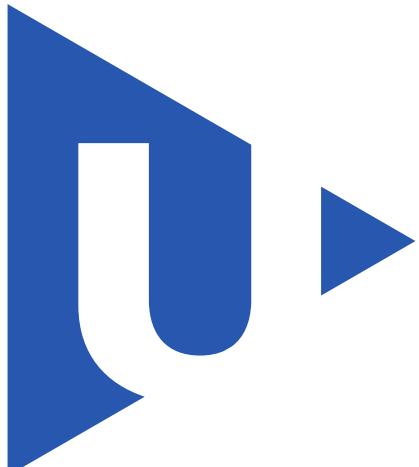


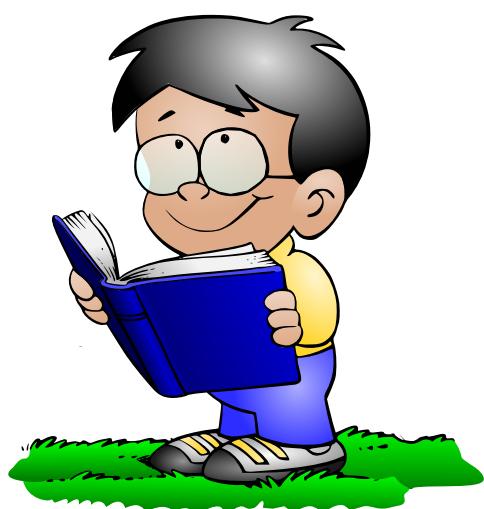
WIKING





ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

My school notes



Studijní notes

Wiking

May 3, 2012

Jaroslav Fait, jardak.fait@gmail.com
Fakulta elektrotechniky
Západočeská univerzita

Obsah

I Lineární algebra	1
1 Zaklády lineární algebry	3
1.1 Matice	4
1.2 Determinanty	7
1.3 Vlastní čísla a vlastní vektory	9
1.4 Polynomy	15
1.5 Vektorové prostory se skalárním součinem	16
II Matematická analýza	19
2 Úvod do matematické analýzy	21
2.1 Funkce jedné reálné proměnné	22
Seznam literatury	23
3 Diferenciální počet	25
3.1 Vyšetřování průběhu funkcí	26
4 Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné	31
4.1 Neurčitý integrál	32
4.2 Určitý integrál	37
4.3 Vlastnosti určitého integrálu	39
5 Obyčejné diferenciální rovnice	43
5.1 Diferenciální rovnice 1. řádu	44
III Numerické metody	47
6 Úvod do numerických metod	49
6.1 Úvodní slovo	50
6.2 Reprezentace čísel ve výpočetní technice	51

6.3 Chyby při numerických výpočtech	52
6.4 Řešení nelineárních rovnic	55
IV Fyzika	57
7 Historie fyziky	59
7.1 Hlavní etapy vývoje	60
8 Diferenciální počet vektorových polí	63
8.1 Vektorový počet	64
8.2 Skalární a vektorová pole	66
8.3 Derivace polí - gradient	68
8.4 Operátor ∇	71
8.5 Diferenciální rovnice proudění tepla	74
8.6 Druhé derivace vektorových polí	76
9 Integrální počet vektorových polí	79
9.1 Tok vektorového pole	80
10 Speciální teorie relativity	81
10.1 Princip relativity	82
10.2 Lorentzova transformace	84
11 Geometrická optika	85
11.1 Úvod	86
V Astrofyzika	87
12 Úvod	89
12.1 Historie astrofyziky	90
12.2 Základní vztahy	90
VI Mechanika	95
13 Kinematika částice	97
13.1 Kinematický popis pohybu částice	98
14 Dynamika částice	113

VII Teorie elektromagnetického pole	115
15 Spojité matematické modely polí	117
15.1 Působení na dálku versus teorie pole	118
15.2 Elektromagnetické pole	119
15.3 Elektrostatické pole	123
15.4 Stacionární proudové pole	124
15.5 Stacionární magnetické pole	126
VIII Signály a soustavy	141
16 Číslicové signály - posloupnosti	143
16.1 Základní typy posloupností	144
16.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	145
16.3 Základní operace s posloupnosti	146
17 Vlastnosti a popis lineárních systému	149
17.1 Linearita, časová invariance a kauzalita	150
17.2 Popis spojitych a diskrétních systémů, přenosová funkce	156
IX Teorie elektrických obvodů	165
18 Základy elektrických obvodů	167
18.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů	168
18.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	168
18.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí	171
18.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	173
18.5 Napěťový dělič	176
19 Přechodné děje	179
19.1 Fyzikální podstata přechodných dějů	180
19.2 Přechodný jev kmitavého obvodu	185
20 Harmonické obvody	187
20.1 Obvody s nastavitelnými parametry	188
X Elektronické součástky	189
21 Transformátory a cívky	191
21.1 Základní pojmy z magnetismu	192

21.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou	194
21.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení	196
21.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	198
21.5 Ztráty v reálném transformátoru	203
21.6 Rozptyl transformátoru	205
21.7 Cívky s feromagnetickým jádrem	207
21.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	208
XI Analogové elektronické systémy	217
22 Počítačová simulace v elektrotechnice	219
22.1 Historie	220
22.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV	221
23 Zesilovače	223
23.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	224
24 Operační zesilovače	225
24.1 Úvod	226
24.2 Parametry operačního zesilovače	226
24.3 Ideální operační obvod	227
25 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	229
25.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	230
25.2 Principy A/D převodníků	239
25.3 Převod číslicového signálu na analogový	240
26 Úvod	245
26.1 Filtry ARC 2. řádu	246
XII Elektronické napájecí zdroje	249
27 Spojitě regulované napájecí zdroje	251
27.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích	252
27.2 Neřízené usměřovače	252
27.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí	253
27.4 Násobiče napětí	258
27.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů	258
28 Impulzně regulované napájecí zdroje	259

28.1 Úvod	261
28.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice	261
28.3 DC/DC měniče bez transformátoru	264
28.4 DC/DC měniče s transformátorem	272
28.5 Metody regulace spínaných zdrojů	280
28.6 Sbírka zapojení neizolovaných měničů	283
XIII Číslicové elektronické systémy	285
29 Číslicové systémy a signály	287
29.1 Kombinační logické funkce	288
30 Číslicové součástky a technologie	291
30.1 Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	292
30.2 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	292
XIV Mikroprocesorová technika	299
31 Procesory AVR	301
31.1 AVR Architektura	302
XV Programovatelné logické obvody	303
32 Architektura	305
32.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů	306
32.2 Dynamické parametry PLD	317
33 Jazyk VHDL	321
33.1 Úvod	322
33.2 Základní vlastnosti jazyka VHDL	322
33.3 Souběžné příkazy	323
33.4 Sekvenční příkazy	324
33.5 Technologicky nezávislá část návrhu	324
33.6 Knihovna LPM	325
XVI Elektromagnetická kompatibilita	331
34 Vlastnosti plošných spojů	333

XVII C	335
35 Terminálový vstup a výstup	337
35.1 Hlavičkový soubor stdio.h	338
35.2 Standardní vstup a výstup znaku	338
35.3 Standardní vstup a výstup řetězců	339
35.4 Formátovaný standardní vstup a vystup	340
35.5 Souhrnné cvičení	340
36 Pointery	343
36.1 Základy práce s pointery	344
37 Preprocesor jazyka C	347
37.1 Připojení externích souborů	348
37.2 Definice maker	348
37.3 Podmíněný překlad	348
XVIII ANSI/C++	349
38 Přehled jazyka C++	351
38.1 Objektově orientované programování	352
39 Úvod do tříd	367
39.1 Funkce konstruktor a destruktor	368
XIX Výkonová elektronika	375
40 Měniče s vnější komutací	377
40.1 Takt a komutace	378
41 Polovodičové součástky výkonové elektroniky	381
41.1 MOSFET tranzistory	382
42 Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů	383
42.1 Úvod	384
42.2 Výkonové tranzistory MOS	385
42.3 Tranzistory IGBT	385
42.4 Metody řízení spínacího procesu	385
42.5 Způsoby detekce nadproudů	388

XX Elektrické přístroje	391
43 Teorie elektrického oblouku	393
43.1 Teorie spínacího oblouku	394

Část I

Lineární algebra

Kapitola 1

Zaklády lineární algebry

Obsah

1.1	Matice	4
1.1.1	Maticová algebra	4
1.1.2	Označení prvků matice	7
1.2	Determinanty	7
1.2.1	Permutace	7
1.3	Vlastní čísla a vlastní vektory	9
1.3.1	Motivace	9
1.4	Polynomy	15
1.4.1	Rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky	15
1.5	Vektorové prostory se skalárním součinem	16
1.5.1	Ortogonalní doplňky	16

1.1 Matice

Definice 1.1.1 Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici (m, n) . Jestliže každé uspořádané dvojici $(m, n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ přiřadíme prvek $a_{i,j} \in \mathcal{R}$ obdržíme reálnou matici typu (m, n) nad \mathcal{R} . Čísla jsou indexy, i je řádkový a j je sloupcový index. Matici zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

která má právě mn prvků (a_{ij}) uspořádaných do m řádků a n sloupců. Stručně píšeme $A = (a_{ij})$

Příklad 1.1.1 Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

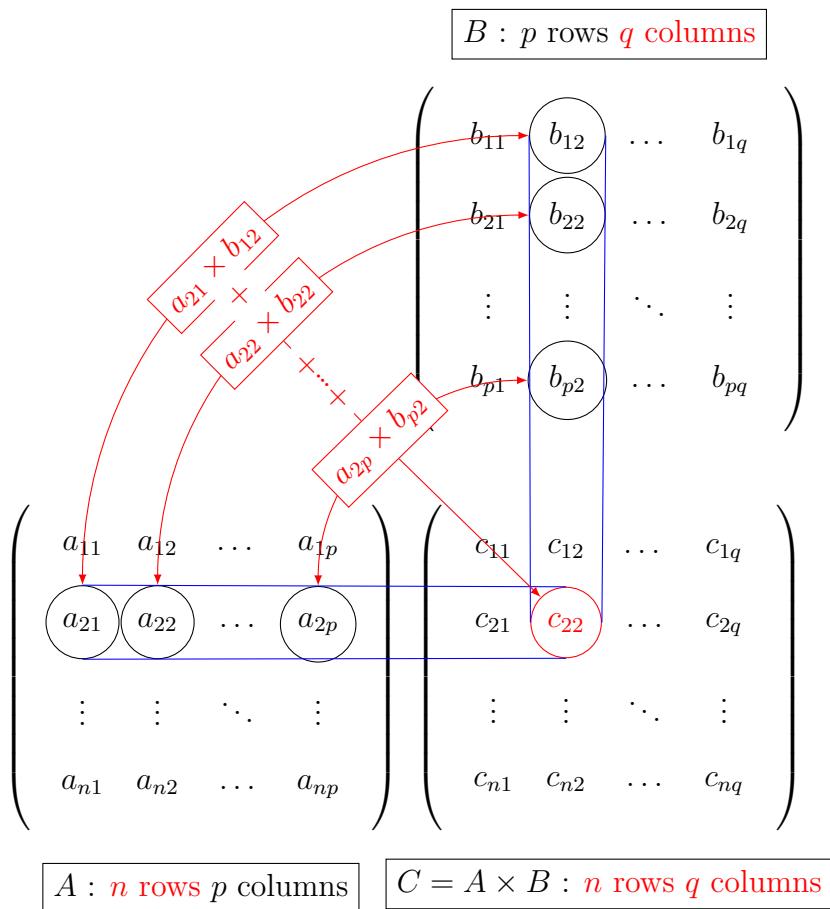
je čtvercová matice velikosti 4×4 . Prvek matice a_{23} je 2.

1.1.1 Maticová algebra

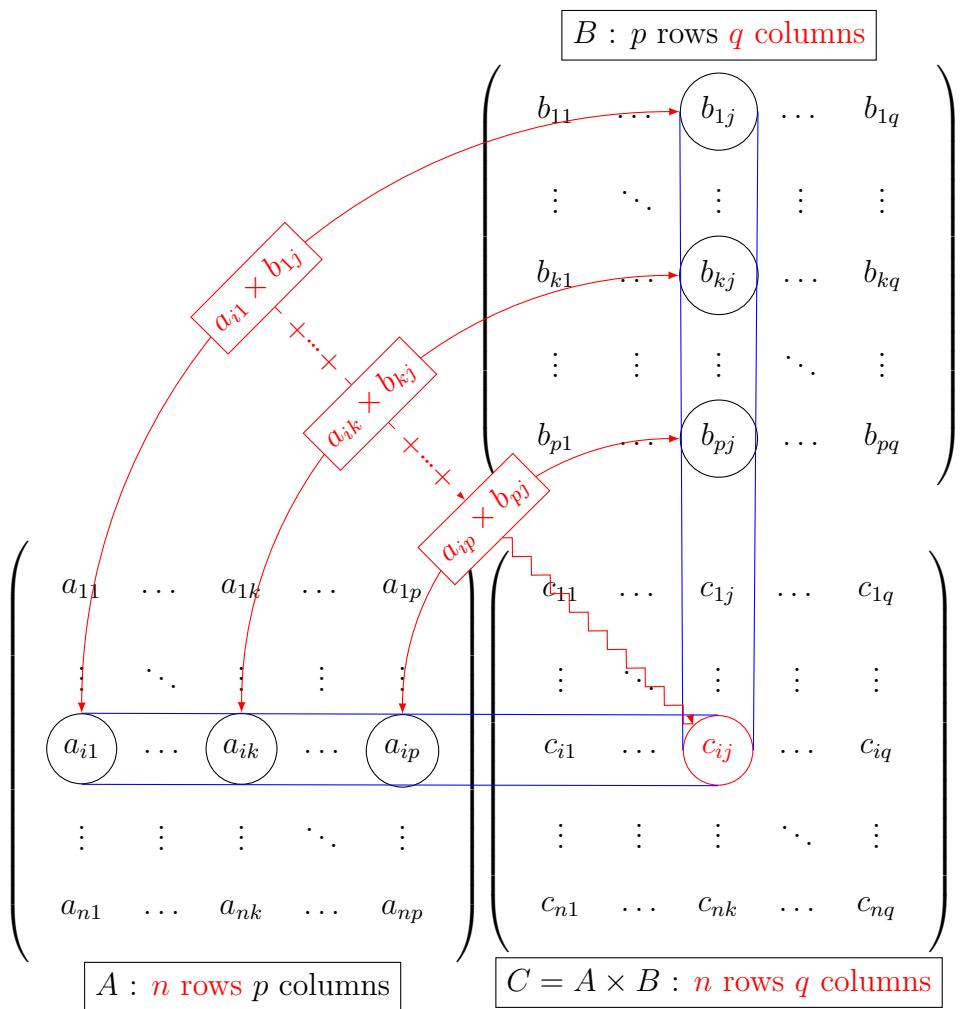
Definice 1.1.2 Součinem matice $A \in \mathcal{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathcal{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathcal{R}_{m,p}$ pro kterou platí:

$$C = AB; C = (c_{ij}); c_{ij} = \sum_n^{k=1} a_{ik} b_{kj}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p. \quad (1.2)$$

Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B . Obrázek 1.1 demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobením druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku c_{ij} (viz 1.2).



Obrázek 1.1: Násobení matic - 1. krok



Obrázek 1.2: Násobení matic - 2. krok

1.1.2 Označení prvků matice

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **rádek** a **sloupec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A se obvykle značí a_{ij} . Potom i-tý řádek matice obsahuje vodorovnou n-tici prvků $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a j-tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, kde $j = 1, 2, \dots, n$.

V tabulce 1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální¹, jednotkové², nulové, transponované a symetrické.

Matice téhož typu (m, n) nad \mathbb{R} budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

Definice 1.1.3 (Rovnost matic): Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je rovna matici $\mathbf{B} = (b_{kl})$, jsou-li matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě **rovnaží**, tj. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{m,n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.2 Determinanty

1.2.1 Permutace

Definice 1.2.1 Nechť \mathbf{M} je libovolná konečná množina. Permutací množiny M nazýváme zobrazení π množiny \mathbf{M} na sebe.

Příklad 1.2.1 Permutace π množiny $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ je např. zobrazení π , definované předpisem:

$$\pi(a) = c, \pi(b) = d, \pi(c) = b, \pi(d) = a, \quad (1.3)$$

Místo tohoto zápisu se však používá přehlednější zápis ve tvaru matice typu $(2, 4)$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

kde v prvním řádku jsou vypsány všechny prvky množiny \mathbf{M} (v libovolném pořadí) a ve druhém řádku je pod každým prukem zapsán jeho obraz v permutaci. Tutož permutaci však můžeme zapsat ve tvaru matice několika různými způsoby.

¹Prvky a_{ii} kde $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice \mathbf{D} je typu (m, m) , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

²Jestliže $m = n$, pak mluvíme o čtvercové matici rádu m .

Matrice	Zápis
řádková	$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
sloupcová	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
diagonální	$a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
jednotková	$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
nulová	$\mathbf{0} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \forall i, j$
transponovaná	$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
symetrická	$\mathbf{S} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

Tabulka 1.1: Speciální typy matic

Například mohou být zapsány takto:

$$\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \\ a & b & d & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & c & a & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \text{apod.} \quad (1.5)$$

Zřejmě všechny čtyři uvedené zápisy permutace rov. 1.4 ve tvaru matice se liší navzájem.

jem pouze pořadím sloupců. Aby bylo možné zapsat každou permutaci množiny \mathbf{M} ve tvaru rov. 1.4 jediným způsobem, je nutné zvolit pevné pořadí prvků množiny \mathbf{M} a v zápisu permutace uvádět prvky matice \mathbf{M} v prvním řádku v tomto pořadí. Avšak známe-li toto pořadí prvků množiny \mathbf{M} , je pak obvykle zbytečné jej v zápisu permutace uvádět, ale stačí uvést pouze pořadí obrazů, tj. druhý řádek. Zvolíme-li např. v naší množině \mathbf{M} pevné pořadí prvků $\{a, b, c, d\}$, pak permutaci rov. 1.3 zapíšeme jako uspořádanou čtevěřici $\{c, d, b, a\}$.

Definice 1.2.2 *Když vytváříme uspořádanou n-tici navzájem různých prvků n-prvkové množiny \mathbf{M} , přiřazujeme každému pruku množiny \mathbf{M} právě jedno přirozené číslo, index příslušného pruku, z množiny prvních n přirozených čísel.*

$$\pi = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (1.6)$$

Proto každé permutaci uspořádané n-tice prvků množiny \mathbf{M} odpovídá jednoznačně permutace příslušných indexů tj. permutace množiny 1.6 z definice 1.2.2. Stačí se tedy omezit při vyšetřování permutací n-prvkové množin na vyšetřování permutací množiny 1.6 Permutace π množiny 1.6 budeme zapisovat jako uspořádané n-tice $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$, kde $\pi(i)$ je číslo z množiny 1.6, které permutace π přiřazuje číslu i .

Příklad 1.2.2 *Spočítejme celkový počet permutací množiny.* V každé uspořádané n-tici může být na prvním místě kterákoli z n cifer, na druhém místě kterákoli ze zbývajících $n - 1$ cifer (kromě té, která je na prvním místě), na třetím místě každá ze zbývajících $n - 2$ cifer atd. Je tedy celkový počet všech permutací n-prvkové množiny $n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Toto číslo se zapisuje pomocí symbolu $n!$ (čti **n-faktoriál**).

Definice 1.2.3 Inverze v permutaci: Inverzí v permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

1.3 Vlastní čísla a vlastní vektory

1.3.1 Motivace

Poznámka: Je-li $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární zobrazení z prostoru \mathcal{V} do prostoru \mathcal{V} (nikdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít takovou bázi prostoru \mathcal{V} , že je matice zobrazení \mathbf{A} v této bázi co nejjednodušší,

např. má následující strukturu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

kde A_k jsou čtvercové matice malého rádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde A_k jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definice 1.3.1 Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{n,n}$ (matice je čtvercová rádu n).

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jestliže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (1.7)$$

pro jisté komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n$, $\mathbf{u} \neq \Theta$, potom číslo λ nazýváme **vlastním číslem** matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{u} **vlastním vektorem** příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme **spektrem matice** \mathbf{A} . Pokud rov. 1.7 rozpíšeme, dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

můžeme ji rovněž psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Poznámka: U vlastních čísel studium pouze reálných matic ztrácí smysl, protože i reálná matice může mít komplexní vlastní čísla. Proto se uvažuje obecná komplexní matice.

Poznámka: Podmínka existence nenulového vektoru $\mathbf{u} = \Theta$ v definici vlastního čísla je nezbytná: kdyby bylo přípuštěno i $\mathbf{u} = \emptyset$, potom by každé komplexní číslo bylo vlastním číslem a definice by ztratila smysl.

Poznámka: Odpovídá-li matice \mathbf{A} matici nějakého zobrazení \mathcal{A} , pak každý nenulový vektor z jádra zobrazení $\ker \mathcal{A}$ je vlastním vektorem příslušnému vlastnímu číslu \emptyset . Je-li $\ker \mathcal{A} = \{\Theta\}$ (je-li matice \mathbf{A} regulární), pak \emptyset není vlastním číslem matice \mathbf{A} .

Příklad 1.3.1 Je-li \mathbf{P} matice ortogonální projekce v prostoru \mathbb{R}^3 na nějaký podprostor \mathcal{U} (\mathcal{U} je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, všechny vektory z \mathcal{U} (s výjimkou nulového vektoru Θ) jsou vlastními vektory matice \mathbf{P} příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor \mathcal{U}^\perp je roven jádru projekce (nulovému prostoru matice \mathbf{P}), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku \mathcal{U} (s výjimkou Θ) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.

Soustava rov. 1.9 je **homogenní** a stručně ji můžeme zapsat

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

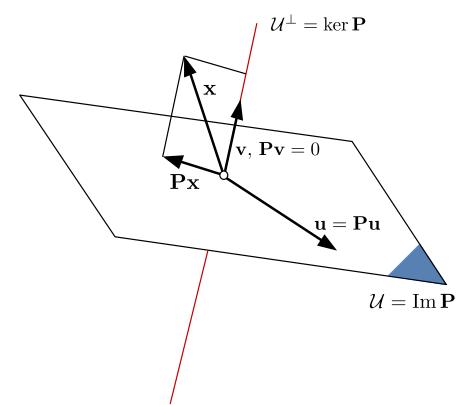
Homogenní soustava má netriviální řešení, právě když je determinant matice soustavy roven nule, tj. v případě soustavy rov. 1.9, resp. rov. 1.10 platí

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

Determinant $A(\lambda) = |A - \lambda I|$ nazýváme **charakteristický polynom** matice A - jedná se o polynom stupně n v proměnné λ , který má v oboru komplexních čísel n kořenů. Rovnici $A(\lambda) = 0$ nazýváme **charakteristická rovnice matice A** - jejími kořeny jsou **charakteristické hodnoty** (resp. **vlastní čísla**) matice A .

Příklad 1.3.2 Určete spektrum matice a její spektrální poloměr následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$



Rешение: Spektrum matice je množina všech jejích vlastních čísel. Spektrální poloměr je maximum z absolutních hodnot vlastních čísel. Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -3 - \lambda & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2 - \lambda)^2(-3 - \lambda) + 1.25(2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) &= 0 \\ (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 1.25 + 6] &= 0 \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1.25) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -0.5 + i, \quad \lambda_3 = -0.5 - i$$

- Spektrum matice \mathbf{A} je $\sigma(\mathbf{A}) = \{2, -0.5 + i, -0.5 - i\}$.
- Spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| = 2$.

Příklad 1.3.3 Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

Rешение: Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Vlastní vektory \mathbf{x}_i odpovídající vlastním číslům λ_i , jsou řešením homogenní soustavy rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$.

- Vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0.5 \\ -3.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (1 - \lambda)(4 - \lambda) - \frac{7}{4} &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + \frac{9}{4} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 4.5, \quad \lambda_2 = 0.5$$

- Vlastní čísla matice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (3 - \lambda)(4 - \lambda) + \frac{5}{2} &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + \frac{29}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{7+3i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7-3i}{2}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = 4.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 - 4.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4 - 4.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3.5 & 0.5 \\ -3.5 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_2 = 0.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 - 0.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4 - 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 3.5 & 3.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = \frac{7+3i}{2}$: $(\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 - \frac{7+3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7+3i}{2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -5 & -(1 - 3i) \\ 5 & (1 - 3i) \end{pmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} -1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0 \end{aligned}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{B} pro $\lambda_2 = \frac{7-3i}{2} : (\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} 3 - \frac{7-3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7-3i}{2} \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{cc} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc} -5 & -(1+3i) \\ 5 & (1+3i) \end{array} \right) \rightarrow \\ \mathbf{x}_2 &= \left(\begin{array}{c} -1-3i \\ 5 \end{array} \right) r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0 \end{aligned}$$

```

1 % example:
2 % Determine the spectrum of a matrix and its spectral radius:
3 % write the matrix A
4 A = [2 2 0; -3 -3 5; 0 -0.25 2]
5 % solutions:
6 % d = eig(A) Returns the vector of the matrix's own numbers.
7 vlastni_cisla = eig(A)
8 spektralni_polomer = max(abs(vlastni_cisla))
9 %
10 % example:
11 % Specify your own numbers and corresponding own vectors
12 % of the following matrices:
13 A1 = [1 0.5; 3.5 4]
14 A2 = [3 -1; 2.5 4]
15 % soulutions:
16 [vl_vektory_mA1, vl_cisla_mA1] = eig(A1)
17 [vl_vektory_mA2, vl_cisla_mA2] = eig(A2)
18 % notes:
19 % vlastni cisla jsou na diagonale
20 % 1. sloupec vl_vektoru odpovida vl_cislu v 1. sloupce

```

Listing 1.1: Výpis programu pro ověření výpočtu vlastních čísel matic programem Matlab.

Příklad 1.3.4 Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$, kde \mathbf{A} je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: (z předchozího příkladu víme, že $\lambda_1 = 4.5, \lambda_2 = 0.5$) a \mathbf{I} jednotková matice. Označme symbolem λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a nechť \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor. Pak platí:

- Matice \mathbf{A}^2 má vlastní čísla rovna λ^2 .

- Matice $4\mathbf{A}$ má vlastní čísla rovna 4λ .
- Matice $9\mathbf{A}^{-1}$ má vlastní čísla rovna $\frac{9}{\lambda}$.

Matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$ má vlastní čísla ve tvaru $\lambda^2 - 4\lambda + \frac{9}{\lambda} - 1$, vlastní vektory jsou stejné jako vlastní vektory odpovídající vlastním číslům matice \mathbf{A} . Tedy:

$$\sigma(B) = \left\{ 4.5^2 - 4 \cdot 4.5 + \frac{9}{4.5} - 1, \quad 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + \frac{9}{0.5} - 1 \right\} = \{3.25, 15.25\}$$

Definice 1.3.2 Rovnost dvou polynomů: Řekneme, že dva polynomy $f(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x_{(n-1)} + \dots + a_1 + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{(m-1)} x_{(m-1)} + \dots + b_1 + b_0$ stupňů n a m se sobě **rovnají** právě tehdy, když $m = n$ a $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_{(n-1)} = b_{(m-1)}, a_n = b_m$. V tomto případě také říkáme, že mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou **totožné**.

Věta 1.3.1 Jestliže mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou dva polynomy stupně n -tého a jestliže pro $n+1$ různých reálných nebo komplexních čísel x platí $f(x) = g(x)$, potom jsou polynomy **totožné**.

1.4 Polynomy

1.4.1 Rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky

Příklad 1.4.1 Rozložte na parciální zlomky lomenou racionální funkci

$$f(x) : y = \frac{7x+8}{x^2+x-2}$$

Nejprve vypočteme nulové body jmenovatele:

$$x^2 + px + q = (x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv \rightarrow p = -(u+v), \quad q = uv$$

Kořenové činitele $x^2 + x - 2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ zvolíme za jmenovatele parciálních zlomků a rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{7x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

kde A, B jsou neznámé konstanty. Tyto konstanty určíme tak, aby rozklad platil pro každé $x \in \mathcal{R} - \{1, -2\}$. Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost dvou polynomů

$$7x+8 = (A+B)x + 2A - B$$

Podle 1.3.1 se musí rovnat koeficienty u x a absolutní členy obou stran poslední rovnice \Rightarrow dostaneme soustavu rovnic pro určení A a B ve tvaru:

$$7 = A + B$$

$$8 = 2A + B$$

$$A = 5, \quad B = 2$$

Postup, který jsme užili, nazýváme **Metodou neurčitých koeficientů**.

Pozn: Pro určení koeficientů A , B se užívají také jiné postupy, např. dosazování kořenů jmenovatele, která je výhodná zejména v případech, kdy jmenovatel lomené racionální funkce má jednoduché kořeny. Postupujeme tak, že rov. 1.12 násobíme součinem kořenových činitelů $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ a dostaneme rovnici

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

pro určení koeficientů A , B dosazováním kořenu.

$$\begin{aligned} x = -2 &\rightarrow -14 + 8 = B(-2 - 1) \rightarrow B = 2 \\ x = +1 &\rightarrow +7 + 8 = A(1 + 2) \rightarrow A = 5 \end{aligned}$$

1.5 Vektorové prostory se skalárním součinem

1.5.1 Ortogonální doplňky

Nechť U je podprostor vektorového prostoru V . Ortogonální doplněk U^\perp obsahuje všechny vektory, které jsou kolmé ke každému vektoru z U , neboli

$$\forall \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

což lze vyjádřit pomocí skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ortogonální doplněk U^\perp k podprostoru $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ tedy hledáme jako řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} \vec{u}_1 & 0 \\ \cdots & \vdots \\ \vec{u}_k & 0 \end{array} \right),$$

nuly na pravé straně při výpočtu zpravidla vynecháváme. Připomeňme také vztah

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \tag{1.12}$$

Příklad 1.5.1 Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle(1, -3, 2), (2, 1, 5)\rangle^\perp.$$

(Zdroj: [Moš07, s. 3])

Řešení: Hledáme vektor (x, y, z) , jehož skalární součin je se zadánymi vektory roven nule. Budeme tedy řešit (úpravou na Gaussův tvar pomocí elementárních úprav) homogenní soustavu rovnic zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odtud dostáváme

$$z = \alpha, \quad 7y + z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}\alpha, \quad x + \frac{3}{7}\alpha + 2\alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{17}{7}\alpha$$

neboli

$$(x, y, z) = \alpha \left(-\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right) = \alpha = (17, 1, -7).$$

V dalších příkladech budeme nuly na pravé straně soustavy vynechávat a upravovat na výhodnější tvar

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

Odtud již snadno zjistíme, že vektor $(x, 1, -7)$ jistě vyhovuje druhé rovnici. Dosadíme-li ho do první rovnice, dostaneme $7x + 17 \cdot (-7) = 0$ a $x = 17$.

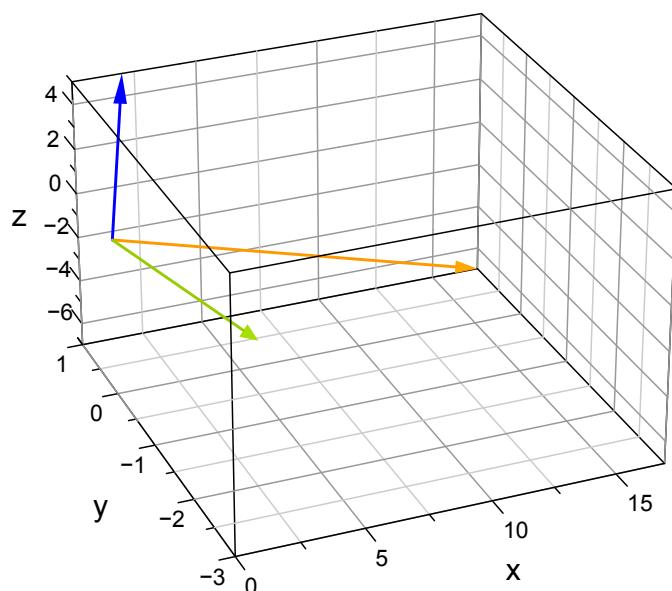
Hledaný ortogonální doplněk je tedy lineární obal

$$\langle(17, 1, -7)\rangle^\perp.$$

Výsledek předchozího příkladu 1.5.1 lze interpretovat tak, že jsme našli všechny vektory, které jsou kolmé na rovinu určenou vektory ze zadání. Rovina je útvar dvojrozměrný a protože prostor všech vektorů je trojrozměrný, musí nutně mít podprostor ortogonálních vektorů ve shodě se vztahem 1.12 pouze jednu dimenzi. Vše je dobře patrné z obr. 1.3

References

- [Moš07] F. Mošna. “Řešené příklady z Matematiky III”. In: (Oct. 2007). příklady (cit. on p. 17).



Obrázek 1.3: Vizualizace vektorového prostoru a jeho ortogonálního doplňku pomocí sw MatLab - MuPAD příkazem:

```
plot(plot::Arrow3d([1,-3,2]),plot::Arrow3d([2,1,5]),
plot::Arrow3d([17,1,-7]))
```

Část II

Matematická analýza

Kapitola 2

Úvod do matematické analýzy

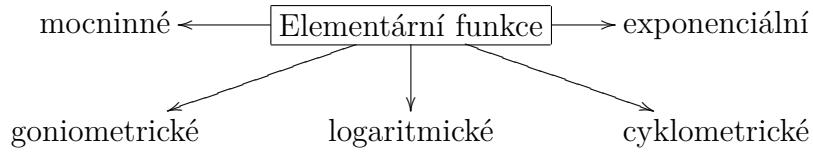
Obsah

2.1 Funkce jedné reálné proměnné	22
2.1.1 Elementární funkce	22
Seznam literatury	23

2.1 Funkce jedné reálné proměnné

2.1.1 Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme [Pol98, s. 10]:



2.1.1.1 Goniometrické funkce

- **Součtové vzorce**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (2.1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (2.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2.4)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (2.5)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \quad (2.6)$$

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

- **Vzorce pro dvojnásobný úhel 2α**

Pro každé $\alpha \in R$ platí:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.7)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (2.8)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (2.9)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad (2.10)$$

• **Vzorce pro poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$**

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (2.11)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (2.12)$$

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (2.13)$$

$$\left| \cot \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (2.14)$$

Užitím součtových vzorců a toho že, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$ a $\cos \pi = -1$ lze snadno odvodit, že pro každé $\alpha \in R$ platí

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha.$$

Kapitola 3

Diferenciální počet

Obsah

3.1 Vyšetřování průběhu funkcí	26
--	----

3.1 Vyšetřování průběhu funkcí

1. Zjistíme **definiční obor funkce**, vyjádříme jej v intervalech a z nich poznáme, kde je funkce **spojitá**. Funkce je spojitá v (a, b) pro každý bod tohoto intervalu, když $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolně zvolené číslo, a pro všechna x z okolí bodu c je $|x - c| < \delta$, kde $\delta > 0$ je na ε nezávislé.
2. Určíme, je-li funkce **lichá** $f(-x) = -f(x)$ nebo **sudá** $f(-x) = f(x)$. Je-li funkce lichá, je souměrná podle středu souměrnosti (obyčejně to bývá počátek souřadnic xy), je-li sudá, je souměrná podle osy y .
3. Určíme *průsečíky křivky s osami pravoúhlých souřadnic*. Body, ve kterých křivka protíná osu x spolu s body, ve kterých není křivka spojitá, rozlišují intervaly, v nichž je graf křivky nad osou x od intervalů, ve kterých je graf křivky pod osou x .
4. V krajních bodech definičních intervalů, ve kterých je funkce spojitá, stanovíme *limity funkce* a dále

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

5. Vypočítáme $f'(x)$ a $f''(x)$, abychom zjistily, kde je funkce *rostoucí* $f'(x) > 0$, *klesající* $f'(x) < 0$ a kde jsou *lokální extrémy*. Dostaneme-li dosazením kořenů rovnice $f'(x) = 0$ do $f''(x)$ hodnotu $f''(x) > 0$, má funkce lokální minimum, při $f''(x) < 0$ má funkce lokální maximum. V intervalech, kde $f''(x) > 0$, je křivka **konvexní (vypuklá)**, kde $f''(x) < 0$, je křivka **konkávní (vydutá)**. Body, v nichž $f''(x)$ mění znaménko, jsou **inflexní body**. Najdeme je tak, že stanovíme hodnoty x , pro které je $f''(x) = 0$ nebo neexistuje. Číslo c je inflexní bod, když existuje takové okolí bodu c , že pro $x > c$ je oblouk křivky konvexní a pro $x < c$ konkávní. Je nutné si uvědomit, že když má $f'(x)$ konečnou derivaci, je inflexní bod c taky nulovým bodem druhé derivace čili kořenem rovnice $f''(x) = 0$. Obrácená věta neplatí, tj. z $f''(x) = 0$ nevyplývá, že v bodě c má $f'(x)$ extrém a že bod c je inflexním bodem.
6. **Asymptota** je tečna křivky $f(x)$, jejíž bod dotyku je v nekonečnu. Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

je přímka $x = a$ její asymptotou. Jinak asymptoty mají rovnici $y = kx + q$, kde x a y jsou souřadnice bodů na asymptotách. Existují-li konečné limity

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q$$

pak je asymptotou přímka $y = kx + q$. Můžeme-li rovnici křivky rozložit (tj. rozložit její pravou stranu, obyčejně dělením čitatele jmenovatelem, má-li tvar zlomku) na dvě části, z nichž jedna má tvar $kx + q$ a druhá zbytek $\varphi(x)$, tj. $f(x) = kx + q + \varphi(x)$ a $\varphi(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, je přímka $y = kx + q$ asymptotou.

7. Zpřesnění grafu křivky provedeme sestavením tabulky souřadnic dalších bodů křivky, tj. ke zvoleným hodnotám x (z definičního oboru funkce) vypočítáme hodnoty y . Do dalších řádků tabulky zapíšeme hodnoty $f'(x)$ a $f''(x)$, ve kterých intervalech je funkce *rostoucí*, ve kterých *klesá*, kde je *vypuklá*, kde je *dutá*, kde jsou *lokální extrémy*, *inflexní body* apod., případně sestavíme dílkové tabulky pro jednotlivé *charakteristické vlastnosti* vyšetřované funkce.

Příklad 3.1.1 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

1. Definiční obor $D_f = \mathcal{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
2. Funkce je sudá

$$f(-x) = f(x) : \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}.$$

Funkce není periodická.

3. Stanovíme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru $1, -1$ a v nevlastních bodech $-\infty, +\infty$. Protože je funkce **sudá**, omezíme se jen na vyšetřování nezáporné části. Nejprve vlastnosti funkce v okolí bodu 1 . Ten nepatří do D_f a proto určíme limity funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Pro výpočet limity použijeme substituci $y = 1 - x^2$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2-y}{y} = +\infty$$

¹ proto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Obdobně dojdeme k

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

¹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

A konečně v nevlastních bodech $\pm\infty$ je limita

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = 0 - 1 = -1.$$

Výpočtem limit jsme zároveň určili dva absolutní (globální) extrémy a jeden lokální:

- v intervalu $(-1, 1)$ má funkce maximum ∞ a minimum 1,
- v intervalech $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ má funkce minimum $-\infty$ a maximum -1 .

4. Nyní vyšetříme zda, případně kolik a jaké, má funkce $f(x)$ průsečíky s osami souřadnic. S osou x nemá funkce žádné průsečíky, protože pro $y = 0$ není definována $H_f = \mathcal{R} - \{-1, 1\}$. Pro $x = 0$ je $y = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$, proto má $f(x)$ právě jeden průsečík s osou y a to $[0, 1]$.
5. Zatím jsme zjistili, že naše funkce není definována v bodech 1 a -1 a proto není spojitá v \mathcal{R} . Nevíme však, jaký je její průběh v jednotlivých intervalech definičního oboru. Abychom získali názornější představu o průběhu funkce, zjistíme má-li derivaci.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+x^2)'(1-x^2) - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ y' &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

Protože má vlastní derivaci², můžeme určit její vlastnosti v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. V těchto intervalech je $y' > 0$ a proto jede o funkci rye monotónní, rostoucí³ v daných intervalech⁴. Výpočtem zjistíme druhou derivaci funkce. Ta nám pomůže určit další extrém v intervalu $(0, 1)$ a zároveň vyšetřit **konkávnost** a **konvexnost**.

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x)'(1-x^2)^2 - (4x)(1-2x^2+x^4)'}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(1-2x^2+x^4) - 4x(-4x+4x^3)}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\ y'' &= \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

² $f(x)$ je spojitá v intervalech $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ věta s spojité funkci

³Plyne z věty o postačujících podmínkách ryzí monotónnosti funkce na intervalu

⁴V intervalech $(-\infty, -1), (-1, 0)$ je funkce klesající.

Abychom mohli určit lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pomocí druhé derivace, musíme najít kořeny rovnice $f'(x) = 0$. V našem případě

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x_0 = 0,$$

tento kořen ⁵ pak dosadíme do druhé derivace, tj.

$$y''(0) = \frac{4(3 \cdot 0^2 + 1)}{(1 - 0^2)^3} = 4,$$

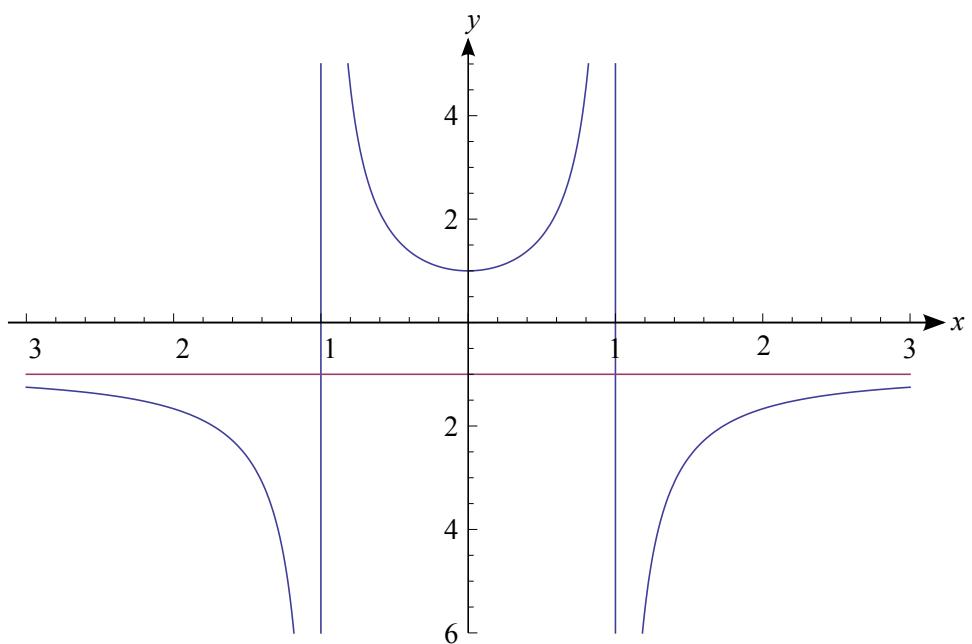
protože je $f''(x) > 0$, má v bodě x_0 lokální minimum. Můžeme rovněž konstatovat, že funkce nemá inflexní body ⁶. Konkávnost a konvexnost funkce v intervalech $\langle 0, 1 \rangle$ a $(1, \infty)$ vyšetříme pomocí vlastností druhé derivace funkce. Tedy

- $\langle 0, 1 \rangle : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konvexní**,
- $(1, \infty) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konkávní**.

6. Z předchozích výpočtů plyne, že křivka má asymptoty $y = -1, x = \pm 1$.

⁵stacionární bod

⁶Pro existenci inflexního bodu je nutné splnění jedné z podmínek a to buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.



Obrázek 3.1: Graf funkce $f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Kapitola 4

Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné

Obsah

4.1 Neurčitý integrál	32
4.1.1 Metody určení primitivní funkce	32
4.2 Určitý integrál	37
4.2.1 Motivace	37
4.2.2 Výpočet integrálu	37
4.3 Vlastnosti určitého integrálu	39

4.1 Neurčitý integrál

4.1.1 Metody určení primitivní funkce

4.1.1.1 Integrování součtu, úprava integrandu a integrování rozkladem

Příklad 4.1.1 $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx$ [Kni+04, s. 29]

Dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostaneme rozklad integrandu na součet funkcí, jejichž integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x) : (x^2 + 1) = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \\ \hline -x^4 - x^2 \\ \hline 3x^3 - 4x^2 + 3x \\ -3x^3 - 3x \\ \hline -4x^2 \\ 4x^2 + 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

Tedy

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Pro uvedený integrál dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx &= \int \left(x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Příklad 4.1.2 $\int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx$ [Kni+04, s. 29]

Integrand upravíme přičtením a odečtením výrazu $3x^2$ v čitateli zlomku takto:

$$\frac{3}{(1+x^2)x^2} = \frac{3+3x^2-3x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{1+x^2}$$

Tedy v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$, platí

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{3}{x} - 3 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Příklad 4.1.3 $\int \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ [Kni+04, s. 30]

Funkci $\sqrt{1 + \cos 2x}$ upravíme na základě goniometrické identity 2.9

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

takto

$$\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} |\cos x| = \varepsilon \sqrt{2} \cos x,$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right), \end{cases}$$

n je přirozené číslo. Proto pro x ležící v uvedených intervalech je

$$\int \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \varepsilon \sqrt{2} \int \cos x dx = \varepsilon \sqrt{2} \sin x + C.$$

Příklad 4.1.4 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ [Kni+04, s. 30]

Integrand upravíme na součet dvou tabulkových integrálů použitím vzorce

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

takže

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

Příklad 4.1.5 $\int \tan^2 x dx$ [Kni+04, s. 30]

Funkci napišeme ve tvaru

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

takže

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

v každém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, k je celé číslo.

4.1.1.2 Substituční metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

Věta 4.1.1 Jestliže

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad (4.1)$$

a $u = \varphi(x)$, pak

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)du = F(\varphi(x)) + C \quad (4.2)$$

Základem úspěchu při aplikací věty je správný výběr funkce $\varphi(x)$. Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schématicky veden od rov. 4.2 ke vzoreci rov. 4.1.

Příklad 4.1.6 $\int e^{x^2} dx$

$$\int e^{x^2} dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Funkce typu $f(x) = \sqrt{ax+b}$:

Funkci, jež je dána rovnicí, jež obsahuje polynomy proměnné x ve výrazu $\sqrt{ax+b}$, v němž $ax+b > 0$, $a > 0$, integrujeme pomocí substituce:

$$u = \sqrt{ax+b}, \quad du = \frac{1}{2}\frac{a}{u}dx, \quad dx = 2\frac{u}{a}du \quad (4.3)$$

Je-li potřeba dosadit do integrované funkce také za x , vyjádříme ze substituční rovnice $x = \frac{u^2-b}{a}$.

Funkce typu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}$, $a \neq 0$:

Příklad 4.1.7 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}} dx$:

Řešení: Užijeme **Eulerovu substituci** $\rightarrow u = x + \sqrt{x^2+a}$, $du = \frac{u}{\sqrt{x^2+a}}dx$, $\frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

4.1.1.3 Integrace po částech - per partes

Ze vztahů pro nalezení diferenciálů $d(uv) = u dv + v du$ a $u dv = d(uv) - v du$ vyplývá vzorec pro metodu integrace per partes:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (4.4)$$

Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenosť pro výběr funkcí u a v . Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím se myslí dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně $\int v du$ lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

Příklad 4.1.8 $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Příklad 4.1.9 $\int \sqrt{x^2 + a} dx$, kde $a \neq 0, x^2 + a > 0$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \begin{bmatrix} du = 1 & v = \sqrt{x^2 + a} \\ u = x & dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \end{bmatrix} \\ x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{x^2 + a} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{x^2 + a} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + \int \frac{a}{x^2 + a} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \right] \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně vyjádříme podle příkladu 4.1.7 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}} dx$ a výsledek dostaneme ve tvaru

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \right| \right]$$

4.1.1.4 Rozklad rye lomené funkce v parciální zlomky

Příklad 4.1.10 $\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx$ [Kni+04, s. 90]

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 7$ jsou jednoduché - každému z nich

bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 7}.$$

Členy mnohočlenu na pravé straně seřadíme podle mocnin x

$$8x - 31 = x(A + B) + (7A - 2B).$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 8 &= A + B \\ -31 &= -7A - 2B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = 3, B = 5$. Platí tedy (pro všechna $x \neq 2$ a $x \neq 7$)

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x - 7}.$$

$$\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{5}{x - 7} dx = 3 \ln|x - 2| + 5 \ln|x - 7| + C.$$

Výsledek platí v každém intervalu, který neobsahuje body $x = 2, x = 7$.

Příklad 4.1.11 $\int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx$ [Kni+04, s. 90]

Polynom $Q(x) = x^3 - 4x^2 - x - 4$ má kořeny $\alpha_{1,2} = \pm 1, \alpha_3 = -4$, které jsou jednoduché tj. $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 4}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici společným jmenovatelem zlomků pravé strany (polynomem $Q(x)$), dostaneme

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x + 1)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x + 1)$$

čili

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x^2 + 5x + 4) + B(x^2 + 3x - 4) + C(x^2 - 1)$$

$$2x^2 + 34x + 14 = (A + B + C)x^2 + (5A + 3B)x + (4A - 4B - C)$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů u stejných mocnin x dostaneme pro neznámé koeficienty A, B, C soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ 5A + 3B &= 34 \\ 4A - 4B - C &= 14 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = 5, B = 3, C = -6$ a tedy

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{5}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx &= \int \frac{5}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{6}{x+4} dx \\ &= 5 \ln|x-1| + 3 \ln|x+1| - 6 \ln|x+4| + C.\end{aligned}$$

4.2 Určitý integrál

4.2.1 Motivace

4.2.2 Výpočet integrálu

Příklad 4.2.1 Metodou per partes spočítejte integrály: $\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx$

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x dx &= \int e^x dx + \int x \cdot e^x dx \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x\end{aligned}$$

$$\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx = [xe^x]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - e$$

kde integrál

$$\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

4.3 Vlastnosti určitého integrálu

V této kapitole mluvíme o spojitéch funkciích \Rightarrow příslušné integrály tedy vždy existují. Čerpáno z knih: [Kni+04].

Věta 4.3.1 První věta o střední hodnotě integrálního počtu: Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$, existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c). \quad (4.5)$$

Důkaz: Použitím Lagrangeovy věty napsané pro funkci $F(x)$, primitivní na intervalu $\langle a, b \rangle$ k dané funkci $f(x)$. Podmínky věty jsou zřejmě splněny: $F(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má všude derivaci $F'(x) = f(x)$. Tedy existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$,

že

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c),$$

čímž je věta dokázána, neboť $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ a $F'(c) = f(c)$. Funkční hodnotu $f(c)$, danou podle (4.5) rovnicí

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \quad (4.6)$$

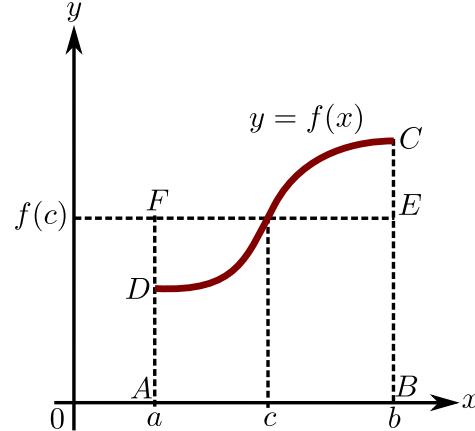
nazýváme **střední hodnotou**.

Pro spojitou nezápornou funkci $f(x)$, lze větu o střední hodnotě jednoduše geometricky interpretovat dle (obr.4.1). Levá strana (4.5) určuje obsah křivočarého lichoběžníka $ABCD$, pravá strana obsah obdélníka $ABEF$. Podle této věty nabývá funkce $f(x)$ aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) takové hodnoty $f(c)$, že uvažovaný křivočarý lichoběžník má stejný obsah jako obdélník o základně $b - a$ a výšce $f(c)$ (str. 155 knihy [Kni+04]).

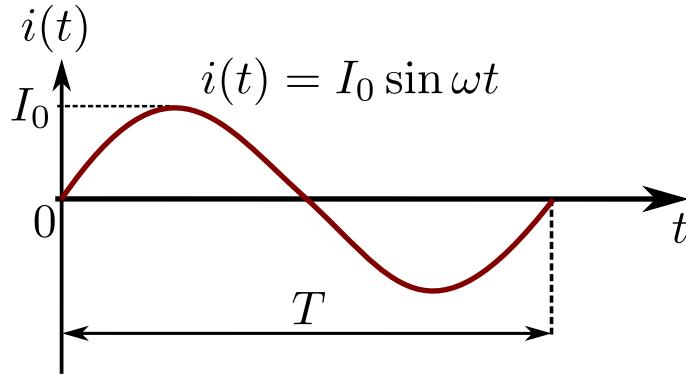
Příklad 4.3.1 Určete střední hodnotu i_s střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

v časovém intervalu $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$ (v průběhu jedné poloviny periody). I_0 je maximální hodnota proudu (obr. 4.2), perioda T je dána vztahem $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Obrázek 4.1



Obrázek 4.2

Podle 4.6 bude

$$\begin{aligned}
 i_s &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \omega t dt = \frac{2I_0}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{2I_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) \\
 &= \frac{2I_0}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi} I_0 \doteq 0,637 I_0.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tato hodnota se rovná intenzitě elektrického proudu, při kterém by vodičem v průběhu uvažované poloviny periody prošel stejný elektrický náboj jako při proudu střídavém.

Příklad 4.3.2 Efektivní hodnota i_{ef} střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

(viz předchozí příklad) je definována jako odmocnina ze střední hodnoty funkce $i^2(t)$ v průběhu jedné periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Tedy

$$\begin{aligned}
 i_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\
 &= \frac{I_0^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{I_0^2}{2}
 \end{aligned}$$

neboť $\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$. Odtud

$$i_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Střídavý proud $i(t) = I_0 \sin \omega t$ má na témže odporu stejný výkon jako stejnosměrný proud o intenzitě $i = 0,707 I_0$.

Následující věta může být využita k odhadu některých integrálů

Věta 4.3.2 Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu: Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v intervalu $\langle a, b \rangle$ a je-li funkce $g(x)$ v $\langle a, b \rangle$ nezáporná a nerostoucí, existuje alespoň jeden bod $c \in \langle a, b \rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x) = g(a) \int_a^c f(x)dx. \quad (4.8)$$

Zcela obdobnou větu lze vyslovit pro případ, že $g(x)$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a neklesající, tj. na pravé straně 4.8 je pak integrál $g(b) \int_c^b f(x)dx$

Příklad 4.3.3 Odhadněte hodnotu integrálu

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (4.9)$$

Řešení: Funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ jsou v uvažovaném intervalu $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ spojité a funkce $g(x)$ je kladná a nerostoucí.

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^c \sin x dx = \frac{1}{100\pi} (\cos 100\pi - \cos c)$$

kde c je kladné číslo z intervalu $\langle 100\pi, 1000\pi \rangle$. Dále pro všechna $c \in \langle 100\pi, 1000\pi \rangle$ platí $0 \leq 1 - \cos c \leq 2$, takže

$$0 \leq \int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{50\pi}.$$

Kapitola 5

Obyčejné diferenciální rovnice

Obsah

5.1 Diferenciální rovnice 1. řádu	44
---	----

5.1 Diferenciální rovnice 1. řádu

Řada fyzikálních principů má tvar výroku, resp. vztahu mezi jistými veličinami (funkcemi) a jejich změnami, vztaženými ke zvoleným nezávisle proměnným parametru (čas, souřadnice). Změny (okamžité, lokální) se nejlépe vystihují pomocí derivací → takový zákon má pak charakter vztahu mezi uvažovanými veličinami a jejich derivacemi. Nejčastěji bývá vztah vyjádřen formou rovnosti:

- Newtonův zákon: okamžitá změna hybnosti $p(t) = m(t) \cdot v(t)$ pohybujícího se objektu je úměrná působící síle $F(t)$ v každém okamžiku t zvoleného časového rozmezí

$$\frac{d}{dt} (m(t) \cdot v(t)) = F(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

- Kirchhoffův zákon pro LR – obvod: v okamžiku t je součet napětí na cívce s indukčnosti L a na rezistoru o odporu R roven napětí $U(t)$ na svorkách zdroje. Tuto rovnost pak zapisujeme ve tvaru (pro L,R = konst)

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri = u(t)$$

, kde $i = i(t)$... funkce popisující závislost proudu na čase.

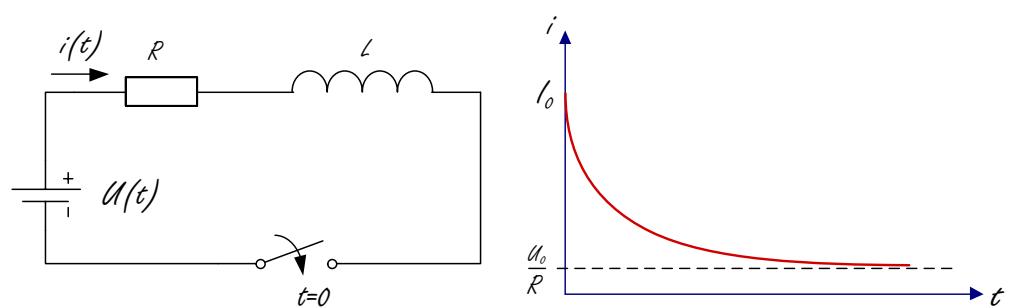
Chceme-li určit funkci $i = i(t)$ popisující průběh proudu v obvodu tak, aby byl splněn příslušný K.z. a současně, aby byl splněn požadavek na počáteční stav:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U, \quad i(0) = I_0, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (5.1)$$

Metodami uvedenými později stanovíme právě jednu funkci $i = i(t)$, která je řešením dané tzv. **počáteční úlohy**.

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) &= \frac{U_0}{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} i(t) = I_0 = i(0) \end{aligned} \quad (5.2)$$

- tedy obvykle formulujeme úlohu najít jistou funkci tak, aby zákon byl splněn tj. Kirchhoffův zákon užijeme k tomu, abychom nalezli funkci $i(t)$
- užijeme-li rovnosti vyjadřující takový zákon k tomu, abychom určili funkci, která v takovém vztahu vystupuje spolu s derivacemi, stává se tento požadavek úlohou, která má charakter rovnice s derivacemi, neboli diferenciální rovnice. Funkce, která požadavek splňuje, se pak nazývá řešení diferenciální rovnice.



Obrázek 5.1: Graf průběhu proudu $i(t)$ po sepnutí spínače v době $t = 0$.

Část III

Numerické metody

Kapitola 6

Úvod do numerických metod

Obsah

6.1	Úvodní slovo	50
6.2	Reprezentace čísel ve výpočetní technice	51
6.2.1	Zaokrouhllování	52
6.3	Chyby při numerických výpočtech	52
6.3.1	Zdroje a typy chyb	53
6.3.2	Definice chyb, šíření chyb při výpočtu	53
6.3.3	Absolutní a relativní chyba	53
6.4	Řešení nelineárních rovnic	55
6.4.1	Motivace	55
6.4.2	Metoda bisekce	55

6.1 Úvodní slovo

Numerické metody jsou metody, které na rozdíl od metod analytických poskytujících spojité řešení na určité předem definované oblasti, dávají číselné řešení v předem zvolených diskrétních bodech této oblasti. Na rozdíl od analytických metod toto řešení většinou nebývá přesné, ale představuje pouze jeho approximaci, která je zatížena určitou chybou. Možnosti analytických metod se již asi třicet let pokládají prakticky za vyčerpané. Drtivá většina problémů (a to zdaleka nejen v oblasti technických věd), které bylo možno analyticky vyřešit, již tehdy byla vyřešena. Při vyčíslování výsledků ovšem v mnoha případech nastávaly značné problémy; spojité řešení bylo například popsáno kombinací vyšších funkcí (Besselovy, Legendrové atd.) v podobě nekonečných řad, přičemž bylo třeba načítat dostatečný počet jejich členů k dosažení požadované přesnosti. A zde se již začaly uplatňovat různé numerické techniky, které ovšem bylo v té době možno realizovat jen na kalkulačkách nebo ze současného pohledu na primitivních počítacích.

Ačkoli základy sofistikovaných numerických metod byly položeny již před více než šedesáti lety, jejich intenzivní a široký rozvoj je spojen teprve s vývojem a zdokonalováním výpočetní techniky v posledních asi čtyřiceti letech a lze říci, že v poslední době s řešením čím dál tím složitějších problémů ze všech vědních oblastí (nestacionární a nelineární úlohy ve 2D a 3D) stále nabývají na významu.

Výsledkem aplikace převážné většiny numerických metod je sestavení velkého systému lineárních či nelineárních algebraických rovnic, který je nutno nějakým způsobem vyřešit existují ovšem numerické techniky i pro jiné účely, jako je například součet různých řad, výpočet určitých integrálů atd., jejich počet však není příliš velký). A v popředí zájmu jsou především dvě otázky:

- jak sestavit onen systém tak, aby počet zmíněných rovnic byl co nejmenší (přičemž ale informace o rozložení hledané veličiny v oblasti je maximální a co nejpřesnější) a
- jak tento systém vyřešit co nejrychleji a s nejmenší možnou chybou.

Na tomto místě je nutno podotknout, že i malá vylepšení stávajících postupů mohou při řešení složitých úloh vedoucích na řešení soustav milionů či desítek milionů rovnic (aktuální stav) zajistit velmi výrazné časové úspory. Samotná realizace jakékoli numerické metody sestává z několika kroků:

- Sestavení matematického modelu dané úlohy. Tento krok je sám o sobě často nesmírně komplikovaný; reálný fyzikální problém musíme mnohdy zjednodušit tak, aby byl vůbec dostupnými prostředky řešitelný, aniž by však vzniklé chyby přesáhly přijatelné hodnoty. Takový matematický model zpravidla sestává z různých rovnic (algebraických, diferenciálních, integrálních, smíšených),

neurčitých nebo určitých integrálů a podobně.

- Výběr konkrétní metodiky, jakou tento model budeme řešit. Uvedená metoda by měla být co nejvhodnější z celé řady hledisek, jako je rychlosť výpočtu, spolehlivosť, robustnosť, přesnosť, konvergencie, stabilita atd. O těchto pojmech jistě už většinou máme jakousi intuitivní představu, v dalším textu však některé z nich upřesníme. Na základě zvolené metody vypracujeme algoritmus, což je konečné množství instrukcí, které musíme provést, aby se celý výpočet bezezbytku provedl.
- Navržený algoritmus musíme nyní naprogramovat. Přitom lze využít buď nějakého programovacího jazyka (FORTRAN, C++ a další), nebo nějakého prostředí s již předprogramovanými operacemi nebo celými bloky výpočtu (MatLab, Mathematica). V některých případech lze využít i již existujících profesionálních programů, které takový algoritmus obsahují (freeware tohoto typu je velmi řídké). Ty jsou ovšem velmi drahé a uživatel do nich zpravidla nemůže zasahovat za účelem například optimalizace výpočtu.
- Dalším krokem je realizace výpočtu. Zde je kromě provedení samotného výpočtu nutné ověřit, že výsledky jsou korektní. K tomu používáme buď experiment, nebo jinou metodu, která je již pro úlohu daného typu spolehlivě prověřená. Dále ověřujeme celou řadu aspektů, jako je například geometrická konvergence řešení (závislost výsledků na hustotě diskretizační sítě) a popřípadě jiná kritéria, o nichž se více dozvím později.
- Posledním krokem je vyhodnocení a posouzení získaných výsledků, zpravidla na vizuálním základě, porovnáním, ale i jinak.

6.2 Reprezentace čísel ve výpočetní technice

Při realizaci numerických algoritmů na počítači se lze setkat se dvojí reprezentací čísel, a to pomocí **pevné** nebo **plovoucí desetinné tečky**. Pevná desetinná tečka znamená vždy předem definovaný počet desetinných míst. Pracujeme-li se čtyřmi desetinnými místy, interpretují se následující čísla takto:

8675	8675.0000
3.24	3.2400
-0.000006	-0.0000

Tabulka 6.1: Reprezentace čísel v pevné desetinné tečce

Zatímco první dvě čísla jsou zobrazena přesně, třetí číslo nikoli, je zaokrouhleno. Proto je tento způsob nepraktický, při vědeckotechnických výpočtech se neužívá a v dalším textu se jím už nebudeme zabývat.

Daleko pružnější je proto počítání s plovoucí desetinnou tečkou, kdy se v každém čísle respektuje předepsaný počet prvních číslic. V tomto případě se uvedená čísla zobrazují takto:

8675	+0.8675E+04	nebo	+8.675E+03
3.24	+0.3240E+01	nebo	+3.240E+00
-0.000006	-0.6000E-05	nebo	-6.000E-06

Tabulka 6.2: Reprezentace čísel v plovoucí desetinné tečce

Každé nenulové číslo a lze reprezentovat jako $a = +m \cdot 10^e$, kde $0.1 < m < 1$ a e je celé číslo. Samozřejmě, číslo m může obsahovat nekonečnou řadu číslic a celé číslo e se může pohybovat od minus nekonečna do nekonečna. To ale v počítačové reprezentaci není možné; zde je číslo m omezeno na konečný počet n číslic a právě tak je omezen i exponent. Číslo a je tedy počítačem approximováno jako $a = \pm m \cdot 10^e$, kde $m = 0.d_1d_2\dots d_n$. Toto číslo m se nazývá **mantisa** a e **exponent**.

V jednoduché přesnosti má v počítačích e velikost $|e| < 38$, ve dvojitě přesnosti $|e| < 308$. Jsou-li tyto hodnoty překročeny, vzniká chyba známá jako **underflow** nebo **overflow**.

6.2.1 Zaokrouhlování

Čísla jsou v počítačové interpretaci často zaokrouhlována (mají-li v mantise velký počet číslic), poněvadž mantisa m zde může těchto číslic obsahovat pouze n . Pravidla zaokrouhlování jsou jasná. Zopakujeme zde jen to, že čísla typu 7.65 nebo 7.75 (chceme-li zrušit jedno desetinné místo) zaokrouhlíme tak, že poslední číslice je sudá. Takže zatímco 7.65 zaokrouhlíme na 7.6, 7.75 zaokrouhlíme na 7.8.

Chybu při zaokrouhlování můžeme určit jako (n je počet číslic v mantise m)

$$\left| \frac{m - \tilde{m}}{m} \right| \leq \frac{0.5}{10^{n-1}} \quad (6.1)$$

6.3 Chyby při numerických výpočtech

Protože základem numerických metod je získávání přibližných výsledků, je nutné mít vždy představu, jaký rozdíl může být mezi přesným řešením dané úlohy a řešením

získaným použitou numerickou metodou.

6.3.1 Zdroje a typy chyb

Pomíne-li jako zdroj chyb člověka dopouštějícího se omylů, můžeme chyby rozdělit na několik základních druhů.

- **Chyby matematického modelu** - vznikají nahrazením reálné fyzikální situace matematickým modelem. Může se jednat například o popis nějakého fyzikálního děje pomocí diferenciální rovnice.
- **Chyby vstupních dat** - jsou způsobeny nepřesnostmi při měření fyzikálních veličin
- **Chyby numerické metody** - vznikají při nahrazení původní matematické úlohy jednodušší numerickou. Často se jedná o nahradu nekonečného procesu procesem konečným, např. při výpočtu hodnoty některé elementární funkce pomocí součtu několika prvních členů její nekonečné Taylorovy řady nebo při approximaci určitého integrálu součtem konečného počtu funkčních hodnot. Odhad této chyby je důležitou součástí řešení každé numerické úlohy.
- **Chyby zaokrouhlovací** - vznikají tím, že při výpočtech pracujeme s čísly zaokrouhlenými na určitý, relativně nevelký počet míst. Tyto chyby se při výpočtu mohou kumulovat, nebo navzájem rušit. Při velkém počtu operací je posouzení jejich vlivu velmi náročné.

6.3.2 Definice chyb, šíření chyb při výpočtu

6.3.3 Absolutní a relativní chyba

Je-li hodnota \underline{c} approximace přesné hodnoty c , je **absolutní chyba** definována jako $\varepsilon = c - \underline{c}$ a **relativní chyba** $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{c}, c \neq 0$. Tato definice se může zdát neužitečná, poněvadž c neznáme. Lze-li však říci, že pokud se approximace \underline{c} blíží k c , můžeme psát $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\underline{c}}, \underline{c} \neq 0$. Bohužel, většinou neznáme ani hodnotu ε . Někdy však její hodnotu můžeme odhadnout vztahem $|\varepsilon| \leq \sigma$ a podobně lze odhadnout pro relativní chybu $|\varepsilon_r| \leq \sigma_r$.

6.3.3.1 Šíření chyb

Meze absolutních chyb při sčítání a odečítání se rovnají součtu příslušných mezi. Meze relativních chyb při násobení a dělení se rovnají součtu mezi jednotlivých relativních chyb.

- Nechť $|x_i - \hat{x}_i| = |\varepsilon_i| \leq \sigma_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \hat{x}_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (6.2)$$

- Nechť dále $\left| \frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right| = |\varepsilon_{ri}| \leq \sigma_{ri}$, $i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n \hat{x}_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i - \varepsilon_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| \doteq \\ \left| \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i} \right| \\ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} \right| \end{aligned} \quad (6.3)$$

kde jsme ale při rozdílu součinů v druhém výrazu zanedbali všechny násobky různých absolutních chyb, tedy členy druhého a vyšších řádů.

6.3.3.2 Podmíněnost numerických úloh a numerická stabilita algoritmů

Při numerickém řešení různých úloh musíme zkoumat, jaký vliv na výsledek mají malé změny ve vstupních hodnotách a zaokrouhlování během výpočtu. Řešení numerických úloh můžeme považovat za postup, kterým přiřazujeme vstupním údajům výstupní data. Je-li toto přiřazení spojité zobrazení, pak říkáme, že numerická úloha je **korektní úloha**, v opačném případě se jedná o úlohu **nekorektní**.

Pro tyto úlohy má zásadní význam relativní citlivost výsledku na malé změny ve vstupních parametrech úlohy. Korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malým relativním změnám vstupních údajů odpovídají malé relativní změny výstupních údajů. Číslo

$$C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}, \quad (6.4)$$

nazýváme **číslo podmíněnosti úlohy**. Pro dobře podmíněné úlohy je číslo C_p blízké číslu 1. Pokud malé relativní změny na vstupu způsobí velké relativní změny na výstupu, pak mluvíme o **špatně podmíněné úloze**. Řešení špatně podmíněných úloh je nejlépe se vyhnout, protože výsledky jakéhokoliv algoritmu jsou velmi nespolehlivé. Podobně řekneme, že je algoritmus **dobře podmíněný**, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech. Kromě nepřesnosti ve vstupních údajích ovlivňuje výsledek použitého algoritmu i zaokrouhlování čísel během výpočtu. Je-li vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek malý, mluvíme o **numericky stabilním algoritmu**. *Algoritmus dobré podmíněný a numericky stabilní se nazývá stabilní.*

6.4 Řešení nelineárních rovnic

6.4.1 Motivace

Kořeny nelineárních rovnice $f(x) = 0$ obecně neumíme vyjádřit explicitním vzorcem. K řešení nelineární rovnice proto používáme iterační metody: z jedné nebo několika počátečních approximací hledaného kořene \hat{x} generujeme posloupnost $x_0, x_1, x_2\dots$, která ke kořenu \hat{x} konverguje. Pro některé metody stačí, když zadáme interval $\langle a, b \rangle$, který obsahuje hledaný kořen. Jiné metody vyžadují, aby počáteční approximace byla k hledanému kořenu dosti blízko; na oplatku takové metody konvergují mnohem rychleji. Často proto začínáme s "hrubou", avšak spolehlivou metodou, a teprve když jsme dostatečně blízko kořene, přejdeme na "jemnější", rychleji konvergující metodu.

Abychom naše úvahy zjednodušili, omezíme se na problém určení reálného jednoduchého kořene \hat{x} rovnice $f(x) = 0$, tj. předpokládáme, že $f'(\hat{x}) = 0$. Budeme také automaticky předpokládat, že funkce $f(x)$ je spojitá a má tolik spojitých derivací, kolik je jich v dané situaci zapotřebí.

Počáteční approximaci kořenů rovnice $f(x) = 0$ můžeme zjistit z grafu funkce $f(x)$: ručně, nebo raději pomocí vhodného programu na počítači, vykreslíme funkci $f(x)$ a vyhledáme její průsečíky s osou x .

Jinou možností je sestavení tabulky $[x_i, f(x_i)]$ pro nějaké dělení:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Příklad 6.4.1 Získejme hrubý odhad kořenů rovnice $f(x) = 0$, kde

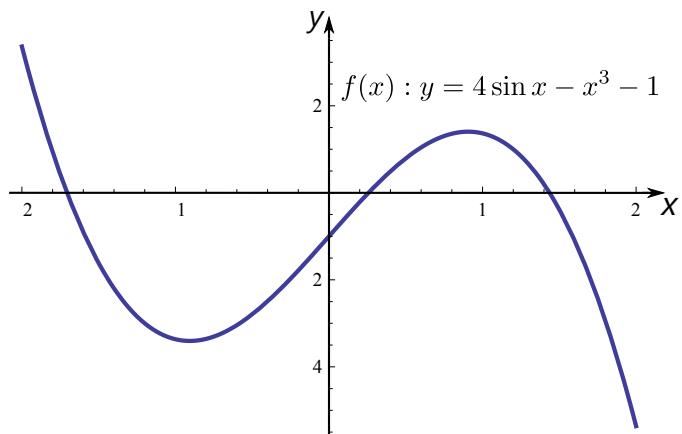
$$f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$$

Z obrázku 6.1 zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (-1, 0)$ a $x_3^* \in (1, 2)$.

Z obrázku zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (0, 1)$, $x_3^* \in (1, 2)$. Zkusme najít kořeny v těchto intervalech pomocí numerických metod popsaných v následujících odstavcích

6.4.2 Metoda bisekce

Metoda známá také jako **metoda půlení intervalů**, je založena na principu znaménkových změn. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v koncových bodech intervalu (a_0, b_0) opačná znaménka, tj. platí $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Sestrojíme posloup-



Obrázek 6.1: Graf funkce $f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$.

nost intervalů $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$, které obsahují kořen. Intervaly (a_{k+1}, b_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots$, určíme rekurzivně způsobem, který si nyní popíšeme.

Střed intervalu (a_k, b_k) je bod $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Když $f(x_k) = 0$, pak $x_{k+1} = x^*$ je kořen a dál nepokračujeme.

Část IV

Fyzika

Kapitola 7

Historie fyziky

Obsah

7.1 Hlavní etapy vývoje	60
-----------------------------------	----

7.1 Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již starí Sumerové, Babyloňané, Egyptané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimédovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlosť, zrychlení, síla apod.). Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich dráhách kolem Slunce je táž jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napísána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu

světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak zavřel Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a též elektromagnetické povahy. V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoročasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlosť světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonovu. Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádrech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrín. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou též podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k

dnešku tak probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou též povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozvíjání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

Kapitola 8

Diferenciální počet vektorových polí

Obsah

8.1	Vektorový počet	64
8.2	Skalární a vektorová pole	66
8.3	Derivace polí - gradient	68
8.4	Operátor ∇	71
8.4.1	Operace s Operátorem ∇	72
8.5	Diferenciální rovnice proudění tepla	74
8.6	Druhé derivace vektorových polí	76

8.1 Vektorový počet

V pravoúhlém kartézském systému je každý bod prostoru určen polohovým vektorem \vec{r} , který má složky x, y, z , což budeme zapisovat takto:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (8.1)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z . Velikost vektoru \vec{r} určíme ze vztahu

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8.2)$$

Pro osvězení pár faktů z vektorové algebry pro vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ uvádíme následující vztahy: Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \dots \text{skalar} \quad (8.3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \dots \text{vektor} \quad (8.4)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (8.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (8.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (8.6)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad (8.7)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (8.8)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (8.9)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (8.10)$$

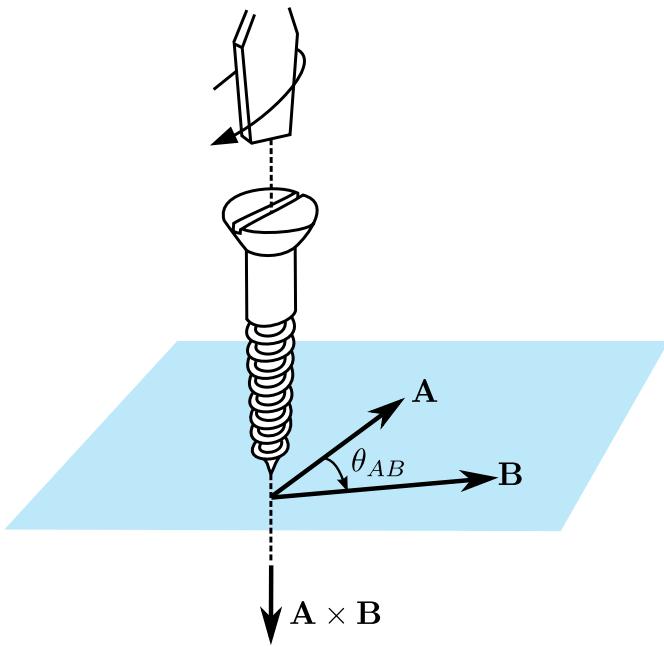
$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (8.12)$$

Rovnost (8.11) samozřejmě pouze v limitě, když $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se blíží nule.

Vektorový součin vektorů \mathbf{A} a \mathbf{B} je definován jako vektor kolmý k vektorům \mathbf{A} a \mathbf{B} s velikostí rovnou ploše kosoúhelníku, který oba vektory definují:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n} |A| |B| \sin \theta \quad (8.13)$$



Obrázek 8.1: Určení směru vektoru $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ pomocí pravotočivého šroubu

kde θ je úhel svíraný vektory \mathbf{A} a \mathbf{B} ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) a \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý k nim. Takové jednotkové vektory však existují dva; volba závisí na tom, je-li souřadný systém definován jako pravotočivý nebo levotočivý. V pravotočivém souřadném systému lze použít pravidlo jako na obr.8.1.

8.2 Skalární a vektorová pole

Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty veličiny. Řečeno jinými slovy, polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru.

Nejjednodušší možné fyzikální pole je **skalární pole**. Skalárním polem chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit.

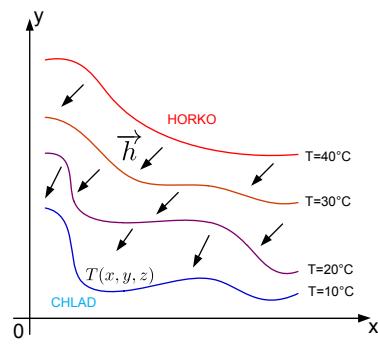
Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá určité představy myšlených ploch, proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě *teplotního pole* se tyto plochy nazývají *izotermickými hladinami* nebo *izotermami*.

U **vektorových polí** je v každém bodě prostoru dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlosť látky, tvořící těleso je v každém bodě vektor, který je funkcí polohy. V druhém případě uvažujme proudění tepla z teplejších míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. *Hustota tepelného toku* je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji \vec{h} . Její velikost je mírou proudícího tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 8.2. Definujeme \vec{h} přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde infinitezimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 8.4). Vyjádříme to v symbolech: je-li ΔP tepelná energie, která projde za jednotku času

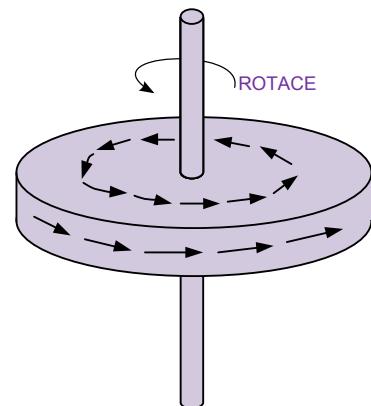
$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t \quad (8.14)$$

kde \vec{e}_t je jednotkový vektor ve směru toku.

Vektor \vec{h} je možno definovat i jiným způsobem -

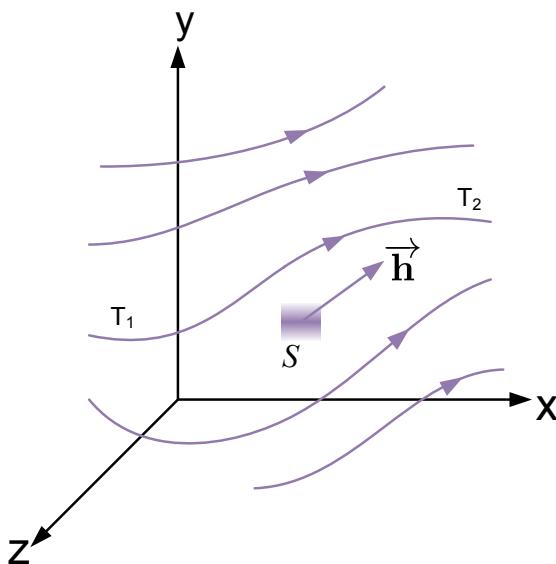


Obrázek 8.2: Teplota je příkladem skalárního pole. Každému bodu (x, y, z) v prostoru je přiřazeno číslo $T(x, y, z)$. Všechny body na ploše označené $T = 20^\circ C$ (zobrazené jako křivka při $z = 0$) mají stejnou teplotu. Šipky jsou ukázkami hustoty tepelného toku \vec{h} .



Obrázek 8.3: Rychlosť v rotujícím tělese je příkladem vektorového pole.

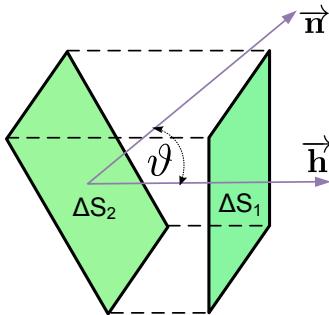
pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obrázek 8.5 znázorňuje plošku ΔS_2 skloněnou pod úhlem ϑ k ploše ΔS_1 kolmé na tok. Jednotkový vektor \vec{n} je kolmý na plošku ΔS_2 . Vektory \vec{n} a \vec{h} svírají úhel ϑ (neboť \vec{h} je kolmé ΔS_1). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou ΔS_2 ? Tok ploškou ΔS_2 je stejný jako ploškou ΔS_1 , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to $\Delta S_1 = S_1 \cos(\vartheta)$. Hustota toku ploškou ΔS_2 je



Obrázek 8.4: Hustota tepelného toku představuje vektorové pole. Vektor \vec{h} ukazuje směr proudění. Jeho velikost je rovna energii, která za jednotku času projde elementární ploškou postavenou kolmo na směr proudění, vydělené obsahem této plošky.

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (8.15)$$

Tuto rovnici interpretuje tak, že hustotu tepelného toku \vec{h} (teplo prošlé za jednotku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je \vec{n} , udává výraz $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku ΔS_2 je $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za definice \vec{h} . Stejné představy můžeme použít i pro jiná vektorová pole.



Obrázek 8.5: Tepelný tok ploškou ΔS_2 je stejný jako tepelný tok ploškou ΔS_1 .

8.3 Derivace polí - gradient

Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle x ? Nebo podle y , nebo z ?

Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry, nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například $\frac{\partial T}{\partial x}$? Je to skalár nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu x , $\frac{\partial T}{\partial x}$ se jistě změní. Ale všimněte si, že máme tři možné derivace: $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$. Protože existují tři derivace a víme, že tři čísla tvoří vektor, tyto tři derivace by mohly představovat složky jednoho vektoru:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{vektor} \quad (8.16)$$

Samozřejmě, ne každá tři čísla obecně tvoří vektor. Je tomu tak pouze tehdy, když při pootočení souřadnicové soustavy se složky vektoru správně transformují. Proto je nevyhnutelné prozkoumat, jak se naše tři derivace změní při otočení souřadnicové soustavy. Ukážeme, že rov. 8.16 je skutečně vektorem. Při otáčení souřadnicové soustavy se derivace transformují správně.

Můžeme se o tom přesvědčit několika způsoby. Jeden způsob je položit si takovou otázku, na níž lze odpovědět nezávisle na souřadnicové soustavě, a pokusit se vyjádřit odpověď v "invariantním" tvaru. Například jsou-li \vec{A} a \vec{B} vektory a $S = \vec{A} \cdot \vec{B}$, víme, že S je skalárem. I bez zjištování víme, zda se S mění se změnou souřadnicových soustav. Nemůže, neboť jde o skalární součin dvou vektorů.

Podobně, víme-li, že \vec{B} je vektorem a mám tři čísla B_1 , B_2 a B_3 , o kterých zjistíme že

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (8.17)$$

kde S je totéž pro libovolnou souřadnicovou soustavu, pak tři čísla B_1 , B_2 a B_3 jsou nutně složkami B_x , B_y a B_z nějakého vektoru \vec{B} .

Zvažme případ teplotního pole. Vezměme dva body P_1 a P_2 v malé vzdálenosti \vec{r} od sebe. Teplota v P_1 je T_1 a v P_2 je T_2 s rozdílem $\Delta T = T_2 - T_1$. Teploty v těchto reálných, fyzikálních bodech určitě nezávisí na volbě os souřadnic. Konkrétně ΔT je číslo nezávislé na souřadnicové soustavě. Je to skalár.

Zvolíme-li nějakou vhodnou soustavu souřadnicových os, můžeme napsat $T_1 = T(x, y, z)$ a $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, kde $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ jsou složky vektoru \vec{r} (obr. 8.6). Vzhledem k rovnosti rov. 8.11 můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \quad (8.18)$$

Levá strana rovnosti (8.18) je skalárem. Pravá je součtem tří součinů obsahujících jako součinitele $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, které jsou složkami vektoru. Z toho vyplývá, že tři čísla

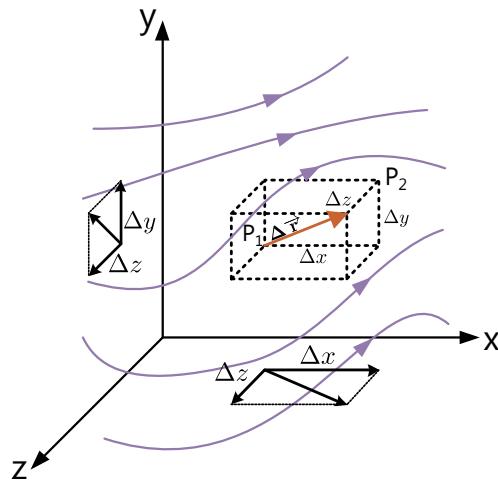
$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Představují také x -ovou, y -ovou a z -ovou složku nějakého vektoru. Pro tento nový vektor použijeme symbol ∇T . Symbol ∇ (nazývaný "nabla") je převráceným Δ a má připomínat derivování. ∇T se čte různě: "nabla T " nebo "gradient T " nebo "grad T ";

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^1 \quad (8.19)$$

¹Použijeme-li jednotkové vektory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , můžeme psát

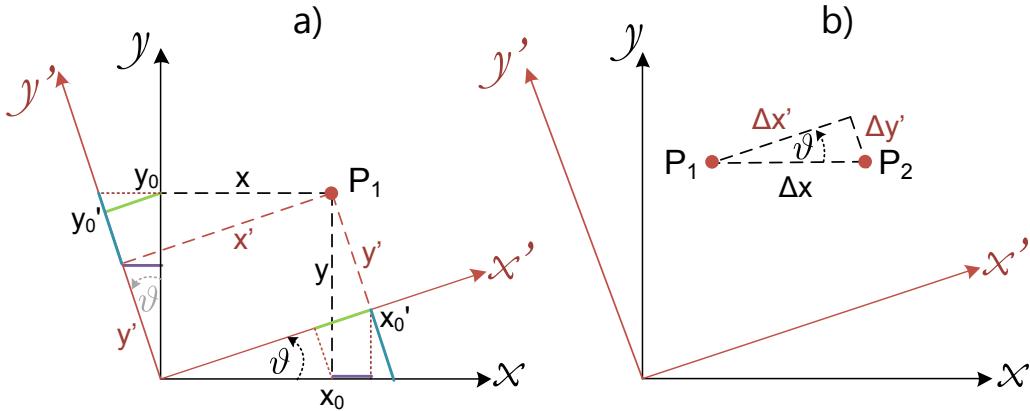
$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$



Obrázek 8.6: Vektor \vec{r} , jehož složky jsou $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Použitím této nové symboliky se můžeme pokusit rovnost (8.18) přepsat na kompaktnější tvar

$$\Delta T = \nabla T \cdot \vec{r} \quad (8.20)$$



Obrázek 8.7: a) Transformace do pootočené souřadnicové soustavy; b) Speciální případ, v němž je vektor \vec{r} rovnoběžný s osou x .

Tento vztah, vyjádřený slovy, říká, že rozdíl teplot ve dvou sousedních bodech je roven skalárnímu součinu gradientu T a rozdílu polohových vektorů obou bodů. Tvar rov. 8.20 také ilustruje již uvedený důkaz, že ∇T je opravdu vektorem.

Stále ještě nejste přesvědčeni? Ukážeme, že složky ∇T se transformují stejně jako složky \vec{r} . Pokud ano, ∇T je vektor podle naší původní definice vektoru. Abychom si to trochu zjednodušili, položme $z = z'$, takže souřadnici z již nemusíme brát v úvahu.

Uvažujme o soustavě x', y' pootočené o úhel ϑ vzhledem k soustavě xy (obr. 8.7). Souřadnice bodu (x, y) vyjádřené v čárkováné soustavě jsou

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \quad (8.21)$$

$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad (8.22)$$

vyjádříme-li x a y

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \quad (8.23)$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \quad (8.24)$$

Transformují-li se nějaká dvojice čísel podle těchto rovnic stejně jako x a y , jde o složky vektoru.

Nyní si všimněme rozdílu teplot ve dvou sousedních bodech P_1 a P_2 , zvolených tak, jak to znázorňuje obr. 8.7b. Při výpočtu v souřadnicích x a y můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad (8.25)$$

neboť $\Delta y = 0$.

A výpočet v čárkovanej soustavě? Tam bychom psali

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y' \quad (8.26)$$

Podíváme-li se na obr. 8.7b, vidíme, že

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad (8.27)$$

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta \quad (8.28)$$

neboť $\Delta y'$ je záporné při kladném Δx . Dosazením těchto výrazů do rov. 8.26 dostaneme

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta = \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta \right) \Delta x \quad (8.29)$$

Porovnáním rov. 8.29 s rov. 8.25 zjistíme, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (8.30)$$

Podle tohoto vztahu $\frac{\partial T}{\partial x}$ dostaneme z $\frac{\partial T}{\partial x'}$ a $\frac{\partial T}{\partial y'}$ právě tak jako x z x' a y' (rov. 8.23). $\frac{\partial T}{\partial x}$ je tedy x -ovou složkou vektoru. Podobné úvahy by ukázaly, že $\frac{\partial T}{\partial y}$ je y -ová a $\frac{\partial T}{\partial z}$ jeho z -ová složka. ∇T je zajisté vektorem. Jde o vektorové pole odvozené ze skalárního pole T .

8.4 Operátor ∇

Důkaz, že $\text{grad } T$ nebo ∇T je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejné i tehdy, kdyby se T zaměnilo za jakékoliv jiné skalární pole. Transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom T vynechat a nahradit rovnici (8.30) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (8.31)$$

Ponecháme přitom operátory "hladové po derivování".

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme jej nazvat složkami *vektorového operátoru*. Můžeme psát

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (8.32)$$

co samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.33)$$

Gradient jsme abstrahovali od T .

Musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od ∇ . $T\nabla$ je stále operátorem, zatímco ∇T už není "hladovým" operátorem, neboť se nasytil. Je to opravdový fyzikální vektor, představující rychlosť změny T v prostoru. Víme, že rychlosť změny T v nějakém směru udává složka vektoru ∇T v tomto směru (viz vztah 8.20). Z toho vyplývá, že ∇T směřuje tam, kde má největší možnou složku - jinými slovy, směrem, v němž se T mění nejrychleji. **Gradient T má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny T .**

8.4.1 Operace s Operátorem ∇

Je možné s vektorovým operátorem ∇ provádět nějaké jiné algebraické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vyjádřením skalárního součinu. Mohly bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}) \quad (8.34)$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. ($(\vec{A} \cdot \vec{B})$ je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru ∇ s vektorovým polem, které známe, např. \vec{h} . Vypíšeme-li ho ve složkách

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x \cdot h_x + \nabla_y \cdot h_y + \nabla_z \cdot h_z \quad (8.35)$$

nebo

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (8.36)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali bychom²

$$\nabla' \cdot \vec{\mathbf{h}} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \quad (8.37)$$

což je totéž číslo, které bychom dostali z (rov. 8.36), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \vec{\mathbf{h}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{h}} \quad (8.38)$$

pro každý bod prostoru. Tedy $\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}$ je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíte si uvědomit, že kombinace derivací $\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}$ je dost specifická. Existují rozmanité kombinace, např. $\frac{\partial h_y}{\partial x}$, které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina $\nabla \cdot (\text{vektor})$ je ve fyzice neobyčejně užitečná. Byla nazvána **divergencí** ($\text{div } \vec{\mathbf{h}}$).

Například

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}} = \text{div } \vec{\mathbf{h}} = \text{divergence } \vec{\mathbf{h}}. \quad (8.39)$$

Podobně jako v případě ∇T můžeme najít fyzikální význam i pro $\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}$. Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru ∇ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$\nabla \times \vec{\mathbf{h}} = \text{vektor} \quad (8.40)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz rov. 8.6).

$$(\nabla \times \vec{\mathbf{h}})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (8.41)$$

$$(\nabla \times \vec{\mathbf{h}})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (8.42)$$

$$(\nabla \times \vec{\mathbf{h}})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (8.43)$$

Kombinace $\nabla \times \vec{\mathbf{h}}$ se nazývá **rotace** $\vec{\mathbf{h}}$ (rot $\vec{\mathbf{h}}$). O příčině tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

²Na $\vec{\mathbf{h}}$ se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je $\vec{\mathbf{h}}$ "derivováno" podle x, y a z nebo podle x', y' a z' , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro $\vec{\mathbf{h}}$ jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme $\vec{\mathbf{h}}$ čárkou.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor ∇ :

$$\nabla T = \text{vektor} \quad (8.44)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}} = \text{skalar} \quad (8.45)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{h}} = \text{vektor} \quad (8.46)$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislém na nějaké souřadnicové soustavě.

Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru ∇ napíšeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetismu - Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \nabla E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \vec{\mathbf{B}} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\vec{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (8.47)$$

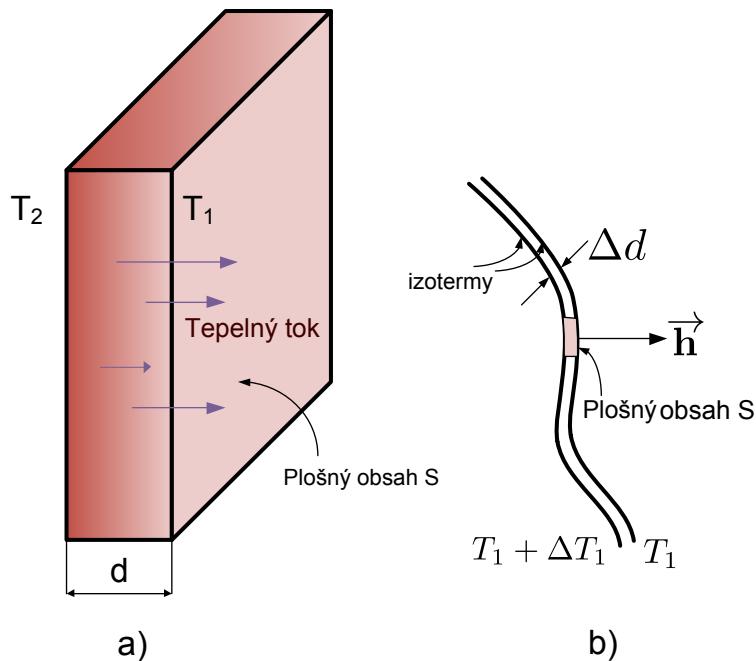
kde ρ (ró) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu, $\vec{\mathbf{j}}$ je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

8.5 Diferenciální rovnice proudění tepla

Uvedme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Vezmeme-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahřejeme na teplotu T_2 , zatímco protilehlou stranu ochladíme na odlišnou teplotu T_1 , materiélem bude proudit teplo ve směru od T_2 k T_1 (obr. 8.8).

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu S stěn i rozdílu teplot $T_2 - T_1$ a nepřímo úměrný vzdálenosti d mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok). Nechť P je tepelná energie, která projde deskou za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda(T_2 - T_1) \frac{S}{d} \quad (8.48)$$



Obrázek 8.8: a) *Tepelný tok deskou.* b) *Infinitezimální destička rovnoběžná s izotermickou hladinou ve velkém kuse látky*

Konstanta úměrnosti λ (lambda) se nazývá **součinitel teplotní vodivosti**.

Co se stane ve složitějším případě, řekněme v tělese nepravidelném tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 8.8a, ale v miniaturním měřítku. Nasmerujeme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami obr. 8.8b, takže pro destičku bude platit rov. 8.48.

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky ΔS , je tepelný tok

$$P = \lambda(\Delta T) \frac{\Delta S}{\Delta d} \quad (8.49)$$

kde Δd je tloušťka destičky. $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ jsme definovali jako velikost vektoru \vec{h} ležícího ve směru tepelného toku. Teplo bude proudit od $T_1 + \Delta T_1$ k T_1 a tudíž kolmo na izotermy (obr. 8.8b). $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává dále právě rychlosť změny T při změně polohy. Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává maximální rychlosť změny T , a tedy velikost vektoru ∇T . Protože směr ∇T je opačný než směr³ \vec{h} rov. 8.49 zapsaná pomocí vektorů bude vypadat takto

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (8.50)$$

³Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.

Rovnice 8.50 je diferenciální rovnicí vedení tepla v masivních tělesech. Jde o skutečnou vektorovou rovnici. Každá její strana je vektor, je-li λ jen číslo. Je zobecněním speciální rov. 8.49 pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Tato symbolika je užitečný nejen proto, že v ní rovnice vypadají jednodušeji, ale i proto, že nejjasněji ukazuje fyzikální obsah rovnic bez odvolání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.

8.6 Druhé derivace vektorových polí

Mohli bychom sestavit následující kombinace:

1. $\nabla \cdot (\nabla T)$
2. $\nabla \times (\nabla T)$
3. $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h})$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$
5. $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

- $\nabla \times (\nabla T)$: má stejný tvar jako $\vec{A} \times (\vec{h} T) = (\vec{A} \times \vec{A}) = 0$, neboť $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

$$\text{rot}(\text{grad}T) = \nabla \times \nabla T = 0. \quad (8.51)$$

neboť ve složkách

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

což je nula. Stejný výsledek bychom dostali i pro ostatní složky.

- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$: $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ neboť $\vec{A} \times \vec{B}$ je kolmé na \vec{A} a jeho složka ve směru \vec{A} je tedy nulová. Takže

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0. \quad (8.52)$$

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, řekněme vektorového pole \vec{A} je nula. Dle předchozího vztahu 8.51 je rotace gradientu rovna nule. Bylo by tedy možné, aby bylo \vec{A} gradientem nějaké veličiny, jeho rotace by pak byla nulová.

Věta 8.6.1 *Je-li $\nabla \times \vec{A} = 0$, existuje ψ takové,. že $\vec{A} = \nabla \psi$*

Rovnost 8.52 říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáme-li se s vektorovým polem, přičemž $\text{div} \vec{D} = 0$, můžeme z toho usoudit, že \vec{D} je rotací nějakého vektorového pole \vec{C} .

Věta 8.6.2 Je-li $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, existuje \vec{C} takové, že $\vec{D} = \nabla \times \vec{C}$.

- $\nabla \cdot (\nabla T)$: Vypíšeme složky $\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T)$. Potom

$$\nabla \times (\nabla T) = \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_x(\nabla_z T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}$$

. Není třeba dodávat závorky, neboť nehrozí záměna.

$$\nabla \cdot (\nabla T) = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T. \quad (8.53)$$

Na ∇^2 se díváme jako na nový operátor - **Laoplaceův operátor**:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}. \quad (8.54)$$

- $\nabla \times \nabla \times \vec{h}$: Vzhledem k vektorové rovnosti

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

můžeme rotaci vyjádřit jinak

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \vec{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ??$$

Něco je špatně! Operátory v posledním členu nejsou nasycené. Můžeme však také dobře napsat

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

a proto

$$\nabla \times (\nabla \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h} = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{h}. \quad (8.55)$$

- Již jsme se zmínili o všech kombinacích ze seznamu na začátku kapitoly, s výjimkou $\nabla \cdot (\nabla \vec{h})$. To je přípustné vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm nedá říci.

Souhrn:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla^2 T \dots \text{skalární pole} \\ \nabla \times (\nabla T) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) &= \dots \text{vektorové pole} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} \\ (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{h} &= \nabla^2 \vec{h} \dots \text{vektorové pole} \end{aligned}$$

Kapitola 9

Integrální počet vektorových polí

Obsah

9.1 Tok vektorového pole	80
------------------------------------	----

9.1 Tok vektorového pole

Kapitola 10

Speciální teorie relativity

Obsah

10.1 Princip relativity	82
10.2 Lorentzova transformace	84

10.1 Princip relativity

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy ronice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak jej odstranit. Oboje, chybu i korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že m je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlosť. V Einsteinově opraveném vztahu má m hodnotu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.1)$$

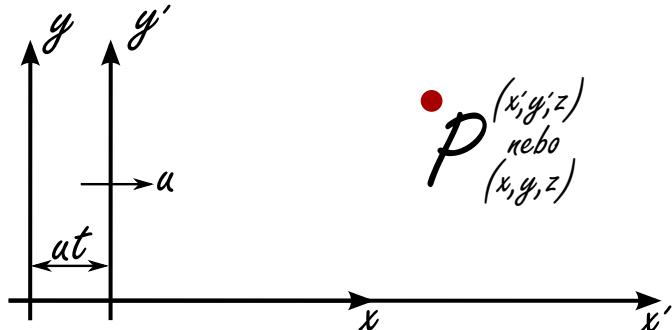
kde m_0 je *klidová hmotnost* (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje) a c je *rychlosť světla*, která je přibližně rovna $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlostí $9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$ a po dosazení do uvedeného vztahu dosaneme korekci hmotnosti ne větší než dvě až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostatečně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosti světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý a proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Proto je zajímavé sledovat, jaké kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona. Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o *speciální teorii relativity* z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou *Obecná teorie relativity*. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ *gravitace*.

Newton byl první, kdo vyslovil *princip relativity* jako jeden z důsledků pohybových zákonů: Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejné ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočare vpřed. To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlostí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samořejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je pravda, že ve všech experimentech provedených v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální

zákon stejný, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.



Obrázek 10.1: Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých x -ových os.

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje konstantní rychlostí u ve směru osy x , přičemž měří polohu určitého budu (obr. 10.1). Ve své souřadnicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy x jako x' . Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy x ve své souřadnicové soustavě značí jako x . Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunu za čas t o vzdálenost ut , a jestliže soustavy z počátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (10.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetransformovaly do stejných zákonů v čárkované soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soutavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje či nikoliv.

Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumu elektrických, magnetických a světelných jevů, jež vyustilo v *Maxwellovu teorii elektromagnetického pole*, která jednotně popisuje elektrinu, magnetizmus a světlo. Zdálo se však, že Maxwellovy rovnice nevyhovovaly *principu relativity*, neboť přetransformujeme-li Maxwellovy rovnice pomocí rovnic 10.2, nebudou mít stejný tvar. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měli lišit od jevů v nehybné lodi. Těmito jevy by pak bylo možné určit rychlosť lodi, a ve speciálním případě pomocí vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možné určit i abosolutní rychlosť lodi. Jedním z důsledků Maxwellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří vsemi směry stejnou rychlosťí $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dalším důsledkem téhoto rovnic je, že pohybují-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlosťí c . Tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje vede k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlostí u a že světlo z reflektorů auta za námi nás míjí rychlostí c . Zdiferencováním první rovnice 10.2 máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u, \quad (10.3)$$

což znamená, že podle *Galileovy transformace* by zdánlivá rychlosť světla měřená z auta nemohla být c , ale $c - u$. Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosti Země, ale všechny selhaly - nedávaly vůbec žádné rychlosti. Ukázalo se, že někde byla chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

10.2 Lorentzova transformace

Když se zjistilo, že s rovnicemi v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileiho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxwellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problému je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si *H. A. Lorentz* všiml pozoruhodné věci, když použil v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (10.4)$$

tvar rovnic se nezměnil. Rovnice 10.4 jsou známé jako *Lorentzovy transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že všechny fyzikální zákony, měly být takové, aby se při Lorentzově transformaci něměnily. Jinými slovy, měly bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak se ukázalo jediné co je třeba, je změnit hmotnost m v Newtonových rovnicích podle vztahu 10.1. Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejně.

Pro pochopení smyslu této nové transformace nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání prostoru a času.

Kapitola 11

Geometrická optika

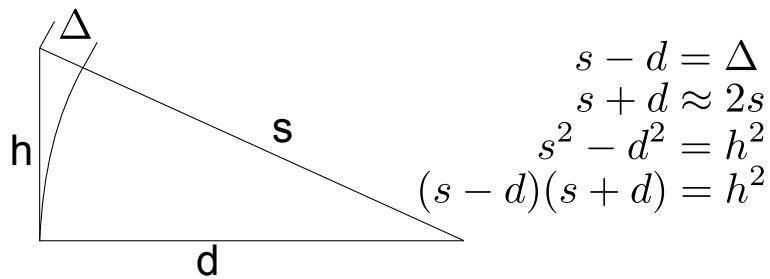
Obsah

11.1 Úvod	86
---------------------	----

11.1 Úvod

Na několika přístrojích předvedeme approximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější approximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů a přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná.

Abychom mohli pokračovat potřebujeme jeden geometrický vztah a to: máme-li trojúhelník s malou výškou h a velkou základnou d , pak přepona s je delší než základna (viz obr. 11.1). Tedy



Obrázek 11.1: Trojúhelník s malou výškou a velkou základnou

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (11.1)$$

To je celá geometrie, kterou je třeba znát, aby bylo možné diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch.

Část V

Astrofyzika

Kapitola 12

Úvod

Obsah

12.1 Historie astrofyziky	90
12.2 Základní vztahy	90

Astrofyzika je vědní obor ležící na rozhraní *fyziky* a *astronomie*. Zabývá se fyzikou vesmíru, včetně fyzikálních vlastností (svítivost, hustota, teplota, chemické složení) astronomických objektů jako jsou hvězdy, galaxie a mezihvězdná hmota, jakož i jejich vzájemné působení.

Podle metod výzkumu těchto objektů se dělí na *fotometrii*, *spektroskopii*, *radioastronomii*, *astrofyziku rentgenovou*, *infračervenou*, *ultrafialovou* a *neutrínovou*. Každý z těchto podoborů se dále dělí na praktickou a teoretickou část. Praktická získává potřebná data. Teoretická s pomocí fyzikálních zákonů vysvětluje pozorované chování vesmírných těles.

12.1 Historie astrofyziky

12.2 Základní vztahy

- **AU** - *astronomická jednotka*: průměrná vzdálenost Země od Slunce, $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Vzájemné vzdálenosti planet či jiných objektů sluneční soustavy vyjádřené v AU poskytují relativně názorné měřítko vzdáleností těchto objektů od sebe. Přesná hodnota je

$$1AU = 149\ 597\ 870\ 691 \pm 6 \text{ m}$$

Kvůli vyšší přesnosti *Mezinárodní astronomická unie* (International Astronomical Union, IAU) přijala novou definici, podle které je AU délka poloměru nerušené oběžné kruhové dráhy tělesa se zanedbatelnou hmotností, pohybujícího se okolo Slunce rychlostí $0,017\ 202\ 098\ 950$ radiánů za den ($86\ 400 \text{ s}$).

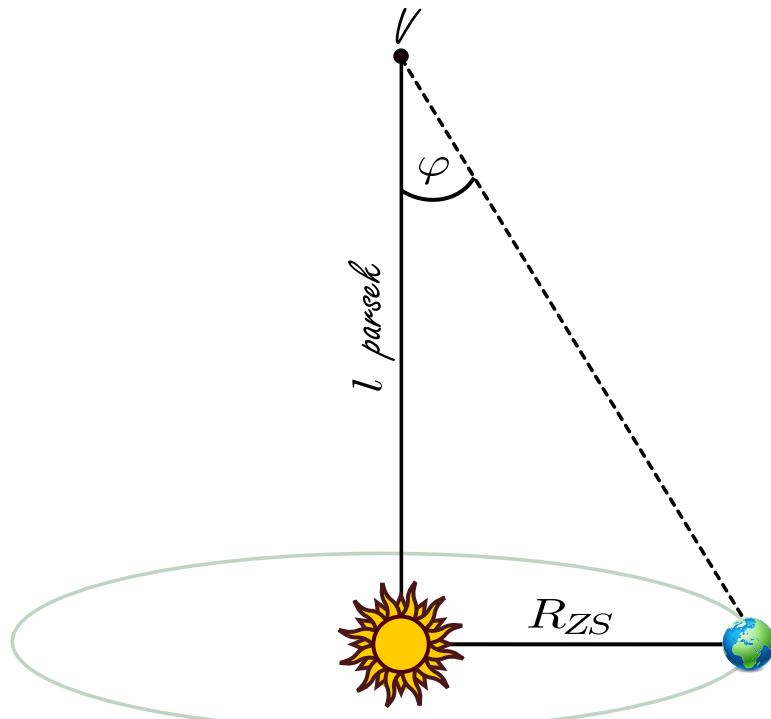
- Vzdálenost Země od Slunce je $1,00 \pm 0,02 \text{ AU}$.
- Měsíc obíhá kolem Země ve vzdálenosti $0,0026 \pm 0,0001 \text{ AU}$.
- Mars je od Slunce vzdálen $1,52 \pm 0,14 \text{ AU}$.
- Jupiter je od Slunce vzdálen $5,20 \pm 0,05 \text{ AU}$.
- Nejvzdálenější člověkem vyrobené těleso, sonda Voyager 1, bylo 31. prosince 2007 ve vzdálenosti $104,93 \text{ AU}$ od Slunce.
- Průměr sluneční soustavy bez *Oortova oblaku* je přibližně 105 AU .
- Průměr sluneční soustavy s Oortovým oblakem se odhaduje na 50 000 až 100 000 AU .
- Nejbližší hvězda (po Slunci), Proxima Centauri, se nachází přibližně ve vzdálenosti $268\ 000 \text{ AU}$.
- Průměr hvězdy Betelgeuze je $2,57 \text{ AU}$.

- Vzdálenost Slunce od středu Galaxie je přibližně $1,7 \cdot 10^9 \text{ AU}$.
- Velikost viditelného vesmíru je asi $8,66 \cdot 10^{14} \text{ AU}$.
- **l.y.** - světelný rok: vzdálenost, kterou světlo ulétna za jeden rok, $9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$,
- **pc** - parsek, paralaktická sekunda: vzdálenost, ze které by poloměr oběžné dráhy Země byl kolmo k zornému paprsku vidět pod úhlem $1''$, $30,9 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

Příklad 12.2.1 Spočtěte, jakou vzdálenost v metrech vyjadřuje jeden parsek [KČ09, s. 3].

řešení: 1 pc (paralaktická sekunda) je vzdálenost, ze které vidíme velkou poloosu oběžné dráhy Země kolem Slunce pod úhlem $\varphi = 1''$. Úhel $1''$ je tak malý, že strany VS a VZ na obrázku prakticky splývají a místo pravého trojúhelníka VSZ můžeme použít definiční vztah úhlu v obloukové míře (velikost úhlu je možné určit jako poměr délky oblouku vymezeného ramenou na kružnici opsané kolem vrcholu k poloměru této kružnice). Proto

$$\varphi = \frac{R_{SZ}}{l} \rightarrow l = \frac{R_{SZ}}{\varphi},$$



Obrázek 12.1: Parsek

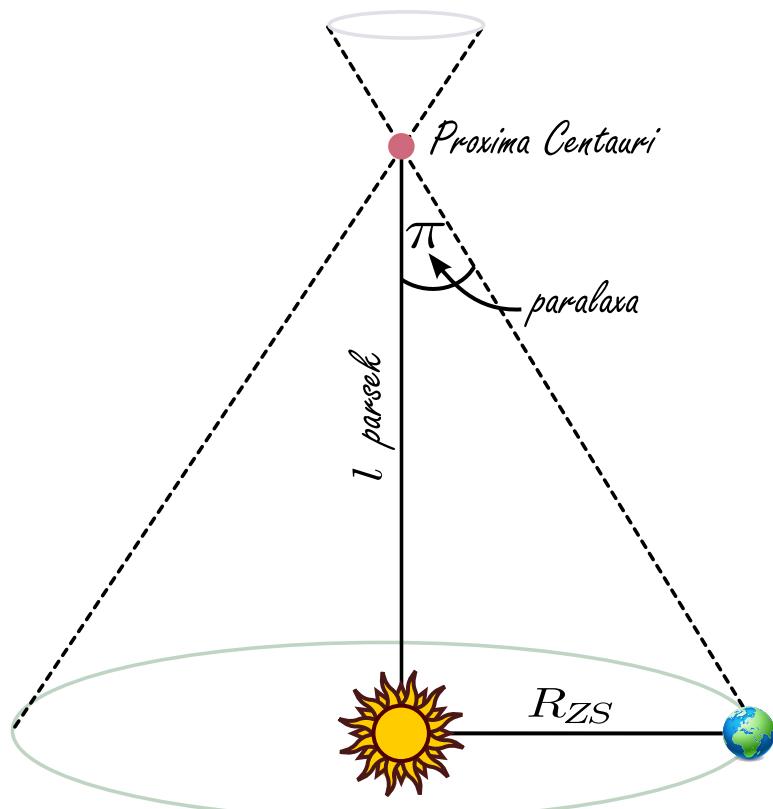
kde l je vzdálenost 1 pc v metrech, R_{SZ} je vzdálenost země od Slunce a φ je úhel

jedné vteřiny vyjádřený v radiánech.

$$l = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60 \cdot 60} \cdot \frac{2\pi}{360}} \cong 3 \cdot 10^{16} \text{ m.}$$

Další jednotkou, kterou se v astrofyzice měří vzdálenost dvou vesmírných těles, je *paralaxa*. Pozorovací místa musí být od sebe výrazně vzdálena, aby například při měření vzdálenosti naší nejbližší hvězdy - *Proxima Centauri* byla paralaxa vůbec měřitelná. Vzdálenost této hvězdy je 4,2 světelných let (nebo 270 000 AU) od Země.

Příklad 12.2.2 Najděte paralaxu *Proximy Centauri*, která je od nás vzdálená asi 4,2 světelného roku [KČ09, s. 4].



Obrázek 12.2: Paralaxa naší nejbližší hvězdy

Řešení: Díky pohybu Země kolem Slunce se zdá, že blízké hvězdy opisují oproti vzdáleným elipsu. Úhlový poloměr této elipsy se nazývá paralaxa hvězdy. Lze ji změřit jen pro nejbližší hvězdy. Z definice úhlu (jako v předchozím příkladě) tedy vyplývá, že

$$\pi = \frac{R_{ZS}}{l} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 l.y} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

což je přibližně $0.76''$. Vidíme, že i u druhé nejbližší hvězdy po Slunci není paralaxa ani celá $1''$.

References

- [KČ09] P. Kulhánek and M. Červenka. *Astrofyzika v příkladech*. Ed. by F. ČVUT. FEL ČVUT, 2009. 87 pp. (cit. on pp. 91, 92).

Část VI

Mechanika

Kapitola 13

Kinematika částice

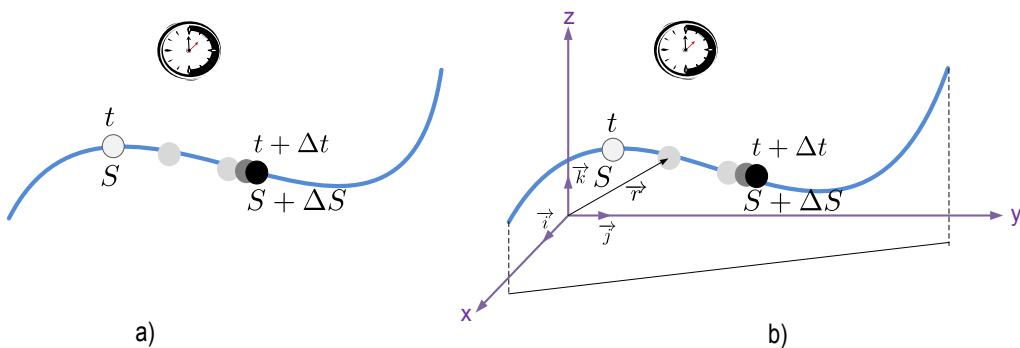
Obsah

13.1 Kinematický popis pohybu částice	98
13.1.1 Základní pohyby a jejich skládání	99
13.1.2 Skládání pohybů	101

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem hmotný bod je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměru částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

13.1 Kinematický popis pohybu částice

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po příčinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, trajektorii, a snažíme se určit jednak tvar této trajektorie a zákon pohybu po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase¹. Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.



Obrázek 13.1: Příklad trajektorie částice a zavedení kartézské soustavy souřadnic

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit dráhu částice $s(t)$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 13.1). V okamžiku t je částice v bodě daném prošlou dráhou s , v okamžiku $t + \Delta t$ v bodě $s + \Delta s$. Dráha s tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

Přitom můžeme zavést **střední rychlosť částice** v intervalu Δt

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (13.1)$$

¹Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrosvětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrosvětě pohybuje podle zákona kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně přesně stanovit její polohu a rychlosť

okamžitou rychlosť častice v okamžiku t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (13.2)$$

a **okamžité zrychlení**

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (13.3)$$

Takto zavedené rychlosť a zrychlení sú skalárne funkcie času a udávajú pouze ak sa mení dráha a rychlosť pri pohybe po zadané trajektorii, v smere tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu častice v prostoru vzhľadom k niejaké vztažné soustavě. Táto soustava, napríklad kartézská, je spojená s niejakým tuhým telom a doplnená hodinami umiestenými napríklad v počátku. V miestnosti môžu ako kartézské osy slúžiť prúsečnice stien a podlahy. Potom udáváme tri kartézské souřadnice častice ako funkcie času:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (13.4)$$

Soustava tří rovnic (rov. 13.4) predstavuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnici trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rov. 13.4 čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (13.5)$$

Přitom $s = s[x(t), y(t), z(t)]$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalárna rychlosť bude

13.1.1 Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu častice.

13.1.1.1 Pohyb přímočarý

Nechť přímočarý pohyb probíhá podél osy x s počátečními podmínkami $x = x_0, v_x = \dot{x} = v_{0x}$ při $t = t_0$. Pak rozlišujeme

- *Pohyb rovnoměrný* s konstantní rychlosťí v_{0x} a nulovým zrychlením $a_x = 0$. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon pohybu:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (13.6)$$

- *Pohyb rovnoměrně zrychlený* s konstantním zrychlením a_{0x} kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon rychlosti a zákon pohybu:

$$v = v_0 x + a_{0x}(t - t_0), \quad (13.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{0x}(t - t_0)^2. \quad (13.8)$$

Je-li při $t = 0, x = 0, v = 0$ dostaneme známé vztahy

$$v = a_{0x}t, \quad x = \frac{1}{2}a_{0x}t^2$$

- *Pohyb nerovnoměrný* se zrychlením obecně závislým na čase $a(t)$. Pak dostaneme zákon rychlosti a zákon pohybu integrováním

$$v = v_{0x} + \int_{t_0}^t a(t)dt \quad (13.9)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \int_{t_0}^t v(t)dt \quad (13.10)$$

13.1.1.2 Pohyb kruhový

13.1.1.3 Pohyb harmonický

Pohyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového pohybu kolem počátku do jedné z kartézských os. Například v ose y pak máme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (13.11)$$

kde $y \dots$ výchylka (elongace), $A \dots$ amplituda, $\omega \dots$ úhlová rychlosť [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$], $T = \frac{2\pi}{\omega} \dots$ perioda [s], $f = \frac{1}{T} \dots$ frekvence [Hz], $\omega t + \varphi_0 \dots$ fáze, $\varphi_0 \dots$ počáteční fáze při $t = 0$ neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y = \dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (13.12)$$

$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (13.13)$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlosť předbíhá výchylku o $\frac{\pi}{2}$ a zrychlení o π (je v protifázi).

13.1.2 Skládání pohybů

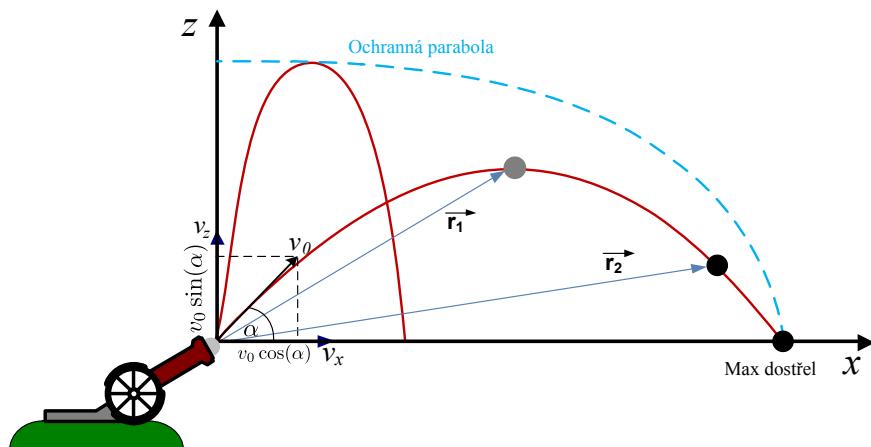
Ačkoliv částice může konat současně několik pohybů, lze je vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skladání pohybu.

13.1.2.1 Skládání kolmých přímočarých pohybů

Se skladáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při *vrhu těles v homogeném tělovém poli ve vakuu*. Uvažujme rovinný pohyb v rovině x, z , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g .

Příklad 13.1.1 *Výstřel z děla (ve vakuu). Dělová koule opouští hlaveň zadanou rychlostí. Určete:*

- maximální dostřel pro zadanou ústřovou rychlosť,
- hranice oblasti, ve kterém lze zasáhnout cíl,
- stanovte velikost potřebného náměru děla pro zasažení libovolného cíle uvnitř ochranné paraboly.



Obrázek 13.2: K příkladu výpočtu trajektorie projektile.

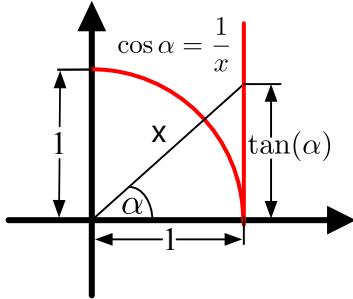
Řešení: Uvažujte rovinný pohyb v rovině xz , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g . Ve směru osy z tedy probíhá rovnoměrně zrychlený pohyb podle rov. 13.8. Vztah neměli počáteční podmínky k okamžiku $t = 0$, máme

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_z(t) = v_{0z} - gt \quad (13.14)$$

Ve směru osy x je pohyb rovnoměrný:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad v_x(t) = v_{0x} = \text{konst} \quad (13.15)$$

Obrázek 13.3: Goniometrický vzorec
 $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$ lze snadno odvodit z náčrtu pomocí Pythagorovy věty (Prepona pravoúhlého trojúhelníka je $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$)



Dělová koule opouští hlaveň pod elevačním úhlem α za podmínek dle obr. 13.2 platí $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \alpha > 0, v_{0z} = v_0 \sin \alpha > 0$. Jde tedy o skládání rovnoměrného přímočarého pohybu s rychlostí $v_0 \cos \alpha$ ve směru osy x a svislého pohybu vzhůru. Získané rovnice

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad x(t) = v_{0x}t \quad (13.16)$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t , dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (13.17)$$

Nyní aplikujeme goniometrický vzorec

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

odvozený dle náčrtku na obrázku 13.3 a dostáváme rovnici

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 \quad (13.18)$$

Pohyb projektílu (dělové koule) probíhá po stejné trajektorii, jako šikmý vrh v homogenním těžovém poli ve vakuu, tedy po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, délku doletu a celkovou dobu letu.

- Maximální dolet pro daný elevační úhel:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 \quad (13.19)$$

Netriviální kořen této kvadratické rovnice je námi hledaný dolet dělové koule

$$x_d = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (13.20)$$

- Celková doba letu:

$$t_d = \frac{x_d}{v_{0x}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{gv_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (13.21)$$

- Souřadnice vrcholu dráhy: získáme derivováním rov. 13.18

$$0 = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2(1 + \tan^2 \alpha)} x_v \quad (13.22)$$

$$x_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{2}{2} \quad (13.23)$$

$$x_v = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (13.24)$$

Souřadnici z_v dostaneme dosazením x_v do rov. 13.18

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \frac{v_0^4}{g^2} \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} \quad (13.25)$$

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (13.26)$$

$$z_v = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (13.27)$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu $\frac{\pi}{4}$ a že obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly $\frac{\pi}{4} \pm \Delta\alpha$.

- Stanovení elevačního úhlu pro zasažení zadaných souřadnic $[X_c, Z_c]$ cíle: Opět vycházíme z rov. 13.18, ovšem tentokrát nejsou neznáme x a z , ale α : Použijeme substituci $\tan \alpha = p$ a vypočítáme kořeny této kvadratické rovnice:

$$0 = gx^2 p^2 - 2v_0^2 xp + (gx^2 + 2zv_0^2) \quad (13.28)$$

$$p_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \quad (13.29)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \right) \quad (13.30)$$

Je-li cíl zadán v polárních souřadnicích $[r, \varphi]$, lze potřebný náměr stanovit takto:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gr^2 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi v_0^2)}}{gr \cos \varphi} \right) \quad (13.31)$$

Pokud ovšem bude diskriminant menší než 0, leží cíl mimo dosah děla. Tj. neexistuje takový náměr děla, kterým by bylo možné cíl zasáhnout. Je-li diskriminant roven nule, jedná se o hranici, za kterou již při dané ústové rychlosti nelze dostřelit. Body ležící na této obálce tzv. ochranná parabola mohou být zasaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu.

- *Stanovení rovnice ochranné paraboly:* To provedeme tak, že položíme diskriminant rovnice pro $\tan \alpha$ roven nule a dostaneme rovnici obálky

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2) \Rightarrow z = -\frac{v_0^2}{2g^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (13.32)$$

```

1 % ===== Zadani =====
2 % Delova koule opousti hlaven zadanou rychlosi .
3 % Urcete maximalni dostrel pro zadanou ustovou rychlost ,
4 % hranice oblasti , ve kterem lze zasahnout cil a stanovte
5 % velikost potrebneho namera dela pro zasezeni libovolneho cile
6 % uvnitr ochranne paraboly .
7     namer = 45;           % [ ° ]      namer dela
8     v0      = 210;          % [m/s]      ustova rychlost
9     g0      = 9.81;         % [m/s-2]    gravitacni zrychleni
10    % Angle required to hit coordinate (x,y)
11    cil =[2000,300];
12 % ===== rEsEni =====
13    vx0      = v0*cos(namer/180*pi);
14    vy0      = v0*sin(namer/180*pi);
15    % 1. Pohybove rovnice
16    t_dopad = (2*vy0)/g0;
17    t1= 0:t_dopad/20:t_dopad;
18    r1 = [vx0*t1;
19        vy0*t1 - (1/2)*g0*t1.^2];
20
21    % 2. Vypocet namera pro zasazeni zadaneho cile
22    t_trefa = cil(1)/vx0;
23    t2 = 0:t_trefa/20:t_trefa;
24    % namer alfa - dva koreny !!
25    Diskriminant = sqrt(v0^4-(g0*(g0*cil(1)^2+2*v0^2*cil(2)))); 
26    alfa1 = atan((v0^2-Diskriminant)/(g0*cil(1)));
27    alfa2 = atan((v0^2+Diskriminant)/(g0*cil(1)));
28    namer_alfa1 = alfa1*180/pi;
29    namer_alfa2 = alfa2*180/pi;
30    r2 = [vx0*t2;
31        tan(alfa1) *vx0*t2 - (g0/(2*v0^2*cos(alfa1)^2)) *
32        (vx0*t2).^2;
33        tan(alfa2) *vx0*t2 - (g0/(2*v0^2*cos(alfa2)^2)) *
34        (vx0*t2).^2];
35
36 % 3. vypocet hranice dosazitelnosti cile - ochranna parabola

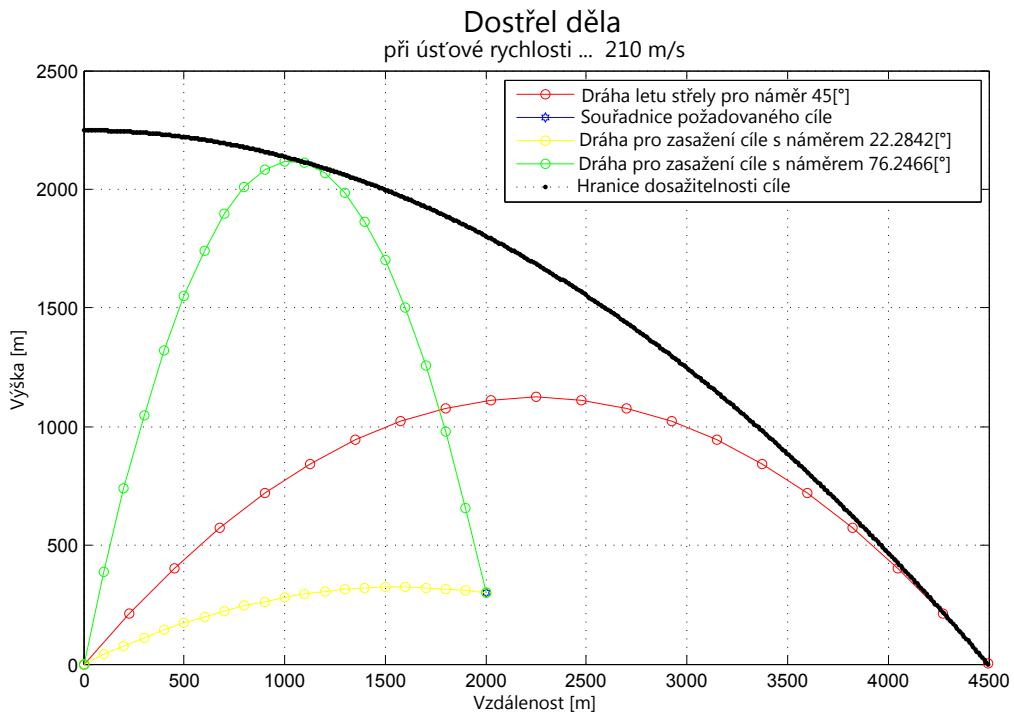
```

```

35      vx0_max = v0 * cos(45/180*pi);
36      vy0_max = v0 * sin(45/180*pi);
37      t_max = (2*vy0_max)/g0; % max dostrel pri nameru 45 °
38      dostrel_max = vx0_max*t_max           % [m]
39      vyska_max = v0^2/(2*g0)             % [m]
40      t3 = 0:t_max/500:t_max;
41      r3 = [vx0_max*t3; v0^2/(2*g0)-g0/(2*v0^2)*(vx0_max*t3).^2];
42
43 % graficke zpracovani vysledku
44 % figure;
45 plot(r1(1,:), r1(2,:), '-ro', cil(1), cil(2), '-bh', r2(1,:),
       r2(2,:), '-yo', r2(1,:), r2(3,:), '-go', r3(1,:),
       r3(2,:), ':k.', 'MarkerSize', 6)
46 grid on;
47 title({'\fontsize{16}{Dostrel\,dela', '\fontsize{12}{pri\,ustove\,rychlosti\,...\,, num2str(v0), ', '[m/s]' ] })
48 xlabel('Vzdalenost[m]')
49 ylabel('Vyska[m]')
50 string1 = ['Draha\,letu\,strelu\,pro\,zadany\,namer\,', num2str(namer), ' [°]'];
51 string2 = 'Souradnice\,pozadovaneho\,cile';
52 string3 = ['Draha\,pro\,zasazeni\,cile\,s\,namerem\,', num2str(namer_alfa1), ' [°]'];
53 string4 = ['Draha\,pro\,zasazeni\,cile\,s\,namerem\,', num2str(namer_alfa2), ' [°]'];
54 string5 = 'Hranice\,dosazitelnosti\,cile';
55 legend(string1, string2, string3, string4, string5)

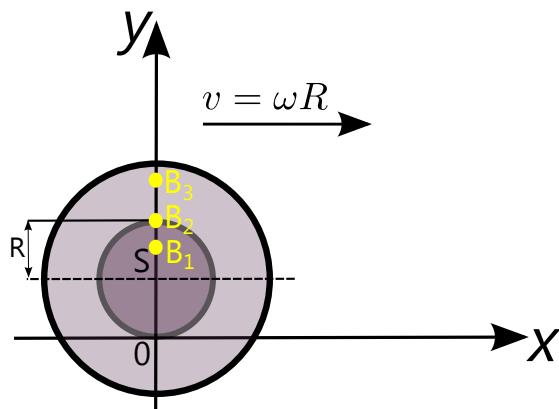
```

Listing 13.1: *kinematika_delo_ve_vakuu.m* pro ověření výpočtu balistické dráhy projektílu.



Obrázek 13.4: Výpočet trajektorie projektalu ve vakuu při ústové rychlosti 210m/s pomocí Matlabu®.

Příklad 13.1.2 Kolo vagónu se valí po vodorovné kolejnici. Uvažujte bod, který je v počátečním okamžiku pod středem kola ve vzdálenosti, která může být menší, rovna nebo větší než vzdálenost středu kola od kolejnice.



Obrázek 13.5: Kolo vagónu a tři možné polohy bodu

Určete parametrické rovnice dráhy zvoleného bodu, složky rychlosti a její velikost,

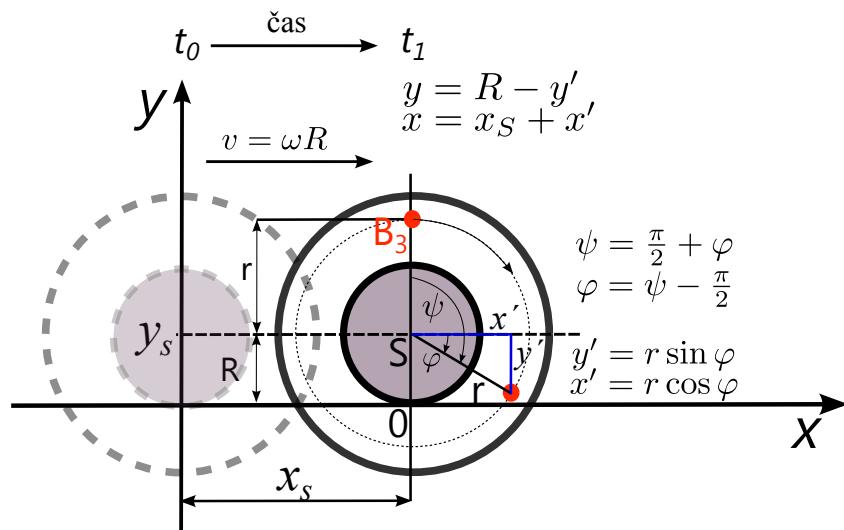
složky zrychlení a jeho velikost, tečné a normálové zrychlení a poloměr křivosti dráhy. [Sla02, p. 11]

Řešení: Obvodová rychlosť v místě dotyku s kolejnicí je $v = \omega R$, což vzhledem k předpokladu o valení představuje posuvnou rychlosť kola. Parametrické rovnice pro střed kola jsou pak

$$x_S = \omega R t \quad (13.33)$$

$$y_S = R \quad (13.34)$$

Uvažovaný bod B_3 na obr. 13.6 je ve své nové pozici v čase t_1 posunut vůči středu o vzdálenost $r \cdot \sin \omega t$ ve směru osy x a o vzdálenost $r \cdot \cos \omega t$ ve směru osy y . Z obrázku 13.6 lze odvodit následující rovnice pro souřadnice libovolného bodu B na kole vagónu.



Obrázek 13.6: Náčrt pro odvození parametrických rovnic pohybu libovolně zvoleného bodu na kole vagónu

- ve směru osy x

$$\begin{aligned} x &= x_S + x' \\ x &= x_S + r \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ x &= x_S + r \sin \psi \\ x &= \omega R t + r \sin \omega t \end{aligned}$$

- ve směru osy y

$$\begin{aligned} y &= y_S - y' \\ y &= y_S - r \sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ y &= y_S + r \cos \psi \\ y &= R + r \cos \omega t \end{aligned}$$

takže, parametrické rovnice dráhy mají tvar **cykloidy** viz 13.35. .

$$x = \omega R t + r \sin \omega t \quad (13.35)$$

$$y = R + r \cos \omega t \quad (13.36)$$

- Složky rychlosti:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \omega R + r \omega \cos \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -r \omega \sin \omega t \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2} \end{aligned} \quad (13.37)$$

- Složky zrychlení:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r \omega^2 \sin \omega t \quad (13.38)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r \omega^2 \cos \omega t \quad (13.39)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r \omega^2 \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r \omega^2 \quad (13.40)$$

Tento výsledek je superpozicí rovnoměrného kruhového a rovnoměrného přímočarého pohybu.

- Tečné zrychlení dostaneme derivací velikosti rychlosti

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \omega \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \cdot (-1) \cdot 2Rr \omega \sin \omega t \\ a_t &= \frac{r \omega^2 \cdot |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Normálové zrychlení získáme užitím Pythagorovy věty

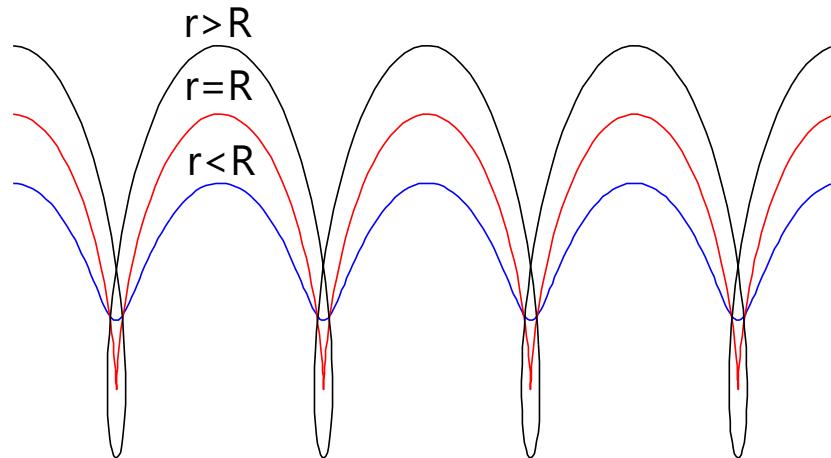
$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \\ a_n &= \sqrt{(r \omega^2)^2 - \left(\frac{Rr \omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \right)^2} \\ a_n &= \frac{r \omega^2 |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Poloměr křivosti R_0 dostaneme ze vztahu $a_n = \frac{v^2}{R_0}$:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\omega^2(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)}{r\omega^2|R \cos \omega t - r|} \\ R_0 &= \frac{(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)^{\frac{3}{2}}}{|Rr \cos \omega t - r^2|} \end{aligned}$$

Poloměr křivosti není roven vzdálenosti od středu kola r : drahou bodu není kružnice, nýbrž cykloida (viz obr. 13.7).

$$\begin{aligned} (x - \omega Rt)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t \\ (y - R)^2 &= r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t + r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \quad \text{kde } t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{y - R}{r} \\ \left(x - R \arccos \frac{y - R}{r} \right)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \end{aligned}$$



Obrázek 13.7: Cykloida: pro $B_2 \dots r = R$ je cykloida prostá; $B_3 \dots r > R$ cykloida prodloužená; $B_1 \dots r < R$ cykloida zkrácená; [cykloida.m]

13.1.2.2 Skládání harmonických pohybů v kolmých směrech

Zmíníme se ještě o skládání **harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad y = B \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (13.41)$$

Výsledný pohyb vytváří zajímavé geometrické tvary známé pod názvem Lissajousovy obrazce. Jejich vzhled závisí na poměru frekvencí a na fázovém úhlu [SO02].

Označíme fázi kmitů ve směru x jako $\omega t + \varphi_{01} = \varphi$, rozdíl fází obou kmitů jako $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \delta$. Dále vyloučíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Máme

$$\sin \varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi + \delta) = \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta = \frac{y}{B} \quad (13.42)$$

odkud

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sin \delta} \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \delta \right) \quad (13.43)$$

Sečteme-li nyní $\sin^2 \varphi$ a $\cos^2 \varphi$, dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (13.44)$$

V závislosti na δ může tato rovnice odpovídat rovnici *úsečky*, nebo *elipsy*. Je-li $\delta = n\pi$, probíhají kmity po úsečce, jejíž přímka má směrnici $k = \pm \frac{B}{A}$, je-li $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$, je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (13.45)$$

Jsou-li amplitudy obou pohybů stejné, přejde pro $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$ elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých pohybů o stejných frekvencích se setkáváme nejen v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 13.8(a) a obr. 13.8(b) [ŠTo95].

Jsou-li úhlové frekvence kolmých pohybů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce** viz 13.8(b). Program ukazuje, jak se projevuje změna fázového úhlu při daném poměru frekvencí obou pohybů.

1 % Lissajousovy obrazce – vliv fazoveho uhlu

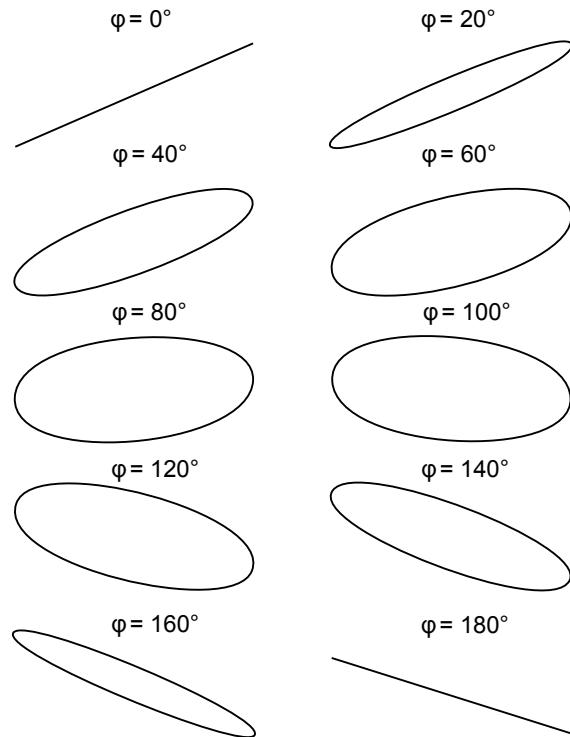
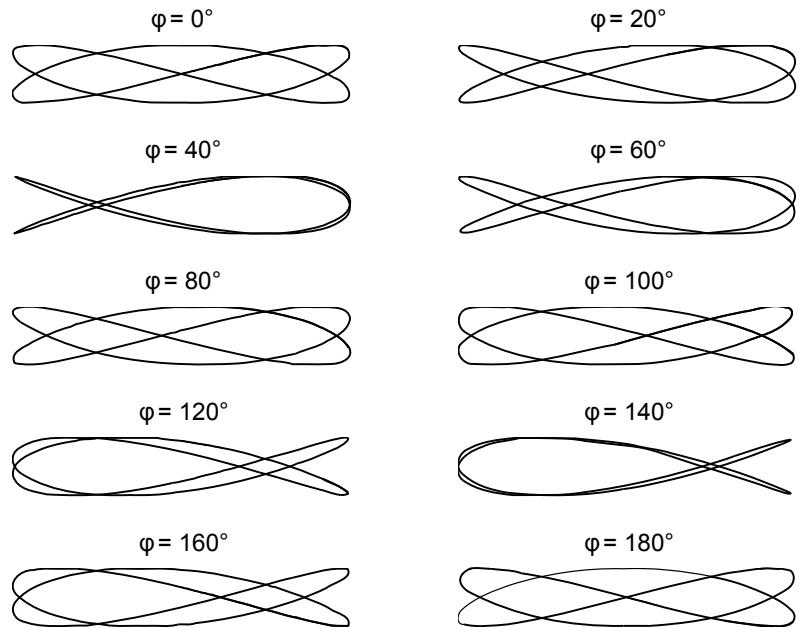
2 %

3 % neni – li pomer frekvenci racionalni cislo

4 % neni krivka uzavrena

```
5 clear
6 t = 0:0.01:7; i = 0;
7 omega1 = 2; omega2 = 3; % frekvence
8 A = 1; B = 1; % amplitudy
9
10
11 for fi = 0:pi/9:pi
12 x = A*sin(omega1*t); % 1. pohyb
13 y = B*sin(omega2*t + fi); % 2. pohyb
14 i=i+1; fi=fi*180/pi; % prevod na stupne
15 subplot(5,2,i);
16 plot(x,y,'r');
17 axis('off');
18 title(['\phi=' ,num2str(fi), '°']);
19 end
```

Listing 13.2: *Lissajous.m* vykreslí skládání harmonických pohybů v kolmých směrech.

(a) $A = B$ a $\omega_1 = \omega_2$.(b) $A = B$ a $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$.

Obrázek 13.8: Trajektorie harmonických pohybů $x = A \sin(\omega_1 t)$ a $y = B \sin(\omega_2 t + \varphi)$ v kolmých směrech

Kapitola 14

Dynamika částice

Příklad 14.0.3 Dělová koule o hmotnosti $m = 24 \text{ kg}$ opustila hlaveň rychlostí $v = 500 \text{ ms}^{-1}$ v čase $\tau = 0.008 \text{ s}$ po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavni? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

Řešení:

- Délka hlavně: $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v\tau = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0.008 = 2 \text{ m}$
- Síla působící na kouli: $F = m\frac{v}{\tau} = 24 \cdot \frac{500}{0.008} = 1.5 \times 10^6 \text{ N}$
- Vykonaná práce při urychlování koule: $A = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \times 10^6 \text{ J}$

Příklad 14.0.4 Dráha střely s ohledem na odpor prostředí.

Řešení:

Část VII

Teorie elektromagnetického pole

Kapitola 15

Spojité matematické modely polí

Obsah

15.1 Působení na dálku versus teorie pole	118
15.2 Elektromagnetické pole	119
15.2.1 Základní pojmy teorie elektromagnetického pole	119
15.2.2 Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky	121
15.2.3 Maxwellovy rovnice	122
15.3 Elektrostatické pole	123
15.4 Stacionární proudové pole	124
15.4.1 Makroskopický elektrický proud ve vodičích	124
15.5 Stacionární magnetické pole	126
15.5.1 Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí	131
15.5.2 Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru	135
15.5.3 Rovnice pro magnetický potenciál	138

15.1 Působení na dálku versus teorie pole

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci *Jamese Clerka Maxwella* "Pojednání o elektřině a magnetismu". Maxwell založil svojí teorii z větší části na intuitivních úvahách *Michaela Faradaye*. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovateli interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu "působení na dálku", který předcházel teorii pole.

Co je "působení na dálku"? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše díky svojí přítomnosti. Jakékoli vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlosť šíření zprostředkovovaného přenosu. To je známo jako "silové působení na dálku", protože kromě objektů působících na sebe "silou" a "vzdálenosti" mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námítky proti modelu "působení na dálku", protože odporoval jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit *prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícím se v prostoru mezi objekty*.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (média) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlostí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled "teorie pole" se tak vyhýbá pojmu "působení na dálku" a nahrazuje jej pojmem "působení nepřetržitým kontaktem". Tento "kontakt" je způsobený tlakem nebo "polem" indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetizmu byla první teorií pole. Na závěr uvedme definici pojmu "pole", vystihující předchozí ideje:

Definice 15.1.1 *Fyzikální pole* jsou vesměs zprostředkovateli vzájemného působení (interakcí) mezi hmotnými objekty. Např. elektromagnetické pole je specifická forma hmoty. Základní vlastnosti má společné s ostatními formami hmoty: je objektivní realitou existující nezávisle na našem vědomí, přísluší mu určitá energie, hmotnost a hybnost, přičemž pro tyto veličiny platí zákony zachování, má kvantovou strukturu (elementární částice elektromagnetického pole se nazývají fotony) a stejně jako ostatní elementární částice mohou projevovat též vlnový charakter. Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem elektromagnetických interakcí v makroskopickém i mikroskopickém měřítku a přitom však může existovat i mimo látkové objekty samostatně ve formě elektromagnetického vlnění.

15.2 Elektromagnetické pole

15.2.1 Základní pojmy teorie elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole je rozloženo v prostoru a může se měnit s časem. Veličiny, které toto pole popisují jsou obecně funkce času a tří geometrických souřadnic. Podle časového průběhu rozlišujeme:

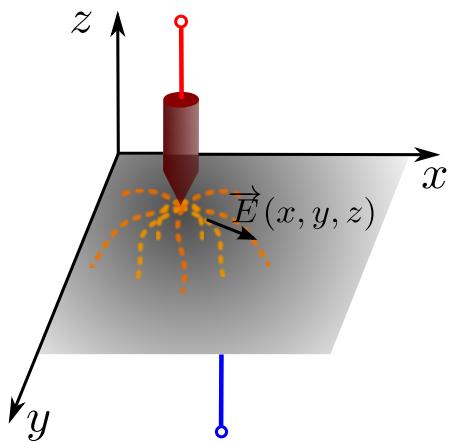
1. *pole časově neproměnné*: jsou-li náboje v klidu, budeme hovořit o poli *statickém*, jsou-li v rovnoměrném pohybu (tj. tvoří-li stejnosměrný proud), jde o pole *stacionární*.
2. *pole časově proměnné* čili *nestacionární*: jestliže se elektromagnetické pole mění s časem relativně pomalu, nazýváme jej *kvazistacionárním*. Jestliže se mění s časem periodicky, říkáme, že je v *ustáleném stavu*. Speciální případy jsou:
 - *harmonický ustálený stav*: pole se časem mění podle sinové nebo kosinové funkce
 - *neustálený (přechodný) stav*: pole přechází z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tento případ nastane tehdy, když zdroje pole změní své parametry, resp. svou polohu v prostoru.

Podle prostorového průběhu rozlišujeme:

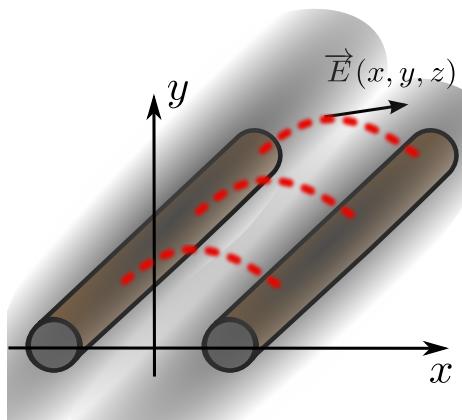
1. *trojrozměrné*: (trojdimenzionální, prostorové pole), jestliže veličiny charakterizující pole jsou funkciemi tří geometrických souřadnic (např. x, y, z). Označení: *3D pole*.
2. *dvojrozměrné*: (dvojdimenzionální pole), jestliže veličiny charakterizující pole jsou funkciemi dvou geometrických souřadnic. Dvourozměrné pole je např.

pole rovinné (je funkcí souřadnic x, y), nebo pole rotačně souměrné (je funkcií r, z). Označení: 2D pole.

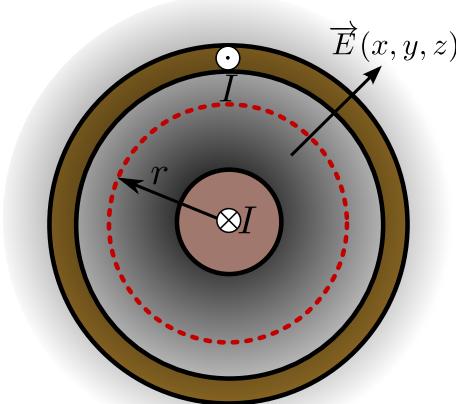
3. *jednorozměrné*: (jednodimenzionální pole), jestliže veličny charakterizující pole jsou funkciemi jedné geometrické souřadnice (např. x , nebo r). Označení: 1D.
4. *homogenní*: jestliže veličiny charakterizující pole jsou v kterémkoliv bodě uvažované oblasti prostoru tytéž. (tj. jsou nezávislé na geometrických souřadnicích).



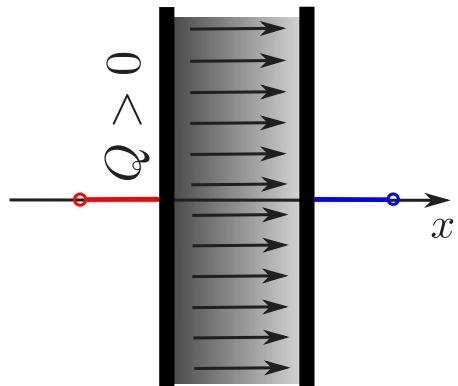
(a) 3D úloha: jiskřiště hrot - deska



(b) 2D úloha: dvouvodičové vedení



(c) 1D úloha: koaxiální kabel



(d) 1D úloha: deskový kondenzátor

Obrázek 15.1: Příklad trojdimenzionálního a), dojdimenzionálního b) a jednodimenzionálního c), d) pole

15.2.2 Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

15.2.2.1 Elektrický náboj

Elektrický náboj je skalární veličinou. Jednotkou je *coulomb* [C]. Má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$), avšak v technických aplikacích k tomu nepřihlídíme. Náboj Q může být rozložen:

- *prostorově* v objemu V s objemovou hustotou

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad [C \cdot m^{-3}] \quad (15.1)$$

- *plošně* na ploše S , s plošnou hustotou

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (15.2)$$

- *lineárně* na křivce l , s lineární hustotou

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad [C \cdot m^{-1}] \quad (15.3)$$

Rozlišujeme:

- **volné náboje**: mohou se přemisťovat v makroskopických vzdálenostech,
- **vázané náboje**: mohou se přemisťovat jen v mikroskopických vzdálenostech.

Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují); vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

15.2.2.2 Elektrický proud

Elektrický proud I resp. i je skalární veličinou. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů. Projde-li průřezem vodiče S za čas t náboj Q prochází jím elektrický proud

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad [A] \quad (15.4)$$

speciálně pohybuje-li se náboj vodičem rovnoměrně, nazýváme proud **stejnosměrným**, $I(t) = \text{konst}$, a platí

$$I = \frac{Q}{t} \quad [A] \quad (15.5)$$

Experimentálně lze elektromagnetické pole prokázat silovým působením na elektricky nabité částice. Celkovou sílu \vec{F} lze rozložit na elektrickou sílu \vec{F}_e , nezávislou na tom, zda je nabité částice v klidu nebo v pohybu vůči vztažné soustavě a na magnetickou sílu \vec{F}_m , působící jen na pohybující se částice. Elektromagnetické pole má tedy dvě složky: **elektrické pole**, působící na náboj silou \vec{F}_e a **magnetické pole**, působící na pohybující se náboj silou \vec{F}_m [May01, s. 13].

15.2.2.3 Intenzita elektrického pole

Intenzita elektrického pole \vec{E} je vektorovou veličinou charakterizující *elektrické pole*. Je definována jako *síla působící na nepohybující se jednotkový bodový náboj*:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (15.6)$$

kde \vec{F}_e je elektrická síla působící na náboj Q .

15.2.2.4 Magnetická indukce

Magnetická indukce \vec{B} je vektorovou veličinou charakterizující *magnetické pole*. Je definovována vztahem

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad [T] \quad (15.7)$$

kde \vec{F}_m je magnetická síla působící na náboj Q pohybující se rychlostí \vec{v} . Jednotkou je *tesla* [T].

Síla, jež působí elektromagnetické pole na pohybující se náboj se nazývá **Lorentzova síla**

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [N] \quad (15.8)$$

15.2.3 Maxwellovy rovnice

Makroskopická teorie elektromagnetického pole v klasickém pojetí vychází ze základních zákonů vyjádřených *Maxwellovými rovnicemi* (MR). Lze je zapsat buď v **integrálním**, nebo **diferenciálním tvaru**. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté prostorové oblasti Ω , kdežto v diferenciálním tvaru ve vnitřním bodě této oblasti. Soustavu vlastních MR představují první čtyři páry rovnic; často se k nim připojuje jako další základní rovnice elektromagnetického pole rovnice kontinuity pro vodivý proud. Její integrální a diferenciální tvar reprezentují poslední dvě rovnice.

$$\oint_C \mathbf{H} dl = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (15.9)$$

$$\oint_C \mathbf{E} dl = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15.10)$$

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho_V \quad (15.11)$$

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (15.12)$$

$$\int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{div} \mathbf{J} = -\frac{d\rho_V}{dt} \quad (15.13)$$

Předpokládá se, že všechny křivky a plochy v integrálním tvaru MR jsou po částech hladké a všechny integrované veličiny jsou po částech spojité funkce. Pak je zaručena existence integrálů v těchto rovnicích. V diferenciálním tvaru MR se předpokládají pouze **regulární body** oblastí, což jsou body, v nichž jsou veličiny \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} a \mathbf{H} spojité a spojité differencovatelné funkce; nejsou jimi tedy např. body rozhraní dvou různých prostředí, v elektrickém poli body v nichž jsou umístěny diskrétní náboje, v magnetickém poli body proudových vláken atd.

15.3 Elektrostatické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou elektrické náboje. Náboje se nepohybují (tj. nedochází k elektrickému proudu) a tedy nevzniká magnetické pole. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot} \mathbf{E} = 0$
3. MR	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	$\text{rot} \mathbf{D} = \rho$ $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

Tabulka 15.1: Základní rovnice elektrostatického pole

15.4 Stacionární proudové pole

V elektrostatice (tj. elektrickém poli nepohybujících se nábojů) neexistuje trvalý elektrický proud. Zdroje napětí (galvanické články, termočlánky, dynama aj.) mají tu vlastnost, že na jejich záporné svorce je trvale nadbytek elektronů, a na jejich kladné svorce jejich nedostatek. Těmito zdroji můžeme ve vodiči trvale udržovat elektrické pole a tedy i tok nosičů elektřiny. Jestliže se *náboje pohybují konstantní rychlostí, hovoříme o stacionárním elektrickém proudu*. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot} \mathbf{E} = 0$
Zákon kontinuity	$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div} \mathbf{J} = 0$
Ohmův zákon	$I = GU = \frac{U}{R}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$

Tabulka 15.2: Základní rovnice stacionárního proudového pole

15.4.1 Makroskopický elektrický proud ve vodičích

Elektrickým proudem nazýváme uspořádaný pohyb elektrických nábojů. Aby se tyto náboje mohly pohybovat, musí být volné - jsou přítomny v látkách, které nazýváme **vodiče**. Vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (elektrony v kovech, uhlíku a v polovodičích) anebo obojí znaménka (kladné a záporné ionty v elektrolytech, ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Volné nositele náboje (elektrony, ionty) lze rovněž oddělit od těchto látek (vodičů) a vytvořit elektrický proud ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Z vodičů mají největší význam kovy, které jsou polykrystalickými látkami s kovovou vazbou. Každý mikroskopický monokrystal kovu má pevnou krystalovou mříž sestavenou z kladných iontů, mezi nimiž se přetržitě pohybují *volné elektrony* rychlostmi, jejichž velikost je statisticky proměnná (co do velikosti i směru). Střední hodnota rychlosti (jako vektoru) všech elektronů je nulová. Střední hodnota rychlosti určitého elektronu je závislá na teplotě vodiče. Elektrony konají tzv. *termický pohyb*. Rychlosti neuspořádaných termických pohybů dosahují jen o několik řádů větších hodnot, než kmity iontů v krystalech mřížky.

Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. ke galvanickému článku), začne statisticky převládat uspořádaný pohyb nosičů kladného (záporného) náboje ve směru (proti směru) vnějšího pole nad termickým pohybem, což v makroskopickém

měřítka pozorujeme jako *elektrický proud*. Jsou-li ve vodiči přítomny nosiče náboje obou polarit, dojde k pohybu ve vzájemně opačných směrech, přičemž směr toku nosičů kladného náboje se historicky ztotožňuje se směrem toku elektrického proudu. U kovových vodičů je tedy směr proudu právě opačný, než směr toku elektronů, jenž tento elektrický proud tvoří.

Velikost (intenzitu) proudu posuzujeme podle velikosti náboje obojí polarity, který projde určitým průřezem vodiče ve vzájemně opačných směrech za jednotku času. Projde-li průřezem vodiče celkově náboj dQ za čas dt , bude tok náboje vodičem charakterizovat skalární veličina

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A], \quad (15.14)$$

která se nazývá *elektrický proud* ($1C \cdot s^{-1} = 1A$ čteno *ampér*). Tato jednotka patří mezi základní jednotky SI soustavy.

Pro *stacionární* (tj. časově neproměnný - ustálený) proud můžeme obecný výraz **15.14** nahradit rovnicí

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (15.15)$$

Jedná-li se o rovnoměrný pohyb bodového náboje Q po kružnici s periodou T , resp. s úhlovou rychlostí ω , můžeme vzniklý ustálený proud vyjádřit rovnicí

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}. \quad (15.16)$$

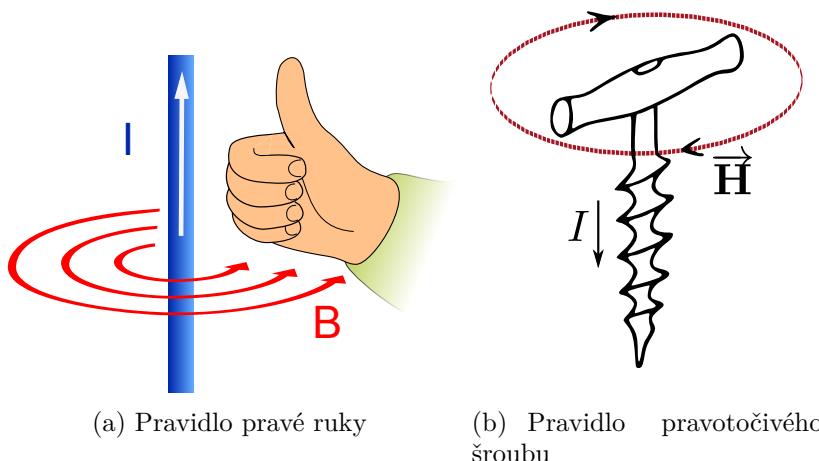
15.5 Stacionární magnetické pole

Zdrojem stacionárního magnetického pole jsou stejnosměrné proudy nebo permanentní magnety. Základní rovnice stacionárního magnetického pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
1. MR	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$
4. MR	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div} \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$		

Tabulka 15.3: Základní rovnice magnetického stacionárního pole

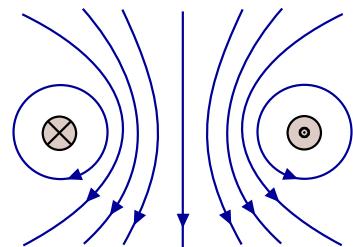
Směr vektoru \mathbf{H} se prakticky určí například *pravidlem pravotočivého šroubu*: vodič nahradíme šroubem (s pravotočivým závitem) a otáčíme jím tak, aby se pohyboval ve směru proudu; směr otáčení pak udává směr vektoru \mathbf{H} . Vše je názorně vysvětleno na obrázku 15.2(b). Podobných pomůcek existuje více, např. *pravidlo pravé ruky*: vodič uchopíme do dlaně pravé ruky tak, aby palec ukazoval směr proudu; prsty pak ukazují směr vektoru \mathbf{H} , obr. 15.2(a).



Obrázek 15.2: Určení směru vektoru \mathbf{H} : a) pravidlem pravé ruky; b) pravidlem pravotočivého šroubu

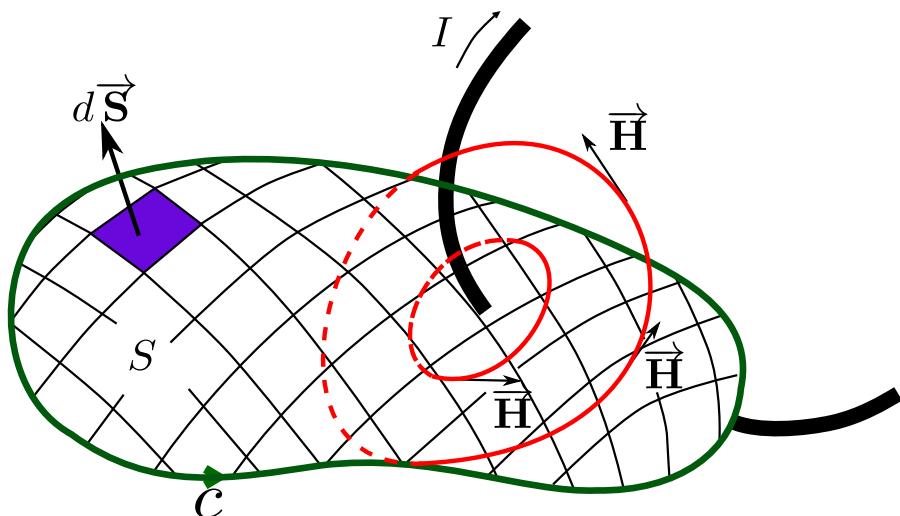
K procvičení téhoto pravidel je na obr. 15.3 vyznačen ssměr indukčních čar kruhového závitu. Označení \otimes vyjadřuje proud vstupující do nákresny (symbol letícího šípu od pozorovatele) a označením \odot proud vystupující z nákresny (symbol hrotu šípu).

Rovnice 15.17 představuje **zákon celkového proudu** vyjadřující, rovnost oběhového magnetické napětí na libovolné uzavřené orientované křivce c proudu, který je s křivkou c spřažen. "Spřaženým proudem" rozumíme proud, který prochází libovolnou plochou S , jež je ohraničena křivkou c , přičemž plocha S je orientována vůči křivce c pravotočivě (obr. 15.4). [May01, s. 55].

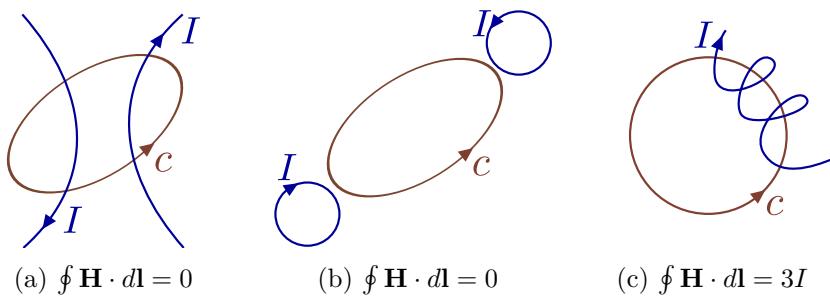


Obrázek 15.3: Indukční čáry kruhového závitu.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (15.17)$$



Obrázek 15.4: K zákonu celkového proudu



Obrázek 15.5: K pojmu "proud spřažený s křivkou" pro tři různé případy křivky c .

Základní úlohou řešení stacionárních proudových magnetických polí je určení rozložení veličin \mathbf{H} a \mathbf{B} v prostoru, je-li dáno prostorové a materiálové uspořádání a elektrické proudy vybuzují řešené magnetické pole.

V následujících úlohách se omezíme na analýzu jednodušších, souměrných magnetických polí v lineárním izotropním alespoň po částech homogenním prostředí. Pro zjednodušení budeme zanedbávat deformaci magnetického pole v okrajových oblastech a nebudeme uvažovat vliv blízkosti nesymetrického rozhraní a vliv blízkosti druhého zdroje magnetického pole. (Pro přesnější řešení by pak bylo nutné použít tzv. *metodu zrcadlení*.) Některá složitější pole lze rozdělit na několik jednodušších polí souměrného charakteru, resp. typického uspořádání. Vzhledem k tomu, že v předpokládaném lineárním prostředí ($\mu = \text{konst}$) platí pro stacionární magnetické pole *princip superpozice*, lze samostatně vyřešit nejpreve dílčí jednodušší pole jednotlivých prudů I_j a po jejich superpozici

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j(I_j), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j(I_j) \quad (15.18)$$

získáme výsledné pole celkového prudu [Kot99, s. 181].

Metodou přímé aplikace I. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru pro stacionární magnetické pole proudové

$$\oint_c \mathbf{H} dl = \oint_c H \cos \alpha dl = I_c \quad (15.19)$$

lze jednoduše použít tehdy, je-li ze zadанé úlohy zřejmá taková symetrie pole, že lze z nekonečně mnoha uzavřených křivek, splňující rov. 15.19, nalézt takovou integrační dráhu c , která obepíná proud I_c vytvářející magnetické pole a v jejichž bodech platí podmínka

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = \text{konst}, \quad (15.20)$$

speciálně

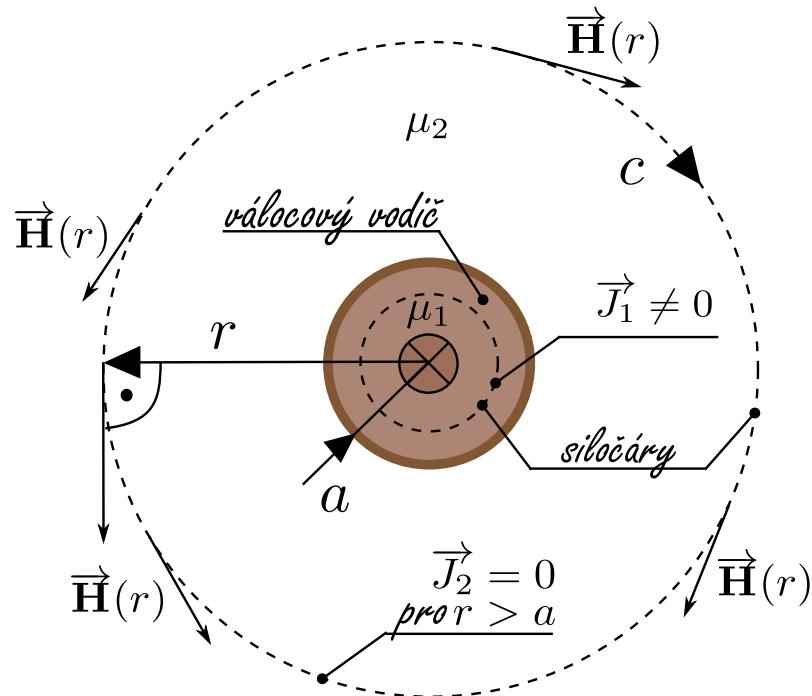
$$H = \text{konst}, \quad \alpha = 0. \quad (15.21)$$

Podmínka $\alpha = 0$, tj. $\mathbf{H} \parallel dl$ je identicky splněna na siločáře magnetického pole. Siločáry souměrných stacionárních magnetických polí splňují tedy podmínu 15.21 a řešení rovnice 15.19 při integraci po takovéto siločáře je jednoduché

$$\oint_c \mathbf{H} dl = H \underbrace{\oint_c dl}_{l_c} = I_c \rightarrow H = \frac{I_c}{l_c} \quad (15.22)$$

kde l_c je délka integrační dráhy c splňující podmínu 15.21.

Klasickým případem takovéto úlohy je magnetické pole *dlouhého přímého válcového vodiče* o poloměru a , délky l protékaného proudem I rozloženým po průřezu souměrně kolem osy vodiče, tzn, obecně s hustotou $J = J(r)$. Z osové (rotační) symetrie vyplývá, že siločáry magnetického pole mají tvar soustředných kružnic se středem v ose vodiče, ležících v rovině kolmé na osu vodiče obr. 15.6. Úlohy proto



Obrázek 15.6: Pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

řešíme ve válcových souřadnicích s osou z totožnou s osou vodiče. Za předpokladu, že průměr vodiče je zanedbatelný vůči jeho délce lze zanedbat deformaci pole vlivem konců válcového vodiče a přejít na rovinný problém v polárních souřadnicích. Z důvodu osové souměrnosti je však pole závislé jen na vzdálenosti r od osy vodiče tj.

$$H = H(r), \quad B = B(r).$$

Na kruhových siločárách je tedy splněna podmínka 15.21 a z I. Maxwellovy rovnice 15.19

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cos 0 \oint_C dl = I(r), \quad (15.23)$$

kde c je kružnice o poloměru r a proud $I(r)$ je dán rovnicí

$$I(r) = \int_{S(r)} \mathbf{J}(r) d\mathbf{S} = \int_0^r J(r) 2\pi r dr \quad (15.24)$$

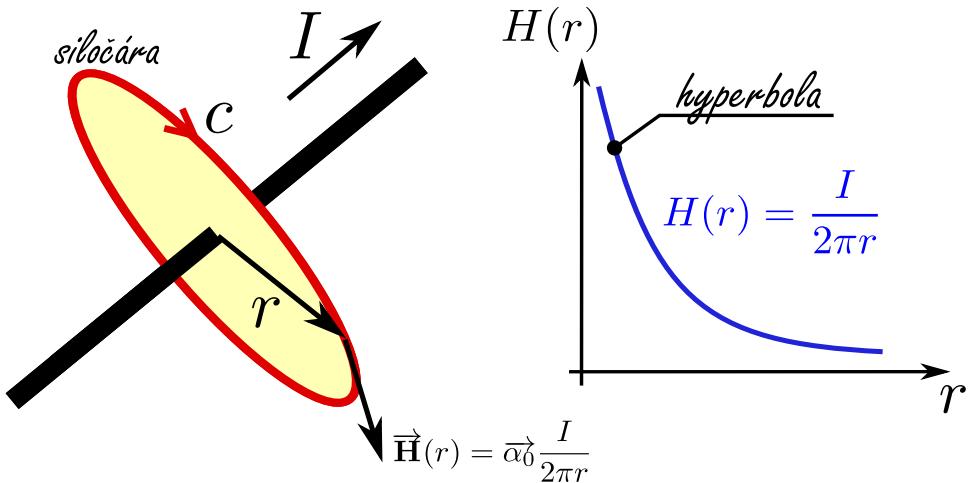
je proud protékající přes kruhovou plochu $S(r)$ ohraničenou kružnicí o poloměru r . Pak intenzita magnetického pole ve vzdálenosti r od osy vodiče má velikost

$$H = H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r}, \quad (15.25)$$

a magnetická indukce

$$B = B(r) = \frac{\mu I(r)}{2\pi r}, \quad (15.26)$$

přičemž μ je *permeabilita* v bodech na poloměru r . Magnetické pole v okolí kruhového přímého vodiče protékaného proudem I viz obr. 15.7 je tedy v souladu s předchozími úvahami dáno výrazy [Kot99, s. 183 - 185]:



Obrázek 15.7: Průběh intenzity magnetického pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

$$H = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}. \quad (15.27)$$

Jelikož 1. MR má nenulovou pravou stranu v magnetickém poli obecně není splněna nutná a postačující podmínka, aby magnetické napětí

$$\int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{m_{MN}} \quad [A] \quad (15.28)$$

nezáviselo na tvaru integrační cesty l z M do N . Tedy obecně nelze zavést *skalární magnetický potenciál*. Magnetické pole je tedy obecně **vírové (nepotenciální)**.

Všimněme si však speciálních případů, kdy pravá strana 1. MR je nulová a tedy magnetické pole bude **nevírové (magnetostatické)**. K tomu dochází buď v oblasti kde

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (15.29)$$

tj. takové v němž neexistuje uzavřená křivka c spřažená s nějakým proudem, nebo v takovém bodu, v němž platí

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (15.30)$$

tj. v bodu v němž je $\mathbf{J} = 0$.

Analogicky jako v elektrostatice, lze pak zavést magnetický potenciál φ_m vztahem

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \varphi_m. \quad (15.31)$$

Jednotkou φ_m je *ampér* [A]. Pro magnetické napětí mezi body M, N platí analogicky

$$U_{MN} = \int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varphi_m(M) - \varphi_m(N), \quad (15.32)$$

nezávisle na integrační cestě l .

15.5.1 Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí

Z předchozí kapitoly vyplývá, že intenzitu magnetického pole \mathbf{H} lze stanovit pomocí vztahu $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ tehdy, víme-li předem, že daným bodem prochází silová čára, na níž je intenzita pole konstantní, $H_s = \text{konst.}$ V tomto případě se kříkový integrál změní v pouhý součin intenzity pole a délky silové čáry

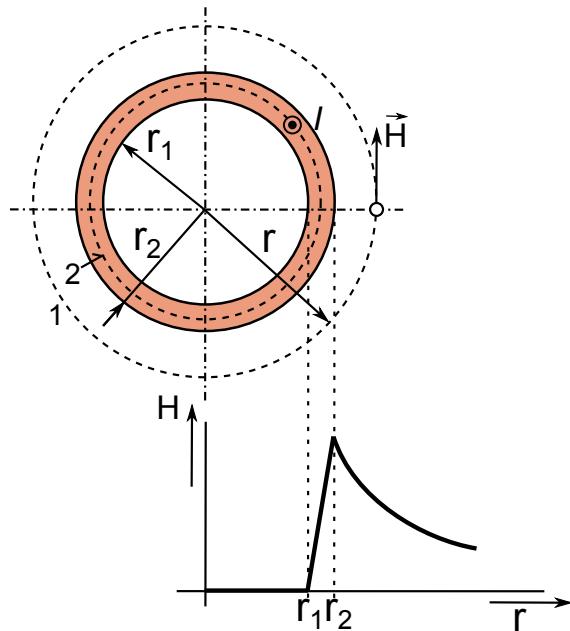
$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_s \oint_C \mathbf{l} = H_s \cdot l_s \quad (15.33)$$

takže lze vypočítat intenzitu pole

$$H_s = \frac{I}{l_s}$$

pro body silové čary.

Tohoto postupu lze použít i tam, kde uvedená podmínka není splněna, avšak pole lze vyjádřit superpozicí dílčích polí, z nich každé tuto podmínu splňuje, viz příklad 15.5.2.



Obrázek 15.8: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého dutého válcového vodiče protékaného proudem

Příklad 15.5.1 Stanovte intenzitu magnetického pole $H = f(r)$ dlouhého dutého válcového vodiče podle obr. 15.8 při rovnoměrném rozložení proudu I po průřezu.

Vodič s rovnoměrně rozloženým proudem podle obr. 15.8 je rotačně souměrný podle své osy a tedy i jeho magnetické pole je souměrné. Silové čáry jsou soustředné kružnice, vektor \mathbf{H} , jenž má směr tečny ke kružnici, je po celé délce kružnice stejně velký. Lze tedy snadno použít integrálního tvaru 1. MR (zákon celkového proudu)

Pro body ležící vně vodiče obepíná kruhová integrační dráha (vedená po silové čáře 1) celý proud vodiče I a platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I \quad (15.34)$$

takže intenzita pole je

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (15.35)$$

Ve stěně dutého magnetického vodiče jsou silové čáry rovněž kružnice, neboť magnetické pole je i zde souměrné. Tyto siločáry však obepínají jen část proudu I' vodiče pro oběh siločáry 2 platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I' = \pi(r^2 - r_1^2)J \quad (15.36)$$

kde J je hustota proudu ve vodiči

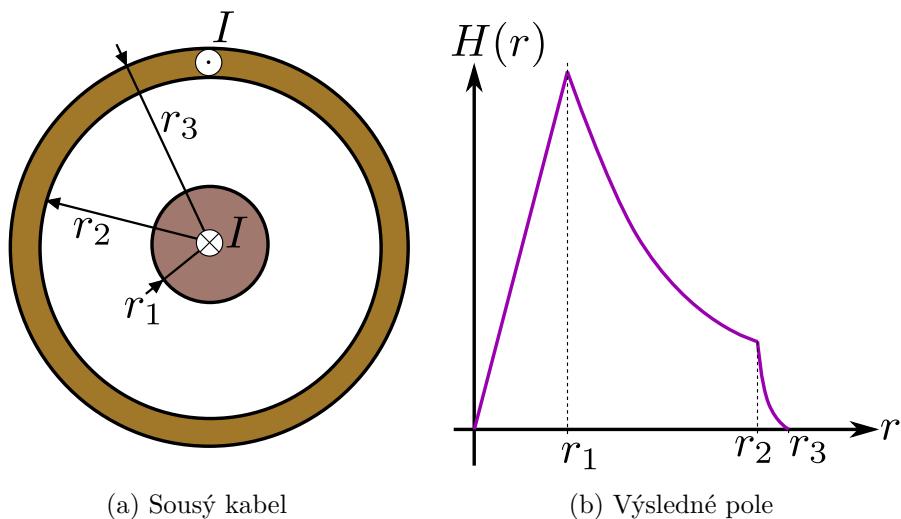
$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \quad (15.37)$$

Ve stěně vodiče je tedy intenzita pole

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (15.38)$$

V dutině vodiče je intenzita rovna nule. Vzhledem k souměrnosti pole by i zde muselo platit $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r$. Protože dráha s poloměrem $r < r_1$ neobepíná žádný proud, je $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ a tedy musí být $H = 0$.

Příklad 15.5.2 Stanovovete intenzitu magnetického pole dlouhého sousého kabelu podle obr. 15.9(a). Středním vodičem (žilou) prochází proud I a týž proud opačného smyslu prochází vnějším vodičem (pláštěm). Proudys jsou rovnoraměrně rozloženy po průřezech vodičů. Nakreslete graf průběhu $H = f(r)$ [DM70, s. 92], [Kot99, s. 195].



Obrázek 15.9: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého sousého kabelu protékaného proudem: a) náčrt; b) $H = f(r)$

Řešení: Rovnici 15.33 aplikujeme na jednotlivé intervaly osově souměrného starionárního magnetického pole, přičemž se prakticky jedná o superpozici dvou polí. V oblasti $r < r_2$ se uplatňuje pouze pole vnitřního válcového vodiče (žily), pro $r > r_2$ přistupuje sousední pole vnějšího trubkového vodiče.

- Pro oblast $r < r_1$ je vzhedem k

$$\begin{aligned} dI &= \mathbf{J}d\mathbf{S} \\ I(r) &= \int_S dI = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{S} = \int_S J \cos \beta dS \\ &= \left| \begin{array}{ll} \beta = 0 & H = \text{konst} \\ S = \pi r^2 & dS = 2\pi r dr \end{array} \right| = J \int_0^r 2\pi r dr = J\pi r^2 \end{aligned}$$

hledané řešení 1. MR dáno

$$\oint_C \mathbf{H}d\mathbf{l} = H_1 2\pi r = I(r) = J\pi r^2$$

kde celková proudová hustota je

$$J = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

a tedy

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r$$

- Pro oblast $r_2 > r > r_1$ řešíme v podstatě pole vně osamoceného válcového vodiče $I(r)$ a tedy

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

- Pro $r > r_3$ je magnetické pole vytvářeno celým proudem žíly I a příslušnou částí proudu pláště $J\pi(r^2 - r_2^2)$, kde proudová hustota

$$J = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

má opačnou orientaci oproti proudové hustotě žíly.

Pak

$$\begin{aligned} I(r) &= I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\ \oint_C \mathbf{H}d\mathbf{l} &= H_3 2\pi r = I(r) \\ H_3 &= \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme superpozicí opačně orientovaných polí

$$H_3 = H'_3 - H''_3 = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

Pruběh $H(r)$ je na obr. 15.9(b).

15.5.2 Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru

Nechť je opět magnetické pole vyvoláno konstantním el. proudem $I = \text{konst.}$. Jak vyplývá z předchozí kapitoly, základním vztahem pro toto pole je *Ampérův zákon*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = I$$

Zvolme za integrační dráhu c obvod malé plošky ΔS , jíž prochází proud $\Delta I = J_n \Delta S$, kde J_n je průměr vektoru hustoty proudu do směru normály plošky ΔS (předpokládáme, že ploška ΔS je dostatečně malá, aby se dalo počítat s konstantní hustotou proudu v celém jejím rozsahu) [Trn72, s. 13]. Pro zvolený případ platí

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \Delta S \rightarrow \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (15.39)$$

Pro $\Delta S \rightarrow 0$ zavedeme označení

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (15.40)$$

Rovnice 15.40 říká, že *rotace vektoru \mathbf{H}* , ($\text{rot} \mathbf{H}$), jehož průměr do určitého směru je roven průměru vektoru hustoty proudu do tohoto směru. Z uvedených vztahů je patrný fyzikální význam rotace vektoru \mathbf{H} . Je to vektor, jehož velikost je rovna oběhovému magnetickému napětí po dráze v rovině kolmé k vektoru hustoty proudu, vztaženém k ploše obepínané oběhovou drahou (v nehomogenní poli to platí pro případ, že se plocha dráhy blíží k nule).

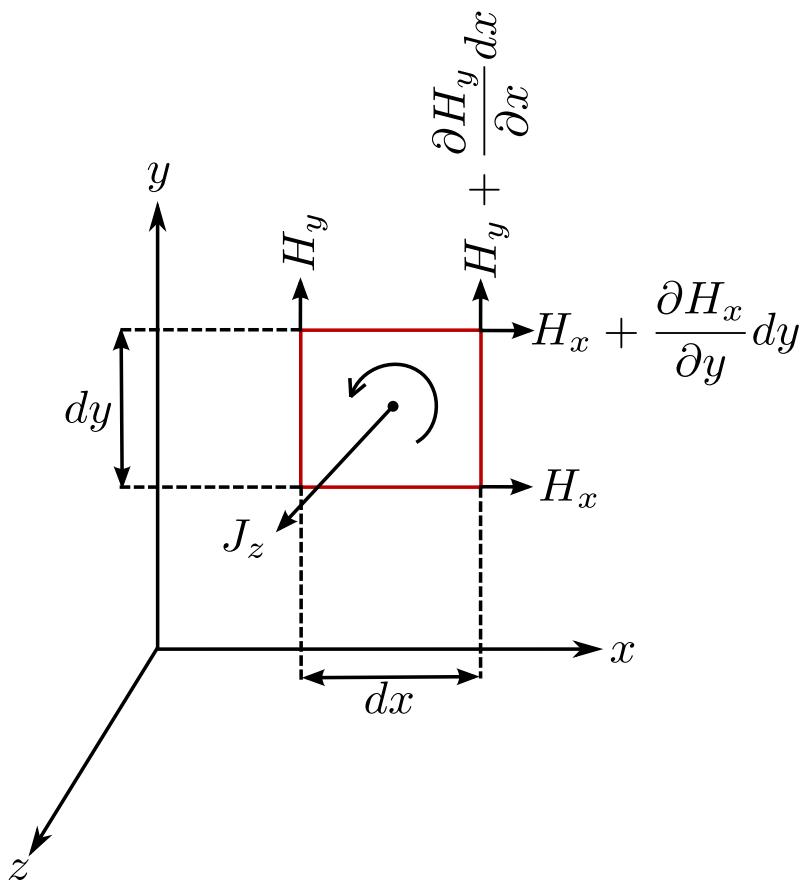
Při použití pravoúhlé soustavy kartézských souřadnic x , y a z jsou průměty vektoru $\text{rot} \mathbf{H}$ do jednotlivých os

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = J_x, \quad \text{rot}_y \mathbf{H} = J_y, \quad \text{rot}_z \mathbf{H} = J_z \quad (15.41)$$

Průmět $\text{rot}_x \mathbf{H}$ je dán oběhovým magnetickým napětím po obvodu plošky $dydz$ a

platí

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{1}{dydz} \oint_{\text{J}} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} \\
 &= \frac{1}{dydz} \left[H_y dy + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right) dz \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{dydz} \left[\left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \right) dy - H_z dz \right] \\
 &= \frac{1}{dydz} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz \right] = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z
 \end{aligned} \tag{15.42}$$



Obrázek 15.10: K odvození pojmu $\text{rot}_z \mathbf{H}$

tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \\ \text{rot}_y \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \\ \text{rot}_z \mathbf{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z\end{aligned}\quad (15.43)$$

Pro pravoúhlé souřadnice x, y, z můžeme tedy vztah $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ rozepsat na tvar

$$\begin{aligned}\text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} \text{rot}_x \mathbf{H} + \mathbf{j} \text{rot}_y \mathbf{H} + \mathbf{k} \text{rot}_z \mathbf{H} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{i} J_x + \mathbf{j} J_y + \mathbf{k} J_z = \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (15.44)$$

Rotaci vektoru $\text{rot} \mathbf{H}$ můžeme též symbolicky vyjádřit vektorovým součinem Hamiltonova operátoru a vektoru \mathbf{H}

$$\text{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z) \quad (15.45)$$

nebo také determinantu

$$\text{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (15.46)$$

Pro případ použití cylindrických souřadnic r, φ, z lze odvodit podobně

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi \\ \text{rot}_z \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = J_z\end{aligned}\quad (15.47)$$

a pro případ použití sférických souřadnic r, φ, ϑ

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right] = J_\varphi \\ \text{rot}_\vartheta \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi \sin \vartheta) \right] = J_\vartheta\end{aligned}\quad (15.48)$$

Podobně jako v elektrickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q$ vztahem $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, tak i v magnetickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ vztahem $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, nebo též v kartézských souřadnicích x, y a z jako

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

15.5.3 Rovnice pro magnetický potenciál

V regulárních bodech lineárního homogenního izotropního magnetika platí pro φ_m

Laplaceova rovnice

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (15.49)$$

Důkaz plyne z rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ a rovnice $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = \operatorname{div} \mu (-\operatorname{grad} \varphi_m).$$

Pro $\mu = \text{konst}$ dostáváme $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m = 0$, což je rovnice 15.49.

Na rozhraní mezi dvěma magneticky různými prostředími neplatí Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru a tedy ani Laplaceova rovnice 15.49. Podmínky pro \mathbf{H} a \mathbf{B} na rozhraní vyjádříme pomocí skalárního magnetického potenciálu

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (15.50)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (15.51)$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ jsou derivace ve směru normály k rozhraní.

15.5.3.1 Vektorový magnetický potenciál

V elektrostatice jsme pro usnadnění mnohých problémů zavedli skalární elektrický potenciál - lze jej zavést vždy, neboť elektrostatické pole je vždy potenciální. Magnetické pole je však obecně vírové. Lze jej popsat skalárním potenciálem jen ve speciálních případech, tj. jestliže je polem potenciálním. Obecně je však zavedení skalárního potenciálu nepřípustné. Lze i pak zavést nějakou veličinu (analogickou skálárnímu potenciálu), s níž by se pracovalo snáze, než přímo s vektory pole?

Dříve než definujeme vektorový magnetický potenciál, zopakujme zavedení skalárního potenciálu v elektrostatice. Vyjdeme z 2. MR a z rovnice známé z vektorové analýzy:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_m = 0.$$

V magnetickém poli vyjdeme ze 4. MR a z jiné identity pro vektorovou funkci \mathbf{A} , známe z vektorové analýzy:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$$

odtud

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (15.52)$$

References

- [DM70] M. Dufek and M. Mikulec. *Příklady z teoretické elektrotechniky*. Ed. by K. František. SNTL, 1970, p. 380 (cit. on p. 133).
- [Kot99] J. Kotlan. *Základy teoretické elektrotechniky*. Ed. by F. elektrotechnická. ZČU Plzeň, 1999, p. 258. 258 pp. (cit. on pp. 128, 130, 133).
- [May01] D. Mayer. *Teorie elektromagnetického pole*. Ed. by Z. Benešová. Západočeská univerzita v Plzni, 2001. 355 pp. (cit. on pp. 122, 127).
- [Trn72] Z. Trnka. *Teoretická elektrotechnika*. Nakladatelství technické literatury Praha, 1972, p. 410. 410 pp. (cit. on p. 135).

Část VIII

Signály a soustavy

Kapitola 16

Číslicové signály - posloupnosti

Obsah

16.1 Základní typy posloupností	144
16.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	145
16.3 Základní operace s posloupnosti	146

Číslicové signály (matematicky posloupnosti čísel) [US02] jsou v literatuře označovány symboly $x_n, x(n)$, nebo $x[nT]$, kde n je celé číslo a označuje pořadí prvku v posloupnosti¹. Poslední uvedený symbol $x[nT]$ zdůrazňuje souvislost číslicového signálu se signálem spojitým v čase (analogovým signálem), ze kterého vznikl vzorkováním a kvantováním. Symbol T označuje použitý *vzorkovací krok*. Jeho převrácená hodnota je rovna *vzorkovací frekvenci* $f_s = \frac{1}{T}$.

16.1 Základní typy posloupností

- **Jednotkový impuls**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (16.1)$$

- **Jednotkový skok**

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (16.2)$$

- **Reálná exponenciální posloupnost**

$$x[n] = A\alpha^n, n \geq 0, \quad (16.3)$$

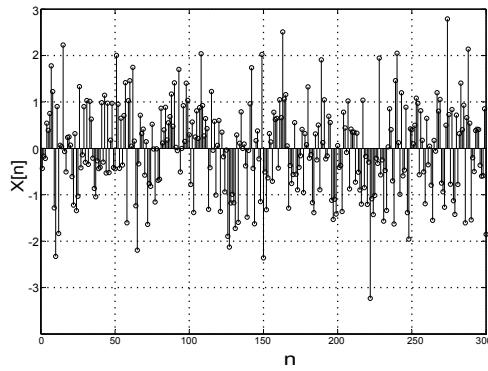
- **Chirp signál**

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi f_{max}n^2}{(N-1)f_s}\right), \quad (16.4)$$

kde f_{max} je maximální požadovaný kmitočet, který musí být menší než polovina vzorkovacího kmitočtu $f_{max} < \frac{f_s}{2}$ a N je celkový počet vzorků.

- **Pseudonáhodná posloupnost** je posloupnost, která nahrazuje ideální bílý šum. Tuto posloupnost lze generovat různými algoritmy, které zaručují velmi dlouhou periodicitu generované posloupnosti. Má-li tato posloupnost aproximovat bílý šum, musí co nejlépe splňovat požadavek nekorelovanosti sousedních vzorků (tedy konstantní spektrální výkonové hustoty) a nulové střední hodnoty. Často je požadován i jednotkový rozptyl.

¹Takto zavedené označení je nejednoznačné, neboť nerozlišuje mezi celou posloupností a jejím jediným prvkem. Posloupnost by měla být správně označena např. symbolem $\{x[n]\}$, zatímco symbol $x[n]$ by měl být vyhrazen pro její jeden prvek. Nicméně uvedené značení je všeobecně používáno.



Obrázek 16.1: Příklad pseudonáhodné posloupnosti generované pomocí funkce `randn(1, 300)` v MATLABu

16.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu

Příklad 16.2.1 Generujte signál s lineárně rostoucím kmitočtem "chirp signál", maximální kmitočet $f_{max} = 20\text{Hz}$, amplituda $A = 1$, vzorkovaný kmitočtem $f_s = 64\text{Hz}$.

```

1 % CHIRP SIGNaL
2 %
3 clear all; close all;
4 % generovani univerzalniho vektoru
5 N      = 256; % pocet prvku
6 fs     = 256; % vzorkovaci kmitocet v Hz
7 fmax   = 20; % maximalni kmitocet v Hz
8 Amax   = 1;  % amplituda signalu
9 A2     = 0.5; % amplituda signalu
10 % casovy vektor s N prvky
11 t      = linspace(0, (N-1)*(1/fs), N);
12 % generovani signalu s linearne rostoucim kmitocetem
13 kosinus = chirp(t,0,1,20);
14 %vykresleni
15 figure(1)
16 stem(1:N,kosinus(1:N), 'k'); % diskretni forma
17 plot(1:N,kosinus(1:N), 'k'); % spojita forma
18 xlabel('n')
19 ylabel('X[n]')
20 title(['Chirp signal: fmax= ', num2str(fmax), ' Hz, fs= '
21 , num2str(fs), ' Hz'])
22 grid on;
```

Listing 16.1: `gen_chirp_signal.m`. Generuje chirp signál

16.3 Základní operace s posloupností

V dalším textu budeme používat tři základní lineární operace [US02] zobrazené na 16.3:

- součin signálu $x[n]$ a reálné konstanty b :

$$w[n] = bx[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tato operace je v praxi realizována násobičkou a je zdrojem numerických chyb, tedy kvantizačního šumu, který produkuje číslicová zařízení.

- součet signálu $x[n]$ a signálu $y[n]$:

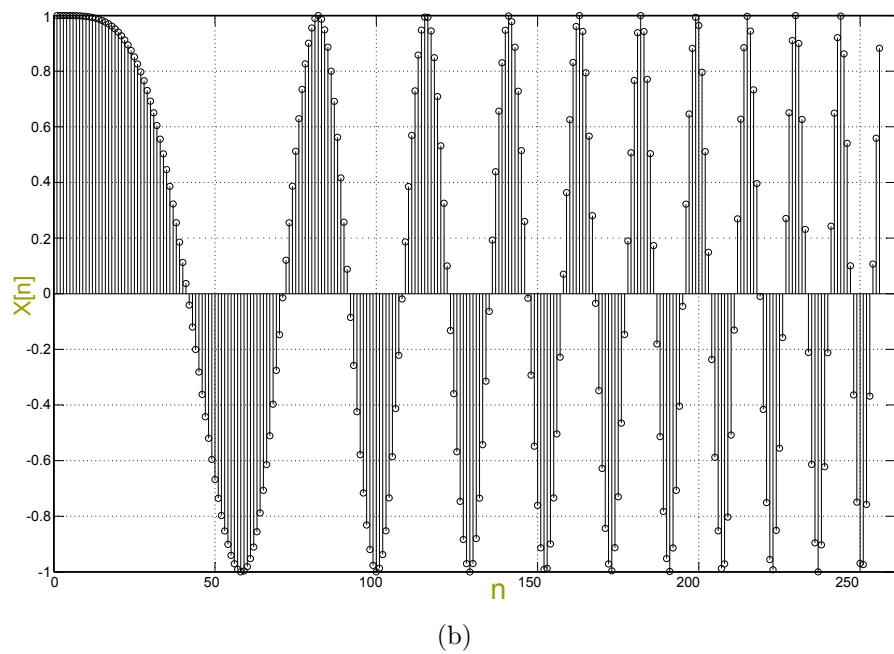
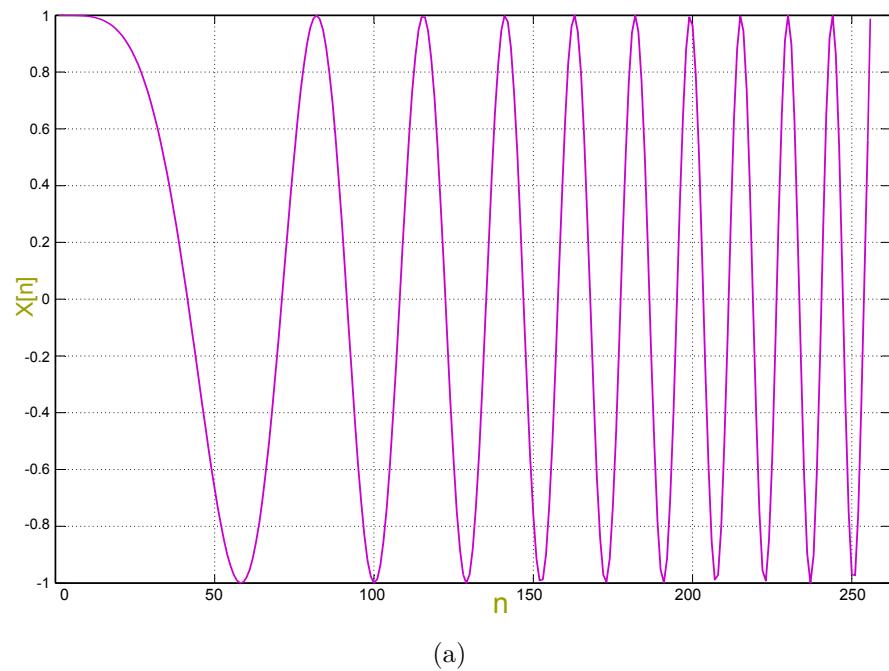
$$v[n] = x[n] + y[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto operaci provádí sčítáčka. Při neošetření může tato operace generovat hrubé chyby.

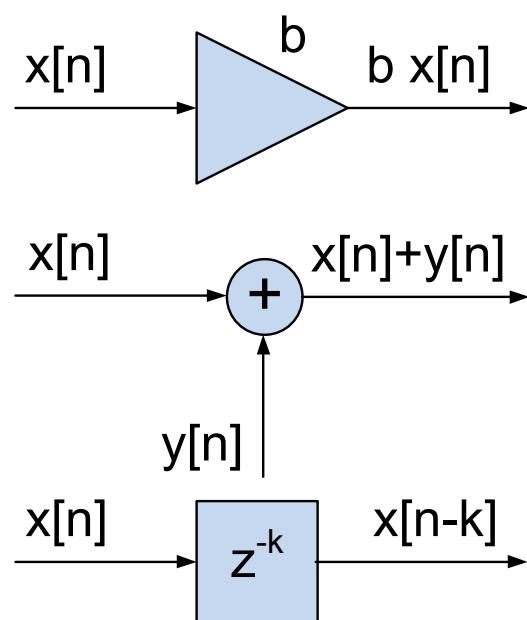
- zpoždění signálu $x[n]$ o k vzorkovacích kroků:

$$y[n] = x[n - k], n = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, M$$

Hodnoty $x[-k], k = 1, 2, \dots, M$ se nazývají *počáteční podmínky*. V digitálních implementacích provádíme operaci zpoždění paměťového registru pro každou jednotku požadovaného zpoždění z^{-1} .



Obrázek 16.2: Chirp signál: Signál s lineárně rostoucím kmitočtem s maximální frekvencí 20 Hz vzorkovaný 254 Hz. Grafická reprezentace číslicových signálů bývá buď ve spojité formě (a) nebo v diskrétní formě (b)



Obrázek 16.3: Symboly základních operací

Kapitola 17

Vlastnosti a popis lineárních systémů

Obsah

17.1 Linearita, časová invariance a kauzalita	150
17.1.1 Konvoluce v diskrétních a spojitéch systémech	151
17.2 Popis spojitéch a diskrétních systémů, přenosová funkce	156
17.2.1 Spojité systémy	156

Na soustavu obvodů můžeme nahlížet jako na seskupení (množinu) navzájem souvisejících součástí, ke kterému je určen vstupní signál x , zvaný buzení a výstupní signál y , označovaný jako odezva. Z hlediska vlastností jde o systém představující "černou skříňku", jejíž vlastnosti můžeme identifikovat analýzou vstupního a výstupního signálu [BLV07].



Obrázek 17.1: Symbol soustavy s jedním vstupem a jedním výstupem

- Systémy se spojitým časem (na vstupu i výstupu pracují se spojitými signály)
 - relace mezi vstupem a výstupem můžeme symbolicky zapsat:

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\} \quad (17.1)$$

kde S je obecný popis systémové funkce, přiřazující vstupní veličině $x(t)$ odezvu $y(t)$. Z rovnice je zřejmé, že u spojité (analogové) soustavy výstupní signál závisí na všech hodnotách vstupního signálu, nikoli jen na některých jeho hodnotách v určitých časových okamžicích.

- Systémy pracující s diskrétním časem lze obdobně symbolicky vyjádřit relací vstup/výstup ve tvaru:

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} \quad (17.2)$$

kde \mathcal{S} je tentokrát systémový operátor přiřazení posloupnosti $x[n] \rightarrow y[n]$. U diskrétních systémů se zpracovávají posloupnosti hodnot signálů, získaných vzorkováním spojitého signálu

17.1 Linearita, časová invariance a kauzalita

Linearita systémů ve spojité diskrétní oblasti má velký význam, neboť dovoluje využívat princip superpozice k zjednodušování úloh jejich analýzy a syntézy.

Předpokládejme, že na vstupu lineárního diskrétního systému jsou přivedeny dva signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$. Účinky obou vstupních signálů na výstupní signál lze zkoumat odděleně a podle principu superpozice je na výstupu sečist. Označme dílčí odezvy $y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$ a $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$, potom je

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} \quad (17.3)$$

Analogický vztah platí i pro lineární spojité systém, tedy

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \mathcal{S}\{x_1(t) + x_2(t)\} \quad (17.4)$$

Jedná-li se o systém časově invariantní, jsou události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí), nikoliv na každém časovém okamžiku samostatně. Systém je časově invariantní, jestliže časový posun ve vstupní signálu vede ke stejnemu posunu výstupního signálu. Odezva diskrétního systému na posunutý vstupní signál $x[n - m]$ je pak určen vztahem

$$y[n - m] = \mathcal{S}\{x[n - m]\} \quad (17.5)$$

a obdobně pro odezvu spojité soustavy na posunutý (zpožděný) vstupní signál $x(t - \tau)$ platí analogicky rovnice

$$y(t - \tau) = \mathcal{S}\{x(t - \tau)\}. \quad (17.6)$$

Kauzální, příčinný systém je systém, u kterého výstupní signál závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu.

17.1.1 Konvoluce v diskrétních a spojitých systémech

[BLV07] Významnou charakteristikou lineárních časově invariantních systémů *LTI* je **impulzní odezva**. Její znalost umožňuje stanovit odezvu systému na obecný signál, lze ji využít i při syntéze systému.

$$h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}. \quad (17.7)$$

Mějme diskrétní LTI systém, na jehož vstup je přiveden jednotkový diskrétní impulz¹. Jednotkový impulz je posloupnost $\delta[n] = 0$ pro všechna n s výjimkou $\delta[0] = 1$. Odezva systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ se nazývá impulzní odezva a platí

$$h[n - m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}. \quad (17.8)$$

Vzhledem časové invariantnosti, posunutému jednotkovému impulzu odpovídá posunutá impulzní odezva, tedy

$$1[n] = \sum_{m=0}^n [n - m] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots. \quad (17.9)$$

Jednotkový skok $1[n]$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat součtem

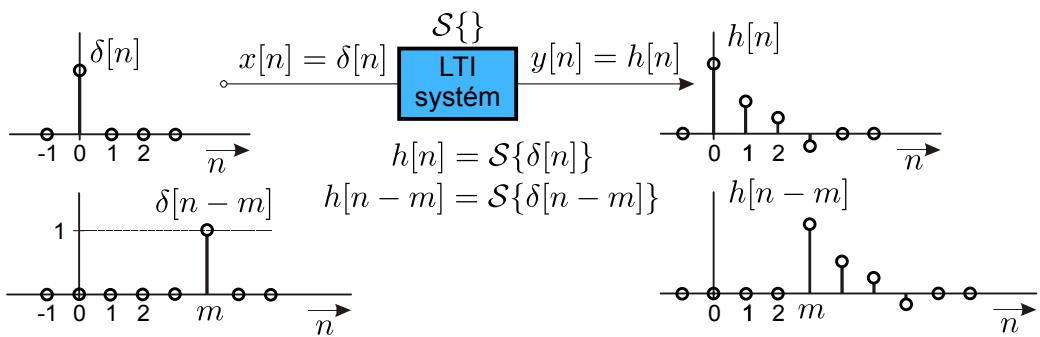
$$s[n] = \mathcal{S}\{1[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n [n - m]\right\} = \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}. \quad (17.10)$$

¹Nesmíme zaměňovat s Diracovým (také jednotkovým) impulzem.

Odezva systému na jednotkový skok $1[n]$ se nazývá **přechodová odezva** $s[n]$ a platí

$$s[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} = \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (17.11)$$

Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$, resp. na posunutý impulz $\delta[n-m]$, bude $h[n]$ resp. $h[n-m]$ - viz obr. 17.2.

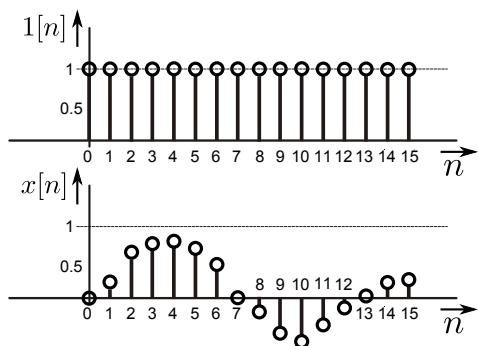


Obrázek 17.2: Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ a posunutý impulz $\delta[n-m]$

Postupná úprava rovnice (17.11) je umožněna díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m]. \quad (17.12)$$

Poznamenejme, že formou (17.12) lze zapsat každý diskrétní signál.



Obrázek 17.3: Posloupnost jednotkového skoku $1[n]$ a signálu $x[n]$

Na obr. 17.3 znázorněna souvislost mezi posloupností jedniček a diskrétním signálem. *Posloupnost jedniček tvoří bázi pro diskrétní signály.* Každá komponenta diskrétního signálu je vyjádřena součinem $x[m]\delta[n-m]$. V uvedeném příkladě jde o posloupnost příslušnou jednotkovému skoku

$$1[n] = \sum_{m=0}^{15} \delta[n-m] \quad (17.13)$$

a odpovídající posloupnost konečného signálu

$$x[n] = \sum_{m=0}^{15} x[m]\delta[n-m]. \quad (17.14)$$

Princip superpozice dovoluje získat odezvu systému jako sumu odezv na jednotlivé dílčí součásti vstupního signálu, které v rovnici (17.12) tvoří vážené jednotlivé impulzy, ze kterých je signál složen

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (17.15)$$

Protože platí (17.7) a v důsledku časové invariance vyplývá z rovnice 17.15 **konvoluční suma**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (17.16)$$

Uvedli jsme, že u kauzálního systému závisí výstupní signál $y[n]$ pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$, takže v konvoluční sumě 17.16

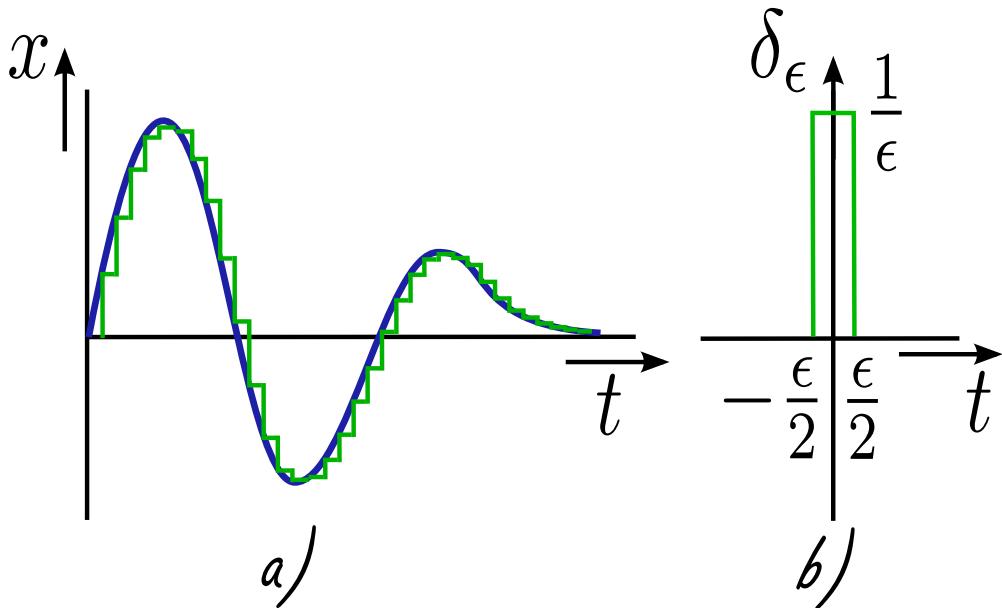
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (17.17)$$

musíme položit všechny členy impulzní odezvy $h[k] = 0$ pro $k < 0$. Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má pak tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (17.18)$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n < 0$ a $x[n] \neq 0, y[n] \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]. \quad (17.19)$$



Obrázek 17.4: a) Aproximace spojitého průběhu signálu, b) K odvození jednotkové impulsní funkce

Podobně můžeme postupovat i v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém *konvoluční integrál*. Vraťme se k výrazu 17.12 kterým jsme vyjádřili libovolný diskrétní signál. Pro případ spojitého signálu vytvořme analogickou formu zápisu využívající jednotkový impuls. Průběh obecného spojitého lze podle obr. 17.4 approximovat stupňovitým průběhem, který můžeme vyjádřit jako sumu posunutých (zpožděných) impulsů. Výchozí approximující impuls lze vyjádřit vztahem

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (17.20)$$

a je znázorněn na obr. 17.4. Jednotkový (Diracův) impuls má jednotkovou plochu. Matematicky můžeme Diracův impuls definovat výrazem

$$\delta_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t). \quad (17.21)$$

Aproximaci spojitého průběhu \$x(t)\$ impulsy 17.20 lze vyjádřit rovnicí

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon) \epsilon. \quad (17.22)$$

Zmenšování šířky impulsů \$\epsilon \rightarrow 0\$ se chyba approximace zmenšuje a výraz přejde v

limitu

$$x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon)\epsilon. \quad (17.23)$$

V limitě kdy $\epsilon \rightarrow 0$, můžeme sumu nahradit integrálem, dále součin $m\epsilon$ integrační proměnnou τ a ϵ jejím diferenciálem. Obdržíme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (17.24)$$

Vztahem 17.24 jsme spojitý průběh signálu vyjádřili jako sumu nekonečného počtu posunutých jednotkových impulsů váženou jeho okamžitými hodnotami. Předpokládejme dále, že na vstup lineárního časově invariantního spojitého systému je převeden jednotkový (Diracův) impuls a systém vytvoří odezvu $h(t)$. V případě obecného vstupního spojitého signálu $x(t)$ approximovaného vztahem 17.24, bude odezva analogového systému

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (17.25)$$

Uvedený integrál nazýváme **konvolucí** a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (17.26)$$

Funkce $h(t)$ představuje *impulsní odezvu*. Jedná se o výstupní signál systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t). \quad (17.27)$$

Z důvodů *kauzality*, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \text{ pro } |t| \geq 0, \quad (17.28)$$

$$h(t) = 0 \text{ pro } |t| < 0. \quad (17.29)$$

Potom můžeme konvoluční integrál 17.25 zapsat ve tvarem

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (17.30)$$

17.2 Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce

17.2.1 Spojité systémy

Lineární časově invariantní (LTI) spojité systém je obecně popsán soustavou integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, kterou lze postupným derivováním změnit na soustavu diferenciálních rovnic. Předpokládejme budící (nezávislou) veličinu $x(t)$ a odezvu (závislou) výstupní veličinu $y(t)$, pak eliminací ostatních proměnných bude soustava popsána jedinou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (17.31)$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n a b_0, b_1, \dots, b_m jsou konstanty charakterizující lineární systém. Obecné řešení $y(t)$ rovnice 17.31 se sestává ze dvou částí, z řešení *homogenní rovnice* a *partikulárního řešení*. K řešení je třeba znát počáteční podmínky pro $y(t)$ a jeho derivace ve výchozím okamžiku.

S použitím *Laplaceovy transformace* při nulových počátečních podmínkách má rovnice (17.31) tvar

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j X(p), \quad (17.32)$$

kde $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ a $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ jsou Laplaceovy obrazy vstupní a výstupní veličiny, p je Laplaceův operátor derivace a také komplexní kmitočet $p = \sigma + j\omega$. Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ ku obrazu vstupní veličiny $X(p)$, při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (17.33)$$

Vzhledem k rovnici (17.32) je $H(p)$ racionálně lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{j=1}^m (p - p_{0j})}{\prod_{i=1}^n (p - p_{\infty i})} \quad (17.34)$$

kde p_{0j} jsou kořeny polynomu čitatele a představují **nulové body** a kořeny jmenovatele $p_{\infty i}$ jsou **póly** přenosové funkce, $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$ je násobná konstanta.

Kmitočtové charakteristiky získáme z přenosové funkce substitucí

$$p = j\omega, \quad (17.35)$$

ve které ω je úhlový kmitočet. Platí tedy

$$H(p) \mid_{p=j\omega} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = M(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \quad (17.36)$$

kde $M(\omega)$ je **modulová charakteristika** a $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$ se nazývá **fázová charakteristika**. Skupinové zpoždění je definováno jako záporně vzatá derivace fázové charakteristiky podle kmitočtu

$$\tau(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\arg H(j\omega)}{d\omega}. \quad (17.37)$$

V předchozí kapitole jsme ukázali, že *relace vstup/výstup LTI systému* souvisí prostřednictvím *konvoluce*

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (17.38)$$

Přenosová funkce je Laplaceova transformace impulzní odezvy $h(t)$

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt, \quad (17.39)$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)X(p). \quad (17.40)$$

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako integrál impulzní odezvy

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau, \quad (17.41)$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}. \quad (17.42)$$

Algoritmus výpočtu impulzní odezvy z přenosové funkce je založen na výpočtu reziduí a rozkladu racionálně lomené funkce $H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}$ na částečné zlomky. Pokud má tato funkce jednoduché póly, rozklad má tvar².

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{k_\mu}{p - p_{\infty_\mu}} = \frac{k_1}{p - p_{\infty_1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty_2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty_n}} \quad (17.43)$$

kde k_μ se nazývají rezidua v pólech p_{∞_μ}) a platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} (p - p_{\infty_\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty_\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty_\mu}}} = Q(p_{\infty_\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty_\mu})} \end{aligned} \quad (17.44)$$

²Násobnost kořenů $N(p)$ neuvažujeme, protože se v LTI obvodech neuplatňuje

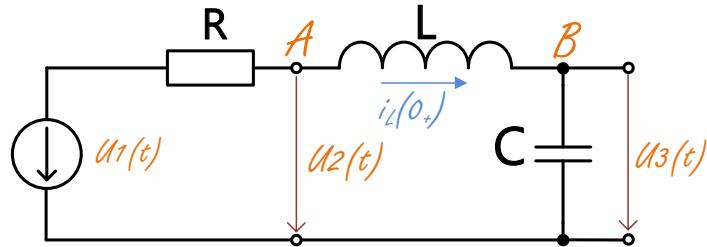
Impulzní odezva je pak dána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \sum_{\mu=1}^n k_\mu e^{p_{\infty\mu} t} \quad (17.45)$$

Póly jsou obecně komplexní $p_{\infty\mu} = \alpha_\mu + j\beta_\mu$, nebo reálné $p_{\infty\mu} = \alpha_\mu$. Jsou to kořeny rovnice $N(p) = 0$. Rovnice 17.45 je důležitá i proto, že z ní poznáme, zda analogová soustava je stabilní. Je patrné, že soustava bude stabilní, jestliže bude $\Re\{p_{\infty\mu}\} = \alpha_\mu < 0$, tj. leží-li kořeny $p_{\infty\mu}$ v otevřené levé polovině komplexní roviny $p_{\infty\mu} = \sigma + j\omega$. Imaginární osa $j\omega$ je mezí stability, pravá polovina je oblastí nestability. Polynom, který má kořeny v levé otevřené polovině se označuje **Hurwitzův polynom**.

Příklad 17.2.1 Lineární spojitý systém je dán zapojením dle obrázku. Určete:

1. diferenciální rovnici pro odezvu $u_2(t)$, je-li na vstupu buzen napětím $u_1(t)$,
2. přenos napětí $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$,
3. impulsní odezvu $h(t)$.



Obrázek 17.5: Zapojení obvodu RLC.

Řešení:

Pro zapojení dle obrázku získáme metodou uzlových napětí integrodiferenciální rovnice pro uzly A a B:

$$\begin{aligned} A : \quad & \frac{u_3(t) - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_3(\tau) - u_2(\tau)) d\tau + i_L(0_+) = 0 \\ B : \quad & \frac{1}{L} \int_0^t (u_2(\tau) - u_3(\tau)) d\tau + C \frac{du_c}{dt} - i_L(0_+) = 0 \end{aligned} \quad (17.46)$$

Derivováním a eliminací $u_3(t)$ z původních rovnic dostaneme pro odezvu $u_2(t)$ diferenciální rovnici II. rádu

$$\frac{d}{dt}(B) : \quad u_2(t) - u_3(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow u_3(t) = u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2}$$

$\frac{d}{dt}(B) \rightarrow (A)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (LC \frac{d^2 u_2(\tau)}{dt^2}) d\tau + i_L(0_+) &= 0 \\ u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t) + RC \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right]_0^t + Ri_L(0_+) &= 0 \end{aligned}$$

Při nulových počátečních podmínkách: $\frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} = 0$, $i_L(0_+) = 0$ dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (17.47)$$

V Laplaceově transformaci platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right] &= pU_2(p) - u_2(0) \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} \right] &= p^2 U_2(p) - pu_2(0) - u_2(0), \text{ kde } u_2(0) = \frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} \end{aligned}$$

při nulových počátečních podmínkách

$$p^2 LCU_2(p) + pRCU_2(p) + U_2(p) = U_1(p) \quad (17.48)$$

Odtud vyplývá **přenosová funkce** $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{LC} + \frac{1}{LC}} = \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (17.49)$$

K nalezení **impulsní odezvy** nejprve určíme póly přenosové funkce řešením rovnice $N(p) = 0$

$$p_{\infty_{12}} = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (17.50)$$

přenosovou funkci pak upravíme do tvaru

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_{\infty_1}) \cdot (p - p_{\infty_2})}, \quad K = \frac{1}{LC} \quad (17.51)$$

- Uvažujeme-li jednoduché póly a bude-li $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom z rov. 17.50 vyplývají dva reálné různé póly. Přenosovou funkci tedy můžeme zapsat obecným tvarem:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a_1} + \frac{k_2}{p + a_2} \quad (17.52)$$

kde $p_{\infty_1} = -a_1$, $p_{\infty_2} = -a_2$, Rezidua $k_1 = \frac{K}{a_2 - a_1}$, $k_2 = \frac{K}{a_1 - a_2}$ určíme z rov.

17.44. Impulsní odezvu pak vypočteme užitím rov. **17.45.**

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \frac{K}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{K}{a_1 - a_2} e^{-a_2 t} \quad (17.53)$$

- Když bude $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, obdržíme dvojici komplexně sdružených pólů a přenosovou funkci může obecně zapsat takto:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a - jb} + \frac{k_2}{p + a + jb} \quad (17.54)$$

kde $p_{\infty_1} = -a + jb$, $p_{\infty_2} = -a - jb$. Rezidua v pólech jsou dány výrazy $k_1 = -\frac{jK}{2b}$, $k_2 = \frac{jK}{2b}$. Impulzní odezvu opět určíme užitím rov. **17.45.**

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-e^{jbt} + e^{-jbt})] \\ &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (\underline{-\cos(bt)} - j \sin(bt) + \underline{\cos(bt)} - j \sin(bt))] \\ &= \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) \end{aligned} \quad (17.55)$$

Pro stavební prvky: $R = 1k\Omega$, $L = 11.5mH$, $C = 22.5nF$ ukazuje výpis m-file *SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m* symbolický způsob řešení operátorových obvodových rovnic pomocí MATLABu. Jde o typ **dolní propust**, jehož přenosová funkce má tvar:

$$H(p) = \frac{3.9506 \cdot 10^9}{p^2 + 8.8889 \cdot 10^4 p + 3.9506 \cdot 10^9}.$$

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 15
3 % Vyreste symbolicky soustavu operatorovych obvodovych
4 % rovnic a vyjadrete prenosovu funkci
5 %
6 f1 = '(U3-U1)/R+(U3-U2)/(p*L)';
7 f2 = 'p*C*U2+(U2-U3)/(p*L)';
8 % symbolicka reseni rovnic
9 rU = solve(f1, f2, 'U2, U3');
10 % vyber pole U2, resp. U1 z datove struktury rU
11 rU.U2 % uzlove napeti U2
12 rU.U3 % uzlove napeti U3
13 % Prenosova funkce
14 P = rU.U2/'U1'
15 % symbolicka substituce
16 nP = subs(P, {'R', 'C', 'L'}, {1e3, 22.5e-9, 11.25e-3})

```

```

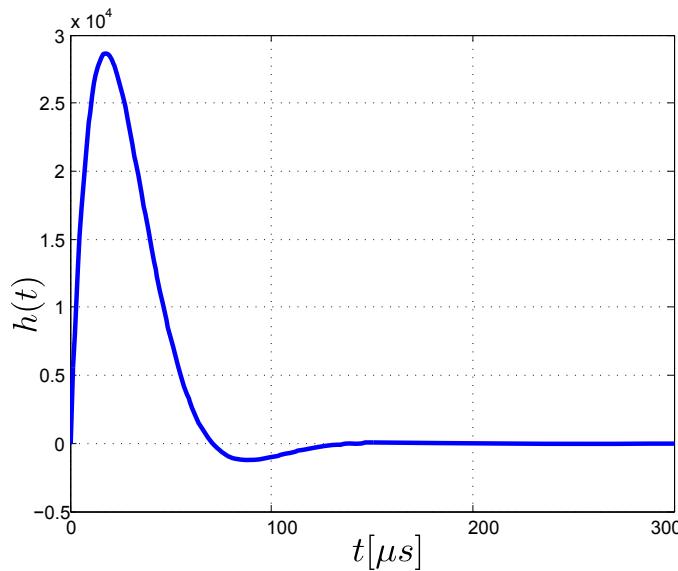
17 % nastaveni formatu zobrazeni cisel napr: 3.1416e+000
18 format short e
19 % citatel(numerator) a jmenovatel(denominator)
20 % symbolickeho výrazu
21 [num, den] = numden(nP) % num/den
22 % symbolické vyjádření polynomu prevede na vektorové
23 % vyjádření - A(1): první prvek vektoru (koeficient u
24 % nejvyšší mocniny polynomu)
25 N = sym2poly(den)
26 roots(N)
27 % H(p)=Q(p)/N(p)
28 % koeficient u nejvyšší mocniny ve jmenovateli bude 1
29 Q = sym2poly(num)/N(1)
30 N = N/N(1)

```

Listing 17.1: SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m

Impulzní charakteristiku obdržíme dosazením do vztahu 17.55

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) = 8.8890 \cdot 10^4 e^{-4.4444 \cdot 10^4 t} \sin(4.4444 \cdot 10^4 t).$$

**Obrázek 17.6:** Impulzní charakteristika

Z hlediska analýzy obvodů v kmitočtové oblasti je výhodné sestavovat obvodové rovnice (metodami uzlových napětí a smyčkových proudů) přímo v operátorovém tvaru.

Kirchhoffovy zákony pro uzavřenou smyčku a proudu do uzlu pak mají tvar

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

Metodou uzlových napětí pro zapojení na obr. 17.5 obdržíme rovnice

$$\frac{U_3(p) - U_1(p)}{R} + \frac{U_3(p) - U_2(p)}{pL} = 0 \quad (17.56)$$

$$pCU_2(p) + \frac{U_2(p) - U_3(p)}{pL} = 0 \quad (17.57)$$

Na rozdíl od 17.46 jde o algebraické rovnice, ze kterých eliminací uzlového napětí $U_3(p)$ vyplývá přenosová funkce 17.49

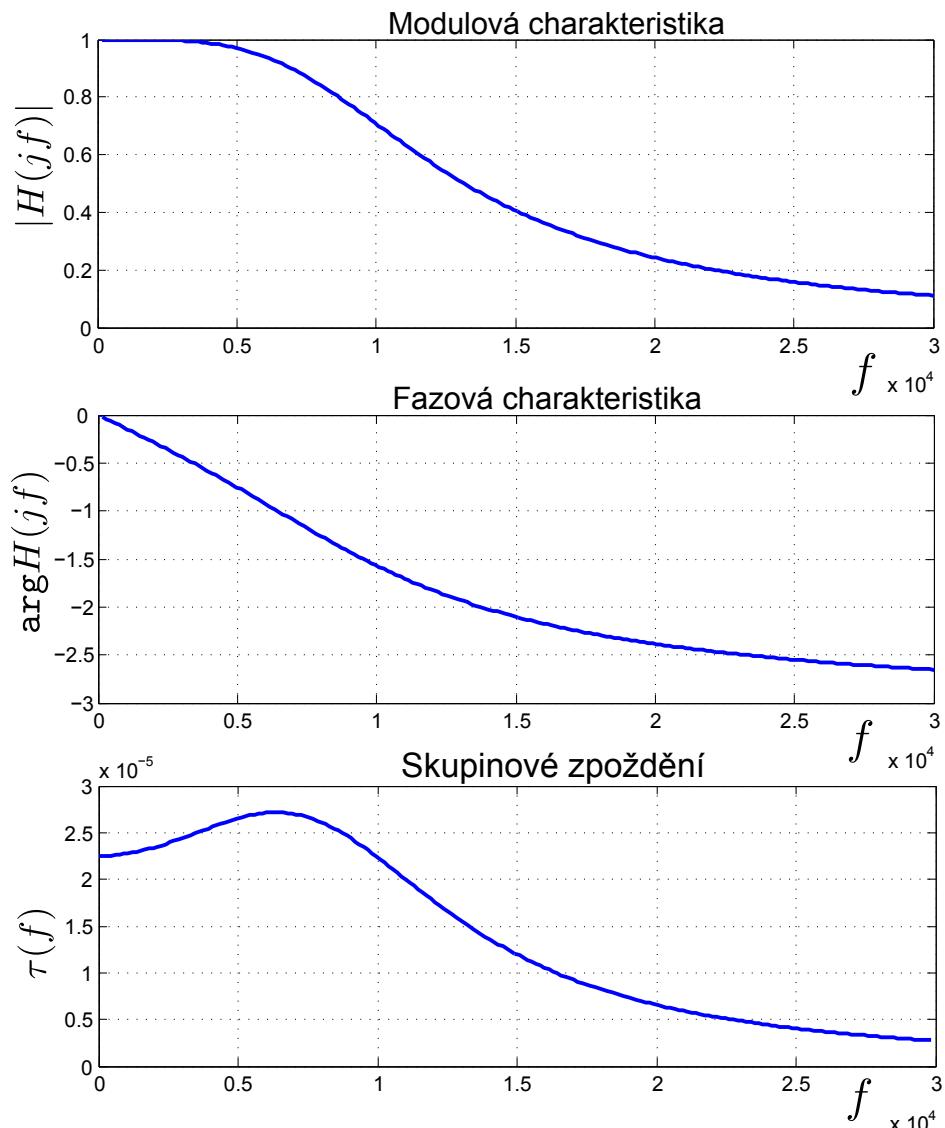
$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p_L^R + \frac{1}{LC}}$$

Dosazením za $p = j\omega$ lze z přenosové funkce vyjádřit modulovou charakteristiku $H(j\omega)$ a fázovou charakteristiku $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$. Skupinové zpoždění vyplývá ze vztahu 17.37. Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění jsou na obr. 17.7.

Filtr má maximálně plochou modulovou charakteristiku přenosu. Mezní kmitočet propustného pásma je $f_p = 10\text{kHz}$, při kterém je $|H(j\omega_p)| = 0.707$. Tato hodnota odpovídá poklesu modulové charakteristiky o 3dB .

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 16
3 % Vykreslete modulovou, fazovou charakteristiku,
4 % charakteristiku skupinoveho zpozdeni a
5 % impulzni odezvu prenosove fce
6 % Q(p) 3.9506e+009
7 % H(p) = _____ = _____
8 % N(p) p^2 + 8.8889e+004p + 3.9506e+009
9 %
10 Q = 3.9506e+009;
11 N = [1, 8.8889e+004, 3.9506e+009];
12 f = linspace(0, 3e4, 200);
13 w = 2*pi*f;
14 %komplexni frekvencki odezva z analogove prenosove fce
15 H = freqs(Q, N, w);
16 figure(1)
17 plot(f, abs(H)); grid;
18 xlabel f
19 ylabel '|H(jf)|'
20 title 'Modulova charakteristika'
```



Obrázek 17.7: Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění filtru

```

21 figure(2)
22 plot(f, phase(H)); grid
23 xlabel f; ylabel 'arg H(jf)';
24 title 'Fazova charakteristika',
25 % diff(X) – difference prvku vektoru
26 % [X(2)-X(1) X(3)-X(2) ... X(n)-X(n-1)]
27 t = diff(-phase(H)) ./ diff(w); % aproximace derivace
28 figure(3)
29 plot(f(1:199), t); grid
30 xlabel f; ylabel '|tau(f)|';

```

```
31 title 'Skupinovezpozdeni'
32 % vektorove vyjadreni prevede na symbolicke vyjadreni
33 P = poly2sym(Q)/poly2sym(N)
34 % inverzni Laplaceova transformace
35 ih = ilaplace(P)
36 % konverze racionalniho cisla na desetinne cislo
37 vpa(ih,5)
38 figure(4)
39 t = linspace(0, 3e-4, 200);
40 plot(t, subs(ih)); grid
41 xlabel f; ylabel 'h(t)';
42 title 'Impulznizodezva'
```

Listing 17.2: SAS_exam_03_Hp.m

Část IX

Teorie elektrických obvodů

Kapitola 18

Základy elektrických obvodů

Obsah

18.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů	168
18.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	168
18.2.1 Ilustrativní příklad	169
18.2.2 Pravidla pro sestavování rovnic	170
18.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí	171
18.3.1 Metoda razítek	171
18.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA . .	173
18.5 Napěťový dělič	176

Ke každému skutečnému, fyzicky realizovanému, elektrickému obvodu lze nakreslit **obvodové schéma**. Toto schéma je vlastně *obvodovým modelem* skutečného obvodu. Obvodový model je sestaven ze základních obvodových prvků - **dvojpólů**. Název plyne z důležité topologické vlastnosti dvojpólů - mají dvě svorky [PV04, s. 12].

Základních obvodových prvků je celkem pět: rezistor, cívka, kondenzátor, ideální zdroj napětí, ideální zdroj proudu. Zdůrazněme následující skutečnosti:

- Každý ze základních prvků je uvažován jako **ideální** (nemá žádné jiné parazitní vlastnosti).
- Kombinací základních prvků vznikne **náhradní zapojení** skutečného prvku, včetně jeho parazitních vlastností.
- Z pěti základních prvků je tedy možno sestavit **libovolný obvodový model** (elektrický obvod) **pasivní i aktivní**.
- U **aktivních obvodů** (např. zesilovačů) se uplatňují řiditelné, neboli parametrické prvky. Typickým příkladem je bipolární tranzistor, jenž je řízen proudem do báze.

18.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů

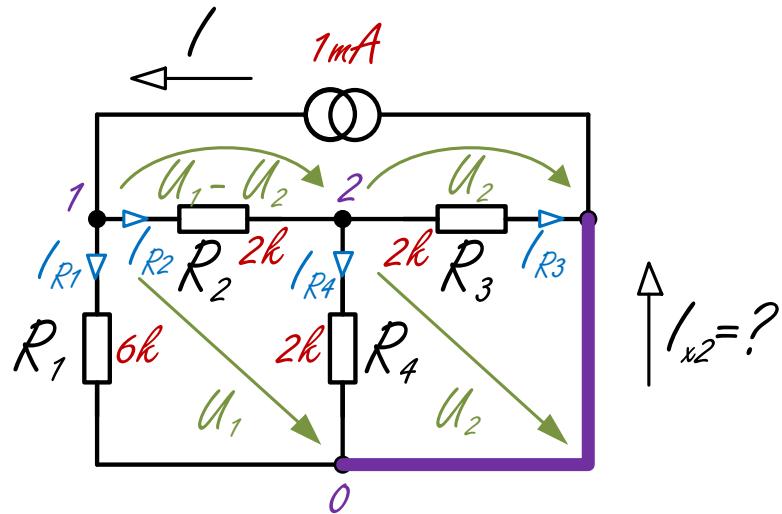
18.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)

Metoda uzlových napětí je založena na tomto postupu:

- Jeden z uzlů obvodu se prohlásí za tzv. **referenční uzel**. Přiřadí se mu číslo 0, případně v počítacovém simulátoru značka uzemnění. Vzhledem k tomuto uzlu se budou vztahovat napětí ostatních uzlů obvodu. Tato napětí se nazývají **uzlová napětí** a tvoří **soustavu neznámých obvodových veličin** metody. Je vhodné orientovat všechna uzlová napětí tak, aby čítací šipky směřovaly do referenčního uzlu. Uzlová napětí jsou neznámými metody i tehdy, je-li naším konečným cílem počítat jiné obvodové veličiny. Každé napětí a každý proud v obvodu jsou totiž vyjádřitelné jako lineární kombinace uzlových napětí.
- Pro každý uzel obvodu, vyjma referenčního, sestavíme rovnici 1. KZ ve tvaru: *součet proudů tekoucích dovnitř uzlu z vnějších zdrojů proudu = součtu proudů vytékajících větvemi obvodu ven z uzlu*.
- Rovnice vyřešíme, tj. získáme velikosti uzlových napětí. Z nich pak dopočteme požadovaný výsledek analýzy.

18.2.1 Ilustrativní příklad

Metodu uzlových napětí lze objasnit na příkladu zapojení na obr. 18.1. Je třeba určit proud I_{x2} . Nejprve očíslovjeme uzly. Zvolíme referenční uzel a přiřadíme mu číslo 0.



Obrázek 18.1: Řešení obvodu metodu uzlových napětí - MUN [Bio04, s. 62]

0. Zde je třeba zdůraznit, že referenční uzel je možno volit zcela libovolně. Většinou se volí tak, aby případné hledané napětí bylo rovno jednomu z napětí uzlových. Dále si všimneme, že uzel, v němž je se spojuje rezistor R_3 a proudový zdroj, je vlastně součástí referenčního uzlu a jako takový se přídavně nečísluje - má již označení 0.

Vyznačená uzlová napětí U_1 a U_2 tvoří soustavu dvou neznámých, k níž musíme sestavit dvě rovnice. Budou to rovnice 1. KZ pro uzly 1 a 2. Protože počítáme proud I_{x2} , postačí určit uzlové napětí U_2 . Z něj totiž snadno určíme proud rezistorem R_3 a z něj I_{x2} .

Podle obr. 18.1 napišeme 1. KZ pro rovnováhu proudů v uzlech 1 a 2:

$$\begin{aligned} \text{uzel1 : } I &= I_{R1} + I_{R2} \\ \text{uzel2 : } 0 &= -I_{R1} + I_{R2} + I_{R4} \end{aligned} \quad (18.1)$$

Orientaci čítacích šipek větvových proudů můžeme volit naprosto libovolně. Pokud se v orientaci zmýlíme, vyjde u daného proudu opačné znaménko.

Větvové proudy na pravé straně rovnic vyjádříme pomocí větvových vodivostí a větvových napětí, která závisí na uzlových napětí (viz obr. 18.1):

$$\begin{aligned} uzel1 : I &= G_1 U_1 + G_2(U_1 - U_2) \\ uzel2 : 0 &= -G_2(U_1 - U_2) + G_3 U_2 + G_4 U_2 \end{aligned} \quad (18.2)$$

Vytknutím neznámých upravíme rovnice na konečný tvar

$$\begin{aligned} uzel1 : I &= (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 \\ uzel2 : 0 &= -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 \end{aligned} \quad (18.3)$$

Dosadíme-li vodivosti v [mS], vyjdou proudy na levé straně v [mA]

$$\begin{aligned} uzel1 : 1 &= \frac{2}{3}U_1 - \frac{1}{2}U_2 \\ uzel2 : 0 &= -\frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2}U_2 \end{aligned} \quad (18.4)$$

Tyto rovnice dávají řešení

$$[U_1, U_2] = \left[2, \frac{2}{3} \right] V \quad (18.5)$$

Pohledem na schéma 18.1 zjistíme, že při $U_2 = \frac{2}{3}V$ bude proud $I_{R3} = \frac{1}{3}mA$ a hledaný proud I_{x2} vychází z 1. KZ

$$I_{x2} = I - I_{R3} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}mA. \quad (18.6)$$

18.2.2 Pravidla pro sestavování rovnic

Nyní pustíme se do zobecnění poznatků z předchozího příkladu. Rovnice 18.4 zapíšeme v maticovém tvaru Porovnáme-li maticovou rovnici s původním schématem

$$\begin{array}{c} \text{uzel 1: } \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} U_1 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline & U_2 \\ \hline G_1 + G_2 & -G_2 \\ \hline -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \text{uzel 2: } \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

obvodu 18.1 dospějeme k následujícím pravidlům:

- Pravidlo o sestavení vektoru budicích proudů na levé straně maticové rovnice:

- V i – tém řádku je algebraický součet proudů, tekoucích dovnitř i – tého uzlu z vnějších zdrojů proudu.
- Pravidla o sestavení čtvercové vodivostní (admitanční) matice:
 - Prvek i, j na hlavní diagonále obsahuje součet všech vodivostí (admitancí), které jsou připojeny k uzlu i .
 - Prvek $i, j (i \neq j)$ mimo hlavní diagonálu obsahuje záporně vzatý součet všech vodivostí, které jsou připojeny bezprostředně mezi uzly i a j .

Základní lineární dvojpóly (R, L, C) jsou reciprocní, tzn. chovají se stejně ve směru obou uzel. Jinými slovy, jejich impedance je v obou případech stejná. Proto u obvodů s těmito součástkami vykazují admitanční matice *symetrii*, tj. prvky matice i, j a j, i jsou totožné.

18.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí

Výhodou metody uzlových napětí je její snadná algoritmizace: algoritmus pro sestavení soustavy rovnic přímo ze schématu je velmi jednoduchý a lze jej tedy implementovat do počítačových programů pro analýzu a simulaci. Nevýhodou metody ovšem je, že neumožňuje analyzovat obvody se zdroji napětí a součástkami, které nemají admitanční rovnici. Bohužel, k těmto součástkám patří nejen například takové prvky jako je obyčejný transformátor, ale i různé operační zesilovače, konvejory, a další moderní analogové prvky [Bio04, s. 77].

Proto klasická metoda MUN musí být podrobena určité modifikaci, která jednak zachová její výhodu - snadnou algoritmizovatelnost - jednak umožní analyzovat lineární obvody bez výše uvedených omezení. Jsou to metody:

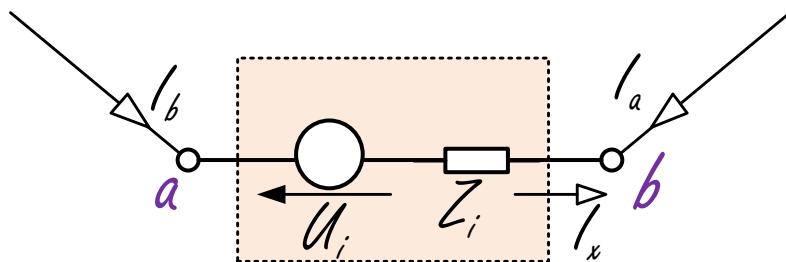
- Metoda razítek
- Metoda zakázaného řádku
- Metoda U/I

18.3.1 Metoda razítek

Každý "problémový" prvek je popsán minimálně jednou přídavnou rovnicí a o stejný počet obohatí množinu neznámých. Současně dojde k modifikaci některých původních rovnic 1. KZ. Maticová rovnice pak získá zvláštní strukturu: k původní admitanční matici MUN přibudou řádky a sloupce, jejichž prvky obecně nemají rozdíl admitancí. Jsou to tzv. *razítka* přídavných elektrických prvků. Celá matice se pak nazývá **pseudoadmitanční**. Zvětšení rozměru soustavy rovnic obvykle při

počítačové analýze nemusí být na závadu. Při ručním řešení jde však prakticky vždy o problém [Bio04, s. 78].

Uvažujme obvod popsaný rovnicemi klasické MUN. Mezi uzly a a b obvodu dodatečně připojíme obecný dvojpól, který je popsán svým Théveninovým modelem podle obr. 18.2. Včleněním dvojpólu dojde ke změně napěťových a proudových poměrů v obvodu. Dvojpólem bude protékat proud I_x , který modifikuje proudové poměry mezi v uzlech a a b . Dojde i k změně původních uzlových napětí.



Obrázek 18.2: Začlenění obecného lineárního dvojpólu, popsaného Théveninovým modelem do obvodu [Bio04, s. 78]

Původní rovnice popisující rovnováhu proudů v uzlu a musí být na pravě straně doplněna o proud I_x , vytékající ven z uzlu, a v uzlu b o proud I_x se záporným znaménkem, protože vtéká dovnitř uzlu b . Navíc uzlová napětí U_a a U_b jsou nyní vázána podmínkou

$$Z_i I_x + U_b = U_i + U_a, \text{ nebo } U_i = Z_i I_x + U_b - U_a \quad (18.7)$$

Všechny tyto modifikace lze zahrnout do nové soustavy rovnic MMUN:

		U_a	U_b		I_x	
a	I_a				+1	U_a
	I_b				-1	U_b
b	.				.	.
	.				.	.
		U_i	U_i	\dots	Z_i	I_x

=

		I_a	I_a		+1	U_a
a	I_b				-1	U_b
	.				.	.
b	I_x				.	.
	.				.	.
		U_i	U_i	\dots	Z_i	I_x

razítka

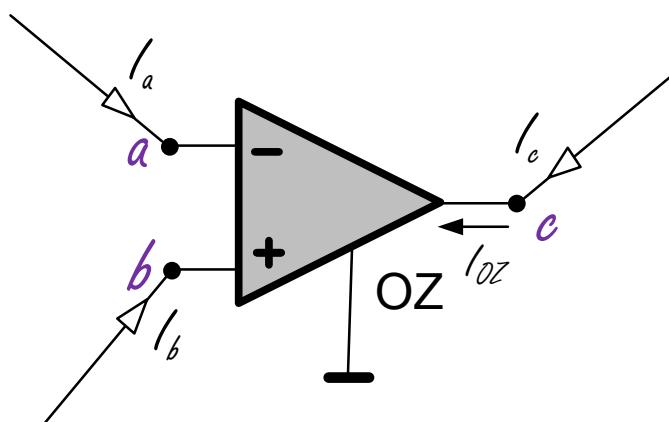
Obrázek 18.3: Razítka v pseudoadmitanční matici [Bio04, s. 79]

Vektor neznámých uzlových napětí je rozšířen o další neznámou, I_x . Počet rovnic je rovněž zvětšen o jedničku, a to o výše uvedenou podmínce mezi uzlovými napětími U_a a U_b . Přitom napětí U_i je začleněno do vektoru známých budicích veličin na levé straně. Modifikace rovnic 1. KZ pro uzly a a b je provedena zápisem +1 a -1 do sloupce " I_x ".

Právě provedený zápis je návodem, jak pomocí MMUN analyzovat například obvody obsahující zdroj napětí. Impedance Z_i může být i nulová, pak se bude jednat o ideální zdroj napětí. Při $U_i = 0$ a $I_i = 0$ lze modelovat zkrat mezi uzly a počítat proud, tekoucí tímto zkratem.

18.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA

Ideální OPAMP, na obr. 18.4 po vložení do obvodu způsobí ztotožnění uzlových napětí U_a a U_b , a modifikaci proudových poměrů v uzlu c .



Obrázek 18.4: Ideální operační zesilovač typu VFA

Ve spodním přídavném řádku je zapsána rovnice

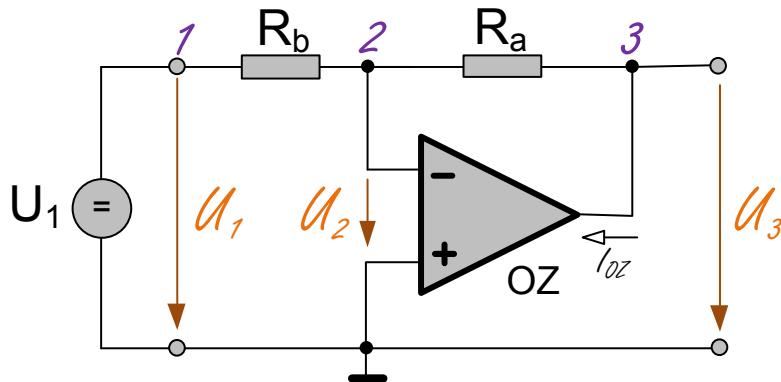
$$0 = 1 \cdot U_a - 1 \cdot U_b \quad (18.8)$$

Výsledek řešení se nezmění, jestliže obě strany této rovnice vynásobíme libovolným nenulovým číslem. Ve spodním řádku tedy může být namísto $[1, -1]$ například $[15, -15]$. Je-li jeden ze vstupů OZ spojený s referenčním uzlem, neobjeví se příslušné uzlové napětí v rovnicích a proto v posledním řádku bude figurovat jen jedna jednička místo uvedené dvojice. Jednička v řádku c a sloupci I_{OZ} reprezentuje připočtení proudu I_{OZ} do celkové bilance proudů, vytékající z uzlu c .

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & U_a & U_b & U_c & & I_{OZ} \\
 \hline
 a & I_a & & & \dots & \\
 b & I_b & & & \dots & \\
 c & I_c & & & \dots & +1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 & +1 & -1 & & \dots & \\
 \hline
 & & & & & I_{OZ}
 \end{array}$$

Obrázek 18.5: MMUN - pro ideální OPAMP typu VFA

Příklad 18.4.1 Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 18.6. Napište rovnice MMUN.



Obrázek 18.6: Invertující zesilovač

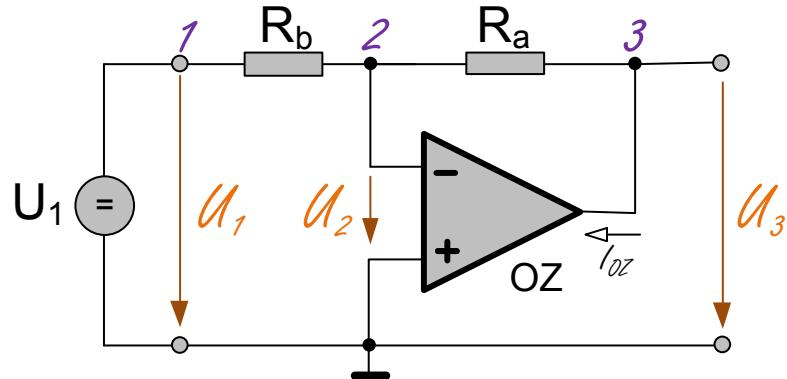
Rovnice MMUN budou v maticovém zápisu vypadat takto: Předposlední rovnice říká, že uzlové napětí U_1 je rovno napětí signálového zdroje U_{IN} . Jednička v posledním řádku reprezentuje jednoduchou rovnici $U_2 = 0$. Ačkoliv je obvod poměrně jednoduchý, je pro ruční řešení neefektivní, neboť jsme získali soustavu o 5 rovnic a 5 neznámých.

Příklad 18.4.2 Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 18.7. Napište rovnice MMUN.

Příklad 18.4.3 Uvažujme diferenciální zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 18.8. Napište rovnice MMUN.

U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
G_b	$-G_b$		-1		U_1	
$-G_b$	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	=
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

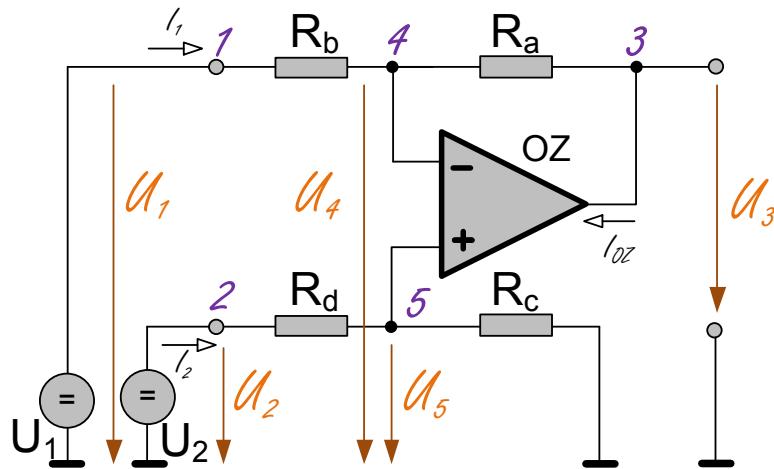
Tabulka 18.1: Invertující zesilovač



Obrázek 18.7: Neinvertující zesilovač

U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
			-1		U_1	
	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	=
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

Tabulka 18.2: Neinvertující zesilovač



Obrázek 18.8: Diferenciální zesilovač

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	I_1	I_2	I_{OZ}	x	b
G_b			$-G_b$		-1				
	G_d			$-G_d$		-1			
		G_a	$-G_a$					1	
$-G_b$		$-G_a$	$G_a + G_b$					*	
	$-G_d$			$G_c + G_d$					
			-1	1					
1									
	1								

$=$

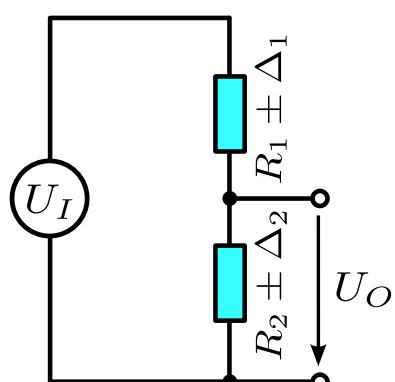
U_1	
U_2	
U_3	
U_4	
U_5	
I_1	
I_2	
U_1	
U_2	

Tabulka 18.3: Diferenciální zesilovač

18.5 Napěťový dělič

V elektronických soustavách se největších přesnosti dosahuje u rezistorů, kde je standardně zaručována chyba menší než 1%, u přesných 0.1% a u velmi přesných 0.01%.

Bude nás zajímat jaký vliv má tolerance rezistorů na výsledný poměr výstupního ku vstupnímu napětí a také, zda-li při různě zvoleném



poměru těchto rezistorů se bude měnit velikost chyby, ačkoliv budou mít stejnou přesnost. Intuitivně předpokládáme, že nejnepříznivější situace nastane, když hodnoty použitých rezistorů padnou na opačné strany tolerančních pásem, jenž reprezentuje Δ_1 a Δ_2 tj. $R_2 - \Delta_2 R_2$ a $R_1 + \Delta_1 R_1$ nebo $R_2 + \Delta_2 R_2$ a $R_1 - \Delta_1 R_1$. V obou případech bude chyba stejná, proto si vybereme například první případ a zapíšeme (rov. 18.9).

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2 - \Delta_2 R_2}{R_1 + \Delta_1 R_1 + R_2 - \Delta_2 R_2} \quad (18.9)$$

a po úpravě

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2}$$

Polynom ve jmenovateli rozvineme do následující podoby

$$[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) = (1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 + (1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1$$

$$(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 = [(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - (1 + \Delta_1)R_2 - (1 - \Delta_2)R_1$$

a získáme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - [(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}$$

Nyní vydělíme jmenovatel i čitatel $(R_1 + R_2)$ a dostaneme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta_2)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)] - \frac{[(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (18.10)$$

Standardně rezistory volíme se stejnou tolerancí, tedy $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ a získáme výslednou rovnici pro poměr $\frac{U_o}{U_i}$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta) + (1 - \Delta)] - \frac{[(1 + \Delta)R_2 + (1 - \Delta)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (18.11)$$

Řekněme například, že pro návrh děliče máme k dispozici rezistory s tolerancí 1% a vstupní napětí je 1 V. Obvod, ve kterém je dělič použit, umožňuje volit různé poměry, ale jejich součet je konstantní. Na otázku jaký poměr zvolit, abychom při dané toleranci rezistorů dostali výstupní napětí s největší přesností odpovídá následující tabulka.

R_1	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$19k\Omega$
R_2	$19k\Omega$	$10k\Omega$	$1k\Omega$
U_{out}	0,950	0,500	0,050
U_{out}^*	0,949	0,495	0,049
$\varepsilon_r[\%]$	0,101	1,000	1,883

Tabulka 18.4

Kapitola 19

Dynamické pochody v lineárních obvodech

Obsah

19.1 Fyzikální podstata přechodných dějů	180
19.1.1 Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti	181
19.2 Přechodný jev kmitavého obvodu	185

19.1 Fyzikální podstata přechodných dějů

V obvodu, který je v ustáleném stavu, nechť dojde buďto

- ke změně parametru aktivního prvku (např. připojení nebo odpojení zdroje napětí nebo proudu),
- ke změně parametru pasivního prvku (např. zvětšení nebo zmenšení odporu, indukčnosti nebo kapacity),
- ke změně topologické struktury (např. přerušení větve, spojení větve nakrátko, připojení další větve).

Kteroukoliv z uvedených změn dostaneme nový obvod jemuž přísluší nový *ustálený stav*; tento stav však nenastane okamžitě. Zmíněná změna přiveze obvod do *neustáleného stavu*, v němž odezvy napětí a proudů - nazýváme je **přechodnými jevy** - se postupně přibližují k hodnotám nového ustáleného stavu. Přechodné jevy, ač - přesně vzato - probíhají v nekonečně dlouhé době, jsou v praxi jevy krátkodobými, neboť odezvy se trvale "dostatečně těsně" přiblíží k hodnotám nového stavu již v poměrně krátké době - v běžných případech jsou to mikrosekundy až milisekundy.

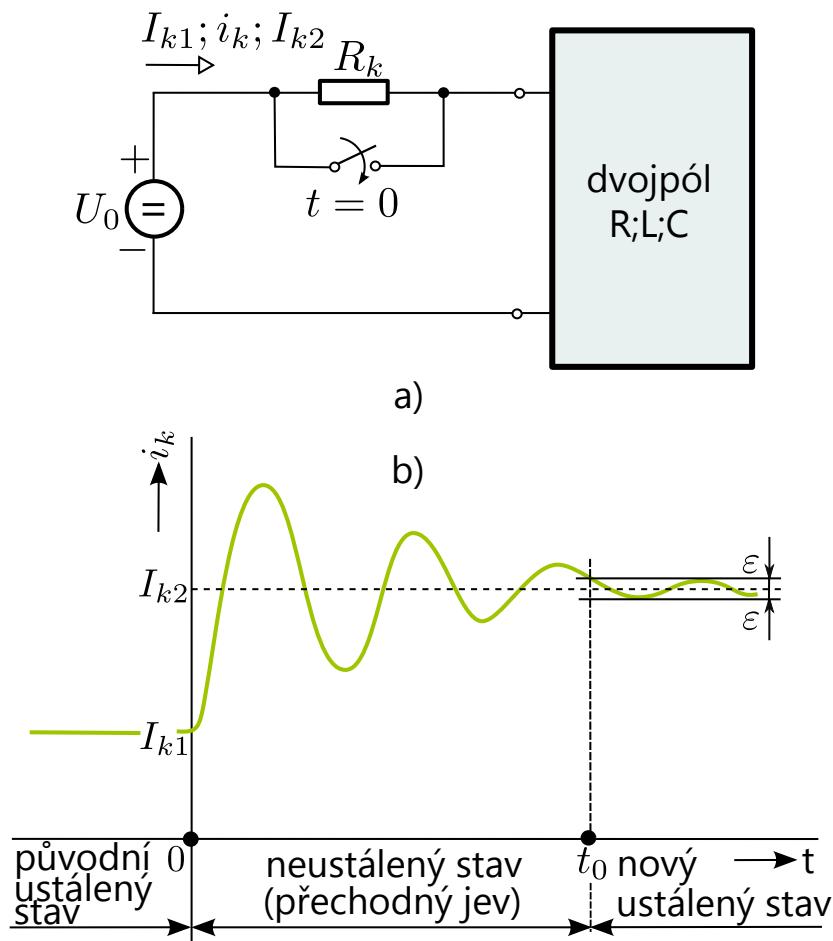
Naskýtá se otázka, proč odezvy obvodu obecně nepřecházejí z původního do nového ustáleného stavu skokem a proč dochází k neustálenému stavu obvodu. Obvod má elektromagnetickou energii $W(t)$, která je součtem energií elektrického pole kondenzátoru $W_e(t)$ a energií magnetického pole cívek $W_m(t)$. Elektromagnetická energie obvodu

$$W(t) = \sum_k W_{e_k}(t) + \sum_k W_{m_k}(t)$$

je tedy funkcí napětí na jeho kondenzátorech a proudů v jeho cívkách. Protože tyto veličiny určují energetický stav obvodu, nazýváme je **stavovými veličinami**.

Elektrické výkony P v reálném elektrickém obvodu mají z fyzikálních důvodů vždy konečnou hodnotu. U obvodů, které jsou dostatečně adekvátními modely respektujícími tuto skutečnost (nazýváme je obvody s konečnými výkony) je to postačující podmírkou pro to, aby jejich energie $W = W(t)$ byla spojitou funkcí času (neboť $P = \frac{dW}{dt}$). Z uvedených vztahů pro energii obvodu $W(t)$ je patrné, že $W = W(t)$ bude spojitou funkcí, jsou-li stavové veličiny *spojitými funkcemi*. To znamená, že hodnota stavových veličin v okamžiku před vznikem přechodného jevu je táz jako v okamžiku po jeho vzniku. Pro přechodný jev v okamžiku $t = 0$ platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0_-} u_c(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} u_c(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0_-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} i_L(t) \quad (19.1)$$

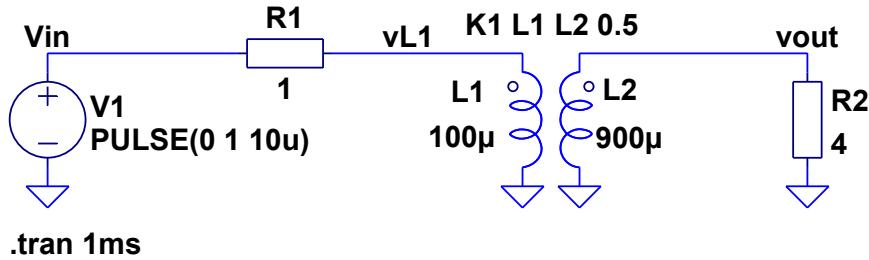


Obrázek 19.1: K objasnění pojmu "neustálený stav" a "přechodný jev"

19.1.1 Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti

Příklad 19.1.1 Transformátor: Na primární vinutí vzduchového transformátoru s činitelem $k < 1$ je v čase $t = 0$ připojen zdroj napětí $U_1 = \text{konst}$. Formulujte postup pro výpočet odezv $i_1(t)$ a $i_2(t)$ pro obecné parametry zapojení a výsledky ověřte simulací pro následující hodnoty: $U_1 = 1V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, transformátor má převod $1 : 3$.

A transformer with two windings, 1 to 3 turns winding ratio



Obrázek 19.2: Transformer.asc: Zapojení vzduchového transformátoru pro simulaci v programu LTSpice

Klasické řešení: Podle II. Kirchhoffova zákona platí soustava rovnic:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_1 \quad (19.2)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (19.3)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + L_1 \lambda & L_{12} \lambda \\ L_{12} \lambda & R_2 + L_2 \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (19.4)$$

$$(R_1 + L_1 \lambda) - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (19.5)$$

$$R_1 R_2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + L_1 L_2 \lambda - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (19.6)$$

$$\lambda^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + R_1 R_2 = 0 \quad (19.7)$$

$$\lambda^2 \left(\frac{L_1 L_2 - L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) + \left(\frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2} \right) \lambda + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0 \quad (19.8)$$

Zavedeme-li $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$, $k = \frac{L_1 L_2}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $k^2 = \frac{L_1^2 L_2^2}{L_1 L_2}$, $\sigma = 1 - k^2$ dostaneme

$$\sigma \lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = 0 \quad (19.9)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\sigma \tau_1 \tau_2} = 0 \quad (19.10)$$

Jedli $\lambda_1 = -\beta + \alpha$ a $\lambda_2 = -\beta - \alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (19.11)$$

$$\beta = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)^2 + \frac{4\sigma}{\tau_1 \tau_2}} \quad (19.12)$$

Jelikož $k < 1$; je $0 < \sigma < 1$; rozborem rovnice 19.12 plyne, že pak je $\alpha \neq 0$, reálné. Soustava rovnic 19.2 má tedy obecné řešení

$$i_1(t) = i_{1o} + i_{1p} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{U_0}{R} \quad (19.13)$$

$$i_2(t) = i_{2o} + i_{2p} = K_3 e^{\lambda_1 t} + K_4 e^{\lambda_2 t} \quad (19.14)$$

Integrační konstanty K_1, K_2, K_3 a K_4 určíme z matematických počátečních podmínek: $i_1(0) = i_2(0) = 0$ (což jsou zároveň fyzikální počáteční podmínky) a $\frac{di_1}{dt}|_{t=0}, \frac{di_2}{dt}|_{t=0}$, které určíme z rovnic 19.2 pro $t = 0$:

$$L_1 i'_1 + L_{12} i'_2 = U_0 \implies i'_1 = \left(\frac{U_0 - L_{12} i'_2}{L_1} \right) \quad (19.15)$$

$$L_2 i'_2 + L_{12} i'_1 = 0 \quad (19.16)$$

Dále postupujeme tak, že do druhé rovnice dosadíme vyjádřenou první derivaci primárního proudu z první rovnice a získáme vztah pro první derivaci sekundárního proudu v čase $t = 0$:

$$\frac{di_1}{dt}|_{t=0} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (19.17)$$

$$\frac{di_2}{dt}|_{t=0} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (19.18)$$

Aplikací těchto počátečních podmínek na obecné řešení 19.13 plynou vztahy

$$i_1(0) = K_1 + K_2 + \frac{U_0}{R} ; \quad \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \quad (19.19)$$

$$i_2(0) = K_3 + K_4 ; \quad -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_3 + \lambda_2 K_4 \quad (19.20)$$

Z první a třetí rovnice vypočítáme $K_1; K_2$, ze druhé a čtvrté rovnice $K_3; K_4$. Dosazením do rovnice 19.13 dostaneme po úpravě odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$. Speciálně pro $R_1 = R_2 = R; L_1 = L_2 = L$ je

$$i_1(t) = \frac{U_0}{2R} \left(2 - e^{-\frac{t}{\tau_3}} - e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (19.21)$$

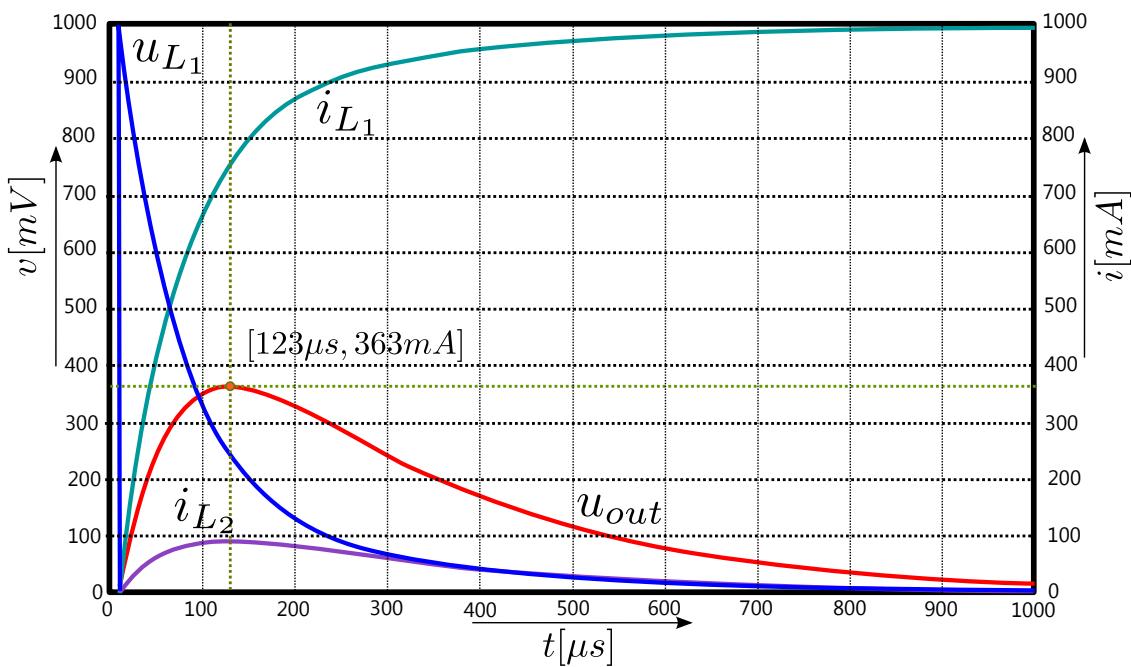
$$i_2(t) = \frac{U_0}{2R} \left(-e^{-\frac{t}{\tau_3}} + e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (19.22)$$

kde je $\tau_3 = \frac{L+L_{12}}{R}; \tau_4 = \frac{L-L_{12}}{R}$

Operátorové řešení: Laplaceovou transformací rovnice 19.2 dostáváme

$$(R_1 + pL_1)I_1(p) + pL_{12}I_2(p) = \frac{U_0}{p} \quad (19.23)$$

$$pL_{12}I_1(p) + (R_2 + pL_2)I_2(p) = 0 \quad (19.24)$$



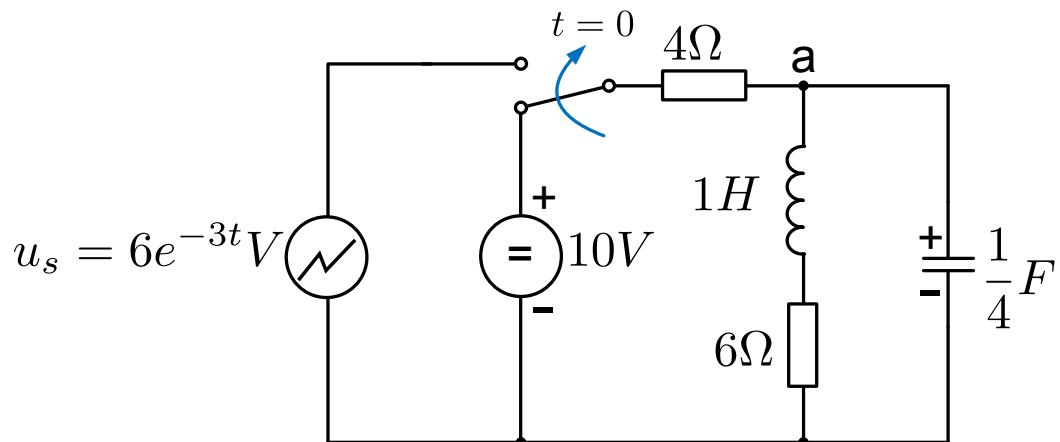
Obrázek 19.3: Odezva na jednotkový skok transformátoru s parametry: $k = 0.5, L_1 = 100\mu H, L_2 = 900\mu H$

Zavedeme $\sigma; \tau_1; \tau_2$, vypočítáme obrazy proudů a jejich zpětnou transformací dostaneme rovnice pro odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$.

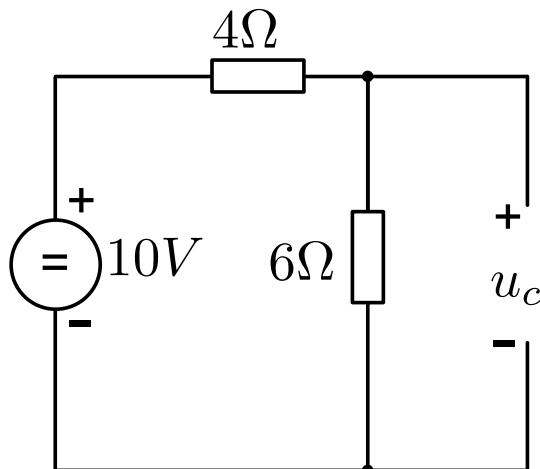
Příklad 19.1.2 Najděte odezvu napětí na kondenzátoru $u_c(t)$ obvodu na obrázku 19.4 pro $t > 0$. (zdroj [Dorf])

Řešení: Nejdříve stanovíme počáteční podmínky, které vyplývají z ustáleného stavu v době $t = 0^-$. Obvod na obr. 19.4 můžeme překreslit do podoby na obr. 19.5

$$u_c(t) = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad [V] \quad (19.25)$$



Obrázek 19.4: Obvod k příkladu 19.1.2



Obrázek 19.5: Obvod k příkladu 19.1.2

19.2 Přechodný jev kmitavého obvodu

Kmitavým obvodem máme na mysli obvod s jedním stupněm volnosti, složeného z odporu R , kapacity C a indukčnosti L , zapojených v sérii. Je jedním z nejdůležitějších případů elektrotechnické praxe. Dosud probírané případy (obvod RL a RC) jsou vždy určitým zjednodušením úplného obvodu s jedním stupněm volnosti, vzniklé tak, že buď indukčnost obvodu, nebo kapacita jsou zanedbatelné vzhledem k ostatním prvkům. Rozbor přechodného stavu kmitavého obvodu (dále stručně obvodu RLC) umožňuje stanoviti směrnice pro možnost tohoto zjednodušení a jeho důsledky.

Zopakujme, že přechodný stav, je vždy dán superpozicí nového ustáleného stavu a vlastní přechodné složky, jejíž průběh závisí jen na vlastnostech obvodu a počátečních podmínkách (a nikoliv na průběhu vstupního signálu), proto nejdříve budeme řešit tzv. *volný stav obvodu*, tj. stav, kdy vnější působení na vstupu je nulové. Za těchto okolností může v obvodu existovat přechodný jev, je-li v obvodu (tj. v akumulačních prvcích) na počátku nahromaděná určitá energie. Vzhledem k tomu, že to může být jednak energie elektrického pole v kondenzátoru, jednak energie magnetického pole v cívce, je počáteční stav úplně určen, známe-li hodnoty napětí na kapacitě a proudu v indukčnosti v počátečním okamžiku; matematicky vyjádřeno, stanovíme počáteční podmínky vždy ve tvaru

$$u_C(0) = U_{C_0} \quad i(0) = I_0. \quad (19.26)$$

Protože za volného stavu jsou vstupní svorky spojeny *nakrátko*, je rovnice pro proud v obvodu

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (19.27)$$

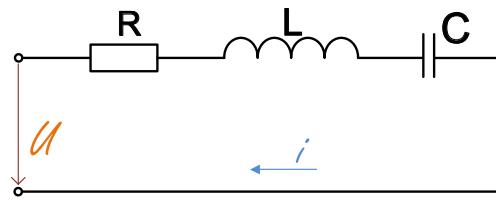
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + U_{C_0} = 0 \quad (19.28)$$

Řešení provedem pomocí Laplaceovy transformace. K přihlédnutím k počátečním podmínkám dostaneme rovnici

$$I(p)(R + Lp + \frac{1}{pC}) = I_0L - \frac{U_{C_0}}{p}, \quad (19.29)$$

a z ní

$$I(p) = \frac{pCLI_0 - CU_{C_0}}{p^2LC + pRC + 1}. \quad (19.30)$$



Obrázek 19.6: Schéma sériového kmivového obvodu

Kapitola 20

Lineární obvody v harmonickém ustáleném stavu

Obsah

20.1 Obvody s nastavitelnými parametry	188
---	------------

20.1 Obvody s nastavitelnými parametry

V praxi se setkáváme s obvody, u nichž lze (spojitě nebo stupňovitě) nastavit odpor odporníku, kapacitu kondenzátoru, vlastní nebo vzájemnou indukčnost cívek, amplitudu, fázi nebo kmitočet zdroje (napětí nebo proud). Nazveme je *obvody s nastavitelnými parametry*.

Část X

Elektronické součástky

Kapitola 21

Transformátory a cívky

Obsah

21.1 Základní pojmy z magnetismu	192
21.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou	194
21.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení	196
21.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	198
21.4.1 Situace při sekundárním vinutí naprázdno	198
21.4.2 Situace při zatížení sekundárního vinutí	199
21.5 Ztráty v reálném transformátoru	203
21.5.1 Joulový ztráty ve vinutí	203
21.5.2 Hysterezní ztráty v jádře	204
21.5.3 Ztráty vřivými proudy v jádře	205
21.6 Rozptyl transformátoru	205
21.7 Cívky s feromagnetickým jádrem	207
21.7.1 Fyzikální rozbor a příprava pro návrh	207
21.7.2 Důsledky a význam použití vzduchové mezery	207
21.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	208

Následující kapitoly pojednávají o transformátorech a cívkách z hlediska souvislostí mezi napětím, kmitočtem, sycením, přenášeným výkonem, rozměry a ztrátami. Získané poznatky pak umožní návrh různých typů transformátorů a cívek pracujících v odlišných režimech.

21.1 Základní pojmy z magnetismu

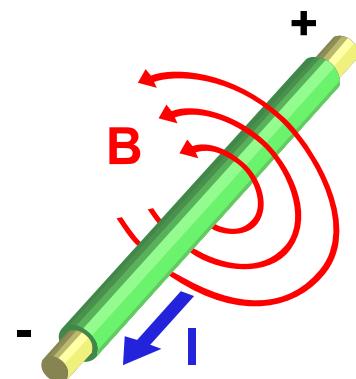
Základní veličinou pro popis magnetických polí a jejich účinků je *vektor magnetické indukce - \mathbf{B}* . Dle soustavy SI je jednotkou magnetické indukce *tesla [T]* a projevuje se silovými účinky na vodiče protékané proudy a indukováním napětí při jeho změně. Je proto dobře měřitelný. První rovnice (Ampérův zákon) ze souboru Maxwellových rovnic určuje rovnost oběhového integrálu magnetické indukce po uzavřené křivce proudem protékaných vodiči, jež jsou touto křivkou uzavřeny.

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (21.1)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m je magnetická konstanta - **permeabilita vakua**. Elektrické proudy jsou stále obklopeny magnetickými poli. Tato pole se dají zesílit cívou s magnetickým jádrem. Na tomto jevu je založen jeden z elementárních principů elektrotechniky.

Protože je tento zákon stěžejní k pochopení ostatních principů, je vhodné si také uvědomit vztah jednotky magnetické indukce k základním jednotkám soustavy **SI**:

$$1T = 1 \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1 \frac{kg}{C \cdot s} = 1 \frac{kg}{A \cdot s^2} = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$



Obrázek 21.1: Elektrický proud ve vodiči způsobuje vznik magnetické pole v jeho okolí.

Spřažený magnetický tok

Principiálně není transformátor nic jiného než soustava vzájemně magneticky vázaných cívek. Pro jednoduchost je v dalším popisu uvažován transformátor s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím, přičemž všechny závěry bude možné později rozšířit i na složitější systémy. Při odvozování matematického modelu transformátoru vyjdeme z Faradayova zákona elektromagnetické indukce (druhá Maxwellova rovnice), který říká, že časová změna magnetického pole vytvoří výrové

pole elektrické:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (21.2)$$

Vztah platí, uvažujeme-li nulovou velikost posuvného proudu tj. polarizačního a Maxwellova proudu. Tvoří-li smyčku l tenký vodič, indukuje se v něm napětí:

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (21.3)$$

V rov. 21.3 je úmyslně vynecháno záporné znaménko na pravé straně rovnice. To platí, je-li na vodič (cívku) pohlíženo jako na spotřebič napájený ze zdroje napětí (což odpovídá funkci primárního vinutí transformátoru). Takováto cívka vytvoří časově proměnné magnetické pole:

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad (21.4)$$

Konstanta Ψ_0 představuje Newtonovou počáteční integrační konstantu, funkce $\Psi(t)$ tzv. **spřažený magnetický tok s cívkou**. Je vidět, že *velikost spřaženého magnetického toku je úměrná pouze velikosti integrálu napětí na cívce, nemusí již být přímo úměrná proudu cívkou* (to platí jen ve speciálním případě lineárních magnetických obvodů). Tento poznatek je velice důležitý, magnetický tok bude stejný jak pro vzduchové cívky, tak pro cívky s feromagnetickým jádrem (rozdíl bude spočívat pouze v průběhu a velikosti proudu cívkou). Sycení jádra transformátoru napájeného ze zdroje napětí je závislé pouze na průběhu tohoto napětí. Pro spřažený magnetický tok cívky dále platí:

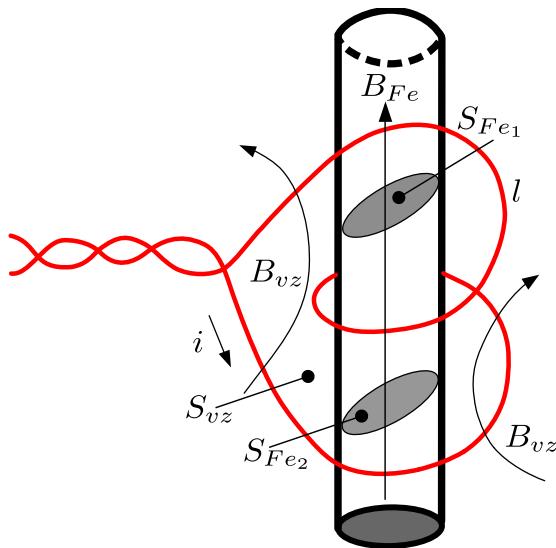
$$\Psi(t) = \oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \quad (21.5)$$

kde S je orientovaná ohraničená plocha, jejíž hranice je tvořena křivkou l , viz probíhající osou vodiče po celé jeho délce. Tento vztah platí zcela obecně pro jakákoli prostředí, v nichž se magnetické pole nachází a pro libovolné tvary plochy S . Při návrhu transformátoru obvykle známe průběh spřaženého magnetického toku. Je vidět, že některé indukční čáry B_{vz} neprocházejí materiélem jádra, jedná se o tzv. **rozptyl**. Přesný průběh spřaženého magnetického toku bychom získali aplikací rov. 21.5, který bychom pro tento konkrétní případ mohli upravit do podoby

$$\Psi(t) = \int \mathbf{B}_{vz}(t) \cdot d\mathbf{S}_{vz} + \sum_{i=1}^N \int \mathbf{B}_{Fe}(t) \cdot d\mathbf{S}_{Fe_i} \quad (21.6)$$

Protože vyčíslení tohoto vztahu je velice obtížné, zavedeme určité zjednodušující podmínky:

- zanedbáme rozptyl $B_{Fe} \gg B_{vz}$,



Obrázek 21.2: Část magnetického obvodu se dvěma závity primárního vinutí.

- magnetická indukce B_{Fe} je ve feromagnetiku rozložena homogenně a siločáry jsou kolmé k průřezu jádra.

Pak pro spřažený magnetický tok můžeme psát

$$\Psi(t) = N \cdot B_{Fe}(t) \cdot S_{Fe} = N \cdot \Phi(t) \quad (21.7)$$

Rov. 21.7 by platila přesně, pokud by všechny indukční čáry \mathbf{B} protnuly plochu S_{Fe} N-krát. Ve skutečnosti ale všechny siločáry neprochází všemi závity a vztah platí jen přibližně. Chyba je malá u feromagnetických obvodů (transformátory, cívky s feromagnetickým jádrem), kde je magnetická vodivost materiálu mnohonásobně větší, než magnetická vodivost vzduchu (řádově 1000x) a rozptyl je tudíž zanedbatelný. Velká je tato chyba například u vzduchových cívek, kde je rov. 21.7 nepoužitelná.

21.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou

Bylo již řečeno, že časový průběh spřaženého magnetického toku je úměrný integrálu napětí na cívce, nemusí však již být přímo úměrný proudu cívky. Indukované napětí je jednoznačně určeno rov. 21.3. Spřažený magnetický tok je obecnou funkcí proudu cívky, přičemž proud je funkci času:

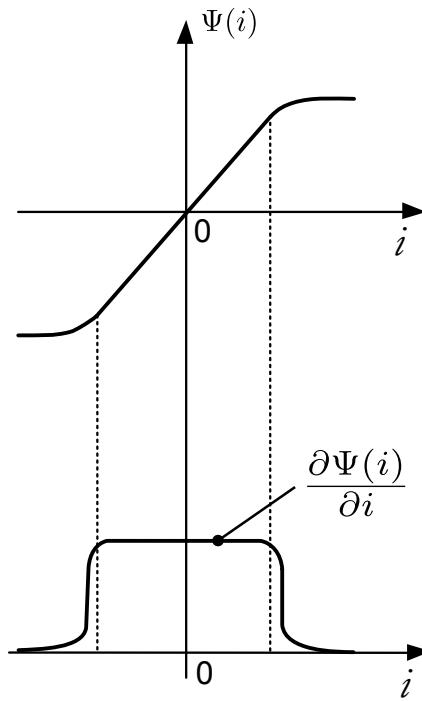
$$\Psi(t) = f[i(t)] \quad (21.8)$$

Dosadíme-li rov. 21.8 do rov. 21.3 a použijeme-li větu o derivaci složené funkce¹, obdržíme pro napětí na cívce:

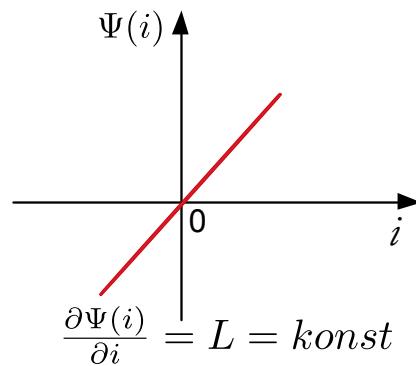
$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{\Psi(i)}{di} \frac{di}{dt} = L_d \cdot \frac{di}{dt} \quad (21.9)$$

kde $L_d = \frac{d\Psi(i)}{di}$ má význam **diferenciální indukčnosti**. Ta může být ve speciálních případech konstantní, ale ve většině reálných aplikací je funkcí proudu cívky. Jako příklad uvedeme transformátor s feromagnetickým jádrem. Zde je závislost spřaženého magnetického toku na proudu silně nelineárně závislá, obr. 21.3. Potom mluvíme o nelineárních magnetických obvodech.

Na obr. 21.3 je zobrazena **statická magnetizační charakteristika** a její derivace, představující průběh diferenciální indukčnosti vinutí v závislosti na proudu. Vidíme, že pro malé proudy je indukčnost největší s rostoucím proudem prudce klesá, nastane-li tzv. přesycení magnetického obvodu transformátoru. Tomuto režimu se snažíme správným návrhem transformátoru vyhnout. Velmi často se v technické praxi zavádí zjednodušení, při kterém se reálný magnetický obvod linearizuje - diferenciální indukčnost je považována za konstantní (nezávislá na proudu cívky). Mluvíme pak o lineárních magnetických obvodech. Toto zjednodušení je použitelné pouze tehdy, pokud reálný magnetický obvod (transformátor) provozujeme v určitých mezích magnetizačního proudu, kdy se skutečná indukčnost příliš nemění. Nelineární magnetizační charakteristika na obr. 21.3 se linearizuje do podoby na obr. 21.4.



Obrázek 21.3: Statická magnetizační charakteristika transformátoru s feromagnetickým jádrem a závislost diferenciální indukčnosti na proudu.



Obrázek 21.4: Linearizovaná magnetizační charakteristika. Směrnice této přímky je právě rovna L .

¹Je-li $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, potom derivace y podle proměnné x je rovna derivaci y podle proměnné u , násobené derivací u podle proměnné x

Závislost spřaženého magnetického toku na proudu cívkou je tedy lineární ($L = konst$) viz obr. 21.4:

$$\Psi(t) = f[i(t)] = L \cdot i(t) \quad (21.10)$$

Dosazením spřaženého magnetického toku do Faradayova zákona elektromagnetické indukce - rov. 21.3

$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{d}{dt} [L \cdot i] = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (21.11)$$

Ve zvláštním případě stejnosměrných veličin, kdy proud má lineární charakter, přeje vztah 21.10 do tvaru, který představuje tzv. **statickou definici indukčnosti**.

$$\Psi(t) = L \cdot I \quad (21.12)$$

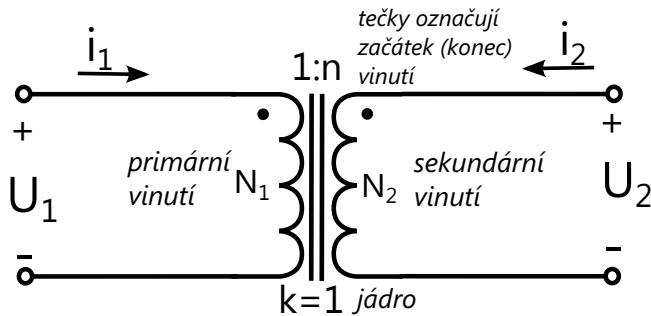
Je ale třeba zdůraznit, že rov. 21.10, rov. 21.11 a rov. 21.12 *platí pouze pro lineární magnetické obvody*. Jestliže jsou použity při matematickém popisu transformátorů nebo cívek s feromagnetickým jádrem, je třeba mít na paměti, že tento linearizovaný model lze použít jen v určitém omezeném rozsahu daným skutečnou magnetizační charakteristikou. Nicméně, lineární model transformátoru je pro svou jednoduchost často používán.

21.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení

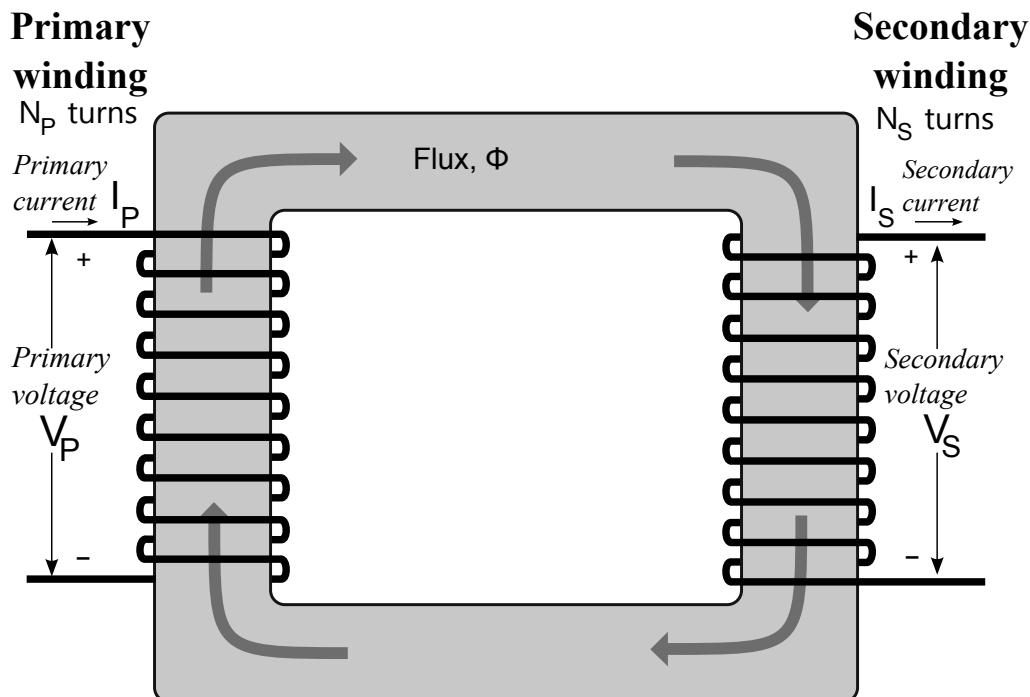
Transformátor je elektrický netočivý stroj, který umožňuje přenášet elektrickou energii z jednoho obvodu do jiného pomocí vzájemné elektromagnetické indukce. To znamená, že mění její parametry (napětí, proudy), přitom forma energie na vstupu i výstupu zůstává elektrická.

Transformátory jsou nezbytnou součástí řady elektrotechnických zařízení, počínaje vazebními a napájecími transformátory sdělovacích a polovodičových zařízení až k transformátorům blokovým a přenosovým, užívaným v energetice. Jejich výkony se pohybují od zlomků VA do stovek MVA. Podobně je tomu s jejich napětími od malých až po vvn. Zásadně transformátory mohou být jedno nebo vícefázové (obvykle třífázové)

Princip transformátoru je založen na **zákonu elektromagnetické indukce** - tedy magnetický tok vybuzený jedním vinutím indukuje napětí ve vinutí druhém (primár, sekundár). Obrázek 21.5(b) ukazuje, že magnetický tok je z jednoho vinutí do druhého veden prostřednictvím magnetického obvodu. Fyzikální princip vychází z **2. Maxwellovy rovnice 21.2**.



(a) Schématická značka transformátoru s jádrem



(b) Principiální provedení transformátoru se dvěma vinutími

Obrázek 21.5: Ideální transformátor s jádrem, s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím. Tečky označují začátky (resp. konec) vinutí. Význam má jejich poloha tečky vůči druhé. Budeme-li je chápat jako začátky vinutí, měl by se drát primáru a sekundáru vinout tak, jak je naznačeno na obrázku

Převod transformátoru

$$n = \frac{N_1}{N_2}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (21.13)$$

21.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru

Uvažujme pro začátek transformátor s dokonale těsnou vazbou, tedy s činitelem vazby $k = 1$, s nulovým rozptylovým magnetickým tokem a s konečnou velikostí indukčnosti L_1 a L_2 primárního a sekundárního vinutí

21.4.1 Situace při sekundárním vinutí naprázdno

Podle indukčního zákona platí pro primární a sekundární napětí

$$u_1(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (21.14a)$$

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (21.14b)$$

kde $\Phi_\mu(t)$ je magnetický tok v jádře. Porovnáním rov. 21.14a a rov. 21.14b dostaneme následující rovnici:

$$u_2(t) = u_1(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (21.15)$$

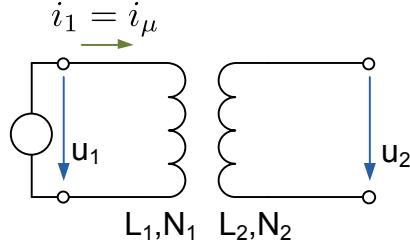
Je zřejmé, že $u_1(t)$ a $u_2(t)$ mohou mít sice různou velikost, ale mají zcela stejný časový průběh. Z rov. 21.14a plyne, že magnetický tok je jednoznačně určen časovým integrálem z přiloženého primárního napětí:

$$\Phi_\mu(t) = \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} + \Phi_{\mu_{poc}} \quad (21.16)$$

Primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu, tj. nesmí mít stejnosměrnou složku, jinak by magnetický tok rostl nade všechny meze (v praxi do přesycení). Velikost integrační konstanty $\Phi_{\mu_{poc}}$ závisí na konkrétním režimu transformátoru. Z rovnice také plyne užitečný vztah:

$$\Delta\Phi_\mu(t) = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1} \quad (21.17)$$

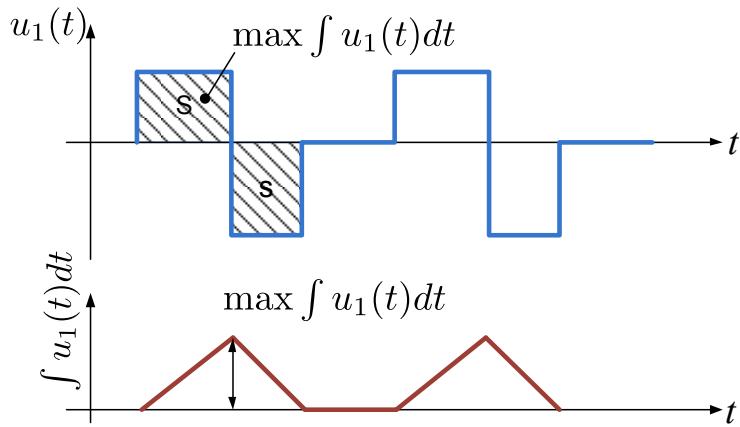
Je-li $u_1(t)$ periodická funkce s nulovou střední hodnotou, pak neurčitý integrál z $u_1(t)$ je rovněž periodická funkce, jejíž střední hodnota již ovšem nulová být nemusí (viz obr. 21.7). Φ_μ je rozkmit magnetického toku v jádře transformátoru. Z rovnice 21.16 je patrné, že bez bližší znalosti režimu transformátoru sice nelze přesně stanovit meze, v nichž se magnetický tok periodicky pohybuje, ale dle rov. 21.17 umíme



Obrázek 21.6: Transformátor naprázdno.

přesně stanovit rozkmit toku čili vzdálenost mezí. Pro předpokládané homogenní rozložení pole ve feromagnetickém jádře lze určit rozkmit magnetické indukce:

$$\Delta B_\mu(t) = \frac{\Delta\Phi_\mu(t)}{S} = \frac{\max |\int u_1(t)dt|}{N_1 S} \quad (21.18)$$



Obrázek 21.7: Znázornění časového integrálu primárního napětí transformátoru.

pro *lineární* magnetické obvody vztah mezi tokem a magnetizačním proudem:

$$N_1\Phi_\mu(t) = L_1 i_\mu(t) \quad (21.19)$$

Proud $i_\mu(t)$ je primární proud při sekundárním vinutí naprázdno, tzv. **magnetizační proud**. Je tedy přímo úměrný magnetickému toku $\Phi_\mu(t)$.

$$i_\mu(t) = \frac{N_1\Phi_\mu(t)}{L_1} \quad (21.20)$$

Dosadíme-li za $\Phi_\mu(t)$ rov. 21.16 uvedené na stránce 198, dostaneme známý vztah mezi proudem a napětím cívky, vyjádřený v integrálním tvaru:

$$i_\mu(t) = i_{\mu_{poc}} + \frac{1}{L_1} \int u_1(t)dt \quad (21.21)$$

Opět vidíme, že primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu.

21.4.2 Situace při zatížení sekundárního vinutí

Rovnice 21.15 až rov. 21.21 zůstávají v platnosti. Připojíme-li k sekundárnímu vinutí zátěž, začne téci sekundární proud $i_2(t)$. Např. pro odporovou zátěž bude platit

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (21.22)$$

Se sekundárním proudem je svázán magnetický tok $\Phi_2(t)$

$$\Phi_2(t) = \frac{L_2 i_2(t)}{N_2} \quad (21.23)$$

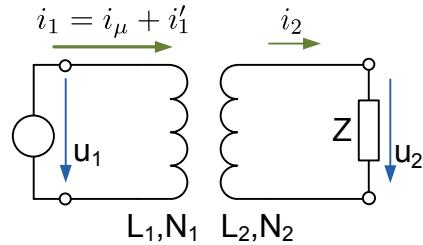
Proud $i_2(t)$, tedy i tok $\Phi_2(t)$, mohou mít bohužel stejnosměrnou složku (zátěží může být např. jednocestný usměrňovač). Stejnosměrnou složku proudu však transformátor obecně neumí přetransformovat na primární stranu a pak dochází ke stejnosměrné předmagnetizaci jádra (sekundární proud stejnosměrnou složku obsahuje, primární proud nikoli). Jedná se o škodlivý jev, který může způsobit, zvláště při větších proudech i přesycení magnetického obvodu. Jev nastává např. při napájení transformátoru ze sítě. Síť se totiž jeví v průběhu celé pracovní periody jako napěťový zdroj s malou vnitřní impedancí. Za zvláštních okolností transformátor stejnosměrnou složku transformovat umí, např. v jednočinném propustném měniči. Zde je transformátor po určitou část periody od primárního zdroje odpojen, v té chvíli se vnitřní impedance primárního zdroje jeví jako nekonečně velká. Oba typy napájení je nutno rozlišovat.

Dále proto uvažujeme pouze takové typy zátěží, které stejnosměrnou složku nevytvářejí (např. zátěž typu dvoucestný můstkový usměrňovač již tuto nečistotu nemá). Pak při uvažování dokonalé vazby, tj. při činiteli vazby $k = 1$, je v celém magnetickém obvodu sekundární tok $\Phi_2(t)$ plně vykompenzován primárním tokem $\Phi_1(t)$ stejně velikosti, ale opačného znaménka. Tok $\Phi_1(t)$ je svázán s "přídavným" primárním proudem, tedy proudem přetransformovaným ze sekundáru na primár - nazvaný jako $i'_1(t)$. Proud vzniká v primárním vinutí v důsledku Lenzova pravidla. Je zodpovědný za čerpání energie z primárního napájecího zdroje a jeho existence je současně v souladu se zákonem zachování energie

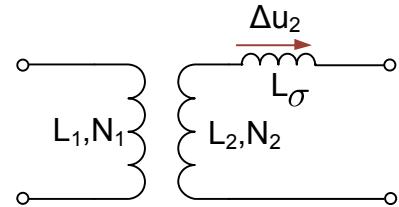
$$\Phi_1(t) = \frac{L_1 i'_1}{N_1} = \Phi_2(t) \quad (21.24)$$

Srovnáním rov. 21.23 a rov. 21.24 obdržíme známý vztah pro transformaci proudů:

$$i'_1(t) = i_2(t) \frac{L_2 N_1}{N_2 L_1} = i_2(t) \frac{N_2^2 N_1}{N_2 N_1^2} = i_2(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (21.25)$$



Obrázek 21.8: Transformátor zátížený.



Obrázek 21.9: Zjednodušená představa rozptylu reálného transformátoru.

Celkový primární proud $i_1(t)$ tedy při zatížení transformátoru sestává ze dvou zcela nezávislých složek. Jednou složkou je magnetizační proud $i_\mu(t)$, který tekly i ve stavu naprázdno (a nyní při zatížení se nezměnil) a druhou je výše zmínovaný přetransformovaný proud $i'_1(t)$:

$$i_1(t) = i'_1(t) + i_\mu(t) \quad (21.26)$$

Z dosud uvedených skutečnosti plyne důležitý závěr: tok v jádře zůstává nezměněn i při zatížení, je tedy stále roven původnímu toku $\Phi_\mu(t)$, protože tok $\Phi_1(t)$ od proudu $i'_1(t)$ a tok $\Phi_2(t)$ od proudu $i_2(t)$ se plně kompenzují. *Sycení jádra u bezrozptylového transformátoru tedy vůbec nezávisí na velikosti zatěžovacího proudu, tedy ani na velikosti přenášeného výkonu!*

Reálné transformátory mají vždy určitý *rozptylový tok*. Ten je svázán s tzv. rozptylovými indukčnostmi (primární a sekundární): Takový transformátor si můžeme představit jako transformátor bezrozptylový s připojenými indukčnostmi $L_{\sigma 1}$ do série s primárním vinutím a $L_{\sigma 2}$ do série se sekundárním vinutím. Z hlediska vnějšího chování transformátoru lze uvažovat i jedinou rozptylovou indukčnost L_σ , přepočtenou jen na sekundární stranu (viz obr. 21.9).

Tento tok je samozřejmě svázán s úbytkem sekundárního napětí $\Delta u_2(t)$ na L_σ . Čili *rozptylová indukčnost způsobuje nenulovou výstupní reaktanci transformátoru*, Transformátor je pak "měkký", zatěžovací proud způsobí úbytek napětí:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_\sigma(t)}{dt} \quad (21.27)$$

Skutečný transformátor má navíc nenulové odpory vodičů, na kterých vznikají podle Ohmova zákona další úbytky napětí a navíc Joulový ztráty.

Vraťme se nyní znovu k transformátoru bezrozptylovému, s dokonalou vazbou, a předpokládejme, že jeho vinutí mají navíc nulový odpor (supravodič). Pak na nich nevzniká průchodem proudu žádný ztrátový výkon a proudy $i_2(t)$ a $i'_1(t)$ lze libovolně zvyšovat. Jejich magnetické účinky se dokonale zruší, nemají tedy vliv na velikost sycení v jádře a transformátorem lze přenášet "libovolně" velký výkon (ve skutečnosti však omezený tzv. kritickou proudovou hustotou supravodiče, při níž zaniká supravodivý jev - pro niob asi 50 A/mm²).

U měděného (hliníkového) vinutí je nutno volit průřez vodičů úměrný proudu, aby nebyla překročena dovolená proudová hustota s ohledem na přehřátí vodičů vlivem Joulova tepla. Rovnice 21.18 navíc napovídá, že musíme volit určitý počet primárních závitů N_1 , abychom nepřekročili maximální sycení jádra. N_1 je tím větší, čím je větší maximum - amplituda časového integrálu primárního napětí a čím menší průřez má jádro. Má-li se pak vinutí vtěsnat do okénka jádra, nelze zvyšovat průřez vodiče a tím i proudovou zatížitelnost libovolně. Díky tomu lze s daným průřezem

magnetického obvodu S a průřezem okénka S_0 realizovat transformátor schopný přenést jen určitý omezený výkon.

Je tedy zřejmé, že maximální výkon bude přímo úměrný ploše okénka S_0 , protože čím je S_0 větší, tím tlustší vodiče můžeme použít a tím větší proudy (výkon) je možno transformovat. Kromě toho je maximální výkon přímo úměrný i průřezu magnetického obvodu S , protože čím je S větší, tím méně závitů N_1 potřebujeme pro dané sycení, viz rov. 21.18, a proto mohou být opět tlustší vodiče. Čili lze napsat:

$$P_{max} \approx S \cdot S_0 \quad (21.28)$$

Zamyslíme-li se nad rov. 21.18, lze úměru rov. 21.28 ještě doplnit. Maximální hodnota sycení tj. maximum funkce $B(t)$ je přímo úměrná maximu funkce časového integrálu primárního napětí. Uvažujme, že napětí neobsahuje stejnosměrnou složku, je periodické s kmitočtem f , ale jinak libovolného tvaru, tj. libovolného obsahu vyšších harmonických.

Pak je maximum časového integrálu takového primárního napětí (maximum toku, amplituda toku) zcela jistě konečné a nepřímo úměrné kmitočtu. To znamená, že zvýšíme-li kmitočet n-krát při zachování amplitudy a tvaru napětí, klesne maximum integrálu n-krát a bude moci být dle rov. 21.18 také n-krát méně závitů N_1 , aby sycení zůstalo stejně. Pak ve stejném poměru n můžeme zvýšit průřez vodičů, aniž bychom se báli, že se vinutí nevejde do okénka. Lze pak přenášet n-krát větší proud a výkon (napětí se nezměnila, pouze vzrostl kmitočet). Čili maximální výkon je přímo úměrný kmitočtu. Rovnici 21.28 lze proto doplnit:

$$P_{max} \approx f \cdot S \cdot S_0 \quad (21.29)$$

Pro jádra z plechu EI z křemíkové oceli lze pomocí tohoto vztahu s uvažováním přímé úměry mezi S_0 a S , odvodit vztah

$$P_{max} \approx S^2 \quad [W, cm^2] \quad (21.30)$$

Ten předpokládá maximální sycení $1T$, proudovou hustotu asi $2,5A/mm^2$ a kmitočet $50Hz$. A týká se opravdu jen EI jader, protože při jeho odvození byla uvažována konkrétní závislost mezi S_0 a S pro tato jádra.

Ze vztahu rov. 21.29 vidíme, že zvyšování pracovního kmitočtu umožňuje přenášet větší výkon při zachování rozměrů jádra. To je základem filosofie všech spínaných zdrojů (měničů) s transformátorem. Kmitočet však nelze u reálného transformátoru zvyšovat nade všechny meze. Omezení představují hysterezní a vřívné ztráty v jádře a dále rozptylová indukčnost.

21.5 Ztráty v reálném transformátoru

21.5.1 Joulový ztráty ve vinutí

Joulový (ohmické) ztráty vznikají na odporu vinutí průchodem proudu. Tato skutečnost nutí zvyšovat průřez vodičů a způsobuje tak nutné zvyšování plochy okénka jádra S_0 a zvětšování celého transformátoru.

Z hlediska těchto ztrát se primární a sekundární vinutí chovají jako lineární odpory R_1 a R_2 . Joulový ztráty jsou proto úměrné kvadrátu efektivní hodnoty procházejícího proudu a jsou dány vztahem:

$$P_R = R_1 I_{1_{ef}}^2 + R_2 I_{2_{ef}}^2 \quad (21.31)$$

Efektivní hodnota proudů procházejících vinutími obecně není úměrná přenášenému činnému výkonu a může být v praxi někdy nečekaně vysoká. Např. u síťového transformátoru se sekundárním usměrňovačem a filtračním kondenzátorem bez vyrovnávací nárazové tlumivky. Zde odebíraný sekundární proud $i_2(t)$ a tedy přetransformovaná složka primárního proudu $i'_1(t)$ tvar úzkých nabíjecích impulsů s velkou amplitudou. Jeho celková efektivní hodnota je několikrát větší než efektivní hodnota užitečné 1. harmonické, která se v tomto případě pouze samotná podílí na přenosu činného výkonu. Ten je totiž dán součinem efektivní hodnoty harmonického sekundárního napětí, efektivní hodnoty pouze 1. harmonické sekundárního proudu a $\cos \phi$ oné 1. harmonického proudu!

Pro omezení ohřevu vinutí na přípustnou mez je nutno omezit odpory vinutí. Při návrhu pracujeme s tzv. dovolenou proudovou hustotou J . Teče-li proud rovnoměrně celou plochou průřezu vodiče, platí vztahy:

$$J_1 = \frac{I_{1_{ef}}}{S_1} \quad J_2 = \frac{I_{2_{ef}}}{S_2} \quad (21.32)$$

S_1 a S_2 jsou průřezy primárního a sekundárního vinutí.

Doporučená hodnota J se pohybuje v případě měděných vodičů v rozmezí 1,5 až $7A/mm^2$. Pro větší transformátory s velkým objemem vinutí je třeba volit vždy hustotu menší. Při konstantní proudové hustotě totiž celkový Joulový ztrátový výkon roste s třetí mocninou lineárních rozměrů cívky, chladící povrch pouze s druhou mocninou. Vinutí těsně pod chladícím povrchem mohou mít větší proudovou hustotu než vinutí vnitřní.

Bez nuceného proudění vzduchu volíme u toroidních transformátorů hustotu J v rozsahu 2 až $5A/mm^2$, podle velikosti a počtu vrstev vinutí. U malých hrníčkových feritových jader lze volit nouzově až $4,5A/mm^2$. U běžně užívaných síťových transformátorů s mnohovrstvými cívками vinutými na kostrách se doporučuje hodnota

$1,5 A/mm^2$ (pro velké transformátory) až $3,5 A/mm^2$ (pro malé transformátory). Při použití nuceného proudění vzduchu může být hustota J větší.

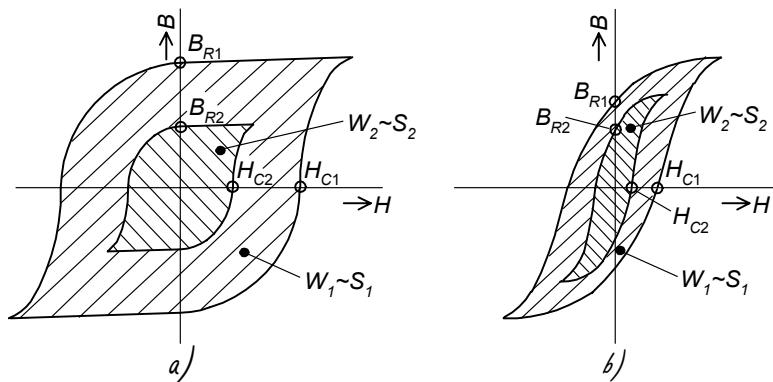
U transformátorů pracujících na vysokém kmitočtu musíme počítat s uplatněním **skinefektu**, díky němuž proud teče jen ve vrstvě pod povrchem vodiče a střední část tlustého vodiče by tak byla nevyužita.

21.5.2 Hysterezní ztráty v jádře

Hysterezní ztráty souvisejí s energií W potřebnou na přemagnetování jádra. Energie W je úměrná ploše hysterezní smyčky (viz. obr. 3.5). Plocha hysterezní smyčky má fyzikální rozdíl J/m^3 , jedná se tedy o objemovou hustotu ztrátové energie. Ta je pak velká pro materiály magneticky tvrdé, se širokou hysterezní smyčkou tj. s velkou *remanencí* B_R a *koercitivní intenzitou* H_C . Takové materiály proto nejsou pro jádra transformátoru vhodná. Naopak požadujeme materiály magneticky měkké, s co nejužší hysterezní smyčkou a s co nejmenší remanentní indukcí.

Je zřejmé, že velikost plochy hysterezní smyčky S a tedy i energie W souvisí nejen s vlastnostmi materiálu B_R a H_C , ale i s amplitudou indukce B_m . Přibližně platí, že plocha S je úměrná kvadrátu B_m . (viz. obr. 3.5). Hysterezní ztrátový výkon je dán součinem této energie W a pracovního kmitočtu f , v jehož „rytmu“ dochází k přemagnetovávání.

$$P_h = W \cdot f \approx B_m^2 \cdot f^2 \quad (21.33)$$



Obrázek 21.10: Hysterezní smyčka feromagnetického materiálu:

- a) magneticky tvrdý materiál,
- b) magneticky měkký materiál.

- Budeme-li měnit kmitočet a současně zachovávat sycení, tzn. budeme udržovat konstantní poměr amplitudy $u_1(t)$ a kmitočtu f při proměnném počtu závitů

N_1 – viz rozbor vztahu (21.18). Pak bude díky konstantnímu sycení B_m i konstantní energie W . Ze vztahu (21.33) je pak vidět, že hysterezní ztráty budou přímo úměrné kmitočtu.

$$P_h \approx f \quad (21.34)$$

Toto je typický případ transformátoru v pulsních měničích, kdy volíme vysoký kmitočet za účelem snížení N_1 (aby se vinutí mohlo vinout tlustším vodičem) při zachování (nepřekročení) dovoleného sycení.

- Měníme-li kmitočet a současně zachovávat týž transformátor (totéž N_1 a S) a tutéž amplitudu $u_1(t)$. Pak z rozboru vztahu (21.18) vyplývá, že indukce bude nepřímo úměrná kmitočtu. Čili ze vztahu (21.33) pak vidíme, že hysterezní ztráty budou *hyperbolicky*, nepřímo úměrně, klesat s rostoucím kmitočtem.

$$P_h \approx \frac{1}{f} \quad (21.35)$$

Tento režim transformátoru se nazývá *odbuzovací*, neboť při růstu kmitočtu klesá indukce. V pulsních měničích by ale takový režim neměl žádný význam, protože bychom sice zvýšili kmitočet, ale museli bychom použít stále stejný objemný a těžký transformátor s velkým N_1 , stanoveným pro původní nízký kmitočet.

21.5.3 Ztráty vířivými proudy v jádře

21.6 Rozptyl transformátoru

Vratme se nyní k zjednodušenému modelu rozptylu z obr. 21.9. Pro velikost rozptylové indukčnosti L_σ platí:

$$L_\sigma = \lambda_\sigma \cdot N_2^2 \quad (21.36)$$

kde λ_σ je *magnetická vodivost rozptylového magnetického obvodu*. Rozptylovou indukčnost L_σ (tj. sekundární rozptylovou indukčnost plus primární rozptylovou indukčnost přepočtenou na sekundární stranu) je nutno chápát jako indukčnost určující výstupní reaktanci transformátoru napájeného ovšem z ideálního napěťového primárního zdroje. Lze ji snadno změřit, zkratujeme-li primární vinutí a měříme sekundární indukčnost $L_{2,k}$:

$$L_\sigma = L_{2,k} = L_2(1 - k^2) \quad (21.37)$$

kde k má význam *činitele vazby* a lze jej určit ze známého vztahu:

$$k = \frac{M}{L_1 L_2} \quad (21.38)$$

Zajímá nás ovšem **výstupní reaktance** ωL_σ , nikoliv samotná indukčnost L_σ , neboť napěťový úbytek je úměrný (při harmonickém průběhu napětí):

$$\Delta u_2(t) \approx \omega L_\sigma \quad (21.39)$$

Je zřejmé, že při konstantní rozptylové indukčnosti může být transformátor na vysokých kmitočtech naprosto nepoužitelný (měkký). Pak nezbývá, než velmi úzkostlivě a co nejvíce minimalizovat rozptylovou indukčnost. Je proto nutné podle rov. 21.36 minimalizovat rozptylovou magnetickou vodivost λ_σ . Ta je přibližně určená rovnicí:

$$\lambda_\sigma = \mu_0 \frac{S_\sigma}{l_\sigma} \quad (21.40)$$

kde $\mu_0 = 4 \cdot \pi 10^{-7} H/m$ je *permeabilita vakua*. S_σ a l_σ jsou **ekvivalentní průřez a délka rozptylových cest**. Protože nelze snížit permeabilitu vzduchu, je nutno upravit geometrii jádra a současně zabezpečit co největší poměr permeability jádra k permeabilitě okolního prostředí. Jádro musí mít tvar bez ostrých zlomů ve směru magnetického toku, nejlépe kruhový tvar, tj. *toroidní jádro*. Je důležitá velká magnetická vodivost jádra λ . Ta je dána vztahem:

$$\lambda = \mu_r \mu_0 \frac{S}{l} \quad (21.41)$$

μ_r je *relativní permeabilita materiálu*, S je *průřez jádra*, l je *délka střední siločáry*. Nestačí jen velká permeabilita μ_r , ale i velký poměr $\frac{S}{l}$. Pro minimalizaci rozptylu jsou proto vhodná "baculatější" jádra s velkým S a malým l (často například několik toroidů s malým průměrem tj. malým l paralelně pro dosažení velkého S). Tím ale vzniká problém malého okénka S_0 pro vinutí, což znemožňuje vinout vodiči s velkým průřezem a přenášet tak velké výkony. Tyto protichůdné požadavky na tvar jádra bývají kritické a je nutno je v návrhu kompromisně vyřešit.

Rozptylovou indukčnost dále zmenšíme způsobem vinutí. Jsou-li vinutí na kostřiče, pak je vineme na sebe, nikoliv vedle sebe s přepážkou. Blíže jádru umístíme vinutí s menším počtem závitů. Vhodné je také střídavé prokládání jednotlivých vrstev primárního a sekundárního vinutí, roste však neúměrně pracnost (cena) a klesá činitel plnění okénka. *Bifilární vinutí* s nejtěsnější vazbou nelze uskutečnit v případě rozdílných počtů závitů (což je téměř vždy) a v případě nároků na izolační pevnost mezi vinutími rozprostřenými rovnoměrně po obvodu celého toroidu.

Poznámka k transformátorům obecně (nejen síťovým)

Všimněme si, že v celém výkladu není nikde zmínka o použití *vzduchové mezery v magnetickém obvodu jádra*. V kapitole Cívky s feromagnetickým jádrem je zamýšlení o vzduchových mezerách v magnetických obvodech a je zde vysvětlen jediný

případ, kdy má smysl mezeru v transformátoru použít. Je zde ukázáno, že v případě předpokladu platnosti rov. 21.17 (což je mimo jiné případ běžných napájecích transformátorů) je použití vzduchové mezery bezúčelné a škodlivé, vede totiž ke vzrůstu magnetizačního proudu a zvýšení rozptylových toků.

21.7 Cívky s feromagnetickým jádrem

21.7.1 Fyzikální rozbor a příprava pro návrh

21.7.2 Důsledky a význam použití vzduchové mezery

21.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů

Pro správnou volbu průřezu drátu pro vinutí je nutné stanovit přípustné oteplení, které je určeno efektivní hodnotou proudu. Pro nejčastější průběhy proudů jsem odvodil vztahy pro výpočet efektivních hodnot.

1. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.11(a):

$$\begin{aligned}
 I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} t \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \int_0^{\delta T} t^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\delta T} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{I_{max}^2}{(\delta T)^2} \frac{(\delta T)^3}{3} = I_{max}^2 \frac{\delta}{3}
 \end{aligned} \tag{21.42}$$

2. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.11(b): Pravý průběh na obrázku 21.11(b) je speciálním případem levého průběhu jehož efektivní hodnotu snadno určíme jako $I_{max} \sqrt{\frac{1}{3}}$. Pro úplnost provedeme výpočet následujícím způsobem

$$I_{ef}^2 = I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2 = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} + I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} = I_{max}^2 \frac{1}{3} \tag{21.43}$$

výpočet dílčí efektivní hodnoty proudu I_{ef2} :

$$\begin{aligned}
 I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^T \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \quad (21.44) \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \tau = t - \delta T \Rightarrow \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt \Rightarrow \tau_d = 0 \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}^2}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_{max}}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\
 &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\tau + \frac{2}{T(\delta-1)} \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{1}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\
 &= \frac{I_{max}^2}{T} \left(T(1-\delta) - T(1-\delta) + \frac{T}{3}(1-\delta) \right) \\
 &= I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3}
 \end{aligned}$$

3. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.12:

$$I_{ef} = I_{max}. \quad (21.45)$$

4. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.13:

$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{2I_{max}\delta} \quad (21.46)$$

$$I_{ef1}^2 = I_{ef2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (21.47)$$

5. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.14:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (21.48)$$

6. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.15:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(I_{max} - I_n + \frac{I_n}{\delta T} t \right)^2 dt \quad (21.49)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{2I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 t^2 \right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{t^3}{3} \right)_0^{\delta T}$$

$$= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 \delta T + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} \delta T^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{\delta T^3}{3} \right)$$

$$= \delta \left((I_{max} - I_n)^2 + I_n \cdot (I_{max} - I_n) + \frac{I_n^2}{3} \right)$$

$$= \delta \left(I_{max}^2 - 2I_{max}I_n + I_n^2 + I_{max}I_n - I_n^2 + \frac{I_n^2}{3} \right)$$

$$= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \quad (21.50)$$

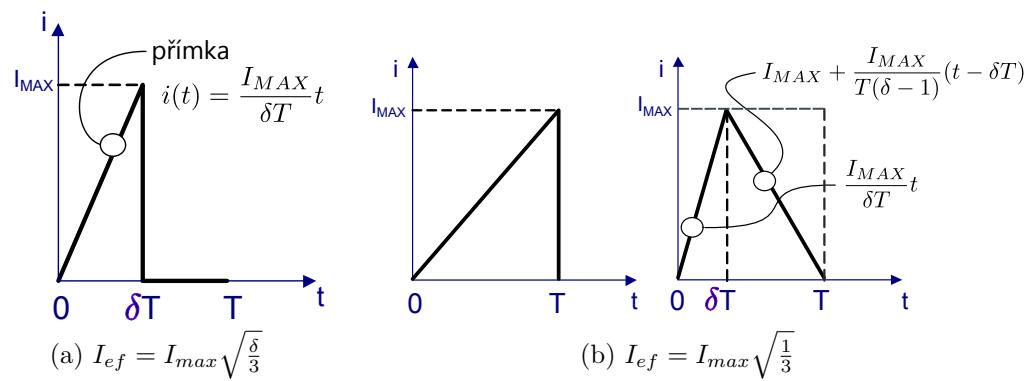
7. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.16:

$$\begin{aligned}
 I_{ef1}^2 &= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) & (21.51) \\
 I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}(t-\delta T) \right)^2 dt \\
 &= \text{meze : } \begin{pmatrix} \tau = t - \delta T & \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt & \tau_d = 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \left[I_{max}^2 \tau + \frac{I_{max}I_n}{T(\delta-1)} \tau^2 + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\
 &= (1-\delta) \left[I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3} \right]
 \end{aligned}$$

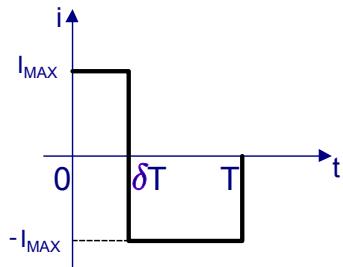
$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3}} \quad (21.52)$$

8. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 21.17:

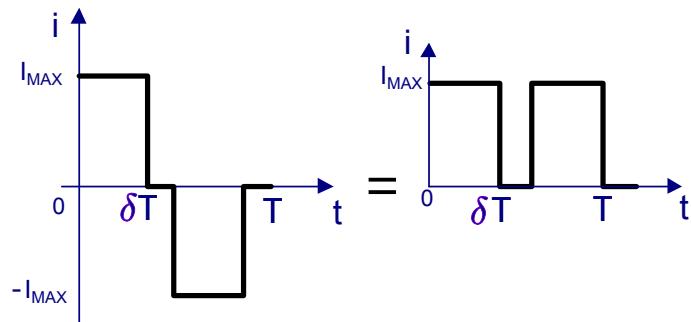
$$\begin{aligned}
 I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} (I_{max} \sin(t))^2 dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^{\delta T} \sin^2(t) dt \quad (21.53) \\
 &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \underbrace{\frac{\sin(t) \cos(t)}{2}}_{\sin(\delta T)=0} \right]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \frac{\delta}{2}
 \end{aligned}$$



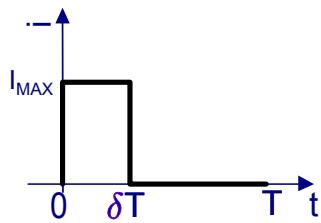
Obrázek 21.11: Typické průběhy proudů, jejichž efektivní hodnotu je nutné stanovit při dimenzování vinutých komponent.



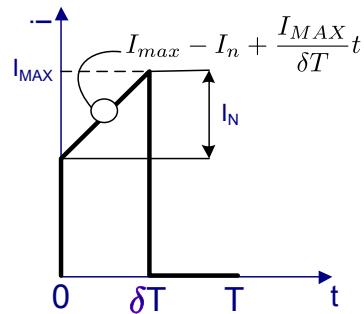
Obrázek 21.12: $I_{ef} = I_{max}$



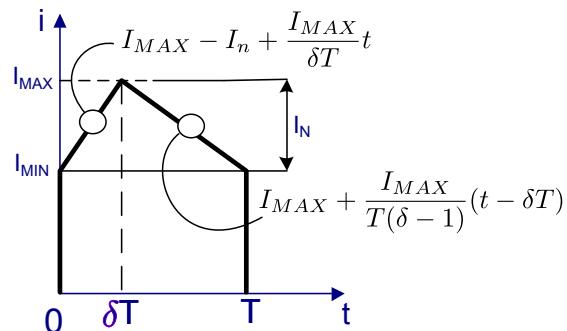
Obrázek 21.13: $I_{ef} = I_{max} \sqrt{2\delta}$



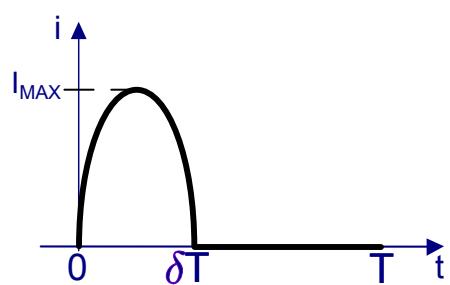
Obrázek 21.14: $I_{ef} = I_{max}\sqrt{\delta}$



Obrázek 21.15: $I_{ef} = I_{max}\sqrt{\delta \left(I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max} \right)}$



Obrázek 21.16: $I_{ef} = \sqrt{I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max}}$



Obrázek 21.17: $I_{ef} = \sqrt{I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max}}$

Část XI

Analogové elektronické systémy

Kapitola 22

Počítačová simulace v elektrotechnice

Obsah

22.1 Historie	220
22.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV	221

22.1 Historie

V roce 1971 vytvořil student „University of California“, Berkeley, USA *Larry Nagel* program **SPICE1** (*SPICE = Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*). Program umožňoval analýzu dějů v obvodech, obsahujících zejména bipolární a unipolární tranzistory. O věrohodnost výsledků bylo usilováno propracovaností modelů i matematických algoritmů řešení rovnic. Uživatel měl navíc možnost rozšířování sortimentu analyzovaných součástek technikou makromodelů zakladáním tzv. *podobvodů* (**subcircuits**) SPICE. Protože program byl v podstatě volně šířitelný, stal se brzo standardním simulačním nástrojem pro elektrotechnické úlohy. Usilovně se pracovalo na jeho zdokonalování.

V roce 1975 byla představena verze **SPICE2** s podstatně vylepšenými modely i numerickými algoritmy. Tato verze byla v průběhu téměř 20 let postupně zdokonalována na Berkeleyské univerzitě až do dnes všeobecně známého standardu **SPICE2G.6**, který byl v r. 1983 zpřístupněn k volnému používání. Zdrojové texty SPICE1 a SPICE2 byly napsány ve Fortranu. Vzhledem k zvýšenému využívání unixových pracovních stanic padlo v Berkeley rozhodnutí přepsat SPICE2 do jazyka C. Tak začala vznikat verze **SPICE3**. Dnes je rozšířena verze **SPICE3F.2**. Oproti SPICE2G.6 se vyznačuje řadou vylepšení, ovšem z různých důvodů došlo k ztrátě zpětné kompatibility se SPICE2G.6.

S růstem výkonnosti počítačů PC byly programy, dosud běžící na výkonných pracovních stanicích, přepisovány na programy spustitelné na „PCčkách“. Tak vznikl standard **PSpice**. Dnes existuje více simulačních programů, které využívají v podstatě tři ne zcela kompatibilní standardy: SPICE2, SPICE3, PSPICE. Všechny lze rozdělit na tzv. „*Spice-like*“ a „*Spice-compatible*“ simulátory.

Označení „*Spice-like*“ znamená, že simulátor je schopen generovat podobné výsledky analýzy jako SPICE, avšak nemusí být schopen číst standardní vstupní soubory SPICE. Typickými příklady jsou staré verze programů **Micro-Cap** nebo **TINA**, program apod. Termínem „*Spice-compatible*“ se označují simulační programy, které dokáží číst standardní vstupní soubory SPICE, provádět klasické SPICE analýzy, a generovat výsledky v standardním SPICE2G.6 tvaru. Ze současných programů jsou to například **PSpice**, **HSpice** (standard SPICE3), **WINSpice** (standard SPICE3), **MicroCap** od verze IV, **Multisim**, **LTspice** (standard SPICE3) a další.

Kromě toho existují programy pro simulaci obvodů, které nemají s výše uvedenými skupinami programů mnoho společného. Jedná se zejména o jednoúčelové programy, specializované na analýzy obvodů, které nelze realizovat programy typu SPICE. Programy typu „*SPICE-compatible*“ jsou široce využívány mimo jiné proto, že umožňují neomezené rozšiřování sortimentu modelovaných součástek o nové typy, jejichž modely se průběžně objevují na webu a následně i v inovovaných knihovnách nových verzí

programů. Na akademických pracovištích i v průmyslu je oblíbeným produktem OrcadPSpice.[Bio05, s. 10]

22.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV

Kapitola 23

Zesilovače

Obsah

23.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	224
23.1.1 Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru . .	224

V této kapitole se budeme zabývat rozbory vlastností základních obvodů a jejich účelným spojováním do funkčních bloků určených pro zesilování signálů. [NU01, p. 101]

23.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače

Přesný výpočet tranzistorového zesilovače vychází z určení dvojbranových parametrů tranzistoru a pokračuje sestavením matice obvodu a řešením této matice. Při použití vybraných rovnic matematických modelů pro programy SPICE lze dojít ke zjednodušenému řešení, ve kterém se některé parametry zanedbají a sestavené náhradní schema pak řešit libovolnou metodou. Přesto dostaneme výsledky s přesností, která pro obvyklé technické řešení postačuje.

23.1.1 Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru

Převodní charakteristika udává závislost výstupního proudu na vstupním napětí. Pro zapojení SE představuje převodní charakteristiku exponenciální závislost kolektorového proudu na napětí mezi bází a emitorem. Strmost je dána derivací funkce (tečnou) v daném pracovním bodě a odpovídá parametru y_{21} .

Kapitola 24

Operační zesilovače

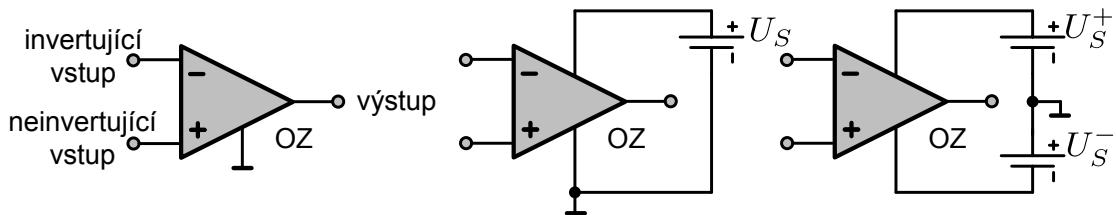
Obsah

24.1 Úvod	226
24.2 Parametry operačního zesilovače	226
24.2.1 Lineární parametry a lineární model	227
24.2.2 Nelineární parametry	227
24.3 Ideální operační obvod	227

24.1 Úvod

Operační zesilovače svůj název získaly z dob *analogových počítačů*, ve kterých se používaly k realizaci matematických operací. Tyto integrované obvody se svými vlastnostmi blíží *ideálnímu zesilovačům napětí*. Jejich zesílení bez vnější zpětné vazby se blíží nekonečnu (10^7). Vstupní odpor je velmi vysoký ($10^4\Omega$) a výstupní odpor je malý (10Ω). Kmitočtový rozsah sahá od stejnosměrného signálu do desítek megahertzů. Vlastní šum a zkreslení zesilovače jsou rovněž malé. V dnešním pojetí je možné vymezit operační zesilovač jako **stejnosměrný zesilovač** s velkým zesílením a malým vlastním rušením, schopný stabilní činnosti v uzavřené zpětnovazební smyčce [Dos05, s. 5].

Směr signálového toku operačním zesilovačem (dále je OZ) od vstupu k výstupu je vyznačen trojúhelníkovým tvarem jeho symbolické značky na obr. 24.1.



Obrázek 24.1: Symbolická značka OP s vyznačenými signálovými svorkami (a) a skutečná realizace zemní svorky (b, c)

Shrnutí

1. Operační zesilovač má čtyři signálové svorky, i když se často kreslí jen tři - oba vstupy a výstup. Čtvrtou signálovou svorkou je zem.
2. Souhlasné napětí u_{CM} je totožné s napětím jeho neinvertujícího vstupu u^+ .
3. Ideální operační zesilovač má za všech okolností nulové diferenční vstupní napětí a nulové vstupní proudy.

24.2 Parametry operačního zesilovače

Ideální operační zesilovač je nedosažitelná abstrakce. K posouzení kvality skutečného operačního zesilovače slouží řada funkčních parametrů jako soubor dat, která lze zjistit měřením na svorkách.

Operační zesilovač, jako každý aktivní elektronický obvod, je obvod nelineární. Funkční charakteristiky OZ však připouštějí linearizaci bez přílišného odklonu od

skutečnosti. Odpovídající kvazilineární parametry jsou podkladem lineárního modelu OZ. Ostatní parametry jsou podstatné nelinearity, které tvoří meze jeho lineární oblasti.

24.2.1 Lineární parametry a lineární model

Obr. 24.2 ukazuje úplný *lineární* model operačního zesilovače. Se zřetelem k pozdější analýze chyb operačního obvodu je vhodné rozdělit znázorněné lineární parametry na **aditivní** a **multiplikativní**.

- Aditivní parametry zahrnují náhradní rušivé zdroje náhodných fluktuací: E_R , I_R^- , I_R^+ , které způsobují aditivní chyby operačního obvodu nezávislé na jeho signálovém vybuzení.
- Multiplikativní parametry představované čtyřmi odpory R_D , R_{CM}^- , R_{CM}^+ , R_0 a dvěma řídicími konstantami $-A$, $1/X$ závislých generátorů, vystihují pasivní a přenosové vlastnosti OZ způsobují multiplikativní chyby operačních obvodů úměrné jeho signálovému vybuzení.

Vnitřní, na svorkách neměřitelný napěťový úbytek e_D na odporu R_D zastává v tomto modelu vazbu mezi vstupem a výstupem.

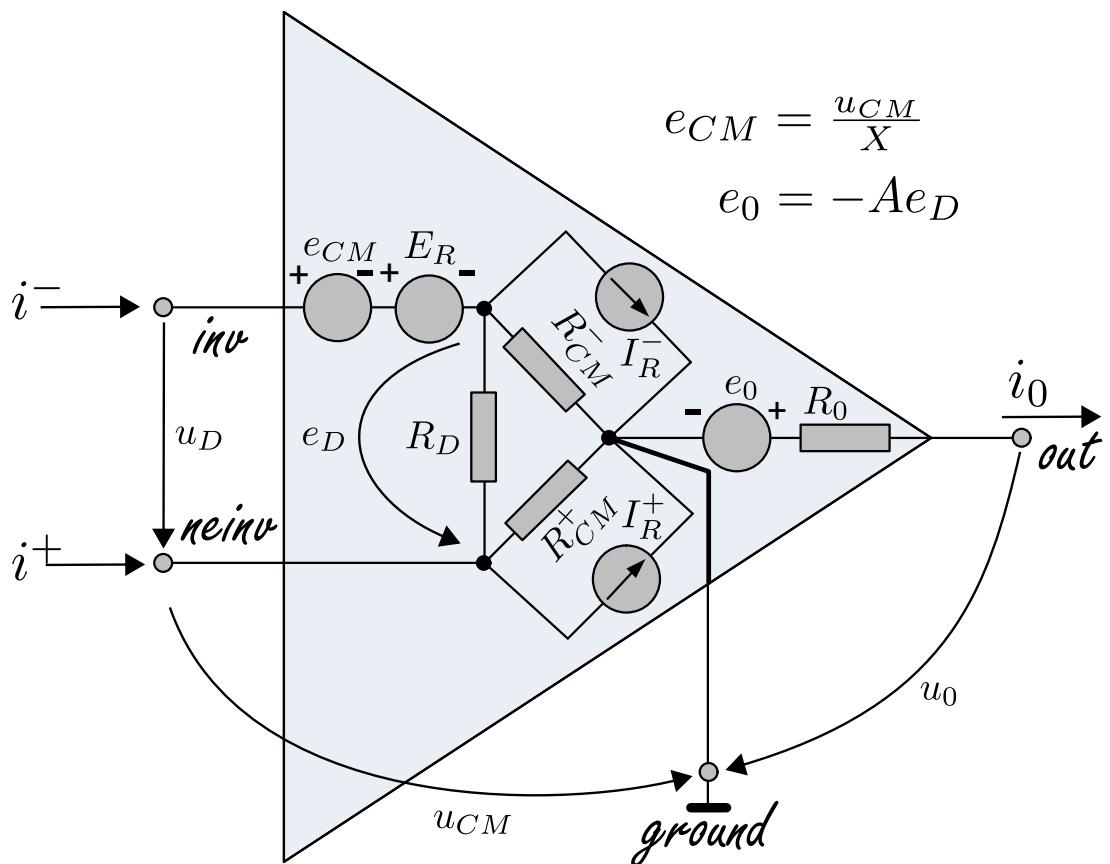
Při práci s proměnnými signály v časové nebo frekvenční oblasti se význam použitých symbolů vhodně rozšíří na impedance, operátorové přenosy apod.

24.2.2 Nelineární parametry

Chyby, které provázejí approximaci skutečného operačního zesilovače lineárním modelem, se zvětšují se vstupním a výstupním vybuzením. To se týká zejména linearizace převodní charakteristiky například $u_0(u_D)$ výrazem $-A(u_D - E_R - e_{CM})$, výstupní charakteristiky $u_0(i_0)$ výrazem $e_0 - R_0 i_0$ a vstupní charakteristiky $e_{CM}(u_{CM})$ výrazem u_{CM}/X . Skutečný průběh každé z těchto charakteristik se vyznačuje velmi ostrým kolenem, při jehož překročení ztrácejí lineární parametry smysl. Signálové vybuzení, které přísluší tomuto kolenu, tak vymezuje dosti přesně oblast lineárního chování [Dos05, s. 29].

Třem svorkovým proměnným u_{CM} , u_O , i_0 přísluší tři *statické nelinearity* (omezení rozkmitu) a tři dynamické nelinearity (omezení rychlosti)

24.3 Ideální operační obvod



Obrázek 24.2: Lineární model operačního zesilovače

Kapitola 25

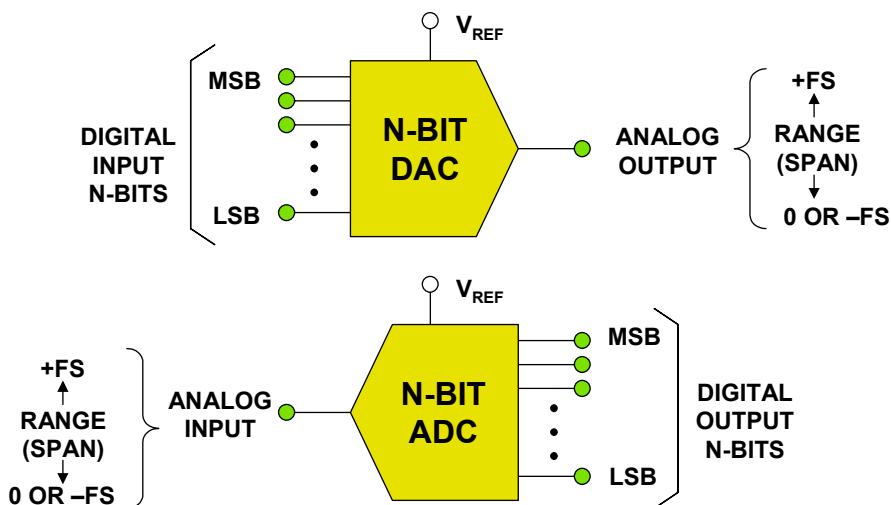
Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Obsah

25.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	230
25.1.1 Základní struktura převodníků	231
25.1.2 Statické a dynamické parametry převodníků	231
25.1.3 Vzorkování	232
25.1.4 Kvantování	232
25.1.5 Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC	236
25.2 Principy A/D převodníků	239
25.3 Převod číslicového signálu na analogový	240
25.3.1 DA převodník DAC0800	242

25.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Při zpracování analogového signálu je jednou z důležitých funkcí převod tohoto signálu z analogové podoby do číslicové a naopak. Proto jsou analogově-číslicové převodníky resp. číslicově-analogové převodníky (ADC - Analog-to-Digital Converter), (DAC - Digital-to-Analog Converter) velmi důležitými prvky jakéhokoli systému zpracovávajícího signál [Haz+10, s. 11]. Na obrázku 25.1 je definováno rozhraní obou typů převodníku.



Obrázek 25.1: Definice rozhraní bloku analogově-číslicového (ADC) a číslicově-analogového (DAC) převodníku

Analogově-číslicové převodníky (Analog-to-Digital Converters) slouží k převedení analogového signálu na signál číslicový. Pro A/D převodník má analogová stupnice vstupního signálu délku FS (*Full scale*), udávanou např. ve voltech. Stupnice číslicového signálu pak vyznačuje diskrétní hodnoty výstupu, které převodník generuje při převodu analogového signálu [NU01, s. 202].

Číslicově-analogové převodníky (Digital-to-Analog Converters) slouží k opačnému procesu, tedy k převedení číslicového signálu na signál analogový, což by šlo realizovat pomocí lineárního digitálního potenciometru a připojeného zdroje referenčního napětí na jeho vstupu [NU01, s. 208]. Pro N-bitové binární slovo by musel mít $n - 1$ rezistorů a n resp. $2n - 1$ spínačů. To je monoliticky téměř nerealizovatelné již pro osmi- a vícebitové slovo. Řešení převodníků proto musí být mnohem úspornější, i když úspory budou vykoupeny jinými nevýhodami, případně omezeními pro jejich použití.

25.1.1 Základní struktura převodníků

Obě skupiny převodníků mohou typicky obsahovat komparátory, číslicové obvody, spínače, integrátory, vzorkovací obvody a/nebo pasivní součástky. Nezbytnou a důležitou součástí je i přesný zdroj referenčního napětí. V mnoha případech pak také platí, že DAC je jednou z částí ADC.

Analogově číslicový převod můžeme pomyslně rozložit do tří etap [ŠS10].

1. Převod signálu se spojitým časem na signál s diskrétním časem. Tomuto převodu říkáme vzorkování.
2. Kvantování vzorku s cílem vyjádřit vzorky konečnou množinou čísel. Tento krok je provázen vznikem tzv. kvantovacího šumu. Uvedený jev souvisí s nelineárním zkreslením známým z teorie obvodů.
3. Kódování spočívající zpravidla v binárním vyjádření čísel představujících velikosti vzorku.

25.1.2 Statické a dynamické parametry převodníků

Statické parametry převodníků jsou určovány pomocí *převodní charakteristiky*, zatím co dynamické vlastnosti se vyhodnocují z kmitočtového spektra převodníku [Haz+10, s. 11].

- rozsah,
- integrální a diferenciální nelinearity (*integral - INL, differential - DNL non-linearity*),
- rozlišení převodníku (*resolution*),
- přesnost (*accuracy*),
- chyba monotónnosti,
- chyba nastavení nuly (*offset error*),
- hystereze a další.

K hlavním dynamickým parametrům patří

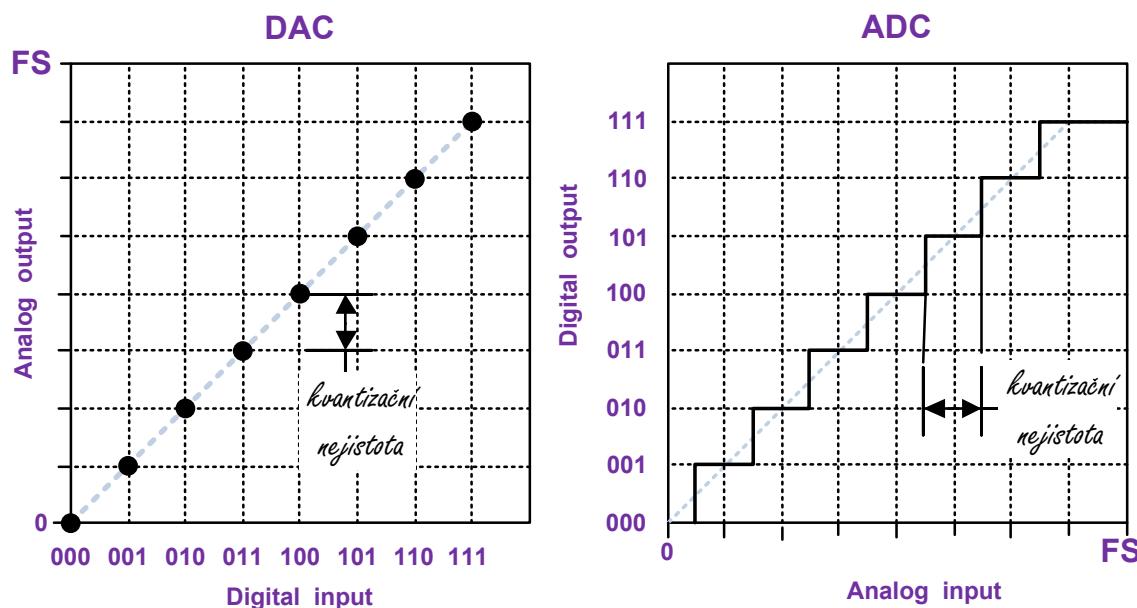
- odstup signál - šum (*signal to noise ratio - SNR*) kap. 25.1.5.1,
- efektivní počet bitů (*effective number of bits - ENOB*),
- harmonické zkreslení (*total harmonic distortion - THD*),
- odstup signál-šum a zkreslení (*signal to noise and distortion - SINAD*),
- dynamický rozsah bez parazitních složek (*spurious free dynamic range - SFDR*),

- šum - vrcholový, efektivní (*noise - peak, rms*),
- doba přepnutí a ustálení.

25.1.3 Vzorkování

25.1.4 Kvantování

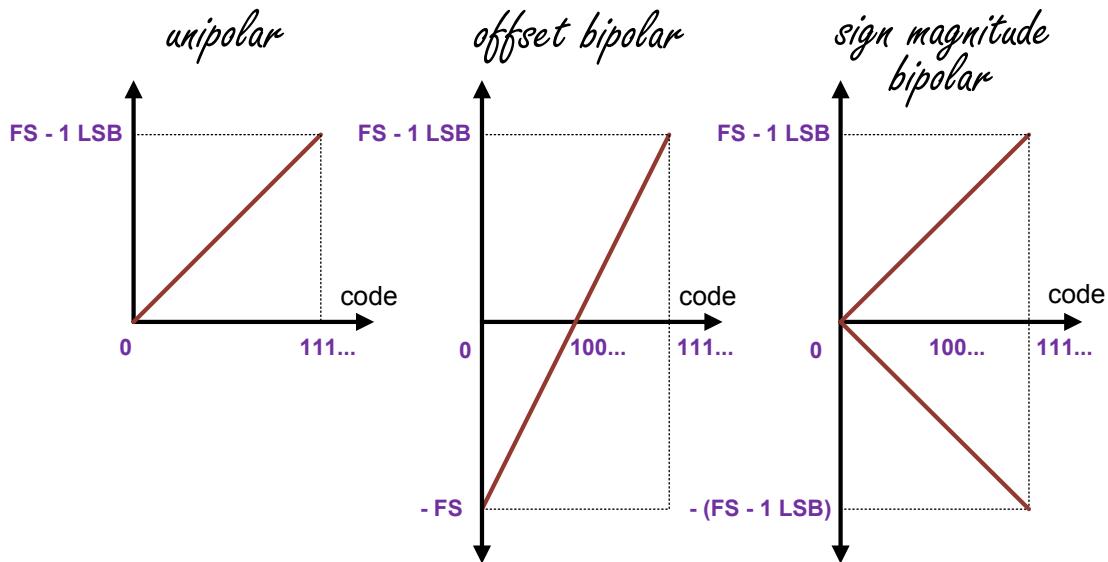
Pro přechod od časově spojitého signálu se spojitou množinou hodnot k číslicovému signálu, je nutné provést (výškové) **kvantování**, tj. kvantování hodnot signálu, které je patrné z obrázku 25.4. Je zřejmé, že mapování spojitého intervalu vstupních hodnot na diskrétní hodnoty digitálního výstupu způsobí, že každá hodnota digitálního výstupu platí pro vstupní signál měnící se v určitém podintervalu. Délka podintervalu, pro který platí jedna hodnota digitálního výstupu se nazývá **kvantizační krok převodníku** - Q , jenž je roven bitu s nejnižší váhou - LSB.



Obrázek 25.2: Ideální přenosová funkce 3bitového unipolárního AD a DA převodníku. V případě DA převodníku je přenosová funkce tvořena osmi body, nikoliv čárou.

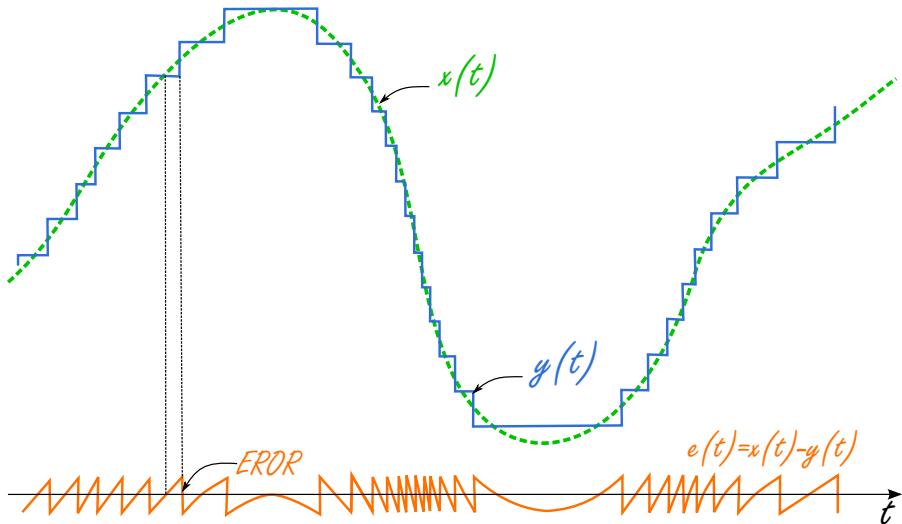
Převodní charakteristika DA i AD převodníku je znázorněna na obr. 25.2. Analogový signál je spojitý a číslicový signál vyjadřuje jen jeho vybrané diskrétní hodnoty. Proto je převodní charakteristika nespojitá. Naproti tomu digitální vstup vytvoří na výstupu pouze omezený počet hodnot výstupního signálu.

Počet úrovní AD převodníku, do kterého je rozdělen rozsah vstupního analogového



Obrázek 25.3: Unipolární a bipolární převodníky [Kes04]

signálu definuje **rozlišovací schopnost ADC** a lze ji vyjádřit různými způsoby, jak ukazuje tabulka 25.1 pro 2 až 24bitového převodníku.

Obrázek 25.4: Kvantizační chyba je rovna rozdílu původního $x(t)$ a kvantovaného signálu v úrovni $y(t)$ [WRB48]

Kvantizační chyba, jejíž průběh je na obr. 25.4, v dynamickém režimu, tj. při časových změnách vstupní analogové veličiny, způsobuje **kvantizační šum**. Ten

Rozlišení N	2^N	Napětí 10V FS	ppm FS	% FS	dB FS
2-bit	4	2.5 V	250000	25	-12
4-bit	16	625 mV	62500	6,25	-24
6-bit	64	156 mV	15625	1,56	-36
8-bit	256	39,1 mV	3906	0,39	-48
10-bit	1024	9,77 mV	977	0,098	-60
12-bit	4096	2.44 mV	244	0,024	-72
14-bit	16384	610 μ V	61	0,061	-84
16-bit	65536	153 μ V	15	0,0015	-96
18-bit	262144	38 μ	4	0,0004	-108
20-bit	1048576	9.54 μ	1	0,0001	-120
22-bit	4194304	2.38 μ	0,24	0,000024	-132
24-bit	16777216	596 nV	0,06	0,000006	-144

Tabulka 25.1: Porovnání rozlišovací schopnosti AD převodníku s různou délkou výstupního slova. Z tabulky vyplývá, že kvantizační krok 24bitového ADC odpovídá velikosti úbytku na rezistoru $2,2k\Omega$ při teplotě $25^\circ C$, který vzniká vlivem tepelného šumu (viz Johnsonův šum) jenž je při šířce pásma 10 kHz roven 600 nV.

lze pozorovat např. tehdy, kdy čísla získaná z převodníku A/D jsou vedena do převodníku D/A a jím je analogový signál rekonstruován. Rekonstruovaný signál se jeví jako signál původní, avšak se superponovaným rušivým signálem. Vzájemným odečtení rekonstruovaného a původního signálu, dostaneme samostatný rušivý signál, který lze podrobit analýze. Pokud je vzorkovací signál nekorelovaný se vzorkovaným signálem, je možno kvantizační šum považovat za náhodný. Vztah mezi původním signálem a signálem degradovaným kvantizačním šumem vyjadřuje parametr - SNR

- SNR - Signal to Noise Ratio: poměr signálu k šumu

$$SNR = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{[y(t) - x(t)]^2\}} \quad (25.1)$$

– $E\{\cdot\} \dots$ operátor průměrování

- $x(t) \dots$ vstupní analogový signál
- $y(t) \dots$ rekonstruovaný kvantovaný signál

Kvantizační chybu lze aproximovat nekorelovaným pilovým průběhem s amplitudou špička-špička rovnou kvantizačnímu kroku Q . Ačkoliv takto provedená analýza (viz kapitola 25.1.5) není přesná, v běžných aplikacích zcela postačuje.

Na obr. 25.5 je kvantování realizováno tak, že je zajistěna minimální chyba kvantování, tj. převodník provádí operaci zaokrouhlování na nejbližší hodnotu. To znamená, že např. číslo jedna bude generováno vstupem v intervalu $1 \pm 0,5V$, je-li FS rovno 8V a máme-li k dispozici osm kvantizačních úrovní.

Převodník, který má v celém intervalu předváděných vstupních hodnot konstantní kvantizační krok, se též označuje jako lineární kvantizér. Převodník s přirozeným binárním kódem o N bitech je schopen na analogové straně reprezentovat $n-1$ nenulových úrovní analogové veličiny, přičemž platí

$$n = 2^N \quad (25.2)$$

A jde-li o lineární N -bitový kvantizér, můžeme vyjádřit kvantizační krok vztahem

$$Q = \frac{FS}{n} = \frac{FS}{2^N} \quad (25.3)$$

Nejvyšší úroveň vstupní veličiny A pak bude

$$A_{max} = \frac{n-1}{n} + \frac{Q}{2} \quad (25.4)$$

V sekvenci bitů binárního čísla generovaného převodníkem se zpravidla první bit, který představuje nejvyšší binární řád, označuje **MSB** (*Most Significant Bit*), tedy nejvýznamnější bit. Poslední bit, tj. bit v poloze nejnižšího rádu, má označení **LSB** (*Least Significant Bit*), tedy nejméně významný bit. Je zřejmé, že LSB jednoznačně určuje základní krok na ose číslicového signálu. Dojde-li ke změně pouze v hodnotě LSB, změní se analogová hodnota právě o kvantizační krok. LSB tedy na analogové straně určuje rozlišovací schopnost převodníku. Např. osmibitový převodník má rozlišovací schopnost $FS/256$, tj. přibližně 0,4%. Je-li $FS = 2V$, musí rozlišit 8 mV [NU01, s. 203].

Vzhledem k diskretizaci hodnot původního analogového signálu při převodu A/D dochází ke *kvantizačním chybám*. Je-li např. vstupní veličinou okamžité napětí u_a a této hodnotě odpovídá na výstupu číslo D , pak kvantizační chybu ϵ_q lze vyjádřit takto:

$$\epsilon_q = u_a - FS \frac{D}{2^N} \quad (25.5)$$

25.1.5 Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC

V předchozí kapitole byla nastíněna možnost approximace kvantizační chyby jakéhokoliv AC signálu v časové oblasti (viz 25.4) nekorelovaným pilovým průběhem, za cenu určité nepřesnosti vyvážené jednodušším matematickým aparátem.

Vyjděme tedy z převodní charakteristiky ideálního N-bitového převodníku zatížené kvantizační chybou, tak jak je znázorněna na obr. 25.5. Z té je patrné, že chyba může v absolutní hodnotě dosáhnout maximálně $e(t) = \frac{Q}{2}$, resp. $\pm \frac{1}{2}LSB$ a v rámci kvantizačního kroku ji lze popsat přímkou se strmostí s :

$$e(t) = st, -\frac{Q}{2s} < t < +\frac{Q}{2s}.$$

Statisticky je pravděpodobnost jejího rozložení $1/Q$ a je rovnoměrná od $-\frac{Q}{2}$ do $+\frac{Q}{2}$.

Z výše uvedeného plyne, že okamžitá hodnota kvantizační chyby $\varepsilon_q(t) = y(t) - x(t)$ může dosáhnout rozkmitu maximálně $\pm \frac{Q}{2}$ a jelikož předpokládáme rovnoměrné rozložení hodnot, je hustota pravděpodobnosti amplitud rovna $\frac{1}{Q}$.

Kvantizační šum σ^2 je definován jako výkon (rozptyl) strídavé složky kvantizační chyby ε_q a jeho efektivní hodnotu σ můžeme odvodit pomocí věty o druhém centrálním momentu nebo výpočtem efektivní hodnoty v časové oblasti.

1. V pravděpodobnostním počtu je K-tý moment definován jako:

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$$

tedy

$$e(t) = \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (x - x_0)^2 p(x) dx = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2}{12}$$

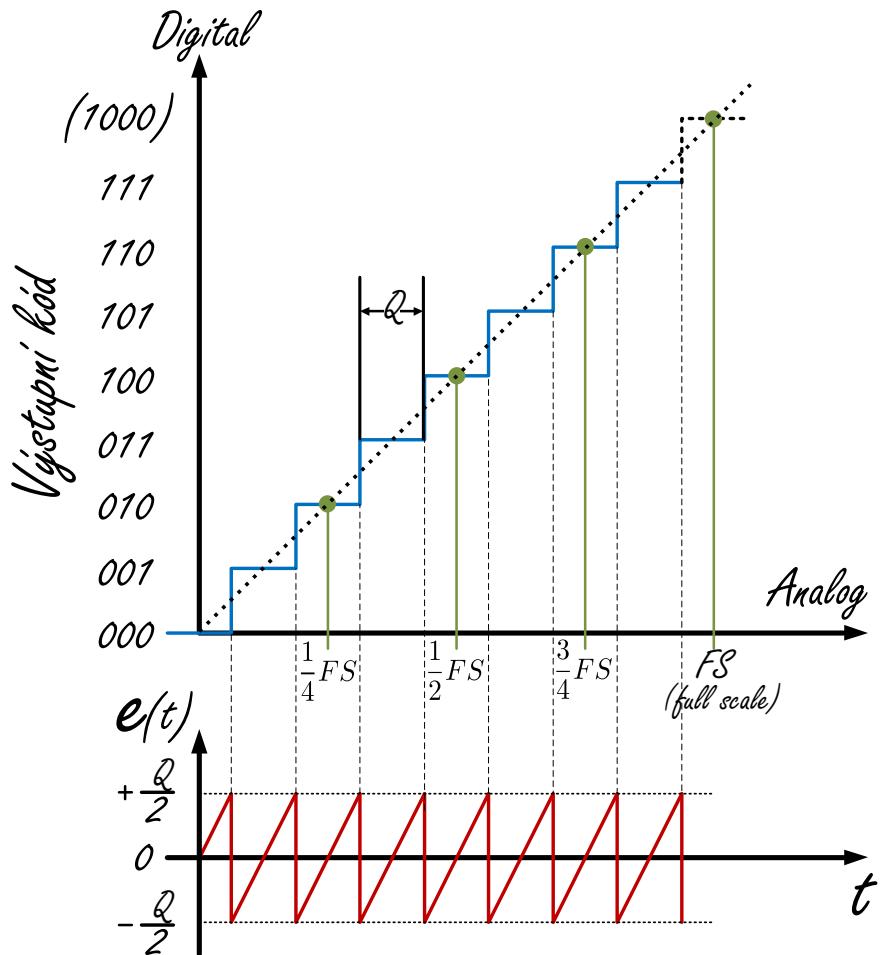
2. V časové oblasti má kvantizační šum pilový průběh viz obr. 25.6(b). Z definičního integrálu efektivní hodnoty dostaneme

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (st)^2 dt = \frac{Q^2}{12}.$$

Též můžeme využít znalosti efektivní hodnoty pro průběh tohoto typu: $\frac{U_m}{\sqrt{3}}$ a dosazením za $U_m = \frac{Q}{2}$ získáme opět stejný výsledek jako při výpočtu integrálu

Tedy efektivní hodnota kvantizačního šumu ideálního N-bitového převodníku je:

$$e(t) = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (25.6)$$



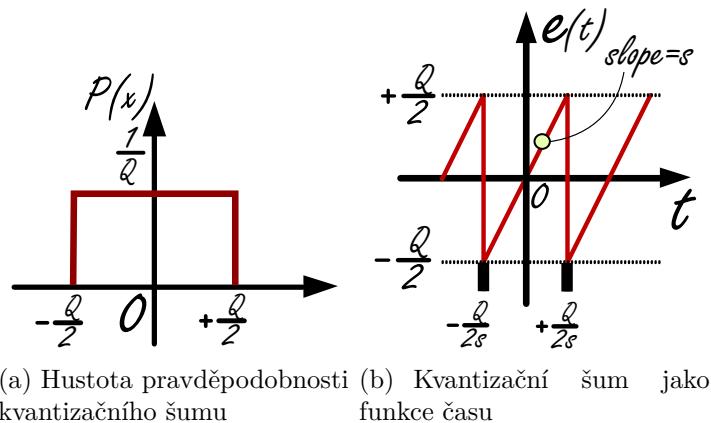
Obrázek 25.5: Převodní charakteristika ideálních převodníků a závislost chyby kvantizace na vstupní analogové hodnotě

Předpokládejme na vstupu převodníku ustálený harmonický signál o amplitudě X . Dále předpokládejme, že signál s amplitudou X_m by pokryl celý rozsah převodníku FS . Pak se dá ze vztahu 25.1 vyjádřit odstup signálu od šumu SNR ideálního N -bitového převodníku jako podíl jejich výkonů resp. kvadrátu efektivních hodnot signálu a šumu v decibelech vztahem

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 \quad (25.7)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = 10 \log \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 = 20 \log \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \quad (25.8)$$

(25.9)



Obrázek 25.6: K odvození efektivní hodnoty kvantizačního šumu

$$SNR = 1,76 + 6,02N + 20\log \left(\frac{X}{X_m} \right) \quad (25.10)$$

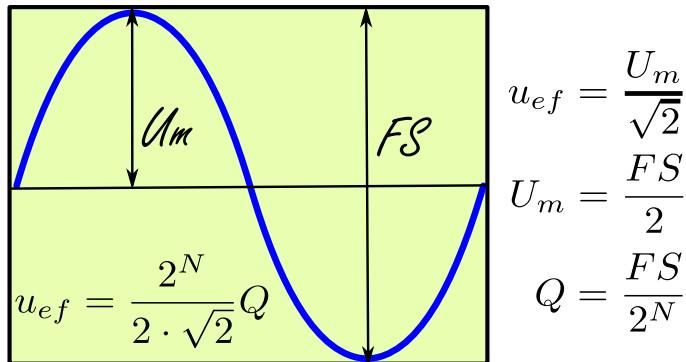
Lze tedy říci, že každý bit navíc v digitálním výstupu A/D převodníku přinese zlepšení odstupu signálu od šumu o 6 dB. Naproti tomu je třeba vědět, že uvedený výraz počítá s harmonickým signálem různého rozkmitu. Při zmenšování amplitudy bude relativní podíl šumu v signálu vyšší. Poměry se také mohou velmi změnit, když signál nebude mít harmonický charakter.

25.1.5.1 Odstup signálu od šumu

Z předchozí kapitoly víme, že SNR je definován jako poměr výkonu signálu k výkonu šumu ($výkon = ef.hodnota^2$). Pro samotný kvantizační šum platí:

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &= 10 \log \left(\frac{\frac{2^N}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot Q}{\frac{Q}{\sqrt{12}}} \right)^2 = N20 \log 2 + 20 \log \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{12}} \quad (25.11) \\ SNR_{dB} &= 6,02 \cdot N + 1,76dB \end{aligned}$$

Tato hodnota platí pouze pro ideální převodník pouze s kvantizační chybou, a sinusový signál s rozkmitem přes celý rozsah převodníku. Skutečný převodník má ovšem vlivem dalších chyb SNR menší než SNR určený pouze pro kvantizační šum. Tato hodnota se nazývá **SINAD** nebo **SNDR** - *Signal-to-Noise and Distortion ratio*.



Obrázek 25.7

Známe-li SNR skutečného převodníku, můžeme určit počet efektivních bitu N_{ef} tzn. *efektivní rozlišitelnost převodníku*. Ten je vždy menší než N .

$$N_{ef} = \frac{SNR - 1,76}{6,02} \quad (25.12)$$

25.2 Principy A/D převodníků

Převod analogového signálu na číslo lze uskutečnit několika různými postupy:[NU01]

1. Vstupní signál se porovnává s kvantovanou referenční veličinou a komparátory okamžitě vyhodnotí, který z nich je větší. Přímým výstupním údajem je binární číslicové slovo.
2. Vstupní signál i referenční veličina se v určité časové sekvenci zavádějí do integrátoru a komparátor na jeho výstupu určuje sekvenci impulsů, vypovídající o hodnotě vstupní analogové veličiny. Informací o vstupní veličině dále přenáší počet impulsu, jejich kmotočet nebo kódovaná sekvence impulsů. Tato informace může být převedena číslicovým blokem (obvykle blokem DSP) na binární číslicové slovo.

Bývá také používáno třídění na *převodníky s přímým a nepřímým vyhodnocením analogové veličiny*.

- *Převodníky s přímým vyhodnocením* porovnávají hodnoty analogové veličiny s vybranými kvatizačními úrovněmi současně nebo postupně, a to tak, že každá úroveň má vlastní komparátor. K těmto převodníkům patří *převodníky paralelní a kaskádní*.
- K *nepřímému* převodu můžeme využít postupného provolávání vstupní veličiny s vhodnými vzorky referenčního napětí, dodávanými na vstup jediného

komparátoru v pořadí a velikosti řízené logickými obvody. U těchto převodníků je vstupní analogová veličina porovnávaná s výstupní veličinou převodníku D/A, přičemž je číslicový vstup tohoto převodníku měněn tak, aby se obě veličiny k sobě přiblížovaly. Pokud se k sobě dostatečně přiblíží, je převod ukončen. I zde jsou v podstatě jen dvě jednoduché možnosti přiblížování výstup převodníku D/A k určité úrovni vstupní veličiny: buď se přiblížování děje se stálým krokem, kdy jde o krokování po jednotlivých kvantovacích úrovních (*převodníky sledovací*), nebo postupnou approximací (*převodníky approximační*), kdy první krok rozhoduje o hodnotě MSB, další kroky porovnávají binárně zmenšované hodnoty odpovídající jednotlivým binárním řádům s tím, že poslední krok určí hodnotu LSB.

- Jinou možností nepřímého převodu A/D je převést hodnotu vstupní veličiny na takový parametr pomocného signálu, který se pak dá snadno převést na číslicový údaj. Tímto parametrem je nejčastěji kmitočet, jindy to může být i počet impulzů v určitém časovém intervalu nebo kódovaná sekvence impulzů. U těchto převodníků j kromě komparátoru typickým funkčním blokem integrátor.

25.3 Převod číslicového signálu na analogový

Číslicově-analogové převodníky převádějí číslicový signál zpravidla ve formě binárně kódovaného čísla na proud nebo napětí.

$$U_A = D \cdot U_{REF} \quad I_A = D \cdot I_{REF} \quad (25.13)$$

kde U_{REF} , I_{REF} jsou referenční napětí a proud určující rozsah výstupní veličiny. Je-li referenční napětí konstantní jedná se o klasické převodníky DAC. Při proměnném referenčním napětí se jedná o násobící převodníky MDAC, které realizují násobení časově proměnného referenčního spojitého a vstupního číslicového signálu. Hodnota číslicového signálu D se vyjadřuje ve dvojkovém nebo dvojkově desítkovém (BCD) kódu. Ve dvojkovém kódu:

$$D_B = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{-i} \quad (25.14)$$

n je počet bitů dvojkového čísla. Bit a_1 s nejvyšší vahou $1/2$ se označuje **MSB**, bit a_n s nejnižší vahou 2^{-n} se označuje **LSB**. Maximální hodnota číslicového signálu $D_{MAX} = 1 - 2^{-n}$ a proto maximální hodnota výstupní veličiny je vždy o 1 LSB menší, než je rozsah převodníku. Veličina $2^{-n} \cdot U_{REF}$, resp. $2^{-n} \cdot I_{REF}$ se nazývá **kvantum referenčního napětí nebo proudu** a určuje **rozlišitelnost** převodníku. Převodní funkci D/A převodníku můžeme v případě binárního kódu vyjádřit vztahem

$$U_A = U_{REF} \cdot (a_n 2^{-n} + a_{n-1} 2^{-(n-1)} + \dots + a_1 2^{-1}) \quad (25.15)$$

Statické vlastnosti D/A převodníku jsou určeny převodní charakteristikou, která je obvykle lineární (obr. 25.8). Převodní charakteristika reálného DA převodníku je zatížena chybou nuly, chybou zisku, integrální a diferenciální nelinearitou a monotónností převodu.

Z převodní charakteristiky lze tedy určit následující parametry převodníku:

- Chybu nuly (posunu) ε_0

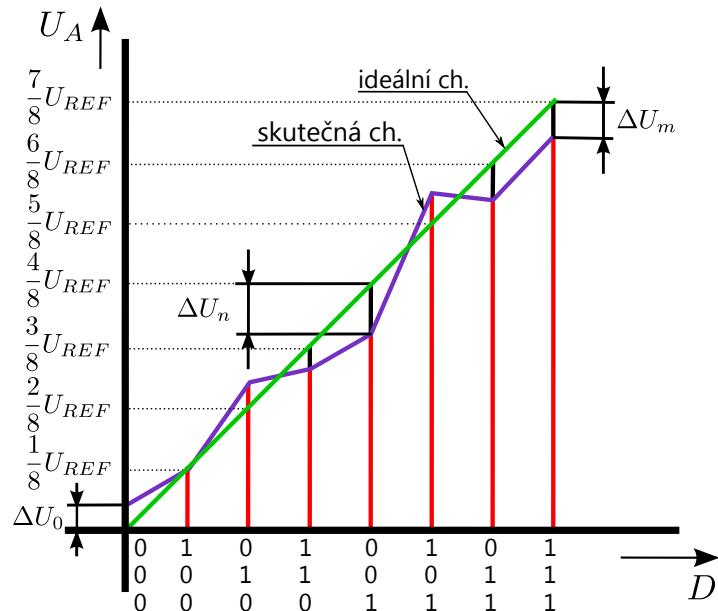
$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta U_0}{U_{REF}} \quad (25.16)$$

- Chybu měřítka (zesílení) ε_m

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta U_m - \Delta U_0}{U_{REF}} \quad (25.17)$$

- Integrální nelinearitu I_{NL} jako maximální odchylku výstupního napětí skutečného převodníku od ideální hodnoty v celém rozsahu převodníku

$$I_{NL} = \frac{\max \Delta U_n}{U_{REF}} \quad (25.18)$$

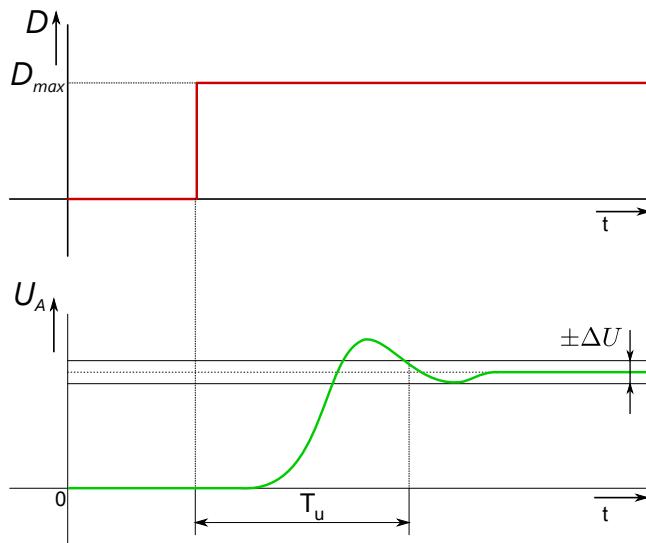


Obrázek 25.8: Statická převodní charakteristika 3 bitového DA převodníku

Všechny tyto chyby se vyjadřují buď v procentech jmenovitého rozsahu U_{REF} převodníku, nebo v jednotkách ideální kvantizační úrovně (kvanta) $q = 2^{-n} \cdot U_{REF}$.

Dynamické vlastnosti D/A převodníku jsou charakterizovány **dobou ustálení** T_u (obr. 25.9), potřebnou k ustálení výstupního signálu na jmenovitou hodnotu se zadanou chybou ΔU obvykle $\pm 0.5LSB$.

U násobících D/A převodníků se navíc určuje kmitočtový rozsah referenčního napětí kmitočtem f_m , při kterém poklesne výstupní napětí převodníku o $3dB$ oproti stejnosměrnému napětí při maximální hodnotě číslicového signálu.



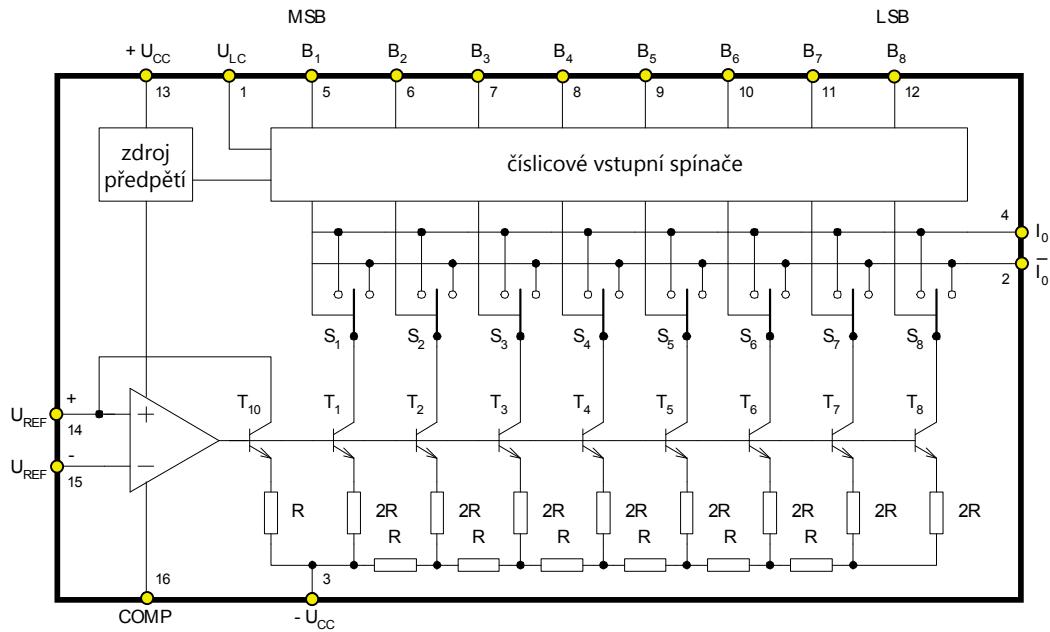
Obrázek 25.9: Doba ustálení T_u DA převodníku. Je to celková doba od změny vstupního kódu do ustálení analogového výstupu s přesností $\pm \frac{1}{2} LSB$

25.3.1 DA převodník DAC0800

D/A převodník DAC0800 je velmi rychlý násobící D/A převodník s rozlišením 8 bitů, pracující na principu spínaných proudových zdrojů (viz obr. 25.10).

Vstup převodníku je proudový, proudový výstup je řešen jako komplementární. IO v sobě slučuje proudové spínače, váhové odpory a řídící zesilovač. Analogová reference, přesné vnější odpory, korekční kondenzátor a výstupní zesilovač se připojují vně převodníku. Převodník DAC0800 generuje váhové proudy do komplementárních proudových sběrnic I_0 a \bar{I}_0 prostřednictvím spínaných proudových zdrojů s tranzistory T_1 až T_8 a odporovou sítí $R - 2R$ viz obr. 25.10. Při úrovni H na číslicových vstupech B_1 až B_8 připojí spínače S_1 až S_8 příslušné váhové proudy na výstup I_0 a při úrovni L na výstup \bar{I}_0 .

Nezávislost váhových proudů na teplotních změnách zajišťuje referenční zdroj proudu s tranzistorem T_{10} a zesilovačem Z, ke kterému se připojuje referenční proud o

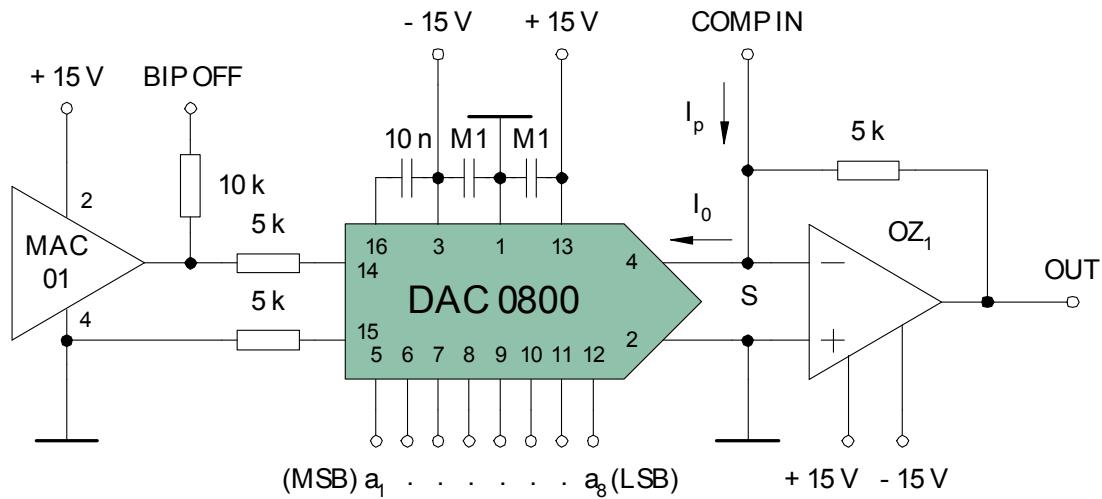


Obrázek 25.10: Blokové schéma DA převodníku DAC0800

jmenovité hodnotě $2mA$. Kondenzátor s kapacitou $10nF$ připojený mezi vývody 3 a 16 slouží ke kmitočtové kompenzaci zesilovače Z. Číslicové vstupy S_1 až S_8 řídí spínače T_1 až T_8 prostřednictvím převodníku úrovní, přičemž svorkou V_{LC} (pin 1) lze volit slučitelnost převodníku s obvody TTL, DTL, CMOS atd.

Vstupní referenční proud I_{REF} je odvozen pomocí vnějšího přesného odporu R_{REF} ze zdroje referenčního napětí U_{REF} . Souběh referenčního proudu a plného výstupního proudu I_{FS} je zachován v rozpětí dvou dekád proměnné unipolární reference a umožňuje použít IO též jako násobící převodník. Výstupní proudy I_0 , \bar{I}_0 z vysokoimpedančních výstupů se mohou využívat přímo nebo pomocí vnějších odporů, popřípadě pomocí 0Z, se mohou převést na napětí. Převodník pracuje se vstupním přímým binárním kódem při využití přímého proudového výstupu I_0 nebo se vstupním komplementárním binárním kódem, využije-li se doplňkový proudový výstup \bar{I}_0 . Rozhodovací úroveň číslicových vstupů lze z vnějšku nastavit na potřebnou hodnotu. Proto lze k řízení převodníku DAC0800 použít všechny běžně používané řady log. obvodů.

Příklad zapojení D/A převodníku je na obr. 25.11. Obsahuje kromě vlastního D/A převodníku DAC0800 zdroj referenčního napětí MAC01 se jmenovitým referenčním napětím $+10V$ a invertorem se zesilovačem, pracujícím ve funkci převodníku proudu na napětí pro realizaci napěťového výstupu převodníku. Funkce je následující: Napětí $+10V$ z MAC01 je pomocí odporu $5k\Omega$ převedeno na proud $I_{REF} = 2mA$,



Obrázek 25.11: Příklad zapojení převodníku DAC0800

který je přiveden do kladného referenčního vstupu DAC0800, kde je vynásoben nastavenou hodnotou číslicového signálu, zadanou pomocí osmi dvoupolohových přepínačů. Poté se proud $\max -2 \cdot (1 - 2^{-8}) \text{ mA}$ objeví na výstupu I_0 a invertující zesilovač převede na odpovídající napětí. Zpětnovazební rezistor zesilovače $5\text{k}\Omega$ určuje rozsah výstupního napětí 0 až 10 V (unipolární režim). Jsou-li svorky BIP OFF a COMP IN propojeny, pak do sčítacího bodu S je přiveden proud $I_p = I_{REF}/2$ tj. 1 mA ($I_p = 10\text{V}/10\text{k}\Omega$) opačného směru než I_0 , který způsobí trvalý posun výstupní napěťové úrovně převodníku o -5V , takže rozsah převodníku bude $\pm 5\text{V}$ (bipolární režim) a hodnota výstupního napětí je určena dvojkovým kódem s posunutím (MSB určuje polaritu výstupního napětí).

Kapitola 26

Úvod

Obsah

26.1 Filtry ARC 2. řádu	246
26.1.1 Základní principy funkce filtrů ARC	246
26.1.2 Obvody s náhradou cívky	246
26.1.3 Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností	246
26.1.4 Vliv reálných odporů a kondenzátorů	247

26.1 Filtry ARC 2. řádu

26.1.1 Základní principy funkce filtrů ARC

Při realizaci filtrů RLC pro nízké kmitočty jsou největší problémy s kvalitou, rozměry a cenou cívek. Proto se pro nízké kmitočty s výhodou nahrazují **aktivními filtry RC** (filtry ARC). Jejich základní princip spočívá v ”náhradě” cívky pomocí zapojení *aktivního prvku* (operační zesilovač, tranzistor) se dvěma rezistory a kapacitory. Nahradit cívku můžeme v zásadě dvěma základními způsoby. První spočívá v použití obvodu, který přímo nahrazuje cívku jako dvojpól a vykazuje mezi určitými svorkami příslušnou indukčnost. Druhý princip, jak bude ukázáno dále, nahrazuje cívku nepřímo, pomocí transformace výchozího LRC obvodu na ekvivalentně se chovající strukturu RCD, která indukční prvek neobsahuje, ale na druhou stranu potřebuje *syntetický prvek D* - dvojný kapacitor (kmitočtově závislý negativní rezistor).

26.1.2 Obvody s náhradou cívky

Aktivní filtry ARC, které vycházejí z filtru RLC a využívají k tomu přímou či nepřímou náhradu cívek, mají velké množství různých variant zapojení. Objasnění jejich funkce představuje i řadu různých pohledů na činnost filtru. V oblasti návrhu ARC filtru převažují dva hlavní přístupy. Velmi názorný je takový přístup, který vytváří obvody, vykazující na vstupních svorkách induktivní impedanci. Ty lze využít jako přímou náhradu indukčnosti ve filtru RLC. Zřejmě nejčastější je ale takový pohled, kdy vytváříme celý obvod ARC s přenosovou funkci 2. řádu jako ekvivalenci obvodu LRC 2. řádu, přičemž přímá náhrada cívky v obvodu nemusí být na první pohled zřejmá.

26.1.3 Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností

Stavebními prvky filtrů ARC jsou rezistory, kapacitory a aktivní prvky, jak již bylo naznačeno v předešlém textu. I pro nejjednodušší posouzení funkce, klasifikaci a výběr optimálního zapojení filtrů ARC je potřeba rozumět alespoň základním vlivům reálných vlastností těchto stavebních prvků na výsledné parametry ARC obvodu.

26.1.4 Vliv reálných odporů a kondenzátorů

(C_1 , i C_2) vytvářejí se zbytkem obvodu rezonanční obvod RLC, lze vliv jejich ztrát modelovat sériovým či paralelním spojením ideálního kapacitoru s rezistorem. Tento vliv lze posuzovat v principu shodně jako u filtrů RLC. Při ideálních vlastnostech zbývající části obvodu určuje hodnotu činitele jakosti celkového obvodu činitel jakosti reálného kondenzátoru $Q_c = \frac{1}{tg\delta}$. Jeho hodnota musí být proto podstatně vyšší než výsledná funkční hodnota činitele jakosti celého obvodu (alespoň 10x). Při nižších hodnotách je třeba tento vliv brát v úvahu a pokud je to možné, kompenzujeme jej snížením vnějšího zatlumení tak, aby výsledné Q odpovídalo požadovanému. Je potřebné si uvědomit, že ztráty kondenzátorů může obdobně zvýšit i sériové či paralelní spojení kondenzátorů s parazitními odpory, jako je např. vnitřní odpor zdroje, parazitní vstupní a výstupní odpor aktivních prvků apod.

Část XII

Elektronické napájecí zdroje

Kapitola 27

Spojité regulované napájecí zdroje

Obsah

27.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích	252
27.2 Neřízené usměrňovače	252
27.2.1 Usměrňovače s nesetrvačnou zátěží	252
27.2.2 Usměrňovače se sběrným kondenzátorem (s RC zátěží) . .	252
27.2.3 Usměrňovače s nárazovou tlumivkou (s RL zátěží) . . .	252
27.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí	253
27.3.1 Nelineární (parametrické) stabilizátory	254
27.3.2 Lineární spojité stabilizátory	257
27.4 Násobiče napětí	258
27.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů	258
27.5.1 Pojistky	258

27.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích

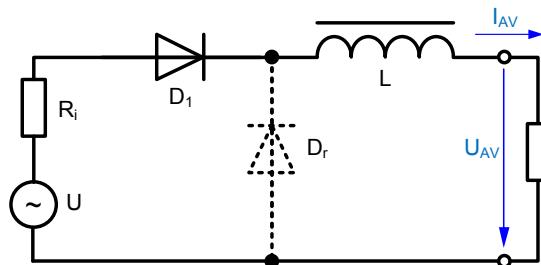
27.2 Neřízené usměrňovače

27.2.1 Usměrňovače s nesetrvačnou zátěží

27.2.2 Usměrňovače se sběrným kondenzátorem (s RC zátěží)

27.2.3 Usměrňovače s nárazovou tlumivkou (s RL zátěží)

Základní schéma zapojení je na obr. 27.1. Obsah vyšších rušivých harmonických produktů lze snížit sériově se zátěží zapojeným obvodem typu hornofrekvenční zádrž. I zde je filtrační účinek závislý na poměru zatěžovací konstanty $\tau_L = \frac{L}{R_L}$ a doby periody $T = \frac{1}{f}$ - je to činitel $K = \tau_L/T$. ($K \uparrow: \tau_L \uparrow, T \downarrow \Rightarrow L \uparrow, R_L \downarrow$). Tyto usměrňovače jsou tedy výhodné pro zátěže typu "malé napětí x velký proud". I tady lze elegantně podpořit velkou hodnotu koeficientu K tím, že obvod budeme napájet signálem o vysokém kmitočtu. Zatím co v případě RC zátěže byl kondenzátor pamětí napětí, tady použitá tlumivka je naopak pamětí proudu. Z toho důvodu je např. jednocestné zapojení s nárazovou tlumivkou fyzikálně nevhodné, protože mohou nastat jen dva krajní (a oba špatné) případy.



Obrázek 27.1: Jednocestný jednofázový usměrňovač RL zátěží.

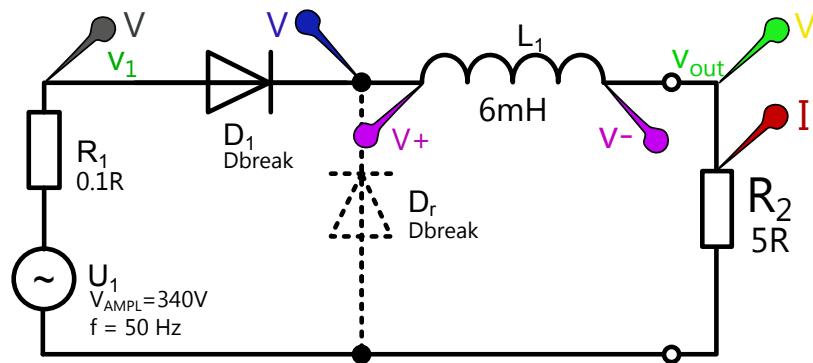
- Bude-li indukčnost veliká (v limitě nekonečná), pak podle Lenzova pravidla udrží proud v obvodu (je celý v sérii) na stálé hodnotě i co do směru, dioda se nemůže vůbec uzavřít a obvod nemůže usměrňovat - nebude mít střídavou složku.
- Naopak při malé hodnotě (proti jakési kritické) dioda zavře, obvod se přeruší a energie magnetického pole cívky (je vázána existencí proudu) se nemůže

uplatnit v překlenutí mezer dodávky energie na výstup. Při dalším otevření diody můžou navíc nastat přechodné děje.

Existuje však velice jednoduchá a plně funkční úprava a tou je doplnění jednocestného usměrňovače tzv. **rekuperační (nulovou) diodou** - D_R (kreslena čárkovaně viz obr. 27.1). Při uzavření hlavní diody D_1 se tlumivka snaží držet proud obvodem ve stejně velikosti a ve stejném směru a tento proud otevře rekuperační diodu D_R .

Mezi filtrací se sběrným kondenzátorem (RC zátěží) a s nárazovou tlumivkou (RL zátěží) je ještě zajímavý rozdíl: filtrace paralelním kondenzátorem pracuje s hyperbolicky se měnící impedancí $X_C = \frac{1}{\omega C}$ a potlačení vysokých čísel harmonických je čím dál tím menší. Obvod se sériovou tlumivkou pracuje s impedancí $X_L = \omega L$ a potlačující efekt lineárně roste. *Zvlnění na RC zátěži má proto obvykle dosti značný obsah vysokých harmonických a je pilovitého průběhu. Zvlnění na RL zátěži je za stejných podmínek K harmonicky čistší a má charakter sinusovky.*

Příklad 27.2.1 Provedte simulaci vyznačených obvodových veličin obvodu na obrázku 27.2 se zadanými hodnotami prvků v programu PSpice¹.



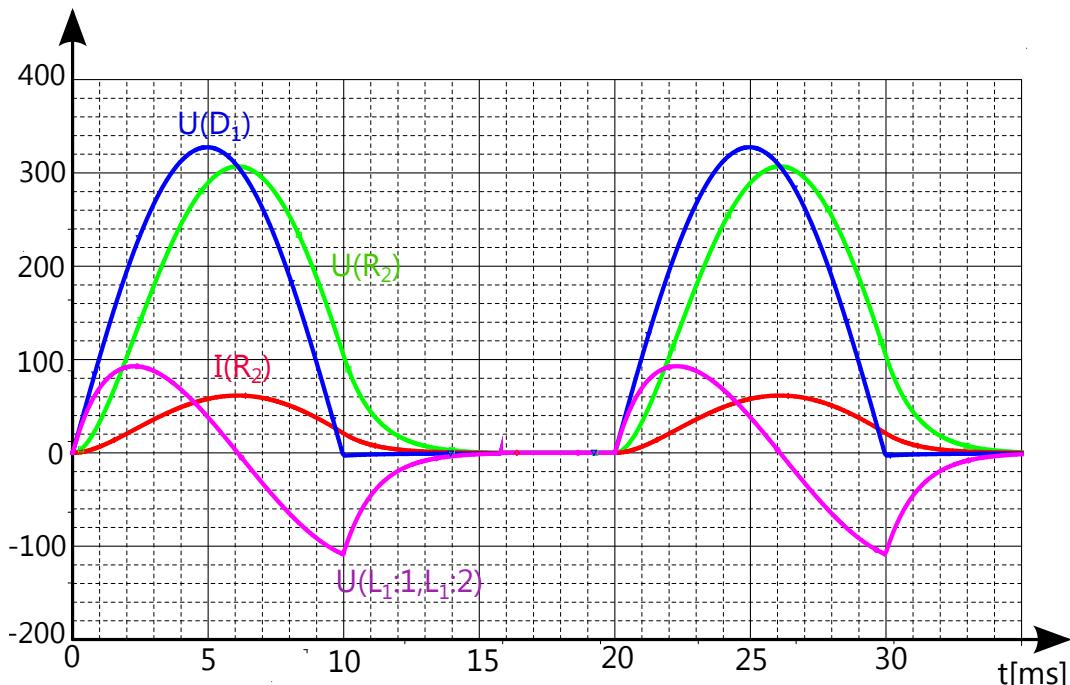
Obrázek 27.2: Neřízený Jednofázový usměrňovač s nulovou diodou. Simulované veličiny jsou vyznačeny barevnými markery.

27.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí

Stabilizátory napětí na svém výstupu konstantní napětí v pokud možno co nejširším rozsahu odebíraného výstupního proudu a dodávaného vstupního napětí [VZ01]

- nelineární (parametrické) stabilizátory napětí,
- lineární spojité stabilizátory napětí

¹Simulace je provedena v programu OrCAD PSpice ver. 16.3



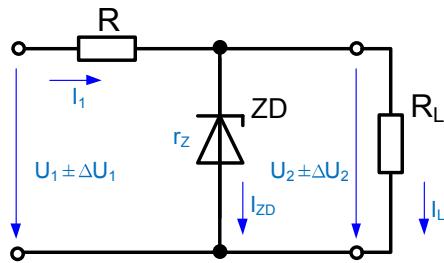
Obrázek 27.3: Průběhy vyznačených veličin jednofázového neřízeného usměrňovače s RL zátěží ($6mH$, 5Ω) a nulovou diodou [ENZ/SIM002]

27.3.1 Nelineární (parametrické) stabilizátory

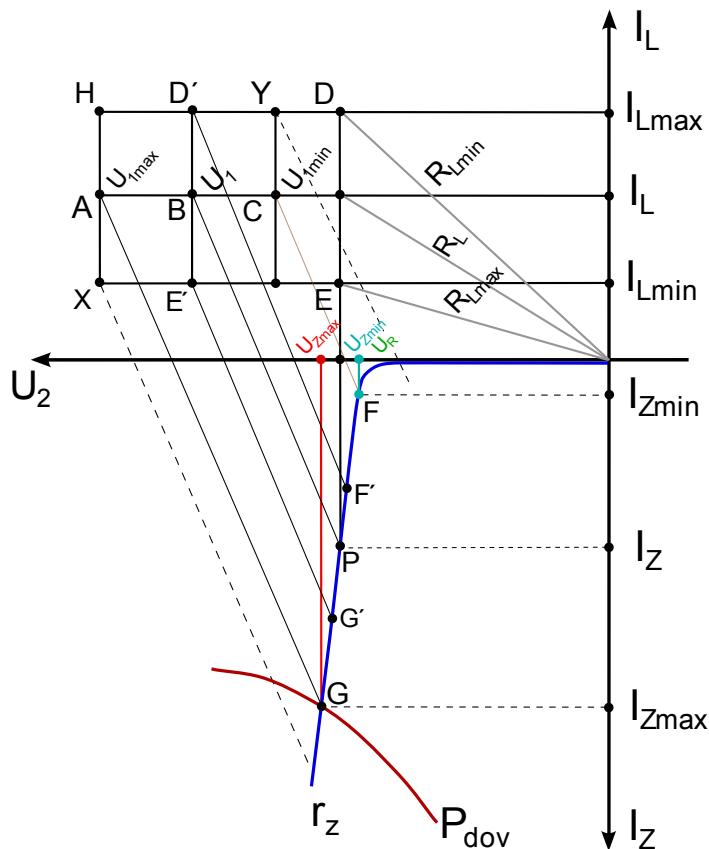
Využívají vlastnosti VA charakteristik některých jako je otevřený PN přechod, Zenerovy diody, termistory a jiné. Pro tyto účely potřebujeme tzv. prvky triodového typu u kterých platí, že *dynamický vnitřní odpor je podstatně nižší jak statický*. Tedy $R_{dyn} < R_{stat}$. Pro naše účely jsou nejčastěji používané *Zenerovy diody* a dvojpólové integrované *napěťové referenční obvody*. Zenerovy diody jsou vyráběny jako malovýkonové (anodová ztráta do 1W) a výkonové (obvykle 10W a více). Pro referenční účely jsou často doplněny dalšími pomocnými kompenzačními prvky. Vlastní princip nelineárního spojitého stabilizátoru (podivný název „parametrický“ nebudeme používat) je velice prostý: obvod dle obr. 27.4 tvorí dělič s horním odporem lineárním a dolním (je paralelně k zátěži) tvořeným popsaným nelineárním odporem triodového typu. Za těchto okolností má tento obvod pochopitelně přenos dynamický podstatně menší jak statický a tedy je to stabilizátor napětí.

Řešení je výhodné v grafické podobě - obr. 27.5. Ve třetím kvadrantu je nakreslena VA charakteristika² Bod B odpovídá zvolenému vstupnímu napětí U_1 a výstupnímu

²Je typická určitým Zenerovým napětím U_z , sklonem pracovní části VA charakteristiky (dynamickým vnitřním odporem r_z) a povolenou anodovou ztrátou P_{dov} . Tato ztráta závisí na způsobu



Obrázek 27.4: Nelineární spojitý stabilizátor napětí.



Obrázek 27.5: Grafické řešení nelineárního stabilizátoru.

proudů I_2 a tedy i velikosti odporu R_L . Úloha může být nyní dána např. kolísáním vstupního napětí od $U_{1\max}$ do $U_{1\min}$ (body A a C), nebo kolísáním zátěže nebo proudu I_2 (body E' a D'). Při současném působení změn vznikne obrazec (přibližně obdélník) X, E, D, H, což je geometrické místo možných stavů obvodů. Na vlastní VA charakteristice prvku pro volený "předrádný" odpor R vzniknou body G, P a F a chlazení.

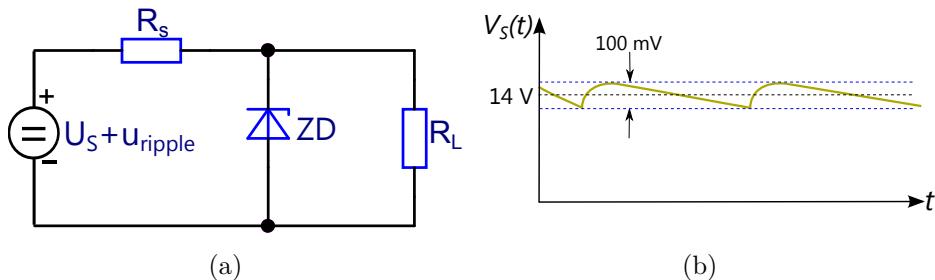
to je grafické řešení. Vidíme, kdy hrozí "zhasnutí" nebo přetížení Zenerovy diody. Projekcí bodu G, P a F na vodorovnou osu zjistíme okamžité hodnoty výstupního napětí stabilizátoru U_2 a jeho kolísání ΔU_2 . Lze snadno odečíst zvládnutelné kolísání vstupního napětí či velikosti zátěže atd. Z obrázku je také vidět, že zlepšení stabilizačního účinku obvodu lze dosáhnout zvětšením vstupního napětí (větší odpor R) nebo výběrem diody s menším dynamickým odporem r_z . Velice vtipná možnost zlepšení přenosových vlastností stabilizátoru je při náhradě lineárního odporu R nelineárním prvkem s pentodovým charakterem VA charakteristiky. Může to být třeba bipolární nebo lépe unipolární tranzistor. Pak vlastně Zenerovu diodu napájíme zdrojem konstantního proudu a to je hojně využíváno v integrovaných stabilizátorech.

Z obr. 27.4 lze snadno odvodit činitel napěťové stabilizace

$$S_u = \frac{\Delta u_{vst}}{\Delta u_{výst}} = \frac{R + r_z \parallel R_L}{r_z \parallel R_L} \cong \frac{R + r_z}{r_z}, \text{ kde } r_z \ll R_L \quad (27.1)$$

Příklad 27.3.1 Vliv nenulového dynamického odporu Zenerovy diody na zvlnění výstupního napětí [Riz03] str. 369.

Zadání: $U_S = 14V; u_{ripple} = 100mV; U_Z = 8V; r_Z = 10\Omega; R_S = 50\Omega; R_L = 150\Omega$.



Obrázek 27.6: K příkladu nenulového dynamického odporu Zenerovy diody na přenos zvlnění ze vstupního napětí na výstupní napětí

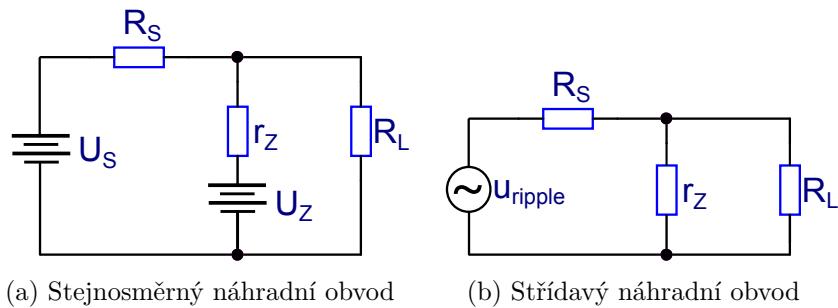
Řešení: Abychom stanovili velikost výstupního napětí, amplitudu zvlnění napětí na zátěži a mohli také určit vliv velikosti dynamického odporu r_z , vyjděme z náhradního lineárního obvodu na obrázku 27.7.

1. Stejnosměrný ekvivalentní obvod:

$$U_L = U_S \frac{R_L \parallel r_z}{R_S + R_L \parallel r_z} + U_z \frac{R_S \parallel R_L}{r_z + R_S \parallel R_L} = 2.21 + 6.32 = 8.53V \quad (27.2)$$

2. Strídavý ekvivalentní obvod:

$$u_L = v_{ripple} \frac{r_z \parallel R_L}{R_S + r_z \parallel R_L} = 0.016V \quad (27.3)$$



Obrázek 27.7: Stabilizátor se ZD lze pro výpočet jeho ss chování v okolí pracovního bodu linearizovat pomocí NLO

Tedy jedna šestina zvlnění vstupního napětí se přenese na výstupní svorky stabilizátoru.

Schopnost stabilizace je horší, čím větší má Zenerova dioda dynamický odpor r_z . Proto musí být r_z výrazně nižší, než hodnoty rezistorů R_S a R_L (viz rov. 27.3).

27.3.2 Lineární spojité stabilizátory

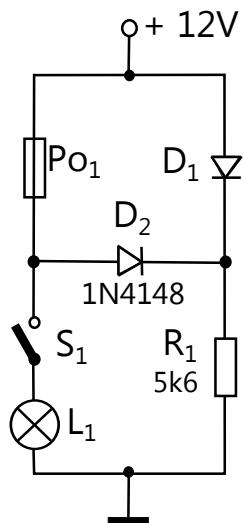
27.4 Násobiče napětí

27.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů

27.5.1 Pojistky

27.5.1.1 Signalizace přerušené pojistky

Rozsvícením svítivé diody D_1 , je uživatel upozorněn na přerušenou tavnou pojistku PO_1 v zařízení napájeném malým napětím. Je-li pojistka v pořádku, je při zapnutém vypínači S_1 na svítivé diodě napětí tvořené úbytky na pojistce a otevřené diodě D_2 , jenž nestačí pro její rozsvícení. Jakmile se však pojistka přeruší, dioda D_1 se rozsvítí. Průchodu proudu spotřebičem přes D_2 při sepnutém vypínači S_1 brání její polarizace.



Obrázek 27.8: Obvod signalizující přerušení pojistky v nízkonapěťovém obvodu.

Kapitola 28

Impulzně regulované napájecí zdroje

Obsah

28.1 Úvod	261
28.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice	261
28.3 DC/DC měniče bez transformátoru	264
28.3.1 Vymezení pojmu a základních požadavků	264
28.3.2 Step-down converter (snižující neinvertující měnič)	268
28.3.3 Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)	270
28.3.4 Buck-boost converter (Invokející měnič se společnou tlumivkou)	271
28.3.5 Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)	271
28.3.6 SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)	271
28.4 DC/DC měniče s transformátorem	272
28.4.1 Jednočinný propustný měnič	272
28.4.2 Jednočinný blokující měnič	280
28.5 Metody regulace spínaných zdrojů	280
28.5.1 Základy impulzní regulace	280
28.5.2 Regulační smyčka	282
28.6 Sbírka zapojení neizolovaných měničů	283

28.6.1 Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem	284
--	-----

28.1 Úvod

Spínané napájecí zdroje plní funkci stejnou jako zdroje se spojitou regulací. Výkonový člen spínacích zdrojů je však zatěžován impulzně, tj. střídavě spínán a rozepínán. Lze tedy využít výhody impulzního režimu, tj. odebírat impulzní výkon podstatně větší, než je trvalý výkon při lineárním režimu regulátoru s týmž výkonovým členem. Spínací zdroje mají obecně větší účinnost než zdroje se spojitou regulací. Jsou výhodné zvláště tam, kde je velký rozdíl napětí na vstupu a výstupu regulátoru a kde jsou požadované malé rozmezry. Impulzní regulace zajistí stabilizované výstupní napětí i pro velké změny vstupního napětí; účinnost zdroje se při tom téměř nemění. I přes větší obvodovou složitost jsou ekonomicky výhodnější, neboť jejich použití vede k podstatné energetické úspoře.

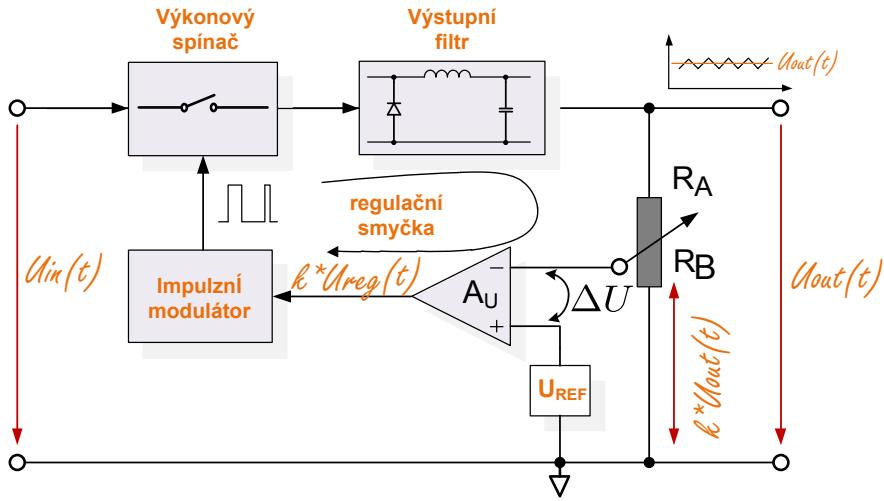
Impulzně regulované zdroje však mají v porovnání se zdroji s lineární regulací i některé nevýhodné vlastnosti, například pomalejší reakci výstupního napětí na rychlé změny zatěžovacího výstupního proudu. Při požadavku malého zvlnění výstupního napětí se nesmí zanedbat vliv impulzního charakteru těchto zdrojů. Impulzně regulované zdroje jsou také zdrojem rušivých signálů, které jsou generovány spínacími prvky.[Ham96, s. 112]

28.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice

Základním principem a současně odlišností impulzní regulace od regulace klasické je v její *nespojitost*. To znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí stabilizováno zásahy regulačního členu pouze v určitých, časově omezených intervalech. Podstata regulačního členu (regulátoru) tedy spočívá v řízení vzájemných časových relací aktivního a pasivního intervalu pracovního cyklu v závislosti na velikosti zesílené regulační odchylky.

Akční člen je tedy řízen dvouhodnotovým signálem, mající význam zapnutí nebo vypnutí výkonové součástky. Následující příklad demonstruje, jak lze tento signál vytvořit pomocí **pulzně-šířkové modulace** v simulátoru **LTS spice**. V simulacích některých topologií spínaných zdrojů bude místo zdroje s lineárně narůstajícím výstupním napětím viz obr. 28.3 použita regulační odchylka.

Srovnáme-li pro názornost klasický a impulzní regulátor na úrovni blokových schémat, vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál **Uref**, zesilovač regulační odchylky **Au**, budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprostě odlišné.



Obrázek 28.1: Základní schéma impulzního regulátoru

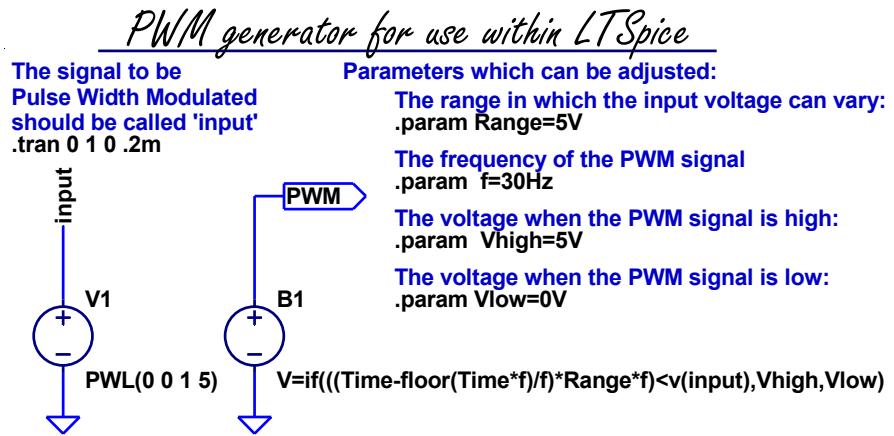
U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpor výkonového regulačního člena v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní. Z toho, jak je již známo, vyplývá velká poměrná výkonová ztráta na regulačním členu a tedy i malá účinnost spojité regulace za běžných provozních podmínek.

Impulzní regulace obr. 28.1 umožňuje výrazně snížit výkonovou ztrátu na regulačním členu. V tomto případě pracuje regulační prvek (tranzistor) jako řízený spínač. Proud jím prochází pouze po určitý interval pracovního cyklu. Přitom okamžitá výkonová ztráta v aktivním (sepnutém) stavu je vzhledem k $U_{CES} \rightarrow 0$ řádově menší, než u lineárního regulátoru. Další předností je, že velikost ztráty v podstatě nezávisí na rozdílu vstupního a výstupního napětí, ale prakticky pouze na kolektorovém proudu tranzistoru.

Možnost použít spínací regulační člen při stabilizaci stejnosměrného napětí je podmíněna jeho vzájemnou součinností s filtračním členem, který na rozdíl od aplikace ve spojitém regulátoru musí mít výrazný akumulační charakter. Uspořádání filtru, který je pro větší výkony vždy typu LC, je podřízeno topologii měniče. Princip činnosti nerozlučně vázané dvojice spínač - akumulační výstupní filtr spočívá v akumulaci energie, která je v aktivním intervalu odebrána ze zdroje, aby mohla být v následujícím pasivním intervalu (spínač vypnut) dodávána z filtru do zátěže [Ham96, s. 121].

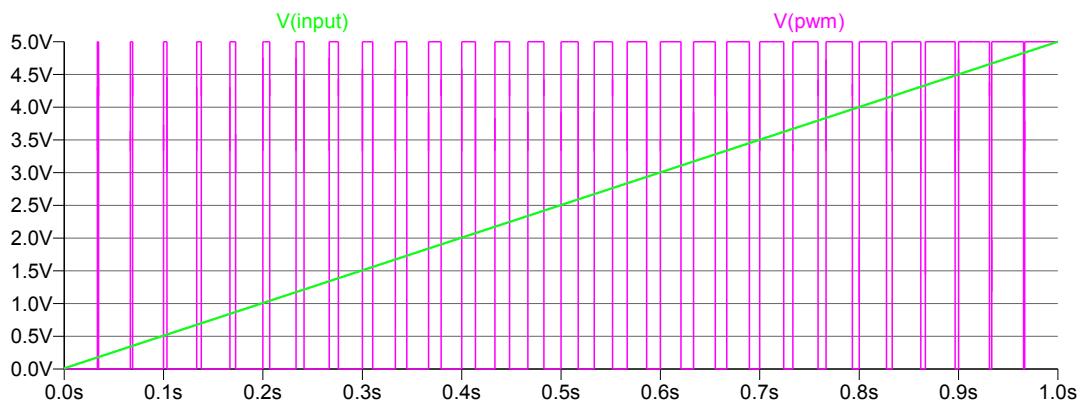
Příklad 28.2.1 Na obr. 28.2 je realizován generátor šířkově modulovaného signálu pro simulátor LTSpice, jenž s výhodou využívá komponenty *B-source*, umožňu-

jící behaviorální popis požadovaného průběhu. Podrobnějším pohledem na zápis



Obrázek 28.2: Realizace PWM generátoru pomocí komponenty B-source (Arbitrary behavioral voltage or current source) v LTSpice (soubor *pwm.asc*)

rovnic dle obr. 28.2, lze dojít k závěru, že zdroj *B1* na svém výstupu vnitří hodnotu parametru *Vhigh*, nebo *Vlow*, podle výsledku rozhodovací funkce *if*. Tj. jeli *Time-floor(Time*f)/f)*Range*f* větší než *V(input)*, bude na výstupu *Vhigh* = 5V, v opačném případě *Vlow* = 0V. Funkce *floor* zaokrouhluje hodnotu svého argumentu na celé číslo (*integer*), což vede na schodovitý průběh a funkce *Time* umožňuje do vztahu vnést okamžitou hodnotu simulačního času. Vzájemný odečtením získáme pilový průběh, kterým se komparuje s okamžitou hodnotou zdroje *V(input)*.



Obrázek 28.3: Výstupní signál *V(pwm)* z PWM generátoru na obr. 28.2 má-li rozhodovací napětí *V(in)* lineární charakter

28.3 DC/DC měniče bez transformátoru

28.3.1 Vymezení pojmu a základních požadavků

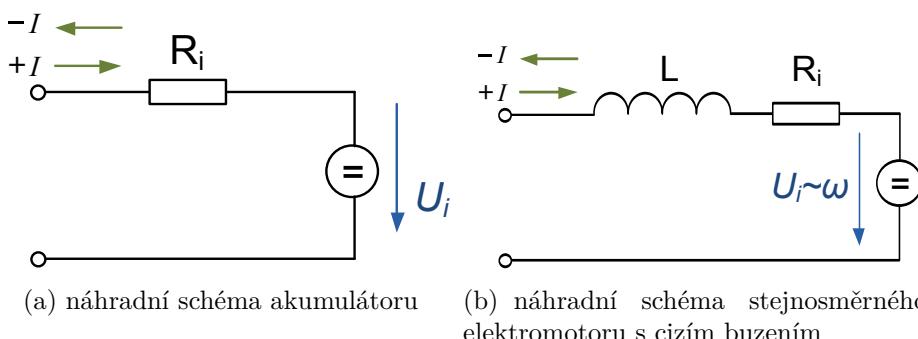
DC - DC měniče jsou obvody sloužící k regulaci elektrické energie, které mění vstupní stejnosměrné napětí U_1 na jiné výstupní stejnosměrné napětí U_2 . Budeme se přitom zabývat měniči tzv. *napěťového typu*, což jsou měniče napájené konstantním vstupním napětím z napěťového zdroje, nikoliv proudem, z proudového zdroje. V této kapitole se omezíme pouze na měniče bez transformátoru, které tedy neumožňují galvanické oddělení výstupu od vstupu [NVP99].

Každý měnič sestává z vlastního silového obvodu a řídicí elektroniky (regulačních obvodů). Silové obvody nesmí využívat při regulaci energie rezistorů a proto se mohou skládat jen ze **spínačů** a **akumulačních prvků**, tj. *indukčnosti* a *kapacit*.

28.3.1.1 Napájecí zdroj a zátěž měniče

DC/DC měniče mohou přenášet energii z principu oběma směry. Mohou tedy čerpat energii ze zdroje a dodávat ji do zátěže nebo také opačně energii čerpat ze zátěže a dodávat ji do zdroje. Pojmy zátěž a zdroj je proto nutné chápout v širším slova smyslu.

- Zdrojem s konstantním napětím U_1 , schopným dodávat i akumulovat energii, je akumulátor. Použijeme-li jako zdroj např. usměrňovač se sběrným kondenzátorem, pak není schopen dlouhodobě jímat energii z měniče, tj. dlouhodobě nesmí ve střední hodnotě převládat směr proudu do kladné svorky zdroje (krátkodobě, v okamžité hodnotě, je takový směr možný). Nabíjením sběrného kondenzátoru by totiž rostlo napětí U_1 . Tomu lze zabránit přeměnou dodávané energie na teplo ve vybíjecím rezistoru, či na Zenerově diodě, zapojené



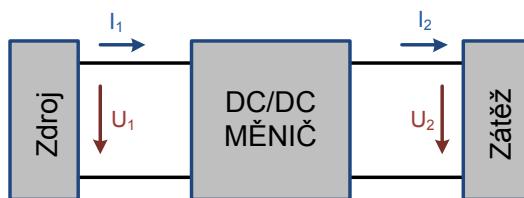
Obrázek 28.4: Aktivní zátěž.

paralelně ke sběrnému kondenzátoru.

- Z hlediska schopnosti spotřeby či dodávky energie, lze rozlišovat zátěž *aktivní* a *pasivní*. Aktivní zátěží je opět např. akumulátor, ale třeba i stejnosměrný motor. Jeho náhradní zapojení, platné v ustáleném stavu, je uvedeno na obr. 1 1). Vnitřní rotační (pohybové) indukované napětí je úměrně otáčkám, proud pak momentu na hřídeli a to včetně znaménka.

Teče-li proud ve střední hodnotě do zátěže ($+I$), pak motor pohání, tj. mění elektrickou energii na mechanickou (pracuje v *motorickém režimu*). Teče-li ze zátěže ($-I$), pak motor brzdí, tj. mění z vnějšku dodávanou mechanickou energii na energii elektrickou (pracuje v *generátorickém režimu*).

28.3.1.2 Pracovní kvadranty



Obrázek 28.5: Označení vstupních a výstupních veličin DC/DC měniče.

Označme si vstupní a výstupní napětí a proud měniče podle obr. 28.5. Podle polarity výstupního napětí U_2 a výstupního proudu I_2 může měnič pracovat ve čtyřech kvadrantech tzv. **VA-roviny** (viz obr. 28.6).

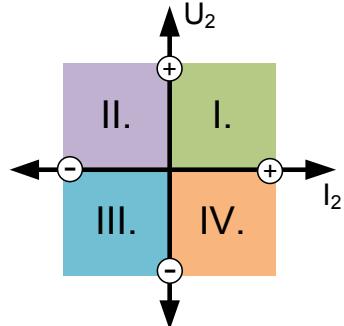
V kvadrantech 1 i 3 dodává měnič energii do zátěže. Je-li zátěží motor, tak pohání. Pasivní zátěže mohou pracovat pouze v těchto kvadrantech. V kvadrantech 2 a 4 dodává aktivní zátěž energii zpět do měniče. Jde-li o motor¹, pak brzdí.

¹Velikost napětí ss. motoru je úměrná otáčkám (rychlosti), polarita je dána směrem otáčení (uvažujeme motor s cizím buzením, např. s permanentními magnety). Velikost proudu je úměrná momentu na hřídeli, polarita je opět dána směrem momentu, tj. zda motor brzdí či pohání. Je třeba si povšimnout, že přechod mezi generátorickým a motorickým režimem mezi kvadranty 2 a 1 nebo mezi 3 a 4 (tj. takový, kdy se nemění polarita napětí, ale jen proudu) vůbec nemusí být na hřídeli motoru opticky pozorovatelný, neboť v dané chvíli přechodu se změní jen znaménko momentu (proudu) a přesto otáčky hřídele mohou být konstantní.

28.3.1.3 Možnosti zapojení silového obvodu

Na první pohled jsou zřejmá určitá omezení:

- Indukčnost nikdy nesmí být zapojena paralelně ke vstupu či výstupu (protože tam je napětí s nenulovou střední hodnotou).
- Kapacita nikdy nesmí být zapojena do série se vstupní nebo výstupní svorkou měniče (protože tudy prochází proud s nenulovou střední hodnotou).
- Jako akumulační prvek nelze použít samostatně kapacitu, není-li v obvodu použita ještě indukčnost (protože by v měniči napěťového typu docházelo k nepřípustnému nárazovému nabíjení kondenzátoru zkratovým proudem). Čili měnič napěťového typu musí obsahovat alespoň jednu indukčnost.
- Žádný spínač nesmí zkratovat vstup ani výstup měniče.



Obrázek 28.6: Pracovní kvadranty ve VA rovině.

28.3.1.4 Nejjednodušší měniče s jediným akumulačním prvkem

Pro výchozí představu, vysvětlující princip činnosti, vytvoříme silový obvod měniče ze dvou prvků. Bude to indukčnost L a ideální přepínač. Vezmeme-li v úvahu omezení z kap. 28.3.1.3, existují podle obr. 28.7 jen tři způsoby, jak takový měnič zapojit [NVP99].

Označme střední hodnotu napětí mezi společným uzlem přepínače 3 a zemí jako U_x . Předpokládejme, že přepínač je ovládán periodickým signálem s periodou T a s nastavitelnou strídou, takže po dobu t_1 spojuje svorky 3 - 1 a po dobu $t_2 = T - t_1$ pak svorky 3 - 2. Popišme nyní nejzákladnější vlastnosti tří měničů z obr. 28.7.

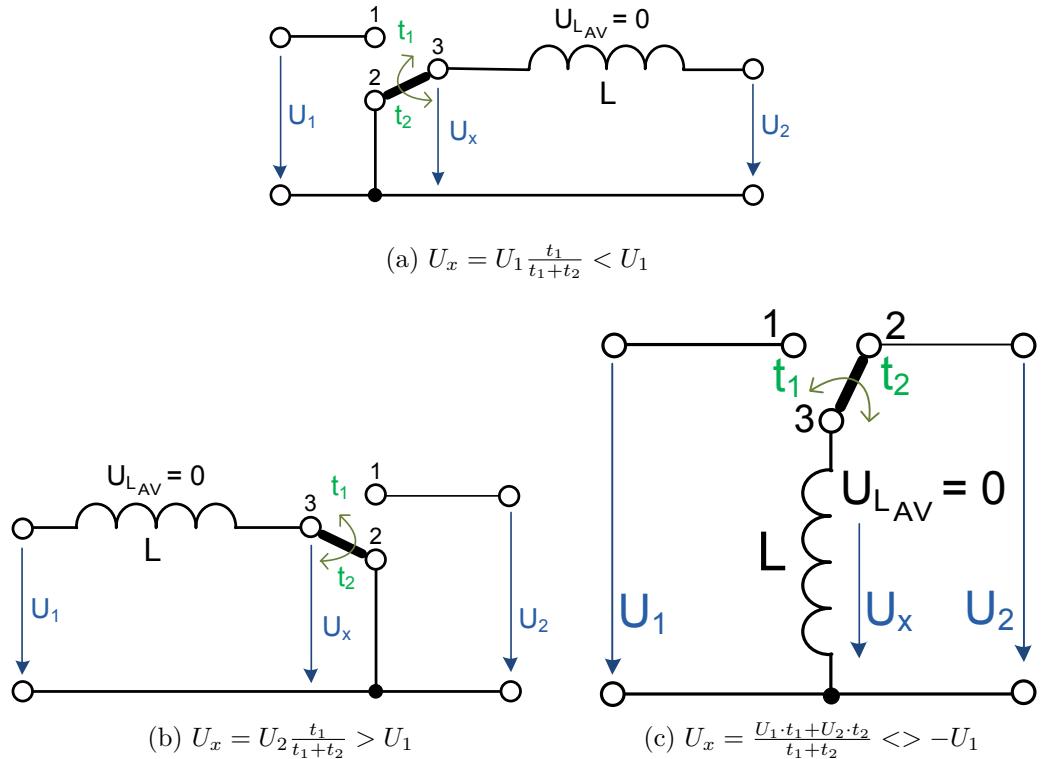
1. Střední hodnota U_x na obr. 28.7(a) musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (28.1)$$

Výstupní napětí je rovno U_x , neboť střední hodnota napětí na indukčnosti L musí být nulová. Platí proto:

$$U_2 = U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (28.2)$$

Výstupní napětí je vždy menší než vstupní a má stejnou polaritu. Jde tedy o měnič *snižující* a *neinvertující*. Jeho jiné názvy jsou: **step-down, chopper**,



Obrázek 28.7: Principiální schémata DC/DC měničů s jediným akumulačním prvkem.

buck, propustný měnič. Možné pracovní kvadranty jsou 1 a 2. Čili měnič je schopen dávat napětí U_2 jediné polarity, ale proud I_2 muže téci oběma směry (je-li to umožněno - aktivní zátěž).

2. Střední hodnota U_x na obr.28.7(b) musí vzhledem k činnosti přepínače být:

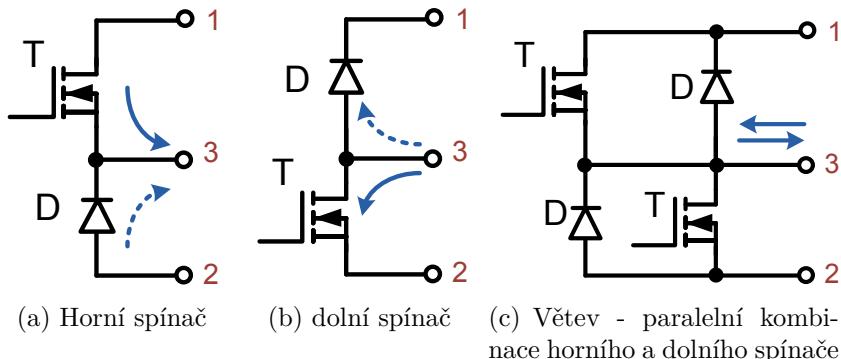
$$U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1 \quad (28.3)$$

Vstupní napětí U_1 je rovno U_x (nulová střední hodnota napětí na indukčnosti L). Odsud pro U_2 platí:

$$U_2 = U_1 \frac{t_1 + t_2}{t_1} > U_1 \quad (28.4)$$

Střední hodnota výstupního napětí je vyšší než vstupní napětí a má stejnou polaritu. Jde tedy o *zvyšující* a *neinvertující* měnič. Jiný název je měnič **step-up, boost**. Možné pracovní kvadranty² jsou opět 1 a 2.

²Měnič 28.7(a) pracující v kvadrantu 1 je měničem 28.7(b) pracujícím v kvadrantu 2. Naopak 28.7(a) v kvadrantu 2 je 28.7(b) v kvadrantu 1. Čili 28.7(a) a 28.7(b) je vlastně týž obvod, pouze zaměňuje vstup a výstup.



Obrázek 28.8: Horní a dolní spínač.

3. Střední hodnota U_x na obr. 28.7(c) musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1 \quad (28.5)$$

Protože U_x je střední hodnota napětí na indukčnosti L, musí platit $U_x = 0$ tj.

$$U_1 = -\frac{t_1}{t_2} U_1 <> -U_1 \quad (28.6)$$

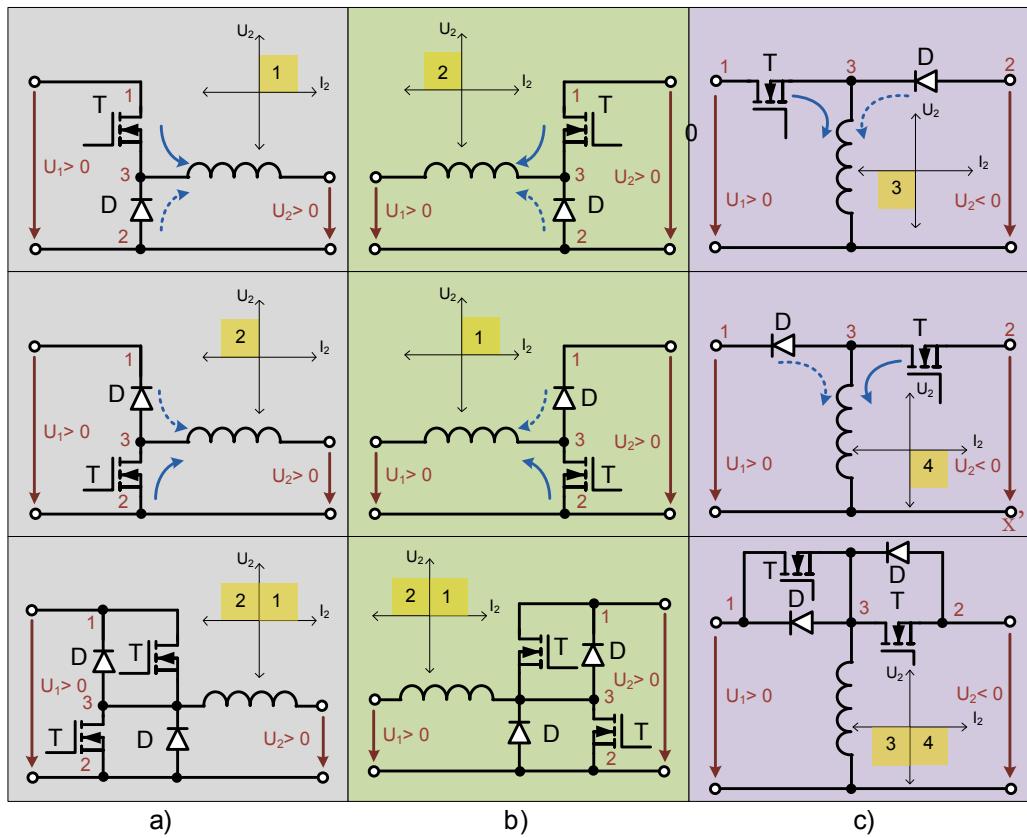
Výstupní napětí má opačnou polaritu než vstupní, jde tedy o měnič *invertující*. Velikost výstupního napětí může být větší i menší než vstupní. Vžité názvy jsou měnič **buck-boost**, měnič se společnou tlumivkou, blokující měnič. Možné pracovní kvadranty jsou 3 a 4.

28.3.1.5 Prakticky realizované silové obvody

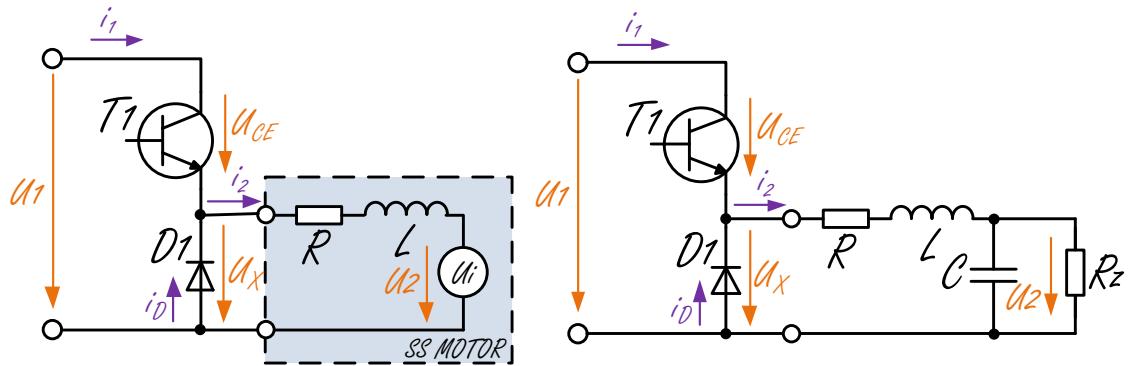
Kap. 28.3.1.4 ukazuje, že elektronicky ovládaný přepínač tvoří základní stavební kámen každého měniče. Tyto přepínače se ve skutečných obvodech realizují pomocí tzv. horních a dolních spínačů, což jsou *trojpóly* podle obr. 28.8.

28.3.2 Step-down converter (snižující neinvertující měnič)

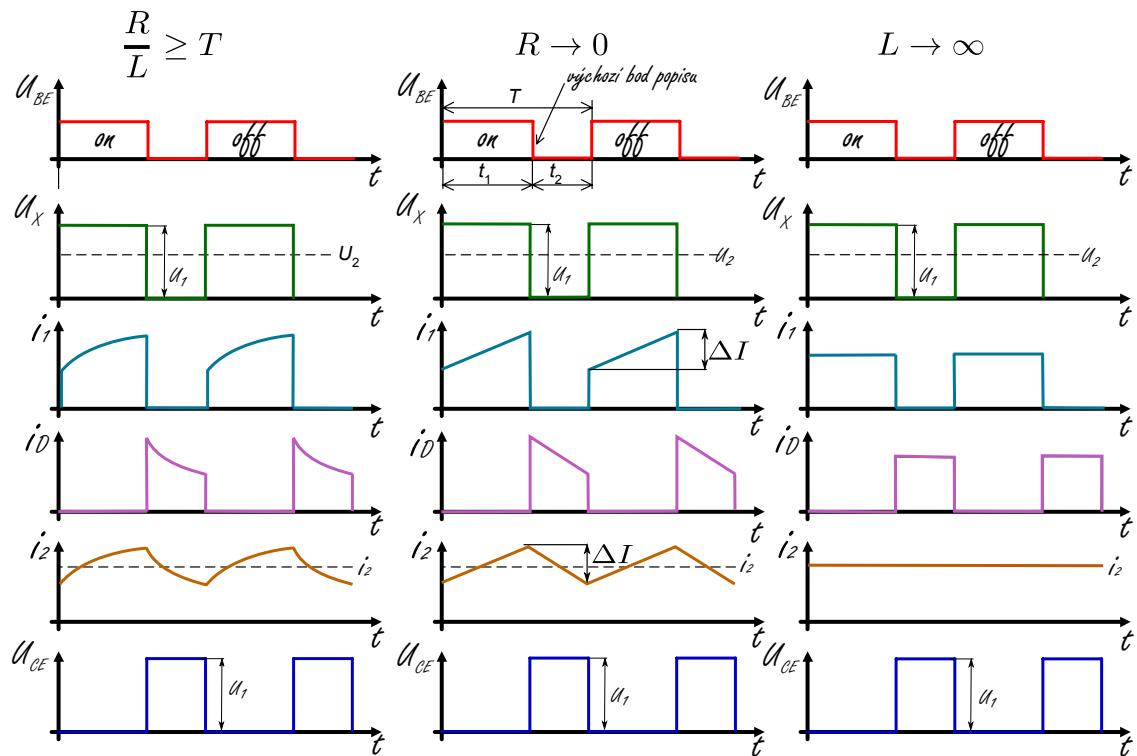
Jedná se o měnič s horním spínačem. Další jeho používané názvy jsou: propustný měnič, chopper, buck. *Pracuje v 1. kvadrantu.*



Obrázek 28.9: Skutečné silové obvody měničů z obr. 28.7 a jejich pracovní kvadranty:
a) měnič snižující neinvertující (step-down), b) měnič zvyšující neinvertující (step-up), c)
měnič invertující (buck-boost)

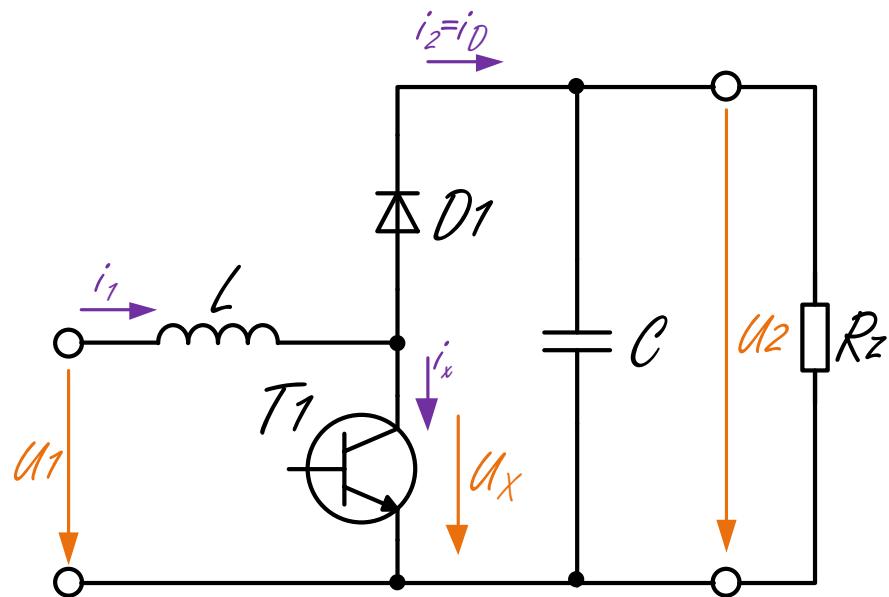


Obrázek 28.10: Snižující měnič pracující v prvním kvadrantu s aktivní zátěží typu stejnosměrný motor nebo s LC filtrem



Obrázek 28.11: Průběhy napětí a proudů snižujícího měniče

28.3.3 Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)



Obrázek 28.12: Zvyšujícího měnič pracující v prvním kvadrantu - Schéma zapojení

28.3.4 Buck-boost converter

(Invertující měnič se společnou tlumivkou)

28.3.5 Cuk converter

(Měnič se společným kondenzátorem)

28.3.6 SEPIC converter

(Single-ended primary inductor converter)

28.4 DC/DC měniče s transformátorem

Základní popis DC/DC měničů bez transformátoru, provedený v kap. 28.3, platí i pro měniče s transformátorem. Doplňním vhodně zapojeného vf. impulsního transformátoru je umožněno galvanické oddělení výstupního a vstupního napětí a transformaci napětí a proudů. Nejčastěji se v praxi setkáme s transformátorovými verzemi měniče propustného z kap. 28.3.2 a měniče blokujícího z kap. 28.3.3 Existuje i transformátorová verze měniče Čukova z kap. 28.3.5.

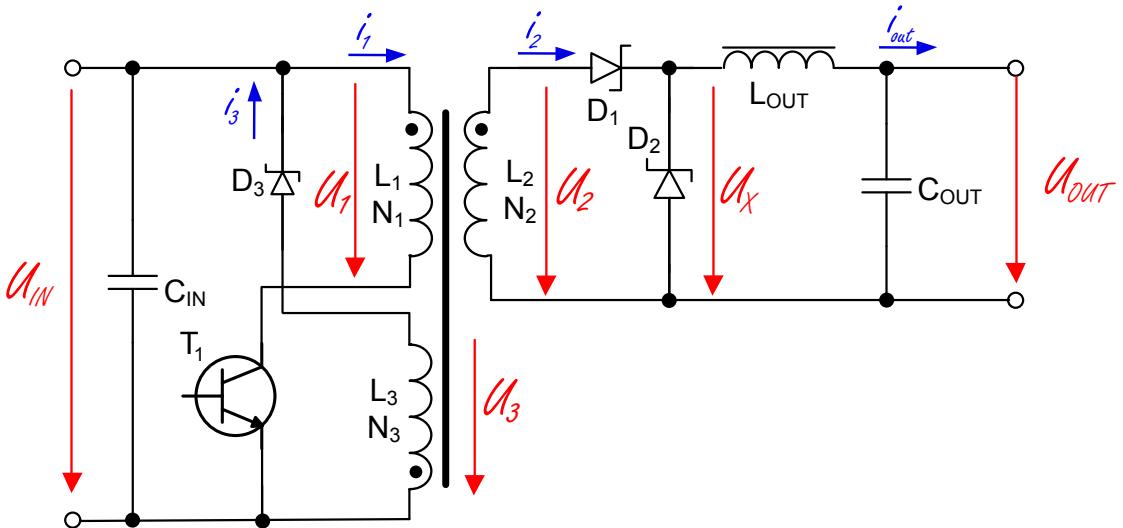
Snižující měnič z kap. 28.3.2 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič propustný**, neboť díky transformátoru lze převodovým poměrem zajistit výstupní napětí i vyšší než vstupní (názvy „*snižující měnič*“ a „*step-down*“ by tedy byly zavádějící). Princip činnosti však v hrubých rysech zůstává stejný.

Invertující měnič se společnou tlumivkou z kap. 28.3.4 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako měnič blokující, neboť díky transformátoru lze vyrobit napětí libovolné polarity (název „*invertující měnič*“ proto pozbývá výstižnosti).

Základní stavební kameny měničů bez transformátoru tj. horní spínač a dolní spínač (kap. 28.3.1.5) tvoří základ i u měničů s transformátorem, i když v zapojeních jsou tranzistor a jeho protilehlá dioda *rozděleny* tím, že je tranzistor na primární straně a dioda na sekundární. Použití transformátoru navíc vyžaduje demagnetizační obvody (zajištění nulové střední hodnoty primárního napětí) a další výstupní usměrňovací diodu (diody). To vše vede k tomu, že transformátorové měniče jsou *jednokvadrantové*. Výstupní napětí má jedinou možnou polaritu a výstupní proud jediný možný směr takový, že zátěž se chová vždy jako spotřebič, nikoli jako generátor.

28.4.1 Topologie Forward (Jednočinný propustný měnič)

Již z označení vyplývá, že k přenosu energie ze vstupního do výstupního obvodu dochází v aktivním intervalu 0 až δT , během něhož se současně akumuluje energie v magnetickém poli tlumivky L_{OUT} . Po dobu zbývající části periody $(1 - \delta)T$ je tlumivka od transformátoru oddělena a na výstup dodává energii nahromaděnou v magnetickém poli. Vzhledem k *blokujícímu měniči* je zde výhoda účinného LC filtru tvořeného tlumivkou a výstupním kondenzátorem C_{OUT} po dobu celého pracovního cyklu. Ve srovnání s blokujícím měničem je tedy možné dosáhnout řádově menší dynamické odchylky $\Delta U_{OUT}(t)$. Navíc proud tekoucí L_{OUT} , skládající se z ustálené složky I_{OUT} a pilovitého průběhu Δi_L má spojitý charakter v průběhu celé periody T .



Obrázek 28.13: Propustný měnič s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

28.4.1.1 Popis činnosti

Nyní se věnujme podrobnějšímu rozboru funkce propustného měniče. Interval δT začíná **sepnutím tranzistoru** T_1 kladným impulzem z řídicích obvodů do jeho báze [Ham96, s. 131], které přivede vstupní napětí na primární vinutí N_1 . V kapitole 21.4.1 byl odvozen vztah 21.17 pro magnetizační tok v jádře transformátoru. Pro nynější případ platí $u_1(t) = U_{in}$. Pak 21.17 nabude tvaru [NVP99, s. 104]:

$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{N_1} U_{in} t \quad (28.7)$$

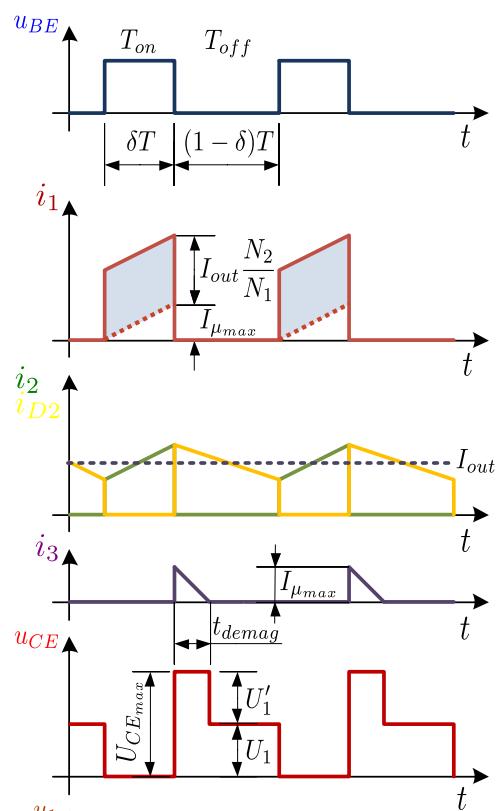
Takže po zapnutí tranzistoru tok lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci doby zapnutí δT bude mít své maximum

$$\Phi_{\mu_{max}} = \frac{1}{N_1} U_{in} \delta T \quad (28.8)$$

Během doby δT bude sekundární napětí $u_2(t)$:

$$u_2(t) = N_2 \frac{\Phi_\mu(t)}{dt} = \frac{N_2}{N_1} U_{in} = U_2 \quad (28.9)$$

Čili během doby δT je sekundární napětí konstantní. Protože jde o kladné napětí, je



D_1 otevřená, D_2 zavřená a výstupní proud I_{out} musí téci ze sekundárního vinutí transformátoru.

Kolektorovým obvodem a primárním vinutím N_1 teče proud i_{prim} . Propustně polarizovanou diodou D_1 prochází transformovaný vstupní proud přes L_{out} do zátěže a výstupního filtračního kondenzátoru C_{OUT} . Tento sekundární proud i_2 se časem lineárně zvětšuje od určitého $I_{L_{min}}$ a zároveň se lineárně zvětšuje také proud i_1 , závislého na převodu transformátoru. Z kapitoly 21.4.1 víme, že primární proud zatíženého transformátoru bude mít hodnotu

$$i_1(t) = i_\mu(t) + I_2 \frac{N_2}{N_1} \quad (28.10)$$

Pro magnetizační proud $i_\mu(t)$ přitom platí vztah (21.21). V našem případě je $u_1(t) = U_{in}$ a proto tento vztah dostane konkrétní podobu:

$$i_\mu(t) = \frac{U_1 t}{L_1} \quad (28.11)$$

Vidíme, že stejně jako tok $\Phi_\mu(t)$ tak i magnetizační proud $i_\mu(t)$ lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci δT má magnetizační proud své maximum:

$$i_{\mu_{max}}(t) = \frac{U_1 \delta T}{L_1} \quad (28.12)$$

Během doby δT je odebírána energie ze zdroje U_{in} (složka $I_{out} \frac{N_2}{N_1}$ primárního proudu) a dodávána do zátěže.

Nyní vypneme tranzistor T_1 . Proud $i_1(t)$ musí téměř skokem zaniknout. V jádře ale existuje na konci doby δT magnetický tok $\Phi_{\mu_{max}}$, odpovídající proudu $I_{\mu_{max}}$. Celková energie magnetického pole v okamžiku vypínání tranzistoru činí $\frac{1}{2} L_1 I_{\mu_{max}}^2$. Proud primárního vinutí je tranzistorem násilně přerušen.

Předpokládejme nejdříve, že neexistuje demagnetizační vinutí N_3 . Pak by při skokovém zániku primárního magnetizačního proudu stejně prudce zanikl i s ním svázaný tok $\Phi_{\mu_{max}}$. Pokles toku s obrovskou (teoreticky nekonečnou) strmostí $-\frac{d\Phi}{dt}$ způsobí vznik

napěťového Diracova impulsu, opačné polarity oproti stavu v době δT , kdy tok narůstal. Tímto impulsem, přičteným k napětí U_1 , je napěťově namáhán zavírající se tranzistor. Přitom se celá energie $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}$ přemění na křemíkovém čipu v teplo a je přičinou jeho neodvratné destrukce. U reálného tranzistoru je velikost napěťového impulsu vždy omezena průrazným napětím tranzistoru. Nikdy totiž není tranzistor natolik pomalý, že by omezujícím faktorem byla malá strmost $-\frac{di_C}{dt}$ zániku kolektorového proudu během vypínání. Destrukční energetické účinky však zůstávají v každém případě zcela ekvivalentní.

Aby popsaná situace nenastala, je zde demagnetizační vinutí N_3 . Děj pak bude vypadat takto: Po vypnutí tranzistoru T_1 se opravdu na primárním vinutí objeví napětí U'_1 opačné polarity, než bylo U_1 v sepnutém stavu, viz. obr. 28.14. Toto napětí však bude mít přesně definovanou velikost, kterou „dovolí“ vinutí N_3 . Na tom se totiž objeví také indukované napětí u_3 . Vzhledem k obrácené orientaci vinutí vůči N_1 bude mít záporný pól „na zemi“ a kladný pól na diodě D_2 . Toto napětí by „chtělo“ být opět teoreticky nekonečné, ale D_2 se otevře a pracuje v součinnosti se zdrojem U_1 jako napěťový omezovač, omezující napětí u_3 na velikost U_1 . Celá magnetizační energie $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}$ je vinutím N_3 odevzdána zpět do zdroje. Pak je zřejmé, že napětí indukované v primárním vinutí musí být:

$$U'_1 = u_3 \frac{N_1}{N_3} = U_1 \frac{N_1}{N_3} \quad (28.13)$$

Tento stav, kdy $u_1 = -U_1$ a $u_3 = U_1$, trvá po dobu, než tok $\Phi_\mu(t)$ klesne z počáteční hodnoty $\Phi_{\mu_{max}}$ na nulu. K tomu je třeba konečné doby t_{demag} , neboť U_1 není nekonečné a proto strmost poklesu $\frac{d\Phi}{dt}$ nemůže být nekonečně velká. Velikost U_1 je v této době konstantní a proto klesá tok lineárně. Celý jev se nazývá *demagnetizací jádra*.

Během demagnetizace se předává magnetizační energie jádra zpět do zdroje pomocí proudu $i_3(t)$. Proud $i_3(t)$ je přímo úměrný klesajícímu toku $\Phi_\mu(t)$ takto:

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \int u_3 dt = \frac{1}{L_3} \int \frac{N_3 d\Phi_\mu(t)}{dt} dt = \frac{N_3 \Phi_\mu(t)}{L_3} \quad (28.14)$$

Po skončení demagnetizace (uplynutí t_{demag}) je již magnetický tok nulový, jádro je energeticky neutrální, proto i napětí u_1 , u_2 , u_3 skokem zanikají na nulu. V neutrálním stavu soustava setrvává až do skončení doby $(1 - \delta)T$, tj. do zapnutí tranzistoru.

Pro magnetický tok během procesu demagnetizace musí platit:

$$\Phi_\mu(t) = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{U'_1 t}{N_1} \quad (28.15)$$

Po uplynutí t_{demag} je tok nulový. Položíme-li tedy $\Phi_\mu(t)$ dle (28.15) rovný nule, lze odsud vyjádřit t_{demag} .

$$t_{demag} = \frac{N_1 \Phi_{\mu_{max}}}{U'_1} \quad (28.16)$$

Za $\Phi_{\mu_{max}}$ dosadíme vztah (28.8) a za U_1 vztah (28.13). Tím dostaneme:

$$t_{demag} = \frac{N_3}{N_1} \delta T \quad (28.17)$$

Je zřejmé, že musíme zajistit, aby $(1 - \delta)T > t_{demag}$, jinak by tok ještě nestačil úplně zaniknout a už bychom znova spínali tranzistor. V průběhu dalšího sepnutí by se tok (a magnetizační proud) zvýšil opět o hodnotu $\Phi_{\mu_{max}}$ (resp. $I_{\mu_{max}}$, ale už z nenulové počáteční hodnoty a tak by neustále vzrůstal (během dalších period by se „naintegroval“ teoreticky na hodnotu $\rightarrow \infty$), až by došlo k přesycení jádra a tím k prudkému lavinovitému růstu magnetizačního proudu (neboť by současně klesla indukčnost L_1). Jev by postupoval až do zničení tranzistoru. Z výše uvedeného důvodu musí být maximální střída δ omezena na hodnotu:

$$\delta_{max} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{demag}} \quad (28.18)$$

Dosazením (28.17) za t_{demag} dostaneme:

$$\delta_{max} = \frac{N_1}{N_1 + N_3} \quad (28.19)$$

Výstupní napětí U_{out} je rovno *střední hodnotě napětí* u_X a platí proto:

$$U_{out} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (28.20)$$

28.4.1.2 Proudové a napěťové dimenzování součástek

V době t_{demag} je tranzistor namáhán napětím $U_{CE_{max}}$:

$$U_{CE_{max}} = U_1 + U'_1 = U_1 + \frac{N_3}{N_1} U_1 = U_1 \frac{N_1 + N_3}{N_1} \quad (28.21)$$

- Volíme-li $N_3 < N_1$, je $U'_1 > U_1$ a tedy namáhání $U_{CE_{max}} > 2U_1$. Zato je ale maximální povolená střída $\delta_{max} > 0,5$ a je tedy větší maximální dosažitelné výstupní napětí.
- Volíme-li $N_3 > N_1$, je $U'_1 < U_1$ a je tedy $U_1 < U_{CE_{max}} < 2U_1$. Zato je ale maximální povolená střída $\delta_{max} < 0,5$ a je tedy menší maximální dosažitelné výstupní napětí.

Volba poměru N_3/N_1 proto záleží na tom, co je v dané aplikaci více kritické, zda napěťové namáhání tranzistoru, či co největší dosažitelné výstupní napětí (s neměnným převodem N_2/N_1). V praxi se nejčastěji volí $N_3 = N_1$ z důvodů snadného souběžného (*bifilárního*) vinutí obou cívek - viz později.

- *Proudové a dimenzování T_1 :*

Zanedbáme-li magnetizační proud, pak lze psát, viz. obr. 28.14, pro špičkovou, střední a efektivní hodnotu kolektorového proudu tranzistoru následující rovnice:

$$I_{1_{max}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \quad (28.22)$$

$$I_{1_{av}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (28.23)$$

$$I_{1_{rms}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\delta} \quad (28.24)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_1 :*

$$I_{D_{1max}} = I_{out} \quad (28.25)$$

$$I_{D_{1av}} = I_{out} \delta \quad (28.26)$$

$$I_{D_{1rms}} = I_{out} \sqrt{\delta} \quad (28.27)$$

$$U_{D_{1Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_3} \quad (28.28)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_2 :*

$$I_{D_{2max}} = I_{out} \quad (28.29)$$

$$I_{D_{2av}} = I_{out} (1 - \delta) \quad (28.30)$$

$$I_{D_{2rms}} = I_{out} \sqrt{1 - \delta} \quad (28.31)$$

$$U_{D_{2Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (28.32)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_3 :*

$$I_{D_{3max}} = I_3 = I_{\mu_{max}} \frac{N_1}{N_3} = \frac{U_1 \delta_{max} T}{L_1} \cdot \frac{N_1}{N_3} \quad (28.33)$$

$$I_{D_{3av}} = I_{3_{av}} = \frac{I_3}{2} \delta \quad (28.34)$$

$$I_{D_{3rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_{demag}} \left(I_3 \frac{t}{t_{demag}} \right)^2 dt} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t_{demag}}{T}} \quad (28.35)$$

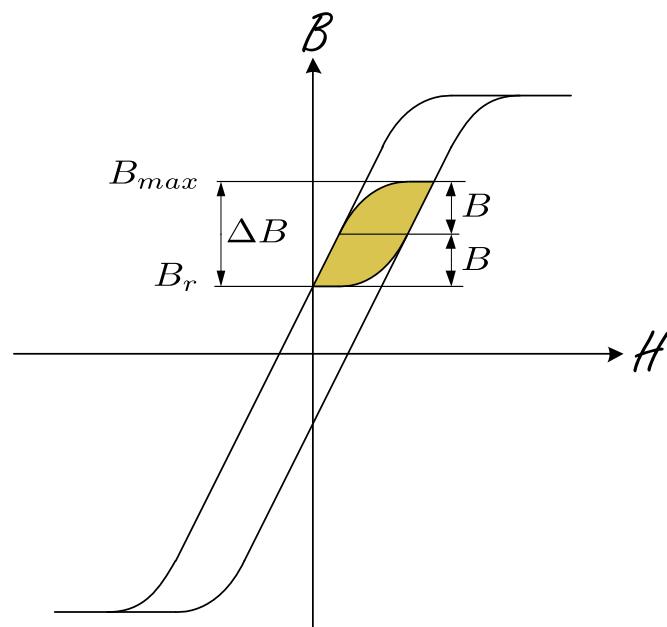
$$U_{D_{3Rmax}} = U_1 + U_1 \frac{N_3}{N_1} \quad (28.36)$$

Poznámka 28.4.1 Všimneme si, že funkce tohoto měniče je kromě transformátoru zcela analogická funkci snižujícího měniče z kap. 28.3.2. Horní spínač je zde rozdělen tak, že tranzistor je na primární straně (pro větší podobnost s obr. 28.10 lze v obr. 28.13 vzájemně zaměnit umístění tranzistoru a primárního vinutí transformátoru, tj. z kladného pólu U_{in} nejprve tranzistor). Dioda D_2 , tvorící s tranzistorem horní spínač, je až na sekundární straně. Dioda D_1 jen odděluje výstupní obvod od sekundárního napětí v době, kdy je záporné, protože toto napětí nemůže mít nenulovou stejnosměrnou složku (stejně tak ani napětí u_1 a u_3).

28.4.1.3 Přehled metod demagnetizace jádra transformátoru

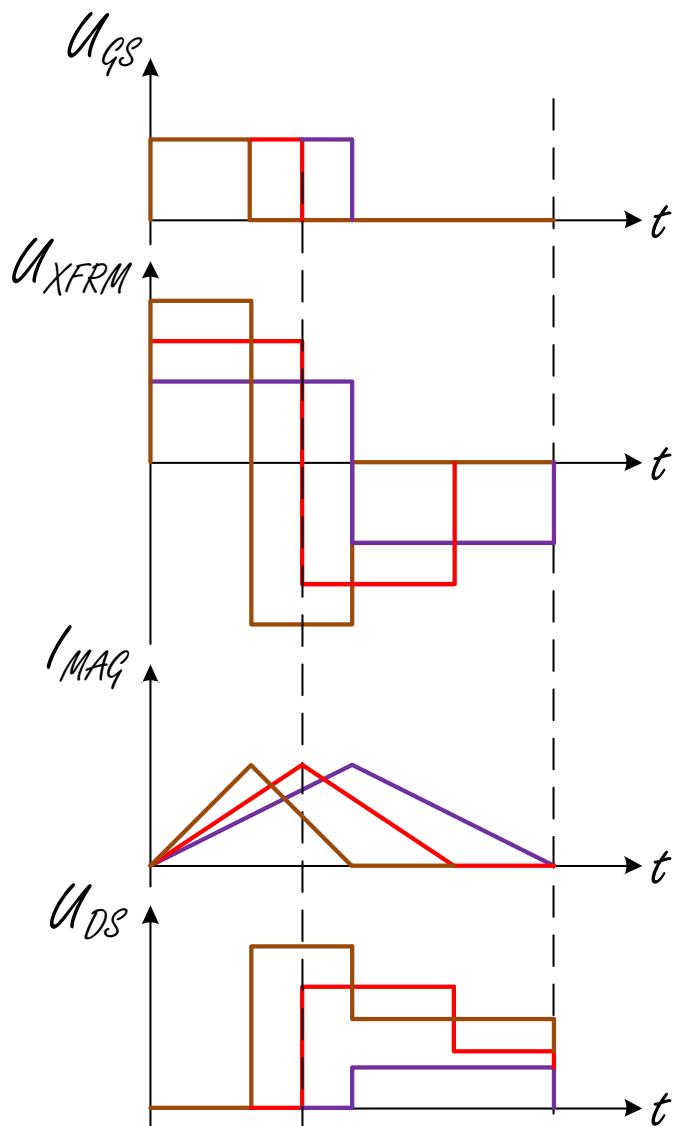
V kapitole 28.4.1.1 byl popsán jeden z možných způsobů, jak demagnetizovat jádro transformátoru, tak aby v dalším pracovním cyklu nedošlo k posunu pracovního bodu magnetického materiálu jádra a následně k jeho přesycení. Velikost magnetizačního proudu je dle vztahu 28.12 dána poměrem napěťové plochy $U_{in} \cdot t_{on}$ přiložené na vinutí primární cívky a hodnotou její magnetizační indukčnosti ($L_{mag} = L_1$)

$$i_{mag} = \frac{U_{prim} \cdot t_{on}}{L_{mag}}$$



Obrázek 28.15: Transformátor jednočinného propustného měniče pracuje v prvním kvadrantu hysterezní smyčky

Pracovní oblast transformátoru je v prvním kvadrantu, jak naznačuje obr. 28.15, neboť polovodičový spínač přikládá mezi svorky primárního vinutí pouze unipolární pulzy. Měnič se také proto nazývá *jednočinný*, protože energie je ze zdroje předávána do zátěže pouze jedenkrát za periodu, v jednom tzv. aktivním běhu, tj. v době t_{on} , kdy je tranzistor sepnut a magnetická indukce se v jádře zvyšuje z hodnoty remanentní indukce B_r o velikost magnetického zdvihu ΔB .



Obrázek 28.16: Vrcholová hodnota magnetizačního proudu je konstantní pro jakékoli velikosti vstupního napětí, neboť regulační smyčka zajistí, aby napěťová plocha $V_{in} \cdot t_{on}$ byla konstantní

Pokud bychom měřili magnetizační proud primárního vinutí, dospěli bychom k průběhům na obr. 28.16, jenž vykazují stejnou vrcholovou hodnotu pro různé hodnoty vstupního napětí. Je to dáno tím, že pokud měnič během měření pracoval v uzavřené regulační smyčce, bude součin $V_{in} \cdot t_{on}$ konstantní a za předpokladu, že magnetizační indukčnost je též neměnná, pak dle předchozí rovnice dospějeme $i_{mag_{max}} = konst.$

28.4.1.4 Jednočinný propustný měnič s aktivním clampingem

28.4.1.5 Vlastnosti měniče

Obecně pro všechny varianty propustných měničů s transformátorem lze říci, že jsou vhodné pro přenos velkých výkonu. Je to dáno principem činnosti, kdy proud podílející se na přenosu výkonu se nepodílí na magnetizaci jádra transformátoru (teče v době t_{on} a to jak na sekundární straně tak i na primární – kompenzace magnetických účinku). Může se proto zvyšovat, aniž by rostlo sycení jádra transformátoru. Toto sycení je určeno pouze integrálem primárního napětí a počtem primárních závitů. Lze proto zvýšením pracovního kmitočtu docílit zmenšení velikosti transformátoru, jak to bylo vysvětleno na konci kap. 21.4.

28.4.2 Jednočinný blokující měnič

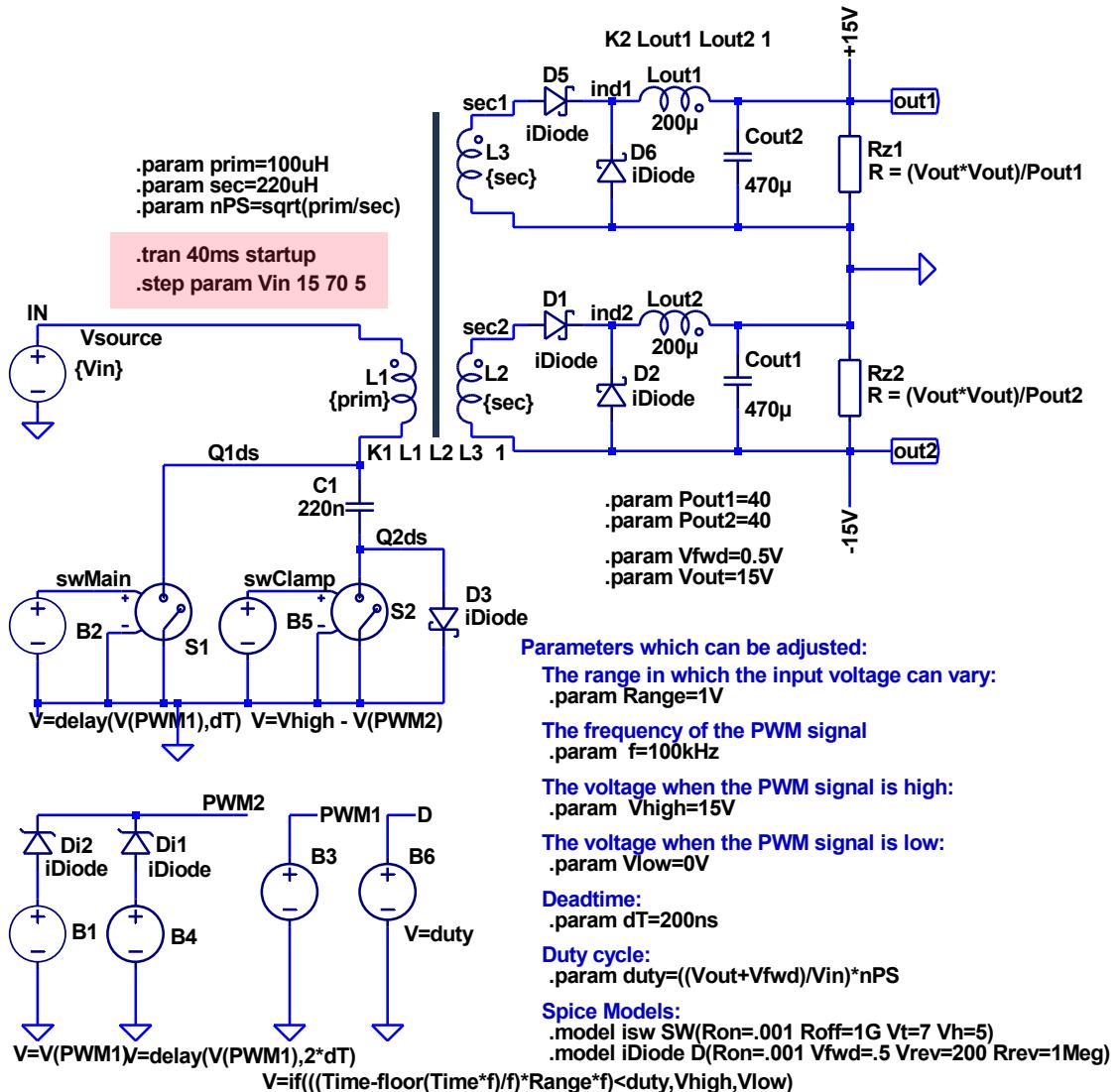
Základem tohoto měniče je „invertující měnič se společnou tlumivkou“ z kapitoly 28.3.4. Všimneme si, že z původního schématu (obr. 8.12) vymizela tlumivka, jejíž funkci nyní zastane transformátor. Princip činnosti je vlastně úplně stejný, pokud si uvědomíme, že jádro nynějšího transformátoru je magnetováno stejně jako jádro tlumivky na obr. 8.12, viz. průběh $i_L(t)$ v obr. 8.12 a průběh $\Phi_\mu(t)$ v obr. 9.8. Jediný rozdíl je v tom, že stejných magnetických poměrů je nyní dosaženo pomocí dvou vinutí místo původního jednoho (v době t_1 pomocí L_1 a v době t_2 pomocí L_2). Tím se dosáhne galvanického oddělení. Vznikl tak transformátor, ovšem režim jeho činnosti je takový, že magnetické účinky v jádře se podobají tlumivce. Režim je zcela odlišný od režimu transformátoru v propustných měničích.

28.5 Metody regulace spínaných zdrojů

28.5.1 Základy impulzní regulace

Základním principem a současně odlišností impulsní regulace od regulace klasické je její nespojitost. To v zásadě znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výs-

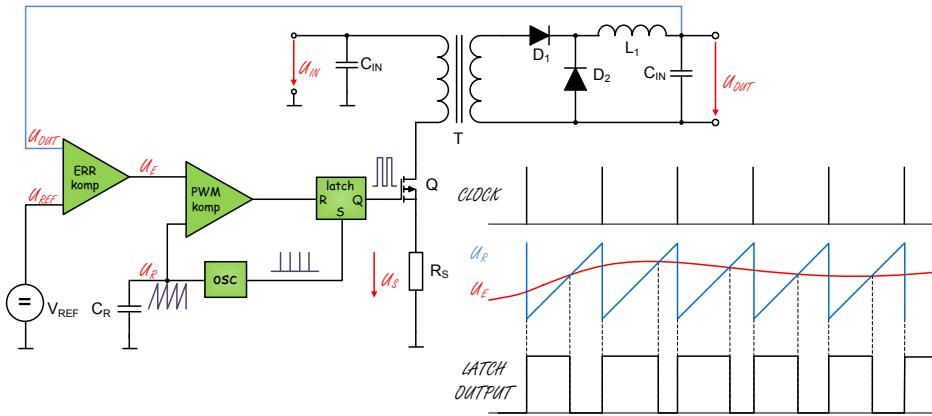
Model of the forward converter with active clamping technique



Obrázek 28.17: Propustný měnič s aktivním clampingem

tupní napětí U_{out} stabilizováno zásahy regulačního členu pouze v určitých, časově omezených intervalech T_a . [Ham96]

Srovnejme pro názornost klasický a impulsní regulátor na úrovni blokových schémat. (obr. 4.1 a obr. 5.9). Vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál U_{REF} , zesilovač regulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na



Obrázek 28.18: Regulátor s napěťovým řízením - Voltage mode control [[Mam99]]

základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprosto odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojitě okamžitý odpor výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní.

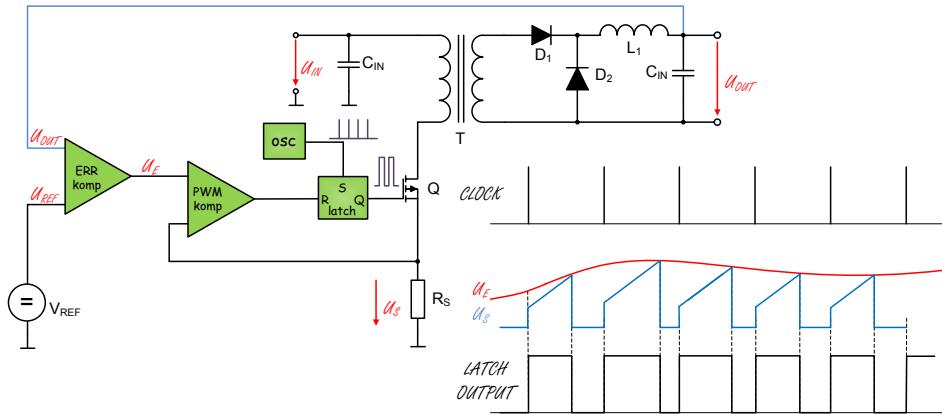
28.5.2 Regulační smyčka

28.5.2.1 Porovnání regulátoru s napěťovým a proudovým řízením

The current mode control method uses two control loops –an inner, current control loop and an outer loop for voltage control. Figure 1 shows a forward converter (buck family) using current mode control. When the switching transistor is on, current through R_{sense} is proportional to the upward ramping filter inductor current. When the ramp voltage V_s reaches V_e (the amplified output voltage error), the switching transistor turns off. Thus, the outer voltage control loop defines the level at which the inner loop regulates peak current through the switch and through the filter inductor. [SLUP075]

Výhody:

- Input voltage feed-forward, resulting in good open-loop line regulation.
- Simplified loop –inductor pole and 2nd order characteristic eliminated.
- Optimum large-signal behavior.
- No conditional loop stability problems.
- Flux balancing (symmetry correction) in push-pull circuits.



Obrázek 28.19: Regulátor s proudovým řízením - Current mode control [[Mam99]]

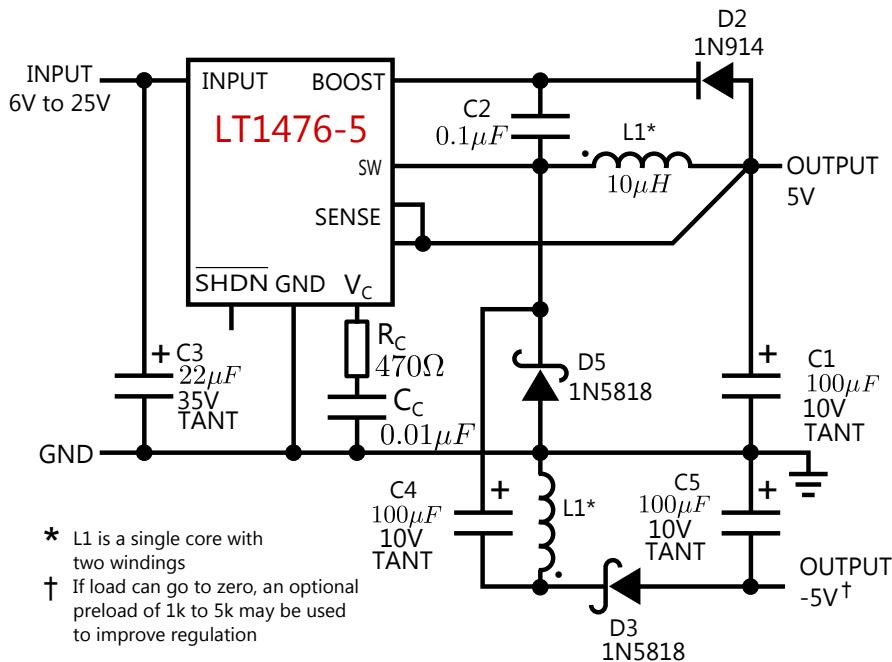
- Automatic pulse-by-pulse current limiting.
- Current sharing of paralleled supplies for modular power systems.
- Less complexity/cost (current sense/amp is not an added complication).

Nevýhody (continuous mode only):

- Peak/avg. current error and instability –slope compensation
- Noise immunity is worse because of shallower ramp.
- Half Bridge runaway
- DC open loop load regulation is worse.
- (1-D) current error in Boost or Flyback circuits.
- Loop irregularities with multiple output buck circuits.

28.6 Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů

Existují dvě možnosti, jak provádět řízení pomocí PWM odlišující se *typem zpětné vazby*, která je buď čistě **napěťovou vazbou** (*voltage mode control*), nebo *napěťovou vazbou s vnitřní proudovou smyčkou* (*current mode control*). V následující diskusi se pokusíme konzistentněm způsobem vysvětlit vlastnosti obou řídících algoritmů (slua119)

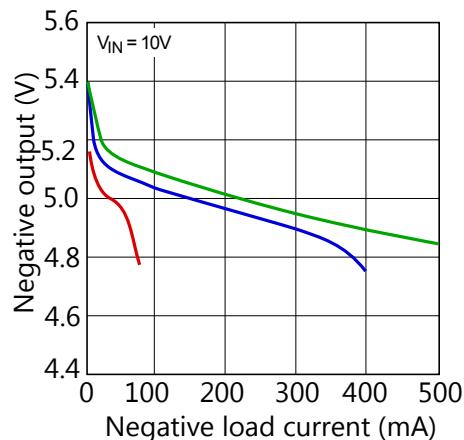


Obrázek 28.20: Spínaný zdroj napětí $\pm 5V$ vystačí s jedinou indukčností s dvojím vinutím. [Nel08]. Linear Technology Corp. (Dual Output Regulator Uses Only One Inductor)

28.6.1 Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem

Toto řešení na obr. 28.20 nabízí spínaný zdroj symetrického napětí za použití několika dalších součástek a induktoru s dvojím vinutím. Základní části zdroje je napěťový regulátor snižující vstupní kladné napětí založený na obvodu LT1376-5 se spínacím kmitočtem 500 kHz a možností zatížení proudem až 1,5 A.

Druhá polovina induktoru L_1 společně s D_3 , C_5 a C_4 je určena pro tvorbu záporného napětí pomocí **SEPIC topologie** - *Single Ended Primary Inductance Converter*. Kondenzátor C_4 vnucuje oběma vinutím stejné napětí. Bez něho pracuje tato část jako blokující měnič (**flyback**), která by sice poskytla $-5V$, ale jen naprázdno se značnou závislostí na zátěži (nedokonalá vazba mezi vinutími).



Obrázek 28.21: Zatěžovací charakteristika záporné větve.

Část XIII

Číslicové elektronické systémy

Kapitola 29

Číslicové systémy a signály

Obsah

29.1 Kombinační logické funkce	288
29.1.1 Realizace kombinačních logických funkcí	288

V číslicovém systému se pracuje se signály, které mají jen konečný počet diskrétních hodnot. Tím se liší od systémů analogových, u kterých jsou signály spojité, tj. mohou ve vymezeném rozsahu nabývat nekonečný počet hodnot. V číslicovém systému může i čas být veličinou diskrétní, tj. signály se mohou měnit jen v určitých okamžicích. Takovéto číslicové systémy se pak nazývají **synchronní** - na rozdíl od systémů **asynchronních**, u kterých ke změnám signálů může docházet kdykoliv. Synchronní systémy jsou podstatně častější, neboť existence přesně stanovených okamžiků změn signálů zavádí "pořádek" do časování signálů v systému a tím usnadňuje jeho konstrukci i výrobu v podobě integrovaných obvodů. Přesné časování je zajištěno hodinovými (taktovacími) impulsy, což je velmi významný signál systému. Číslicové systémy se dělí na dvě skupiny

- **kombinační systémy,**
- **sekvenční systémy.**

U kombinačních systémů jsou výstupní signály závislé pouze na momentálních vstupních signálech. U sekvenčních systémů jsou výstupní signály závislé nejen na momentálních vstupních signálech, ale i na vstupních signálech v minulosti. Systém tedy má *vnitřní paměť*.

29.1 Kombinační logické funkce

Základním pojmem při úvahách o kombinačních systémech představuje pojem kombinační logická funkce. *Kombinační logická funkce* je pravidlo přiřazující každé kombinaci hodnot 0 a 1 přiřazených vstupním proměnným z definičního oboru funkce jedinou hodnotu výstupní proměnné. Pro daný počet vstupních proměnných je těchto funkcí konečný počet. Kombinační logické funkce mohou být úplně neúplně určené. *Úplně určená kombinační logická funkce* je taková funkce, jejíž definiční obor zahrnuje všechny kombinace vstupních proměnných. U *neúplně určené kombinační logické funkce* její definiční obor nezahrnuje některé tyto kombinace. Kombinací se zde rozumí kombinace hodnot 0 a 1 přiřazených jednotlivým vstupním proměnným. Úplně určeným funkcím se někdy říká úplné funkce, funkcím neúplně určeným pak neúplné funkce.

29.1.1 Realizace kombinačních logických funkcí

Nejčastěji se v digitální technice setkáme s těmito způsoby realizace kombinační logické funkce:

- pomocí digitálních integrovaných obvodu typu **NAND**, **NOR** (popř. **AND**, **OR**) a dalších obvodů realizujících základní kombinační logické funkce - např. **AND-OR-INVERT**,

EX-OR atd.,

- pomocí multiplexeru a demultiplexeru,
- pomocí speciálních kombinačních integrovaných obvodu (převodníky kódu, generátory parity, sčítacíky, násobičky a podobně - sem patří i použití multiplexeru a demultiplexeru),
- pomocí pamětí (např. PROM a EEPROM),
- pomocí programovatelných logických obvodu (PLD).

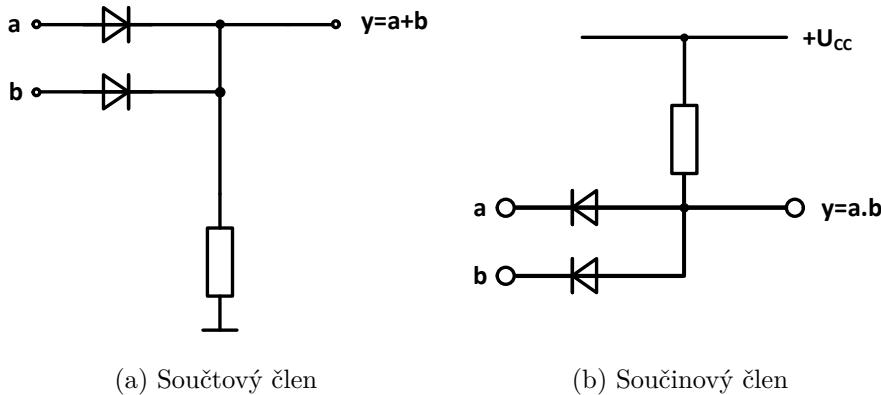
29.1.1.1 Použití multiplexerů a demultiplexerů k realizaci kombinačních logických funkcí

Kapitola 30

Číslicové součástky a technologie

Obsah

30.1 Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	292
30.1.1 Vlastnosti logických hradel	292
30.1.2 Bipolární digitální obvody	292
30.2 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	292
30.2.1 3.3V → 5V	293
30.2.2 5V → 3.3V	296



Obrázek 30.1: Diodová logika

30.1 Rozdělení číslicových integrovaných obvodů

30.1.1 Vlastnosti logických hradel

30.1.2 Bipolární digitální obvody

V bipolární technologii jsou skupiny logických obvodů charakterizovány z hlediska režimu činnosti tranzistorů a tvoří dvě základní skupiny. Jsou to logické IO - s tranzistory pracujícími:

- v saturaci: tranzistor spínán z vypnutého stavu do saturace,
 - v nesaturačním - aktivním režimu: tranzistor přepínán mezi stavem vypnutým (nebo slabě sepnutým) a aktivním (nesaturačním) módem.

V obou skupinách je přepínanou součástkou *tranzistor NPN*. *Komplementární tranzistor PNP* je využíván pouze jako zatěžovací prvek nebo jako proudový zdroj; pro tyto účely se rovněž využívá i rezistor.

30.2 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd

Vyskytne-li se v číslicovém návrhu potřeba použít logická hradla z odlišných napěťových tříd, budeme postaveni před problém jejich vzájemného propojení zachovávající jejich funkčnost. Pro správnou volbu vhodného napěťového přizpůsobení logických hradel z různých rodin, je nutné znát nejen jejich rozhodovací napětí, ale také následující parametry, které jsou uvedeny v tabulce 30.1:

- maximální úroveň logické '0' na vstupu hradla - $U_{IL_{max}}$,
- minimální úroveň logické '1' na vstupu hradla - $U_{IH_{min}}$,
- maximální úroveň logické '0' na výstupu hradla - $U_{OL_{max}}$,
- minimální úroveň logické '1' na výstupu hradla - $U_{OH_{min}}$,

	$U_{OH_{min}}$	$U_{OL_{max}}$	$U_{IH_{min}}$	$U_{IL_{max}}$
5V TTL	2.4V	0.5V	2.0V	0.8
3.3V LVTTL	2.4V	0.4V	2.0V	0.8
5V CMOS	4.7V ($U_{CC}-0.3V$)	0.5V	3.5V ($0.7xU_{CC}$)	1.5V ($0.3xU_{CC}$)
3.3V LVCMOS	3.0V ($U_{CC}-0.3V$)	0.5V	2.3V ($0.7xU_{CC}$)	1.0V ($0.3xU_{CC}$)

Tabulka 30.1: Rozhodovací úrovně napěťových tříd: 5V TTL, 3.3V LVTTL, 5V CMOS, 3.3V LVCMOS

Úroveň logické nuly a jedničky na výstupu určuje konstrukce koncové části digitálního obvodu. Nejčastější provedení jsou na obr. 30.2. Jsou-li různé digitální obvody připojeny na společnou sběrnici, může dojít k situaci, kdy některý z výstupních vývodů bude buzen vyšším napětím než je napájecí napětí příslušného obvodu. I v tomto případě výstupní část digitálního obvodu rozhoduje o výsledném chování.

30.2.1 3.3V → 5V

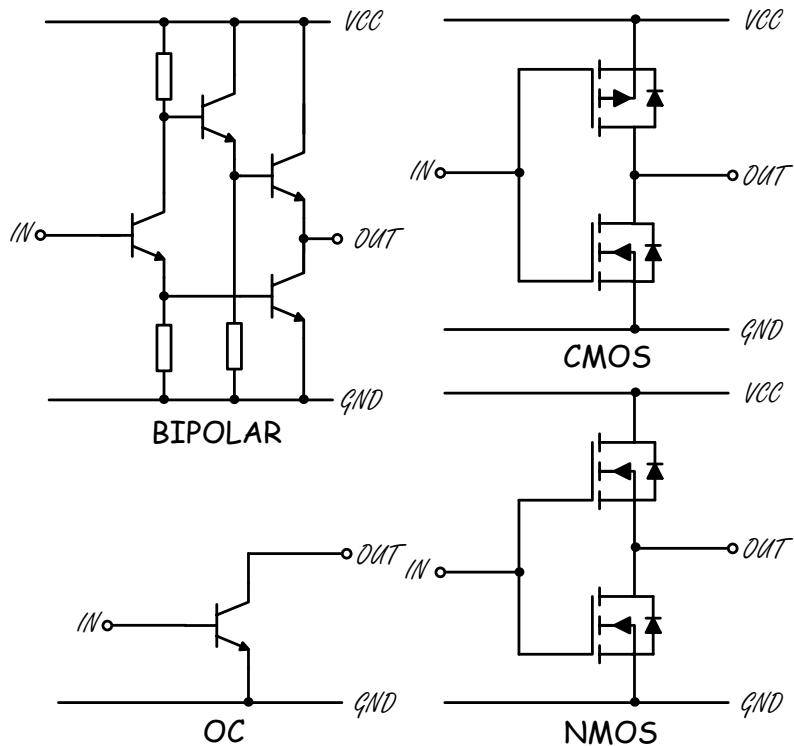
30.2.1.1 Přímé propojení

Nejjednodušším a nejvíce žádoucím způsobem je přímé připojení 3.3V výstupu k 5V vstupu, což lze provést pouze v případě, že jsou splněny následující požadavky:

- $U_{OH}(3.3V) > U_{IH}(5V)$,
- $U_{OL}(3.3V) < U_{IL}(5V)$.

Hodnoty prahových napětí logické nuly a jedničky v předchozí tabulce 30.1 dokládají, že v případě logiky 3.3V LVCMOS a 5V TTL je možné použít přímého připojení.

Pokud oba tyto požadavky nejsou splněny, je třeba použít na rozhraní obou logik přizpůsobovací obvody, popsané v následujících textu.



Obrázek 30.2: Koncové stupně bipolárních, CMOS, NMOS obvodů a obvodů s otevřeným kolektorem

30.2.1.2 MOSFET Translator

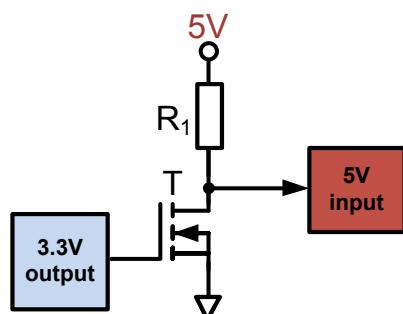
Levné řešení problému vzájemného přizpůsobení logických obvodů odlišných napěťových tříd, pro které platí $U_{OH}(3.3V) < U_{IH}(5V)$ nabízí použití MOSFETu s prahovým napětím

$$U_{GS_{th,max}} < U_{OH_{min}}.$$

Při výběru hodnoty R_1 je třeba vzít v úvahu:

- spínací rychlosť vstupu,
- zvýšení spotřeby díky proudu přes rezistor R_1 .

Při změně logické úrovně '0' → '1' na vstupu 5V logiky je nutné počítat se zpožděním, které je dáno časovou konstantou RC článku, tvořeného rezistorem R_1 a celkovou kapacitou



Obrázek 30.3: $3.3V \rightarrow 5V$: MOSFET typu N

na vstupu hradla. Důsledkem je tedy určitá minimální spínací perioda:

$$T_{SW_{min}} = 3 \cdot R_1 \cdot C_{IN},$$

která je vyšší, čím nižší spotřeby se návrhář snaží dosáhnout ($R_1 \uparrow$). Zpoždění při spínání '1' → '0' má příznivější hodnotu, neboť $R_{dsON} \ll R_1$.

30.2.1.3 Diodový Offset

Hodnoty vstupního prahového napětí 5V CMOS a výstupní prahová napětí pro 3.3V LVTTL a LVCMOS jsou uvedeny v tabulce 30.2

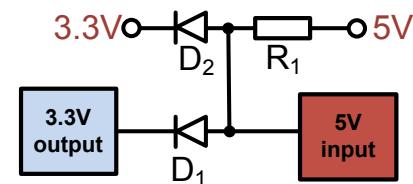
Threshold	5V CMOS IN	3.3V LVTTL OUT	3.3V LVCMOS OUT
High	> 3.5V	> 2.4V	> 3.0V
Low	< 1.5V	< 0.4V	< 0.5V

Tabulka 30.2: Přehled vstupní a výstupních prahových napětí různých logik, chceme-li ke vstupu 5V CMOS připojit 3.3V LVTTL nebo 3.3V LVCMOS.

Všimněme si, že obě prahová napětí vstupu 5V CMOS logiky jsou o volt vyšší než u výstupu 3.3V logiky. Zapotřebí je tedy obvod, který zvyšuje vysokou a nízkou úroveň prahového napětí.

Pokud bychom vytvořili posunutí o alespoň o 0.7V pro obě úrovně prahového napětí, dosáhli bychom vzájemného přizpůsobení. Obvod na obr. 30.4, posuneme hodnotu nízké úrovně výstupního prahového napětí o úbytek v propustném směru diody D_1 (typicky 0.7V), na 1.1V až 1.2V. Úroveň vysokého prahového napětí se nastavuje pomocí pull-up rezistoru a diody D_2 vázané na 3.3V napájení. Výstupní napětí je tedy také posunuto přibližně 0,7V nad 3,3V napájení, tj. na 4,0 až 4.1V, což je vysoko nad 3,5V prahem vstupu 5V CMOS logiky.

Poznámka 30.2.1 Aby obvod fungoval správně, musí být pull-up rezistor podstatně menší než vstupní odpor 5V CMOS logiky, aby se zabránilo snížení výstupního napětí díky efektu vstupního odporového děliče a také musí být dostatečně velký, aby proud tekoucí do 3.3V napájení a výstupu hradla byl v mezích specifikace.



Obrázek 30.4: 3.3V → 5V: Diodový offset

30.2.1.4 Komparátor

Základní funkce komparátoru je následující:

- napětí na invertující (-) vstupu je větší než na neinvertujícím vstupu (+), výstup komparátoru se nastaví do nízké úrovně,
- je-li napětí na neinvertujícím vstupu (+) větší než na invertujícím vstupu (-), výstup komparátoru se nastaví do vysoké úrovně.

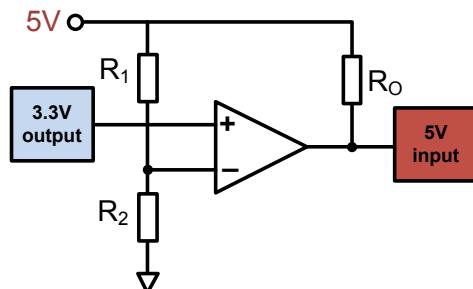
30.2.1.4.1 Výpočet hodnoty odporu R_1

a R_2 : Poměr R_1 a R_2 je závislý na napětí logické nuly a jedničky na výstupu hradla 3.3V logiky. Invertující vstup by měl být nastaven do poloviny mezi prahovými hladinami U_{OL} a U_{OH} . Pro LVCMS je toto napětí rovno

$$1.75V = \frac{3V + 0.5V}{2}.$$

Budeme-li volit velikost R_2 , pak hodnotu odporu R_1 snadno dopočítáme dle následující rovnice:

$$R_1 = R_2 \left(\frac{5V}{1.75V} - 1 \right).$$



Obrázek 30.5: $3.3V \rightarrow 5V$: Komparátor; $R_1 = 1,8k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$

30.2.2 $5V \rightarrow 3.3V$

30.2.2.1 Přímé propojení

Hradla napěťové třídy 5V mají výstupy s typickými prahovými hodnotami $U_{OH} = 4,7V$, $U_{OL} = 0,4V$ zatímco hradla 3.3V LVCMS mají vstupy s prahovými hodnotami $U_{IH} = 0,7 \times U_{DD}$, $U_{IL} = 0,2 \times U_{DD}$. Je-li tedy na 5V výstupu logická nula, bude také správně interpretována 3V vstupem, neboť platí $U_{OL} = 0,4 < U_{IL} = 0,8$. Ani v případě logické jedničky nevzniká žádný konflikt, neboť $U_{OH} = 4,7 > U_{IH} = 2,1$. Pokud je tedy 3V vstup 5V tolerantní, je možné přímé propojení, v opačném případě je třeba použít některou z následujících technik.



Obrázek 30.6: $5V \rightarrow 3.3V$: Přímé propojení

30.2.2.2 Diodový omezovač

Některé digitální obvody mají své vstupy chráněny vnitřními omezovacími diodami tzv. **diode clamp** (obr. ??). Proteče-li těmito diodami větší proud než udávají katalogové hodnoty, může dojít k poškození vstupu, nebo v lepším případě k efektu **latching-up**. Typický 5V výstup má kolem 10Ω , proto chceme-li využít těchto diod, musíme přidat sériový odpor, jenž limituje velikost propustného proudu. Nepříjemným důsledkem je ovšem vzniklý RC článek se vstupní kapacitou hradla C_L , který snižuje rychlosť. Není-li vstup takto chráněn je možné jej doplnit externí diodou dle obr. ??.

Část XIV

Mikroprocesorová technika

Kapitola 31

Procesory AVR

Obsah

31.1 AVR Architektura	302
31.1.1 Strojový cyklus	302
31.1.2 Prefetch a pipelining	302

31.1 AVR Architektura

AVR architektura vychází z koncepce rychle přístupného registrového pole, které obsahuje 32 obecně použitelných registrů délky 8 bitů. Přístup do registrového pole je proveden v jediném strojovém cyklu. To znamená, že během jednoho strojového cyklu lze vykonat jednu aritmeticko-logickou operaci¹

Tato technika, umožňuje vyšší výkon ve srovnání s mikrokontroléry řady 8051, které disponují instrukcemi o délce od 12 do 48 hodinových cyklů, navíc se pro výpočty musí používat akumulátor, který je jen jeden. Registrové pole lze v tomto smyslu chápat jako skupinu akumulátorů.

31.1.1 Strojový cyklus

Strojový cyklus mikrokontrolérů AVR přímo odpovídá hodinovému cyklu. Nedorchází k žádnému dělení hodinových cyklů jako například u mikrokontrolérů řady 8051²

31.1.2 Prefetch a pipelining

Mikrokontroléry AVR používají jednoduchý *předvýběr instrukce* (**prefetch**) umožňující jednofázové zřetězení instrukcí (**pipelining**)

¹To znamená, že oba operandy aritmeticko-logické operace jsou načteny z registrového pole, operace je provedena a výsledek směruje opět do registrového pole v jediném strojovém cyklu

²jeden strojový cyklus obsahuje 12 hodinových cyklů

Část XV

Programovatelné logické obvody

Kapitola 32

Architektura

Obsah

32.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů	306
32.1.1 Historie	306
32.1.2 Obvody typu Simple Programmable Logic Device	310
32.1.3 Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD	315
32.1.4 Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA . .	315
32.1.5 Terminologie	316
32.2 Dynamické parametry PLD	317

32.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů

Programovatelný logický obvod nebo programovatelné logické zařízení, často také PLD (*programmable logic device*) nebo FPD (*Field-Programmable Device*), je elektronická součástka (obvod) používaná pro vytváření digitálních obvodů. Na rozdíl od hradel, registrů a jiných digitálních obvodů není funkce zařízení tohoto druhu v době výroby ještě definovaná. Než může být PLD použito, musí být nejprve naprogramováno.

32.1.1 Historie

Historické kořeny moderních programovatelných polí jsou v prvních programovatelných pamětech typu PROM (*firma Radiation, 1970*) a jejich zákaznický programovatelných verzích EPROM (*Intel, 1971*) a EEPROM (*Intel, 1978*). Paměť PROM lze využít pro realizaci kombinačních logických funkcí tak, že paměť využijeme jako tzv. *vyhledávací tabulku LUT* (angl. *Lookup Table*). V tomto případě přivádíme na adresové vodiče PROM paměti vstupní signálý (proměnné). Obsah paměti PROM vytvoříme tak, že na adresy jejichž hodnota je tvořena vektorem hodnot vstupních proměnných uložíme hodnoty, které jsou tvořeny vektory požadovaných výstupních hodnot. Výstupní datové signály paměti PROM pak reprezentují výstupy kombinanční logiky. Tímto způsobem můžeme např. paměti PROM o velikosti 2 Kb s organizací 256x8 bitů (8 adresových vodičů, 8 datových vodičů), vytvořit programovatelný logický obvod, kterým lze realizovat 8 kombinačních funkcí s 8 vstupními signály (proměnnými). Výhodou takovéto realizace je, že všechny realizované funkce mají stejné zpoždění ze vstupu na výstup a to pro všechny možné kombinace vstupních hodnot. Na principu generátorů logických funkcí pomocí pamětí (LUT) je založena funkce obvodů FPGA.

Permanentní paměti, jako takové, ale neumožňovaly úspornou realizaci logické funkce. Mezi první programovatelné logické obvody lze zařadit obvody PLA (angl. *Programmable Logic Array*), neboť v roce 1970 společnost Texas Instruments - TI podařilo vyvinout maskou programovatelný integrovaný obvod TMS2000, založený na paměti ROAM (angl. *Read Only Associative Memory*) společnosti IBM. TMS2000 disponoval 17 vstupy, 18 výstupy s 8 JK klopnými obvody. Obvod bylo možné programovat modifikací vodivé propojovací masky během výroby (tj. koncový uživatel jej nemohl programovat). Obvody PLA obsahovaly pole hradel AND následované polem hradel OR. Logická funkce tedy vznikala v disjunktivní formě, tj. jako součet součinů. Tento způsob tvorby logických funkce se uchytil a na tomto principu je založena funkce dnešních obvodů architektur SPLD a CPLD. Nicméně se tyto obvody na trhu příliš neprosadily.

Vývoj však pokračoval dál a v roce 1975 přišla na trh firma **Signetics Corporation** s obvody nazvanými **FPLA** - (*Field Programmable Logic Array*), konkrétně se jednalo o obvod 82S100. Po převzetí firmy Signetics firmou **Philips** byl tento obvod označován také jako PLS100. Obvody FPLA tvořilo programovatelné pole AND následované programovatelným polem hradel OR. Tyto obvody však měly poměrně dlouhou dobu přenosu signálu ze vstupu na výstup. Pro návrh obvodů neexistoval žádný jazyk, a tak musel návrhář nastavovat přímo hodnoty jednotlivých programovatelných buňek. Tyto nevýhody spolu s poměrně vysokou cenou způsobili malé rozšíření těchto obvodů.

Dalším významným krokem bylo uvedení obvodů **PAL** - (*Programmable Logic Array*). Tyto obvody navrhla firma **MMI – Monolithic Memories, Inc** v roce 1978. Obvody PAL vycházeli z obvodů FPLA a obsahovaly programovatelné pole hradel AND, které bylo následováno pevným neprogramovatelným polem hradel OR. Ke každému hradlu OR tak bylo možno připojit pouze omezený počet výstupů hradel AND (součinů). Díky tomuto zjednodušení došlo ke snížení doby přenosu signálu ze vstupu na výstup. Oba tyto typy obvodů FPLA i PLA byly totiž založeny na bipolární PROM technologii s programovatelnými pojistkami tzv. *fusible-link*. Programování bylo realizováno vstříknutím dostatečně velkého náboje, který způsobil přepálení vybrané vnitřní pojistky. Zbývající neporušené pojistky se staly součástí implementovaného číslicový obvodu. Pojistky ovšem zvyšují zpoždění šíření signálu v obvodu, zvětšují složitost a ve výsledku i cenu. Počet součinů, které byly připojeny na vstup hradla OR, byl na základě praktických zkušeností stanoven na osm. Velkou výhodou těchto obvodů bylo, že se daly programovat v tehdy již běžných programátorech pamětí PROM. Mezi první obvody řady PAL patří například **PAL16L8** (kombinační výstupy) a **PAL16R8** (výstupy s registry).

Firma MMI dále napsala pro tyto obvody návrhový software, který umožňoval popsat číslicový systém pomocí velmi jednoduchého jazyka ve formě booleovských rovnic a z něj pak vygenerovat výstup, jímž bylo možné obvody PAL naprogramovat. Tím došlo k významnému zjednodušení vlastního návrhu obsahu těchto obvodů. Tento software se jmenoval **PALASM** (*PAL Assembler*) a firma MMI ho zveřejnila ve formě zdrojového kódu napsaného v jazyce **FORTRAN**. Program PALASM umožňoval dokonce softwarovou simulaci navrženého obvodu. Díky funkcím návrhu a simulace lze PALASM označit za první návrhový systém pro PLD obvody. Všechny zmíněné obvody dnes řadíme do první generace PLD obvodů. Za zmínu ještě stojí, že firmy **Signetics Corporation** a **MMI** již mezi dnešními výrobci programovatelných obvodů nenajdeme.

Vývoj v oblasti PLD obvodů pokračoval a postupně se začaly objevovat nové PLD obvody, které řadíme již do druhé generace. V roce 1983 uvedla firma **AMD** (*Advanced Micro Devices*) obvod **PAL22V10**. Tento obvod byl založen na obvodech PAL popsaných v předchozím odstavci, přinesl však jedno významné vylepšení, a to tzv.

výstupní makrobuňku (**OLMC** - angl. *Output Logic Macro Cell*). Tyto obvody bývají označovány jako obvody **PAL** s makrobuňkou. Výstupní makrobuňka byla umístěna na každém výstupu obvodu. Každou makrobuňku bylo možné naprogramovat buď jako kombinační nebo registrový výstup. Dále bylo možné u jakékoliv makrobuňky programovat, zda má být výstup v přímé nebo negované formě. Výstup makrobuňky byl třístavový, ovládaný jedním logickým součinem, což umožňovalo přepnutí makrobuňky z výstupního režimu do funkce vstupu. Tento typ obvodu vyrábělo svého času kromě firmy **AMD** mnoho dalších firem, např. **Cypress Semiconductor**, **Lattice Semiconductor** a **Texas Instruments**.

Všechny dosud zmíněné obvody měly jednu nevýhodu - byly programovatelné pouze jednou (**OTP** - *One Time Programmable*). Díky rozvoje technologie u pamětí **EPROM** se dostala tato technologie i do oblasti **PLD** obvodů a tudíž se na trhu objevili **PLD** obvody, jejichž obsah bylo možné smazat pomocí ultrafialového záření - obvody lze opakovaně mazat a znova programovat.

V roce 1984 vstoupila na scénu firma **DATA I/O** se svým návrhovým systémem **ABEL**, jenž disponoval jazykem vyšší úrovně, určený pro popis číslicových systémů (**HDL** - *Hardware Description Language*), který byl nazván stejně jako návrhový systém, tj **ABEL** - *Advanced Boolean Expression Language*. Jazykem **ABEL** lze popsat číslicový systém pomocí booleovských rovnic, pravdivostní tabulky a stavových automatů, přičemž tyto způsoby je možné kombinovat. Práva na jazyk **ABEL** získala po několika akvizicích firma **XILINX**. Tento jazyk již sedmou revizi a dodnes ho některé současné návrhové systémy podporují (např. Xilinx a Lattice Semiconductor). Pro návrh nových číslicových systémů založených na **PLD** obvodech se však doporučuje používat některý z novějších **HDL** jazyků, např. jazyk **VHDL** nebo jazyk **Verilog**.

Další vývoj **PLD** obvodů pokračoval s nástupem technologie pamětí **EEPROM** a jejím využití v **PLD** obvodech. Této nové technologie bylo využito zejména u **PLD** obvodů označovaných jako **GAL** - *Generic Array Logic*. Obvody **GAL** lze zařadit do třetí generace **PLD** obvodů. Obvody typu **GAL** jsou také zařazovány do třídy jednoduchých programovatelných obvodů (**SPLD**).

Na konci osmdesátých let minulého století nastává v oblasti **PLD** obvodů bouřlivý vývoj. Vývojem a výrobou **PLD** se na konci osmdesátých a začátkem devadesátých let již zabývá mnoho firem a vývoj **PLD** obvodů již nelze od této doby přehledně rozdělit ani stručně popsat. V průběhu tohoto období vznikají nové řady **PLD** obvodů, nazývané **CPLD** - *Complex Programmable Logic Device*. Jmenujme např. alespoň obvody **MACH** firmy **AMD** a dále vznik první řady obvodů **MAX**, kterou společně vyvinula firma **ALTERA** a **Cypress Semiconductor**. Nové obvody v této době na trh uvádí také firma **XILINX** (řady XC7200 a XC7300), **QuickLogic**, **Lattice Semiconductor** a tak by bylo možné pokračovat dál a dál. Z uvedeného je vidět, že cesta vývoje **PLD** obvodů nebyla a není ani dnes nijak přímočará a byla navíc od svých počátků provázena soudními spory firem o patentová práva a tato situace trvá dodnes.

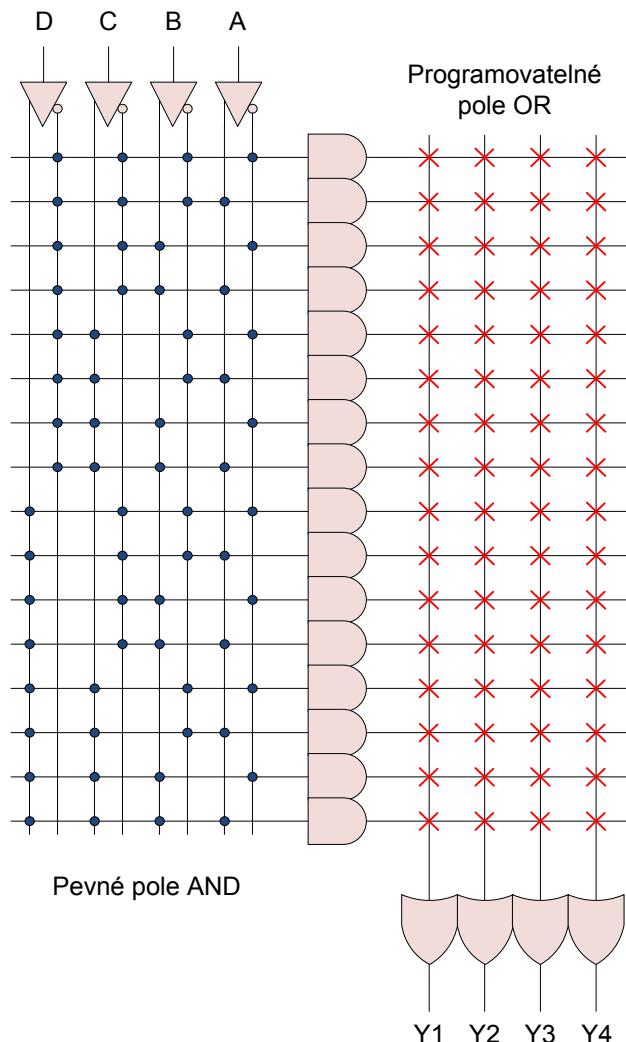
Lze však říci, že od začátku devadesátých let vyvíjí většina firem dvě od sebe velmi odlišné architektury PLD obvodů. První je architektura CPLD obvodů, založená na programovatelné matici hradel AND, hradlech OR a makrobuňkách (vychází tedy z původní koncepce obvodů PAL) a na programovatelných místech používá buňky EEPROM nebo FLASH.

Kvůli rostoucí velikosti obvodů se začalo později místo rozšiřování logických funkcí užívat spíše skládání více matic PLD obvodů do jednoho pouzdra. Vznikly tak obvody, které dnes nazýváme CPLD (*Complex Programmable Logic Device, Altera, 1988*). Od CPLD byl už pak jen malý krok k prvním FPGA obvodům (*Xilinx, 1984*). Dnes dostupná FPGA se ovšem od architektur z poloviny osmdesátých let významně odlišují. Trendem je pozvolný příklon k hrubozrnným architekturám; obvodům, které kromě elementárních programovatelných logických bloků obsahují i další komplexní podpůrné bloky.

32.1.2 Obvody typu Simple Programmable Logic Device

32.1.2.1 Programmable Read Only Memory (PROM)

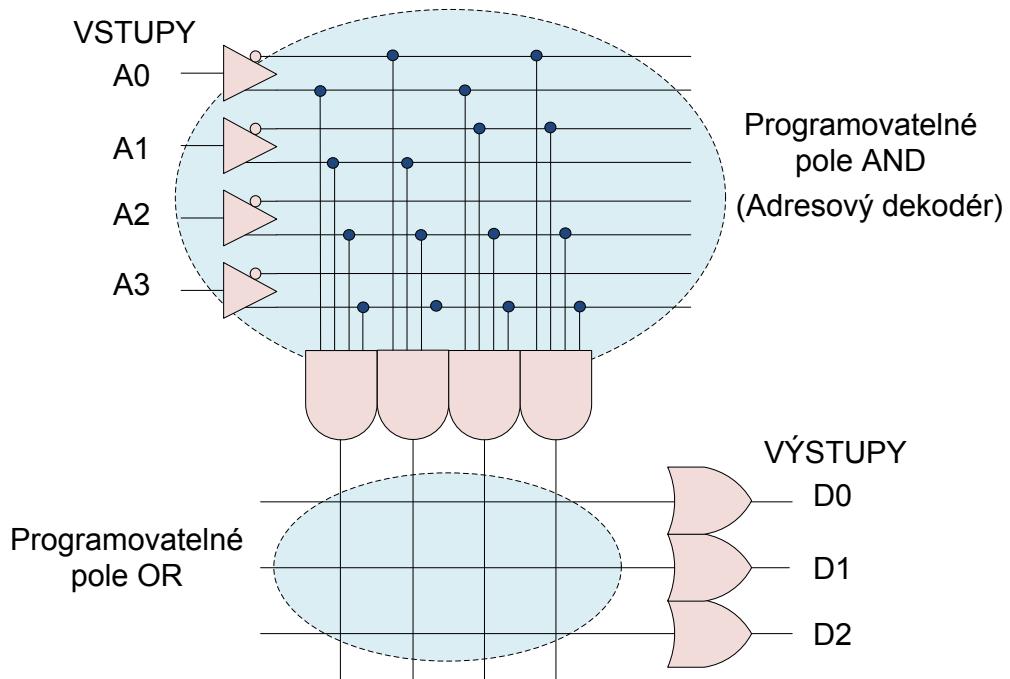
Po mnoho let nebyly obvody PROM *Programmable Read Only Memory* zařazovány do skupiny programovatelných logických obvodů, ačkoliv většina nejmenších PROM (např. 32x8) byly používány jako logické prvky (dekodéry, převodní tabulky kódů, znakové generátory).



Obrázek 32.1: PLD typu Programmable Read Only Memory (PROM)

Obvody PROM představuje matici paměťových buněk, jejíž řádky jsou adresovatelné vstupní signály a datové sloupce představují výstupní signály. Počet adresových

a datových signálů determinuje rozměr matice. Např. 4 vstupní signály umožňují adresaci 16 řádků, 4 datové signály indikují, že každý řádek se skládá ze 4 paměťových buněk. Z pohledu architektury obvodů PLD obsahují PROM pevné propojovací pole hradel AND, následované programovatelným polem hradel OR (viz obr. 32.1)



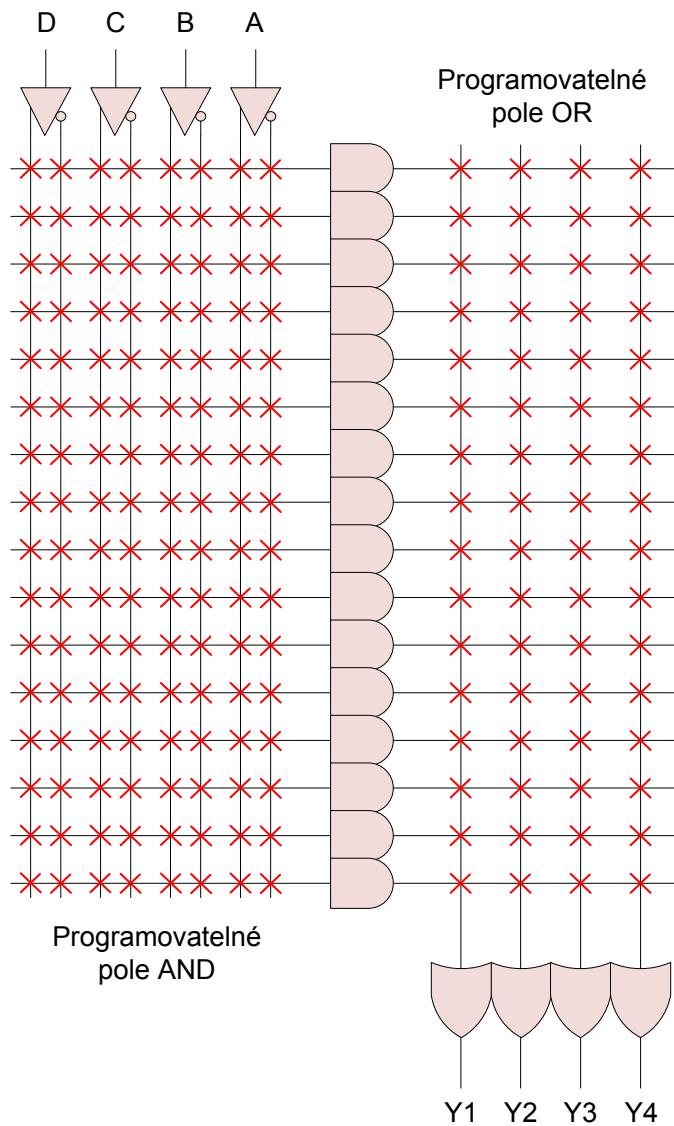
Obrázek 32.2: Schéma obvodu PROM

Všeobecně platí, že obvody PROM jsou nevhodnějším kandidátem implementace takových aplikací, které vyžadují, aby na každou kombinaci vstupních signálů byla jiná odezva výstupních signálů. Překážkou je omezení počtu vstupních signálů, eventuálně je limitující také velikost programovatelné matice. Její velikost se přidáním nového vstupu vždy zdvojnásobí (omezení počtu vstupních signálů jistým způsobem řeší obvody typu PAL viz kap. 32.1.2.3)[LŠS93, s. 59].

Na obr. 32.2 je uvedena architektura obvodu PROM prostřednictvím symboliky obvodů PLD. Každý term odpovídá jedné z jeho adres. Programovatelná hradlo OR odpovídají datovým bitům obvodu PROM (výstupní slovo). Např. PROM velikosti 32×8 představuje obvod PLD s 5 vstupy, 32 součinovými termi ($32 = 2^5$) a 8 programovatelnými výstupními OR hradly.

32.1.2.2 PLD typu Programmable Logic Array (PLA)

Obvody PLA(*Programmable Logic Array*) patří k průkopníkům v oblasti programovatelných logických polí. Obsahují programovatelné pole hradel AND a zároveň i programovatelné pole hradel OR (viz obr. 32.3). Vstupní signály jsou přivedeny v přímém i invertovaném stavu do pole AND hradel.



Obrázek 32.3: Architektura obvodů PLA

Oproti obvodům PROM mají obvody PLA toto pole programovatelné, takže je možné snadno vytvořit součinové termíny z libovolné kombinace vstupních (přímých i nego-

vaných) signálů. Součinové termy jsou přivedeny do programovatelného pole OR hradel, které umožňuje připojení libovolného termu k libovolnému hradlu OR. Jeden term může být přiveden na vstup i několika hradel OR. Na jejich výstupu je formována požadovaná logická funkce ve tvaru ”součtu součinů”.

Je-li obvod PLD vybaven programovatelným polem AND, jako je tomu u obvodů PLA (a i např. u PAL kapitola 32.1.2.3), může být využita pouze polovina programovatelných spínačů propojovacího pole. Tato skutečnost je zřejmá, protože vstupní signály jsou do pole přivedeny v přímém i invertovaném tvaru a v žádném součin se nemůže současně vyskytovat přímý i invertovaný signál (součin by vždy nabýval hodnoty logická nula). Takže nejméně polovina (a v praxi i více, protože všechny součiny vždy neobsahují všechny veličiny) není při konstrukcích logických funkcí využita. Je tedy zřejmé, jak neefektivně je využita plocha křemíkového čipu, na kterém je obvod typu PLA realizován. Tato skutečnost stimuluje další vývoj a vznik nových architektur obvodů PLD [LŠS93, s. 63].

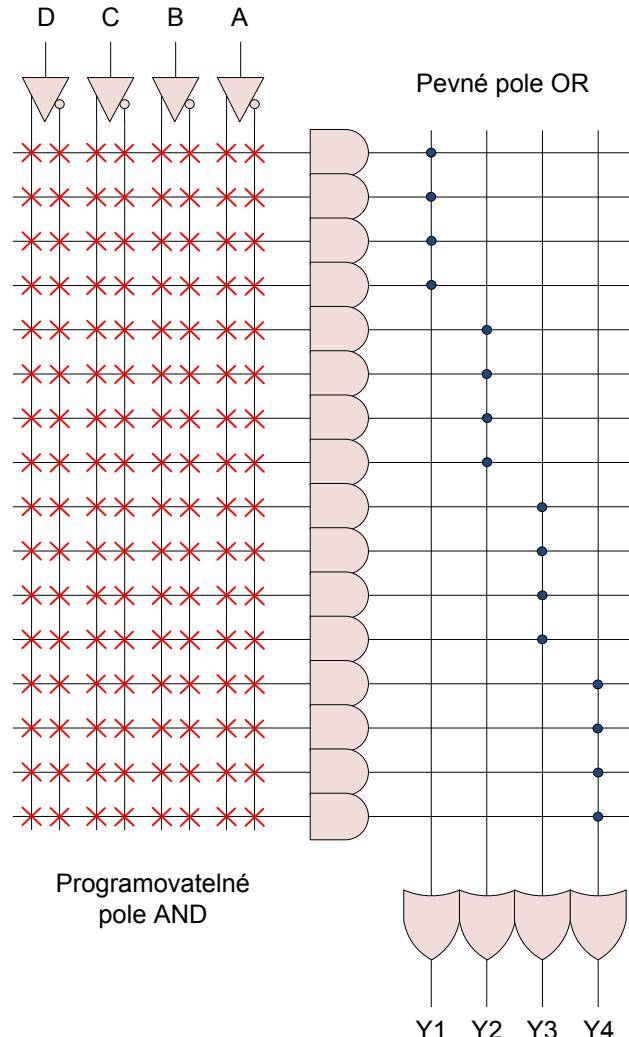
32.1.2.3 PLD typu Programmable Array Logic (PAL)

Obvody typu PAL jsou dalším z typů programovatelných logických obvodů. Jsou to PLD obvody s programovatelným polem hradel AND a pevným poler hradel OR. K jednomu hradlu OR lze připojit pouze omezený počet součinových termů, přičemž nelze současně jeden term připojit k několika hradlům OR.

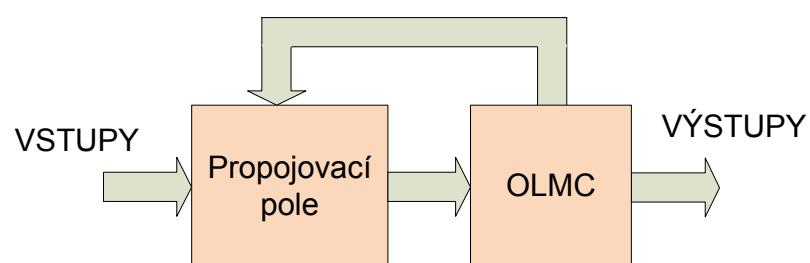
Jednodušší architektura oproti v té době existujícím FPLA obvodům, umožnila zkrácení doby přenosu signálu. Obvody PAL byly navrženy tak, aby ”vypadaly” jako standardní obvody PROM a mohly tak být programovány standardními programátory obvodů PROM. Tím se výrobci obvodů PAL vyvarovali požadavků na dodatečné vývojové prostředí, jak tomu bylo v době uvedení na trh v případě FPLA obvodů.

32.1.2.4 PLD typu Simple Programmable Logic Device - SPLD

Obvody typu GAL (*Generic Array Logic*) patří do skupiny elektricky reprogramovatelných obvodů PLD (EEPROM - *Electrically Erasable Programmable Logic Device*). Z hlediska klasifikace PLD obvodů lze obvody GAL charakterizovat jako obvody s programovatelným polem AND hradel a pevným polem hradel OR. Významná odlišnost od obvodů PAL spočívá v možnosti elektrického reprogramování a využití makrobuňky (Output Logic Macrocell) na výstupech obvodu.



Obrázek 32.4: Architektura obvodů PAL



Obrázek 32.5: Obecná struktura obvodu GAL

32.1.3 Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD

Obvody typu CPLD patří podobně jako obvody SPLD do skupiny elektricky reprogramovatelných PLD obvodů (EEPLD). Většina CPLD obvodů je programovatelná přímo v cílovém systému, nesou tedy i označení ISP (*In-system programming*). Tyto obvody jsou typické, podobně jako obvody GAL, svou programovatelnou maticí hradel AND následovanou hradlem OR a makrobuňkou. Na výstupu hradla OR je tak stejně jako u obvodů GAL formována pořadovaná logická funkce ve tvaru *součtu součinů*. Od obvodů GAL se však obvody CPLD liší hlavně velkým centrálním propojovacím polem. Makrobuňky jsou sdruženy do větších skupin a tvoří tzv. **funkční bloky** [Pin06, p 279]. Pro architekturu obvodů CPLD jsou charakteristické tyto čtyři struktury:

- velké centrální propojovací pole (*Global Routing Pool*),
- programovatelné funkční bloky (*Generic Logic Block - GLB*), uspořádané kolem propojovacího pole, sestávající z
 - programovatelné matice AND,
 - několika makrobuňek,
 - alokátoru součinů,
- výstupní propojovací pole (*Output Routing Pool - ORP*),
- vsutpní/výstupní bloky (*I/O Blocks*).

Všechny výše uvedené stavební prkvy mají u různých výrobců různá označení, jejich význam a funkce je však velmi podobná. Pomocí makrobuňek lze realizovat různě složité kombinační a sekvenční logické či paměťové funkce. Přes programovatelné **vstupní/výstupní bloky** lze přivádět vstupní signály z vývodů obvodu nebo naopak vyvádě výstupní signály. Na rozdíl od jednodušších SPLD, kde vstupní/výstupní obvody jsou přímo spojeny s makrobuňkou, jsou však u CPLD zásadně od makrobuňek odděleny a tvoří samostatný I/O blok, do kterého mohou výstupní signály z makrobuňek vstupovat přes programovatelné **výstupní propojovací pole**. Tím se všeobecně zlepší využití jak makrobuňek, tak výstupních obvodů.

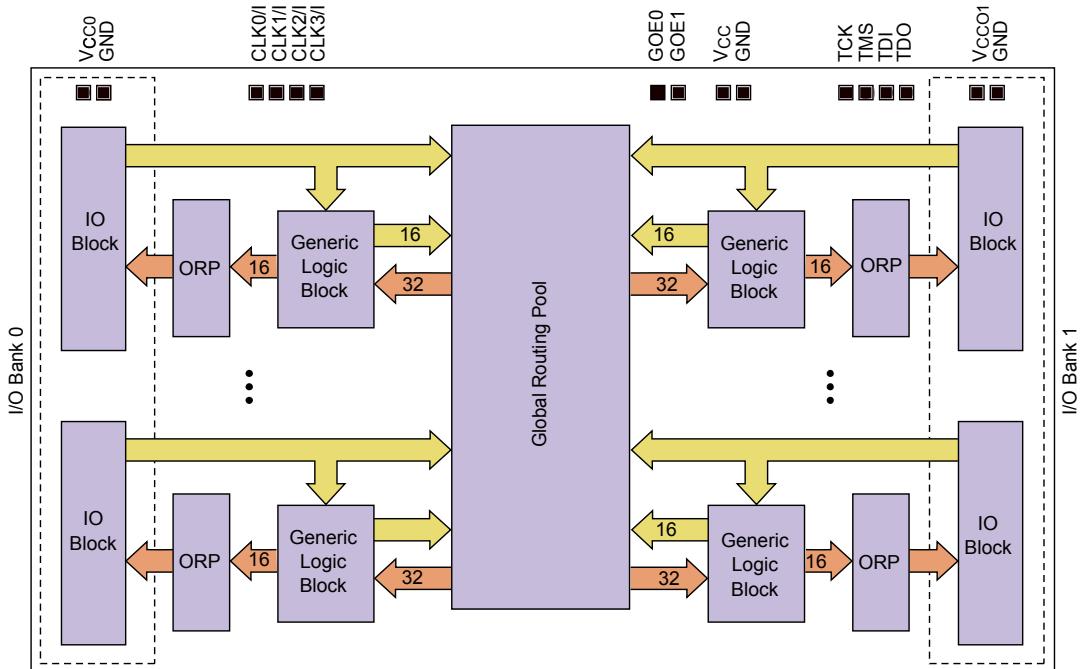
Všechny vstupní/výstupní bloky a všechny makrobuňky lze spolu vzájemně propojit pomocí **centrálního programovatelného propojovacího pole**.

32.1.4 Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA

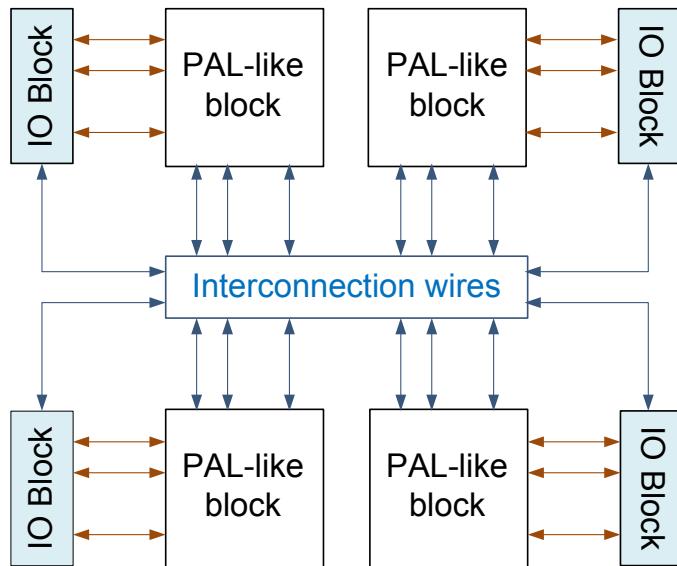
32.1.5 Terminologie

- **PLA** — *Programmable Logic Array* nebo také **FPLA** *Field Programmable Logic Array*: Obvod obsahuje matici AND za nímž následuje matici OR, jež jsou obě programovatelné.
- **PAL** - *Programmable Array Logic*¹: Relativně jednoduchý PLD obvod obsahující programovatelnou matici AND, za níž následuje pevná matici OR (obr.32.4).
- **SPLD** — *Simple programmable logic device*: Označení je společné pro PLA a PAL struktury.
- **CPLD** — *Complex programmable logic device*: Název zahrnuje obvody jejichž složitost je někde mezi architekturami obvodů PAL a FPGA a nese rysy obou těchto architektur. Základním stavebním blokem je tzv. *makrobuňka*, která realizuje logický výraz ve tvaru normální disjunktivní formy.
- **FPGA** — *Field-Programmable Gate Array*: Obvody mají z programovatelných obvodů nejobecnější strukturu a obsahují nejvíce logiky. Základním stavebním blokem jsou logické buňky (logic elements; Altera), nebo také řezy

¹obchodní známka je v současnosti ve vlastnictví společnosti Lattice Semiconductor



Obrázek 32.6: Architektura CPLD *ispMACH4000* společnosti Lattice



Obrázek 32.7: Obecná struktura obvodu CPLD

(*slices*; Xilinx), jež jsou zpravidla sdruženy do větších logických bloků² (*logic array block*, LAB; Altera) resp. (*configurable logic block*, CLB; Xilinx). Logické buňky obsahují tzv. vyhledávací tabulkou (*Look-up table*, LUT), která dovoluje realizovat jednoduché kombinacní funkce. LUT má obvykle čtyři vstupní signály, které mají význam indexu (pointeru) do této tabulky. K propojení CLB slouží programovatelná propojovací struktura PI (*programmable interconnect*).

32.2 Dynamické parametry PLD

Programovatelné logické obvody mohou pracovat jako obvody kombinační, nebo častěji jako obvody sekvenční [Wak99, p 593]. Symboly pro doby jenž jsou dále popsány, se v různých firemních publikacích liší, význam však zůstáva.

- t_{PD} - *doba zpoždění* - ve funkci kombinančního obvodu t_{PD} je doba od změny signálů na vstupech obvodu do změny signálů na jeho výstupech. Je podstatná pro režim bez hodinových impulzů u ryze kombinančního obvodu. U sekvenčního obvodu *Mealyho* typu je to zpoždění obvodu v době mezi hodinovými impulzy,
- t_{CO} - *doba zpoždění po hodinovém impulzu* - doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu,

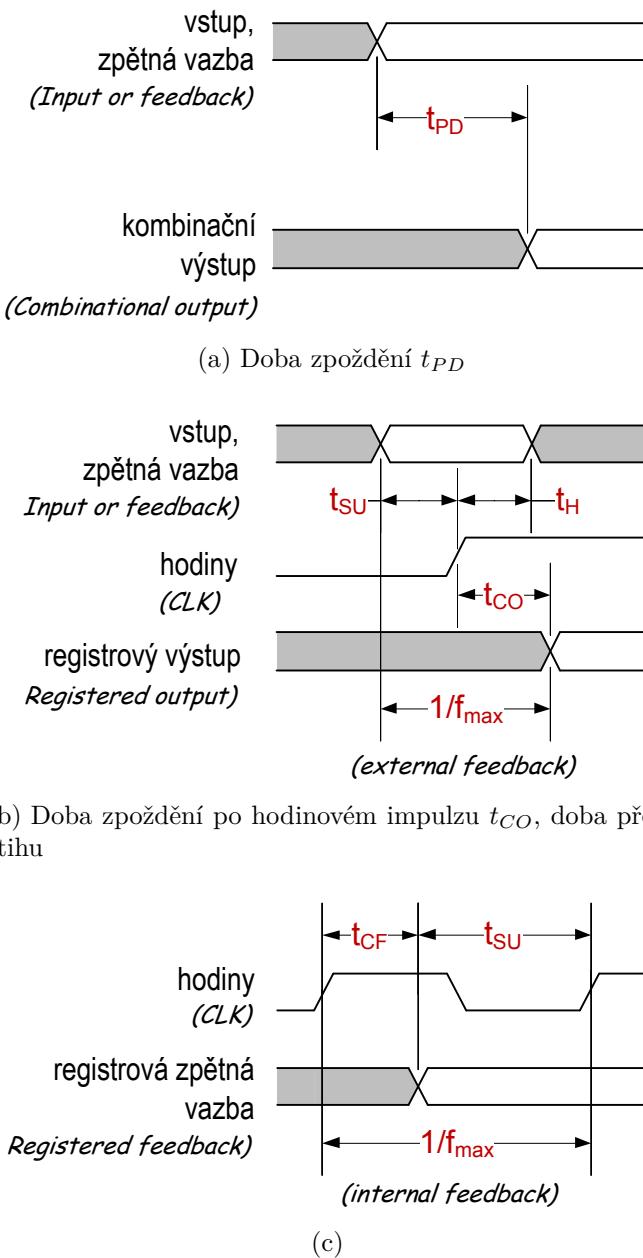
²Výrobci FPGA obvodů používají vlastní názvosloví k popisu jejich architektur.

- t_{CF} - opět se jedná o zpoždění jako v předchozím případě, tj. je to doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu registru, jenž je ovšem veden jako zpětnovazební vstup. Běžně platí, že $t_{CF} < t_{CO}$ a pokud jej výrobce neuvádí, lze předpokládat $t_{CF} = t_{CO}$
- t_{SU} - doba předstihu - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní až do aktivní hrany hodinového impulzu,
- t_H - doba přesahu - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní po aktivní hraně hodinového impulzu,
- f_{max} - maximální kmitočet hodinových impulzů - Je to nejvyšší frekvence, na které zařízení může pracovat spolehlivě a je ekvivalentní k převrácené hodnotě minimální periody hodinových impulzů.

Dynamické parametry u programovatelných logických obvodů jsou závislé na vnitřních cestách signálů. U obvodů CPLD je situace jednodušší, neboť cesty signálů jsou do jisté míry pevně dány a jedná se jen o jejich výběr. Výrobci uvádějí korekční vztahy pro výše uvedené doby, kterými jsou respektovány logické zátěže a způsob využití vnitřních bloků. Složitější situace je u obvodů FPGA, kde cesty signálů nejsou předem definovány a v procesu návrhu budou teprve vyvtařeny. Jednotlivé doby proto musí dodatečně dopočítat návrhový systém [Pin06, p 288].

References

- [LŠS93] M. Liška, V. Šula, and J. Strelec. *Programovatelná logická pole*. Grada Publishing, spol. s.r.o., 1993, p. 456. ISBN: 80-85623-26-9 (cit. on pp. 311, 313).
- [Pin06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on pp. 315, 318).
- [Wak99] J. F. Wakerly. *Digital Design Principles and Practices*. PRENTICE HALL, 1999, p. 830. ISBN: 0-13-173349-4 (cit. on p. 317).



Obrázek 32.8: Základní dynamické parametry PLD: t_{PD} , t_{CO} , t_{CF} , t_{SU} , t_H , f_{max}

Kapitola 33

Jazyk VHDL

Obsah

33.1 Úvod	322
33.2 Základní vlastnosti jazyka VHDL	322
33.3 Souběžné příkazy	323
33.4 Sekvenční příkazy	324
33.5 Technologicky nezávislá část návrhu	324
33.5.1 Dynamicky řízené sekvenční obvody	324
33.5.2 Staticky řízené sekvenční obvody	324
33.5.3 Kombinační obvody	325
33.6 Knihovna LPM	325
33.6.1 Posuvný registr - lpm shiftreg	325

33.1 Úvod

Název VHDL představuje akronym — VHSIC Hardware Description Language. Samo označení VHSIC je další akronym představující název projektu, v rámci něhož byl jazyk VHDL zpracován, a znamená Very High Speed Integrated Circuits. I když označení VHDL v tomto kontextu není příliš přiléhavé, vžilo se a obecně se používá. Jazyk VHDL byl původně vyvinut především pro modelování a simulaci rozsáhlých systémů. Na mnoha jeho konstruktech je to znát, některé z nich nemají pro syntézu vůbec význam. Zde se však budeme zabývat především použitím jazyka VHDL k vytváření modelů určených pro syntézu číslicových systémů. České termíny budou v prvním výskytu zapsány tučně. Často tyto termíny nejsou ustálené, a proto budeme uvádět i jejich anglické ekvivalenty, které již většinou mají ustálenou podobu.

33.2 Základní vlastnosti jazyka VHDL

- Je to otevřený standard (*open standard*). K jeho použití pro sestavení návrhových systémů není třeba licence jeho vlastníka, jako je tomu u jiných jazyků HDL (například u jazyka ABEL). To je jeden z důvodů, proč je tento jazyk v návrhových systémech často používán.
- Umožňuje pracovat na návrhu, aniž je předtím zvolen cílový obvod. Ten může být zvolen až v okamžiku, kdy jsou známy definitivní požadavky na prostředí, v němž má navrhovaný systém pracovat, a je možno cílový obvod měnit podle potřeby při zachování textu popisujícího systém, může být zvolen obvod PLD nebo FPGA (*Device-independent design*).
- Je možno provést simulaci navrženého obvodu na základě téhož zdrojového textu, který pak bude použit pro syntézu a implementaci v cílovém obvodu. Zdrojový text je možno zpracovávat v různých simulátorech a v syntetizérech různých výrobců. Odsimulovaný text může být použit v dalších projektech s různými cílovými obvody, což je podporováno hierarchickou strukturou jazyka. Této vlastnosti jazyka se říká přenositelnost (*portability*) kódu.
- V případě úspěšného zavedení výrobku na trh lze popis modelu systému v jazyku VHDL použít jako podklad pro jeho implementaci do obvodů **ASIC** vhodných pro velké série.

Některé námitky proti VHDL:

- Jazyk VHDL je dosti „upovídáný“, jazykové konstrukty nejsou navrženy tak, aby zdrojový text byl stručný a při popisu modelu určitého systému se setkáme

s opakováním bloků stejného znění. Ty je však možno snadno vytvářet využitím kopírování a podobných možností současných editorů.

- V jazyku VHDL je možno vytvořit neefektivní konstrukce, efektivnost nebo její nedostatek nemusí být na první pohled ze zdrojového textu patrné. To je však vlastnost i jiných jazyků vyšší úrovně a výsledná efektivnost konstrukce závisí nejen na kvalitě programových návrhových prostředků, ale také na zkušenosti konstruktéra (návrháře).

Základní verze jazyka VHDL byla přijata jako standard IEEE číslo 1076 v roce 1987. Konstrukty odpovídající tomuto standardu se označují jako konstrukty jazyka VHDL-87. Podobně jako další standardy IEEE, i tento standard se v pravidelném pětiletém intervalu aktualizuje. Upravená verze standardu byla přijata v roce 1993, odkazuje se na ni jako na standard VHDL-93.

Vedle jazyka VHDL se setkáme také s jazykem Verilog, který má podobné použití. Uvádí se, že jazyk VHDL je rozšířený zejména v Evropě, zatímco Verilog se používá hlavně v asijských zemích. V USA se používají oba tyto jazyky.

Vyjadřovací schopnosti jazyku VHDL jsou dány příkazy, jenž mají souběžný nebo sekvenční charakter. Některé příkazy jsou jen jednoho druhu, jiné mohou být oboujího druhu. Toto rozlišení se týká toho, ve které části popisu se příkazy mohou používat. Pro stručnost budeme dále mluvit o souběžných a o sekvenčních příkazech, i když jde spíše o to, kde se tyto příkazy nacházejí či mohou nacházet. V následujících kapitolách jsou příkazy rozděleny do dvou velkých skupin:

- **Souběžné příkazy** (*concurrent statements*): zapisují se v textu jazyka mimo procesy, definice funkcí a procedur.
- **Sekvenční příkazy** (*sequential statements*): slouží k algoritmickému vyjádření popisu. Tyto příkazy mohou být zapsány jen v procesech, v definicích funkcí a procedur.

33.3 Souběžné příkazy

33.4 Sekvenční příkazy

33.5 Technologicky nezávislá část návrhu

V následujícím textu jsou uvedeny základní způsoby popisu chování sekvenčních (např. klopné obvody) a kombinačních obvodů. Klopné obvody jsou rozdělovány na **hranově citlivé** a **úrovňově citlivé**. Je možné je popsat jako *jednobitové paměti*. Hranově citlivý klopný obvod je obvod řízený změnou na vstupu synchronizace (*clock input*). Bývá označován „*flip-flop*“. Úrovňově citlivý klopný obvod je nazýván v české terminologii *zdrž*. Obvykle je však srozumitelný anglický název „*latch*“.

33.5.1 Dynamicky řízené sekvenční obvody

Obvody řízené změnou signálu na vstupu synchronizace jsou ve VHDL popisovány použitím příkazu process a podmíněného příkazu **if**. V podmíněném příkazu jsou rozlišovány události (**events**), které znamenají vzestupnou hranu nebo sestupnou hranu signálu na vstupu synchronizace. Při popisu je možné použít dvou různých zápisů, ve kterých se objevuje atribut události synchronizačního signálu `clk` `clk'event` nebo volání funkce.

- `(clk'event and clk='1')` vzestupná hrana signálu
- `(clk'event and clk='0')` sestupná hrana signálu
- `rising_edge(clk)` volání funkce vzestupné hrany
- `falling_edge(clk)` volání funkce sestupné hrany

Uvedené příklady ukazují možnosti vyjádření vzestupné a sestupné hrany ve VHDL. Vyjádření pomocí atributu je častěji používané, protože tento konstrukt je rozeznatelný při syntéze obvodového řešení. Nicméně použití volání funkce je výhodnější při simulaci, protože nastává pouze při změně signálu `clk` z $0 \rightarrow 1$ a z $1 \rightarrow 0$, ale ne z $X \rightarrow 1$ nebo z $0 \rightarrow X$, které nepředstavují platný přechod z jednoho stavu do druhého. Devět hodnot signálu, které jsou označované jako `std_logic` jsou určeny k modelování poruchových stavů logické sítě. Jsou to hodnoty `'U', 'X', '0', '1', 'Z', 'W', 'L', 'H', '-'`.

33.5.2 Staticky řízené sekvenční obvody

V následujících odstavcích jsou popisovány klopné obvody řízené úrovní synchronizačního signálu, které jsou známé pod názvem **zdrž** (*latch*).

33.5.3 Kombinační obvody

33.6 Knihovna LPM

Knihovna **LPM** (angl. *Library of Parametrized module*) obsahuje parametrizované moduly jako jsou hrada, čítače, multiplexory, klopné obvody, aritmetické a paměťové funkce.

Standard LPM byl navržen v roce 1990 jako jedna z monžností pro efektivní návrh číslicových systémů do odlišných technologií, jako jsou např. obvody PLD, hradlová pole a standardní buňky. Předběžná verze standardu vyšla v roce 1991, další úprava předběžné verze pak v roce 1992. Standard byl přijat organizací EIA (angl. *Electronic Industries Alliance*) v dubnu roku 1993 jako doplněk do standardu EDIF.

EDIF je formát pro přenos návrhu mezi návrhovými nástroji různých výrobců. Formát EDIF popisuje syntaxi, která reprezentuje logický netlist. LPM do něj pak přidává množinu funkcí, která popisuje logické operace netlistu. Před rozšířením o LPM musel každý EDIF netlit typicky obsahovat technologicky specifické logické funkce, které zabralovaly tomu, aby byl návrh ve větší míře nezávislý na cílové technologii [Pin06, s. 72].

33.6.1 Posuvný registr - lpm shiftreg

```

1 ---* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
2 ---* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
3 ---* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
4 library IEEE;
5 use IEEE.std_logic_1164.all;
6 use IEEE.std_logic_arith.all;
7
8 entity LPM_SHIFTREG is
9   generic (
10     — Width of the data[] and q ports. (Required)
11     lpm_width      : natural;
12     lpm_direction : string := "LEFT";
13     — Constant value that is loaded when aset is high.
14     lpm_avalue    : string := "UNUSED";
15     — Constant value that is loaded on the rising edge of
16     — clock when sset is high.
17     lpm_svalue    : string := "UNUSED";
18     lpm_pvalue    : string := "UNUSED";
19     lpm_type      : string := "L_SHIFTREG";

```

Jméno	Popis	komentář
<code>data[]</code>	Data input to the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH.
<code>clock</code>	Positive-edge-triggered clock	Vstup hodinového signálu.
<code>enable</code>	Clock enable input	Blokuje hodinový signál.
<code>shiftin</code>	Serial shift data input	Pro funkci je nutné použít alespoň jeden ze signálů <code>data[]</code> , <code>aset</code> , <code>aclr</code> , <code>sset</code> , <code>sclr</code> , a/nebo <code>shiftin</code> .
<code>load</code>	Synchronous parallel load	(1) load operation (podmínka: <code>enable = 1</code>); (0) shift operation (výchozí).
<code>aclr</code>	Asynchronous clear input	Signál <code>aclr</code> má vyšší prioritu než signál <code>aset</code> .
<code>aset</code>	Asynchronous set input	Naplní registr <code>g[]</code> hodnotou LPM_AVALUE
<code>sclr</code>	Synchronous clear input	Signál <code>sclr</code> má vyšší prioritu než signál <code>sset</code> .
<code>sset</code>	Synchronous set input	Naplní registr <code>g[]</code> hodnotou LPM_SVALUE
<code>q[]</code>	Data output from the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH. Vyžaduje <code>shiftout</code> .
<code>shiftout</code>	Serial shift data output	Vyžaduje registr <code>q[]</code> .

Tabulka 33.1: Popis portů komponenty `lpm_shiftreg`.

```

19      lpm_hint      : string := "UNUSED"
20  );
21  port (
22    — Data input to the shift register.
23    data : in std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) := (OTHERS
24      => '0');
25    — Positive-edge-triggered clock. (Required)
26    clock : in std_logic;
27    — Clock enable input
28    enable : in std_logic := '1';
29    — Serial shift data input.
30    shiftin : in std_logic := '1';
31    — Synchronous parallel load. High (1): load operation; low
32      (0): shift operation.
33    load : in std_logic := '0';
34    — Asynchronous clear input.
35    aclr : in std_logic := '0';
36    — Asynchronous set input.
37    asset : in std_logic := '0';
38    — Synchronous clear input.
39    sclr : in std_logic := '0';
40    — Synchronous set input.
41    sset : in std_logic := '0';
42    — Data output from the shift register.
43    q : out std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0);
44    — Serial shift data output.
45    shiftout : out std_logic
46  );
47 end LPM_SHIFTREG;
48
49 architecture LPM_SYN of LPM_SHIFTREG is
50  — FUNCTION DECLARATION
51  function conv_STR_to_VECT (str : string) return
52    std_logic_vector is
53    — conversion string to std_logic_vector
54    variable len      : integer := str'length;
55    variable ivalue : std_logic_vector(lpm_width+4 downto 0) := 
56      (others => '0');
57    variable digit   : std_logic_vector(3 downto 0) := (others =>
58      '0');
59    variable ten     : std_logic_vector(3 downto 0) := "1010";
60
61 begin
62  if (str /= "UNUSED") then
63    for i in 1 to len loop

```

```

58      case str(i) is
59          when '0' => digit := "0000";
60          when '1' => digit := "0001";
61          when '2' => digit := "0010";
62          when '3' => digit := "0011";
63          when '4' => digit := "0100";
64          when '5' => digit := "0101";
65          when '6' => digit := "0110";
66          when '7' => digit := "0111";
67          when '8' => digit := "1000";
68          when '9' => digit := "1001";
69          when others =>
70              ASSERT FALSE
71              REPORT "Illegal character "& str(i) & " in string"
72                  parameter!"
73                  SEVERITY ERROR;
74      end case;
75      ivalue(lpm_width+3 downto 0) :=
76          unsigned(ivalue(lpm_width-1 downto 0)) * unsigned(ten)
77          + unsigned(digit);
78      end loop;
79  end if;
80  return ivalue(lpm_width-1 downto 0);
81 end conv_STR_to_VECT;
82
83 -- SIGNAL DECLARATION
84 signal i_q : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) := (OTHERS
85     => '0');
86 signal init : std_logic := '0';
87 signal tmp_init : std_logic := '0';
88 signal i_shiftout_pos : natural := lpm_width-1;
89
90 begin
91 -- PROCESS DECLARATION
92 -- basic error checking for invalid parameters
93 MSG: process
94 begin
95     if (lpm_width <= 0) then
96         ASSERT FALSE
97         REPORT "Value of lpm_width parameter must be greater than
98             0!"
99         SEVERITY ERROR;
100    end if;
101    wait;

```

```

97  end process MSG;
98
99  process (tmp_init)
100 begin
101    if (tmp_init = '1') then
102      init <= '1';
103    end if;
104  end process;
105
106  process (clock , aclr , aset , init)
107    variable avalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
108      conv_STR_to_VECT(lpm_avalue);
109    variable svalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
110      conv_STR_to_VECT(lpm_svalue);
111    variable pvalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
112      conv_STR_to_VECT(lpm_pvalue);
113  begin
114    — INITIALIZE TO PVALUE —
115    if (init = '0') then
116      if (lpm_pvalue /= "UNUSED") then
117        i_q <= pvalue;
118      end if;
119      if ((lpm_direction = "LEFT") or (lpm_direction =
120            "UNUSED")) then
121        i_shiftout_pos <= lpm_width-1;
122      elsif (lpm_direction = "RIGHT") then
123        i_shiftout_pos <= 0;
124      else
125        ASSERT FALSE
126        REPORT "Illegal lpm_direction property value for
127          LPM_SHIFTREG!"
128        SEVERITY ERROR;
129    end if;
130    tmp_init <= '1';
131    elsif (aclr = '1') then
132      i_q <= (OTHERS => '0');
133    elsif (aset = '1') then
134      if (lpm_avalue = "UNUSED") then
135        i_q <= (OTHERS => '1');
136      else
137        i_q <= avalue;
138      end if;
139    elsif (rising_edge(clock)) then
140      if (enable = '1') then

```

```

136      if ( sclr = '1') then
137          i_q <= (OTHERS => '0') ;
138      elsif (sset = '1') then
139          if (lpm_svalue = "UNUSED") then
140              i_q <= (OTHERS => '1') ;
141          else
142              i_q <= svalue ;
143          end if ;
144      elsif (load = '1') then
145          i_q <= data ;
146      else
147          if (lpm_width < 2) then
148              i_q(0) <= shiftin ;
149          elsif (lpm_direction = "LEFT") then
150              i_q <= (i_q(lpm_width-2 downto 0) & shiftin) ;
151          else
152              i_q <= (shiftin & i_q(lpm_width-1 downto 1)) ;
153          end if ;
154      end if ;
155      end if ;
156  end process ;
157
158  q <= i_q ;
159  shiftout <= i_q(i_shiftout_pos) ;
160
161
162 end LPM_SYN;

```

Část XVI

Elektromagnetická kompatibilita

Kapitola 34

Vlastnosti plošných spojů

Část XVII

C

Kapitola 35

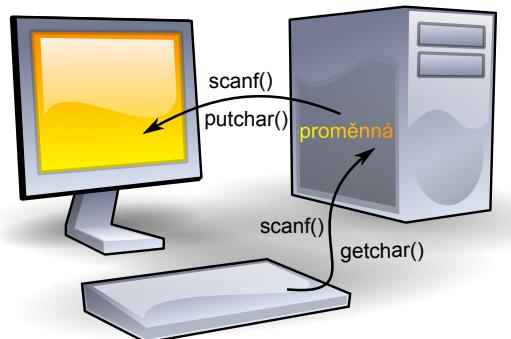
Terminálový vstup a výstup

Obsah

35.1 Hlavičkový soubor <code>stdio.h</code>	338
35.2 Standardní vstup a výstup znaku	338
35.3 Standardní vstup a výstup řetězců	339
35.4 Formátovaný standardní vstup a výstup	340
35.5 Souhrnné cvičení	340

Jazyk C, narozdíl od Pascalu, nedefinuje žádnou I/O (vstupně/výstupní -Input/Output) operaci jako část jazyka. Nezbytné vstupy a výstupy jsou řešeny tak, že standardní knihovna obsahuje několik funkcí, které I/O zajišťují.

Nejvíce strojově závislé akce jsou I/O operace a tímto způsobem se tedy důsledně oddělují strojově závislé a strojově nezávislé části jazyka. Tato skutečnost je pak významným přínosem při vytváření kompilátoru pro jiný počítač.



Obrázek 35.1: Operace pro terminálový vstup a výstup

35.1 Hlavičkový soubor stdio.h

Aby bylo možno správně používat všechny funkce pro vstupu a výstupu, je nutné na začátku programu připojit "popis" těchto funkcí. Ten se nachází v hlavičkovém (header) souboru `stdio.h`:

```
#include <stdio.h> //zde není středník
```

Od tohoto okamžiku je pak možné používat dále popsané funkce.

35.2 Standardní vstup a výstup znaku

Výstup jednoho znaku zajišťuje `putchar()` a vstup jednoho znaku funkce `getchar()`.

- `int putchar(int c);`
- `int getchar(void);`

Obě funkce pracují s proměnnými `int` a ne `char`.

```
1  /*************************************************************************/
2  /* Cteni_tisk_znaku.C */
3  /* Cteni a tisk znaku */
4  /* P. Herout 10.1991 */
```

```

5  *****/
6 #include <stdio.h>
7
8 main()
9 {
10     int c;
11
12     printf("\nZadej znak:");
13     c = getchar() + 1;
14     printf("%c (ASCII %d)\n", c, c);
15 }
```

Listing 35.1: *Cteni_tisk_znaku.c* Čtení a tisk znaku ze standardního vstupu na standardní výstup.

Příklad 35.2.1 Čtení znaku ze standardního vstupu a jejich zápis na standardní výstup ukazuje následující program, představující jednoduchou variantu příkazu kopírování souboru (nutno ovšem přesměrovat vstup a výstup).

```

1 *****/
2 /* CPY.C
3 /* CoPY character
4 *****/
5
6 #include <stdio.h>
7
8 int main(void)
9 {
10     int c;
11
12     while ((c = getchar()) != EOF)
13         putchar(c);
14     return 0;
15 }
```

Listing 35.2: *CPY.c* Kopíruje znak ze standardního vstupu na standardní výstup.

35.3 Standardní vstup a výstup řetězců

Standardní vstup a výstup řetězců je jednoduchou nadstavbou nad čtením znaku. Obě funkce,

- **char *gets(char *s);**
- **int puts(const char *s);**

pracují s řetězci. `gets()` načte do znakového pole vstupní řetězec az do konce řádku, symbol '`\n`' není do znakového pole zapsán. Ukazatel na pole (načtený řetězec) je rovněž návratovou hodnotou. Chybu signalizuje návrat `NULL`. `puts()` zapíše řetězec na výstup a přidá přechod na nový řádek '`\n`'. Chybu představuje návratové `EOF`, jinak vrací kladné cele číslo.

Jednoduchost použití skrývá velké nebezpečí. Funkce `gets()` nemá informaci o délce oblasti vymezené pro čtený řetězec. Je-li oblast kratší, než vstupní řádek, dojde jeho načtením velmi pravděpodobně k přepsání paměťové oblasti související s vyhrazenou pamětí. A to se všemi důsledky z toho vyplývajícími.

35.4 Formátovaný standardní vstup a výstup

35.5 Souhrnné cvičení

Příklad 35.5.1 Vytvořte program, který vygeneruje ASCII tabulku se čtyřmi sloupcí ve formátu [znak/kód/znak/kód]. Rozsah tabulky definujte pomocí dvou symbolických konstant `MIN_ASCII`, `MAX_ASCII`.

```

1  /*************************************************************************/
2  /* ASCII.C
3  /* Generate ASCII table
4  /*************************************************************************/
5  #include <stdio.h>
6  #include <conio.h>
7
8  #define MIN_ASCII 32
9  #define MAX_ASCII 127
10 #define BASE      ' '
11 #define TABLE_HEADING "\tASCII\tASCII\nChar\Code\tChar\Code\n"
12
13 char ascii_table_tittle []= "UUUUUUASCII\CODETABLE";
14
15 main()
16 {
17     int index = 0, i, tisk = 0;
18
19     printf ("%s\n", ascii_table_tittle);
20     printf ("-----\n");
21     printf ("%s", TABLE_HEADING);
22     printf ("=====*\n");
23
24     while (tisk < MAX_ASCII)
25     {
26         for (i = 0; i < 2; i++)

```

```
27     {
28         task = BASE + index + i;
29         printf ("%c\t%d\t", task, task);
30     }
31     printf ("\n");
32     index += 2;
33 } /* end while */
34
35 while (!kbhit ());
36 return 0;
37 }
```

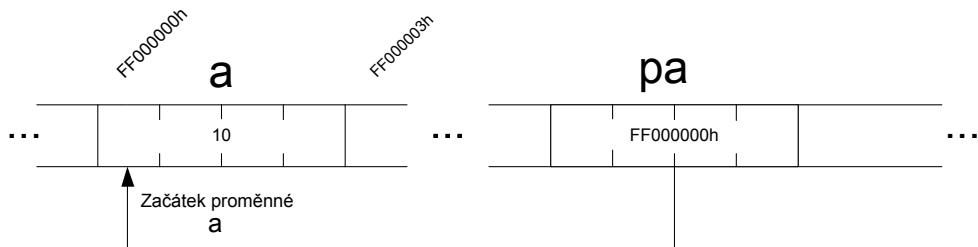
Listing 35.3: *ASCII.c* Generuje ASCII tabulku na terminálu.

Kapitola 36

Pointery

Obsah

36.1 Základy práce s pointery	344
---	-----



Obrázek 36.1: Princip ukazatele v paměti

Pointery (též ukazatele nebo směrníky) jsou „srdce a duše jazyka C“. Pointer je proměnná, jako každá jiná, pouze hodnota uložená v této proměnné má jiný význam. Pointer představuje *adresu paměti* a na této adrese se teprve ukrývá příslušná hodnota. Pointer je tedy proměnná uchovávající paměťovou adresu.[Her94]

36.1 Základy práce s pointery

Příklad 36.1.1 Vytvořte funkce kopírující prvky jednoho pole do druhého pomocí indexu *i* ukazatele.

```

1  /*************************************************************************/
2  /* soubor CPYARRY.C */
3  /* na funkcích kopirujicich prvky jednoho pole do druheho */
4  /* ukazuje pristup k prvkum pole pomoci indexu i pomocí */
5  /* ukazatele, tedy pointerovou aritmetiku */
6  /*************************************************************************/
7 #include <stdio.h>
8
9 #define N      6
10
11 void copy_array1(int *a, int *b, int n)
12 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
13 {
14     register int i = 0;
15     for (; i < n; i++)
16         b[i] = a[i];
17 }
18
19 void copy_array2(int *a, int *b, int n)
20 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
21 {
22     while (n-- > 0)

```

```
23     *b++ = *a++;
24 }
25
26 void print_array(int *p, int n)
27 // vytiskne celociselné pole o n prvciach
28 // zacne a skonci na novem radku
29 {
30     puts("");
31     while (n-- > 0)
32         printf("\t%d", *p++);
33     puts("");
34 }
35
36 int main()
37 {
38     int pole1[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
39         pole2[N], dim1;
40     dim1 = sizeof(pole1) / sizeof(int);
41
42     print_array(pole1, dim1);
43     copy_array1(pole1, pole2, N);
44     print_array(pole2, N);
45     copy_array2(pole1 + 3, pole2, N);
46     print_array(pole2, N);
47     return 0;
48 }
```

Listing 36.1: *CPYARRY.C* Kopíruje prvky jednoho pole do druhého.

Výstup programu:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6
4 5 6 7 8 9
```


Kapitola 37

Preprocesor jazyka C

Obsah

37.1 Připojení externích souborů	348
37.2 Definice maker	348
37.2.1 Symbolické konstanty	348
37.2.2 Makra	348
37.3 Podmíněný překlad	348

Preprocesor interpretuje jednoduché direktivy pro vložení zdrojového kódu z jiného souboru (**#include**), definice maker (**#define**) a podmíněné vložení kódu (**#if**). C preprocesor přijímá tyto direktivy:

#define	#elif	#else	#endif
#error	#if	#ifdef	#ifndef
#include	#line	#pragma	#undef

Tabulka 37.1: Seznam platných direktiv jazyka C

37.1 Připojení externích souborů

37.2 Definice maker

Definice maker ve významu rozsahů polí je typickým příkladem použití preprocesoru. Ve zdrojovém textu se neodvoláváme na magická čísla, ale na vhodně symbolicky pojmenovaná makra, která zvýší čitelnost programu.

Pro větší přehlednost rozdělme makra na

- symbolické konstanty,
- makra

Klíčem nechť je skutečnost, že makro na rozdíl od symbolické konstanty má argumenty.

37.2.1 Symbolické konstanty

37.2.2 Makra

37.3 Podmíněný překlad

Preprocesor může během své činnosti vyhodnocovat, je-li nějaké makro definováno, či nikoliv. Při použití klíčového slova preprocesoru **defined** pak může spojovat taková vyhodnocení do rozsáhlejších logických výrazů. Argument **defined** nemusí být uzavřen do závorek. Může se však vyskytnout jen za **#if** nebo **#elif**. Například si ukažme složitější podmínku:

Část XVIII

ANSI/C++

Kapitola 38

Přehled jazyka C++

Obsah

38.1 Objektově orientované programování	352
38.1.1 Třídy: první nahlédnutí	353
38.1.2 Některé rozdíly mezi C a C++	359
38.1.3 Úvod do přetěžování funkcí	360
38.1.4 Práce s ukazateli	363

C++ je rozšířená verze jazyka C. C++ zahrnuje vše, co je součástí jazyka C, a přidává podporu objektově orientovaného programování (zkráceně OOP). C++ navíc obsahuje mnohá vylepšení, a prvky, které z něj jednoduše dělají "lepší C", nezávisle na objektově orientovaném programování. Kromě několika málo zanedbatelných výjimek platí, že C je podmnožinou jazyka C++.

Poněvadž byl C++ vytvořen pro podporu OOP, začne následující podkapitola popisem OOP. Je důležité si uvědomit, že jazyka C++ může být použito i pro psaní programů, které nejsou objektově orientovány. Tato kapitola, kromě představení nejdůležitějších vlastností jazyka C++, diskutuje především o rozdílech mezi způsoby programování v C a v C++ [Sch01, p. 20].

38.1 Objektově orientované programování

Objektově orientované programování je výkonný způsob jak přistupovat k úloze programování. Již od raných začátků bylo programování spojováno s rozličnými metodologiemi. V každém kritickém momentě během vývoje programování byly vytvářeny nové přístupy, které pomohly programátorům zvládat stále složitější programy. První programy byly vytvářeny pouhým nastavením přepínačů na panelu počítače. Tento postup byl vhodný pouze pro velmi malé programy. Později vytvořený jazyk symbolických instrukcí již umožňoval psaní delších programů. K dalšímu vývoji došlo v roce 1955, kdy byl vytvořen první programovací jazyk vysoké úrovně - FORTRAN.

S využitím programovacího jazyka vysoké úrovně byl programátor schopen psát programy o délce několika tisících řádků. Nejstarší metodou použitou pro programování byl *ad hoc* přístup "všechno jede". Jestliže to bylo přípustné pro relativně krátké programy, pak u rozsáhlých programů to vedlo k vytváření nečitelných a nezvládnutelných "špagety kódů"

Eliminaci "špagety kódů" umožnil až vznik *strukturovaných programovacích jazyků* v sedesátých letech. Byly to jazyky Algol a Pascal. Volně lze interpretovat, že je-li jazyk C strukturovaný, pak typ programování, které v něm provádíme, by se mohl označit jako strukturované programování. Strukturované programování se opírá o dobře definované řídící struktury, bloky kódů, vyloučení příkazů GOTO, lokální (stand-alone) podprogramy, které podporují rekurzi, a lokální proměnné.

Přestože strukturované programování přinášelo výborné výsledky, když bylo použito pro středně složité programy, v mnoha bodech zklamalo, když program přesáhl určitou velikost. K tomuto účelu bylo vytvořeno objektově orientované programování. OOP vzalo nejlepší myšlenky včleněné do strukturovaného programování a zkombinovalo je s výkonnými novými koncepty, které dovolují organizovat programy mnohem efektivněji.

Obecně všechny OOP jazyky sdílejí tři definované vlastnosti:

- zapouzdření (encapsulation),
- polymorfismus (polymorphism),
- dědičnost (inheritance).

38.1.1 Třídy: první nahlédnutí

Snad nejdůležitějším samostatným prvkem jazyka C++ je **třída**. Je to mechanismus používaný pro vytváření objektů. Jako taková, je třída srdcem mnoha prvků jazyka C++. Třídy jsou pro programování v C++ tak významné, že je vhodné předložit na tomto místě jejich stručný přehled.

Definice 38.1.1 Třída je základním obecným pojmem *klasifikace*, jak při návrhu usporádávat informace do smysluplné entity. Základním pojmem je objekt, **instance třídy**, jako konkrétní případ realizace předpisu. Objekt si „pamatuje“ svůj stav (v podobě **dat** čili **atributů**) a zveřejněním některých svých operací (nazývaných **metody**) poskytuje rozhraní, jak s ním pracovat. Při používání objektu nás zajímá, jaké operace (služby) poskytuje, ale ne, jakým způsobem to provádí - to je princip zapouzdření. Jestli to provádí sám nebo využije služeb jiných objektů, je celkem jedno. Vlastní implementaci pak můžeme změnit (např. zefektivnit), aniž by se to dotklo všech, kteří objekt používají.

Abstrakce objektu, která v architektuře programu podchycuje na obecné úrovni podstatu všech objektů podobného typu, se nazývá **třída**. Třída je předpis, jak vyrobit objekt daného typu.

Příklad 38.1.1 Nechť má sousedka (chápejme ji jako objekt) má nějaké jméno, je nějak vysoká, umí chodit a umí mluvit. Totéž platí i pro mne. Mohu tedy při modelování těchto dvou objektů, sousedky a mě, abstrahovat od nepodstatných dílčích odlišností a díky této abstrakci vytvořit obecnou třídu **Člověk**, která bude mít atributy jméno a příjmení (obojí je nějaký řetězec znaků) a metody chodit a mluvit.

Třída je deklarována klíčovým slovem **class**. Syntaxe deklarace **class** je podobná její struktuře. V obecné formě vypadá takto

```
class jméno-řtídy {
    // privátní-funkce a členy
public:
    // veřejné funkce a členy
} seznam-úobjekt
```

Seznam objektů je v deklaraci třídy nepovinný. Stejně jako struktura, se mohou objekty třídy deklarovat později. Zatímco jméno třídy je také nepovinné, z prak-

tického hlediska je vlastně vždy potřeba. Je to proto, že se jméno třídy stává novým typem jména použitého k deklaraci objektů třídy.

Funkce a proměnné deklarované uvnitř třídy jsou označeny jako *členy této třídy*. Znamená to, že jsou přístupné pouze pro ostatní členy třídy. Pro deklaraci členů veřejné třídy se použije klíčové slovo **public** s dvojtečkou. Všechny funkce a proměnné deklarované za tímto specifikátorem jsou přístupné jak pro členy třídy, tak i pro další části programu, které obsahují třídu.

Toto je jednoduchá deklarace třídy:

```
class myclass{
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};
```

Tato třída má pouze jednu privátní proměnnou nazvanou **a** a dvě veřejné funkce **set_a()** a **get_a()**. Tyto funkce jsou deklarovány uvnitř třídy pomocí jejich **prototypů**. Funkce, které jsou deklarovány jako součásti třídy se nazývají *členské funkce*.

Jelikož je **a** privátní, není dostupné pro žádný kód vně **myclass**. Ovšem funkce **set_a()** a **get_a()** jsou členy **myclass**, takže mají k **a** přístup. **set_a()** a **get_a()** jsou deklarovány jako veřejné členy **myclass** a mohou být volány každou částí programu, která **myclass** obsahuje.

Ačkoliv jsou funkce **set_a()** a **get_a()** deklarovány v **myclass**, nejsou ještě definovány. Aby jsem definoval členskou funkci, musím spojit typové jméno třídy se jménem funkce. To se udělá uvozením jména funkce jménem třídy se dvojicí dvojteček. Dvojice dvojteček se nazývá *operátor rozlišení oblasti* (scope resolution operator). Následující příklad ukazuje, jak jsou členské funkce **set_a()** a **get_a()** definovány:

```
void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}
```

Jak **get_a()**, tak i **set_a()** mají přístup k **a**, které je privátní v **myclass**. Poněvadž **get_a()** i **set_a()** jsou členy **myclass**, mohou přímo přistupovat k jejím soukromým

datům.

Obecně se pro definici členské funkce musí použít následující tvar:

```
re-type jméno-řtídy ::jmého-funkce (seznam-úparametr)
{
    // tlo funkce
}
```

Deklarace `myclass` nedefinuje žádný objekt typu `myclass`. Definuje pouze typ objektu, který bude vytvořen, když bude deklarován. Pro vytvoření objektu se použije jako specifikátor jméno třídy. Například tento řádek deklaruje dva objekty typu `myclass`:

```
myclass ob1, ob2; //toto jsou objekty typu myclass
```

Jakmile je vytvořen objekt třídy, může se program odkazovat na jeho veřejné členy pomocí tečkových operátorů bezmála takovým způsobem, jímž jsou prvky struktury zpřístupněny. Dle předcházející deklarace objektů volají následující příkazy `set_a()` pro objekty `ob1` a `ob2`:

```
ob1.set_a(10); // nastaví verzi ob1 na 10
ob2.set_a(99); // nastaví verzi ob2 na 99
```

Každý objekt obsahuje vlastní kopii všech dat deklarovaných uvnitř třídy. Znamená to, že `a` náležející `ob1` je odlišné a různé od `a` navázaného na `ob2`.

Příklad 38.1.2 Tento program předvádí `myclass`, popsanou výše v textu. Nastavuje hodnoty `a` pro `ob1` a `ob2`, a pak zobrazuje hodnotu `a` pro každý objekt.



```
#include<iostream>
using namespace std;

class myclass {
    // privatni vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};

void myclass::set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass::get_a()
{
    return a;
}
```

```
int main()
{
    myclass ob1, ob2;

    ob1.set_a(10);
    ob2.set_a(99);

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}
```

Program by měl na obrazovce zobrazit hodnoty 10 a 99.

Příklad 38.1.3 V *myclass* z předchozího příkladu je *a* privátní. Znamená to, že k ní mohou přímo přistupovat pouze členské funkce z *myclass*. (To je důvodem, proč je vyžadována veřejná funkce *get_a()*). Tedy při pokusu o přístup k privátnímu členu třídy z některé části programu, která není členem třídy, objeví se při překladu chyba. Pokud je *myclass* definována tak, jak bylo předvedeno v předešlém příkladě, pak následující volání funkce *main()* zapříčiní chybu:

```
// Toto je fragment obsahující chybu.
#include<iostream>
using namespace std;
int main()
{
    myclass ob1, ob2;
    ob1.a = 10; // ERROR! užneme řpistupovat
                 // k privátnímu členu
    ob2.a = 99; // dle čnelenských funkcí.

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}
```

Příklad 38.1.4 Stejně jako mohou existovat funkce veřejného členu, mohou existovat i proměnné veřejného členu. Jestliže například *a* bylo deklarováno ve veřejné části *myclass*, lze se na ně odkazovat z kterékoliv části programu, jak je předvedeno dále:

```
#include<iostream>
using namespace std;

class myclass{
    public:
```

```

// nyní je a řveejné
int a;
// a nyní není řpoteba set_a() a get_a()
};

int main()
{
myclass ob1, ob2;

ob1.a = 10;
ob2.a = 99;

cout << ob1.a << "\n";
cout << ob2.a << "\n";

return 0;
}

```

Protože je v tomto příkladě **a** deklarováno jako veřejný člen **myclass**, je přímo přístupné z **main()**. Pro přístup k **a** je použit tečkový operátor. Obvykle, když se volá členská funkce nebo se přistupuje k členské proměnné z vnějšího prostředí mimo třídu, je nutná plná specifikace daná jménem objektu i s tečkovým operátorem následovaným jménem člena, aby bylo jasné, na kterého člena objektu se odkazuje.

Příklad 38.1.5 Aby byla ukázána síla objektů, následující program vytváří třídu pojmenovanou **stack**, která implementuje zásobník použitelný například pro uchování znaků:

```

#include<iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklaruje třídu stack pro znaky
class stack{
    char stck[SIZE];      // uklada zásobník
    int tos;                // index vrcholu zásobníku
public:
    void init();           // inicializace stack
    void push(char ch);   // vložení znaku do stack
    char pop();            // vyjmout znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::init()
{
    tos = 0;
}

```

```

// Vsunuti znaku.
void stack :: push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack :: pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    stack s1, s2; // vytvoreni dvou zasobniku
    int i;

    // inicializace zasobniku
    s1.init();
    s2.init();

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push(a);
    s2.push(x);
    s1.push(b);
    s2.push(y);
    s1.push(c);
    s2.push(z);

    //vyjmuti znaku ze zasobniku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s1: " << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s2: " << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}
\end{lstlisting}

```

Program zobrazí následující výstupy:

```
Pop s1: c
Pop s1: b
Pop s1: a
Pop s2: z
Pop s2: y
Pop s2: x
```

Podívej se na program ještě jednou. Třída `stack` obsahuje dvě privátní proměnné: `stck` a `tos`. Pole `stck` uchovává znaky umístěné v zásobníku a `tos` obsahuje index horní úrovně zásobníku. Veřejné funkce zásobníku jsou `init()`, `push()` a `pop()` a slouží k inicializaci zásobníku, vkládání hodnoty a k vyjmutí hodnoty. Uvnitř `main()` jsou vytvořeny dva zásobníky `s1` a `s2` a do každého z nich jsou vloženy tři znaky. Je důležité uvědomit si, že každý zásobníkový objekt je oddělený od druhého. To znamená, že znaky vložené do `s1` nemohou žádným způsobem ovlivnit znaky vložené do `s2`. Každý objekt obsahuje vlastní kopii `stck` a `tos`. To je základní princip pro pochopení objektů. Ačkoliv všechny objekty třídy sdílejí své členské funkce, každý objekt vytváří a udržuje svá vlastní data.

38.1.2 Některé rozdíly mezi C a C++

Ačkoliv je jazyk C++ rozšířenou množinou jazyka C, existují mezi nimi drobné rozdíly a bylo by dobré se s nimi na začátku seznámit. Především, když v C nemá funkce žádné parametry, její prototyp má v seznamu parametrů funkce slovo `void`. Například když v "céčku" funkce nazvaná `f1()` nemá parametry (a vrací `char`), pak její prototyp bude vypadat následovně:

```
char f1 (void) ;
```

Přestože v C++ zůstává `void` stále jako volitelný, bude se prototyp pro `f1()` psát běžně takto:

```
char f1 () ;
```

C++ se odlišuje od C tím, že je v něm specifikován prázdný seznam parametrů. Kdyby se předchozí prototyp objevil v programu C, pak se to bude chápát, že o parametrech nebylo řečeno nic. V C++ to znamená, že funkce nemá parametry. Proto tedy v předchozím příkladě nebyl využit k deklaraci prázdného seznamu explicitně parametr `void`. (Použití parametru `void` k deklaraci prázdného seznamu parametrů není zakázáno; je to pouze nadbytečné. Jelikož většina programů C++ usiluje o téměř posvátném zanícení o výkonnost, neuvidíš téměř nikdy, že by bylo `void` tímto způsobem použito.) Zapamatuj si, že v C++ jsou následující dvě deklarace zcela rovnocenné:

```
char f1();  
char f1(void);
```

Další drobná diference mezi C a C++ spočívá v tom, že v programech C++ musí mít všechny funkce prototypy. Zapamatuj si, že v C jsou prototypy doporučeny, ale technicky jsou nepovinné. V C++ jsou však vyžadovány. Jak je patrno z příkladu v předchozí části, prototyp členské funkce obsažený v třídě slouží rovněž jako její obecný prototyp a žádný další samostatný prototyp již není požadován. Třetím rozdílem mezi C a C++ je, když je funkce deklarována aby vracela hodnotu, musí hodnotu opravdu vracet. Jestliže má totiž funkce jiný návratový typ než void, musí pak každý příkaz return uvnitř funkce obsahovat hodnotu. V C není vyžadováno, aby vracely hodnotu funkce, které nejsou void. Jestliže hodnota neexistuje, "vrací se" jakási nahodilá hodnota.

Jestliže v C nespecifikujete explicitně návratový typ funkce, předpokládá se návratový typ integer. V C++ bylo toto pravidlo potlačeno, a proto musíš explicitně deklarovat všechny návratové typy funkcí. Další rozdíl mezi C a C++ je, že v programech C budeš muset brát ohled na to, kde mohou být lokální proměnné deklarovány. V C mohou být lokální proměnné deklarovány pouze na začátku bloku před všemi "výkonnými" příkazy. V C++ mohou být lokální proměnné deklarovány kdekoli. Výhodou tohoto přístupu je, že lokální proměnné mohou být deklarovány ta, kde budou poprvé použity, což může napomoci v prevenci před nechtěnými vedlejšími účinky.

Konečně také v C++ definuje datový typ **bool** pro uložení hodnot Boolean (popř. pravda/nepravda). C++ rovněž definuje klíčová slova **true** a **false**, která jsou jedinými hodnotami, které může hodnota typu Boolean nabývat. V C++ je výstupní hodnotou relačních a logických operátorů hodnota typu **bool** a všechny podmíněné příkazy musí hodnotu bool vyhodnocovat. V C je hodnota **true** nenulová a hodnota **false** odpovídá nule. Tak je to i v C++, poněvadž při použití v booleánských výrazech je každá nenulová hodnota automaticky převedena na **true** a každá nulová hodnota je převedena na **false**. Funguje to i opačným směrem. Když je booleánská hodnota použita ve výrazech **integer**, pak se **true** převádí na 1 a **false** na 0. Přidání **bool** umožňuje důkladnější ověřování typů a poskytuje způsob, jak navzájem rozlišovat Boolean a **integer**. Využívání je samozřejmě nepovinné, ale **bool** je nejpohodlnější.

38.1.3 Úvod do přetěžování funkcí

Po třídách je snad nejdůležitější a vše postupující vlastnosti C++ přetěžování funkcí. Přetěžování funkcí nejen poskytuje mechanismus jímž C++ poskytuje jeden typ polymorfismu, ale také utváří základ, na němž může být programovací prostředí

dynamicky rozšiřováno. Kvůli důležitosti přetěžování je v následujících odstavcích předložen stručný úvod.¹

V C++ mohou dvě nebo více funkcí sdílet stejné jméno, pokud se liší typy jejich argumentů nebo jejich počet anebo se liší obojí.

Je velmi snadné přetěžit funkci: jednoduše deklarujete a definujete všechny požadované verze. Správnou verzi překladač automaticky vybere dle počtu nebo typu argumentů použitých při volání funkce.

Příklad 38.1.6 Následující program definuje tři funkce pro výpočet absolutní hodnoty nazvané `abs()` - pro každý typ dat jednu.

```
#include<iostream>
using namespace std;

// Přetízení abs() třemi způsoby
int abs(int n);
long abs (long n);
double abs (double n);

int main()
{
    cout << "Absolute value of -10" << abs(-10) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10L" << abs(-10L) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10.01" << abs(-10.01) << "\n";

    return 0;
}

// abs() pro hodnoty int
int abs(int n)
{
    cout << "In integer abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty long
long abs (long n)
{
    cout << "In long abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty double
double abs (double n)
{
```

¹V C++ lze přetěžovat i operátory.

```

cout << "In double abs() \n";
return n<0 ? -n : n;
}

```

Překladač automaticky volá správně jednu ze tří verzí `abs()` dle typu dat, která jsou uvedena v argumentu. Program vytvoří následující výstup:

In integer abs() Absolute value of -10: 10

In long abs() Absolute value of -10L: 10

In double abs() Absolute value of -10.01: 10.01

Uvedený příklad je velmi jednoduchý, nicméně ukazuje význam přetěžování funkcí. Jelikož lze jediné jméno použít k popisu obecné třídy činností, je umělá složitost, která vyplývá z použití tří mírně odlišných jmen - v tomto případě `abs()`, `labs()` a `fabs()` - snadno eliminována.

Příklad 38.1.7

```

#include <iostream>
using namespace std;

void date(char *date) // datum jako řetězec
void date(int month, int day, int year) // datum jako čísla

int main()
{
    date("11/22/2010");
    date(11, 22, 2010 );
}

// Datum jako řetězec.
void date(char *date)
{
    cout << "Date:" << date << "\n";
}

// Datum jako integer
void date(int month, int day, int year)
{
    cout << "Date:" << month << "/";
    cout << day << "/" << year << "\n";
}

```

Příklad 38.1.7 ilustruje jak může přetížení funkce zajistit mnohem přirozenější přístup k funkci. Protože je poměrně běžné, že je datum reprezentováno buď řetězcem, nebo třemi celočíselnými hodnotami obsahující den, měsíc a rok, záleží jen na uživateli, aby vybral tu nejpohodlnější formu, dle dané situace

38.1.4 Práce s ukazateli

Příklad 38.1.8

```
// Demonstrates the use of pointer declarations
// and operators.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int num=123;                      // A regular integer variable.
    int *p_num;                        // Declares an integer pointer.
    cout << "num is " << num << "\n"; // Prints value of num.
    cout << "The address of num is " << &num << "\n";
                                         // Prints num's location.
    p_num = &num;                      // Puts address of num in p_num,
                                         // in effect making p_num point
                                         // to num.
                                         // No * in front of p_num.
    cout << "*p_num is " << *p_num << "\n"; // Prints value
                                         // of num.
    cout << "p_num is " << p_num << "\n"; // Prints location
                                         // of num.
    return 0;
}
```

Výstup programu:

```
num is 123
The address of num is 0x28ff44
*p_num is 123
p_num is 0x28ff44
```

Příklad 38.1.9 Napište funkci *swap* která prohodí hodnoty dvou proměnných typu *int*. Výsledek funkce *swap* vytiskněte na výstupu terminálu.

```
// Program that includes a function that swaps
// any two integers passed to it
#include <iostream>
using namespace std;
void swap(int &num1, int &num2);
int main()
{
    int i=10, j=20;
    cout << "\n\nBefore swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    swap(i, j);
    cout << "\n\nAfter swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
```

```

    return 0;
}

void swap(int &num1, int &num2)
{
    int temp;           // Variable that holds
                        // in-between swapped value.
    temp = num1;        // The calling function's variables
    num1 = num2;        // (and not copies of them) are
    num2 = temp;        // changed in this function.
    return;
}

```

Výstup programu:

Before swap, i is 10 and j is 20

After swap, i is 20 and j is 10

Příklad 38.1.10 Následující příklad ukazuje použití **ukazatele na funkci**. Program se nejprve zeptá, zda se má provádět sčítání nebo násobení. Podle této odpovědi vloží do proměnné **operation** ukazatel na funkci **add** nebo na funkci **multiply**. Dále zadáme dvě čísla, která se použijí jako parametry vybrané funkce.

```

#include <iostream>
using namespace std;
int add(int a, int b)
{
    return a+b;
}
int multiply(int a, int b)
{
    return a*b;
}
int main()
{
    int (*operation) (int, int);
    int x, y, sel;
    cout << "We will add (1) or multiply (2)?";
    do {
        cin >> sel;
    } while (sel != 1 && sel != 2);
    if (sel == 1) operation = add;
    if (sel == 2) operation = multiply;
    cout << "Enter two integers:";
    cin >> x >> y;
    cout << "Result is" << operation(x, y) << endl;
}

```

```
    return 0;  
}
```


Kapitola 39

Úvod do tříd

Obsah

39.1 Funkce konstruktor a destruktur	368
---	------------

39.1 Funkce konstruktor a destruktur

Je zcela běžné, že některé části programu vyžadují inicializaci. Potřeba inicializace je mnohem častější, když se pracuje s objekty. K ošetření této situace poskytuje C++ funkci konstruktor, která může být vložena do deklarace třídy. Všechny inicializace, které je nutno na objektu provést, může automaticky vykonat konstruktor. Konstruktor má stejné jméno jako třída, jejíž je součástí a nemá návratový typ (není to ani povoleno). Následující příklad ukazuje krátkou třídu, jež obsahuje konstruktor.

```
#include<iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    void show();
};

myclass :: myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

void myclass :: show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

V tomto jednoduchém příkladě je hodnota `a` inicializována konstruktorem `myclass()`. Konstruktor je volán při vytváření objektu `ob`. Objekt je vytvářen tehdy, když se provádí jeho deklarační příkaz. V C++ je deklarační příkaz proměnné vlastně "příkazem činnosti". Když se programuje v C, lze deklarační příkazy považovat za

zavádění proměnných. Ovšem v C++, poněvadž objekt může mít konstruktor, bude ve skutečnosti příkaz pro deklaraci proměnné vyvolávat celou řadu činností.

Pro globální objekty je konstruktor objektu volán jen jednou, když se program začíná poprvé spouštět. Pro lokální objekty je konstruktor volán pokaždé, když je prováděn deklarační příkaz. Doplňkem konstruktoru je destruktor. Tato funkce volána, když je objekt rušen. Když se pracuje s objekty, je běžné, že se musí provést v souvislosti s rušením objektu určité akce (např. uvolnění zabrané paměti). Následující třída již destruktor obsahuje:

```
#include<iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass();      // konstruktor
    ~myclass();     // destruktor
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

myclass::~myclass()
{
    cout << "Destructing...\n"
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

Destruktor třídy je volán, když je objekt rušen. Lokální objekty jsou rušeny, když odcházejí mimo oblast. Globální objekty jsou rušeny, když program končí.

Není možné získat adresu konstruktoru nebo destruktoru.

Příklad 39.1.1 Třída `stack` vytvořená v příkladu 38.1.5 vyžadovala inicializační funkci k nastavení proměnné pro index zásobníku. To je přesně ten druh operací, pro něž byl konstruktor navržen. Zde je vylepšení verze třídy `stack`, která používá konstruktor pro automatickou inicializaci zásobníkového objektu po jeho vytvoření:

```
#include<iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklarace tridy znakového objektu
class stack{
    char stck[SIZE];      // uklada zasobnik
    int tos;                // index vrcholu zasobniku
public:
    stack()                  // konstruktor
    void push(char ch); // vlozeni znaku do stack
    char pop();           // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::stack()
{
    cout << "Constructing a stack\n";
    tos = 0;
}

// Vlozeni znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}
```

```

int main()
{
    // vytvori dva zasobniky, ktere se
    // automaticky inicializují
    stack s1, s2;
    int i;

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push(a);
    s2.push(x);
    s1.push(b);
    s2.push(y);
    s1.push(c);
    s2.push(z);

    //vyjmuti znaku ze zasobniku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s1:" << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop s2:" << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}

```

Je Vidět, že úloha inicializace je konstruktorem provedena automaticky lépe, než pomocí samostatné funkce, která by musela být explicitně volána programem. Když je inicializace provedena automaticky při vytváření objektu, eliminuje to možnost, že by kvůli výskytu chyby inicializace neproběhla. Je to další cesta, jak omezit složitost programu.

Příklad 39.1.2 Tento příklad předvádí nutnost existence nejen konstruktoru, ale i destruktoru. Vytváří se zde jednoduchá řetězcová třída, nazvaná *strtype*, která obsahuje řetězec a jeho délku. Když je objekt *strtype* vytvořen, je mu přidělena paměť pro uložení řetězce a jeho počáteční hodnota je nastavena na 0. Když je objekt *strtype* zrušen, je paměť uvolněna.

```

#include<iostream>
#include<cstring>
#include<cstdlib>
using namespace std;

#define SIZE 255

class strtype {
    char *p;
    int len;
public:
    strtype(); // konstruktor

```

```
~strtype() ; // destruktor
void set(char *ptr);
void show();
};

// inicializace retezcového objektu
strtype::strtype()
{
    p = (char *) malloc(SIZE);
    if(!p) {
        cout << "Allocation error\n";
        exit(1);
    }
    *p = '\0';
    len = 0;
}

strtype::~strtype()
{
    cout << "Freeing p\n";
    free(p);
}

void strtype::set(char *ptr)
{
    if(strlen(p) >= SIZE) {
        cout << "String too big\n";
        return;
    }
    strcpy(p, ptr);
    len = strlen(p);
}

void strtype::show()
{
    cout << p << "-length:" << len;
    cout << "\n";
}

int main()
{
    strtype s1, s2;

    s1.set("This is a test.");
    s2.set("I like C++.");

    s1.show();
    s2.show();
}
```

```
    return 0;  
}
```

Tento program používá pro přidělení a uvolnění paměti funkce `malloc` a `free`.
Přestože to funguje perfektně, dále je ukázáno, že v C++ se používá jiný způsob
pro dynamickou správu paměti.

Část XIX

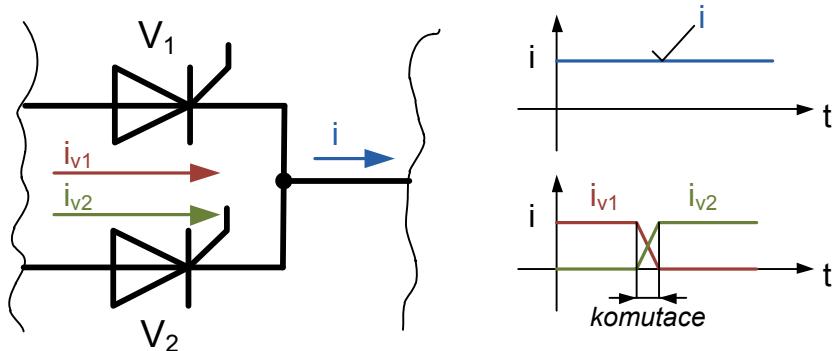
Výkonová elektronika

Kapitola 40

Měniče s vnější komutací

Obsah

40.1 Takt a komutace	378
--------------------------------	-----



Obrázek 40.1: Komutace.

40.1 Takt a komutace

Spínáním hlavních polovodičových součástek v *hlavním obvodu* měniče nebo spínače je realizována žádaná funkce, tj. přeměna parametrů elektrické energie, u měničů, a spínání u spínačů. *Vedlejší obvod*, včetně vedlejších polovodičových součástek, zajišťuje činnost hlavního obvodu (např. vypínání hlavních tyristorů). Každá část hlavního obvodu mezi dvěma uzly je *hlavní větev*. Každá část vedlejšího obvodu mezi dvěma uzly je *vedlejší větev*.

Takt je časový interval mezi dvěma po sobě následujícími změnami vodivosti větví měniče či spínače. Označujeme jej značkami sepnutých součástek. Tak např. takt V1, V2 je časový interval, ve kterém jsou sepnuty součástky V1, V2.

Komutace větví měniče (spínače) je elektromagnetický děj v obvodu měniče (spínače) charakterizovaný přechodem proudu z jedné větve měniče (spínače) na druhou aniž by byl přerušen proud odtékající z (nebo přitékající do) uzlu obou větví. Termín komutace měniče (spínače) nelze zaměňovat s termínem komutace polovodičové součástky. Ke komutaci běžně dochází po sepnutí polovodičové součástky jedné z komutujících větví, *Sepnutí a nárůst proudu v této větvi, pokles proudu a nakonec vypnutí polovodičové součástky ve druhé větvi, umožňuje komutační napětí působící na obě větve*.

- **Vnější komutace** (dříve označována jako přirozená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným vně měniče. Užšími termíny síťová komutace nebo zátězová komutace je blíže určován původ komutačního napětí.
- **Vlastní komutace** (dříve označována jako nucená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným ve vlastním obvodu měniče.
- **Přímá komutace** probíhá v jednom komutačním taktu (obr. 40.1), přímo z jedné hlavní větve na druhou. Přímou komutaci je možno označit též jako

jednostupňovou.

Kapitola 41

Pоловоди́чové součástky výkonové elektroniky

Obsah

41.1 MOSFET tranzistory	382
41.1.1 Odhad ztrátového výkonu tranzistoru	382

41.1 MOSFET tranzistory

41.1.1 Odhad ztrátového výkonu tranzistoru

Odhad ztrátového výkonu bude proveden pro potřeby výběru optimálního MOSFET tranzistoru pro danou výkonovou aplikaci

41.1.1.1 Typy ztrát v MOSFET struktuře a antiparalelní diodě

Celkové ztrát ve spínacím režimu lze rozdělit do tří složek:

- **Vodivostní ztráty** (Conduction losses)
- **Spínací ztráty** (Switching losses)
- **Blokovací ztráty** (Blocking "leakage" losses)

$$P_{TOTAL} = P_C + P_{SW} + P_B \doteq P_C + P_{SW} \quad (41.1)$$

Kapitola 42

Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů

Obsah

42.1 Úvod	384
42.2 Výkonové tranzistory MOS	385
42.2.1 Princip funkce tranzistoru MOS	385
42.2.2 Struktury tranzistorů MOS	385
42.2.3 Statické parametry	385
42.2.4 Výkonový tranzistor ve spínacím režimu	385
42.3 Tranzistory IGBT	385
42.3.1 Statické parametry	385
42.3.2 Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT	385
42.4 Metody řízení spínacího procesu	385
42.4.1 Vliv velikosti hradlového odporu	385
42.4.2 Aktivní řízení spínání (Active gate control)	385
42.5 Způsoby detekce nadproudů	388
42.5.1 Uvažované typy zkratových obvodů ve větvi výkonového měniče s indukční zátěží	389
42.5.2 Monitorování velikosti kolektorového napětí	389
42.5.3 Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping	389

42.1 Úvod

V obecném smyslu se pojmem budič výkonové součástky rozumí určité rozhraní mezi řídicí jednotkou a výkonovou součástkou. Základní funkcí je přizpůsobit logické řídicí signály způsobu ovládání hradla výkonové součástky. S rostoucím instalovaným výkonem a spínací frekvencí výkonového elektronického systému jsou na budiče kladený vyšší nároky. Častým požadavkem je spínání výkonové součástky na plovoucím potenciálu vůči řídicímu signálu. Z toho vyplývá nutnost galvanického oddělení řídicích signálů na rozhraní mezi řídicími a výkonovými obvody elektronického systému. Ve většině aplikací jsou také na galvanické oddělení kladený ještě bezpečnostní požadavky. Můžeme se proto setkat s budiči, které mají řídicí signály galvanicky odděleny, ačkoliv výkonový spínač pracuje na stejném potenciálu jako řídicí elektronika, nebo například s budiči s dvojitou izolací.

Při spínání často dochází k potenciálovým skokům mezi hradlem a řídicí elektronikou, což klade mimořádné požadavky na kvalitu galvanického oddělení a odolnost proti rušení vlivem du/dt . Budič tudíž vyžaduje vlastní, rovněž galvanicky oddělený napájecí zdroj, který je jednoznačně řešen vždy impulsním transformátorem. Velmi důležitou součástí budiče jsou rychlé elektronické ochrany, jejich úkolem je zajistit "nezničitelnost" výkonového spínače. Informaci o nestandardním stavu kterékoliv ochrany je nutno hlásit zpět do řídicího systému.

V následující kapitole se budeme věnovat konstrukci a návrhu budičů pro výkonové spínače typu IGBT pro trakční aplikace. Při provozu nejen trakčních měničů, se během spínacího procesu IGBT prvku generují vysoké strmosti kolektorového napětí a proudu, které vytváří rušení (EMI) a přepěťové špičky při vypínání. Jelikož budič představuje elektronický obvod, pracující ve velmi těsné blízkosti výkonového spínače, existuje vždy elektromagnetická vazba, přes kterou se šíří rušení a je tedy nezbytné zkoumat jeho odolnost. Zpomalení spínacího procesu sice omezuje generované strmosti, ale vede ke zvyšování ztrát. Dosažení optimálního kompromisu mezi úrovní rušení a výkonovou ztrátou vede na konstrukci komplexních budičů, které spínací proces výkonové součástky kontrolují ve všech jeho fázích.

42.2 Výkonové tranzistory MOS

42.2.1 Princip funkce tranzistoru MOS

42.2.2 Struktury tranzistorů MOS

42.2.3 Statické parametry

42.2.4 Výkonový tranzistor ve spínacím režimu

42.2.4.1 Zapínací proces

42.2.4.2 Vypínací proces

42.3 Tranzistory IGBT

42.3.1 Statické parametry

42.3.2 Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT

42.4 Metody řízení spínacího procesu

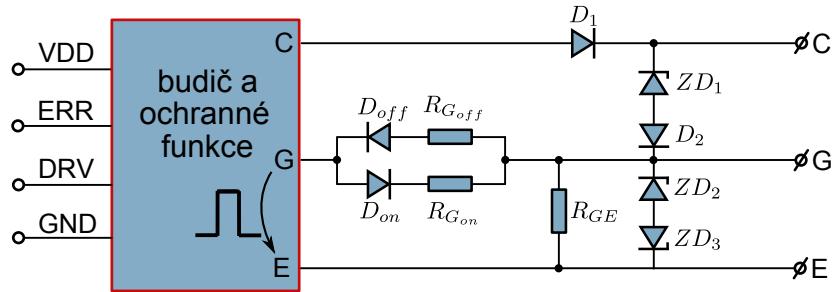
42.4.1 Vliv velikosti hradlového odporu

42.4.2 Aktivní řízení spínání (Active gate control)

Příklad budiče IGBT s čistě odporovým řízením spínacího procesu je na obrázku 42.1, z něhož je patrné, že při zapínání tranzistoru je na hradlo připojeno napětí U_{dON} přes předřazený zapínací rezistor $R_{G_{ON}}$ a analogickým způsobem při vypínání je předřazen rezistor $R_{G_{OFF}}$. Spínací proces je tedy řízen pouze těmito rezistancemi. Na obrázku 42.1 jsou též vyznačeny základní ochrany:

- Gate-Emitter-clamping (ZD2, ZD3),
- desaturation-monitoring (D1),
- overvoltage clamping (ZD1),

které obvykle zajišťují činnost IGBT v bezpečné pracovní oblasti (Safe operating area - SOA) i během vystavení tranzistoru nejhorským pracovním podmínkám, jako jsou například zkrat nebo přepětí.



Obrázek 42.1: Princip budiče s čistě odporovým řízením spínání společně se základními ochranami IGBT

There are some drawbacks of the resistive control. There is no separate influence on collector current and collector-emitter voltage in the switching interval. The switching losses increase relatively strong with higher RG. Varying the gate resistance influences both the switching and delay times. Often it is not possible to control overvoltages at turn-off sufficiently and in case of series connection of IGBTs additional measures are to be taken. To avoid these drawbacks and to adapt and optimize the switching behaviour to the requirements, the gate drive can be controlled actively. A lot of work has been done and published in this field, mostly for IGBTs in series connection or for high power [3, 4]. There are only few investigations aimed at the power range below high power [5], where because of extreme sensitivity to costs only a limited number of additional electronic components are allowed.

42.4.2.1 Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového proudu (dI/dt control)

Je-li $U_{GE} = U_{d_{ON}} > U_{GE_{th}}$ je IGBT spínač ve vodivém stavu a pouze celková parazitní indukčnost v obvodu zkratového proudu omezuje dI/dt kolektorového proudu. Doporučovanou možností jak redukovat maximální kolektorový proud $I_{C_{max}}$ a také maximální $dI_C/dt|_{max}$ je snížení hradlového napětí U_{GE} . Pro odvození závislosti strnosti kolektorového proudu na hradlovém napětí vyjděme z náhradního schématu dle obr. 42.2 a idealizovaných průběhů spínacího a vypínačího procesu výkonového spínače dle obrázku *. Kolektorový proud v saturaci je možné vyjádřit vztahem

$$I_C = g_m \cdot (U_{GE} - U_{GE_{th}}) \quad (42.1)$$

kde g_m označuje transkonduktanci, $U_{GE_{th}}$ je prahové napětí (threshold voltage)

$$I_G = C_{GS} \frac{dU_{GS}}{dt} \quad (42.2)$$

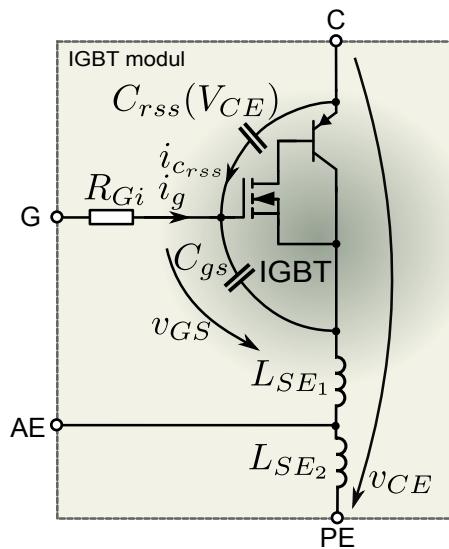
$$\frac{dI_C}{dt} = g_m \frac{dU_{GS}}{dt} = \frac{g_m}{C_{GS}} \cdot I_G \quad (42.3)$$

Je-li $U_Z > U_{LSE} + U_{GE}$ pak neprochází proud skrz větev omezovače na obr. 42.3 a můžeme sestavit náhradní rovnici dle obr. **. Hradlový proud vyjádříme z rovnice (42.3) a dosadíme do rov. 42.4.

$$U_{d_{ON}} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}})I_G + U_{GS} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (42.4)$$

$$U_{d_{ON}} - U_{GS} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} \frac{dI_C}{dt} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (42.5)$$

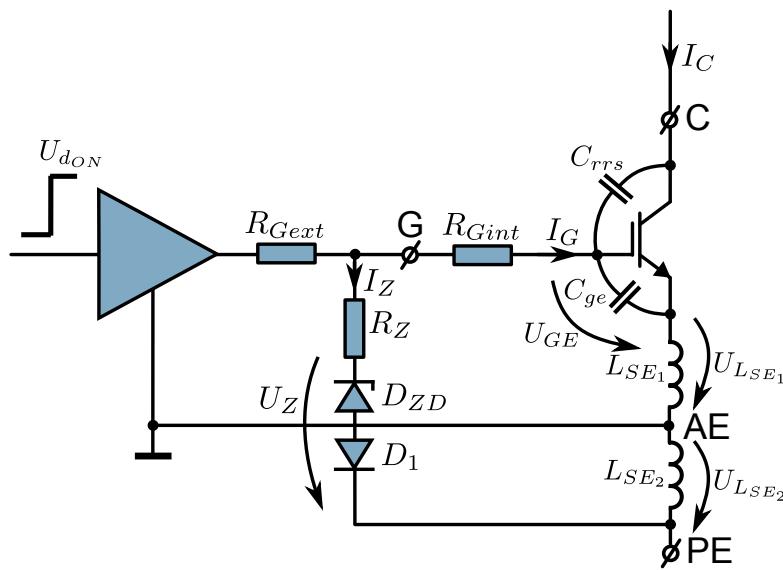
$$\frac{dI_c}{dt} = \frac{U_{d_{ON}} - U_{GS}}{(R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} + L_{SE_1}} \quad (42.6)$$



Obrázek 42.2: Náhradní schéma IGBT modulu (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)

42.4.2.2 Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového napětí (dU/dt control)

Jednoduchý způsob realizace tohoto způsobu řízení



Obrázek 42.3: Obvod budiče se zavedenou zpětnou vazbou od di/dt tvořenou součástkami R_Z, ZD_1, D_1 (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)

42.5 Způsoby detekce nadproudu

Vysoká spolehlivost provozu výkonového systému, je v současnosti standardním požadavkem moderní komerční aplikace IGBT. Ochrana výkonových prvků před destrukcí v případě nadproutu je tedy nezbytná a bývá řešena následujícími konvenčními metodami:

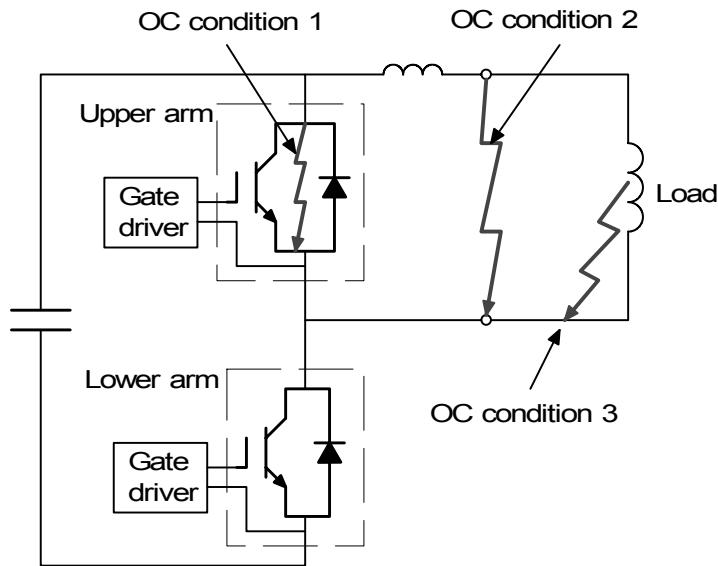
- hlídání hodnoty kolektorového napětí U_{CE} - collector-emitter voltage monitoring method (viz 42.5.2),
- proudový transformátor - current transformer (CT).

První metoda je velice jednoduchá a její princip spočívá ve vyhodnocování úbytku mezi kolektorem a emitorem sepnutého tranzistoru. Problém nastává u vysokonapěťových aplikací, kde je nutné použít vysokonapěťovou signálovou diodu a navíc ochrana nefunguje během přechodného děje spínacího procesu, protože napětí U_{CE} klesá pomalu. Je tedy vhodné používat tuto ochranu v kombinaci s jinou. Širokému použití proudových transformátorů jen pro ochranné účely brání především cena spolu s velkým počtem kusů pro pokrytí všech možných kombinací zkratových obvodů, jež v dané aplikaci mohou nastat.

Následující kapitoly budou věnovány metodám detekce poruchového stavu a způsobům bezpečného vypnutí IGBT i v těchto nepříznivých režimech. Nejprve bude nutné kategorizovat možné poruchové režimy podle chování IGBT. Zajištění těchto

funkcí je náplní moderního budiče IGBT.

42.5.1 Uvažované typy zkratových obvodů ve větvi výkonového měniče s indukční zátěží



Obrázek 42.4: Znázornění třech uvažovaných zkratových obvodů ve větvi výkonového měniče s indukční zátěží

42.5.2 Monitorování velikosti kolektorového napětí

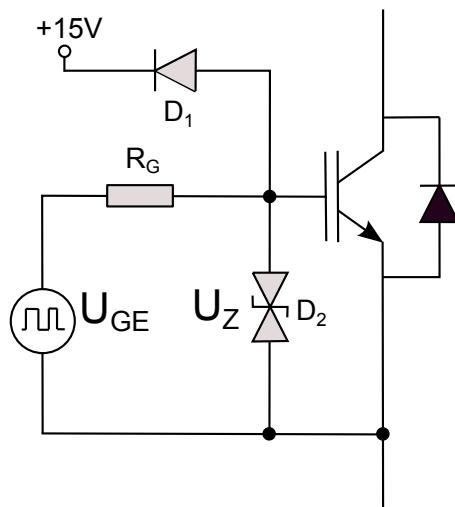
42.5.3 Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping

$$U_{Z_{GE}} = U_Z \cdot (1 + \alpha_T \cdot \Delta\vartheta_j) \cdot (1 + T_V) \leq U_{GE_{peak}}, \quad (42.7)$$

$$U_{GE_{max}} \leq U_Z \cdot (1 - T_V) \quad (42.8)$$

kde: U_Z ... jmenovité napětí transilu; $U_{GE_{peak}}$... špičková hodnota hradlového napětí - při zkratu: $\leq 17,5V$; α_T ... teplotní koeficient transilu; $\Delta\vartheta_j$... oteplení nad jmenovitou teplotu okolí $25^\circ C$; T_V ... katalogová tolerance transilu

Na obrázku 42.5 jsou znázorněny dvě jednoduché možnosti. V případě použití transilu je nutné dbát zvýšenou pozornost jeho výběru. Průrazné napětí musí mít co



Obrázek 42.5: Jednoduchá realizace omezovače hradlového napětí pomocí Shottkyho diody nebo tranzistoru

nejnižší rozptyl a při změně teploty okolí nesmí v běžném provozu omezovat budicí signál. Těmto požadavkům nejlépe vyhovuje transil 1.5KE16CA:

- $\alpha_T = 8 \cdot 10^{-4}$ ($12mV/K$),
- $\Delta\vartheta_j = 50K$ (předpoklad),
- $T_V = 5\%$,

z čehož vyplývají následující kontrolní rovnice

$$U_Z(@ + 75^\circ C; +5\%) = 17,53V \approx U_{GE_{peak}} \quad (42.9)$$

$$U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%) = 14,53V \approx U_{GE_{min}} \quad (42.10)$$

$$U_Z(@ + 25^\circ C; -5\%) = 15,20V \geq U_{GE_{max}} \quad (42.11)$$

V případě krajní hodnoty $U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%)$ dojde při buzení $U_{GE} = \pm 15V$ ke krátkodobé aktivaci ochranného transilu, což způsobí jeho ohřátí a posunutí hladiny U_Z .

Efektivita varianty se Shottkyho diodou (viz obr. 42.5) je závislá na velikosti parazitní indukčnosti mezi hradlem a kondenzátorem zdroje budiče. Zdroj budiče musí také zajistit aby napětí na tomto kondenzátoru při funkci ochrany nevzrůstalo.

Část XX

Elektrické přístroje

Kapitola 43

Teorie elektrického oblouku

Obsah

43.1 Teorie spínacího oblouku	394
43.1.1 Plazma elektrického oblouku	394
43.1.2 Charakteristika vypínacího pochodu	394
43.1.3 Elektrický oblouk a jeho zhášení	398
43.1.4 Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového	398

43.1 Teorie spínacího oblouku

43.1.1 Plazma elektrického oblouku

Ve spínací technice se zabýváme plazmatem vznikajícím hořením elektrického oblouku při spínání elektrických obvodů. Dále popisované vlastnosti elektrického oblouku jsou rozpracovány pro druh plazmatu hořící ve vypínací dráze zhášecích komor vypínačů. Toto plazma se charakterizuje jako vysokotlaké (tlaky plynu vyšší než 0,1 MPa) a elektrické proudy řádově kiloampéry. Pozornost bude soustředěna zejména na elektrický oblouk hořící v tlakoplynových zhášecích komorách při vypínání elektrických obvodů. V tlakoplynových zhášecích komorách byl oblouk nejvíce prozkoumán u tlakovzdušného principu a u vypínačů s plynem SF₆ [BV83, s. 3].

43.1.2 Charakteristika vypínacího pochodu

43.1.2.1 Základní uspořádání zhášecích komor

Základním uspořádáním zhášecích komor lze rozdělit z hlediska proudění plynu na zhášecí komory:

- s jednostranným prouděním,
- s dvoustranným prouděním.

Na obrázcích je schématicky znázorněn oblouk, který je axiálně ofukován plynem z prostoru zhášecí komory s tlakem p_1 přes zhášecí trysky dutinou kontaktů do výfuku, kde je nižší tlak p_2 .

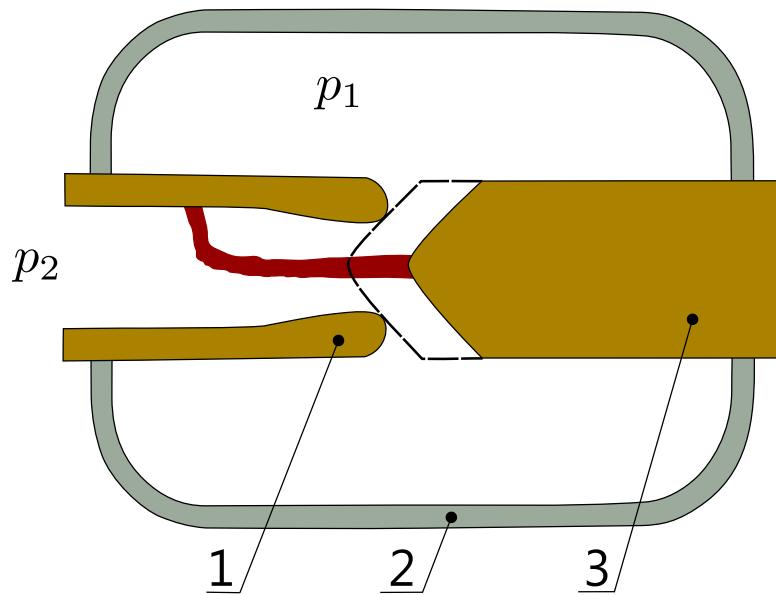
Legenda:

1. Zhášecí tryska
2. Tlaková izolační nádoba
3. Kontakt
 - $p_1 \dots$ tlak ve zhášecí komoře
 - $p_2 \dots$ tlak ve výfukovém prostoru

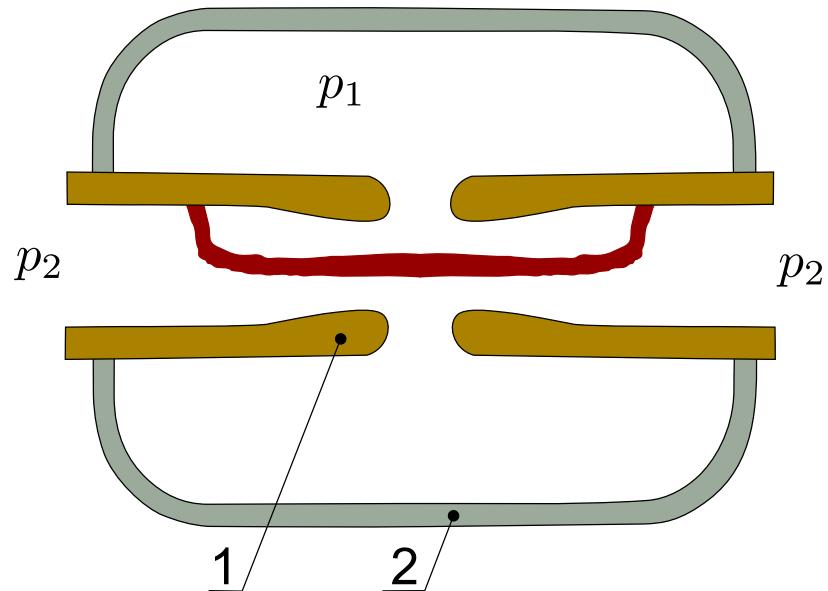
43.1.2.2 Tři základní intervaly vypínacího pochodu

Vypínací pochod lze z hlediska zkoušení vypínačů rozdělit do tří základních intervalů:

1. $t_s \dots$ Silnoproudý interval



Obrázek 43.1: Schématické usporádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s jednostranným prouděním.



Obrázek 43.2: Schématické usporádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s dvousstranným prouděním.

2. $t_i \dots$ **Interakční interval**

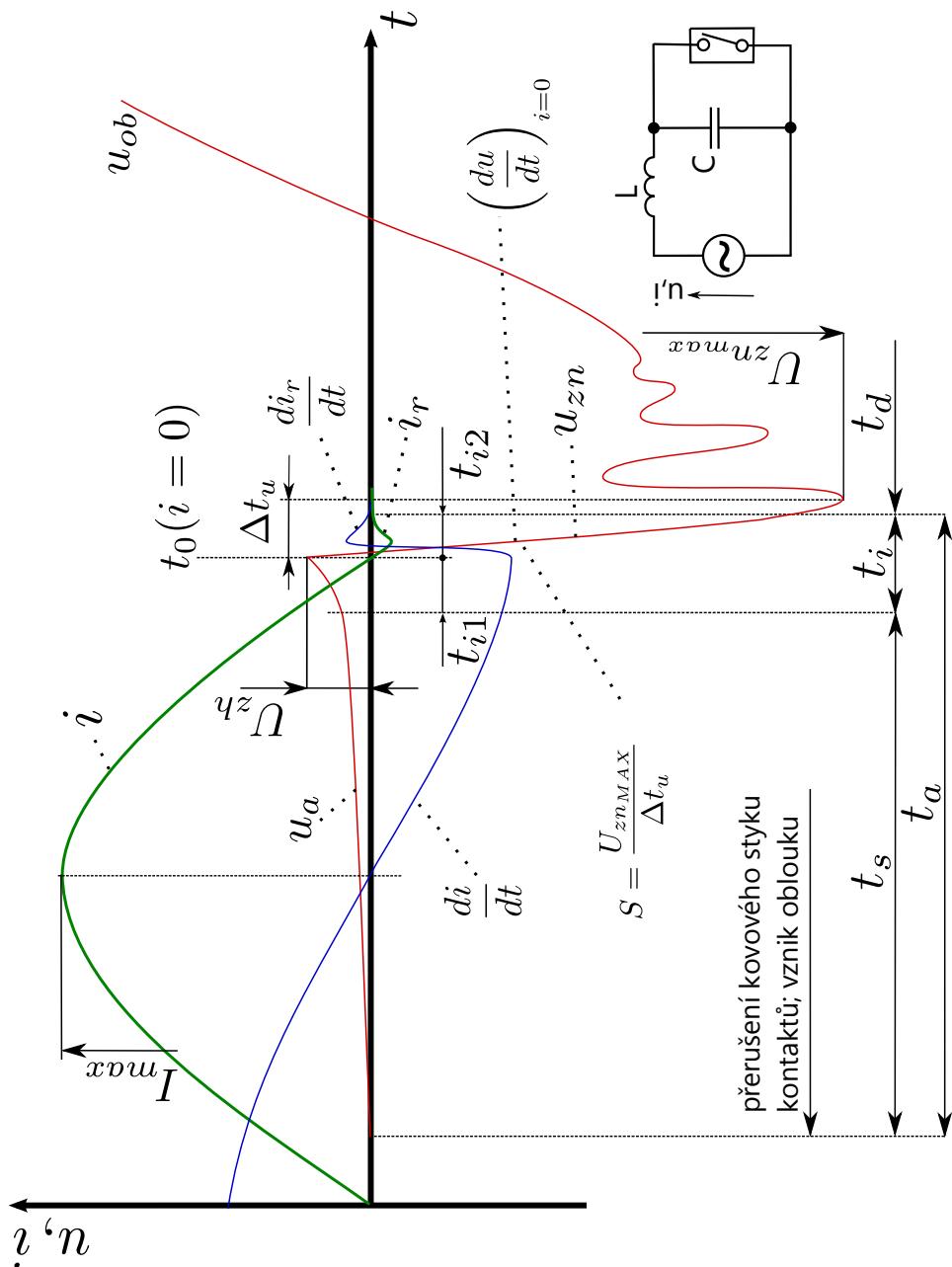
3. $t_d \dots$ **Dielektrický interval**

- $t_s \dots$ silnoproudý interval
- $t_i \dots$ interakční interval
 - $t_{i1} \dots$ interval výrazné změny obloukového napětí
 - $t_{i2} \dots$ interval zbytkového proudu
- $t_d \dots$ dielektrický interval
- $t_a \dots$ doba hoření oblouku
- $\frac{di}{dt} \dots$ derivace proudu podle času
- $i_r \dots$ zbytkový proud
- $\frac{di_r}{dt} \dots$ derivace zbytkového proudu podle času
- $u_a \dots$ napětí oblouku
- $U_{zh} \dots$ zhášecí amplituda napětí
- $U_{zn_{max}} \dots$ maximální hodnota zotaveného napětí
- $u_{0b} \dots$ obnovené napětí
- $S \dots$ strmost zotaveného napětí (podle IEC)
- $\Delta t_u \dots$ doba od průchodu proudu nulou do okamžiku protnutí tečny obalující křivku u_{zn} v hodnotě $U_{zn_{max}}$
- $\frac{du}{dt}|_{i=0} \dots$ okamžitá strmost zotaveného napětí v nulové hodnotě proudu

Charakteristické parametry vypínače v intervalech vypínacího pochodu:

- $\mathbf{t_s} : i, I_{max}, u_a$
- $\mathbf{t_a} : \frac{di}{dt}, i_r, \frac{du}{dt}, u_{zn}, U_{zn_{max}}$
- $\mathbf{t_d} : \frac{du}{dt}, S, U_{zn_{max}}$

Rozdělení vypínacího pochodu do těchto intervalů umožňuje snadněji specifikovat základní kritéria, kterým musí zhášecí komora vyhovovat při vypínání. Při vypínání střídavého proudu charakter proudění plynu závisí nejen na časově proměnlivém zdvihu kontaktů, druhu plynu a tlakových poměrech, ale i na předcházejícím proudu, přičemž všechny veličiny jsou vzájemně závislé. Hranice intervalů však lze určit jen přibližně, protože jsou závislé na kmitočtu proudu a na časové konstantě oblouku. Časová konstanta oblouku je proměnlivá nejen s velikostí proudu, ale závisí i na uspořádání zhášecí komory.



Obrázek 43.3: Základní intervaly vypínačího pochodu.

43.1.3 Elektrický oblouk a jeho zhášení

43.1.4 Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového

Jak bylo uvedeno v předchozích kapitolách, ve zhášecí komoře výkonových vypínačů po zhasnutí oblouku ještě zůstává po krátkou dobu mezi elektrodami zbytkové plazma, které obsahuje značný počet volných elektronů. Je-li toto množství kolem 10^{14} až 10^{15} elektronů v metru krychlovém, pak je splněna podmínka pro tvorbu *elektronových lavin* nebo *strimérů* a strmě stoupající zotavené napětí může způsobit jiskrový výboj, který přejde okamžitě v obloukový opětný zápal. Protože v plazmě oblouku je hustota elektronů závislá na její teplotě, nemá-li dojít k opětnému zápalu, musí plazmu dobré fungující vypínač rychle ochladit. Chladící pochod je podmíněn vlastností plynu vyjádřenou

textbf{teplelnou vodivostí} $[\frac{W}{K \cdot m}]$, kterou způsobují tyto dva dílčí jevy:

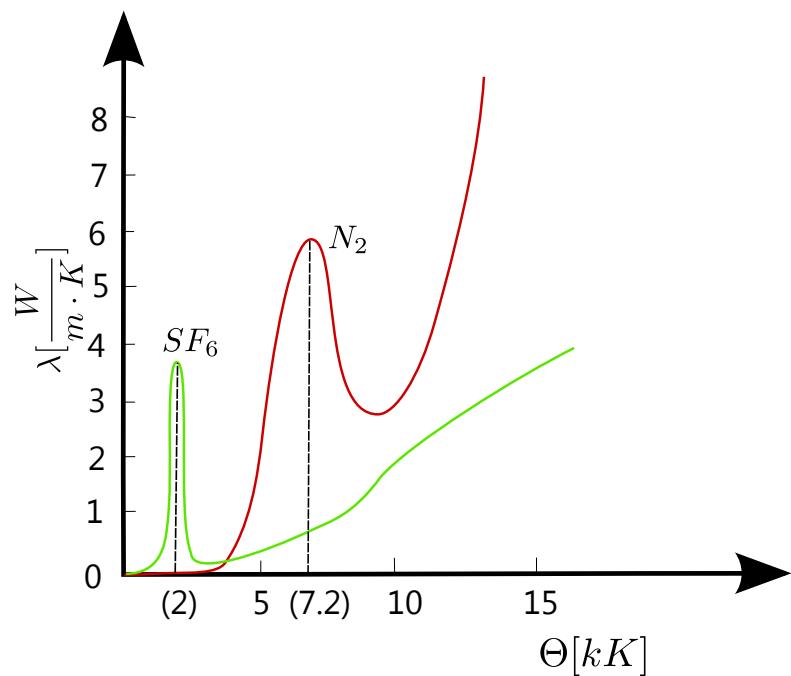
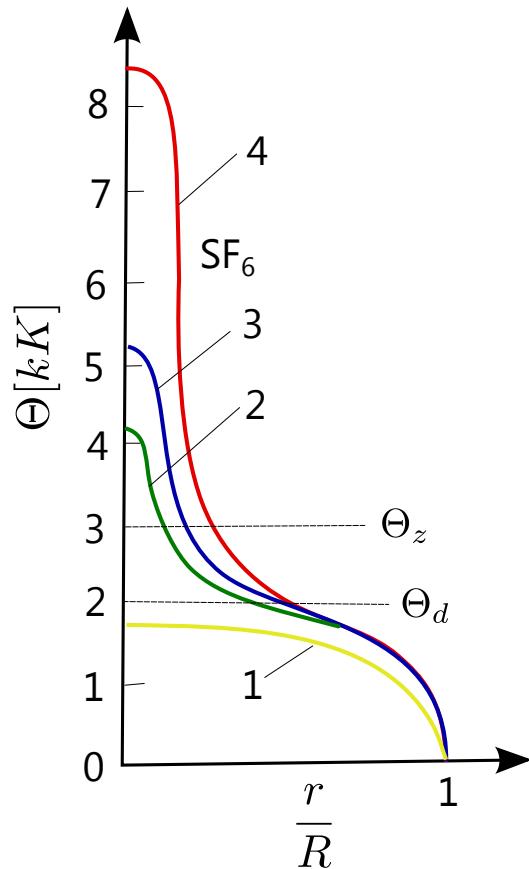
- Odvod kinetické energie plynu, který probíhá při vzájemných srážkách molekul rozkmitaných tepelnou energií plynu,
- Disociace molekul, kdy při rozkladech molekul na základní atomy se při nepružných srážkách pohlcuje disociační energie a tím se kinetická energie molekul přeměňuje na potenciální energii atomů. Tato se odvádí difúzí do oblastí plynu s nízkou teplotou.

Disociace molekul nastává jen v úzkém teplotním intervalu charakterizovaném **disociační teplotou** Θ_d . Proto má křivka tepelné vodivosti plynu kolem teploty Θ_d značně vyjádřené maximum.

- Plyn SF_6 : $\Theta_d = 2500K$.
- Plyn N_2 (vzduch): $\Theta_d = 7500K$.

Rozdílné teploty Θ_d jsou způsobeny tím, že disociační energie molekuly dusíku N_2 je $14.5eV$, zatímco síra S disociuje z molekuly SF_6 již při energii $10.4eV$. Průběh křivek tepelných vodivostí různých plynů dovoluje současně odhadnout prostorové rozdělení teplot v elektrickém oblouku, neboť v místech s *maximálnou vodivostí je minimální teplotní spád (gradient)*. Proto se v křivkách znázorňující rozdělení teploty oblouku v závislosti na jeho poloměru objevují v okolí disociačních teplot pro dusík N_2 a SF_6 znatelné zlomy pro různé velikost proudů. Z těchto průběhů je také možné určit dvě zcela rozdílné oblasti oblouku:

- **Trup oblouku:** velmi jasně zářící oblast s vysokými teplotami ležícími nad Θ_d
- **Plášt oblouku:** difúzně svítivá část oblouku s teplotami dosahujícími maximálně Θ_d

(a) Tepelné vodivosti dusíku (N_2) a fluoridu sírového (SF_6)(b) Křivky rozdělení teplot obouku v závislosti na poloměru obouku v SF_6 ; 1 až 4 různé proudy obouku

Obrázek 43.4: Základní charakteristiky obouku hořícího v plynech SF_6 a porovnání s dusíkem

Důležitost disociační teploty Θ_d molekuly plynu zvlášť vyniká při sledování rychlosti zmenšování hustoty elektronů ve zbytkové plazmě oblouku, která je kritériem vzniku elektrického výboje mezi kontakty. Protože ve žhavém trupu je úbytek hustoty elektronů stokrát rychlejší než ve vnějším plášti oblouku, zaniká po nule proudu nejprve zářivý trup oblouku. *Zotavené napětí* působí již jen na *plášť oblouku*, v němž se hustota elektronů zmenšuje jen velmi zvolna. Protože kritickou veličinou pro elektrický výboj v plynném prostředí je hustota elektronů kolem $10^{14}/m^3$, bylo z kinetické teorie plynů odvozeno, že tento stav odpovídá přibližně teplotě kolem **3000 K**.

Bibliography

- [Bio04] D. Bolek. *Řešíme elektronické obvody aneb kniha o jejich analýze*. Vol. 1. BEN - technická literatura, 2004, 520 stran A5 / vázaná V8. ISBN: 80-7300-125-X (cit. on pp. 169, 171, 172).
- [Bio05] D. Bolek. *Modelování a simulace v mikroelektronice*. VUT Brno, 2005 (cit. on p. 221).
- [BLV07] J. Bičák, M. Laipert, and M. Vlček. *Lineární obvody a systémy*. nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN: 978-80-01-03649-5 (cit. on pp. 150, 151).
- [BV83] K. Bárta and Z. Vostracký. *Spínače velmi vysokého napětí*. SNTL/ALFA, 1983 (cit. on p. 394).
- [Dos05] J. Dostál. *Operační zesilovače*. Vol. 1. vydání. Nakladatelství BEN, 2005, p. 536. ISBN: 80-7300-049-0 (cit. on pp. 226, 227).
- [Ham96] J. Hammerbauer. *Elektrické napájecí zdroje a akumulátory*. Plzeň: Vydavatelství ZČU, 1996, p. 181 (cit. on pp. 261, 262, 273, 281).
- [Haz+10] J. Haze et al. “Teorie vzájemného převodu analogového a číslicového signálu”. In: *skripta VUT Brno* (2010), p. 139 (cit. on pp. 230, 231).
- [Her94] P. Herout. *Učebnice jazyka C*. České Budějovice: Nakladatelství KOPP, 1994, p. 269. ISBN: 80-85828-21-9 (cit. on p. 344).
- [Kes04] W. Kester. *Analog-Digital Conversion Handbook*. Ed. by A. Devices. Analog Devices, 2004, p. 1032. ISBN: 9780750678414 (cit. on p. 233).
- [Kni+04] V. Knichal et al. *Matematika II*. Ed. by V. Vilhelm and F. Kejla. Praha: SNTL, 2004, p. 600 (cit. on pp. 32, 33, 35, 36, 39).
- [Mam99] R. Mammano. “Switching Power Supply Topology Voltage Mode vs. Current Mode”. In: *Unitrode DN-62* (1999), p. 4 (cit. on pp. 282, 283).
- [Nel08] C. Nelson. “Dual Output Regulator Uses Only One Inductor”. In: *Linear Technology DN-100* (Jan. 1, 2008), p. 6 (cit. on p. 284).

- [NU01] P. Neumann and J. Uhlíř. *Elektronické obvody a funkční bloky 2*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001, p. 269. ISBN: 80-01-02394-X (cit. on pp. 224, 230, 235, 239).
- [NVP99] V. Novotný, P. Vorel, and M. Patočka. *Napájení elektronických zařízení*. Ed. by Ú. r. Vysoké učení technické Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Brno: VUT Brno, 1999, p. 139. ISBN: 8021423005, 9788021423008 (cit. on pp. 264, 266, 273).
- [Pin06] M. Pinker Jiří; Poupa. *Číslicové systémy a jazyk VHDL*. Nakladatelství BEN, 2006. 352 pp. ISBN: 80-7300-198-5 (cit. on p. 325).
- [Pol98] J. Polák. *Matematická analýza I*. ZČU - FAV, 1998. ISBN: 80-7082-466-2 (cit. on p. 22).
- [PV04] M. Patočka and P. Vorel. *Řídicí elektronika - pasivní obvody 1.díl*. Vol. 1. VUT B, 2004, p. 106 (cit. on p. 168).
- [Riz03] G. Rizzoni. *Principles And Applications Of Electrical Engineering*. McGraw Hill, 2003, p. 956. ISBN: 0072463473 (cit. on p. 256).
- [Sch01] H. Schildt. *Nauč se sám C++*. 1st ed. Praha: SoftPress, 2001, p. 624. ISBN: 80-86497-13-5 (cit. on p. 352).
- [Sla02] J. Slavík. *Řešené příklady z fyziky - klasická fyzika*. 4th ed. ZČU Plzeň, 2002, p. 233 (cit. on p. 107).
- [SO02] V. Stejskal and M. Okrouhlík. *Kmitání s MATLABEM*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2002, p. 376. ISBN: 80-01-02435-0 (cit. on p. 110).
- [ŠS10] V. Šebesta and Z. Smékal. *Signály a soustavy*. česky. Brno, 2010, p. 155 (cit. on p. 231).
- [ŠTo95] I. Štoll. "Mechanika". In: *Mechanika*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 1995, p. 228 (cit. on p. 110).
- [US02] J. Uhlíř and P. Sovka. *Číslicové zpracování signálů*. Nakladatelství ČVUT, 2002, p. 327. ISBN: 80-01-02613-2 (cit. on pp. 144, 146).
- [VZ01] J. Vobecký and V. Záhlava. *Elektronika součástky a obvody, principy a příklady*. 2. vydání. Praha: Grada Publishing, spol. s.r.o., 2001, p. 192. ISBN: 80-7169-884-9 (cit. on p. 253).
- [WRB48] W.R.Bennet. *Spectra of Quantized Signals*. Bell System Technical Journal. Bell Labs, July 1948 (cit. on p. 233).