1996, p. 181 (cit. on pp. [355](#), [356](#), [367](#), [376](#)).
- [Haz+10] J. Haze et al. “Teorie vzájemného převodu analogového a číslicového signálu”. In: *skripta VUT Brno* (2010), p. 139 (cit. on pp. [314](#), [315](#)).
- [Her94] P. Herout. *Učebnice jazyka C*. České Budějovice: Nakladatelství KOPP, 1994, p. 269. ISBN: 80-85828-21-9 (cit. on p. [454](#)).
- [Kes04] W. Kester. *Analog-Digital Conversion Handbook*. Ed. by A. Devices. Analog Devices, 2004, p. 1032. ISBN: 9780750678414 (cit. on p. [317](#)).
- [Mam99] R. Mammano. “Switching Power Supply Topology Voltage Mode vs. Current Mode”. In: *Unitrode DN-62* (1999), p. 4 (cit. on p. [377](#)).
- [Nelo08] C. Nelson. “Dual Output Regulator Uses Only One Inductor”. In: *Linear Technology DN-100* (Jan. 1, 2008), p. 6 (cit. on p. [379](#)).
- [NU01] P. Neumann and J. Uhlíř. *Elektronické obvody a funkční bloky 2*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001, p. 269. ISBN: 80-01-02394-X (cit. on pp. [304](#), [314](#), [320](#), [323](#)).

- [NVP99] V. Novotný, P. Vorel, and M. Patočka. *Napájení elektronických zařízení*. Ed. by Ú. r. Vysoké učení technické Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Brno: VUT Brno, 1999, p. 139. ISBN: 8021423005, 9788021423008 (cit. on pp. [358](#), [360](#), [367](#)).
- [Pin06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on p. [434](#)).
- [PVo4] M. Patočka and P. Vorel. *Řídící elektronika - pasivní obvody 1.díl*. Vol. 1. VUT Brno, 2004, p. 106 (cit. on p. [218](#)).
- [Riz03] G. Rizzoni. *Principles And Applications Of Electrical Engineering*. McGraw Hill, 2003, p. 956. ISBN: 0072463473 (cit. on p. [350](#)).
- [Scho01] H. Schildt. *Nauč se sám C++*. 1st ed. Praha: SoftPress, 2001, p. 624. ISBN: 80-86497-13-5 (cit. on p. [462](#)).
- [Sla02] J. Slavík. *Řešené příklady z fyziky - klasická fyzika*. 4th ed. ZČU Plzeň, 2002, p. 233 (cit. on p. [147](#)).
- [SOo2] V. Stejskal and M. Okrouhlík. *Kmitání s MATLABEM*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2002, p. 376. ISBN: 80-01-02435-0 (cit. on p. [150](#)).
- [ŠS10] V. Šebesta and Z. Smékal. *Signály a soustavy*. česky. Brno: VUT Brno, 2010, p. 155 (cit. on p. [315](#)).
- [Šťa10] J. Šťastný. *FPGA prakticky - Realizace číslicových systémů pro programovatelná hradlová pole*. 1. vydání. BEN - technická literatura, 2010 (cit. on pp. [428](#), [432](#)).
- [Što95] I. Štoll. "Mechanika". In: *Mechanika*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 1995, p. 228 (cit. on p. [151](#)).
- [USo2] J. Uhlíř and P. Sovka. *Číslicové zpracování signálů*. Nakladatelství ČVUT, 2002, p. 327. ISBN: 80-01-02613-2 (cit. on pp. [194](#), [196](#)).
- [VZo1] J. Vobecký and V. Záhlava. *Elektronika součástky a obvody, principy a příklady*. 2. vydání. Praha: Grada Publishing, spol. s.r.o., 2001, p. 192. ISBN: 80-7169-884-9 (cit. on p. [347](#)).
- [WRB48] W.R.Bennet. *Spectra of Quantized Signals*. Bell System Technical Journal. Bell Labs, July 1948 (cit. on p. [319](#)).