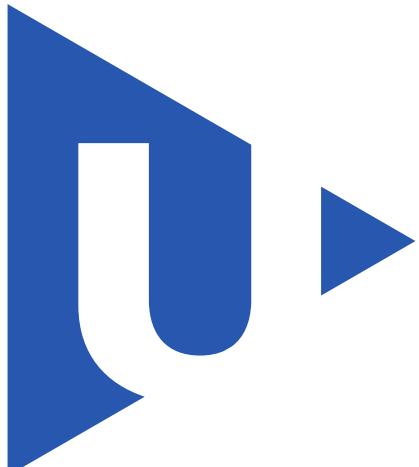


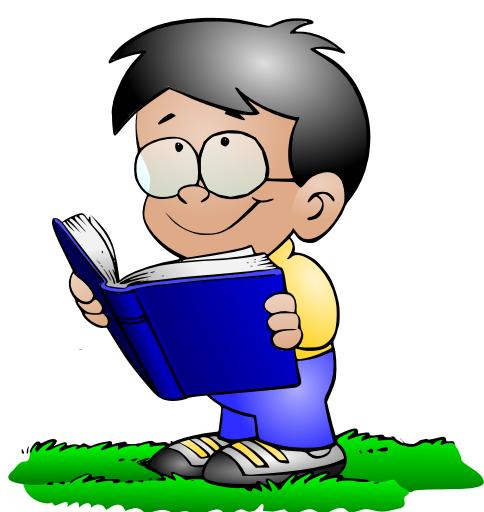
WIKING





ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

My school notes



Studijní notes

Wiking

Friday 30th November, 2012

Jaroslav Fait, jardak.fait@gmail.com
Fakulta elektrotechniky
Západočeská univerzita

I Lineární algebra	1
1 Zakládny lineární algebry	3
1.1 Matice	4
1.2 Determinanty	7
1.3 Vlastní čísla a vlastní vektory	9
1.4 Polynomy	15
1.5 Vektorové prostory se skalárním součinem	16
1.6 Vektory	18
II Matematická analýza I	21
2 Historie matematické analýzy	23
Seznam literatury	24
3 Reálná a komplexní čísla	25
Seznam literatury	26
4 Limita a spojitost funkce	27
4.1 Reálná funkce	28
4.2 Limita funkce	31
4.3 Spojitost funkce	31
Seznam literatury	31
5 Derivace funkce	33
5.1 Základní věty diferenciálního počtu	34
6 Aplikace diferenciálního počtu	39
6.1 Průběh funkce	40
Seznam literatury	44
7 Primitivní funkce	47
7.1 Motivace	48
Seznam literatury	58

8 Určitý integrál	59
8.1 Motivace	60
8.2 Vlastnosti určitého integrálu	61
Seznam literatury	63
9 Řady	65
Seznam literatury	66
10 Elementární metody řešení diferenciálních rovnic	67
10.1 Diferenciální rovnice 1. řádu	68
Seznam literatury	68
III Numerické metody	71
11 Úvod do numerických metod	73
11.1 Úvodní slovo	74
11.2 Reprezentace čísel ve výpočetní technice	75
11.3 Chyby při numerických výpočtech	77
11.4 Řešení nelineárních rovnic	79
IV Fyzika	83
12 Historie fyziky	85
12.1 Hlavní etapy vývoje	86
13 Diferenciální počet vektorových polí	89
13.1 Vektorový počet	90
13.2 Skalární a vektorová pole	92
13.3 Derivace polí - gradient	94
13.4 Operátor nabla	97
13.5 Diferenciální rovnice proudění tepla	100
13.6 Druhé derivace vektorových polí	102
14 Integrální počet vektorových polí	105
14.1 Tok vektorového pole	106
14.2 Tok povrchem krychle. Gaussova věta	108
15 Speciální teorie relativity	113
15.1 Princip relativity	114
15.2 Lorentzova transformace	116

16 Geometrická optika	117
16.1 Úvod	118
V Astrofyzika	119
17 Úvod	121
17.1 Historie astrofyziky	122
17.2 Základní vztahy	122
VI Mechanika	127
18 Kinematika částice	129
18.1 Kinematický popis pohybu částice	130
19 Dynamika částice	145
VII Teorie elektromagnetického pole	147
20 Spojité matematické modely polí	149
20.1 Působení na dálku versus teorie pole	150
20.2 Elektromagnetické pole	151
20.3 Elektrostatické pole	156
20.4 Stacionární proudové pole	157
20.5 Stacionární magnetické pole	165
VIII Signály a soustavy	179
21 Číslicové signály - posloupnosti	181
21.1 Základní typy posloupností	182
21.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	183
21.3 Základní operace s posloupností	184
22 Vlastnosti a popis lineárních systémů	187
22.1 Linearita, časová invariance a kauzalita	188
22.2 Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce	193

IX Senzory a akční členy	203
23 Snímače tepelných veličin	205
23.1 Základní pojmy	206
X Teorie elektrických obvodů	209
24 Základy elektrických obvodů	211
24.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů	212
24.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	212
24.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí	215
24.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	217
24.5 Napěťový dělič	219
25 Přechodné děje	223
25.1 Fyzikální podstata přechodných dějů	224
25.2 Přechodný jev kmitavého obvodu	230
26 Harmonické obvody	231
26.1 Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty	232
26.2 Obvody s nastavitelnými parametry	234
XI Elektronické součástky	235
27 Transformátory a cívky	237
27.1 Základní pojmy z magnetismu	238
27.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkom	241
27.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení	242
27.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	245
27.5 Ztráty v reálném transformátoru	250
27.6 Rozptyl transformátoru	252
27.7 Cívky s feromagnetickým jádrem	254
27.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	255
XII Analogové elektronické systémy	263
28 Počítačová simulace v elektrotechnice	265
28.1 Historie	266

28.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV	267
29 Zesilovače	269
29.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	270
30 Operační zesilovače	271
30.1 Úvod	272
30.2 Parametry operačního zesilovače	273
30.3 Ideální operační obvod	274
31 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	279
31.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	280
31.2 Principy A/D převodníků	289
31.3 Převod číslicového signálu na analogový	290
32 Úvod	297
32.1 Filtry ARC 2. řádu	298
XIII Elektronické napájecí zdroje	301
33 Spojitě regulované napájecí zdroje	303
33.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích	304
33.2 Neřízené usměrňovače	304
33.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí	305
33.4 Násobiče napětí	310
33.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů	310
34 Impulzně regulované napájecí zdroje	311
34.1 Úvod	312
34.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice	312
34.3 DC/DC měniče bez transformátoru	315
34.4 DC/DC měniče s transformátorem	323
34.5 Metody regulace spínaných zdrojů	333
34.6 Sbírka zapojení neizolovaných měničů	335
XIV Číslicové elektronické systémy	337
35 Číslicové systémy a signály	339
35.1 Co je číslicový systém	340
35.2 Kombinační logické funkce	341

36 Číslicové součástky a technologie	347
36.1 Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	348
36.2 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	349
XV Mikroprocesorová technika	355
37 Procesory AVR	357
37.1 AVR Architektura	358
38 ANSI-C pro mikrokontroléry	359
38.1 Stručný úvod	360
XVI Programovatelné logické obvody	361
39 Architektura	363
39.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů	364
39.2 Dynamické parametry PLD	377
40 Jazyk VHDL	379
40.1 Návrh číslicového obvodu	380
40.2 Úvod	381
40.3 Základní vlastnosti jazyka VHDL	382
40.4 Logické úrovně	383
40.5 Souběžné příkazy	384
40.6 Sekvenční příkazy	385
40.7 Technologicky nezávislá část návrhu	385
40.8 Knihovna LPM	386
XVII Elektromagnetická kompatibilita	393
41 Vlastnosti plošných spojů	395
XVIII C	397
42 Terminálový vstup a výstup	399
42.1 Hlavičkový soubor stdio.h	400
42.2 Standardní vstup a výstup znaku	400
42.3 Standardní vstup a výstup řetězců	402

42.4 Formátovaný standardní vstup a výstup	402
42.5 Souhrnné cvičení	402
43 Pointery	405
43.1 Základy práce s pointery	406
44 Preprocesor jazyka C	409
44.1 Připojení externích souborů	410
44.2 Definice maker	410
44.3 Podmíněný překlad	410
XIX ANSI/C++	411
45 Přehled jazyka C++	413
45.1 Objektově orientované programování	414
46 Úvod do tříd	429
46.1 Funkce konstruktor a destruktur	430
XX Výkonová elektronika	437
47 Měniče s vnější komutací	439
47.1 Takt a komutace	440
48 Polovodičové součástky výkonové elektroniky	441
48.1 MOSFET tranzistory	442
49 Budiče IGBT a MOSFET tranzistorů	443
49.1 Úvod	444
49.2 Výkonové tranzistory MOS	445
49.3 Tranzistory IGBT	445
49.4 Metody řízení spínacího procesu	445
49.5 Způsoby detekce nadproudu	447
XXI Elektrické přístroje	453
50 Teorie elektrického oblouku	455
50.1 Teorie spínacího oblouku	456

Část I

Lineární algebra

Obsah

1.1	Matice	4
1.1.1	Maticová algebra	4
1.1.2	Označení prvků matice	7
1.2	Determinanty	7
1.2.1	Permutace	7
1.3	Vlastní čísla a vlastní vektory	9
1.3.1	Motivace	9
1.4	Polynomy	15
1.4.1	Rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky	15
1.5	Vektorové prostory se skalárním součinem	16
1.5.1	Ortogonalní doplňky	16
1.6	Vektory	18

1.1 Maticy

Definice 1.1.1. Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici (m, n) . Jestliže každé uspořádané dvojici $(m, n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ přiřadíme prvek $a_{i,j} \in \mathcal{R}$ obdržíme reálnou **matici** typu (m, n) nad \mathcal{R} . Čísla jsou indexy, i je řádkový a j je sloupcový index. Matici zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

která má právě mn prvků (a_{ij}) uspořádaných do m řádků a n sloupců. Stručně píšeme $A = (a_{ij})$

Příklad 1.1.1. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

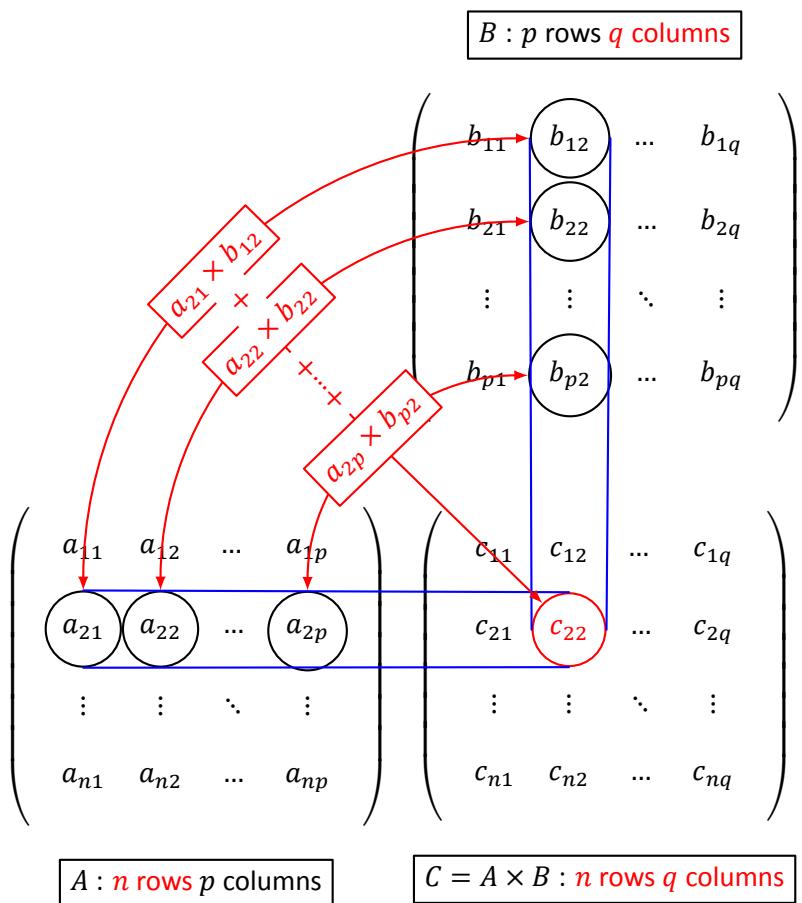
je čtvercová matice velikosti 4×4 . Prvek matice a_{23} je 2.

1.1.1 Maticová algebra

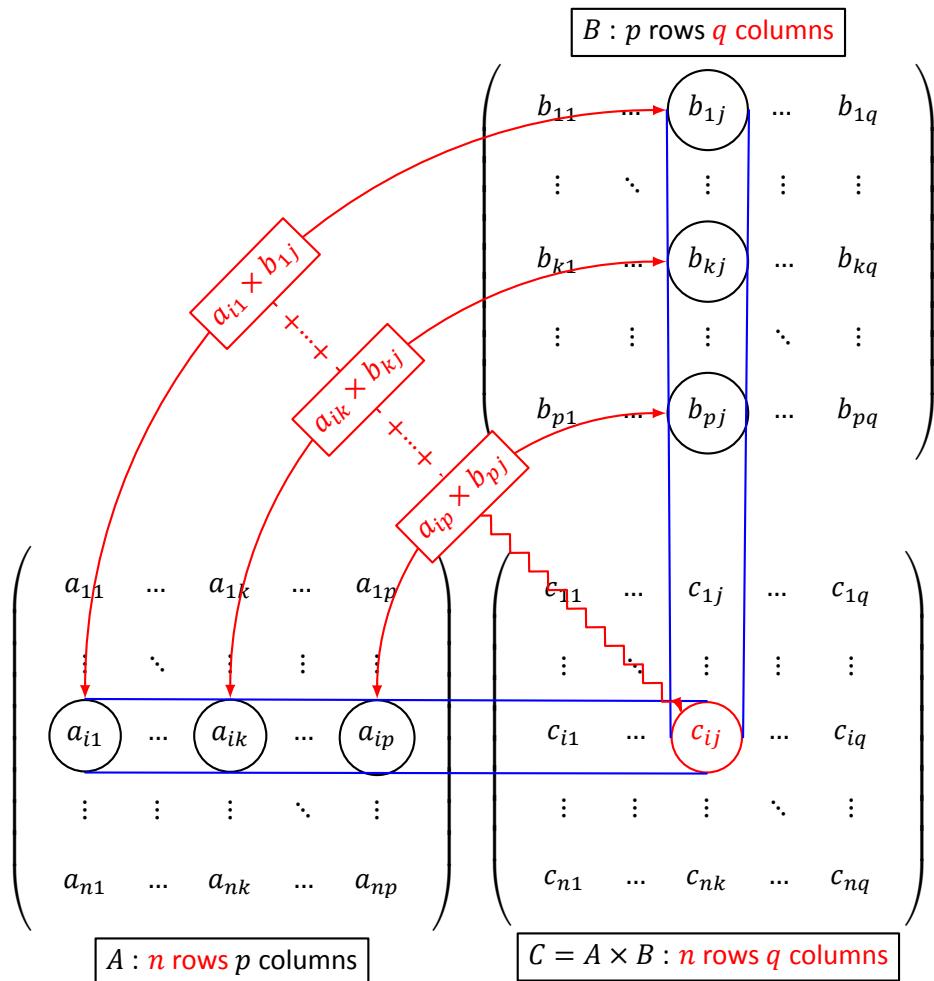
Definice 1.1.2. Součinem matice $A \in \mathcal{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathcal{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathcal{R}_{m,p}$ pro kterou platí:

$$C = AB; C = (c_{ij}); c_{ij} = \sum_n^{k=1} a_{ik} b_{kj}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p. \quad (1.1.2)$$

Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B . Obrázek 1.1.1 demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobením druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku c_{ij} (viz 1.1.2).



Obrázek 1.1.1: Násobení matic - 1. krok



Obrázek 1.1.2: Násobení matic - 2. krok

1.1.2 Označení prvků matice

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **řádek** a **sloupec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A se obvykle značí a_{ij} . Potom i-tý řádek matice obsahuje vodorovnou n-tici prvků $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a j-tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, kde $j = 1, 2, \dots, n$.

V tabulce 1.1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální¹, jednotkové², nulové, transponované a symetrické.

Matice téhož typu (m, n) nad \mathbb{R} budeme značit $\mathfrak{R}_{m,n}$.

Definice 1.1.3. (Rovnost matic): Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je rovna matici $\mathbf{B} = (b_{kl})$, jsou-li matici stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě **rovnají**, tj. $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{m,n}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.2 Determinanty

Abychom mohli nadefinovat determinant, budeme muset vědět, jak vypočítat permutaci entice, respektive zmanénko permutace.

1.2.1 Permutace

Definice 1.2.1. Nechť \mathbf{M} je libovolná konečná množina. Permutací množiny M nazýváme zobrazení π množiny \mathbf{M} na sebe.

Příklad 1.2.1. Permutace π množiny $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ je např. zobrazení π , definované předpisem:

$$\pi(a) = c, \pi(b) = d, \pi(c) = b, \pi(d) = a, \quad (1.2.1)$$

Místo tohoto zápisu se však používá přehlednější zápis ve tvaru matice typu $(2, 4)$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

¹Prvky a_{ii} kde $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice \mathbf{D} je typu (m, m) , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

²Jestliže $m = n$, pak mluvíme o čtvercové matici řádu m .

Matrice	Zápis
řádková	$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
sloupcová	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
diagonální	$a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
jednotková	$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
nulová	$\mathbf{0} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \forall i, j$
transponovaná	$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
symmetrická	$\mathbf{S} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

Tabulka 1.1.1: Speciální typy matic

kde v prvním řádku jsou vypsány všechny prvky množiny \mathbf{M} (v libovolném pořadí) a ve druhém řádku je pod každým prvkem zapsán jeho obraz v permutaci. Tutož permutaci však můžeme zapsat ve tvaru matice několika různými způsoby. Například mohou být

zapsány takto:

$$\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & c & a & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \text{apod.} \quad (1.2.3)$$

Zřejmě všechny čtyři uvedené zápisy permutace rov. 1.2.2 ve tvaru matice se liší navzájem pouze pořadím sloupců. Aby bylo možné zapsat každou permutaci množiny \mathbf{M} ve tvaru rov. 1.2.2 jediným způsobem, je nutné zvolit pevné pořadí prvků množiny \mathbf{M} a v zápisu permutace uvádět prvky matice \mathbf{M} v prvním řádku v tomto pořadí. Avšak známe-li toto pořadí prvků množiny \mathbf{M} , je pak obvykle zbytečné jej v zápisu permutace uvádět, ale stačí uvést pouze pořadí obrazů, tj. druhý řádek. Zvolíme-li např. v naší množině \mathbf{M} pevné pořadí prvků $\{a, b, c, d\}$, pak permutaci rov. 1.2.1 zapíšeme jako uspořádanou čtveřici $\{c, d, b, a\}$.

Definice 1.2.2. Když vytváříme uspořádanou n -tici navzájem různých prvků n -prvkové množiny \mathbf{M} , přiřazujeme každému prvku množiny \mathbf{M} právě jedno přirozené číslo, index příslušného prvku, z množiny prvních n přirozených čísel.

$$\pi = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (1.2.4)$$

Proto každé permutaci uspořádané n -tice prvků množiny \mathbf{M} odpovídá jednoznačně permutace příslušných indexů tj. permutace množiny 1.2.4 z definice 1.2.2. Stačí se tedy omezit při vyšetřování permutací n -prvkové množin na vyšetřování permutací množiny 1.2.4. Permutace π množiny 1.2.4 budeme zapisovat jako uspořádané n -tice

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$$

, kde $\pi(i)$ je číslo z množiny 1.2.4, které permutace π přiřazuje číslu i .

Příklad 1.2.2. *Spočítejme celkový počet permutací množiny.* V každé uspořádané n -tici může být na prvním místě kterákoli z n cifer, na druhém místě kterákoli ze zbývajících $n-1$ cifer (kromě té, která je na prvním místě), na třetím místě každá ze zbývajících $n-2$ cifer atd. Je tedy celkový počet všech permutací n -prvkové množiny $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Toto číslo se zapisuje pomocí symbolu $n!$ (čti **n -faktoriál**).

Definice 1.2.3. *Inverze v permutaci:* Inverzí v permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

1.3

Vlastní čísla a vlastní vektory

1.3.1 Motivace

Poznámka: Je-li $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární zobrazení z prostoru \mathcal{V} do prostoru \mathcal{V} (nikdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít

takovou bázi prostoru \mathcal{V} , že je matice zobrazení \mathbf{A} v této bázi co nejjednodušší, např. má následující strukturu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & A_k \end{pmatrix},$$

kde A_k jsou čtvercové matice malého řádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde A_k jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definice 1.3.1. Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{n,n}$ (matice je čtvercová řádu n).

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jestliže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (1.3.1)$$

pro jisté komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n$, $\mathbf{u} \neq \Theta$, potom číslo λ nazýváme **vlastním číslem** matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{u} **vlastním vektorem** příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme **spektrem matice A**. Pokud rov.

1.3.1 rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

můžeme ji rovněž psát ve tvaru

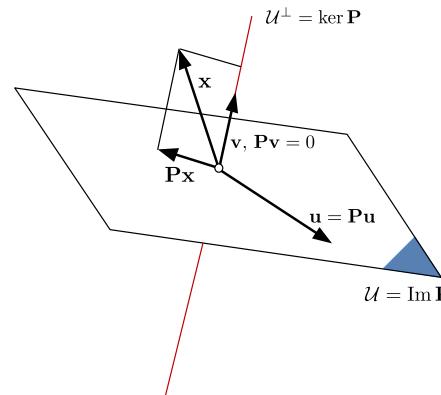
$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

Poznámka: U vlastních čísel studium pouze reálných matic ztrácí smysl, protože i reálná matice může mít komplexní vlastní čísla. Proto se uvažuje obecná komplexní matice.

Poznámka: Podmínka existence nenulového vektoru $\mathbf{u} \neq \Theta$ v definici vlastního čísla je nezbytná: kdyby bylo připuštěno i $\mathbf{u} = \emptyset$, potom by každé komplexní číslo bylo vlastním číslem a definice by ztratila smysl.

Poznámka: Odpovídá-li matice \mathbf{A} matici nějakého zobrazení \mathcal{A} , pak každý nenulový vektor z jádra zobrazení $\ker \mathcal{A}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu \emptyset . Je-li $\ker \mathcal{A} = \{\emptyset\}$ (je-li matice \mathbf{A} regulární), pak \emptyset není vlastním číslem matice \mathbf{A} .

Příklad 1.3.1. Je-li \mathbf{P} matice ortogonální projekce v prostoru \mathbb{R}^3 na nějaký podprostor \mathcal{U} (\mathcal{U} je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí $\mathbf{Pu} = \mathbf{u}$, všechny vektory z \mathcal{U} (s výjimkou nulového vektoru \emptyset) jsou vlastními vektory matice \mathbf{P} příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor \mathcal{U}^\perp je roven jádru projekce (nulovému prostoru matice \mathbf{P}), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku \mathcal{U} (s výjimkou \emptyset) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.



Soustava rov. 1.3.3 je **homogenní** a stručně ji můžeme zapsat

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (1.3.4)$$

Homogenní soustava má netriviální řešení, právě když je determinant matice soustavy roven nule, tj. v případě soustavy rov. 1.3.3, resp. rov. 1.3.4 platí

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (1.3.5)$$

Determinant $A(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$ nazýváme **charakteristický polynom** matice \mathbf{A} - jedná se o polynom stupně n v proměnné λ , který má v oboru komplexních čísel n kořenů. Rovnici $A(\lambda) = 0$ nazýváme **charakteristická rovnice matice \mathbf{A}** - jejími kořeny jsou **charakteristické hodnoty** (resp. **vlastní čísla**) matice \mathbf{A} .

Příklad 1.3.2. Určete spektrum matice a její spektrální poloměr následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Spektrum matice je množina všech jejích vlastních čísel. Spektrální poloměr je maximum z absolutních hodnot vlastních čísel. Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -3 - \lambda & 5 \\ 0 & -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ -0.25 & 2 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2 - \lambda)^2(-3 - \lambda) + 1.25(2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) &= 0 \\ (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 1.25 + 6] &= 0 \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1.25) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -0.5 + i, \quad \lambda_3 = -0.5 - i$$

- Spektrum matice \mathbf{A} je $\sigma(\mathbf{A}) = \{2, -0.5 + i, -0.5 - i\}$.
- Spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| = 2$.



Příklad 1.3.3. Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Vlastní čísla určíme z charakteristické rovnice: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Vlastní vektory \mathbf{x}_i odpovídající vlastním číslům λ_i , jsou řešením homogenní soustavy rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$.

- Vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0.5 \\ -3.5 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (1-\lambda)(4-\lambda) - \frac{7}{4} &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + \frac{9}{4} &= 0 \\ \lambda_1 = 4.5, \quad \lambda_2 &= 0.5\end{aligned}$$

- Vlastní čísla matice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2.5 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (3-\lambda)(4-\lambda) + \frac{5}{2} &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + \frac{29}{2} &= 0 \\ \lambda_1 = \frac{7+3i}{2}, \quad \lambda_2 &= \frac{7-3i}{2}\end{aligned}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = 4.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-4.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4-4.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3.5 & 0.5 \\ -3.5 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_2 = 0.5$: $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-0.5 & 0.5 \\ -3.5 & 4-0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 3.5 & 3.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

Vlastní vektor matice \mathbf{A} pro $\lambda_1 = \frac{7+3i}{2}$: $(\mathbf{B} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3-\frac{7+3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4-\frac{7+3i}{2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -5 & -(1-3i) \\ 5 & (1-3i) \end{pmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} -1+3i \\ 5 \end{pmatrix} r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0\end{aligned}$$

Vlastní vektor matice \mathbf{B} pro $\lambda_2 = \frac{7-3i}{2} : (\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} 3 - \frac{7-3i}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 - \frac{7-3i}{2} \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{cc} -\frac{10}{4} & -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc} -5 & -(1+3i) \\ 5 & (1+3i) \end{array} \right) \rightarrow \\ \mathbf{x}_2 = \left(\begin{array}{c} -1-3i \\ 5 \end{array} \right) r, r \in \mathbb{C}, r \neq 0 \end{aligned}$$

```

1 % example:
2 % Determine the spectrum of a matrix and its spectral radius:
3 % write the matrix A
4 A = [2 2 0; -3 -3 5; 0 -0.25 2]
5 % solutions:
6 % d = eig(A) Returns the vector of the matrix's own numbers.
7 vlastni_cisla = eig(A)
8 spektralni_polomer = max(abs(vlastni_cisla))
9 %=====
10 % example:
11 % Specify your own numbers and corresponding own vectors
12 % of the following matrices:
13 A1 = [1 0.5; 3.5 4]
14 A2 = [3 -1; 2.5 4]
15 % soulutions:
16 [vl_vektory_mA1 , vl_cisla_mA1] = eig(A1)
17 [vl_vektory_mA2 , vl_cisla_mA2] = eig(A2)
18 % notes:
19 % vlastni cisla jsou na diagonale
20 % 1. sloupec vl_vektoru odpovida vl_cislu v 1. sloupce

```

Výpis 1.1: Výpis programu pro ověření výpočtu vlastních čísel matic programem Matlab.

Příklad 1.3.4. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$, kde

$$\mathbf{A} \text{ je matice } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: (z předchozího příkladu víme, že $\lambda_1 = 4.5, \lambda_2 = 0.5$) a \mathbf{I} jednotková matice. Označme symbolem λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a nechť \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor. Pak platí:

- Matice \mathbf{A}^2 má vlastní čísla rovna λ^2 .

- Matici $4\mathbf{A}$ má vlastní čísla rovna 4λ .
- Matici $9\mathbf{A}^{-1}$ má vlastní čísla rovna $\frac{9}{\lambda}$.

Matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 9\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$ má vlastní čísla ve tvaru $\lambda^2 - 4\lambda + \frac{9}{\lambda} - 1$, vlastní vektory jsou stejné jako vlastní vektory odpovídající vlastním číslům matice \mathbf{A} . Tedy:

$$\sigma(B) = \{4.5^2 - 4 \cdot 4.5 + \frac{9}{4.5} - 1, \quad 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + \frac{9}{0.5} - 1\} = \{3.25, 15.25\}$$

Definice 1.3.2. Rovnost dvou polynomů: Řekneme, že dva polynomy

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 + b_0$ stupňů n a m se sobě **rovnají** právě tehdy, když $m = n$ a $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_{n-1} = b_{m-1}, a_n = b_m$. V tomto případě také říkáme, že mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou **totožné**.

Věta 1.3.1. Jestliže mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ jsou dva polynomy stupně n -tého a jestliže pro $n+1$ různých reálných nebo komplexních čísel x platí $f(x) = g(x)$, potom jsou polynomy **totožné**.

1.4 Polynomy

1.4.1 Rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky

Příklad 1.4.1. Rozložte na parciální zlomky lomenou racionální funkci

$$f(x) : y = \frac{7x + 8}{x^2 + x - 2}$$

Nejprve vypočteme nulové body jmenovatele:

$$x^2 + px + q = (x - u)(x - v) = x^2 - (u + v)x + uv \rightarrow p = -(u + v), \quad q = uv$$

Kořenové činitele $x^2 + x - 2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ zvolíme za jmenovatele parciálních zlomků a rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{7x + 8}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

kde A, B jsou neznámé konstanty. Tyto konstanty určíme tak, aby rozklad platil pro každé $x \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$. Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost dvou polynomů

$$7x + 8 = (A + B)x + 2A - B$$

Podle 1.3.1 se musí rovnat koeficienty u x a absolutní členy obou stran poslední rovnice \Rightarrow dostaneme soustavu rovnic pro určení A a B ve tvaru:

$$7 = A + B$$

$$8 = 2A + B$$

$$A = 5, \quad B = 2$$

Postup, který jsme užili, nazýváme **Metodou neurčitých koeficientů**.

Pozn: Pro určení koeficientů A, B se užívají také jiné postupy, např. dosazování kořenů jmenovatele, která je výhodná zejména v případech, kdy jmenovatel lomené racionální funkce má jednoduché kořeny. Postupujeme tak, že rov. 1.4.1 násobíme součinem kořenových činitelů $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ a dostaneme rovnici

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

pro určení koeficientů A, B dosazováním kořenů.

$$x = -2 \rightarrow -14 + 8 = B(-2 - 1) \rightarrow B = 2$$

$$x = +1 \rightarrow +7 + 8 = A(1 + 2) \rightarrow A = 5$$

1.5 Vektorové prostory se skalárním součinem

1.5.1 Ortogonální doplňky

Nechť U je podprostor vektorového prostoru V . Ortogonální doplněk U^\perp obsahuje všechny vektory, které jsou kolmé ke každému vektoru z U , neboli

$$\forall \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

což lze vyjádřit pomocí skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ortogonální doplněk U^\perp k podprostoru $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ tedy hledáme jako řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} \vec{u}_1 & 0 \\ \cdots & \vdots \\ \vec{u}_k & 0 \end{array} \right),$$

nuly na pravé straně při výpočtu zpravidla vynecháváme. Připomeňme také vztah

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \tag{1.5.1}$$

Příklad 1.5.1. Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle(1, -3, 2), (2, 1, 5)\rangle^\perp.$$

(Zdroj: [MosnaMA3])

Řešení: Hledáme vektor (x, y, z) , jehož skalární součin je se zadanými vektory roven nule. Budeme tedy řešit (úpravou na Gaussův tvar pomocí elementárních úprav) homogenní soustavu rovnic zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odtud dostáváme

$$z = \alpha, \quad 7y + z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}\alpha, \quad x + \frac{3}{7}\alpha + 2\alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{17}{7}\alpha$$

neboli

$$(x, y, z) = \alpha \left(-\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right) = \alpha = (17, 1, -7).$$

V dalších příkladech budeme nuly na pravé straně soustavy vynechávat a upravovat na výhodnější tvar

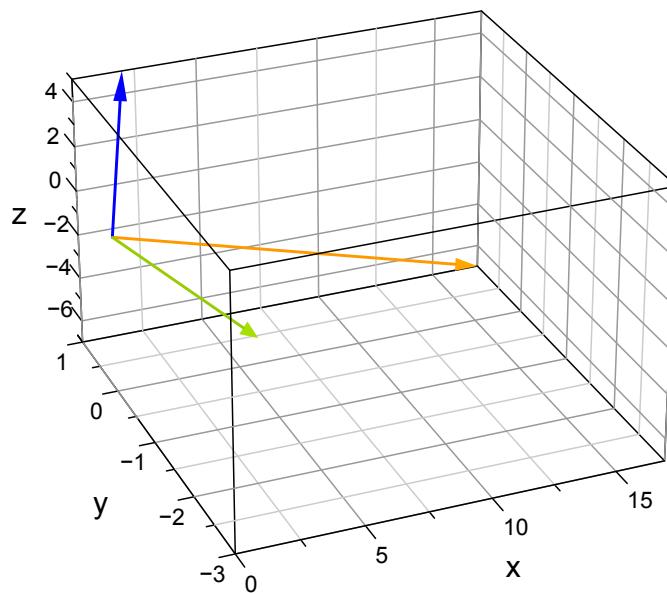
$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

Odtud již snadno zjistíme, že vektor $(x, 1, -7)$ jistě vyhovuje druhé rovnici. Dosadíme-li ho do první rovnice, dostaneme $7x + 17 \cdot (-7) = 0$ a $x = 17$.

Hledaný ortogonální doplněk je tedy lineární obal

$$\langle(17, 1, -7)\rangle^\perp.$$

Výsledek předchozího příkladu 1.5.1 lze interpretovat tak, že jsme našli všechny vektory, které jsou kolmé na rovinu určenou vektory ze zadání. Rovina je útvar dvojrozměrný a protože prostor všech vektorů je trojrozměrný, musí nutně mít podprostor ortogonálních vektorů ve shodě se vztahem 1.5.1 pouze jednu dimenzi. Vše je dobře patrné z obr. 1.5.1



Obrázek 1.5.1: Vizualizace vektorového prostoru a jeho ortogonálního doplňku pomocí sw MatLab

- MuPAD příkazem:

```
plot(plot::Arrow3d([1,-3,2]),plot::Arrow3d([2,1,5]),
plot::Arrow3d([17,1,-7]))
```

1.6 Vektory

Zadejte složky vektoru \vec{a}

$$\vec{a} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

a vektoru \vec{b}

$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

Operace s vektory:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\theta =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

Část II

Matematická analýza I

Obsah

Seznam literatury	24
-----------------------------	----

Analýza jako nezávislý předmět byla vytvořena v 17. stol. během vědecké revoluce. Kepler, Galilei, Descartes, Fermat, Huygens, Newton a Leibniz, když zmíníme jen několik důležitých jmen těch, kteří přispěli k jejímu vzniku. Otázky z mechaniky, optiky a astronomie hráli roli v jejím raném období, tak jako vnitřní problémy matematiky, jako výpočet obsahů, objemů a analýza komplikovaných křivek. Pohyb po zakřivených drahách působením proměnných sil, které se staly předmětem důkladného zájmu po studiu volně padajících těles Galilea, vedl k počátečnímu úspěchu. Z velké rozmanitosti snah, které se objevily na konci 17. stol. v práci Newtona a Leibnize, se zrodila nová matematická disciplína, jejíž některé poznatky jsou v těchto studijních zápisích.

Základní myšlenka použití diferenciálních rovnic k získání pohledu na globální chování proměnných kvantit z jejich (infinitezimálních) změn prokázala základní a plodné výsledky daleko za hranicemi matematiky a fyzika a formovala náš souhrnný vědecký pohled na svět, zvláště na představu o kauzalitě. Na konci 18. stol., vskutku, největší vědci došli ke shodě, že procesy v přírodě (a společnosti) jsou determinovány a podřízeny zákonům, které mohou být popsány v podobě diferenciálních rovnic. Laplace, tento mistr matematické fyziky, naznačil obraz nějaké fiktivní vševedoucí intelligence, užívající úplnou znalost zákonů a stavu světa v daný časový okamžik, by mohla předpovídat další vývoj světa naavždy a hned. Myšlenka *přírodních zákonů* byla kmotrem při vytvoření matematického pojmu funkce a naopak nebyla by to myšlenka nikdy tak vlivná, kdyby matematická analýza nevyvíjela úspěšné metody pro výzkum funkčních závislostí.

Obsah

Seznam literatury	26
-----------------------------	----

Obsah

4.1 Reálná funkce	28
4.1.1 Pojem funkce	28
4.1.2 Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce	28
4.1.3 Některé zvláštní vlastnosti funkcí	28
4.1.4 Elementární funkce	29
4.2 Limita funkce	31
4.3 Spojitost funkce	31
Seznam literatury	31

4.1 Reálná funkce

4.1.1 Pojem funkce

4.1.2 Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce

Každé funkci můžeme přiřadit její graf. **Grafem funkce** $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, jejíž souřadnice x, y v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovuje rovnice $y = f(x)$.

Grafem funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné "představy". Grafy některých funkcí jsou "křivky" (intuitivním smyslu tohoto slova). Avšak u některých funkcí názorná představa grafu selhává. Vezmeme-li např. Dirichletovu funkci z odst. **, snadno zjistíme, že její graf nemůžeme sestrojit (byly by to "dvě rovnoběžné přímky $y = 0$ a $y = 1$ s nekonečným množstvím mezer")

4.1.3 Některé zvláštní vlastnosti funkcí

4.1.3.1 Omezená funkce

Definice 4.1.1. Funkci f nazýváme shora (zdola) omezenou na množině $A \subset D(f)$, je-li shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot $f(A)$. Je-li funkce f omezená shora i zdola na množině A , pak ji nazýváme omezenou na množině A . Je-li $A = D(f)$, nazýváme funkci omezenou. Viz kniha [Brabec1989]

Funkce f je omezená na množině A , právě když existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pro každé } x \in A$$

neboli

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pro každé } x \in A.$$

Příklad 4.1.1. Funkce $f : y = \frac{1}{x^2+1}$ je omezená. Platí totiž

$$\left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zdola je tato funkce omezena dokonce číslem 0.

- Je-li funkce f shora omezená na množině A , existuje konečné supremum $\sup f(A)$. Toto číslo nazýváme supremem funkce f na množině A a označujeme je též $\sup_{x \in A} f(x)$ nebo $\sup\{f(x), x \in A\}$.
- Je-li funkce f zdola omezená na množině A , existuje konečné infimum $\inf f(A)$, které nazýváme infimum funkce f na množině A a označujeme je též $\inf_{x \in A} f(x)$ nebo $\inf\{f(x), x \in A\}$.
- Není-li funkce f shoda (zdola) omezená na množině A , pak je ovšem $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$ ($\sup_{x \in A} f(x) = -\infty$).
- Má-li množina $f(A)$ největší (nejmenší) prvek, pak toto číslo nazýváme největší (nejmenší) hodnotou funkce f na množině A (je-li $A = f(f)$, též absolutním maximem, resp. absolutním minimem funkce f) a značíme je $\max_{x \in A} f(x)$ ($\min_{x \in A} f(x)$). V tomto případě existuje takové číslo $x_0 \in A$, že $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$ ($f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$). Pro všechna $x \in A$ tedy platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Je zřejmé, že největší (nejmenší) hodnota funkce f na množině A , pokud existuje je současně supremem (infimum) funkce f na A .

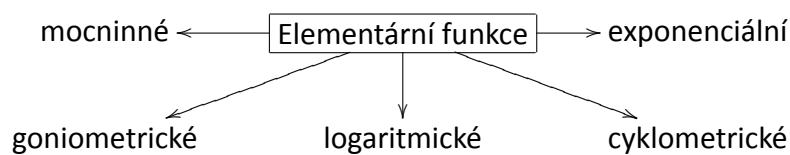
Příklad 4.1.2. Pro funkci z příkladu 4.1.1 platí:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = 1; \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = 0,$$

tato funkce však nenabývá v definičním oboru \mathbb{R} nejmenší hodnoty, neboť je stále $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$. To, že infimum je 0

4.1.4 Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme [PolakMA1]:



4.1.4.1 Goniometrické funkce

- Součtové vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.1.4)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (4.1.5)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \quad (4.1.6)$$

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

- Vzorce pro dvojnásobný úhel 2α

Pro každé $\alpha \in R$ platí:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.1.7)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (4.1.8)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (4.1.9)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad (4.1.10)$$

- Vzorce pro poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.11)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.1.12)$$

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (4.1.13)$$

$$\left| \cot \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{array}$$

Užitím součtových vzorců a toho že, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$ a $\cos \pi = -1$ lze snadno odvodit, že pro každé $\alpha \in R$ platí

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha.$$

4.2 Limita funkce

4.3 Spojitost funkce

Obsah

5.1	Základní věty diferenciálního počtu	34
5.1.1	Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce	34
5.1.2	Věty o střední hodnotě	34
5.1.3	Některé důsledky Lagrangeovy věty	37

5.1 Základní věty diferenciálního počtu

5.1.1 Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce

V tomto článku uvedeme významné věty, zvané souhrně věty o *střední hodnotě diferenciálního počtu*, a dále pak ukázky jejich užití v matematické analýze. Avšak dříve než budeme tyto věty formulovat, uvedeme jedno důležité tvrzení, které sice bude mít v dalších úvahách tohoto článku pomocnou úlohu, ale v teorii extrémů má i samostatný význam. [Brabec1989]

Věta 5.1.1. Nechť funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na množině A své největší (nejmenší) hodnoty na vnitřním bodě c množiny A . Máli funkce f v bodě c derivaci, potom $f'(c) = 0$.

Důkaz. Nechť např. $f(c)$ je největší hodnota funkce f na množině A , takže $f(x) \leq f(c)$ pro $\forall x \in A$. Potom pro $x \in A, x < c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

a tedy

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Dále pro $x \in A, x > c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

a proto

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Platí tedy

$$f'_+(c) \leq f'_-(c) \geq f'_-(c).$$

Avšak $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$. Odtud plyně $f'(c) = 0$. ■

5.1.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.1.2. Rolleova věta¹ Nechť funkce f má tyto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavřeném intervalu (a, b) ;

¹Michel Rolle [Mišel Rol] (1652-1719) Francouzský matematik

2. má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu (a, b) ;
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Protože je funkce f je na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, nabývá v tomto intervalu své největší hodnoty M , své nejmenší hodnoty m . Přitom ovšem platí:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (5.1.1)$$

Nyní mohou nastat dva případy:

1. funkce f nabývá M i m právě v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Podle předpokladu 3 věty 5.1.2 však potom platí $f(a) = f(b) = m = M$. Vzhledem ke vztahu 5.1.1 odtud plyne, že funkce f je konstantní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a tedy $f'(x) = 0$ dokonce v každém bodě $x \in (a, b)$
2. Funkce f nabývá apsoň jedné z hodnot M, m v některém vnitřním bodě ξ intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom podle věty 5.1.1 je $f'(\xi) = 0$.

■

Poznámka 5.1.1. Rolleova věta sama zaručuje jen existenci aspoň jednoho bodu $\xi \in (a, b)$, ve kterém je $f'(\xi) = 0$. Neumožnuje však ani určení tohoto bodu (nebo bodů), ani stanovení jejich počtu

Poznámka 5.1.2. Na obr. ** je ilustrován geometrický význam Rolleovy věty. Graf funkce na tomto obrázku má v bodech ξ_1, ξ_2 , v nichž je $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ tečny rovnoběžné s osou x .

Z Rolleovy věty plyne důležitá věta:

Věta 5.1.3. (Cauchyova věta). Nechť funkce f a g mají tyto vlastnosti:

1. Jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje derivace $f'(x)$ (vlastní či nevlastní) a vlastní derivace $g'(x)$,
3. $g'(x) \neq 0$ na (a, b)

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (5.1.2)$$

Důkaz. Poznamenejme především, že z předpokladu 3. $g'(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$ a z předpokladu spojitosti funkce g na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ ihned vyplývá vztah $g(b) - g(a) \neq 0$. Kdyby totiž bylo $g(b) = g(a)$, potom by podle Rolleovy věty 5.1.2 existoval aspoň jeden bod $\eta \in (a, b)$ takový že $g'(\eta) = 0$. To však by byl spor s předpokladem $g'(x) \neq 0$ pro každý bod $x \in (a, b)$. Proto má smysl podíl na levé straně rovnosti 5.1.2

K vlastnímu důkazu Cauchyovy věty zavedeme takovou pomocnou funkci F , aby splňovala podmínky Rolleovy věty. Definujme ji pro $x \in \langle a, b \rangle$ předpisem

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]. \quad (5.1.3)$$

Snadno ověříme, že tato funkce skutečně splňuje podmínky Rolleovy věty na intervalu (a, b) :

- Je spojitá na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$, což je důsledkem spojitosti funkce f a g na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$,
- má derivaci F' na otevřeném intervalu (a, b) , což plyne z existence derivace f' a g' funkce f a g na intervalu (a, b) ,
- $F(a) = F(b) = 0$

Platí tedy i závěr Rolleovy věty pro funkci F , tj. na intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ , pro který $F'(\xi) = 0$. Zderivujeme-li funkci F , dostaneme (dosadíme-li $x = \xi$):

$$F'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - f'(\xi)[g(b) - g(a)] = 0$$

Odtud již plyne rovnost 5.1.2 ■

Významným zvláštním případem Cauchyovy věty je další věta, která se častěji používá.

Věta 5.1.4. (Lagrangeova věta)². Nechť funkce má tyto vlastnosti:

- Je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- má derivaci (vlastní či nevlastní) na otevřeném intervalu (a, b) .

Potom existuje v otevřeném intervalu (a, b) aspoň jeden bod ξ , pro který platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad (5.1.4)$$

či-li

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad (5.1.5)$$

²Joseph Louis Lagrange [lagrénž] (1736-1813), francouzský matematik

Důkaz. Tvrzení této věty je důsledkem tvrzení Cauchyovy věty, a to pro případ $g(x) = x$. Protože $g'(x) = 1$ dokonce všude, jsou splněny všechny tři podmínky Cauchyovy věty. Proto platí i závěr této věty, z něhož pro náš případ již plyne vzorec 5.1.4 a tedy i vzorec 5.1.5. ■

Poznámka 5.1.3. Podobně jako je Lagrangeova věta zvláštním případem věty Cauchyovy, je Rolleova věta zvláštním případem Lagrangeovy věty, a to při případ, že $f(a) = f(b)$.

Poznámka 5.1.4. Lagrangeova věta se často nazývá větou o přírůstku funkce, protože vzorcem 5.1.5 se vyjadřuje přírůstek funkce, tj. rozdíl $f(b) - f(a)$. Všechny tři uvedené věty, tj. věta Rolleova, Cauchyova a Lagrangeova, se v literatuře nazývá souhrnně **věty o střední hodnotě diferenciálního počtu**.

Poznámka 5.1.5. Na obr. ** je ilustrován geometrický význam Lagrangeovy věty. Podíl na levé straně rovnosti 5.1.4, tj. číslo $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnice sečny s , spojující body A, B grafu funkce f , které odpovídají krajním bodům intervalu (a, b) . Podle tvrzení Lagrangeovy věty existuje v otevřeném intervalu (a, b) aspoň jeden bod ξ tak, že tečna grafu funkce f v příslušném jeho bodě je rovnoběžná s přímkou s .

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \quad (5.1.6)$$

5.1.3 Některé důsledky Lagrangeovy věty

Lagrangeova věta, má některé významné důsledky, které nyní uvedeme [Brabec1989]:

Věta 5.1.5. Nechť funkce f vyhovuje podmínkám Lagrangeovy věty a navíc nechť $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Potom funkce f je prostá na intervalu (a, b) .

Důkaz. Nechť x_1, x_2 jsou libovolné dva různé body intervalu (a, b) . Potom podle Lagrangeova vzorce 5.1.6 platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \neq 0$$

neboť $f'(\xi) \neq 0$ dle předpokladu. ■

Věta 5.1.6. Funkce f je konstantní na intervalu (a, b) , právě když má na tomto intervalu derivaci a platí $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz. Tedy

- Je-li funkce f konstantní na intervalu (a, b) , pak je $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, jak již víme.

- Nechť $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Dokažme, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) = f(x_2)$. Z existence derivace vyplývá spojitost funkce a jsou tedy splněny podmínky Lagrangeovy věty na každém intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (a, b)$. Podle vzorce 5.1.6 tedy platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (x_1, x_2)$. Protože podle předpokladu je $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a, b)$, platí $f(x_1) - f(x_2) = 0$, tj. $f(x_1) = f(x_2)$

■

Obsah

6.1 Průběh funkce	40
6.1.1 Monotonie funkcí	40
Seznam literatury	44

Diferenciální počet má rozsáhlou oblast užití. V této kapitole ukážeme použití výsledků předchozích kapitol k vyšetřování průběhu funkce a vlastnosti rovinných křivek.

6.1 Průběh funkce

Pomocí derivace můžeme studovat vlastnosti funkce, které usnadní vyšetřování jejího průběhu.

6.1.1 Monotonie funkcí

Jednou z důležitých vlastností funkce je její “monotonie”, kterou jsme definovali již v odst. 4.1.3 kap. 4. Proto je při vyšetřování průběhu funkce důležité určit množiny (často jsou to intervaly), na nichž je funkce monotonní, jinak řečeno, najít “intervaly monotonie funkce” (viz [Brabec1989]).

1. Zjistíme **definiční obor funkce**, vyjádříme jej v intervalech a z nich poznáme, kde je funkce **spojitá**. Funkce je spojitá v (a, b) pro každý bod tohoto intervalu, když $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolně zvolené číslo, a pro všechna x z okolí bodu c je $|x - c| < \delta$, kde $\delta > 0$ je na ε nezávislé.
2. Určíme, je-li funkce **lichá** $f(-x) = -f(x)$ nebo **sudá** $f(-x) = f(x)$. Je-li funkce lichá, je souměrná podle středu souměrnosti (obyčejně to bývá počátek souřadnic xy), je-li sudá, je souměrná podle osy y .
3. Určíme *průsečíky křivky s osami pravoúhlých souřadnic*. Body, ve kterých křivka protíná osu x spolu s body, ve kterých není křivka spojitá, rozlišují intervaly, v nichž je graf křivky nad osou x od intervalů, ve kterých je graf křivky pod osou x .
4. V krajních bodech definičních intervalů, ve kterých je funkce spojitá, stanovíme *limity funkce* a dále

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

5. Vypočítáme $f'(x)$ a $f''(x)$, abychom zjistily, kde je funkce *rostoucí* $f'(x) > 0$, *klesající* $f'(x) < 0$ a kde jsou *lokální extrémy*. Dostaneme-li dosazením kořenů rovnice $f'(x) = 0$ do $f''(x)$ hodnotu $f''(x) > 0$, má funkce lokální minimum, při $f''(x) < 0$ má funkce lokální maximum. V intervalech, kde $f''(x) > 0$, je křivka **konvexní (vypuklá)**, kde $f''(x) < 0$, je křivka **konkávní (vydutá)**. Body, v nichž

$f''(x)$ mění znaménko, jsou **inflexní body**. Najdeme je tak, že stanovíme hodnoty x , pro které je $f''(x) = 0$ nebo neexistuje. Číslo c je inflexní bod, když existuje takové okolí bodu c , že pro $x > c$ je oblouk křivky konvexní a pro $x < c$ konkávní. Je nutné si uvědomit, že když má $f'(x)$ konečnou derivaci, je inflexní bod c taky nulovým bodem druhé derivace čili kořenem rovnice $f''(x) = 0$. Obrácená věta neplatí, tj. z $f''(x) = 0$ nevyplývá, že v bodě c má $f'(x)$ extrém a že bod c je inflexním bodem.

6. **Asymptota** je tečna křivky $f(x)$, jejíž bod dotyku je v nekonečnu. Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

je přímka $x = a$ její asymptotou. Jinak asymptoty mají rovnici $y = kx + q$, kde x a y jsou souřadnice bodů na asymptotách. Existují-li konečné limity

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q$$

pak je asymptotou přímka $y = kx + q$. Můžeme-li rovnici křivky rozložit (tj. rozložit její pravou stranu, obyčejně dělením čitatele jmenovatelem, má-li tvar zlomku) na dvě části, z nichž jedna má tvar $kx+q$ a druhá zbytek $\varphi(x)$, tj. $f(x) = kx+q+\varphi(x)$ a $\varphi(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, je přímka $y = kx + q$ asymptotou.

7. Zpřesnění grafu křivky provedeme sestavením tabulky souřadnic dalších bodů křivky, tj. ke zvoleným hodnotám x (z definičního oboru funkce) vypočítáme hodnoty y . Do dalších řádků tabulky zapíšeme hodnoty $f'(x)$ a $f''(x)$, ve kterých intervalech je funkce *rostoucí*, ve kterých *klesá*, kde je *vypuklá*, kde je *dutá*, kde jsou *lokální extrémy*, *inflexní body* apod., případně sestavíme dílčí tabulky pro jednotlivé *charakteristické vlastnosti* vyšetřované funkce.

Příklad 6.1.1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

1. Definiční obor $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

2. Funkce je sudá

$$f(-x) = f(x) : \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}.$$

Funkce není periodická.

3. Stanovíme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru $1, -1$ a v nevlastních bodech $-\infty, +\infty$. Protože je funkce **sudá**, omezíme se jen na vyšetřování nezáporné části. Nejprve vlastnosti funkce v okolí bodu 1 . Ten nepatří do D_f a proto určíme limity funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Pro výpočet limity použijeme substituci $y = 1 - x^2$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2-y}{y} = +\infty$$

¹ proto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Obdobně dojdeme k

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

A konečně v nevlastních bodech $\pm\infty$ je limita

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = 0 - 1 = -1.$$

Výpočtem limit jsme zároveň určili dva absolutní (globální) extrémy a jeden lokální:

- v intervalu $(-1, 1)$ má funkce maximum ∞ a minimum 1 ,
- v intervalech $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ má funkce minimum $-\infty$ a maximum -1 .

4. Nyní vyšetříme zda, případně kolik a jaké, má funkce $f(x)$ průsečíky s osami souřadnic. S osou x nemá funkce žádné průsečíky, protože pro $y = 0$ není definována $H_f = \mathcal{R} - \{-1, 1\}$. Pro $x = 0$ je $y = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$, proto má $f(x)$ právě jeden průsečík s osou y a to $[0, 1]$.

5. Zatím jsme zjistili, že naše funkce není definována v bodech 1 a -1 a proto není spojitá v \mathcal{R} . Nevíme však, jaký je její průběh v jednotlivých intervalech definičního

¹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

oboru. Abychom získali názornější představu o průběhu funkce, zjistíme má-li derivaci.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1+x^2)'(1-x^2) - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\y' &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\y' &= \frac{4x}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

Protože má vlastní derivaci², můžeme určit její vlastnosti v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. V těchto intervalech je $y' > 0$ a proto jde o funkci ryze monotónní, rostoucí³ v daných intervalech⁴. Výpočtem zjistíme druhou derivaci funkce. Ta nám pomůže určit další extrém v intervalu $(0, 1)$ a zároveň vyšetřit **konkávnost a konvexnost**.

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{(4x)'(1-x^2)^2 - (4x)(1-2x^2+x^4)'}{(1-x^2)^4} \\y'' &= \frac{4(1-2x^2+x^4) - 4x(-4x+4x^3)}{(1-x^2)^4} \\y'' &= \frac{4(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\y'' &= \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}\end{aligned}$$

Abychom mohli určit lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $(0, 1)$, pomocí druhé derivace, musíme najít kořeny rovnice $f'(x) = 0$. V našem případě

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x_0 = 0,$$

tento kořen⁵ pak dosadíme do druhé derivace, tj.

$$y''(0) = \frac{4(3 \cdot 0^2 + 1)}{(1-0^2)^3} = 4,$$

protože je $f''(x) > 0$, má v bodě x_0 lokální minimum. Můžeme rovněž konstatovat, že funkce nemá inflexní body⁶. Konkávnost a konvexnost funkce v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ vyšetříme pomocí vlastností druhé derivace funkce. Tedy

² $f(x)$ je spojitá v intervalech $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ věta s spojité funkci

³Plyne z věty o postačujících podmínkách ryzi monotónnosti funkce na intervalu

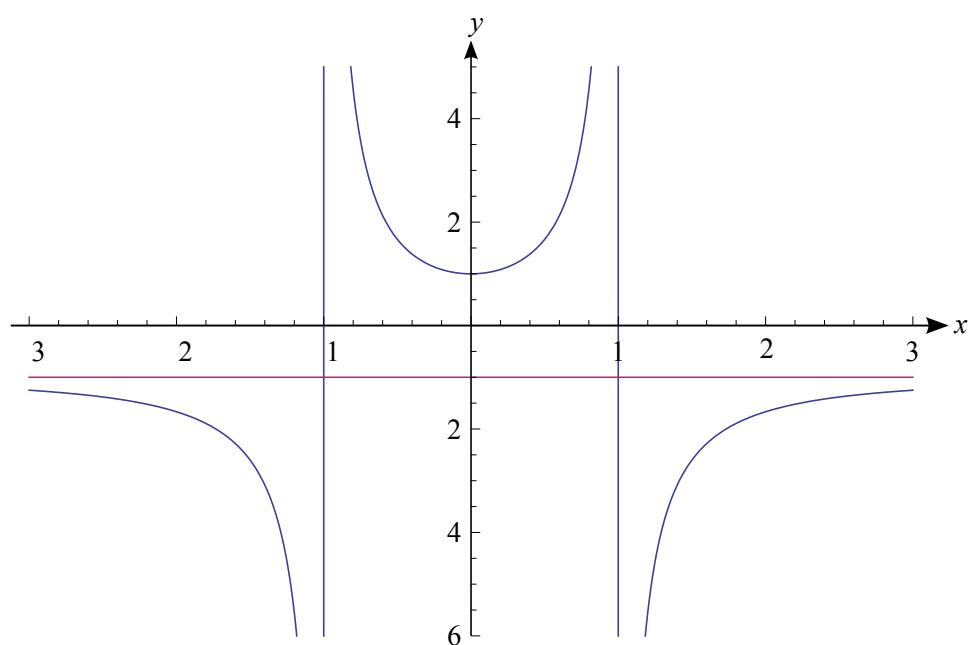
⁴V intervalech $(-\infty, -1), (-1, 0)$ je funkce klesající.

⁵stacionární bod

⁶Pro existenci inflexního bodu je nutné splnění jedné z podmínek a to buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

- $(0, 1) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konvexní**,
- $(1, \infty) : y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0 \Rightarrow$ funkce je v tomto intervalu **konkávní**.

6. Z předchozích výpočtů plyne, že křivka má asymptoty $y = -1, x = \pm 1$.



Obrázek 6.1.1: Graf funkce $f(x) : y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Obsah

7.1 Motivace	48
7.1.1 Metody určení primitivní funkce	49
Seznam literatury	58

7.1 Motivace

Zavedením pojmu derivace funkce jsme motivovali důležitým požadavkem definovat okamžitou rychlosť pohybu bodu po přímce. Existuje přirozeně i požadavek opačný, tj. nalézt zákon dráhy pohybu bodu po přímce, je-li dána jeho okamžitá rychlosť jako funkce času. [Brabec1989]

Příklad 7.1.1. Je dána okamžitá rychlosť v pohybu bodu po přímce (ose) x rovnici $v(t) = 2t + 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Najděte zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase $t = 0$ měl bod polohu $x = x_0$.

řešení:

Označíme-li $x(t)$ polohu bodu v okamžiku t , pak $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Hledáme tedy funkci $x = x(t)$, pro níž platí

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad x(0) = x_0.$$

Je ihned patrné, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$x(t) = t^2 + t + C, \tag{7.1.1}$$

kde C je libovolná konstanta. Funkce, která splňuje i druhou podmínu (říkáme ji též počáteční podmínka), najdeme z rovnice 7.1.1 dosazením dané podmínky $t = 0$, $x = x_0$. Dostaneme $x_0 = C$. Dosazením do 7.1.1 za C plyne hledaný zákon dráhy

$$x(t) = t^2 + t + x_0.$$

Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě dané podmínky a zároveň vidíme, že hledaná primitivní funkce daných vlastností je jediná.

Každé takové funkci, jejíž derivací je daná funkce, budeme říkat *primitivní funkce* k dané funkci. Na uvedeném příkladě je patrné, že k dané funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Množinu všech primitivních funkcí se často nazývá **neuričitým integrálem**. Po tomto názorném uvedení do problému přejděme k přesné formulaci základních pojmu.

Definice 7.1.1. Funkce $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval, se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu J právě když, pro všechna $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$ (v krajních bodech intervalu J , pokud k němu patří, jde o derivace jednostrané).

Příklad 7.1.2. K funkci $\sin x$ je primitivní funkci na libovolném intervalu $J \subset (-\infty, +\infty)$ funkce $-\cos x$, protože $(-\cos x)' = \sin x$. Ale též funkce $3 - \cos x$ je primitivní funkci k funkci $\sin x$, protože $(3 - \cos x)' = \sin x$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

Je vidět, že rozdíl dvou primitivních funkcí k téže funkci je konstanta. To není náhoda, jak potvrzuje následující věta:

Věta 7.1.1. a) Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu J a c reálná konstanta, pak i funkce $G = F + c$ je primitivní funkcí k funkci f na intervalu J .

b) Jsou-li funkce F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu J , pak funkce $F - G$ je na intervalu J konstantní.

Důkaz:

Tvrzení a) plyne z definice protože $G'(x) = [F(x) + c] = F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Tvrzení b) je důsledek věty ??.

7.1.1 Metody určení primitivní funkce

Procesu hledání primitivní funkce se často říká integrování nebo integrace (od slova "integrál"), což z matematického hlediska znamená provést inverzní operaci k operaci derivování. Smutnou zprávou je, že na rozdíl od derivování neexistuje obecný vzorec pro integrování součinu či podílu, ani obecný vzorec pro integrování složených funkcí. Při hledání integrálů složitějších funkcí se využívá např. *linearita, metoda per partes, substituční metoda*, popř. některé další speciální metody. Řešitel v mnoha případech musí projevit důvtip a intuici, která mu pomůže nalézt primitivní funkci k dané funkci.

7.1.1.1 Integrování součtu, úprava integrandu a integrování rozkladem

Příklad 7.1.3. $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx$ [Knichal]

Dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostaneme rozklad integrandu na součet funkcí, jejichž integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x) : (x^2 + 1) = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \\ \hline -x^4 - x^2 \\ \hline 3x^3 - 4x^2 + 3x \\ -3x^3 - 3x \\ \hline -4x^2 \\ 4x^2 + 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

Tedy

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} = x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Pro uvedený integrál dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx &= \int \left(x^2 + 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \arctan x + C.\end{aligned}$$

Příklad 7.1.4. $\int \frac{2x^4 - 5x^2 + 14x + 13}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\}$

Dělením čitatele integrandu jmenovatelem dostaneme rozklad integrandu na součet funkcí, jejichž integrály najdeme snadno:

$$\begin{array}{r} (-2x^4 - 5x^2 + 14x + 13) : (x^2 - x - 2) = 2x^2 + 2x + 1 + \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} \\ \hline -2x^4 + 2x^3 + 4x^2 \\ 2x^3 - x^2 + 14x \\ -2x^3 + 2x^2 + 4x \\ \hline x^2 + 18x + 13 \\ -x^2 + x + 2 \\ \hline 19x + 15 \end{array}$$

Zbytek po dělení představuje integrál, jež je počítán v příkladu 7.1.20 a proto ho vynecháme.

$$\begin{aligned}&= 2 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx + \int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} \ln|x+1| - \frac{53}{3} \ln|x-2| + C\end{aligned}$$

Příklad 7.1.5. $\int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx$ [Knichal]

Integrand upravíme přičtením a odečtením výrazu $3x^2$ v čitateli zlomku takto:

$$\frac{3}{(1+x^2)x^2} = \frac{3+3x^2-3x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{1+x^2}$$

Tedy v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$, platí

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(1+x^2)x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{3}{x} - 3 \arctan x + C.\end{aligned}$$

Příklad 7.1.6. $\int \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ [Knichal]

Funkci $\sqrt{1 + \cos 2x}$ upravíme na základě goniometrické identity ??

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

takto

$$\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} |\cos x| = \varepsilon \sqrt{2} \cos x,$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right), \end{cases}$$

n je přirozené číslo. Proto pro x ležící v uvedených intervalech je

$$\int \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \varepsilon \sqrt{2} \int \cos x dx = \varepsilon \sqrt{2} \sin x + C.$$

Příklad 7.1.7. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ [Knichal]

Integrand upravíme na součet dvou tabulkových integrálů použitím vzorce

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

takže

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

Příklad 7.1.8. $\int \tan^2 x dx$ [Knichal]

Funkci napíšeme ve tvaru

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

takže

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

v každém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, k je celé číslo.

Příklad 7.1.9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$ ($\sin^2 x \cos^2 x \neq 0$; $x \neq k\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$)

Integrand upravíme pomocí vzorce pro dvojnásobný úhel ??:

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C.$$

Příklad 7.1.10. $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} dx \quad (\sin x \cos x \neq 0; x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z})$

Integrand rozšíříme o funkci $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}} dx = \int \frac{1}{\tan x} dx = \ln |\tan x| + C$$

7.1.1.2 Integrace racionální funkce

Některé příklady v předchozím odstavci, (viz např. 7.1.3 a 7.1.4) jsme dělením čitatele integrantu jmenovatelem dostali rozklad integrantu na součet racionální funkce (polynomu) a ryze lomené racionální funkce. Integrování polynomu je snadné, neboť jde o součet integrálů tvaru $\int c_k x^k dx$, kde k je celé nezáporné číslo. Omezíme se tedy na integrování *ryze lomené racionální funkce*, tj. funkce ve tvaru $P(x)/Q(x)$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy, přičemž stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. Taková funkce může vzniknout součtem několika jednoduchých zlomků.

Příklad 7.1.11. Upravte

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+3} = \frac{x^2+x+3+x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+3)} = \frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x-3}$$

Jsme tedy vedeni myšlenkou, zda naopak každá ryze lomená racionální funkce se dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru - budeme jim říkat **parciální zlomky**, které umíme integrovat. Tím se budeme zabývat v dalších odstavcích.

Příklad 7.1.12. $\int \frac{1}{x^2-x+1} dx \quad x \in R$

Kvadratický polynom ve jmenovateli upravíme na čtverec $f(x) = (x+m)^2 + n$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + C \end{aligned}$$

Definice 7.1.2. Parciální (částečným) zlomkem, budeme nazývat zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \text{ nebo } \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (7.1.2)$$

A, M, N, α, p, q reálné $p^2 - 4q < 0$, k celé nezáporné.

Integrál prvního zlomku, tj. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx$, vypočeme substitucí $x - \alpha = t$, odtud plyne $dx = dt$,

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \int \frac{A}{t^k} dt. \quad (7.1.3)$$

Tento integrál se rovná

$$-\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C. \quad (7.1.4)$$

je-li $k > 1$, a rovná se $A \ln|x-\alpha| + C$, je-li $k = 1$. Výsledek platí na každém intervalu neobsahujícím bod α .

U integrálu druhého zlomku uvedeme postup výpočtu pro $k = 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx}{x^2+px+q} dx + \int \frac{N}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q} dx + N \int \frac{1}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Z naznačeného postupu je vidět hlavní myšlenka: upravit integrál na lineární kombinaci dvou integrálů, z nichž první má v čitateli integrandu derivaci jmenovatele a je podle příkladu *** roven $\ln|x^2+px+q|$ kde $x^2+px+q > 0$ pro $x \in R$ a integrand druhého integrálu má čitatel konstantní.

Výpočet druhého integrálu probíhá takto:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} dx; \quad (7.1.6)$$

substitucí $x + \frac{p}{2} = t \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ dostaváme dále

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(t^2+1)} dt \quad (7.1.7)$$

po úpravě dostaneme tabulkový integrál

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1}, \quad (7.1.8)$$

jehož řešení je

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan t = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}. \quad (7.1.9)$$

Z postupu je opět vidět hlavní myšlenka: úprava integrandu na tvar $\frac{1}{t^2+1}$. Jmenovatel $x^2 + px + q$ jsme doplnili na úplný čtverec a užili uvedenou substituci (uvažme, že $q - \frac{p^2}{4} > 0$, protože diskriminant $\frac{p^2}{4} - q$ trojčlenu $x^2 + px + q$ je podle předpokladu záporný). Výsledek platí u obou integrálů v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

7.1.1.3 Substituční metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

Věta 7.1.2. *Jestliže*

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad (7.1.10)$$

a $u = \varphi(x)$, pak

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C \quad (7.1.11)$$

Základem úspěchu při aplikací věty je správný výběr funkce $\varphi(x)$. Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schématicky veden od rov. 7.1.11 ke vzorci rov.

7.1.10.

Příklad 7.1.13. $\int e^{x^2} dx$

$$\int e^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Příklad 7.1.14. $\int x^3 e^{x^4} dx \quad x \in R$

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^4 \\ du = 4x^3 dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{e^u}{4} = \frac{e^{x^4}}{4} + C$$

Funkce typu $f(x) = \sqrt{ax + b}$:

Funkci, jež je dána rovnicí, jež obsahuje polynomy proměnné x ve výrazu $\sqrt{ax + b}$, v němž $ax + b > 0$, $a > 0$, integrujeme pomocí substituce:

$$u = \sqrt{ax + b}, \quad du = \frac{1}{2} \frac{a}{u} dx, \quad dx = 2 \frac{u}{a} du \quad (7.1.12)$$

Je-li potřeba dosadit do integrované funkce také za x , vyjádříme ze substituční rovnice $x = \frac{u^2 - b}{a}$.

Funkce typu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$, $a \neq 0$:

Příklad 7.1.15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$:

Řešení: Užijeme Eulerovu substituci

$$u = x + \sqrt{x^2 + a}, \quad du = \frac{u}{\sqrt{x^2 + a}} dx, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

7.1.1.4 Integrace goniometrických funkcí

7.1.1.5 Integrace po částech - per partes

Ze vztahů pro nalezení diferenciálů $d(uv) = udv + vdu$ a $udv = d(uv) - vdu$ vyplývá vzorec pro metodu integrace per partes:

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (7.1.13)$$

Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenosť pro výběr funkcí u a v . Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím se myslí dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně $\int vdu$ lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

Příklad 7.1.16. $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Příklad 7.1.17. $\int \sqrt{x^2 + a} dx$, kde $a \neq 0, x^2 + a > 0$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \begin{bmatrix} u = \sqrt{x^2 + a} & dv = 1 \\ du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} & v = x \end{bmatrix} \\ x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \right] \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně vyjádříme podle příkladu 7.1.15 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$ a výsledek dostaneme ve tvaru

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| \right]$$

Příklad 7.1.18. $\int \arctan x dx \quad x \in R$

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= \begin{bmatrix} u = \arctan x & dv = 1 \\ du = \frac{1}{x^2 + 1} & v = x \end{bmatrix} = \\ x \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \begin{bmatrix} x^2 + 1 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \\ x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |t| = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C \end{aligned}$$

7.1.1.6 Rozklad ryze lomené funkce v parciální zlomky

Nechť je dána racionální funkce $R = \frac{P}{Q}$ s reálnými koeficienty. Můžeme předpokládat, že je *ryze lomená*¹. Pokud by tomu tak nebylo, dostaneme dělením čitatele jmenovatelem zlomku součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Příklad 7.1.19. $\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx$ [Knichal]

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 7$ jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 7}.$$

Členy mnohočlenu na pravé straně se řadíme podle mocnin x

$$8x - 31 = x(A + B) + (7A - 2B).$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 8 &= A + B \\ -31 &= -7A - 2B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = 3, B = 5$. Platí tedy (pro všechna $x \neq 2$ a $x \neq 7$)

$$\frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x - 7}.$$

$$\int \frac{8x - 31}{x^2 - 9x + 14} dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{5}{x - 7} dx = 3 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 7| + C.$$

Výsledek platí v každém intervalu, který neobsahuje body $x = 2, x = 7$.

Příklad 7.1.20. $\int \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} dx \quad x \in R - \{1, 2\}$

Kořeny polynomu ve jmenovateli $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$ jsou jednoduché - každému z nich bude v rozkladu odpovídat jen jeden člen:

$$\begin{aligned} \frac{19x + 15}{x^2 - x - 2} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} \\ 19x + 15 &= A(x - 2) + B(x + 1) \\ 19x + 15 &= x(A + B) - 2A + B \\ 19 &= A + B \\ 15 &= -2A + B \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = \frac{4}{3}, B = \frac{53}{3}$.

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{53}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx = \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \frac{53}{3} \ln|x - 2| + C$$

¹tj. stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q

Příklad 7.1.21. $\int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx$ [Knichal]

Polynom $Q(x) = x^3 - 4x^2 - x - 4$ má kořeny $\alpha_{1,2} = \pm 1$, $\alpha_3 = -4$, které jsou jednoduché tj. $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 4}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici společným jmenovatelem zlomků pravé strany (polynomem $Q(x)$), dostaneme

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x + 1)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x + 1)$$

čili

$$2x^2 + 34x + 14 = A(x^2 + 5x + 4) + B(x^2 + 3x - 4) + C(x^2 - 1)$$

$$2x^2 + 34x + 14 = (A + B + C)x^2 + (5A + 3B)x + (4A - 4B - C)$$

Porovnáním odpovídajících si koeficientů u stejných mocnin x dostaneme pro neznámé koeficienty A, B, C soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ 5A + 3B &= 34 \\ 4A - 4B - C &= 14 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = 5, B = 3, C = -6$ a tedy

$$\frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} = \frac{5}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} - \frac{6}{x + 4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 34x + 14}{x^3 - 4x^2 - x - 4} dx &= \int \frac{5}{x - 1} dx + \int \frac{3}{x + 1} dx + \int \frac{6}{x + 4} dx \\ &= 5 \ln|x - 1| + 3 \ln|x + 1| - 6 \ln|x + 4| + C. \end{aligned}$$

Příklad 7.1.22. $\int_a^{\infty} \frac{2x + 3}{2x^3 + 2} dx \quad x \in R - -1$

Obsah

8.1 Motivace	60
8.1.1 Výpočet integrálu	60
8.2 Vlastnosti určitého integrálu	61
Seznam literatury	63

8.1 Motivace

8.1.1 Výpočet integrálu

Příklad 8.1.1. Metodou per partes spočítejte integrály: $\int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx$

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x dx &= \int e^x dx + \int x \cdot e^x dx \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x \\ \int_1^{\ln 5} (x+1)e^x dx &= [xe^x]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - e\end{aligned}$$

kde integrál

$$\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

8.2 Vlastnosti určitého integrálu

V této kapitole mluvíme o spojitéch funkciích \Rightarrow příslušné integrály tedy vždy existují. Čerpáno z knih: [Knichal].

Věta 8.2.1. První věta o střední hodnotě integrálního počtu: Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu (a, b) , existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c). \quad (8.2.1)$$

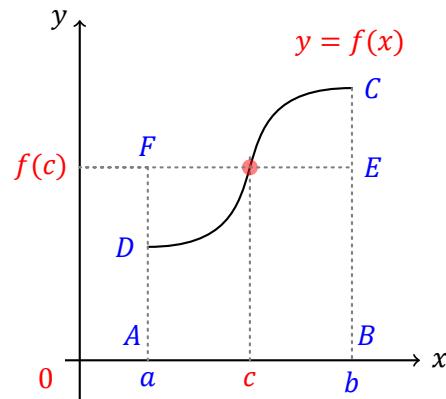
Důkaz: Použitím Lagrangeovy věty napsané pro funkci $F(x)$, primitivní na intervalu (a, b) k dané funkci $f(x)$. Podmínky věty jsou zřejmě splněny: $F(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) a má všude derivaci $F'(x) = f(x)$. Tedy existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$,

že

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c),$$

čímž je věta dokázána, neboť $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ a $F'(c) = f(c)$. Funkční hodnotu $f(c)$, danou podle (8.2.1) rovnicí

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \quad (8.2.2)$$



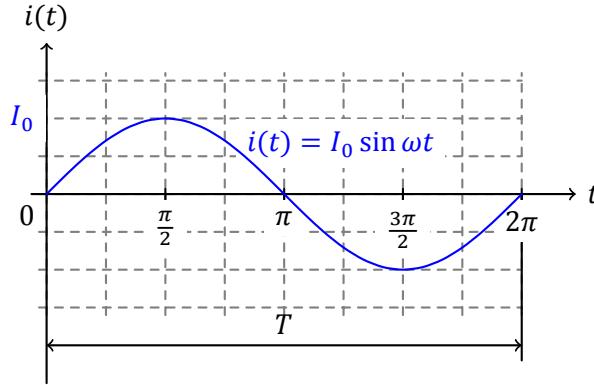
Obrázek 8.2.1

nazýváme **střední hodnotou**.

Pro spojitou nezápornou funkci $f(x)$,
lze větu

o střední hodnotě jednoduše geometricky

interpretovat dle (obr.8.2.1). Levá strana (8.2.1) určuje obsah křivočarého lichoběžníka $ABCD$, pravá strana obsah obdélníka $ABEF$. Podle této věty nabývá funkce $f(x)$ aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) takové hodnoty $f(c)$, že uvažovaný křivočarý lichoběžník má stejný obsah jako obdélník o základně $b - a$ a výšce $f(c)$ (str. 155 knihy [Knichal]).



Obrázek 8.2.2

Příklad 8.2.1. Určete střední hodnotu i_s střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

v časovém intervalu $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$ (v průběhu jedné poloviny periody). I_0 je maximální hodnota proudu (obr. 8.2.2), perioda T je dána vztahem $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Podle 8.2.2 bude

$$\begin{aligned} i_s &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \omega t dt = \frac{2I_0}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2I_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) \\ &= \frac{2I_0}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi} I_0 \doteq 0,637 I_0. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Tato hodnota se rovná intenzitě elektrického proudu, při kterém by vodičem v průběhu uvažované poloviny periody prošel stejný elektrický náboj jako při proudu střídavém.

Příklad 8.2.2. Efektivní hodnota i_{ef} střídavého proudu

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

(viz předchozí příklad) je definována jako odmocnina ze střední hodnoty funkce $i^2(t)$ v průběhu jedné periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Tedy

$$\begin{aligned} i_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{I_0^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{I_0^2}{2} \end{aligned}$$

neboť $\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$. Odtud

$$i_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Střídavý proud $i(t) = I_0 \sin \omega t$ má na témže odporu stejný výkon jako stejnosměrný proud o intenzitě $i = 0,707I_0$.

Následující věta může být využita k odhadu některých integrálů

Věta 8.2.2. Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu: Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v intervalu (a, b) a je-li funkce $g(x)$ v (a, b) nezáporná a nerostoucí, existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx. \quad (8.2.4)$$

Zcela obdobnou větu lze vyslovit pro případ, že $g(x)$ je v intervalu (a, b) nezáporná a neklesající, tj. na pravé straně 8.2.4 je pak integrál $g(b) \int_c^b f(x) dx$

Příklad 8.2.3. Odhadněte hodnotu integrálu

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (8.2.5)$$

Řešení: Funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ jsou v uvažovaném intervalu $(100\pi, 1000\pi)$ spojité a funkce $g(x)$ je kladná a nerostoucí.

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^c \sin x dx = \frac{1}{100\pi} (\cos 100\pi - \cos c)$$

kde c je kladné číslo z intervalu $(100\pi, 1000\pi)$. Dále pro všechna $c \in (100\pi, 1000\pi)$ platí $0 \leq 1 - \cos c \leq 2$, takže

$$0 \leq \int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{50\pi}.$$

Obsah

Seznam literatury	66
-----------------------------	----

Obsah

10.1 Diferenciální rovnice 1. řádu	68
Seznam literatury	68

10.1 Diferenciální rovnice 1. řádu

Řada fyzikálních principů má tvar výroku, resp. vztahu mezi jistými veličinami (funkcemi) a jejich změnami, vztaženými ke zvoleným nezávisle proměnným parametry (čas, souřadnice). Změny (okamžité, lokální) se nejlépe vystihují pomocí derivací. Takový zákon má pak charakter vztahu mezi uvažovanými veličinami a jejich derivacemi. Nejčastěji bývá vztah vyjádřen formou rovnosti:

- Newtonův zákon: okamžitá změna hybnosti $p(t) = m(t) \cdot v(t)$ pohybujícího se objektu je úměrná působící síle $F(t)$ v každém okamžiku t zvoleného časového rozmezí

$$\frac{d}{dt} (m(t) \cdot v(t)) = F(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

- Kirchhoffův zákon pro LR – obvod: v okamžiku t je součet napětí na cívce s indukčností L a na rezistoru o odporu R roven napětí $U(t)$ na svorkách zdroje. Tuto rovnost pak zapisujeme ve tvaru (pro L,R = konst)

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri = u(t)$$

, kde $i = i(t)$... funkce popisující závislost proudu na čase.

Chceme-li určit funkci $i = i(t)$ popisující průběh proudu v obvodu tak, aby byl splněn příslušný K.z. a současně, aby byl splněn požadavek na počáteční stav:

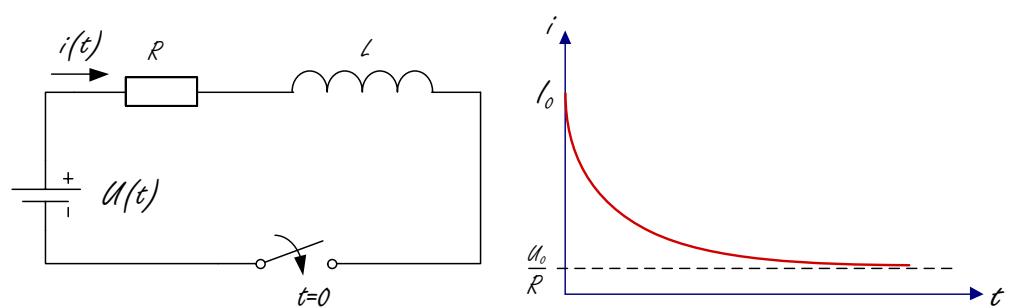
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U, \quad i(0) = I_0, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (10.1.1)$$

Metodami uvedenými později stanovíme právě jednu funkci $i = i(t)$, která je řešením dané tzv. **počáteční úlohy**.

$$i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad (10.1.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{U_0}{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} i(t) = I_0 = i(0)$$

- tedy obvykle formulujeme úlohu najít jistou funkci tak, aby zákon byl splněn tj. Kirchhoffův zákon užijeme k tomu, abychom nalezli funkci $i(t)$
- užijeme-li rovnosti vyjadřující takový zákon k tomu, abychom určili funkci, která v takovém vztahu vystupuje spolu s derivacemi, stává se tento požadavek úlohou, která má charakter rovnice s derivacemi, neboli diferenciální rovnice. Funkce, která požadavek splňuje, se pak nazývá řešení diferenciální rovnice.



Obrázek 10.1.1: Graf průběhu proudu $i(t)$ po sepnutí spínače v době $t = 0$.

Část III

Numerické metody

Obsah

11.1	Úvodní slovo	74
11.2	Reprezentace čísel ve výpočetní technice	75
11.2.1	Zaokrouhlování	76
11.3	Chyby při numerických výpočtech	77
11.3.1	Zdroje a typy chyb	77
11.3.2	Definice chyb, šíření chyb při výpočtu	78
11.3.3	Absolutní a relativní chyba	78
11.4	Řešení nelineárních rovnic	79
11.4.1	Motivace	79
11.4.2	Metoda bisekce	80

11.1 Úvodní slovo

Numerické metody jsou metody, které na rozdíl od metod analytických poskytujících spojité řešení na určité předem definované oblasti, dávají číselné řešení v předem zvolených diskrétních bodech této oblasti. Na rozdíl od analytických metod toto řešení většinou nebývá přesné, ale představuje pouze jeho approximaci, která je zatížena určitou chybou. Možnosti analytických metod se již asi třicet let pokládají prakticky za vyčerpané. Drtivá většina problémů (a to zdaleka nejen v oblasti technických věd), které bylo možno analyticky vyřešit, již tehdy byla vyřešena. Při vyčíslování výsledků ovšem v mnoha případech nastávaly značné problémy; spojité řešení bylo například popsáno kombinací vyšších funkcí (Besselovy, Legendrové atd.) v podobě nekonečných řad, přičemž bylo třeba načítat dostatečný počet jejich členů k dosažení požadované přesnosti. A zde se již začaly uplatňovat různé numerické techniky, které ovšem bylo v té době možno realizovat jen na kalkulačkách nebo ze současného pohledu na primitivních počítacích.

Ačkoli základy sofistikovaných numerických metod byly položeny již před více než sedesáti lety, jejich intenzivní a široký rozvoj je spojen teprve s vývojem a zdokonalováním výpočetní techniky v posledních asi čtyřiceti letech a lze říci, že v poslední době s řešením čím dál tím složitějších problémů ze všech vědních oblastí (nestacionární a nelineární úlohy ve 2D a 3D) stále nabývají na významu.

Výsledkem aplikace převážné většiny numerických metod je sestavení velkého systému lineárních či nelineárních algebraických rovnic, který je nutno nějakým způsobem vyřešit existují ovšem numerické techniky i pro jiné účely, jako je například součet různých řad, výpočet určitých integrálů atd., jejich počet však není příliš velký). A v popředí zájmu jsou především dvě otázky:

- jak sestavit onen systém tak, aby počet zmíněných rovnic byl co nejmenší (přičemž ale informace o rozložení hledané veličiny v oblasti je maximální a co nejpřesnější) a
- jak tento systém vyřešit co nejrychleji a s nejmenší možnou chybou.

Na tomto místě je nutno podotknout, že i malá vylepšení stávajících postupů mohou při řešení složitých úloh vedoucích na řešení soustav milionů či desítek milionů rovnic (aktuální stav) zajistit velmi výrazné časové úspory. Samotná realizace jakékoli numerické metody sestává z několika kroků:

- Sestavení matematického modelu dané úlohy. Tento krok je sám o sobě často nesmírně komplikovaný; reálný fyzikální problém musíme mnohdy zjednodušit tak, aby byl vůbec dostupnými prostředky řešitelný, aniž by však vzniklé chyby přesáhly přijatelné hodnoty. Takový matematický model zpravidla sestává z různých rovnic (algebraických, diferenciálních, integrálních, smíšených), neurčitých nebo určitých integrálů a podobně.
- Výběr konkrétní metodiky, jakou tento model budeme řešit. Uvedená metoda by měla být co nejvhodnější z celé řady hledisek, jako je rychlosť výpočtu, spolehlivost, robustnost, přesnost, konvergence, stabilita atd. O těchto pojmech jistě už většinou máme jakousi intuitivní představu, v dalším textu však některé z nich upřesníme. Na základě zvolené metody vypracujeme algoritmus, což je konečné množství instrukcí, které musíme provést, aby se celý výpočet bezezbytku provedl.
- Navržený algoritmus musíme nyní naprogramovat. Přitom lze využít buď nějakého programovacího jazyka (FORTRAN, C++ a další), nebo nějakého prostředí s již předprogramovanými operacemi nebo celými bloky výpočtů (MatLab, Mathematica). V některých případech lze využít i již existujících profesionálních programů, které takový algoritmus obsahují (freeware tohoto typu je velmi řídké). Ty jsou ovšem velmi drahé a uživatel do nich zpravidla nemůže zasahovat za účelem například optimalizace výpočtu.
- Dalším krokem je realizace výpočtu. Zde je kromě provedení samotného výpočtu nutné ověřit, že výsledky jsou korektní. K tomu používáme buď experiment, nebo jinou metodu, která je již pro úlohu daného typu spolehlivě prověřená. Dále ověřujeme celou řadu aspektů, jako je například geometrická konvergence řešení (závislost výsledků na hustotě diskretizační sítě) a popřípadě jiná kritéria, o nichž se více dozvím později.
- Posledním krokem je vyhodnocení a posouzení získaných výsledků, zpravidla na vizuálním základě, porovnáním, ale i jinak.

11.2

Reprezentace čísel ve výpočetní technice

Při realizaci numerických algoritmů na počítači se lze setkat se dvojí reprezentací čísel, a to pomocí **pevné** nebo **plovoucí desetinné tečky**. Pevná desetinná tečka znamená vždy předem definovaný počet desetinných míst. Pracujeme-li se čtyřmi desetinnými místy, interpretují se následující čísla takto:

8675	8675.0000
3.24	3.2400
-0.000006	-0.0000

Tabulka 11.2.1: Reprezentace čísel v pevné desetinné tečce

Zatímco první dvě čísla jsou zobrazena přesně, třetí číslo nikoli, je zaokrouhleno. Proto je tento způsob nepraktický, při vědeckotechnických výpočtech se neužívá a v dalším textu se jím už nebudeme zabývat.

Daleko pružnější je proto počítání s plovoucí desetinnou tečkou, kdy se v každém čísle respektuje předepsaný počet prvních číslic. V tomto případě se uvedená čísla zobrazují takto:

8675	+0.8675E+04	nebo	+8.675E+03
3.24	+0.3240E+01	nebo	+3.240E+00
-0.000006	-0.6000E-05	nebo	-6.000E-06

Tabulka 11.2.2: Reprezentace čísel v plovoucí desetinné tečce

Každé nenulové číslo a lze reprezentovat jako $a = +m \cdot 10^e$, kde $0.1 < m < 1$ a e je celé číslo. Samozřejmě, číslo m může obsahovat nekonečnou řadu číslic a celé číslo e se může pohybovat od minus nekonečna do nekonečna. To ale v počítačové reprezentaci není možné; zde je číslo m omezeno na konečný počet n číslic a právě tak je omezen i exponent. Číslo a je tedy počítačem approximováno jako $a = \pm m \cdot 10^e$, kde $m = 0.d_1d_2 \dots d_n$. Toto číslo m se nazývá **mantisa** a e **exponent**.

V jednoduché přesnosti má v počítačích e velikost $|e| < 38$, ve dvojitě přesnosti $|e| < 308$. Jsou-li tyto hodnoty překročeny, vzniká chyba známá jako **underflow** nebo **overflow**.

11.2.1 Zaokrouhlování

Čísla jsou v počítačové interpretaci často zaokrouhlována (mají-li v mantise velký počet číslic), poněvadž mantisa m zde může těchto číslic obsahovat pouze n . Pravidla zaokrouhlování jsou jasná. Zopakujeme zde jen to, že čísla typu 7.65 nebo 7.75 (chceme-li

zrušit jedno desetinné místo) zaokrouhlíme tak, že poslední číslice je sudá. Takže zatímco 7.65 zaokrouhlíme na 7.6, 7.75 zaokrouhlíme na 7.8.

Chybu při zaokrouhlování můžeme určit jako (n je počet číslic v mantise m)

$$\left| \frac{m - \underline{m}}{m} \right| \leq \frac{0.5}{10^{n-1}} \quad (11.2.1)$$

11.3 Chyby při numerických výpočtech

Protože základem numerických metod je získávání přibližných výsledků, je nutné mít vždy představu, jaký rozdíl může být mezi přesným řešením dané úlohy a řešením získaným použitou numerickou metodou.

11.3.1 Zdroje a typy chyb

Pomineme-li jako zdroj chyb člověka dopouštějícího se omylů, můžeme chyby rozdělit na několik základních druhů.

- **Chyby matematického modelu** - vznikají nahrazením reálné fyzikální situace matematickým modelem. Může se jednat například o popis nějakého fyzikálního děje pomocí diferenciální rovnice.
- **Chyby vstupních dat** - jsou způsobeny nepřesnostmi při měření fyzikálních veličin
- **Chyby numerické metody** - vznikají při nahrazení původní matematické úlohy jednoduší numerickou. Často se jedná o nahradu nekonečného procesu procesem konečným, např. při výpočtu hodnoty některé elementární funkce pomocí součtu několika prvních členů její nekonečné Taylorovy řady nebo při approximaci určitého integrálu součtem konečného počtu funkčních hodnot. Odhad této chyby je důležitou součástí řešení každé numerické úlohy.
- **Chyby zaokrouhlovací** - vznikají tím, že při výpočtech pracujeme s čísly zaokrouhlenými na určitý, relativně nevelký počet míst. Tyto chyby se při výpočtu mohou kumulovat, nebo navzájem rušit. Při velkém počtu operací je posouzení jejich vlivu velmi náročné.

11.3.2 Definice chyb, šíření chyb při výpočtu

11.3.3 Absolutní a relativní chyba

Je-li hodnota \underline{c} aproximace přesné hodnoty c , je **absolutní chyba** definována jako $\varepsilon = c - \underline{c}$ a **relativní chyba** $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{c}, c \neq 0$. Tato definice se může zdát neužitečná, poněvadž c neznáme. Lze-li však říci, že pokud se aproximace \underline{c} blíží k c , můžeme psát $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\underline{c}}, \underline{c} \neq 0$. Bohužel, většinou neznáme ani hodnotu ε . Někdy však její hodnotu můžeme odhadnout vztahem $|\varepsilon| \leq \sigma$ a podobně lze odhadnout pro relativní chybu $|\varepsilon_r| \leq \sigma_r$.

11.3.3.1 Šíření chyb

Meze absolutních chyb při sčítání a odečítání se rovnají součtu příslušných mezi. Meze relativních chyb při násobení a dělení se rovnají součtu mezí jednotlivých relativních chyb.

- Nechť $|x_i - \hat{x}_i| = |\varepsilon_i| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \hat{x}_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (11.3.1)$$

- Nechť dále $\left| \frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right| = |\varepsilon_{ri}| \leq \sigma_{ri}, i = 1, \dots, n$. Pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n \hat{x}_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \frac{\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i - \varepsilon_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| \doteq \\ \left| \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i} \right| \\ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} \right| \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

kde jsme ale při rozdílu součinů v druhém výrazu zanedbali všechny násobky různých absolutních chyb, tedy členy druhého a vyšších řádů.

11.3.3.2 Podmíněnost numerických úloh a numerická stabilita algoritmů

Při numerickém řešení různých úloh musíme zkoumat, jaký vliv na výsledek mají malé změny ve vstupních hodnotách a zaokrouhlování během výpočtu. Řešení numerických úloh můžeme považovat za postup, kterým přiřazujeme vstupním údajům výstupní data. Je-li toto přiřazení spojité zobrazení, pak říkáme, že numerická úloha je **korektní úloha**, v opačném případě se jedná o úlohu **nekorektní**.

Pro tyto úlohy má zásadní význam relativní citlivost výsledku na malé změny ve vstupních parametrech úlohy. Korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malým relativním změnám vstupních údajů odpovídají malé relativní změny výstupních údajů. Číslo

$$C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}, \quad (11.3.3)$$

nazýváme **číslo podmíněnosti úlohy**. Pro dobře podmíněné úlohy je číslo C_p blízké číslu 1. Pokud malé relativní změny na vstupu způsobí velké relativní změny na výstupu, pak mluvíme o *špatně podmíněné úloze*. Řešení špatně podmíněných úloh je nejlépe se vyhnout, protože výsledky jakéhokoliv algoritmu jsou velmi nespolehlivé. Podobně řekneme, že je algoritmus *dobře podmíněný*, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech. Kromě nepřesnosti ve vstupních údajích ovlivňuje výsledek použitého algoritmu i zaokrouhlování čísel během výpočtu. Je-li vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek malý, mluvíme o *numericky stabilním algoritmu*. *Algoritmus dobré podmíněný a numericky stabilní se nazývá stabilní*.

11.4 Řešení nelineárních rovnic

11.4.1 Motivace

Kořeny nelineárních rovnice $f(x) = 0$ obecně neumíme vyjádřit explicitním vzorcem. K řešení nelineární rovnice proto používáme iterační metody: z jedné nebo několika počátečních approximací hledaného kořene \hat{x} generujeme posloupnost x_0, x_1, x_2, \dots , která ke kořenu \hat{x} konverguje. Pro některé metody stačí, když zadáme interval (a, b) , který obsahuje hledaný kořen. Jiné metody vyžadují, aby počáteční approximace byla k hledanému kořenu dosti blízko; na oplatku takové metody konvergují mnohem rychleji. Často proto začínáme s "hrubou", avšak spolehlivou metodou, a teprve když jsme dostatečně blízko kořene, přejdeme na "jemnější", rychleji konvergující metodu.

Abychom naše úvahy zjednodušili, omezíme se na problém určení reálného jedno- duchého kořene \hat{x} rovnice $f(x) = 0$, tj. předpokládáme, že $f'(\hat{x}) = 0$. Budeme také

automaticky předpokládat, z funkce $f(x)$ je spojitá a má tolik spojité derivací, kolik je jich v dané situaci zapotřebí.

Počáteční approximaci kořenů rovnice $f(x) = 0$ můžeme zjistit z grafu funkce $f(x)$: ručně, nebo raději pomocí vhodného programu na počítači, vykreslíme funkci $f(x)$ a vyhledáme její průsečíky s osou x .

Jinou možností je sestavení tabulky $[x_i, f(x_i)]$ pro nějaké dělení:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Příklad 11.4.1. Získejme hrubý odhad kořenů rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$$

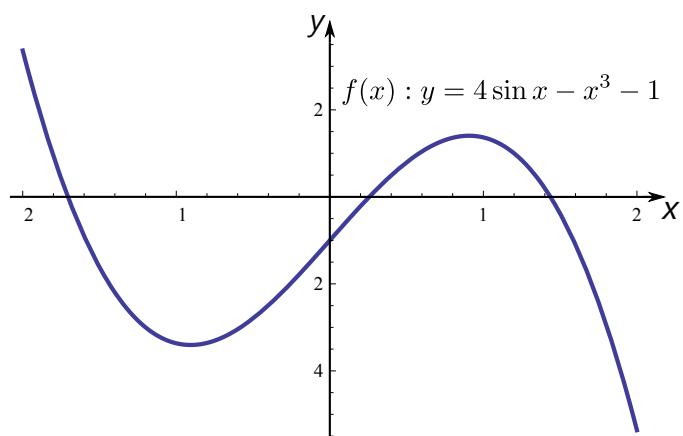
Z obrázku 11.4.1 zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (-1, 0)$ a $x_3^* \in (1, 2)$.

Z obrázku zjistíme, že existují tři kořeny: $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (0, 1)$, $x_3^* \in (1, 2)$. Zkusme najít kořeny v těchto intervalech pomocí numerických metod popsaných v následujících odstavcích

11.4.2 Metoda bisekce

Metoda známá také jako **metoda půlení intervalů**, je založena na principu znaménkových změn. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v koncových bodech intervalu (a_0, b_0) opačná znaménka, tj. platí $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Sestrojíme posloupnost intervalů $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$, které obsahují kořen. Intervaly (a_{k+1}, b_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots$, určíme rekurzivně způsobem, který si nyní popíšeme.

Střed intervalu (a_k, b_k) je bod $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Když $f(x_k) = 0$, pak $x_{k+1} = x^*$ je kořen a dál nepokračujeme.



Obrázek 11.4.1: Graf funkce $f(x) : y = 4 \sin x - x^3 - 1$.

Část IV

Fyzika

Obsah

12.1 Hlavní etapy vývoje	86
------------------------------------	----

12.1 Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egypťané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Kláudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimédovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlosť, zrychlení, síla apod.). Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich dráhách kolem Slunce je táz jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton

se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a též elektromagnetické povahy. V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, již vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoročasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlosť světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonovu. Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádrech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrín. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou též podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak

probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou též povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlavače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

Obsah

13.1 Vektorový počet	90
13.2 Skalární a vektorová pole	92
13.3 Derivace polí - gradient	94
13.4 Operátor nabla	97
13.4.1 Operace s operátorem nabla	98
13.5 Diferenciální rovnice proudění tepla	100
13.6 Druhé derivace vektorových polí	102

13.1 Vektorový počet

V pravoúhlém kartézském systému je každý bod prostoru určen polohovým vektorem \vec{r} , který má složky x, y, z , což budeme zapisovat takto:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (13.1.1)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z . Velikost vektoru \vec{r} určíme ze vztahu

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (13.1.2)$$

Pro osvězení pár faktů z vektorové algebry pro vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ uvádíme následující vztahy: Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \dots \text{skalár} \quad (13.1.3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \dots \text{vektor} \quad (13.1.4)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \quad (13.1.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (13.1.6)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (13.1.7)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (13.1.8)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad (13.1.9)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (13.1.10)$$

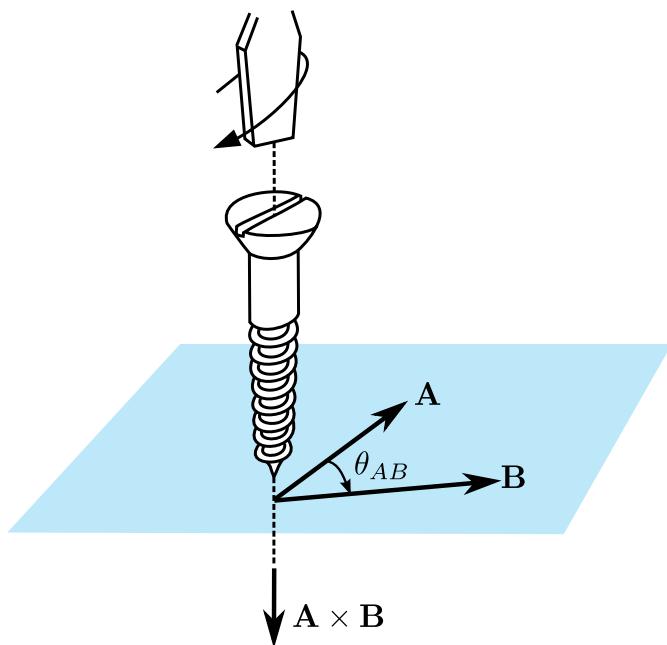
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (13.1.11)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (13.1.12)$$

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (13.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (13.1.14)$$

Rovnost (13.1.11) samozřejmě pouze v limitě, když $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se blíží nule.



Obrázek 13.1.1: Určení směru vektoru $\vec{A} \times \vec{B}$ pomocí pravotočivého šroubu

Vektorový součin vektorů \vec{A} a \vec{B} je definován jako vektor kolmý k vektorům \vec{A} a \vec{B} s velikostí rovnou ploše kosoúhelníku, který oba vektory definují:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |A| |B| \sin \theta \quad (13.1.13)$$

kde θ je úhel svíraný vektory \vec{A} a \vec{B} ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) a \vec{n} je jednotkový vektor kolmý k nim. Takové jednotkové vektory však existují dva; volba závisí na tom, je-li souřadný systém definován jako pravotočivý nebo levotočivý. V pravotočivém souřadném systému lze použít pravidlo jako na obr. 13.1.1.

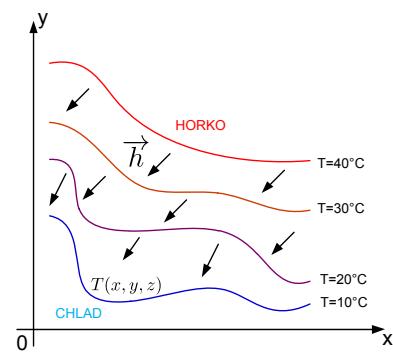
13.2 Skalární a vektorová pole

Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty veličiny. Řečeno jinými slovy, polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru.

Nejjednodušší možné fyzikální pole je **skalární pole**. Skalárním polem chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit.

Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá určité představy myšlených ploch, proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě *teplotního pole* se tyto plochy nazývají *izotermickými hladinami* nebo *izotermami*.

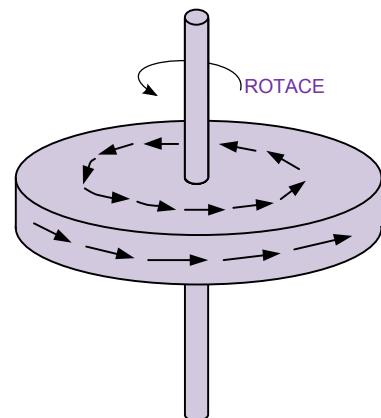
U **vektorových polí** je v každém bodě prostoru dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlosť látky, tvořící těleso je v každém bodě vektor, který je funkcí polohy. V druhém případě uvažujme proudění tepla z teplejších míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. *Hustota tepelného toku* je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji \vec{h} . Její velikost je mírou proudícího tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 13.2.1. Definujeme \vec{h} přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde infinitezimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 13.2.3). Vyjádříme to v symbolech: je-li ΔP tepelná energie, která projde za jednotku času



Obrázek

13.2.1:

Teplota je příkladem skalárního pole. Každému bodu (x, y, z) v prostoru je přiřazeno číslo $T(x, y, z)$. Všechny body na ploše označené $T = 20^\circ\text{C}$ (zobrazené jako křivka při $z = 0$) mají stejnou teplotu. Šipky jsou ukázkami hustoty tepelného toku \vec{h} .

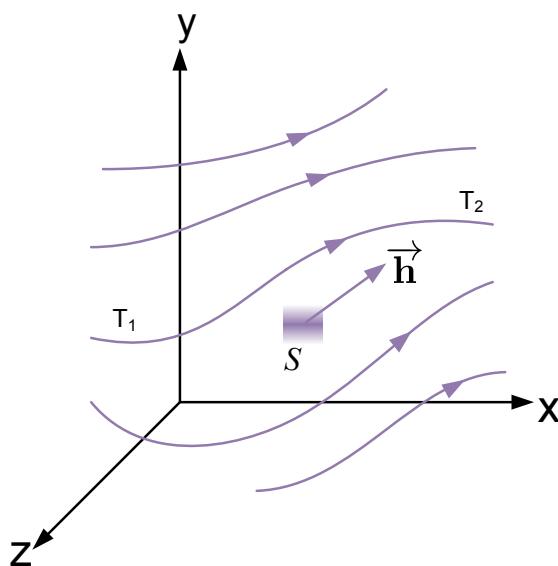


Obrázek 13.2.2: Rychlosť v rotujícím tělese je příkladem vektorového pole.

$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t \quad (13.2.1)$$

kde \vec{e}_t je jednotkový vektor ve směru toku.

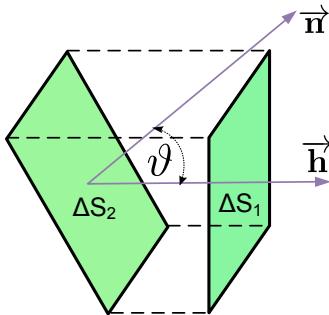
Vektor \vec{h} je možno definovat i jiným způsobem - pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obrázek 13.2.4 znázorňuje plošku ΔS_2 skloněnou pod úhlem ϑ k ploše ΔS_1 kolmé na tok. Jednotkový vektor \vec{n} je kolmý na plošku ΔS_2 . Vektory \vec{n} a \vec{h} svírají úhel ϑ (neboť \vec{h} je kolmé ΔS_1). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou ΔS_2 ? Tok ploškou ΔS_2 je stejný jako ploškou ΔS_1 , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to $\Delta S_1 = S_1 \cos(\vartheta)$. Hustota toku ploškou ΔS_2 je



Obrázek 13.2.3: Hustota tepelného toku představuje vektorové pole. Vektor \vec{h} ukazuje směr proudění. Jeho velikost je rovna energii, která za jednotku času projde elementární ploškou postavenou kolmo na směr proudění, vydělené obsahem této plošky.

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = \vec{h} \cdot \vec{n} \quad (13.2.2)$$

Tuto rovnici interpretuje tak, že hustotu tepelného toku \vec{h} (teplo prošlé za jednotku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je \vec{n} , udává výraz $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku ΔS_2 je $\vec{h} \cdot \vec{n}$. Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za definice \vec{h} . Stejné představy můžeme použít i pro jiná vektorová pole.



Obrázek 13.2.4: Tepelný tok ploškou ΔS_2 je stejný jako tepelný tok ploškou ΔS_1 .

13.3 Derivace polí - gradient

Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle x ? Nebo podle y , nebo z ?

Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry, nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například $\frac{\partial T}{\partial x}$? Je to skalár nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu x , $\frac{\partial T}{\partial x}$ se jistě změní. Ale všimněte si, že máme tři možné derivace: $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$. Protože existují tři derivace a víme, že tři čísla tvoří vektor, tyto tři derivace by mohly představovat složky jednoho vektoru:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{vektor} \quad (13.3.1)$$

Samozřejmě, ne každá tři čísla obecně tvoří vektor. Je tomu tak pouze tehdy, když při pootočení souřadnicové soustavy se složky vektoru správně transformují. Proto je nevyhnutelné prozkoumat, jak se naše tři derivace změní při otočení souřadnicové soustavy. Ukážeme, že rov. 13.3.1 je skutečně vektorem. Při otáčení souřadnicové soustavy se derivace transformují správně.

Můžeme se o tom přesvědčit několika způsoby. Jeden způsob je položit si takovou otázku, na níž lze odpovědět nezávisle na souřadnicové soustavě, a pokusit se vyjádřit odpověď v "invariantním" tvaru. Například jsou-li \vec{A} a \vec{B} vektory a $S = \vec{A} \cdot \vec{B}$, víme, že S je skalárem. I bez zjišťování víme, zda se S mění se změnou souřadnicových soustav. Nemůže, neboť jde o skalární součin dvou vektorů.

Podobně, víme-li, že \vec{B} je vektorem a mám tři čísla B_1, B_2 a B_3 , o kterých zjistíme že

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (13.3.2)$$

kde S je totéž pro libovolnou souřadnicovou soustavu, pak tři čísla B_1, B_2 a B_3 jsou nutně složkami B_x, B_y a B_z nějakého vektoru \vec{B} .

Zvažme případ teplotního pole. Vezmeme dva body P_1 a P_2 v malé vzdálenosti $\Delta\vec{r}$ od sebe. Teplota v P_1 je T_1 a v P_2 je T_2 s rozdílem $\Delta T = T_2 - T_1$. Teploty v těchto reálných, fyzikálních bodech určitě nezávisí na volbě os souřadnic. Konkrétně ΔT je číslo nezávislé na souřadnicové soustavě. Je to skalár.

Zvolíme-li nějakou vhodnou soustavu souřadnicových os, můžeme napsat $T_1 = T(x, y, z)$ a $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, kde $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ jsou složky vektoru $\Delta\vec{r}$ (obr. 13.3.1). Vzhledem k rovnosti rov. 13.1.11 můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \quad (13.3.3)$$

Levá strana rovnosti (13.3.3) je skalárem. Pravá je součtem tří součinů obsahujících jako součinitele $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, které jsou složkami vektoru. Z toho vyplývá, že tři čísla

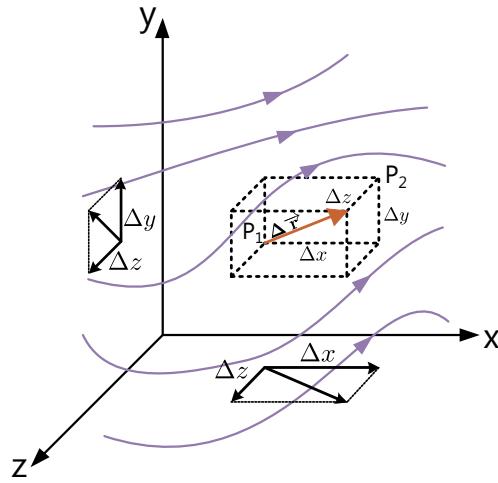
$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Představují také x – *ovou*, y – *ovou* a z – *ovou* složku nějakého vektoru. Pro tento nový vektor použijeme symbol ∇T . Symbol ∇ (nazývaný "nabla") je převráceným Δ a má připomínat derívování. ∇T se čte různě: "nabla T " nebo "gradient T " nebo "grad T ";

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^1 \quad (13.3.4)$$

¹Použijeme-li jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, můžeme psát

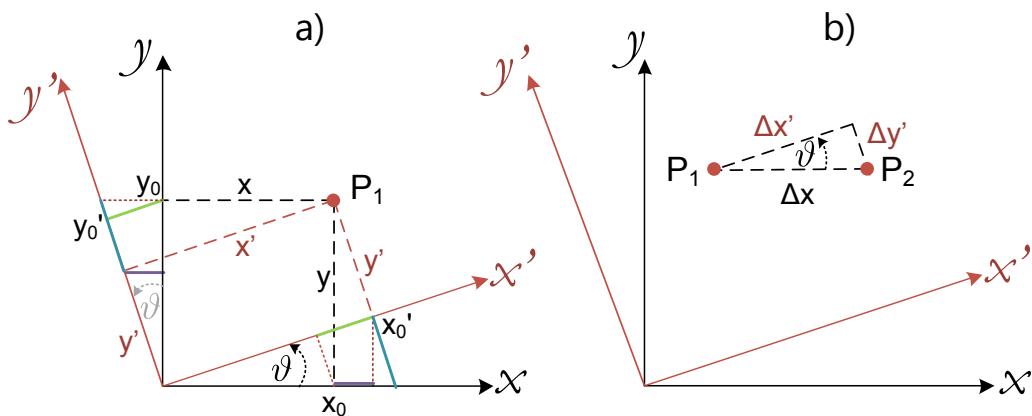
$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$



Obrázek 13.3.1: Vektor \vec{r} , jehož složky jsou $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Použitím této nové symboliky se můžeme pokusit rovnost (13.3.3) přepsat na kompaktnější tvar

$$\Delta T = \nabla T \cdot \vec{r} \quad (13.3.5)$$



Obrázek 13.3.2: a) Transformace do pootočené souřadnicové soustavy; b) Speciální případ, v němž je vektor \vec{r} rovnoběžný s osou x .

Tento vztah, vyjádřený slovy, říká, že rozdíl teplot ve dvou sousedních bodech je roven skalárnímu součinu gradientu T a rozdílu polohových vektorů obou bodů. Tvar rov. 13.3.5 také ilustruje již uvedený důkaz, že ∇T je opravdu vektorem.

Stále ještě nejste přesvědčeni? Ukážeme, že složky ∇T se transformují stejně jako složky \vec{r} . Pokud ano, ∇T je vektor podle naší původní definice vektoru. Abychom si to trochu zjednodušili, položme $z = z'$, takže souřadnici z již nemusíme brát v úvahu.

Uvažujme o soustavě x', y' pootočené o úhel ϑ vzhledem k soustavě xy (obr. 13.3.2). Souřadnice bodu (x, y) vyjádřené v čárkovanej soustavě jsou

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \quad (13.3.6)$$

$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad (13.3.7)$$

vyjádříme-li x a y

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \quad (13.3.8)$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \quad (13.3.9)$$

Transformují-li se nějaká dvojice čísel podle těchto rovnic stejně jako x a y , jde o složky vektoru.

Nyní si všimněme rozdílu teplot ve dvou sousedních bodech P_1 a P_2 , zvolených tak, jak to znázorňuje obr. 13.3.2b. Při výpočtu v souřadnicích x a y můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad (13.3.10)$$

neboť $\Delta y = 0$.

A výpočet v čárkované soustavě? Tam bychom psali

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y' \quad (13.3.11)$$

Podíváme-li se na obr. 13.3.2b, vidíme, že

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad (13.3.12)$$

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta \quad (13.3.13)$$

neboť $\Delta y'$ je záporné při kladném Δx . Dosazením těchto výrazů do rov. 13.3.11 dostaneme

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta = \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta \right) \Delta x \quad (13.3.14)$$

Porovnáním rov. 13.3.14 s rov. 13.3.10 zjistíme, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (13.3.15)$$

Podle tohoto vztahu $\frac{\partial T}{\partial x}$ dostaneme z $\frac{\partial T}{\partial x'}$ a $\frac{\partial T}{\partial y'}$ právě tak jako x z x' a y' (rov. 13.3.8). $\frac{\partial T}{\partial x}$ je tedy x – ovou složkou vektoru. Podobné úvahy by ukázaly, že $\frac{\partial T}{\partial y}$ je y – ová a $\frac{\partial T}{\partial z}$ jeho z – ová složka. $\vec{V}T$ je zajisté vektorem. Jde o vektorové pole odvozené ze skalárního pole T .

13.4 Operátor nabla

Důkaz, že $\vec{V}T$ nebo ∇T je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejné i tehdy, kdyby se T zaměnilo za jakékoliv jiné skalární pole. Transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom T vyněchat a nahradit rovnici (13.3.15) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (13.4.1)$$

Ponecháme přitom operátory "hladové po derivování".

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme jej nazvat složkami *vektorového operátoru*. Můžeme psát

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13.4.2)$$

co samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (13.4.3)$$

Gradient jsme abstrahovali od T .

Musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od ∇ . $T\nabla$ je stále operátorem, zatímco ∇T už není "hladovým" operátorem, neboť se nasytil. Je to opravdový fyzikální vektor, představující rychlosť změny T v prostoru. Víme, že rychlosť změny T v nějakém směru udává složka vektoru ∇T v tomto směru (viz vztah 13.3.5). Z toho vyplývá, že ∇T směřuje tam, kde má největší možnou složku - jinými slovy, směrem, v němž se T mění nejrychleji. **Gradient T má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny T .**

13.4.1 Operace s operátorem nabla

Je možné s vektorovým operátorem ∇ provádět nějaké jiné algebraické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vyjádřením skalárního součinu. Mohly bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}) \quad (13.4.4)$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. ($(\vec{A} \cdot \vec{B})$ je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru ∇ s vektorovým polem, které známe, např. \vec{h} . Vypíšeme-li ho ve složkách

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x \cdot h_x + \nabla_y \cdot h_y + \nabla_z \cdot h_z \quad (13.4.5)$$

nebo

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \quad (13.4.6)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali bychom²

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \quad (13.4.7)$$

což je totéž číslo, které bychom dostali z (rov. 13.4.6), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h} \quad (13.4.8)$$

pro každý bod prostoru. Tedy $\nabla \cdot \vec{h}$ je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíte si uvědomit, že kombinace derivací $\nabla \cdot \vec{h}$ je dost specifická. Existují rozmanité kombinace, např. $\frac{\partial h_y}{\partial x}$, které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina $\nabla \cdot (\text{vektor})$ je ve fyzice neobvyčejně užitečná. Byla nazvána **divergencí** (div \vec{h}).

Například

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{divergence } \vec{h}. \quad (13.4.9)$$

Podobně jako v případě ∇T můžeme najít fyzikální význam i pro $\nabla \cdot \vec{h}$. Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru ∇ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (13.4.10)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz rov. 13.1.6).

$$(\nabla \times \vec{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (13.4.11)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (13.4.12)$$

$$(\nabla \times \vec{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \quad (13.4.13)$$

²Na \vec{h} se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je \vec{h} "derivováno" podle x, y a z nebo podle x', y' a z' , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro \vec{h} jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme \vec{h} čárkou.

Kombinace $\nabla \times \vec{h}$ se nazývá **rotace** \vec{h} (rot \vec{h}). O příčině tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor ∇ :

$$\nabla T = \text{vektor} \quad (13.4.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{skalár} \quad (13.4.15)$$

$$\nabla \times \vec{h} = \text{vektor} \quad (13.4.16)$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislém na nějaké souřadnicové soustavě.

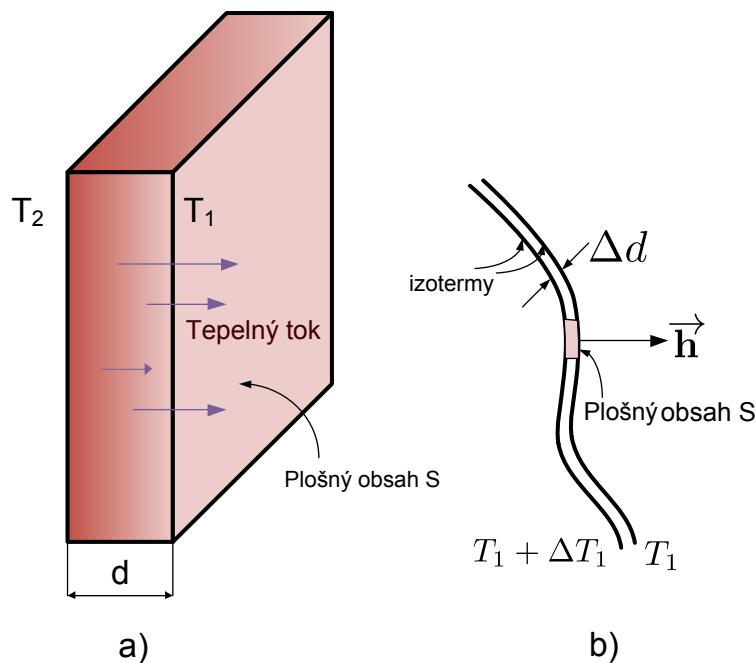
Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru ∇ napíšeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetismu - Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \nabla E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (13.4.17)$$

kde ρ (ró) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu, \vec{j} je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

13.5 Diferenciální rovnice proudění tepla

Uveďme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Vezmeme-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahřejeme na teplotu T_2 , zatímco protilehlou stranu ochladíme na odlišnou teplotu T_1 , materiélem bude proudit teplo ve směru od T_2 k T_1 (obr. 13.5.1).



Obrázek 13.5.1: a) Tepelný tok deskou. b) Infinitezimální destička rovnoběžná s izotermickou hladinou ve velkém kuse látky

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu S stěn i rozdílu teplot $T_2 - T_1$ a nepřímo úměrný vzdálenosti d mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok). Nechť P je tepelná energie, která projde deskou za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda(T_2 - T_1) \frac{S}{d} \quad (13.5.1)$$

Konstanta úměrnosti λ (lambda) se nazývá **součinitel teplotní vodivosti**.

Co se stane ve složitějším případě, řekněme v tělesu nepravidelném tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 13.5.1a, ale v miniaturním měřítku. Nasměrujeme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami obr. 13.5.1b, takže pro destičku bude platit rov. 13.5.1.

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky ΔS , je tepelný tok

$$P = \lambda(\Delta T) \frac{\Delta S}{\Delta d} \quad (13.5.2)$$

kde Δd je tloušťka destičky. $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ jsme definovali jako velikost vektoru \vec{h} ležícího ve směru tepelného toku. Teplo bude proudit od $T_1 + \Delta T_1$ k T_1 a tudíž kolmo na izotermy (obr.

13.5.1b). $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává dále právě rychlosť změny T při změně polohy. Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše $\frac{\Delta P}{\Delta d}$ udává maximální rychlosť změny T , a tedy velikosť vektoru ∇T . Protože směr ∇T je opačný než směr³ \vec{h} rov. **13.5.2** zapsaná pomocí vektorů bude vypadat takto

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T \quad (13.5.3)$$

Rovnice **13.5.3** je diferenciální rovnici vedení tepla v masivních tělesech. Jde o skutečnou vektorovou rovnici. Každá její strana je vektor, je-li λ jen číslo. Je zobecněním speciální rov. **13.5.2** pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Tato symbolika je užitečný nejen proto, že v této rovnici vypadají jednodušeji, ale i proto, že nejjasněji ukazuje fyzikální obsah rovnic bez odvolání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.

13.6 Druhé derivace vektorových polí

Mohli bychom sestavit následující kombinace:

1. $\nabla \cdot (\nabla T)$
2. $\nabla \times (\nabla T)$
3. $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h})$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$
5. $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

- $\nabla \times (\nabla T)$: má stejný tvar jako $\vec{A} \times (\vec{h}T) = (\vec{A} \times \vec{A}) = 0$, neboť $\vec{A} \times \vec{A}$ je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

$$\text{rot grad } \vec{T} = \nabla \times \nabla T = 0. \quad (13.6.1)$$

neboť ve složkách

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

což je nula. Stejný výsledek bychom dostali i pro ostatní složky.

- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$: $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ neboť $\vec{A} \times \vec{B}$ je kolmé na \vec{A} a jeho složka ve směru \vec{A} je tedy nulová. Takže

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0. \quad (13.6.2)$$

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, řekněme vektorového pole \vec{A} je nula. Dle předchozího vztahu **13.6.1** je rotace gradientu rovna nule. Bylo by tedy možné, aby bylo \vec{A} gradientem nějaké veličiny, jeho rotace by pak byla nulová.

³Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.

Věta 13.6.1. Je-li $\nabla \times \vec{A} = 0$, existuje ψ takové, že $\vec{A} = \nabla\psi$

Rovnost 13.6.2 říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáme-li se s vektorovým polem, přičemž $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, můžeme z toho usoudit, že \vec{D} je rotací nějakého vektorového pole \vec{C} .

Věta 13.6.2. Je-li $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, existuje \vec{C} takové, že $\vec{D} = \nabla \times \vec{C}$.

- $\nabla \cdot (\nabla T)$: Vypíšeme složky $\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T)$. Potom

$$\nabla \times (\nabla T) = \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_x(\nabla_z T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}$$

. Není třeba dodávat závorky, neboť nehrozí záměna.

$$\nabla \cdot (\nabla T) = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T. \quad (13.6.3)$$

Na ∇^2 se díváme jako na nový operátor - **Laoplaceův operátor**:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}. \quad (13.6.4)$$

- $\nabla \times \nabla \times \vec{h}$: Vzhledem k vektorové rovnosti

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

můžeme rotaci vyjádřit jinak

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \vec{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ??$$

Něco je špatně! Operátory v posledním členu nejsou nasycené. Můžeme však také dobře napsat

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

a proto

$$\nabla \times (\nabla \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h} = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h}. \quad (13.6.5)$$

- Již jsme se zmínili o všech kombinacích ze seznamu na začátku kapitoly, s výjimkou $\nabla \cdot (\nabla \vec{h})$. To je přípustné vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm nedá říci.

Souhrn:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla^2 T \dots \text{skalární pole} \\ \nabla \times (\nabla T) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) &= \dots \text{vektorové pole} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} \\ (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{h} &= \nabla^2 \vec{h} \dots \text{vektorové pole} \end{aligned}$$

Obsah

14.1 Tok vektorového pole	106
14.2 Tok povrchem krychle. Gaussova věta	108
14.2.1 Tepelná vodivost, rovnice difúze	110

14.1 Tok vektorového pole

Definovali jsme vektor \vec{h} jako teplo procházející jednotkovou plochou za jednotkový čas. Předpokládejme, že uvnitř tělesa vyplněného látkou máme nějakou uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Chtěli bychom zjistit, kolik tepla vytéká z tohoto objemu.

Označme plošný obsah elementu plochy S jako dS . Tento symbol nahrazuje dvojrozměrný diferenciál

$$ds = dx dy.$$

Tok tepla elementární ploškou dS je roven jejímu plošnému obsahu vynásobenému složkou \vec{h} kolmou na dS . Už jsme definovali \vec{n} jako jednotkový vektor směřující pod pravým úhlem ven z plochy (obr. 14.1.1). Složka \vec{h} , kterou potřebujeme, je

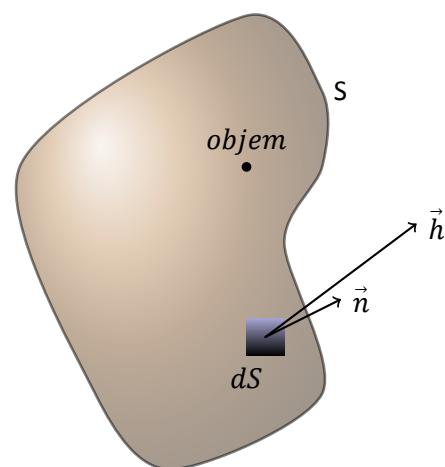
$$h_n = \vec{h} \cdot \vec{n}.$$

Tok ploškou dS pak je

$$\vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (14.1.1)$$

Celkový tepelný tok jakoukoliv plochou dostaneme, sečteme-li příspěvky všech elementárních plošek vytvářející plochu S . Jinými slovy, integrujeme-li 14.1.1 přes celou plochu: Celkový tepelný tok plochou S se rovná

$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS^1$$



Obrázek 14.1.1: Uzavřená plocha S vymezuje objem V . Jednotkový vektor \vec{n} udává vnější normálu k plošnému elementu dS a \vec{h} je vektor hustoty tepelného toku pro uvažovaný plošný element.

Tento plošný integrál budeme také nazývat *tokem plochou*. Můžeme to chápout tak, že \vec{h} je hustota proudu tepelného toku a plošný integrál z ní je celkový proud tepla směřující ven z plochy za jednotku času (v joulech za sekundu).

Rádi bychom tuto ideu zobecnili na případ, kdy vektor nepředstavuje tok něčeho konkrétního, mohlo by jít například o elektrické pole. Kdybychom chtěli, jistě bychom

¹Malý kroužek na znaku integrálu znamená, že integrujeme přes uzavřenou plochu.

mohli integrovat normálovou složku elektrického pole plochou. Ačkoliv tu nejde o tok něčeho, nazýváme tuto velčinu tokem.

Říkáme tok vektoru \vec{E} plochou $S = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$. Slovo tok zde používáme v obecném významu jako, *plošný integrál normálové složky vektoru*.

Vraťme se k případu tepelného toku a uvažujme situaci, v níž se teplo zachovává. Například si představíme nějakou látku, ve které se po počátečním ohřevu tepelná energie dále ani negeneruje, ani neabsorbuje. Existuje-li pak tok tepla uzvřenou plochou, musí tepelný obsah objemu vymezeného plochou klesat. Tedy v podmínkách, ve kterých se teplo zachovává, tvrdíme, že

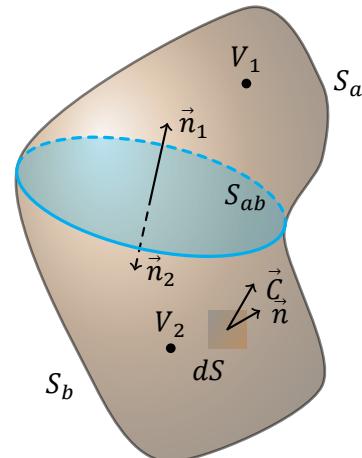
$$\oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (14.1.2)$$

kde Q je teplo uvnitř plochy. Tok tepla plochou S je roven rychlosti změny celkového tepla Q uvnitř S za čas, vzaté se záporným znaménkem. Takováto interpretace je možná, neboť hovoříme o tepelném toku a kromě toho jsme udělali předpoklad, že teplo se zachovává. O celkovém teple uvnitř objemu bychom nemohli hovořit, kdyby se v tomto objemu teplo generovalo.

Nyní poukážeme na zajímavou vlastnost toku jakéhokoliv vektoru. Můžeme mít na mysli stále vektor tepelného toku, ale vše bude platit i pro jakékoli vektorové pole \vec{C} . Představme si, že máme uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Rozdělme nyní objem V jakýmsi řezem na dvě části (obr. 14.1.2). Dostaneme tím dvě uzavřené plochy a dva objemy. Objem V_1 ohraničuje plocha S_1 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_a a plochy řezu S_{ab} . Objem V_2 ohraničuje plocha S_2 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_b doplněné řezem S_{ab} . Položme si nyní otázku: Předpokládejme, že vypočítáme tok z plochy S_1 a přičteme ho k toku z plochy S_2 . Je roven tento součet toku z celé plochy S , s níž jsme původně začínaly? Odpověď zní ano. Tok z částí ploch S_{ab} , společnou objema plochám S_1 a S_2 se přesně vyruší. Pro tok vektoru \vec{C} z objemu V_1 můžeme psát:

- tok plochou S_1 je roven:

$$\int_{S_a} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS \quad (14.1.3)$$



Obrázek 14.1.2: Objem V uvnitř plochy S je řezem S_{ab} rozdělen na dvě části. Dostáváme tím objem V_1 vymezený plochou $S_1 = S_a + S_{ab}$ a objem V_2 vymezený plochou $S_2 = S_b + S_{ab}$.

- tok plochou S_2 je roven:

$$\int_{S_b} \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (14.1.4)$$

Všimněme si, že v druhém integrálu jsme psali \vec{n}_1 , pro vnější normálu k S_{ab} , patří-li tato k S_1 a \vec{n}_2 patří-li k S_2 , jak ukazuje obr. 14.1.2. Zřejmě $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ takže

$$\int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{S_{ab}} \vec{C} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (14.1.5)$$

Sečteme-li ronvosti 14.1.3 a 14.1.4 přesvědčíme se, že součet toku přes S_1 a S_2 je dán součtem dvou integrálů, které spolu dávají tok původní plochy $S = S_a + S_b$.

Vidíme, že o toku úplnou vnější plochou S je možné uvažovat jako o součtu toků dvou částí, na které se objem V rozdělil. *Takto pro jakýkoliv způsob dělení původního objemu musí obecně platit, že tok vnější plochou, daný původním integrálem, je roven součtu toků ze všech jeho malých vnitřních částí.*

14.2 Tok povrchem krychle. Gaussova věta

Uvažujme krychly jejíž hrany mají směr souřadnicových os tak, jako na obr. 14.2.1. Předpokládejme, že souřadnice jednoho z vrcholu krychle je totožný se začátkem souřadnicové soustavy x, y, z . Nechť Δx je délka hrany krychle ve směru osy x , Δy je délka hrany ve směru osy y a Δz délka hrany ve směru osy z . Chceme najít tok vektorového pole C povrchem krychle. Dostaneme jej sečtením toků každou ze šesti stěn. Nejdříve uvažujeme stěnu na obrázku 14.2.1 označenou jako 1. Tok směřující touto stěnou ven z krychle je dán integrálem záporně vzaté x -ové složky C plochou stěny: Protože máme malou krychly můžeme tento integrál approximovat hodnotou x ve středu stěny (označíme jej jako bod 1) vynásobenou plošným obsahem stěny, tj. $\Delta y \Delta z$:

$$\text{tok z 1} = -C_x \Delta y \Delta z$$

Podobně napíšeme tok stěnou 2:

$$\text{tok z 2} = C_x \Delta y \Delta z$$

Obecně se $C_x(1)$ a $C_x(2)$ trochu liší. Je-li dostatečně malé, můžeme psát

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

Na pravé straně tohoto vztahu bychom ve skutečnosti měli uvést víc členů. Všechny však budou obsahovat vyšší mocniny Δx , a proto, uvažujeme-li limitní případ malého Δx , budou zanedbatelné. Takovým způsobem pro tok stěnou 2 vychází

$$\text{tok z 2} = \left(C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z.$$

Sečtením toků stěnami 1 a 2 dostaneme

$$\text{tok z 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Derivace by se měla počítat ve skutečnosti ve středu stěny 1, tj v bodu $[x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}]$. Ale v limitním případě infinitezimální krychle uděláme pouze zanedbatelnou chybu, počítáme-li je ve vrcholu (x, y, z) .

Provedeme-li stejné úvahy pro každý z dvou párů stěn, dostaneme

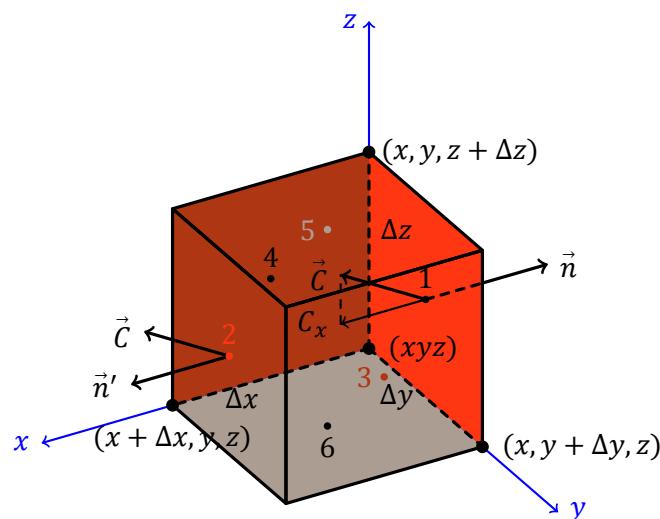
$$\text{tok z 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

a

$$\text{tok z 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Celkový tok všemi stěnami je součtem těchto členů. Dostáváme tedy

$$\int_{\text{krychle}} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$



Obrázek 14.2.1: Výpočet toku pole C z malé krychle

Součtem derivací je právě $\nabla \cdot \vec{C}$ a dále $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$, tj objem krychle. Takovýmto způsobem můžeme pro infinitesimální krychli psát

$$\int_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V. \quad (14.2.1)$$

Ukázali jsme, že tok z povrchu infinitesimální krychle ven je roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. Nyní vidíme význam divergence vektoru. Divergence vektoru v bodě P je tok - vycházející „proud“ vektoru \vec{C} - připadající na jednotkový objem v okolí P .

Divergenci C jsme uvedli do souvislosti s tokem \vec{C} z každého infinitesimálního objemu. V případě konečného objemu můžeme využít fakt, který jsme už dokázali, že celkový tok z objemu je součtem toků z každé jedné části. To znamená, že divergenci můžeme integrovat přes celý objem. Z toho vyplývá věta, že integrál normálové složky každého vektoru přes jakoukoliv uzavřenou plochu je možné zapsat jako integrál z divergence tohoto vektoru přes objem uzavřený touto plochou. Tato věta byla pojmenována po Gaussovi.

Gaussova věta:

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV, \quad (14.2.2)$$

kde S je jakákoli uzavřená plocha a V je objem jí vymezený.

14.2.1 Tepelná vodivost, rovnice difúze

Abychom se lépe seznámili s *Gaussovo větou*, uvedeme nějaký případ jejího použití. Vezměme opět případ tepelného toku, například v kovu. Předpokládejme, že máme jednoduchou situaci, kdy všechno teplo bylo přivedeno už dříve a těleso se nyní pouze ochlazuje. Žádné zdroje tepla už nejsou, takže teplo se zachovává. Kolik je potom tepla uvnitř určitého zvoleného objemu v libovolném čase? Množství tepla se musí zmenšovat, a to právě o množství, které vytéká z objemu jeho povrchem. Kdyby byl náš objem malou krychlí, pak podle vztahu 14.2.1 bychom napsali

$$\text{tok tepla} = \int_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{h}) \Delta V. \quad (14.2.3)$$

Tato hodnota však musí být rovna rychlosti, kterou se teplo ztrácí z vnitřku krychle. Je-li q teplo připadající na jednotkový objem, $q \Delta V$ je teplo v krychli a rychlosť jeho úbytku je

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (14.2.4)$$

Z porovnání rov. 14.2.3 a 14.2.4 vidíme, že

$$\nabla \cdot \vec{h} = -\frac{dq}{dt}.$$

Podotkněme, že rovnice tohoto tvaru se ve fyzice vyskytuje velmi často. Vyjadřuje *Zákon zachování*, tomto případě *Zákon zachování tepla*. Ve vztahu 14.1.2 jsme tentýž fyzikální jev vyjádřili jiným způsobem. Zde máme *diferenciální* tvar zákona zachování zatímco rovnost 14.1.2 představuje jeho *integrální* tvar.

Obsah

15.1 Princip relativity	114
15.2 Lorentzova transformace	116

15.1 Princip relativity

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy ronice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak jej odstranit. Oboje, chybu i korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že m je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlosť. V Einsteinově opraveném vztahu má m hodnotu

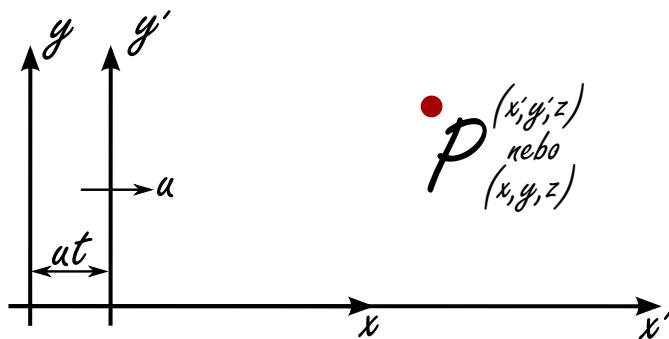
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.1.1)$$

kde m_0 je *klidová hmotnost* (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje) a c je *rychlosť světla*, která je přibližně rovna $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlostí $9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$ a po dosazení do uvedeného vztahu dosaneme korekci hmotnosti ne větší než dvě až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostatečně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosti světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý a proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Proto je zajímavé sledovat, jaké kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona. Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o *speciální teorii relativity* z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou *Obecná teorie relativity*. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ *gravitace*.

Newton byl první, kdo vyslovil *princip relativity* jako jeden z důsledků pohybových zákonů: Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejné ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočare vpřed. To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlostí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samozřejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je pravda, že ve všech experimentech provedených



Obrázek 15.1.1: Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých \$x\$-ových os.

v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální zákony stejné, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje konstantní rychlostí \$u\$ ve směru osy \$x\$, přičemž měří polohu určitého bodu (obr. 15.1.1). Ve své souřadnicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy \$x\$ jako \$x'\$. Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy \$x\$ ve své souřadnicové soustavě značí jako \$x\$. Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunu za čas \$t\$ o vzdálenost \$ut\$, a jestliže soustavy z počátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (15.1.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetrasformovaly do stejných zákonů v čárkované soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soutavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje či nikoliv.

Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumu elektrických, magnetických a světelných jevů, jež vyustilo v *Maxwellovu teorii elektromagnetického pole*, která jednotně popisuje elektřinu, magnetizmus a světlo. Zdálo se však, že Maxwellovy rovnice nevyhovovaly *principu relativity*, neboť přetrasformujeme-li Maxwellovy rovnice pomocí rovnic 15.1.2, nebudou mít stejný tvar. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měli lišit od jevů v nehybné lodi. Těmito jevy by pak bylo možné určit rychlosť lodi, a ve speciálním případě pomocí vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možné určit i absolutní rychlosť lodi. Jedním z důsledků Maxwellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří vsemi směry stejnou rychlosťí \$c = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}\$. Dalším důsledkem těchto rovnic je, že pohybujeme-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlosťí \$c\$. Tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje vede k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlostí u a že světlo z reflektorů auta za námi nás míjí rychlostí c . Zdiferencováním první rovnice 15.1.2 máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u, \quad (15.1.3)$$

což znamená, že podle *Galileovy transformace* by zdánlivá rychlosť světla měřená z auta nemohla být c , ale $c - u$. Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosti Země, ale všechny selhaly - nedávaly vůbec žádné rychlosti. Ukázalo se, že někde byla chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

15.2 Lorentzova transformace

Když se zjistilo, že s rovnicemi v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrzdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxwellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problému je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si H. A. Lorentz všiml pozoruhodné věci, když použil v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (15.2.1)$$

tvar rovnic se nezměnil. Rovnice 15.2.1 jsou známé jako *Lorentzovy transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že všechny fyzikální zákony, by měly být takové, aby se při Lorentzově transformaci něměnily. Jinými slovy, měly bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak se ukázalo jediné co je třeba, je změnit hmotnost m v Newtonových rovnicích podle vztahu 15.1.1. Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejné.

Pro pochopení smyslu této nové transformace nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání prostoru a času.

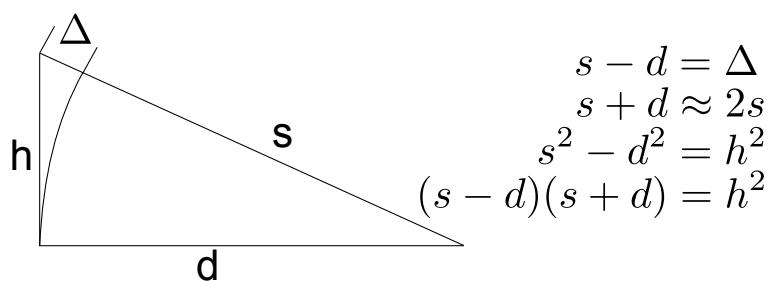
Obsah

16.1 Úvod	118
----------------------------	------------

16.1 Úvod

Na několika přístrojích předvedeme approximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější approximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů a přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná.

Abychom mohli pokračovat potřebujeme jeden geometrický vztah a to: máme-li trojúhelník s malou výškou h a velkou základnou d , pak přepona s je delší než základna (viz obr. 16.1.1). Tedy



Obrázek 16.1.1: Trojúhelník s malou výškou a velkou základnou

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (16.1.1)$$

To je celá geometrie, kterou je třeba znát, aby bylo možné diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch.

Část V

Astrofyzika

Obsah

17.1 Historie astrofyziky	122
17.2 Základní vztahy	122

Astrofyzika je vědní obor ležící na rozhraní *fyziky* a *astronomie*. Zabývá se fyzikou vesmíru, včetně fyzikálních vlastností (svítivost, hustota, teplota, chemické složení) astronomických objektů jako jsou hvězdy, galaxie a mezihvězdná hmota, jakož i jejich vzájemné působení.

Podle metod výzkumu těchto objektů se dělí na *fotometrii*, *spektroskopii*, *radioastronomii*, *astrofyziku rentgenovou*, *infračervenou*, *ultrafialovou* a *neutrínovou*. Každý z těchto podoborů se dále dělí na praktickou a teoretickou část. Praktická získává potřebná data. Teoretická s pomocí fyzikálních zákonů vysvětluje pozorované chování vesmírných těles.

17.1 Historie astrofyziky

17.2 Základní vztahy

- **AU** - *astronomická jednotka*: průměrná vzdálenost Země od Slunce, $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Vzájemné vzdálenosti planet či jiných objektů sluneční soustavy vyjádřené v AU poskytují relativně názorné měřítko vzdáleností těchto objektů od sebe. Přesná hodnota je

$$1AU = 149\,597\,870\,691 \pm 6 \text{ m}$$

Kvůli vyšší přesnosti *Mezinárodní astronomická unie* (International Astronomical Union, IAU) přijala novou definici, podle které je AU délka poloměru nerušené oběžné kruhové dráhy tělesa se zanedbatelnou hmotností, pohybujícího se okolo Slunce rychlostí $0,017\,202\,098\,950$ radiánů za den ($86\,400 \text{ s}$).

- Vzdálenost Země od Slunce je $1,00 \pm 0,02 \text{ AU}$.
- Měsíc obíhá kolem Země ve vzdálenosti $0,0026 \pm 0,0001 \text{ AU}$.
- Mars je od Slunce vzdálen $1,52 \pm 0,14 \text{ AU}$.
- Jupiter je od Slunce vzdálen $5,20 \pm 0,05 \text{ AU}$.
- Nejvzdálenější člověkem vyrobené těleso, sonda Voyager 1, bylo 31. prosince 2007 ve vzdálenosti $104,93 \text{ AU}$ od Slunce.
- Průměr sluneční soustavy bez *Oortova oblaku* je přibližně 105 AU .

- Průměr sluneční soustavy s Oortovým oblakem se odhaduje na 50 000 až 100 000 AU.
- Nejbližší hvězda (po Slunci), Proxima Centauri, se nachází přibližně ve vzdálenosti 268 000 AU.
- Průměr hvězdy Betelgeuze je 2,57 AU.
- Vzdálenost Slunce od středu Galaxie je přibližně $1,7 \cdot 10^9$ AU.
- Velikost viditelného vesmíru je asi $8,66 \cdot 10^{14}$ AU.
- **I.y.** - světelný rok: vzdálenost, kterou světlo ulétne za jeden rok, $9,46 \cdot 10^{12}$ km,
- **pc** - parsek, paralaktická sekunda: vzdálenost, ze které by poloměr oběžné dráhy Země byl kolmo k zornému paprsku vidět pod úhlem $1''$, $30,9 \cdot 10^{12}$ km.

Příklad 17.2.1. Spočtěte, jakou vzdálenost v metrech vyjadřuje jeden parsek [Kulhanek2009].

řešení: 1 pc (paralaktická sekunda) je vzdálenost, ze které vidíme velkou poloosu oběžné dráhy Země kolem Slunce pod uhlem $\varphi = 1''$. Úhel $1''$ je tak malý, že strany VS a VZ na obrázku prakticky splývají a místo pravého trojúhelníka VSZ můžeme použít definiční vztah úhlu v obloukové míře (velikost úhlu je možné určit jako poměr délky oblouku vymezeného rameny na kružnici opsané kolem vrcholu k poloměru této kružnice). Proto

$$\varphi = \frac{R_{SZ}}{l} \rightarrow l = \frac{R_{SZ}}{\varphi},$$

kde l je vzdálenost 1 pc v metrech, R_{SZ} je vzdálenost země od Slunce a φ je úhel jedné vteřiny vyjádřený v radiánech.

$$l = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60 \cdot 60} \cdot \frac{2\pi}{360}} \cong 3 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$

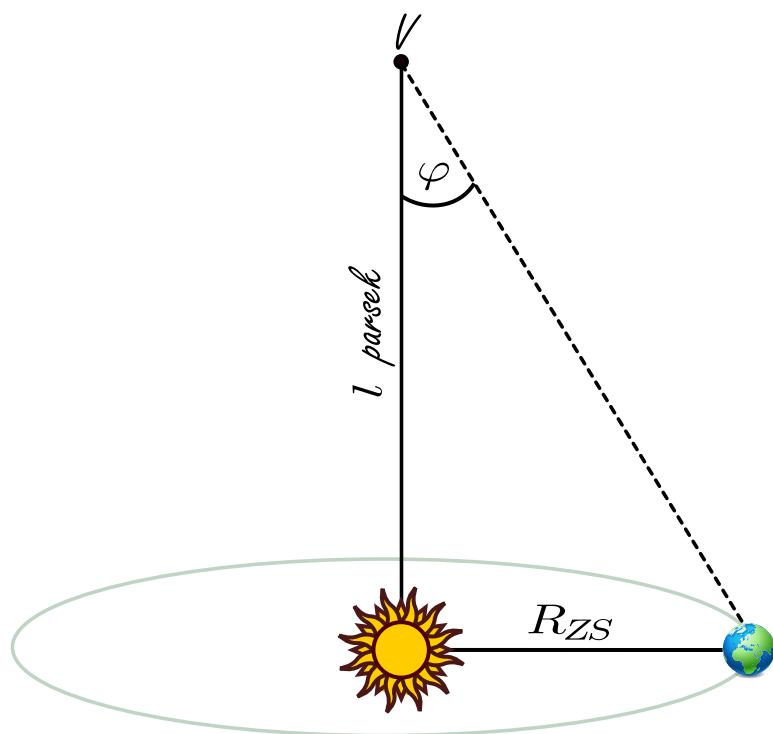
Další jednotkou, kterou se v astrofyzice měří vzdálenost dvou vesmírných těles, je *paralaxa*. Pozorovací místa musí být od sebe výrazně vzdálena, aby například při měření vzdálenosti naší nejbližší hvězdy - *Proxima Centauri* byla paralaxa vůbec měřitelná. Vzdálenost této hvězdy je 4,2 světelných let (nebo 270 000 AU) od Země.

Příklad 17.2.2. Najděte paralaxu *Proximy Centauri*, která je od nás vzdálená asi 4,2 světelného roku [Kulhanek2009].

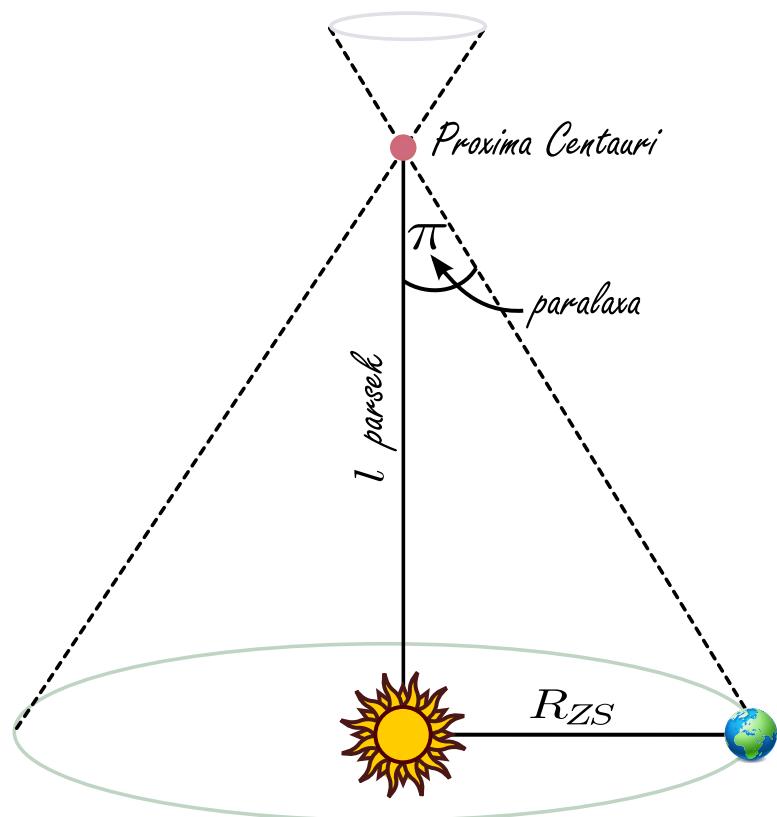
Řešení: Díky pohybu Země kolem Slunce se zdá, že blízké hvězdy opisují oproti vzdáleným elipsu. Úhlový poloměr této elipsy se nazývá *paralaxa hvězdy*. Lze ji změřit jen pro nejbližší hvězdy. Z definice úhlu (jako v předchozím příkladě) tedy vyplývá, že

$$\pi = \frac{R_{ZS}}{l} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,2 \cdot 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

což je přibližně $0.76''$. Vidíme, že i u druhé nejbližší hvězdy po Slunci není paralaxa ani celá $1''$.



Obrázek 17.2.1: Parsek



Obrázek 17.2.2: Paralaxa naší nejbližší hvězdy

Část VI

Mechanika

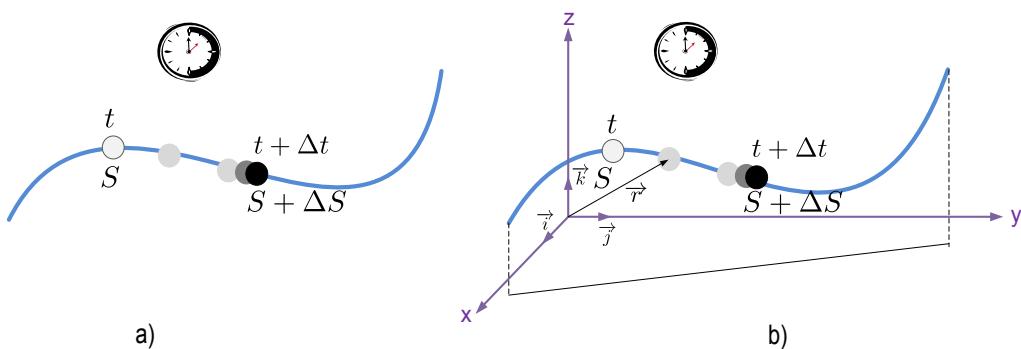
Obsah

18.1 Kinematický popis pohybu částice	130
18.1.1 Základní pohyby a jejich skládání	131
18.1.2 Skládání pohybů	133

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem hmotný bod je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměru částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

18.1 Kinematický popis pohybu částice

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po příčinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, trajektorii, a snažíme se určit jednak tvar této trajektorie a zákon pohybu po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase¹. Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.



Obrázek 18.1.1: Příklad trajektorie částice a zavedení kartézské soustavy souřadnic

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit dráhu částice $s(t)$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 18.1.1). V okamžiku t je částice v bodě daném prošlou dráhou s , v okamžiku $t + \Delta t$ v bodě $s + \Delta s$. Dráha s tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

¹Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrosvětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrosvětě pohybuje podle zákona kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně stanovit její polohu a rychlosť

Přitom můžeme zavést **střední rychlosť častice** v intervalu Δt

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (18.1.1)$$

okamžitou rychlosť častice v okamžiku t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (18.1.2)$$

a **okamžité zrychlení**

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (18.1.3)$$

Takto zavedené rychlosť a zrychlení jsou skalární funkce času a udávají pouze jak se mění dráha a rychlosť při pohybu po zadané trajektorii, ve směru tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu častice v prostoru vzhledem k nějaké vztažné soustavě. Tato soustava, například kartézská, je spojena s nějakým tuhým tělesem a doplněna hodinami umístěnými například v počátku. V místnosti mohou jako kartézské osy sloužit průsečnice stěn a podlahy. Potom udáváme tři kartézské souřadnice častice jako funkce času:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (18.1.4)$$

Soustava tří rovnic (rov. 18.1.4) představuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnice trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rov. 18.1.4 čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (18.1.5)$$

Přitom $s = s[x(t), y(t), z(t)]$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalární rychlosť bude

18.1.1 Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu častice.

18.1.1.1 Po hyb přímočarý

Nechť přímočarý po hyb probíhá podél osy x s počátečními podmínkami $x = x_0, v_x = \dot{x} = v_{0x}$ při $t = t_0$. Pak rozlišujeme

- *Po hyb rovnoměrný* s konstantní rychlostí v_{0x} a nulovým zrychlením $a_x = 0$. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon pohybu:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (18.1.6)$$

- *Po hyb rovnoměrně zrychlený* s konstantním zrychlením a_{0x} kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostaváme zákon rychlosti a zákon pohybu:

$$v = v_0 x + a_{0x}(t - t_0), \quad (18.1.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{0x}(t - t_0)^2. \quad (18.1.8)$$

Je-li při $t = 0 x = 0, v = 0$ dostaneme známé vztahy

$$v = a_{0x} t, \quad x = \frac{1}{2}a_{0x} t^2$$

- *Po hyb nerovnoměrný* se zrychlením obecně závislým na čase $a(t)$. Pak dostaneme zákon rychlosti a zákon pohybu integrováním

$$v = v_{0x} + \int_{t_0}^t a(t) dt \quad (18.1.9)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (18.1.10)$$

18.1.1.2 Po hyb kruhový

18.1.1.3 Po hyb harmonický

Po hyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového po hybu kolem počátku do jedné z kartézských os. Například v ose y pak máme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (18.1.11)$$

kde y ... výchylka (elongace), A ... amplituda, ω ... úhlová rychlosť [rad · s⁻¹], $T = \frac{2\pi}{\omega}$... períoda [s], $f = \frac{1}{T}$... frekvencia [Hz], $\omega t + \varphi_0$... fáze, φ_0 ... počáteční fáze při $t = 0$ neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y = \dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (18.1.12)$$

$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (18.1.13)$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlosť předbíhá výchylku o $\frac{\pi}{2}$ a zrychlení o π (je v protifázi).

18.1.2 Skládání pohybů

Ačkoliv částice může konat současně několik pohybů, lze je vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skládání pohybu.

18.1.2.1 Skládání kolmých přímočarých pohybů

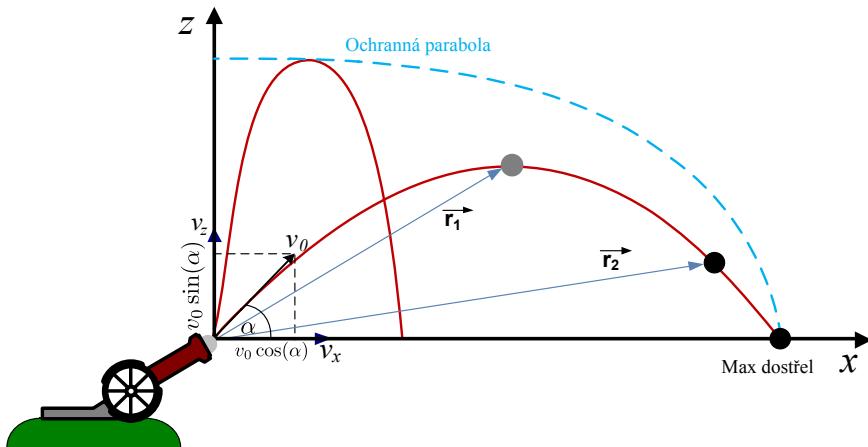
Se skládáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při *vrhu těles v homogenním tělovém poli ve vakuu*. Uvažujme rovinový pohyb v rovině x, z , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g .

Příklad 18.1.1. *Výstrel z děla (ve vakuu). Dělová koule opouští hlaveň zadanou rychlosť. Určete:*

- maximální dostřel pro zadanou ústřovou rychlosť,
- hranice oblasti, ve kterém lze zasáhnout cíl,
- stanovte velikost potřebného náměru děla pro zasazení libovolného cíle uvnitř ochranné paraboly.

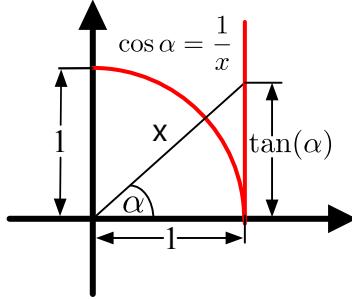
Řešení: Uvažujte rovinový pohyb v rovině xz , při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g . Ve směru osy z tedy probíhá rovnoměrně zrychlený pohyb podle rov. **18.1.8.** Vztah neme-li počáteční podmínky k okamžiku $t = 0$, máme

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_z(t) = v_{0z} - gt \quad (18.1.14)$$



Obrázek 18.1.2: K příkladu výpočtu trajektorie projektile.

Obrázek 18.1.3: Goniometrický vzorec $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$ lze snadno odvodit z náčrtu pomocí Pythagorovy věty (Přepona pravoúhlého trojúhelníka je $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$)



Ve směru osy x je pohyb rovnoměrný:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad v_x(t) = v_{0x} = \text{konst} \quad (18.1.15)$$

Dělová koule opouští hlaveň pod elevačním úhlem α za podmínek dle obr. 18.1.2 platí $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \alpha > 0, v_{0z} = v_0 \sin \alpha > 0$. Jde tedy o skládání rovnoměrného přímočarého pohybu s rychlostí $v_0 \cos \alpha$ ve směru osy x a svislého pohybu vzhůru. Získané rovnice

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad x(t) = v_{0x}t \quad (18.1.16)$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t, dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}x^2 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 \quad (18.1.17)$$

Nyní aplikujeme goniometrický vzorec

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

odvozený dle náčrtku na obrázku 18.1.3 a dostaváme rovnici

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 \quad (18.1.18)$$

Pohyb projektelu (dělové koule) probíhá po stejné trajektorii, jako šikmý vrh v homogenním tíhovém poli ve vakuu, tedy po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, délku doletu a celkovou dobu letu.

- Maximální dolet pro daný elevační úhel:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 \quad (18.1.19)$$

Netriviální kořen této kvadratické rovnice je námi hledaný dolet dělové koule

$$x_d = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (18.1.20)$$

- Celková doba letu:

$$t_d = \frac{x_d}{v_{0x}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{gv_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (18.1.21)$$

- Souřadnice vrcholu dráhy: získáme derivováním rov. 18.1.18

$$0 = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 (1 + \tan^2 \alpha)} x_v \quad (18.1.22)$$

$$x_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{2}{2} \quad (18.1.23)$$

$$x_v = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (18.1.24)$$

Souřadnici z_v dostaneme dosazením x_v do rov. 18.1.18

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \frac{v_0^4}{g^2} \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} \quad (18.1.25)$$

$$z_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (18.1.26)$$

$$z_v = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (18.1.27)$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu $\frac{\pi}{4}$ a že obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly $\frac{\pi}{4} \pm \Delta\alpha$.

- Stanovení elevačního úhlu pro zasažení zadaných souřadnic $[X_c, Z_c]$ cíle: Opět vycházíme z rov. 18.1.18, ovšem tentokrát nejsou neznáme x a z , ale α : Použijeme substituci $\tan \alpha = p$ a vypočítáme kořeny této kvadratické rovnice:

$$0 = gx^2 p^2 - 2v_0^2 xp + (gx^2 + 2zv_0^2) \quad (18.1.28)$$

$$p_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \quad (18.1.29)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2)}}{gx} \right) \quad (18.1.30)$$

Je-li cíl zadán v polárních souřadnicích $[r, \varphi]$, lze potřebný náměr stanovit takto:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gr^2 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi v_0^2)}}{gr \cos \varphi} \right) \quad (18.1.31)$$

Pokud ovšem bude diskriminant menší než 0, leží cíl mimo dosah děla. Tj. neexistuje takový náměr děla, kterým by bylo možné cíl zasáhnout. Je-li diskriminant roven nule, jedná se o hranici, za kterou již při dané ústřové rychlosti nelze dostřelit. Body ležící na této obálce tzv. ochranná parabola mohou být zasaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu.

- Stanovení rovnice ochranné paraboly: To provedeme tak, že položíme diskriminant rovnice pro $\tan \alpha$ roven nule a dostaneme rovnici obálky

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2zv_0^2) \Rightarrow z = -\frac{v_0^2}{2g^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (18.1.32)$$

```

1 % ===== Zadani =====
2 % Delova koule opousti hlaven zadanou rychlosť.
3 % Urcete maximalni dostrel pro zadanou ustovou rychlosť,
4 % hranice oblasti, ve kterem lze zasahnout cil a stanovte
5 % velikost potrebnego nameru dela pro zasezeni libovolneho cile
6 % uvnitr ochranne paraboly.
7     namer = 45;           % [°]      namer dela
8     vo      = 210;         % [m/s]    ustova rychlosť
9     go      = 9.81;        % [m/s-2]  gravitacni zrychleni
10    % Angle required to hit coordinate (x,y)
11    cil=[2000,300];
12 % ===== rESENi =====
13    vxo      = vo*cos(namer/180*pi);
14    vyo      = vo*sin(namer/180*pi);
15 % 1. Pohybove rovnice
16    t_dopad = (z*vyo)/go;
17    t1= o:t_dopad/20:t_dopad;

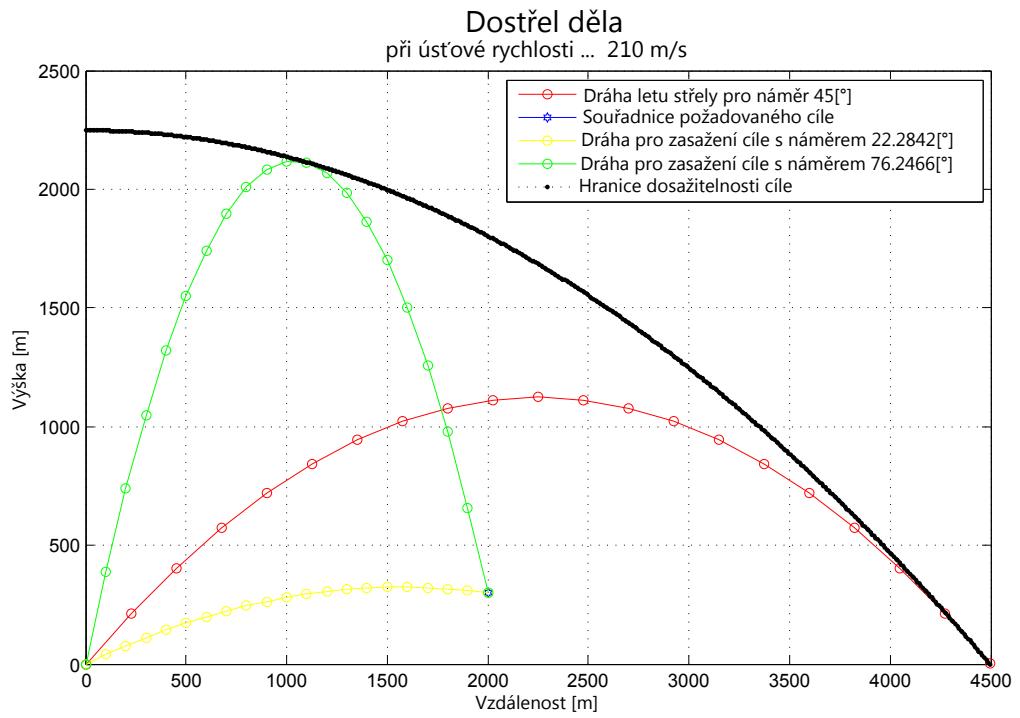
```

```

18     r1 = [vx0*t1;
19         vyo*t1 - (1/2)*go*t1.^2];
20
21 % 2. Vypocet nameru pro zasazeni zadaneho cile
22 t_trefa = cil(1)/vx0;
23 t2 = 0:t_trefa/20:t_trefa;
24 % namer alfa - dva koreny !!
25 Diskriminant = sqrt(vo^4-(go*(go*cil(1)^2+2*vo^2*cil(2)))); 
26 alfa1 = atan((vo^2-Diskriminant)/(go*cil(1)));
27 alfa2 = atan((vo^2+Diskriminant)/(go*cil(1)));
28 namer_alfa1 = alfa1*180/pi;
29 namer_alfa2 = alfa2*180/pi;
30 r2 = [vx0*t2;
31     tan(alfa1) *vx0*t2 - (go/(2*vo^2*cos(alfa1)^2)) *
32         (vx0*t2).^2;
33     tan(alfa2) *vx0*t2 - (go/(2*vo^2*cos(alfa2)^2)) *
34         (vx0*t2).^2];
35
36 % 3. vypocet hranice dosazitelnosti cile - ochranna parabola
37 vxo_max = vo*cos(45/180*pi);
38 vyo_max = vo*sin(45/180*pi);
39 t_max = (2*vyo_max)/go; % max dostrel pri nameru 45 °
40 dostrel_max = vxo_max*t_max % [m]
41 vyska_max = vo^2/(2*go) % [m]
42 t3 = 0:t_max/500:t_max;
43 r3 = [vxo_max*t3; vo^2/(2*go)-go/(2*vo^2)*(vxo_max*t3).^2];
44
45 % graficke zpracovani vysledku
46 % figure;
47 plot(r1(1,:), r1(2,:),'-ro', cil(1), cil(2),'-bh', r2(1,:),
48 r2(2,:),'-yo', r2(1,:), r2(3,:),'-go', r3(1,:),
49 r3(2,:),'k.', 'MarkerSize',6)
50 grid on;
51 title({'\fontsize{16}{Dostrel\,dela';
52     '\fontsize{12}{pri\,ustove\,rychlosti...}', num2str(vo), ' '
53     '[m/s]' });
54 xlabel('Vzdalenost[m]')
55 ylabel('Vyska[m]')
56 string1 = ['Draha\,letu\,strelu\,pro\,zadany\,namer\,',
57     num2str(namer), '\,[\,]'];
58 string2 = 'Souradnice\,pozadovaneho\,cile';
59 string3 = ['Draha\,pro\,zasazeni\,cile\,s\,namerem\,',
60     num2str(namer_alfa1), '\,[\,]'];
61 string4 = ['Draha\,pro\,zasazeni\,cile\,s\,namerem\,',
62     num2str(namer_alfa2), '\,[\,]'];
63 string5 = 'Hranice\,dosazitelnosti\,cile';
64 legend(string1, string2, string3, string4, string5)

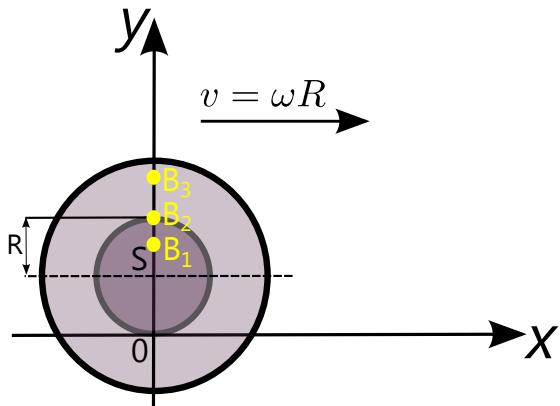
```

Výpis 18.1: kinematika_deло_ve_vakuu.m pro ověření výpočtu balistické dráhy projektílu.



Obrázek 18.1.4: Výpočet trajektorie projektile ve vakuu při ústřové rychlosti 210m/s pomocí sw MATLAB®.

Příklad 18.1.2. Kolo vagónu se valí po vodorovné kolejnici. Uvažujte bod, který je v počátečním okamžiku pod středem kola ve vzdálenosti, která může být menší, rovna nebo větší než vzdálenost středu kola od kolejnice.



Obrázek 18.1.5: Kolo vagónu a tři možné polohy bodu

Určete parametrické rovnice dráhy zvoleného bodu, složky rychlosti a její velikost, složky zrychlení a jeho velikost, tečné a normálové zrychlení a poloměr křivosti dráhy. [Slavík]

Řešení: Obvodová rychlosť v místě dotyku s kolejnicí je $v = \omega R$, což vzhledem k předpokladu o valení představuje posuvnou rychlosť kola. Parametrické rovnice pro střed kola jsou pak

$$x_s = \omega R t \quad (18.1.33)$$

$$y_s = R \quad (18.1.34)$$

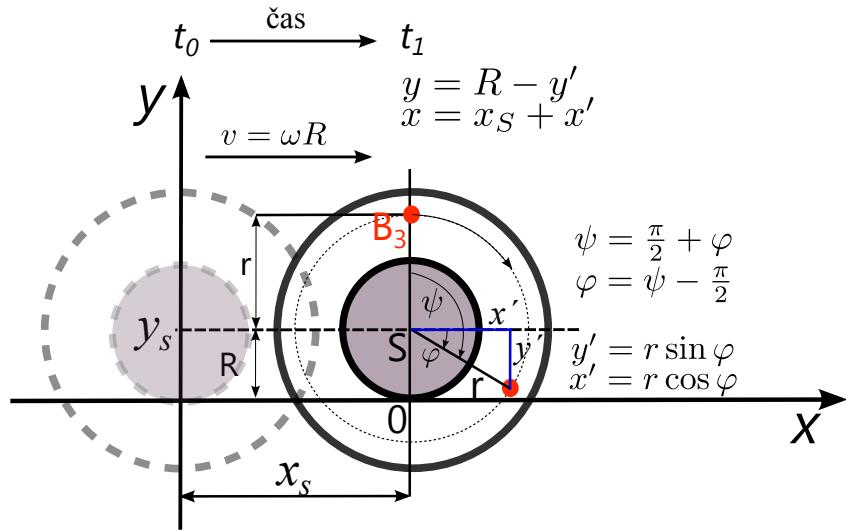
Uvažovaný bod B_3 na obr. 18.1.6 je ve své nové pozici v čase t_1 posunut vůči středu o vzdálenost $r \cdot \sin \omega t$ ve směru osy x a o vzdálenost $r \cdot \cos \omega t$ ve směru osy y . Z obrázku 18.1.6 lze odvodit následující rovnice pro souřadnice libovolného bodu B na kole vagónu.

- ve směru osy x

$$\begin{aligned} x &= x_s + x' \\ x &= x_s + r \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ x &= x_s + r \sin \psi \\ x &= \omega R t + r \sin \omega t \end{aligned}$$

- ve směru osy y

$$\begin{aligned} y &= y_s - y' \\ y &= y_s - r \sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ y &= y_s + r \cos \psi \\ y &= R + r \cos \omega t \end{aligned}$$



Obrázek 18.1.6: Náčrt pro odvození parametrických rovnic pohybu libovolně zvoleného bodu na kole vagónu

takže, parametrické rovnice dráhy mají tvar **cykloidy** viz 18.1.35. .

$$x = \omega R t + r \sin \omega t \quad (18.1.35)$$

$$y = R + r \cos \omega t \quad (18.1.36)$$

- Složky rychlosti:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \omega R + r \omega \cos \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -r \omega \sin \omega t \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2} \end{aligned} \quad (18.1.37)$$

- Složky zrychlení:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r \omega^2 \sin \omega t \quad (18.1.38)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r \omega^2 \cos \omega t \quad (18.1.39)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r \omega^2 \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r \omega^2 \quad (18.1.40)$$

Tento výsledek je superpozicí rovnoměrného kruhového a rovnoměrného přímočarého pohybu.

- Tečné zrychlení dostaneme derivací velikosti rychlosťi

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \omega \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \cdot (-1) \cdot 2Rr\omega \sin \omega t \\ a_t &= \frac{r\omega^2 \cdot |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Normálové zrychlení získáme užitím Pythagorovy věty

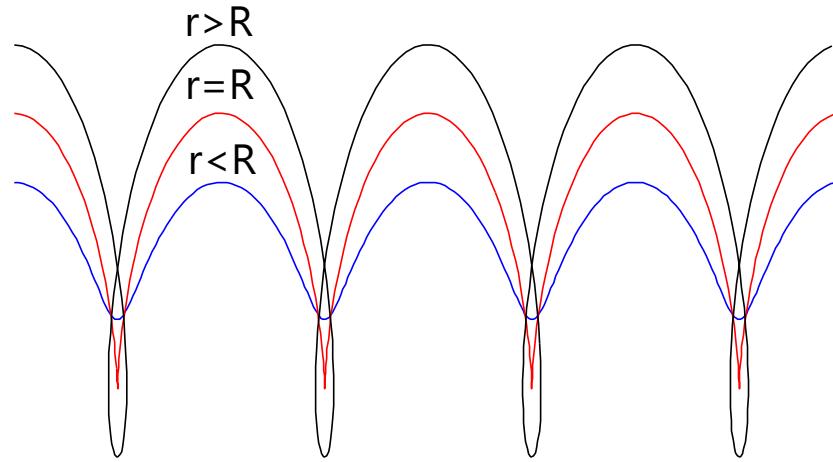
$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \\ a_n &= \sqrt{(r\omega^2)^2 - \left(\frac{Rr\omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \right)^2} \\ a_n &= \frac{r\omega^2 |R \cos \omega t - r|}{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}} \end{aligned}$$

- Poloměr křivosti R_0 dostaneme ze vztahu $a_n = \frac{v^2}{R_0}$:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\omega^2(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)}{r\omega^2|R \cos \omega t - r|} \\ R_0 &= \frac{\sqrt{R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2}}{|R \cos \omega t - r|} \\ R_0 &= \frac{(R^2 + 2Rr \cos \omega t + r^2)^{\frac{3}{2}}}{|R \cos \omega t - r|} \end{aligned}$$

Poloměr křivosti není roven vzdálenosti od středu kola r : druhou bodu není kružnice, nýbrž cykloida (viz obr. 18.1.7).

$$\begin{aligned} (x - \omega Rt)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t \\ (y - R)^2 &= r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \sin^2 \omega t + r^2 \cos \omega t \\ (x - \omega Rt)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \quad \text{kde } t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{y - R}{r} \\ \left(x - R \arccos \frac{y - R}{r} \right)^2 + (y - R)^2 &= r^2 \end{aligned}$$



Obrázek 18.1.7: Cykloida: pro $B_2 \dots r = R$ je cykloida prostá; $B_3 \dots r > R$ cykloida prodloužená; $B_1 \dots r < R$ cykloida zkrácená; [cykloida.m]

18.1.2.2 Skládání harmonických pohybů v kolmých směrech

Zmíníme se ještě o skládání **harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad y = B \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (18.1.41)$$

Výsledný pohyb vytváří zajímavé geometrické tvary známé pod názvem Lissajousovy obrazce. Jejich vzhled závisí na poměru frekvencí a na fázovém úhlu [**Okrouhlík**].

Označíme fázi kmitů ve směru x jako $\omega t + \varphi_{01} = \varphi$, rozdíl fází obou kmitů jako $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \delta$. Dále vyloučíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Máme

$$\sin \varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi + \delta) = \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta = \frac{y}{B} \quad (18.1.42)$$

odkud

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sin \delta} \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \delta \right) \quad (18.1.43)$$

Sečteme-li nyní $\sin^2 \varphi$ a $\cos^2 \varphi$, dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (18.1.44)$$

V závislosti na δ může tato rovnice odpovídat rovnici *úsečky*, nebo *elipsy*. Je-li $\delta = n\pi$, probíhají kmity po úsečce, jejíž přímka má směrnici $k = \pm \frac{B}{A}$, je-li $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$, je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (18.1.45)$$

Jsou-li amplitudy obou pohybů stejné, přejde pro $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$ elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých pohybů o stejných frekvencích se setkáváme nejen v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 18.8(a) a obr. 18.8(b) [Stoll].

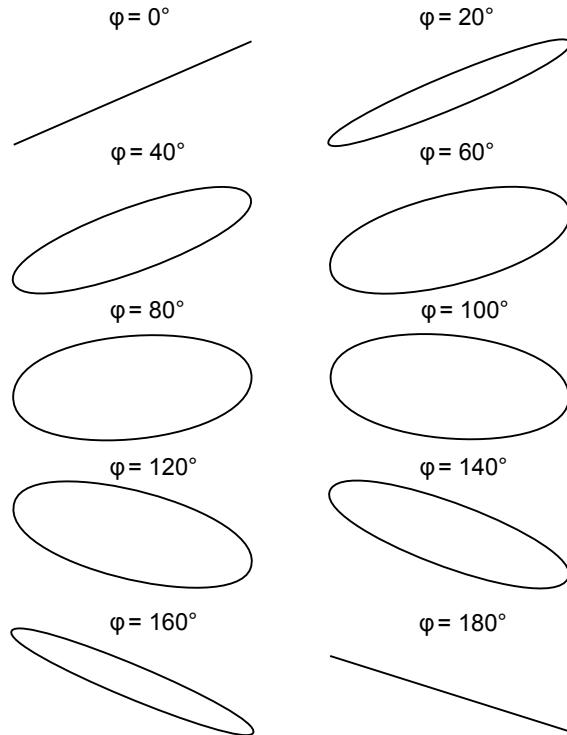
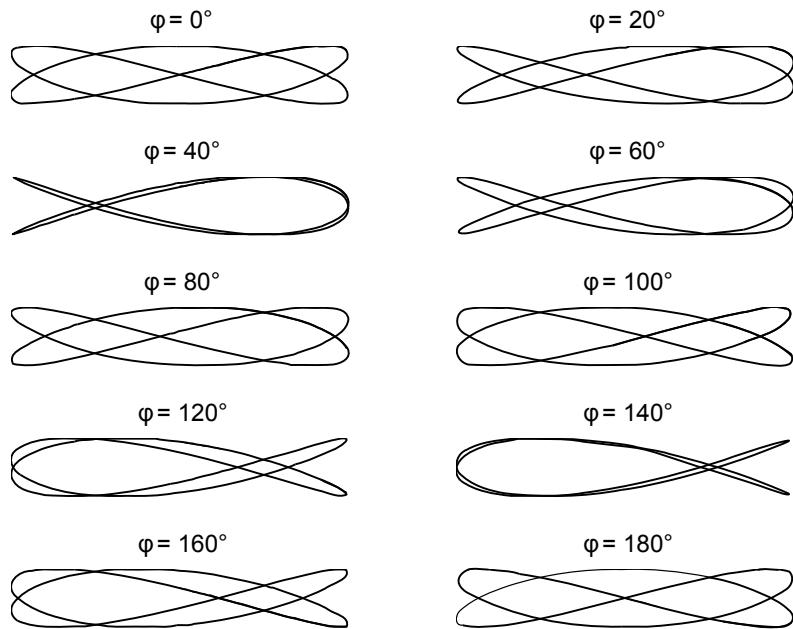
Jsou-li úhlové frekvence kolmých pohybů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce** viz 18.8(b). Program ukazuje, jak se projevuje změna fázového úhlu při daném poměru frekvencí obou pohybů.

```

1 % Lissajousovy obrazce - vliv fazoveho uhlu
2 %
3 % neni - li pomer frekvenci racionalni cislo
4 % neni krivka uzavrena
5 clear
6 t = 0:0.01:7; i = 0;
7 omega1 = 2; omega2 = 3; % frekvence
8 A = 1; B = 1; % amplitudy
9
10
11 for fi = 0:pi/9:pi
12 x = A*sin(omega1*t); % 1. pohyb
13 y = B*sin(omega2*t + fi); % 2. pohyb
14 i=i+1; fi=fi*180/pi; % prevod na stupne
15 subplot(5,2,i);
16 plot(x,y,'r');
17 axis('off');
18 title(['\phi_i = ', num2str(fi), '°']);
19 end

```

Výpis 18.2: Lissajous.m vykreslí skládání harmonických pohybů v kolmých směrech.

(a) $A = B$ a $\omega_1 = \omega_2$.(b) $A = B$ a $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$.

Obrázek 18.1.8: Trajektorie harmonických pohybů $x = A \sin(\omega_1 t)$ a $y = B \sin(\omega_2 t + \varphi)$ v kolmých směrech

Příklad 19.0.3. Dělová koule o hmotnosti $m = 24 \text{ kg}$ opustila hlaveň rychlostí $v = 500 \text{ ms}^{-1}$ v čase $\tau = 0.008 \text{ s}$ po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavni? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

Řešení:

- Délka hlavně: $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v\tau = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0.008 = 2 \text{ m}$
- Síla působící na kouli: $F = m\frac{v}{\tau} = 24 \cdot \frac{500}{0.008} = 1.5 \times 10^6 \text{ N}$
- Vykonaná práce při urychlování koule: $A = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \times 10^6 \text{ J}$

Příklad 19.0.4. Dráha střely s ohledem na odpor prostředí.

Řešení:

Část VII

Teorie elektromagnetického pole

Obsah

20.1	Působení na dálku versus teorie pole	150
20.2	Elektromagnetické pole	151
20.2.1	Základní pojmy teorie elektromagnetického pole	151
20.2.2	Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky	152
20.2.3	Maxwellovy rovnice	156
20.3	Elektrostatické pole	156
20.4	Stacionární proudové pole	157
20.4.1	Elektrický proud v kovových vodičích	157
20.4.2	Práce a výkon elektrického proudu	162
20.4.3	Ohmův zákon	163
20.5	Stacionární magnetické pole	165
20.5.1	Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí	170
20.5.2	Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru	174
20.5.3	Rovnice pro magnetický potenciál	177

20.1 Působení na dálku versus teorie pole

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci Jamese Clerka Maxwella "Pojednání o elektřině a magnetismu". Maxwell založil svojí teorii z větší části na intuitivních úvahách Michaela Faradaye. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovateli interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu "působení na dálku", který předcházel teorii pole.

Co je "působení na dálku"? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše díky své přítomnosti. Jakékoli vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlosť šíření zprostředkovovaného přenosu. To je známo jako "silové působení na dálku", protože kromě objektů působících na sebe "silou" a "vzdáleností" mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námitky proti modelu "působení na dálku", protože odporoval jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit *prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícím se v prostoru mezi objekty*.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (média) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlosťí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled "teorie pole" se tak vyhýbá pojmu "působení na dálku" a nahrazuje jej pojmem "působení nepřetržitým kontaktem". Tento "kontakt" je způsoben tlakem nebo "polem" indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetizmu byla první teorií pole. Na závěr uvedeme definici pojmu "pole", vystihující předchozí ideje:

Definice 20.1.1. *Fyzikální pole jsou vesměs zprostředkovateli vzájemného působení (interakcí) mezi hmotnými objekty. Např. elektromagnetické pole je specifická forma hmoty. Základní vlastnosti má společné s ostatními formami hmoty: je objektivní realitou existující nezávisle na našem vědomí, přísluší mu určitá energie, hmotnost a hybnost, přičemž pro tyto veličiny platí zákony zachování, má kvantovou strukturu (elementární částice elektromagnetického pole se nazývají fotony) a stejně jako ostatní elementární částice mohou projevovat též vlnový charakter. Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem elektromagnetických interakcí v makroskopickém i mikroskopickém měřítku a přitom však může existovat i mimo látkové objekty samostatně ve formě elektromagnetického vlnění.*

20.2 Elektromagnetické pole

20.2.1 Základní pojmy teorie elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole je rozloženo v prostoru a může se měnit s časem. Veličiny, které toto pole popisují jsou obecně funkci času a tří geometrických souřadnic. Podle časového průběhu rozlišujeme:

1. *pole časově neproměnné*: jsou-li náboje v klidu, budeme hovořit o poli *statickém*, jsou-li v rovnoměrném pohybu (tj. tvoří-li stejnosměrný proud), jde o pole *stacionární*.
2. *pole časově proměnné* čili *nestacionární*: jestliže se elektromagnetické pole mění s časem relativně pomalu, nazýváme jej *kvazistacionárním*. Jestliže se mění s časem periodicky, říkáme, že je v *ustáleném stavu*. Speciální případy jsou:
 - *harmonický ustálený stav*: pole se časem mění podle sinové nebo kosinové funkce
 - *neustálený (přechodný) stav*: pole přechází z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tento případ nastane tehdy, když zdroje pole změní své parametry, resp. svou polohu v prostoru.

Podle prostorového průběhu rozlišujeme:

1. *trojrozměrné*: (trojdimenzionální, prostorové pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi tří geometrických souřadnic (např. x, y, z). Označení: 3D pole.
2. *dvojrozměrné*: (dvojdimenzionální pole), veličiny charakterizující pole jsou funkciemi dvou geometrických souřadnic. Dvourozměrné pole je např. pole rovinné (je funkcí souřadnic x, y), nebo pole rotačně souměrné (je funkcí r, φ). Označení: 2D pole.
3. *jednorozměrné*: (jednodimenzionální pole), veličny charakterizující pole jsou funkciemi jedné geometrické souřadnice (např. x , nebo r). Označení: 1D.
4. *homogenní*: veličiny charakterizující pole jsou v kterémkoliv bodě uvažované oblasti prostoru tytéž. (tj. jsou nezávislé na geometrických souřadnicích).

20.2.2 Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

Elektrický náboj je *skalární veličinou*. Jednotkou je *coulomb [C]*. Má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$), avšak v technických aplikacích k tomu nepřihlázíme. Náboj Q může být rozložen:

- *prostorově* v objemu V s objemovou hustotou

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad [C \cdot m^{-3}] \quad (20.2.1)$$

- *plošně* na ploše S , s plošnou hustotou

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (20.2.2)$$

- *lineárně* na křivce l , s lineární hustotou

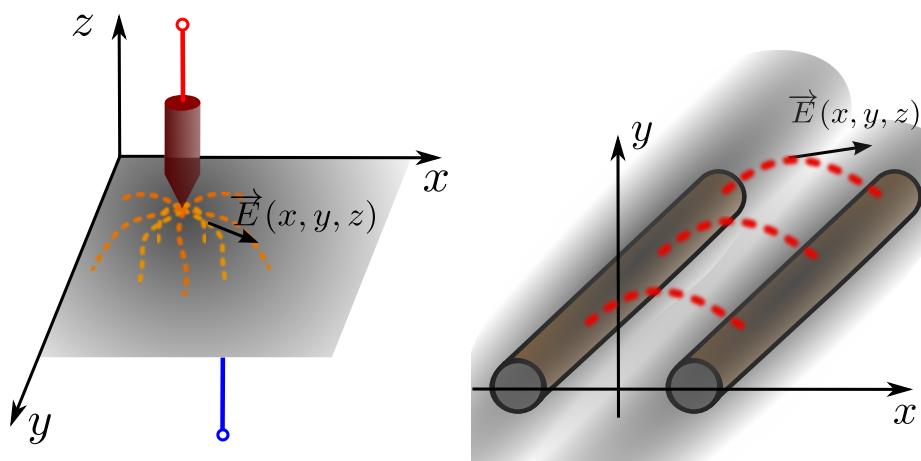
$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad [C \cdot m^{-1}] \quad (20.2.3)$$

Rozlišujeme:

- **volné náboje**: mohou se přemisťovat v makroskopických vzdálenostech,
- **vázané náboje**: mohou se přemisťovat jen v mikroskopických vzdálenostech.

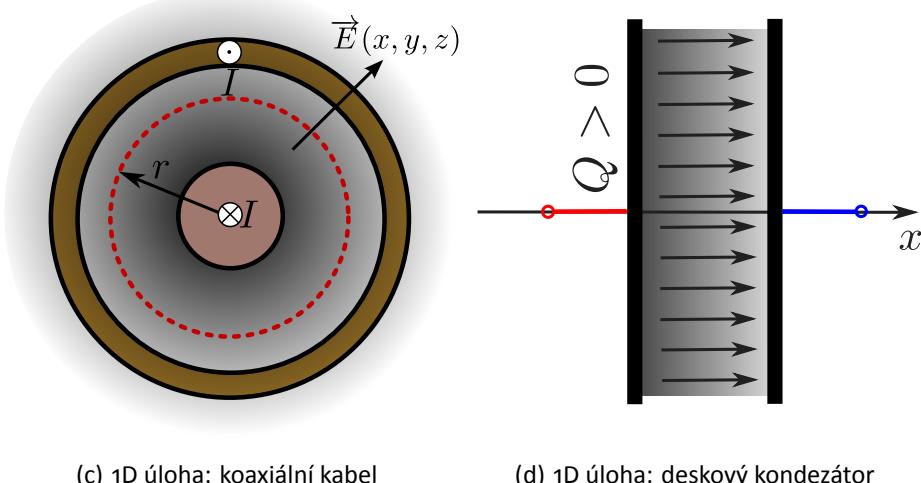
Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují); vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

Elektrický proud je znám z každodenního života, přesto je velmi důležité umět tento pojem vnímat jak pro označení „jevu“ (kap. 20.4.1), tak jako fyzikální veličinu, která tento jev kvantitativně popisuje (kap. 20.2.2). Elektrický proud je *skalární fyzikální veličina ozn.* I resp. i , jejíž jednotkou je základní jednotka soustavy SI: *ampér* – [A]. V této soustavě jednotek je ampér definován na základě silových účinků mezi dvěma vodiči, kterými prochází elektrický proud. Tato síla je magnetického původu, avšak magnetické



(a) 3D úloha: jiskřiště hrot - deska

(b) 2D úloha: dvouvodičové vedení



(c) 1D úloha: koaxiální kabel

(d) 1D úloha: deskový kondenzátor

Obrázek 20.2.1: Příklad trojdimenzionálního a), dojdimenzionálního b) a jednodimenzionálního c), d) pole

pole vzniká jako důsledek pohybu elektrického náboje. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů.

Připojíme-li vodič ke zdroji elektrického napětí, elektrické pole uvnitř působí elektrickou silou na vodivostní elektrony, vyvolává jejich pohyb a tím vytváří elektrický proud, který je po krátké době *stacionární* (ustálený, nezávislý na čase). Jestliže vodičem projde náboj ΔQ resp. dQ za časový interval Δt resp. dt , lze definovat *průměrný* resp. *okamžitý* proud ve vodiči:

- **průměrný** elektrický proud:

$$I_{AV} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [A],$$

- **okamžitý** elektrický proud (který je limitním případem proudu průměrného, studujeme-li množství náboje, které projde průřezem vodiče za infinitezimální (nekonečně krátký) časový interval):

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad [A].$$

V ustáleném stavu protéká všemi průřezy vodiče stejně velký proud,

- speciálně pohybuje-li se náboj vodičem rovnoměrně, nazýváme proud **stejnosměrný**, $I(t) = \text{konst}$, a platí

$$I_{DC} = \frac{Q}{t} \quad [A]$$

Elektrický proud jako *jev* charakterizuje jednu z forem fyzikálního pohybu, kterou je **uspořádaný pohyb elektricky nabitych častic** v látce. Přestože jakýkoliv elektrický proud je vždy tvořen pohybujícími se náboji, nemusí všechny pohybující se náboje vytvářet elektrický proud. Ve vodiči dochází ke vzniku trvalého elektrického proudu za těchto podmínek:

- vodič se musí nacházet v trvalém elektrickém poli, což je realizováno pomocí tzv. *zdroje* (generátoru) elektrického napětí,
- ve vodiči musí být přítomny volné nosiče elektrického náboje.

Podle charakteru vnějšího elektrického pole lze rozlišit tři základní druhy proudů:

- **stejnosměrný** proud vzniká tehdy, jestliže má intenzita elektrického pole konstantní orientaci,

- **střídavý** proud ve vodiči vytváří vnější elektrické pole, jehož intenzita periodicky mění svou orientaci na opačnou,
- **stacionární** stejnosměrný proud vzniká ve vodiči, je-li intenzita elektrického pole konstantní co do velikosti, směru i orientace.

Nabité částice představující volný náboj ve vodičích jsou v neustálém chaotickém tepelném pohybu (viz molekulová fyzika a termodynamika). Jedná se o *mikroskopický pohyb*, který nemá za následek makroskopicky pozorovatelné přemístění náboje. Pokud ve vodiči vytvoříme elektrické pole, tepelný pohyb nabitých částic neustane, ale k náhodné složce rychlosti přibude ještě složka rychlosti ve směru vloženého pole.

Při studiu elektrického proudu v kovových vodičích se zabýváme ustálenými proudy vodivostních elektronů, které v kovu vytváří tzv. *elektronový plyn*. Tyto vodivostní elektrony jsou téměř volné a pohybují se v poli kladných iontů uspořádaných v krystalové mřížce.

Experimentálně lze elektromagnetické pole prokázat silovým působením na elektricky nabité částice. Celkovou sílu \vec{F} lze rozložit na elektrickou sílu \vec{F}_e , nezávislou na tom, zda je nabité částice v klidu nebo v pohybu vůči vztažné soustavě a na magnetickou sílu \vec{F}_m , působící jen na pohybující se částice. Elektromagnetické pole má tedy dvě složky: **elektrické pole**, působící na náboj silou \vec{F}_e a **magnetické pole**, působící na pohybující se náboj silou \vec{F}_m [Mayer2001].

Intenzita elektrického pole \vec{E} je vektorovou veličinou charakterizující *elektrické pole*. Je definována jako síla působící na nepohybující se jednotkový bodový náboj:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (20.2.4)$$

kde \vec{F}_e je elektrická síla působící na náboj Q .

Magnetická indukce \vec{B} je vektorovou veličinou charakterizující *magnetické pole*. Je definovována vztahem

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad [T] \quad (20.2.5)$$

kde \vec{F}_m je magnetická síla působící na náboj Q pohybující se rychlostí \vec{v} . Jednotkou je *tesla* [T].

Síla, jež působí elektromagnetické pole na pohybující se náboj se nazývá **Lorentzova síla**

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [N] \quad (20.2.6)$$

20.2.3 Maxwellovy rovnice

Makroskopická teorie elektromagnetického pole v klasickém pojetí vychází ze základních zákonů vyjádřených *Maxwellovými rovnicemi* (MR). Lze je zapsat buď v **integrálním**, nebo **diferenciálním tvaru**. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté prostorové oblasti Ω , kdežto v diferenciálním tvaru ve vnitřním bodě této oblasti. Soustavu vlastních MR představují první čtyři páry rovnic; často se k nim připojuje jako další základní rovnice elektromagnetického pole rovnice kontinuity pro vodivý proud. Její integrální a diferenciální tvar reprezentují poslední dvě rovnice.

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot } \vec{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (20.2.7)$$

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20.2.8)$$

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho_v \quad (20.2.9)$$

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (20.2.10)$$

$$\int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{div } \vec{J} = -\frac{d\rho_v}{dt} \quad (20.2.11)$$

Předpokládá se, že všechny křivky a plochy v integrálním tvaru MR jsou po částech hladké a všechny integrované veličiny jsou po částech spojité funkce. Pak je zaručena existence integrálů v těchto rovnicích. V diferenciálním tvaru MR se předpokládají pouze **regulérní body** oblastí, což jsou body, v nichž jsou veličiny \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} a \mathbf{H} spojité a spojite diferencovatelné funkce; nejsou jimi tedy např. body rozhraní dvou různých prostředí, v elektrickém poli body v nichž jsou umístěny diskrétní náboje, v magnetickém poli body proudových vláken atd.

20.3 Elektrostatické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou elektrické náboje. Náboje se nepohybují (tj. nedochází k elektrickému proudu) a tedy nevzniká magnetické pole. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
3. MR	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	$\operatorname{rot} \vec{D} = \rho$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$		

Tabulka 20.3.1: Základní rovnice elektrostatického pole

20.4 Stacionární proudové pole

V elektrostatice (tj. elektrickém poli nepohybujících se nábojů) neexistuje trvalý elektrický proud. Zdroje napětí (galvanické články, termočlánky, dynamy aj.) mají tu vlastnost, že na jejich záporné svorce je trvale nadbytek elektronů, a na jejich kladné svorce jejich nedostatek. Těmito zdroji můžeme ve vodiči trvale udržovat elektrické pole a tedy i tok nosičů elektřiny. Jestliže se *náboje pohybují konstantní rychlostí, hovoříme o stacionárním elektrickém proudu*. Základní rovnice elektrostatické pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
2. MR	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
Zákon kontinuity	$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{J} = 0$
Ohmův zákon	$I = GU = \frac{U}{R}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$

Tabulka 20.4.1: Základní rovnice stacionárního proudového pole

20.4.1 Elektrický proud v kovových vodičích

V předchozí kapitole 20.2.2 bylo o elektrickém proudu pojednáváno jako o skalární fyzikální veličině. V této kapitole nás bude zajímat makroskopický pohled na „jev“ známý jako **elektrický proud**.

Zopakujme, že elektrickým proudem je míňen uspořádaný pohyb elektrických nábojů, a aby se tyto náboje mohly pohybovat, musí být volné - jsou přítomny v látkách, které nazýváme **vodiče**. Vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (elektrony v kovech, uhlíku a v polovodičích) anebo obojíh znamének (kladné a záporné ionty v elektrolytech, ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Volné nositele náboje

(elektrony, ionty) lze rovněž oddělit od těchto látek (vodičů) a vytvořit elektrický proud ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Z vodičů mají největší význam **kovy**, které jsou polykrystalickými látkami s kovovou vazbou. Každý mikroskopický monokrystal kovu má pevnou krystalovou mříž sestavenou z kladných iontů, mezi nimiž se přetržitě pohybují *volné elektrony* rychlostmi, jejichž velikost je statisticky proměnná (co do velikosti i směru). Střední hodnota rychlosti (jako vektoru) všech elektronů je nulová. Střední hodnota rychlosti určitého elektronu je závislá na teplotě vodiče. Elektrony konají tzv. *termický pohyb*. Rychlosti neuspořádaných termických pohybů dosahují jen o několik řádů větších hodnot, než kmity iontů v krystalech mřížky.

Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. ke galvanickému článku), začne statisticky převládat uspořádaný pohyb nosičů kladného (záporného) náboje ve směru (proti směru) vnějšího pole nad termickým pohybem, což v makroskopickém měřítku pozorujeme jako **makroskopický elektrický proud**. Jsou-li ve vodiči přítomny nosiče náboje obou polarit, dojde k pohybu ve vzájemně opačných směrech, přičemž směr toku nosičů kladného náboje se historicky ztotožňuje se směrem toku elektrického proudu. U kovových vodičů je tedy směr proudu právě opačný, než směr toku elektronů, jenž tento elektrický proud tvoří.

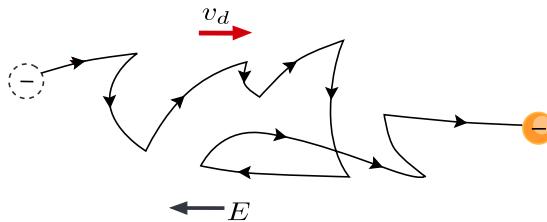
Velikost (intenzitu) proudu posuzujeme podle velikosti náboje obojí polarity, který projde určitým průřezem vodiče ve vzájemně opačných směrech za jednotku času. Projde-li průřezem vodiče celkově náboj dQ za čas dt , bude tok náboje vodičem charakterizovat skalární veličina

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A], \quad (20.4.1)$$

která se nazývá *elektrický proud* ($1C \cdot s^{-1} = 1A$ čteno *ampér*). Tato jednotka patří mezi základní jednotky SI soustavy.

Pro stacionární (tj. časově neproměnný - ustálený) proud můžeme obecný výraz 20.4.1 nahradit rovnicí

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (20.4.2)$$



Obrázek 20.4.1: Pohyb elektronu ve vodiči. Fyzikálně je v_d průměrná rychlosť nosičů náboje uvnitř vodiče, který je vložen do vnějšího elektrického pole. Ve skutečnosti se ale elektron ve vodiči nepohybuje po přímce, jeho pohyb je chaotický.

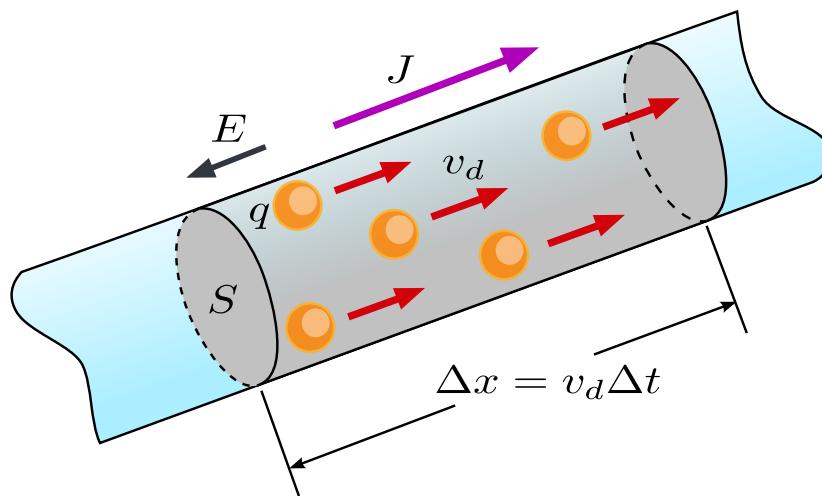
Jedná-li se o rovnoměrný pohyb bodového náboje Q po kružnici s periodou T , resp. s úhlovou rychlostí ω , můžeme vzniklý ustálený proud vyjádřit rovnicí

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}. \quad (20.4.3)$$

Bude-li se element náboje dQ pohybovat v lineárním útvaru rychlostí $v = \frac{dQ}{dt}$, bude po dosazení do rov. 20.4.1 reprezentovat elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl} v = \tau v, \quad (20.4.4)$$

kde τ je délková hustota náboje a v je velikost okamžité rychlosti náboje v uvažovaném místě lineárního útvaru.



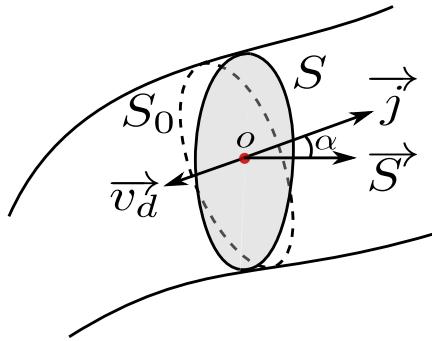
Obrázek 20.4.2: Směr elektrického proudu byl implicitně stanoven jako směr pohybu kladných nábojů. Nositeli elektrického náboje uvnitř vodičů jsou ovšem záporně nabité volné elektrony, které se tedy dle konvence pohybují proti směru elektrického proudu. Elektrický proud může protékat pevnými látkami (kovy, polovodiči), kapalinami (elektrolyty) a ionizovanými plyny. Látky, které nevedou elektrický proud, nazýváme nevodiči, izolanty

Elektrický proud je veličina, která obecně popisuje prostorový jev. Omezíme se nyní na běžný případ vodiče, jako je na obr. 20.4.2, který má volné náboje jen jedné polarity (u kovových vodičů jde o elektrony) a označme ρ_0 prostorovou hustotu volného náboje a v_d velikost usměrněné rychlosti jejich nositelů (elektronů). Pak za čas dt projde průřezem o obsahu S_0 ($S_0 \perp v_d$) náboj $dQ = \rho_0 S_0 v_d dt$. Elektrický proud vyjádřený rov. 20.4.1 můžeme přepsat do tvaru

$$I = \rho_0 S_0 v_d = -en_0 S_0 v_d, \quad (20.4.5)$$

kde $n_0 = \frac{\rho_0}{-e}$ je počet nositelů volného náboje (tj. v našem případě elektronů, z nichž každý nese náboj $-e$ v jednotkovém objemu vodiče, přičemž pro elektrony zřejmě je $\rho_0 < 0$).

Rovinnou plochou S průřezu můžeme zavést jako vektor $v_r S$, který má směr daný normálou k ploše a pravidlem pravé ruky (ukazují-li prsty pravé ruky směr oběhu po hraniční křivce plochy, ukáže palec směr plochy jako vektoru \mathbf{S}). Protože driftová rychlosť v_d je také vektor, nebudeme obecně uvažovat vektory \mathbf{S}, \mathbf{v}_d o stejném směru a rovnici 20.4.5 přepíšeme do obecnějšího tvaru



$$I = \rho_0 \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{v}_d = j S \cos \alpha = j S_0, \quad (20.4.6)$$

Obrázek 20.4.3: Rovinná plocha $S = S_0 \cos \alpha$

kde $S_0 = S$ pro $\alpha = 0$ (viz obr. 20.4.3) a

$$\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{v}_d, \quad (20.4.7)$$

je proudová hustota. Je to vektor o velikosti

$$j = \frac{I}{S \cos \alpha} = \frac{I}{S_0} \quad A \cdot m^{-2}, \quad (20.4.8)$$

obecněji

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (20.4.9)$$

a o směru vektoru driftové rychlosti nositelů kladného náboje. Pro případ nositelů volného náboje - elektronů má proudová hustota opačný směr než driftová rychlosť v_d (obr. 20.4.3).

Velikost vektoru \mathbf{j} má význam plošné hustoty elektrického proudu v uvažovaném místě průřezu. Jednotkou je $A \cdot m^{-2}$.

Nebude-li proudová hustota na uvažovaném průřezu konstantní, bude celkový elektrický proud procházející průřezem o obsahu S dán integrálem

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (20.4.10)$$

Příklad 20.4.1. Driftová rychlosť elektronov vodiči: Vodičem z jednomocné mědi o průřezu $S_0 = 1 \text{ mm}^2$ prochází elektrický proud $I = 5 \text{ A}$. Vypočítejte:

- počet volných elektronov v jednotkovém objemu Cu,
- úhrnný náboj volných elektronov v jednotkovém objemu,
- driftovou rychlosť volných elektronov při proudu I .

Měd má poměrnou atomovou hmotnost $A_r = 63,54$ a hustotu¹ $s = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení:

- Jeden mol mědi o molové hmotnosti $M = 0,06354 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ a o molovém objemu

$$V_m = \frac{M}{s} = \frac{63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{8,93 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} = 7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

obsahuje $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23}$ jednoatomových molekul Cu na jeden mol, z nichž každý má volný jeden (valenční) elektron. Tedy počet volných elektronov v jednotkovém objemu je

$$n_0 = \frac{N_A}{V_m} = \frac{s N_A}{M} = \frac{6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{7,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

- Úhrnný náboj volných elektronov v jednotkovém objemu mědi je

$$Q_v = -e \cdot n_0 = -1,36 \cdot 10^{10} \text{ Cm}^{-3}.$$

- Velikost driftové rychlosti určíme ze vztahu $I = -en_0v_dS_0 = -Q_vv_dS_0$ tj.

$$v_d = \left| \frac{I}{Q_v S_0} \right| = \frac{5}{1,36 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{C} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{Cm}^{-3} \cdot \text{m}^2} = 3676 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,3676 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Z provedených výpočtů si můžeme udělat názor o mikroskopických poměrech v kovových vodičích: počet volných nositelů náboje - elektronů a jejich úhrnný náboj v jednotkovém objemu je značný a proto driftová rychlosť elektronů potřebná k vyvolání proudu běžné velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá (doslova hlemýždí).

¹Pro hustotu budeme používat alternativní značku s , s ohledem na kolizi značky ρ , jež označuje hustotu náboje.

Příklad 20.4.2. Elektricky neutrální měděná mince o hmotnosti $m = 3,11 \text{ g}$ obsahuje stejné množství kladného a záporného náboje. Jaké je velikost kladného (nebo záporného) náboje obsaženého v minci?

Řešení:

Neutrální atom má záporný náboj $Z \cdot e$, představovaný jeho elektrony a kladný náboj o stejně velikosti představovaný protony v jádře. Pro měd je atomové číslo Z rovno 29, tj. atom mědi má 29 protonů, a je-li elektricky neutrální, také 29 elektronů.

Náboj o velikosti Q_v , který hledáme je roven NZ_e , kde N je počet atomů obsažených v jednom molu (Avogadrova konstanta: $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Počet molů mědi v minci $\frac{m}{M}$, kde $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotností mědi:

$$N = N_A \cdot \frac{m}{M} = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \frac{3,11 \text{ g}}{63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2,95 \cdot 10^{22}.$$

Velikost celkového kladného (záporného) náboje v minci je pak

$$Q_v = NZ_e = 2,95 \cdot 10^{22} \cdot 29 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 137039 \text{ C}$$

To je obrovský náboj. Pro srovnání: třeme-li ebonitovou tyč vlněnou látkou, můžeme na tyč přemístit steží náboj o velikosti 10^{-9} C .

20.4.2 Práce a výkon elektrického proudu

Příklad 20.4.3. Za jakou dobu uvede ponorný vodič o příkonu 600 W do varu 1 l vody o počáteční teplotě 20°C. Uvažujte měrnou teplenu kapacitu vody $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Výměnu tepla s okolím neuvažujte.

Řešení:

Pro var vody bude zapotřebí tepla dle rovnice $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$. Potřebná elektrická práce je $Q_e = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$ a tedy dobu ohřevu stanovíme z rovnice:

$$\begin{aligned} P \cdot t &= m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{m \cdot c}{P} \cdot (T_2 - T_1) \\ t &= \frac{1 \cdot 4200}{600} \cdot (100 - 20) \\ t &= 560 \text{ s} \end{aligned}$$

20.4.3 Ohmův zákon

Uvažujme vodič u něhož jsou volnými nositeli náboje *elektrony*. Nyní v mezích klasické mechaniky kvantitativně popíšeme mechanismus vedení proudu, který povede k všeobecně známému **Ohmovu zákonu**

Umístíme-li vodič do elektrického pole o intenzitě \vec{E} (např. připojením ke galvanickému článku), působí na každý volný elektron síla $\vec{F} = -e\vec{E}$, která mu podle *Newtonova zákona* udělí zrychlení $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}$ proti směru vnějšího pole. Tím získávají chaoticky se pohybující elektrony ještě složku rychlosti v protisměru vloženého elektrického pole \vec{E} a dojde tedy k usměrnění driftového pohybu volných elektronů a v souladu s kapitolou 20.4.1 pozorujeme, že ve vodiči vznikl makroskopický elektrický proud.

Pohyb elektronu se ovšem neobejde bez sřážek s ionty v krystalové mřížce. Dráhu, kterou se elektronu podaří urazit, nazýváme *volnou dráhou* d . Průměrná doba mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami nechť je τ za tuto dobu se bude elektron rovnoměrně urychlovat a těsně před následující srážkou jeho rychlosť dosáhne maxima tj. $\vec{v}_{max} = \vec{a} \cdot \tau$. Nás ovšem zajímá průměrná rychlosť (*driftová rychlosť*) na volné dráze průměrné velikosti:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{v}_{max}}{2} = -\frac{e\tau}{2m_e}\vec{E} \quad (20.4.11)$$

Proudová hustota 20.4.7 bude

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{v}_d = -en_0 \vec{v}_d = -\frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \vec{E} \quad (20.4.12)$$

Koefficient úměrnosti

$$\gamma = \frac{e^2 n_0 \tau}{2m_e} \quad (20.4.13)$$

je závislý na počtu nositelů (elektronů) n_0 v jednotkovém objemu a na době τ , neboli na délce volné dráhy. Veličina γ se nazývá *měrná elektrická vodivost* neboli **konduktivita** látky. Protože dobu τ nelze přímo měřit, určuje se γ experimentálně. Přitom se zjišťuje, že pro určitou teplotu zkoumané látky je γ konstantí.

Po zevedení pojmu *měrná elektrická vodivost látky* 20.4.13, můžeme výraz 20.4.12 přepsat do výsledného tvaru

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (20.4.14)$$

který se v literatuře označuje jako *Ohmův zákon v diferenciálním tvaru* (i když se v pravém slova smyslu o diferenciální tvar nejedná). Výstižnější je označení *lokální tvar Ohmova zákona*, protože výraz 20.4.14 se vztahuje na určité místo, resp. bod, vodivého prostředí.

Vztah říká, že proudová hustota v určitém bodě vodivého prostředí je přímo úměrná intenzitě vloženého elektrického pole v tomto bodě (platí pro určitou teplotu prostředí).

Uvažujme nyní lineární homogenní vodič délky l a příčného průřezu o obsahu S_0 , připojený ke zdroji o napětí U . Pak intenzita pole uvnitř vodiče bude mít konstantní velikost $E = \frac{U}{l}$. Dosadíme-li za velikost proudové hustoty $j = \frac{I}{S_0}$ do [20.4.14](#), dostaneme vztah

$$\frac{I}{S_0} = \gamma \frac{U}{l}, \quad (20.4.15)$$

z něhož vyplývá známý vztah

$$U = \frac{l}{\gamma S_0} I = RI, \quad (20.4.16)$$

kde

$$R = \frac{l}{\gamma S_0} = \rho \frac{l}{S_0}, \quad (20.4.17)$$

je **elektrický odpór** uvažovaného lineárního vodiče, přičemž $\rho = \frac{1}{\gamma}$ je *měrný elektrický odpor (rezistivita)*². Výraz [20.4.17](#) představuje klasický Ohmův zákon zákon experimentálně objevený r. 1826 *G. S. Ohmem*. Jednotky:

- elektrický odpor: VA^{-1} ,
- měrný elektrický odpor: $\Omega \text{ m}$,
- měrná elektrická vodivost: $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

²Zde je další kolize značky ρ . Nyní se tomuto problému vyhneme využíváním pouze konduktivity, jenž se častěji používá v teorii elektromagnetického pole.

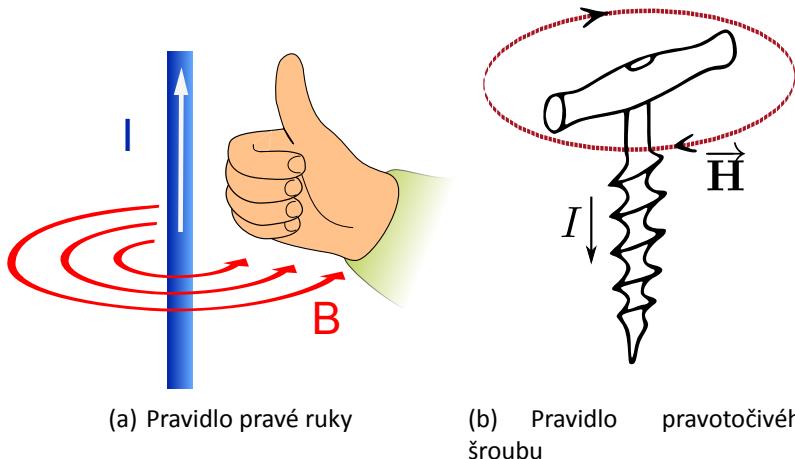
20.5 Stacionární magnetické pole

Zdrojem stacionárního magnetického pole jsou stejnosměrné proudy nebo permanentní magnety. Základní rovnice stacionárního magnetického pole jsou:

	integrální tvar	diferenciální tvar
1. MR	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\text{rot } \vec{H} = \mathbf{J}$
4. MR	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$		

Tabulka 20.5.1: Základní rovnice magnetického stacionárního pole

Směr vektoru \mathbf{H} se prakticky určí například *pravidlem pravotočivého šroubu*: vodič nahradíme šroubem (s pravotočivým závitem) a otáčíme jím tak, aby se pohyboval ve směru proudu; směr otáčení pak udává směr vektoru \mathbf{H} . Vše je názorně vysvětleno na obrázku 20.1(b). Podobných pomůcek existuje více, např. *pravidlo pravé ruky*: vodič uchopíme do dlaně pravé ruky tak, aby palec ukazoval směr proudu; prsty pak ukazují směr vektoru \mathbf{H} , obr. 20.1(a).

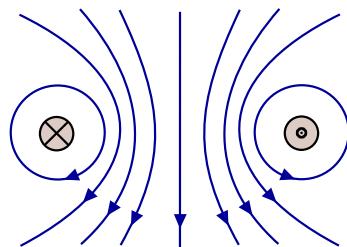


Obrázek 20.5.1: Určení směru vektoru \mathbf{H} : a) pravidlem pravé ruky; b) pravidlem pravotočivého šroubu

K procvičení téhoto pravidel je na obr. 20.5.2 vyznačen směr indukčních čar kruhového závitu. Označení \otimes vyjadřuje proud vstupující do nákresny (symbol letícího šípu od pozorovatele) a označením \odot proud vystupující z nákresny (symbol hrotu šípu).

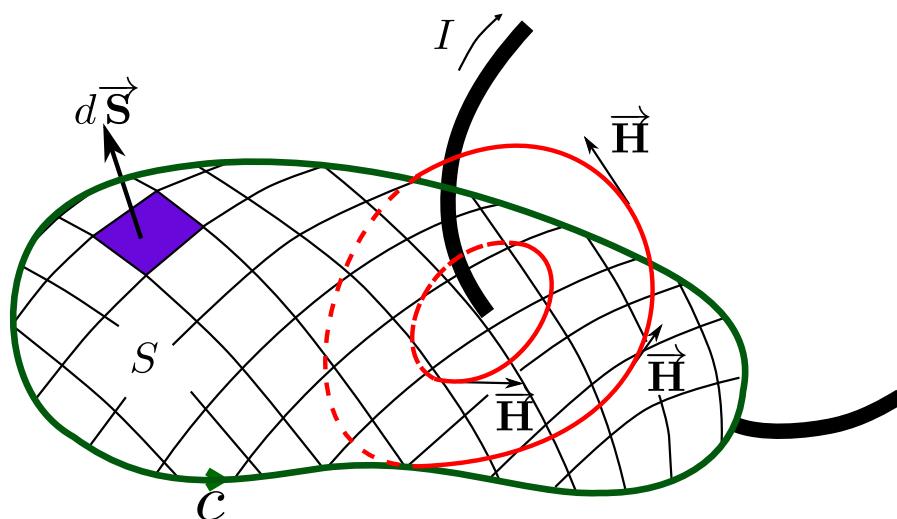
Rovnice 20.5.1 představuje **zákon celkového proudu**

vyjadřující, rovnost oběhového magnetické napětí na libovolné uzavřené orientované křivce c proudu, který je s křivkou c spřažen. "Spřaženým proudem" rozumíme proud, který prochází libovolnou plochou S , jež je ohrazena křivkou c , přičemž plocha S je orientována vůči křivce c pravotočivě (obr. 20.5.3). [Mayer2001].

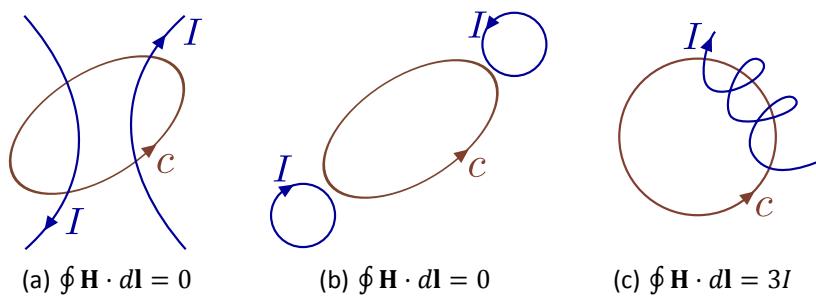


Obrázek 20.5.2: Indukční čáry kruhového závitu.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (20.5.1)$$



Obrázek 20.5.3: K zákonu celkového proudu



Obrázek 20.5.4: K pojmu "proud spřažený s křivkou" pro tři různé případy křivky c .

Základní úlohou řešení stacionárních proudových magnetických polí je určení rozložení veličin \mathbf{H} a \mathbf{B} v prostoru, je-li dán prostorové a materiálové uspořádání a elektrické proudy vybuzují řešené magnetické pole.

V následujících úlohách se omezíme na analýzu jednodušších, souměrných magnetických polí v lineárním izotropním alespoň po částech homogenním prostředí. Pro zjednodušení budeme zanedbávat deformaci magnetického pole v okrajových oblastech a nebudeme uvažovat vliv blízkosti nesymetrického rozhraní a vliv blízkosti druhého zdroje magnetického pole. (Pro přesnější řešení by pak bylo nutné použít tzv. *metodu zrcadlení*.) Některá složitější pole lze rozdělit na několik jednodušších polí souměrného charakteru, resp. typického uspořádání. Vzhledem k tomu, že v předpokládaném lineárním prostředí ($\mu = \text{konst}$) platí pro stacionární magnetické pole *princip superpozice*, lze samostatně vyřešit nejprve dílčí jednodušší pole jednotlivých prudů I_j a po jejich superpozici

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j(I_j), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j(I_j) \quad (20.5.2)$$

získáme výsledné pole celkového proudu [**Kotlan1999**].

Metodou přímé aplikace I. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru pro stacionární magnetické pole proudové

$$\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_c H \cos \alpha dl = I_c \quad (20.5.3)$$

lze jednoduše použít tehdy, je-li ze zadанé úlohy zřejmá taková symetrie pole, že lze z nekonečně mnoha uzavřených křivek, splňující rov. 20.5.3, nalézt takovou integrační dráhu c , která obepíná proud I_c vytvářející magnetické pole a v jejichž bodech platí podmínka

$$H = \text{konst}, \quad \alpha = \text{konst}, \quad (20.5.4)$$

speciálně

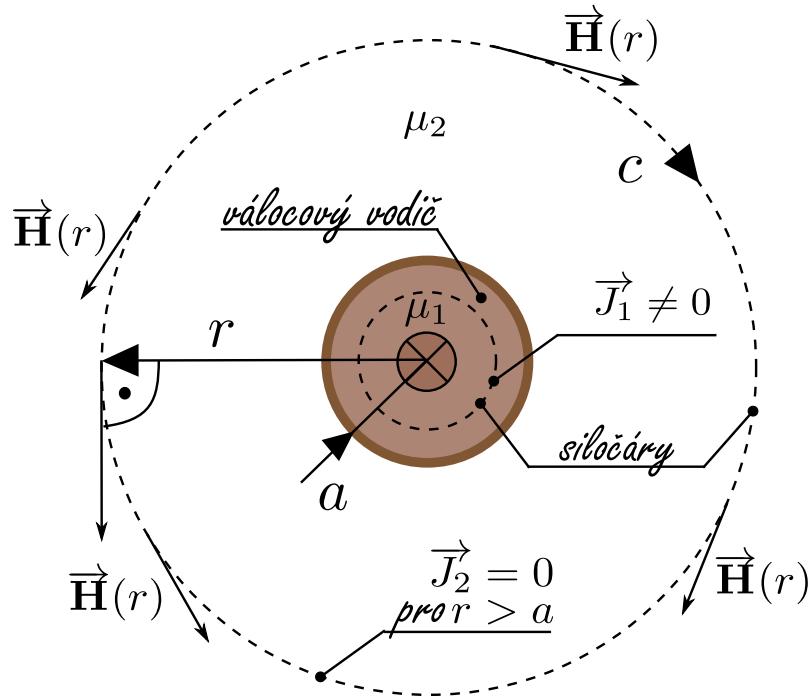
$$H = \text{konst}, \quad \alpha = 0. \quad (20.5.5)$$

Podmínka $\alpha = 0$, tj. $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{l}$ je identicky splněna na siločáře magnetického pole. Siločáry souměrných stacionárních magnetických polí splňují tedy podmínu 20.5.5 a řešení rovnice 20.5.3 při integraci po takovéto siločáře je jednoduché

$$\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \underbrace{\oint_c dl}_{l_c} = I_c \rightarrow H = \frac{I_c}{l_c} \quad (20.5.6)$$

kde l_c je délka integrační dráhy c splňující podmínku 20.5.5.

Klasickým případem takovéto úlohy je magnetické pole *dlouhého přímého válcového vodiče* o poloměru a , délky l protékaného proudem I rozloženým po průřezu souměrně kolem osy vodiče, tzn, obecně s hustotou $J = J(r)$. Z osové (rotační) symetrie vyplývá, že siločáry magnetického pole mají tvar soustředných kružnic se středem v ose vodiče, ležících v rovině kolmé na osu vodiče obr. 20.5.5. Úlohy proto řešíme ve válcových



Obrázek 20.5.5: Pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

souřadnicích s osou z totožnou s osou vodiče. Za předpokladu, že průměr vodiče je zanedbatelný vůči jeho délce lze zanedbat deformaci pole vlivem konců válcového vodiče a přejít na rovinný problém v polárních souřadnicích. Z důvodu osové souměrnosti je však pole závislé jen na vzdálenosti r od osy vodiče tj.

$$H = H(r), \quad B = B(r).$$

Na kruhových siločárách je tedy splněna podmínka 20.5.5 a z I. Maxwellovy rovnice 20.5.3

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cos 0 \oint_C dl = I(r), \quad (20.5.7)$$

kde c je kružnice o poloměru r a proud $I(r)$ je dán rovnicí

$$I(r) = \int_{S(r)} \mathbf{J}(r) d\mathbf{S} = \int_0^r J(r) 2\pi r dr \quad (20.5.8)$$

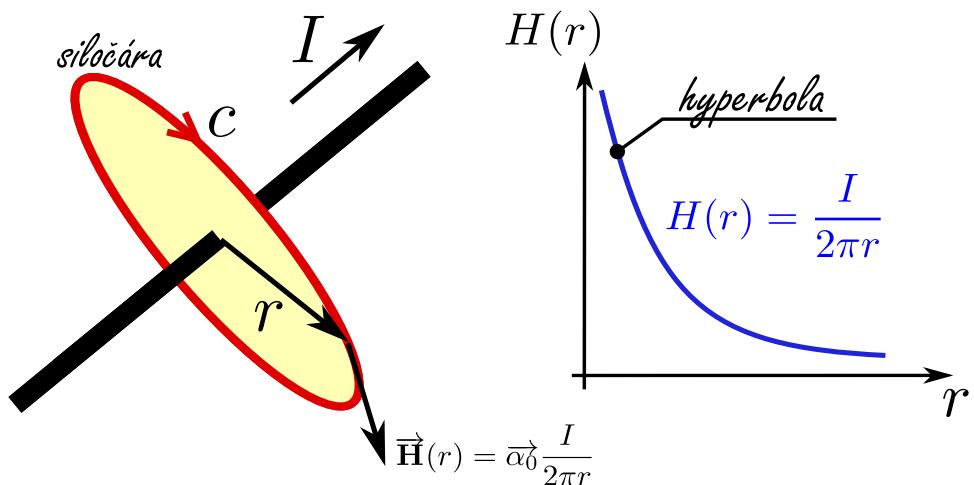
je proud protékající přes kruhovou plochu $S(r)$ ohraničenou kružnicí o poloměru r . Pak intenzita magnetického pole ve vzdálenosti r od osy vodiče má velikost

$$H = H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r}, \quad (20.5.9)$$

a magnetická indukce

$$B = B(r) = \frac{\mu I(r)}{2\pi r}, \quad (20.5.10)$$

přičemž μ je *permeabilita* v bodech na poloměru r . Magnetické pole v okolí kruhového přímého vodiče protékaného proudem I viz obr. 20.5.6 je tedy v souladu s předchozími úvahami dáno výrazy [Kotlan1999]:



Obrázek 20.5.6: Průběh intenzity magnetického pole dlouhého dutého vodiče protékaného konstantním proudem

$$H = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}. \quad (20.5.11)$$

Jelikož 1. MR má nenulovou pravou stranu v magnetickém poli obecně není splněna nutná a postačující podmínka, aby magnetické napětí

$$\int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{m_{MN}} \quad [A] \quad (20.5.12)$$

nezáviselo na tvaru integrační cesty l z M do N . Tedy obecně nelze zavést *skalární magnetický potenciál*. Magnetické pole je tedy obecně **vírové (nepotenciální)**.

Všimněme si však speciálních případů, kdy pravá strana 1. MR je nulová a tedy magnetické pole bude **nevírové (magnetostatické)**. K tomu dochází buď v oblasti kde

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (20.5.13)$$

tj. takové v němž neexistuje uzavřená křivka c spřažená s nějakým proudem, nebo v takovém bodu, v němž platí

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = 0 \quad (20.5.14)$$

tj. v bodu v němž je $\mathbf{J} = 0$.

Analogicky jako v elektrostatice, lze pak zavést magnetický potenciál φ_m vztahem

$$\mathbf{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m. \quad (20.5.15)$$

Jednotkou φ_m je *ampér* [A]. Pro magnetické napětí mezi body M, N platí analogicky

$$U_{MN} = \int_{M(l)}^N \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varphi_m(M) - \varphi_m(N), \quad (20.5.16)$$

nezávisle na integrační cestě l .

20.5.1 Magnetické pole vodičů s proudem v homogenním izotropním prostředí

Z předchozí kapitoly vyplývá, že intenzitu magnetického pole \mathbf{H} lze stanovit pomocí vztahu $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ tehdy, víme-li předem, že daným bodem prochází silová čára, na níž je intenzita pole konstantní, $H_s = \text{konst}$. V tomto případě se kříkový integrál změní v pouhý součin intenzity pole a délky silové čáry

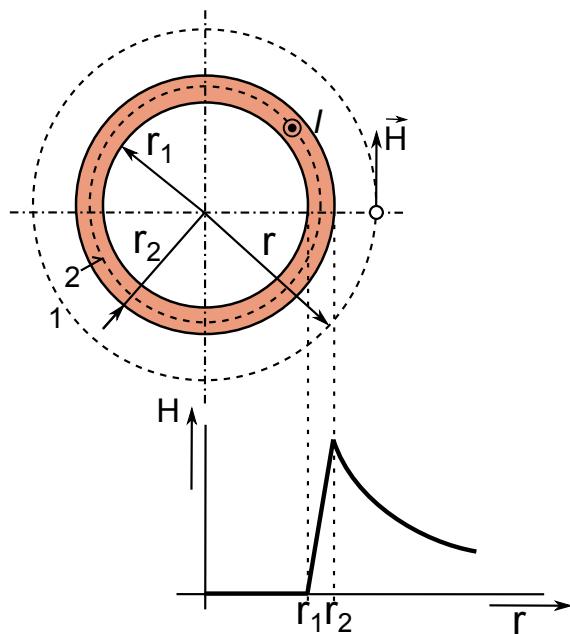
$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_s \oint_C \mathbf{l} = H_s \cdot l_s \quad (20.5.17)$$

takže lze vypočítat intenzitu pole

$$H_s = \frac{I}{l_s}$$

pro body silové čary.

Tohoto postupu lze použít i tam, kde uvedená podmínka není splněna, avšak pole lze vyjádřit superpozicí dílčích polí, z nich každé tuto podmínu splňuje, viz příklad 20.5.2.



Obrázek 20.5.7: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého dutého válcového vodiče protékaného proudem

Příklad 20.5.1. Stanovte intenzitu magnetického pole $H = f(r)$ dlouhého dutého válcového vodiče podle obr. 20.5.7 při rovnoměrném rozložení proudu I po průřezu.

Vodič s rovnoměrně rozloženým proudem podle obr. 20.5.7 je rotačně souměrný podle své osy a tedy i jeho magnetické pole je souměrné. Silové čáry jsou soustředné kružnice, vektor \mathbf{H} , jenž má směr tečny ke kružnici, je po celé délce kružnice stejně velký. Lze tedy snadno použít integrálního tvaru 1. MR (zákon celkového proudu)

Pro body ležící vně vodiče obepíná kruhová integrační dráha (vedená po silové čáře 1) celý proud vodiče I a platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I \quad (20.5.18)$$

takže intenzita pole je

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (20.5.19)$$

Ve stěně dutého magnetického vodiče jsou silové čáry rovněž kružnice, neboť magnetické pole je i zde souměrné. Tyto siločáry však obepínají jen část proudu I' vodiče pro obě siločáry 2 platí

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I' = \pi(r^2 - r_1^2)J \quad (20.5.20)$$

kde J je hustota proudu ve vodiči

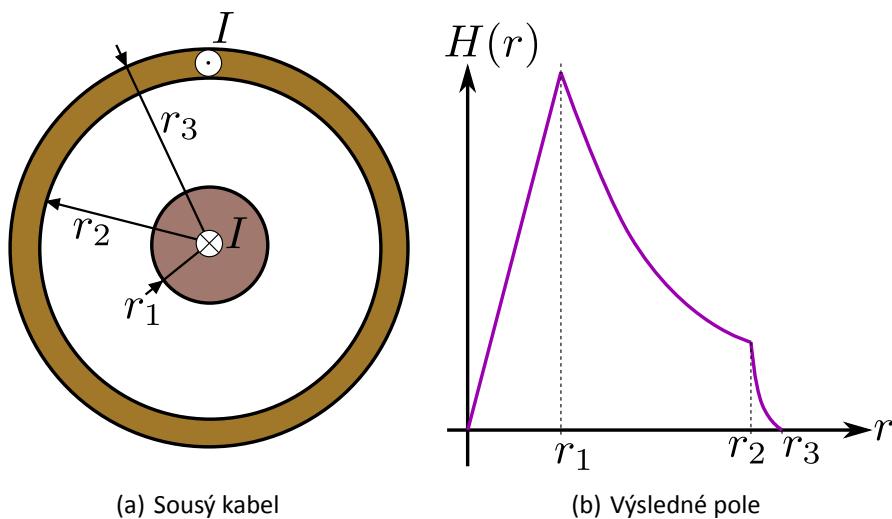
$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \quad (20.5.21)$$

Ve stěně vodiče je tedy intenzita pole

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (20.5.22)$$

V dutině vodiče je intenzita rovna nule. Vzhledem k souměrnosti pole by i zde muselo platit $\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r$. Protože dráha s poloměrem $r < r_1$ neobepíná žádný proud, je $\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ a tedy musí být $H = 0$.

Příklad 20.5.2. Stanovete intenzitu magnetického pole dlouhého přímého sousého kabelu podle obr. 20.8(a). Středním vodičem (žilou) prochází proud I a týž proud opačného smyslu prochází vnějším vodičem (pláštěm). Proud jsou rovnoměrně rozloženy po průřezech vodičů. Nakreslete graf průběhu $H = f(r)$ [Dufek1970], [Kotlan1999].



Obrázek 20.5.8: K příkladu stanovení intenzity magnetického pole dlouhého souosého kabelu protékáho proudem: a) náčrt; b) $H = f(r)$

Řešení: Rovnici 20.5.17 aplikujeme na jednotlivé intervaly osově souměrného starionárního magnetického pole, přičemž se prakticky jedná o superpozici dvou polí. V oblasti $r < r_2$ se uplatňuje pouze pole vnitřního válcového vodiče (žily), pro $r > r_2$ přistupuje sousosé pole vnějšího trubkového vodiče.

- Pro oblast $r < r_1$ je vzhedem k

$$\begin{aligned}
 dI &= \mathbf{J}d\mathbf{S} \\
 I(r) &= \int_S dI = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{S} = \int_S J \cos \beta dS \\
 &= \left| \begin{array}{ll} \beta = 0 & H = \text{konst} \\ S = \pi r^2 & dS = 2\pi r dr \end{array} \right| = J \int_0^r 2\pi r dr = J\pi r^2
 \end{aligned}$$

hledané řešení 1. MR dáno

$$\oint_C \mathbf{H}d\mathbf{l} = H_1 2\pi r = I(r) = J\pi r^2$$

kde celková proudová hustota je

$$J = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

a tedy

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r$$

- Pro oblast $r_2 > r > r_1$ řešíme v podstatě pole vně osamoceného válcového vodiče $I(r)$ a tedy

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

- Pro $r > r_3$ je magnetické pole vytvářeno celým proudem žíly I a příslušnou částí proudu pláště $J\pi(r^2 - r_2^2)$, kde proudová hustota

$$J = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

má opačnou orientaci oproti proudové hustotě žíly.

Pak

$$\begin{aligned}
 I(r) &= I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\
 \oint_C \mathbf{H}d\mathbf{l} &= H_3 2\pi r = I(r) \\
 H_3 &= \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)
 \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme superpozicí opačně orientovaných polí

$$H_3 = H'_3 - H''_3 = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

Pruběh $H(r)$ je na obr. 20.8(b).

20.5.2 Magnetické pole elektrického proudu v diferenciálním tvaru

Nechť je opět magnetické pole vyvoláno konstantním el. proudem $I = \text{konst.}$ Jak vyplývá z předchozí kapitoly, základním vztahem pro toto pole je *Ampérův zákon*

$$\oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = I$$

Zvolme za integrační dráhu c obvod malé plošky ΔS , jíž prochází proud $\Delta I = J_n \Delta S$, kde J_n je průměr vektoru hustoty proudu do směru normály plošky ΔS (předpokládáme, že ploška ΔS je dostatečně malá, aby se dalo počítat s konstantní hustotou proudu v celém jejím rozsahu) [Trnka1972]. Pro zvolený případ platí

$$\oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \Delta S \rightarrow \frac{1}{\Delta S} \oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (20.5.23)$$

Pro $\Delta S \rightarrow 0$ zavedeme označení

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{\Delta S} \oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} = J_n \quad (20.5.24)$$

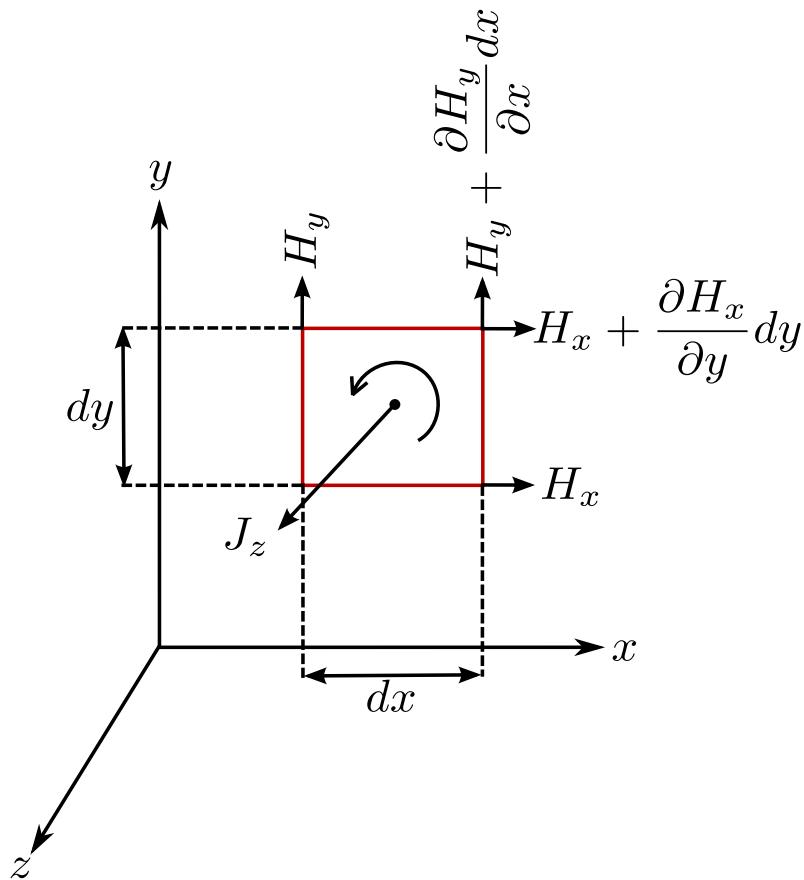
Rovnice 20.5.24 říká, že *rotace vektoru \mathbf{H}* , ($\text{rot} \vec{H}$), jehož průměr do určitého směru je roven průměru vektoru hustoty proudu do tohoto směru. Z uvedených vztahů je patrný fyzikální význam rotace vektoru \mathbf{H} . Je to vektor, jehož velikost je rovna oběhovému magnetickému napětí po dráze v rovině kolmé k vektoru hustoty proudu, vztaveném k ploše obepínané oběhovou drahou (v nehomogenní poli to platí pro případ, že se plocha dráhy blíží k nule).

Při použití pravoúhlé soustavy kartézských souřadnic x , y a z jsou průměty vektoru $\text{rot} \vec{H}$ do jednotlivých os

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = J_x, \quad \text{rot}_y \mathbf{H} = J_y, \quad \text{rot}_z \mathbf{H} = J_z \quad (20.5.25)$$

Průmět $\text{rot}_x \mathbf{H}$ je dán oběhovým magnetickým napětím po obvodu plošky $dydz$ a platí

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{1}{dydz} \oint_c \mathbf{H}_c d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{dydz} \left[H_y dy + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right) dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{dydz} \left[\left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \right) dy - H_z dz \right] \\ &= \frac{1}{dydz} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz \right] = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z\end{aligned}\quad (20.5.26)$$



Obrázek 20.5.9: K odvození pojmu $\text{rot}_z \mathbf{H}$

tedy dostáváme

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \quad (20.5.27)$$

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \\ \text{rot}_x \mathbf{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z\end{aligned}$$

Pro pravoúhlé souřadnice x, y, z můžeme tedy vztah $\text{rot} \vec{H} = \mathbf{J}$ rozepsat na tvar

$$\begin{aligned}\text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} \text{rot}_x \mathbf{H} + \mathbf{j} \text{rot}_y \mathbf{H} + \mathbf{k} \text{rot}_z \mathbf{H} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{i} J_x + \mathbf{j} J_y + \mathbf{k} J_z = \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (20.5.28)$$

Rotaci vektoru $\text{rot} \vec{H}$ můžeme též symbolicky vyjádřit vektorovým součinem Hamiltonova operátoru a vektoru \mathbf{H}

$$\text{rot} \vec{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z) \quad (20.5.29)$$

nebo také determinantu

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (20.5.30)$$

Pro případ použití cylindrických souřadnic r, φ, z lze odvodit podobně

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi \\ \text{rot}_z \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = J_z\end{aligned}\quad (20.5.31)$$

a pro případ použití sférických souřadnic r, φ, ϑ

$$\begin{aligned}\text{rot}_r \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = J_r \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right] = J_\varphi \\ \text{rot}_\vartheta \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi \sin \vartheta) \right] = J_\vartheta\end{aligned}\quad (20.5.32)$$

Podobně jako v elektrickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q$ vztahem $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, tak i v magnetickém poli vyjadřujeme vztah $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ vztahem $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, nebo též v kartézských souřadnicích x, y a z jako

$$\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

20.5.3 Rovnice pro magnetický potenciál

V regulárních bodech lineárního homogenního izotropního magnetika platí pro φ_m

Laplaceova rovnice

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (20.5.33)$$

Důkaz plyne z rovnice $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ a rovnice $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu \vec{H} = \operatorname{div} \mu (-\operatorname{grad} \varphi_m).$$

Pro $\mu = \text{konst}$ dostáváme $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m = 0$, což je rovnice 20.5.33.

Na rozhraní mezi dvěma magneticky různými prostředími neplatí Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru a tedy ani Laplaceova rovnice 20.5.33. Podmínky pro \mathbf{H} a \mathbf{B} na rozhraní vyjádříme pomocí skalárního magnetického potenciálu

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (20.5.34)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (20.5.35)$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ jsou derivace ve směru normály k rozhraní.

20.5.3.1 Vektorový magnetický potenciál

V elektrostatice jsme pro usnadnění mnohých problémů zavedli skalární elektrický potenciál - lze jej zavést vždy, neboť elektrostatické pole je vždy potenciální. Magnetické pole je však obecně vírové. Lze jej popsat skalárním potenciálem jen ve speciálních případech, tj. jestliže je polem potenciálním. Obecně je však zavedení skalárního potenciálu nepřípustné. Lze i pak zavést nějakou veličinu (analogickou skálárnímu potenciálu), s níž by se pracovalo snáze, než přímo s vektory pole?

Dříve než definujeme vektorový magnetický potenciál, zopakujme zavedení skalárního potenciálu v elektrostatice. Vyjdeme z 2. MR a z rovnice známé z vektorové analýzy:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_m = 0.$$

V magnetickém poli vyjdeme ze 4. MR a z jiné identity pro vektorovou funkci \mathbf{A} , známe z vektorové analýzy:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{divrot} \vec{A} = 0$$

odtud

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (20.5.36)$$

Část VIII

Signály a soustavy

Obsah

21.1 Základní typy posloupností	182
21.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu	183
21.3 Základní operace s posloupnosti	184

Číslicové signály (matematicky posloupnosti čísel) [Sovka] jsou v literatuře označovány symboly $x_n, x(n)$, nebo $x[nT]$, kde n je celé číslo a označuje pořadí prvku v posloupnosti¹. Poslední uvedený symbol $x[nT]$ zdůrazňuje souvislost číslicového signálu se signálem spojitým v čase(analogovým signálem), ze kterého vznikl vzorkováním a kvantováním. Symbol T označuje použitý *vzorkovací krok*. Jeho převrácená hodnota je rovna *vzorkovací frekvenci* $f_s = \frac{1}{T}$.

21.1 Základní typy posloupností

- **Jednotkový impuls**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (21.1.1)$$

- **Jednotkový skok**

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (21.1.2)$$

- **Reálná exponenciální posloupnost**

$$x[n] = A\alpha^n, n \geq 0, \quad (21.1.3)$$

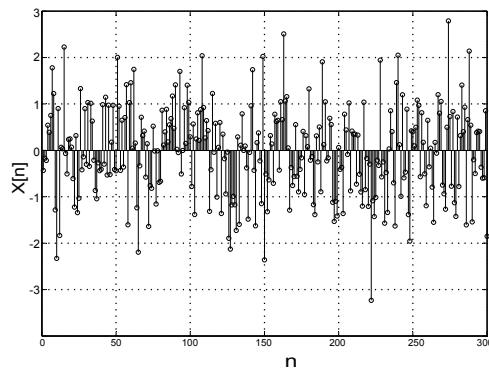
- **Chirp signál**

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi f_{max}n^2}{(N-1)f_s}\right), \quad (21.1.4)$$

kde f_{max} je maximální požadovaný kmitočet, který musí být menší než polovina vzorkovacího kmitočtu $f_{max} < \frac{f_s}{2}$ a N je celkový počet vzorků.

- **Pseudonáhodná posloupnost** je posloupnost, která nahrazuje ideální bílý šum. Tuto posloupnost lze generovat různými algoritmy, které zaručují velmi dlouhou periodicitu generované posloupnosti. Má-li tato posloupnost approximovat bílý šum, musí co nejlépe splňovat požadavek nekorelovanosti sousedních vzorků (tedy konstantní spektrální výkonové hustoty) a nulové střední hodnoty. Často je požadován i jednotkový rozptyl.

¹Takto zavedené označení je nejednoznačné, neboť nerozlišuje mezi celou posloupností a jejím jediným prvkem. Posloupnost by měla být správně označena např. symbolem $\{x[n]\}$, zatímco symbol $x[n]$ by měl být vyhrazen pro její jeden prvek. Nicméně uvedené značení je všeobecně používáno.



Obrázek 21.1.1: Příklad pseudonáhodné posloupnosti generované pomocí funkce `randn(1, 300)` v MATLABu

21.2 Generování jednoduchých signálů a jejich zobrazení v MATLABu

Příklad 21.2.1. Generujte signál s lineárně rostoucím kmitočtem "chirp signál", maximální kmitočet $f_{max} = 20\text{Hz}$, amplituda $A = 1$, vzorkovaný kmitočtem $f_s = 64\text{Hz}$.

```

1 % CHIRP SIGNAL
2 % =====
3 clear all; close all;
4 % generovani universalniho vektoru
5 N = 256; % pocet prvku
6 fs = 256; % vzorkovaci kmitocet v Hz
7 fmax = 20; % maximalni kmitocet v Hz
8 Amax = 1; % amplituda signalu
9 A2 = 0.5; % amplituda signalu
10 % casovy vektor s N prvky
11 t = linspace(0, (N-1)*(1/fs), N);
12 % generovani signalu s lineарне rostoucim kmitoctem
13 kosinus = chirp(t,0,1,20);
14 %vykresleni
15 figure(1)
16 stem(1:N, kosinus(1:N), 'k'); % diskretni forma
17 plot(1:N, kosinus(1:N), 'k'); % spojita forma
18 xlabel('n')
19 ylabel('X[n]')
20 title(['Chirp signal: fmax=' num2str(fmax), ' Hz, fs='
21 num2str(fs), ' Hz'])
grid on;
```

Výpis 21.1: gen_chirp_signal.m. Generuje chirp signál

21.3 Základní operace s posloupností

V dalším textu budeme používat tři základní lineární operace [**Sovka**] zobrazené na [21.3.1](#):

- součin signálu $x[n]$ a reálné konstanty b :

$$w[n] = bx[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tato operace je v praxi realizována násobičkou a je zdrojem numerických chyb, tedy kvantizačního šumu, který produkuje číslicová zařízení.

- součet signálu $x[n]$ a signálu $y[n]$:

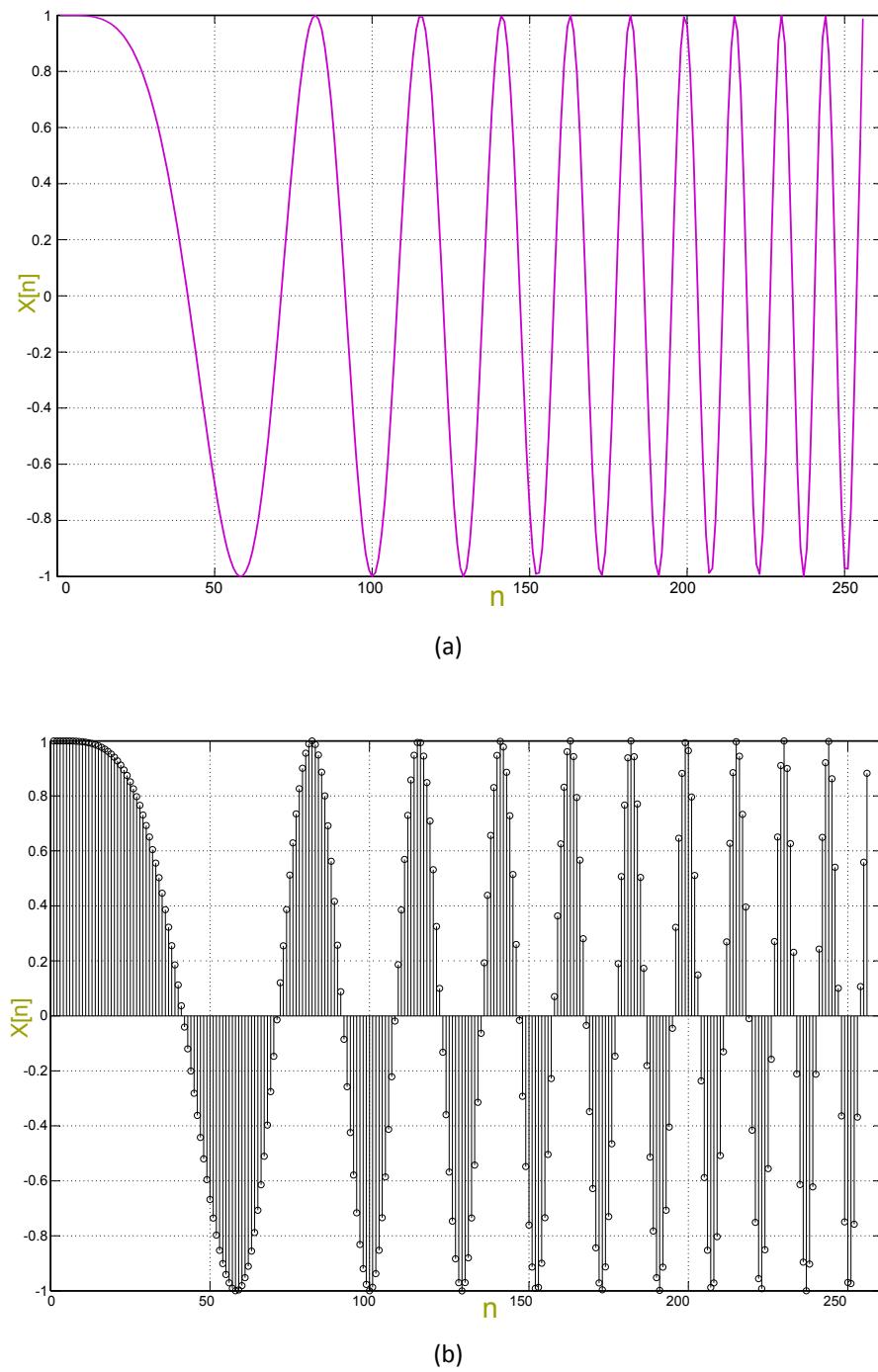
$$v[n] = x[n] + y[n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto operaci provádí sčítáčka. Při neošetření může tato operace generovat hrubé chyby.

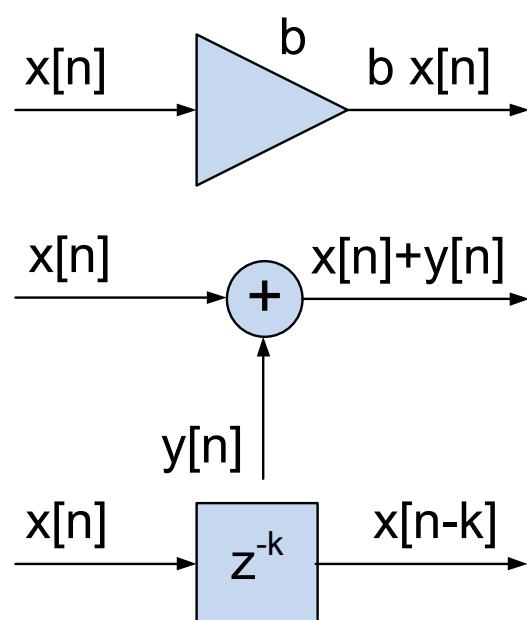
- zpoždění signálu $x[n]$ o k vzorkovacích kroků:

$$y[n] = x[n - k], n = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, M$$

Hodnoty $x[-k], k = 1, 2, \dots, M$ se nazývají *počáteční podmínky*. V digitálních implementacích provádíme operaci zpoždění paměťového registru pro každou jednotku požadovaného zpoždění z^{-1} .



Obrázek 21.2.1: Chirp signál: Signál s lineárně rostoucím kmitočtem s maximální frekvencí 20 Hz vzorkovaný 254 Hz. Grafická reprezentace číslicových signálů bývá buď ve spojité formě (a) nebo v diskrétní formě (b)



Obrázek 21.3.1: Symboly základních operací

Obsah

22.1 Linearita, časová invariance a kauzalita	188
22.1.1 Konvoluce v diskrétních a spojitých systémech	189
22.2 Popis spojitých a diskrétních systémů, přenosová funkce	193
22.2.1 Spojité systémy	193

Na soustavu obvodů můžeme nahlížet jako na seskupení (množinu) navzájem souvisejících součástí, ke kterému je určen vstupní signál x , zvaný buzení a výstupní signál y , označovaný jako odezva. Z hlediska vlastností jde o systém představující "černou skříňku", jejíž vlastnosti můžeme identifikovat analýzou vstupního a výstupního signálu [Bicak].



Obrázek 22.0.1: Symbol soustavy s jedním vstupem a jedním výstupem

- Systémy se spojitým časem (na vstupu i výstupu pracují se spojitými signály) - relace mezi vstupem a výstupem můžeme symbolicky zapsat:

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\} \quad (22.0.1)$$

kde S je obecný popis systémové funkce, přiřazující vstupní veličině $x(t)$ odezvu $y(t)$. Z rovnice je zřejmé, že u spojité (analogové) soustavy výstupní signál závisí na všech hodnotách vstupního signálu, nikoli jen na některých jeho hodnotách v určitých časových okamžicích.

- Systémy pracující s diskrétním časem lze obdobně symbolicky vyjádřit relací vstup/výstup ve tvaru:

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} \quad (22.0.2)$$

kde \mathcal{S} je tentokrát systémový operátor přiřazení posloupnosti $x[n] \rightarrow y[n]$. U diskrétních systémů se zpracovávají posloupnosti hodnot signálů, získaných vzorkováním spojitého signálu

22.1 Linearita, časová invariance a kauzalita

Linearita systémů ve spojité diskrétní oblasti má velký význam, neboť dovoluje využívat princip superpozice k zjednodušování úloh jejich analýzy a syntézy.

Předpokládejme, že na vstupu lineárního diskrétního systému jsou přivedeny dva signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$. Účinky obou vstupních signálů na výstupní signál lze zkoumat odděleně a podle principu superpozice je na výstupu sečist. Označme dílčí odezvy $y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$ a $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$, potom je

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} \quad (22.1.1)$$

Analogický vztah platí i pro lineární spojitý systém, tedy

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = S\{x_1(t) + x_2(t)\} \quad (22.1.2)$$

Jedná-li se o systém časově invariantní, jsou události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí), nikoliv na každém časovém okamžiku samostatně. Systém je časově invariantní, jestliže časový posun ve vstupní signálu vede ke stejnemu posunu výstupního signálu. Odezva diskrétního systému na posunutý vstupní signál $x[n - m]$ je pak určen vztahem

$$y[n - m] = S\{x[n - m]\} \quad (22.1.3)$$

a obdobně pro odezvu spojité soustavy na posunutý (zpožděný) vstupní signál $x(t - \tau)$ platí analogicky rovnice

$$y(t - \tau) = S\{x(t - \tau)\}. \quad (22.1.4)$$

Kauzální, příčinný systém je systém, u kterého výstupní signál závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu.

22.1.1 Konvoluce v diskrétních a spojitých systémech

[Bicak] Významnou charakteristikou lineárních časově invariantních systémů LTI je **impulzní odezva**. Její znalost umožňuje stanovit odezvu systému na obecný signál, lze ji využít i při syntéze systému.

$$h[n] = S\{\delta[n]\}. \quad (22.1.5)$$

Mějme diskrétní LTI systém, na jehož vstup je přiveden jednotkový diskrétní impulz¹. Jednotkový impulz je posloupnost $\delta[n] = 0$ pro všechna n s výjimkou $\delta[0] = 1$. Odezva systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ se nazývá impulzní odezva a platí

$$h[n - m] = S\{\delta[n - m]\}. \quad (22.1.6)$$

Vzhledem časové invariantnosti, posunutému jednotkovému impulzu odpovídá posunutá impulzní odezva, tedy

$$1[n] = \sum_{m=0}^n [n - m] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots. \quad (22.1.7)$$

Jednotkový skok $1[n]$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat součtem

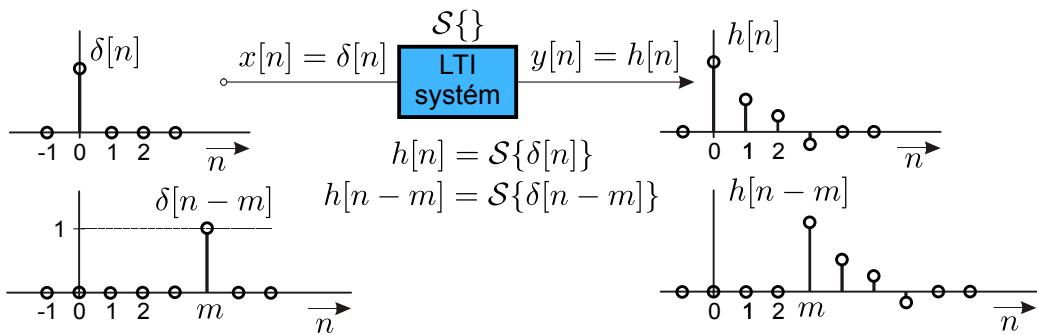
$$s[n] = S\{1[n]\} = S\left\{\sum_{m=0}^n [n - m]\right\} = \sum_{m=0}^n S\{\delta[n - m]\}. \quad (22.1.8)$$

¹Nesmíme zaměňovat s Diracovým (také jednotkovým) impulzem.

Odezva systému na jednotkový skok $1[n]$ se nazývá **přechodová odezva** $s[n]$ a platí

$$s[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} = \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (22.1.9)$$

Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$, resp. na posunutý impulz $\delta[n-m]$, bude $h[n]$ resp. $h[n-m]$ - viz obr. 22.1.1.



Obrázek 22.1.1: Odezva kauzálního diskrétního systému na jednotkový impulz $\delta[n]$ a posunutý impulz $\delta[n-m]$

Postupná úprava rovnice (22.1.9) je umožněna díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m]. \quad (22.1.10)$$

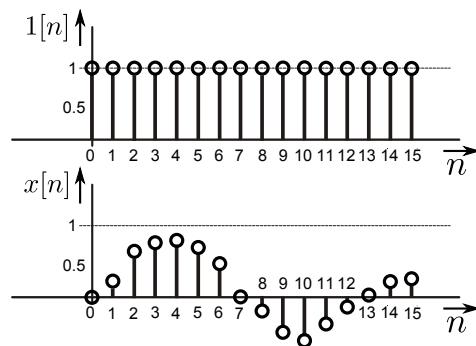
Poznamenejme, že formou (22.1.10) lze zapsat každý diskrétní signál.

Na obr. 22.1.2 znázorněna souvislost mezi posloupností jedniček a diskrétním signálem. *Posloupnost jedniček tvoří bázi pro diskrétní signály*. Každá komponenta diskrétního signálu je vyjádřena součinem $x[m] \delta[n-m]$. V uvedeném příkladě jde o posloupnost příslušnou jednotkovému skoku

$$1[n] = \sum_{m=0}^{15} \delta[n-m] \quad (22.1.11)$$

a odpovídající posloupnost konečného signálu

$$x[n] = \sum_{m=0}^{15} x[m] \delta[n-m]. \quad (22.1.12)$$



Obrázek 22.1.2: Posloupnost jednotkového skoku $1[n]$ a signálu $x[n]$

Princip superpozice dovoluje získat odezvu systému jako sumu odezv na jednotlivé dílčí součásti vstupního signálu, které v rovnici (22.1.10) tvoří vážené jednotlivé impulzy, ze kterých je signál složen

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{S}\{\delta[n-m]\}. \quad (22.1.13)$$

Protože platí (22.1.5) a v důsledku časové invariance vyplývá z rovnice 22.1.13 **konvoluční suma**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (22.1.14)$$

Uvedli jsme, že u kauzálního systému závisí výstupní signál $y[n]$ pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$, takže v konvoluční sumě 22.1.14

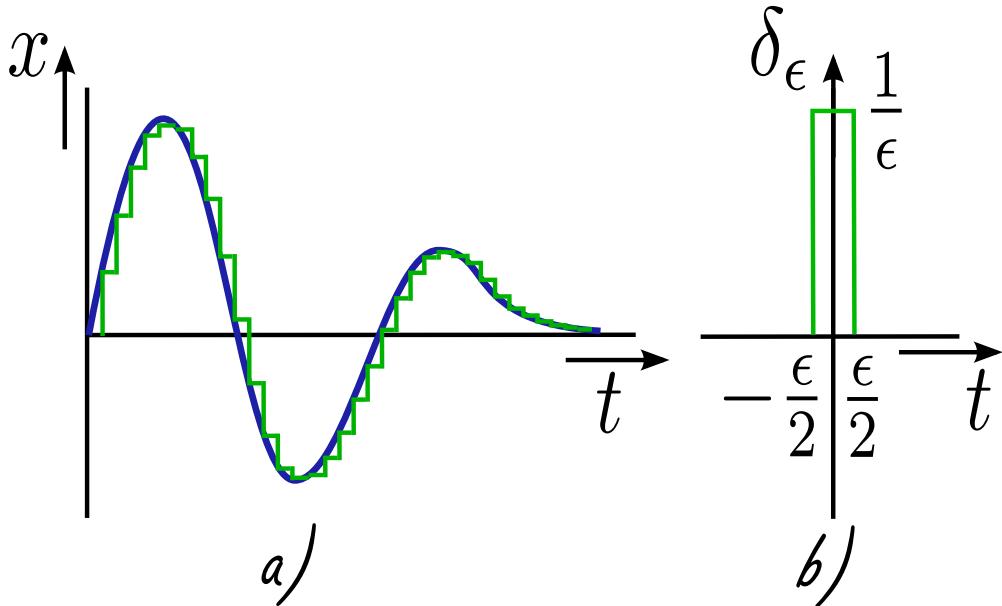
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (22.1.15)$$

musíme položit všechny členy impulzní odezvy $h[k] = 0$ pro $k < 0$. Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má pak tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (22.1.16)$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n < 0$ a $x[n] \neq 0, y[n] \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]. \quad (22.1.17)$$



Obrázek 22.1.3: a) Aproximace spojitého průběhu signálu, b) K odvození jednotkové impulsní funkce

Podobně můžeme postupovat i v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém *konvoluční integrál*. Vraťme se k výrazu 22.1.10 kterým jsme vyjádřili libovolný diskrétní signál. Pro případ spojitého signálu vytvořme analogickou formu zápisu využívající jednotkový impuls. Průběh obecného spojitého lze podle obr. 22.1.3 approximovat stupňovitým průběhem, který můžeme vyjádřit jako sumu posunutých (zpožděných) impulsů. Výchozí approximující impuls lze vyjádřit vztahem

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (22.1.18)$$

a je znázorněn na obr. 22.1.3. Jednotkový (Diracův) impuls má jednotkovou plochu. Matematicky můžeme Diracův impuls definovat výrazem

$$\delta_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t). \quad (22.1.19)$$

Aproximaci spojitého průběhu $x(t)$ impulsy 22.1.18 lze vyjádřit rovnicí

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon) \epsilon. \quad (22.1.20)$$

Zmenšování šířky impulsů $\epsilon \rightarrow 0$ se chyba approximace zmenšuje a výraz přejde v limitu

$$x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\epsilon) \delta_\epsilon(t - m\epsilon) \epsilon. \quad (22.1.21)$$

V limitě kdy $\epsilon \rightarrow 0$, můžeme sumu nahradit integrálem, dále součin $m\epsilon$ integrační proměnnou τ a ϵ jejím diferenciálem. Obdržíme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau. \quad (22.1.22)$$

Vztahem 22.1.22 jsme spojity průběh signálu vyjádřili jako sumu nekonečného počtu posunutých jednotkových impulsů váženou jeho okamžitými hodnotami. Předpokládejme dále, že na vstup lineárního časově invariantního spojitého systému je převeden jednotkový (Diracův) impuls a systém vytvoří odezvu $h(t)$. V případě obecného vstupního spojitého signálu $x(t)$ approximovaného vztahem 22.1.22, bude odezva analogového systému

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (22.1.23)$$

Uvedený integrál nazýváme **konvolucí** a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (22.1.24)$$

Funkce $h(t)$ představuje *impulsní odezvu*. Jedná se o výstupní signál systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t). \quad (22.1.25)$$

Z důvodů *kauzality*, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \text{ pro } |t| \geq 0, \quad (22.1.26)$$

$$h(t) = 0 \text{ pro } |t| < 0. \quad (22.1.27)$$

Potom můžeme konvoluční integrál 22.1.23 zapsat ve tvarem

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (22.1.28)$$

22.2 Popis spojitéh a diskrétních systémů, přenosová funkce

22.2.1 Spojité systémy

Lineární časově invariantní (LTI)
spojitý systém je obecně popsán soustavou integrodiferenciálních rovnic s konstantními

koeficienty, kterou lze postupným derivováním změnit na soustavu diferenciálních rovnic. Předpokládejme budící (nezávislou) veličinu $x(t)$ a odezvu (závislou) výstupní veličinu $y(t)$, pak eliminací ostatních proměnných bude soustava popsána jedinou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (22.2.1)$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n a b_0, b_1, \dots, b_m jsou konstanty charakterizující lineární systém. Obecné řešení $y(t)$ rovnice 22.2.1 se sestává ze dvou částí, z řešení *homogenní rovnice* a *partikulárního řešení*. K řešení je třeba znát počáteční podmínky pro $y(t)$ a jeho derivace ve výchozím okamžiku.

S použitím *Laplaceovy transformace při nulových počátečních podmínkách* má rovnice (22.2.1) tvar

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j X(p), \quad (22.2.2)$$

kde $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ a $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ jsou Laplaceovy obrazy vstupní a výstupní veličiny, p je Laplaceův operátor derivace a také komplexní kmitočet $p = \sigma + j\omega$. Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ ku obrazu vstupní veličiny $X(p)$, při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (22.2.3)$$

Vzhledem k rovnici (22.2.2) je $H(p)$ racionálně lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{j=1}^m (p - p_{0j})}{\prod_{i=1}^n (p - p_{\infty i})} \quad (22.2.4)$$

kde p_{0j} jsou kořeny polynomu čitatele a představují **nulové body** a kořeny jmenovatele $p_{\infty i}$ jsou **póly** přenosové funkce, $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$ je násobná konstanta.

Kmitočtové charakteristiky získáme z přenosové funkce substitucí

$$p = j\omega, \quad (22.2.5)$$

ve které ω je úhlový kmitočet. Platí tedy

$$H(p) |_{p=j\omega} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = M(\omega) e^{j\Phi(\omega)}, \quad (22.2.6)$$

kde $M(\omega)$ je **modulová charakteristika** a $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$ se nazývá **fázová charakteristika**. Skupinové zpoždění je definováno jako záporně vzatá derivace fázové charakteristiky podle kmitočtu

$$\tau(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\arg H(j\omega)}{d\omega}. \quad (22.2.7)$$

V předchozí kapitole jsme ukázali, že *relace vstup/výstup LTI systému* souvisí prostřednic-tvím *konvoluce*

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (22.2.8)$$

Přenosová funkce je Laplaceova transformace impulzní odezvy $h(t)$

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt, \quad (22.2.9)$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)X(p). \quad (22.2.10)$$

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako integrál impulzní odezvy

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau, \quad (22.2.11)$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}. \quad (22.2.12)$$

Algoritmus výpočtu impulzní odezvy z přenosové funkce je založen na výpočtu reziduů a rozkladu racionálně lomené funkce $H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}$ na částečné zlomky. Pokud má tato funkce jednoduché póly, rozklad má tvar².

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{k_\mu}{p - p_{\infty_\mu}} = \frac{k_1}{p - p_{\infty_1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty_2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty_n}} \quad (22.2.13)$$

kde k_μ se nazývají rezidua v pólech p_{∞_μ}) a platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} (p - p_{\infty_\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty_\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty_\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty_\mu}}} = Q(p_{\infty_\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty_\mu})} \end{aligned} \quad (22.2.14)$$

²Násobnost kořenů $N(p)$ neuvažujeme, protože se v LTI obvodech neuplatňuje

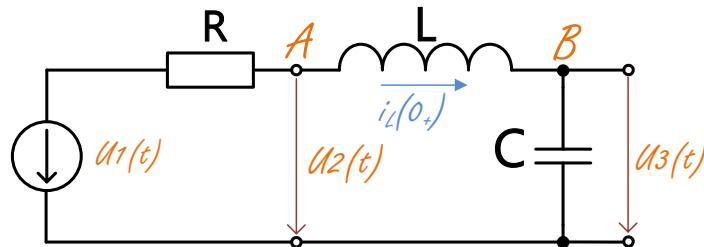
Impulzní odezva je pak dána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \sum_{\mu=1}^n k_\mu e^{p_{\infty\mu} t} \quad (22.2.15)$$

Póly jsou obecně komplexní $p_{\infty\mu} = \alpha_\mu + j\beta_\mu$, nebo reálné $p_{\infty\mu} = \alpha_\mu$. Jsou to kořeny rovnice $N(p) = 0$. Rovnice 22.2.15 je důležitá i proto, že z ní poznáme, zda analogová soustava je stabilní. Je patrné, že soustava bude stabilní, jestliže bude $\Re\{p_{\infty\mu}\} = \alpha_\mu < 0$, tj. leží-li kořeny $p_{\infty\mu}$ v otevřené levé polovině komplexní roviny $p_{\infty\mu} = \sigma + j\omega$. Imaginární osa $j\omega$ jemezí stability, pravá polovina je oblastí nestability. Polynom, který má kořeny v levé otevřené polovině se označuje **Hurwitzův polynom**.

Příklad 22.2.1. Lineární spojitý systém je dán zapojením dle obrázku. Určete:

1. diferenciální rovnici pro odezvu $u_2(t)$, je-li na vstupu buzen napětím $u_1(t)$,
2. přenos napětí $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$,
3. impulsní odezvu $h(t)$.



Obrázek 22.2.1: Zapojení obvodu RLC.

Řešení:

Pro zapojení dle obrázku získáme metodou uzlových napětí integrodiferenciální rovnice pro uzly A a B:

$$\begin{aligned} A &: \frac{u_3(t) - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_3(\tau) - u_2(\tau)) d\tau + i_L(0_+) = 0 \quad (22.2.16) \\ B &: \frac{1}{L} \int_0^t (u_2(\tau) - u_3(\tau)) d\tau + C \frac{du_c}{dt} - i_L(0_+) = 0 \end{aligned}$$

Derivováním a eliminací $u_3(t)$ z původních rovnic dostaneme pro odezvu $u_2(t)$ diferenciální rovnici II. řádu

$$\frac{d}{dt}(B) : u_2(t) - u_3(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow u_3(t) = u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2}$$

$\frac{d}{dt}(B) \rightarrow (A)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t (LC \frac{d^2 u_2(\tau)}{d\tau^2}) d\tau + i_L(0_+) &= 0 \\ u_2(t) + LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} - u_1(t) + RC \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right]_0^t + Ri_L(0_+) &= 0 \end{aligned}$$

Při nulových počátečních podmínkách: $\frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} = 0$, $i_L(0_+) = 0$ dostaneme:

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (22.2.17)$$

V Laplaceově transformaci platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{du_2(t)}{dt} \right] &= pU_2(p) - u_2(0) \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} \right] &= p^2 U_2(p) - pu_2(0) - u_2(0), \text{ kde } u_2(0) = \frac{du_2(t)}{dt}|_{t=0} \end{aligned}$$

při nulových počátečních podmínkách

$$p^2 LCU_2(p) + pRCU_2(p) + U_2(p) = U_1(p) \quad (22.2.18)$$

Odtud vyplývá **přenosová funkce** $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{Q(p)}{N(p)} \quad (22.2.19)$$

K nalezení **impulsní odezvy** nejprve určíme póly přenosové funkce řešením rovnice $N(p) = 0$

$$p_{\infty_{12}} = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (22.2.20)$$

přenosovou funkci pak upravíme do tvaru

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_{\infty_1}) \cdot (p - p_{\infty_2})}, \quad K = \frac{1}{LC} \quad (22.2.21)$$

- Uvažujeme-li jednoduché póly a bude-li $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom z rov. 22.2.20 vyplývají dva reálné různé póly. Přenosovou funkci tedy můžeme zapsat obecným tvarem:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a_1} + \frac{k_2}{p + a_2} \quad (22.2.22)$$

kde $p_{\infty_1} = -a_1$, $p_{\infty_2} = -a_2$, Rezidua $k_1 = \frac{K}{a_2 - a_1}$, $k_2 = \frac{K}{a_1 - a_2}$ určíme z rov. 22.2.14. Impulsní odezvu pak vypočteme užitím rov. 22.2.15.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \frac{K}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{K}{a_1 - a_2} e^{-a_2 t} \quad (22.2.23)$$

- Když bude $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, obdržíme dvojici komplexně sdružených pólů a přenosovou funkci může obecně zapsat takto:

$$H(p) = \frac{K}{(p + a_1) \cdot (p + a_2)} = \frac{k_1}{p + a - jb} + \frac{k_2}{p + a + jb} \quad (22.2.24)$$

kde $p_{\infty_1} = -a + jb$, $p_{\infty_2} = -a - jb$. Rezidua v pólech jsou dány výrazy $k_1 = -\frac{jk}{2b}$, $k_2 = \frac{jk}{2b}$. Impulzní odezvu opět určíme užitím rov. 22.2.15.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-e^{jbt} + e^{-jbt})] \\ &= \frac{Ke^{-at}}{2b} [j \cdot (-\cos(bt) - j \sin(bt) + \cos(bt) - j \sin(bt))] \\ &= \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) \end{aligned} \quad (22.2.25)$$

Pro stavební prvky: $R = 1k\Omega$, $L = 11.5mH$, $C = 22.5nF$ ukazuje výpis m-file *SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m* symbolický způsob řešení operátorových obvodových rovnic pomocí MATLABu. Jde o typ **dolní propust**, jehož přenosová funkce má tvar:

$$H(p) = \frac{3.9506 \cdot 10^9}{p^2 + 8.8889 \cdot 10^4 p + 3.9506 \cdot 10^9}.$$

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 15
3 % Vyreste symbolicky soustavu operatorovych obvodovych
4 % rovnic a vyjadrete prenosovu funkci
5 %
6 f1 = '(U3-U1)/R+(U3-U2)/(p*L)';
7 f2 = 'p*C*U2+(U2-U3)/(p*L)';
8 % symbolicka reseni rovnic
9 rU = solve(f1, f2, 'U2, U3');
10 % vyber pole U2, resp. U1 z datove struktury rU
11 rU.U2 % uzlove napeti U2
12 rU.U3 % uzlove napeti U3
13 % Prenosova funkce
14 P = rU.U2/'U1'
```

```

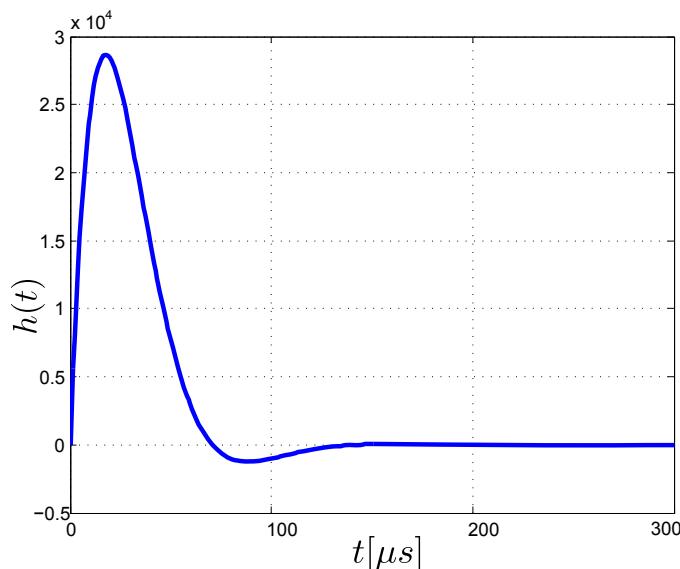
15 % symbolicka substituce
16 nP = subs(P, {'R', 'C', 'L'}, {1e3, 22.5e-9, 11.25e-3})
17 % nastaveni formatu zobrazeni cisel napr: 3.1416e+000
18 format short e
19 % citatel(numerator) a jmenovatel(denominator)
20 % symbolickeho výrazu
21 [num, den] = numden(nP) % num/den
22 % symbolické vyjádření polynomu prevede na vektorové
23 % vyjádření - A(1): první prvek vektoru (koeficient u
24 % nejvyšší mocniny polynomu)
25 N = sym2poly(den)
26 roots(N)
27 % H(p)=Q(p)/N(p)
28 % koeficient u nejvyšší mocniny ve jmenovateli bude 1
29 Q = sym2poly(num)/N(1)
30 N = N/N(1)

```

Výpis 22.1: SAS_exam_02_symb_Hp_solve.m

Impulzní charakteristiku obdržíme dosazením do vztahu 22.2.25

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-at} \sin(bt) = 8.8890 \cdot 10^4 e^{-4.4444 \cdot 10^4 t} \sin(4.4444 \cdot 10^4 t).$$



Obrázek 22.2.2: Impulzní charakteristika

Z hlediska analýzy obvodů v kmitočtové oblasti je výhodné sestavovat obvodové rovnice (metodami uzlových napětí a smyčkových proudů) přímo v operátorovém tvaru.

Kirchhoffovy zákony pro uzavřenou smyčku a proudu do uzlu pak mají tvar

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

Metodou uzlových napětí pro zapojení na obr. 22.2.1 obdržíme rovnice

$$\frac{U_3(p) - U_1(p)}{R} + \frac{U_3(p) - U_2(p)}{pL} = 0 \quad (22.2.26)$$

$$pCU_2(p) + \frac{U_2(p) - U_3(p)}{pL} = 0 \quad (22.2.27)$$

Na rozdíl od 22.2.16 jde o algebraické rovnice, ze kterých eliminací uzlového napětí $U_3(p)$ vyplývá přenosová funkce 22.2.19

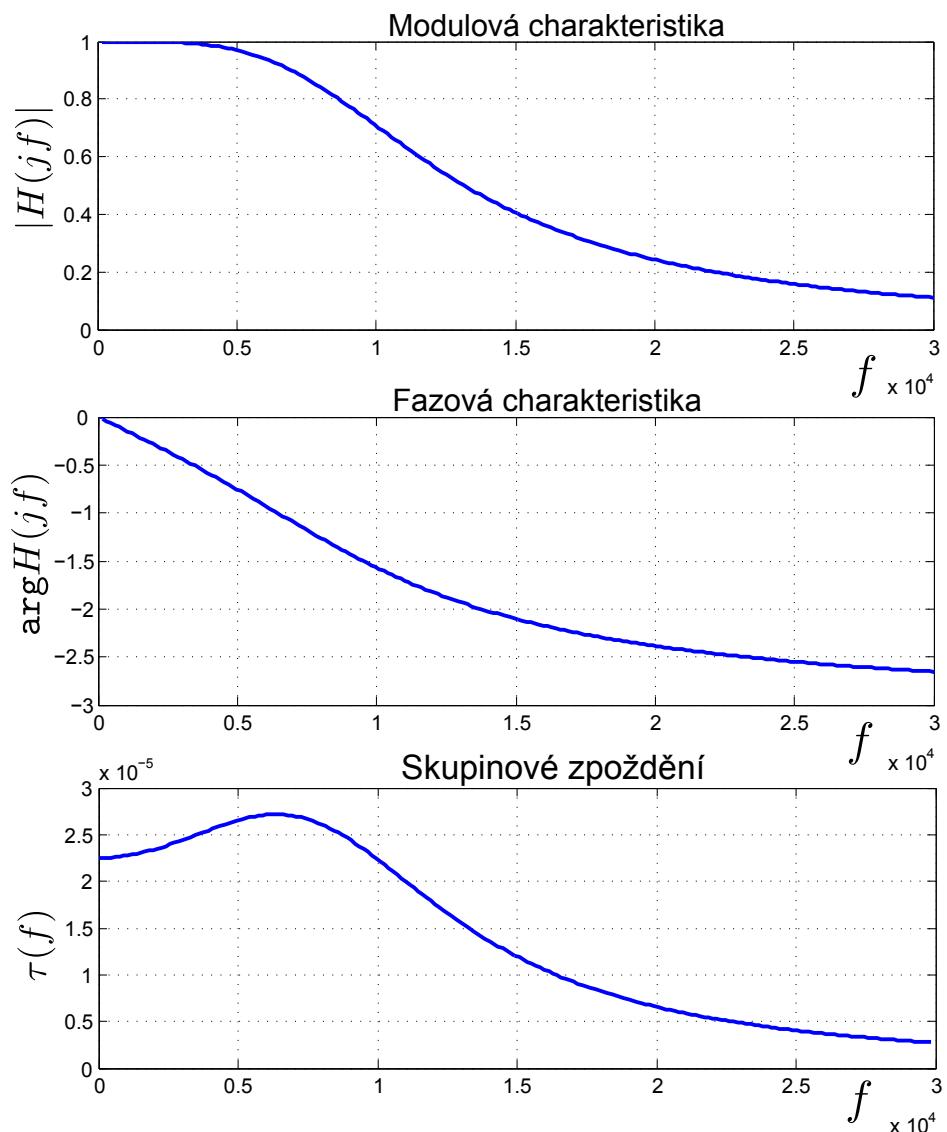
$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Dosazením za $p = j\omega$ lze z přenosové funkce vyjádřit modulovou charakteristiku $H(j\omega)$ a fázovou charakteristiku $\Phi(\omega) = \arg H(j\omega)$. Skupinové zpoždění vyplývá ze vztahu 22.2.7. Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění jsou na obr. 22.2.3.

Filtr má maximálně plochou modulovou charakteristiku přenosu. Mezní kmitočet propustného pásma je $f_p = 10\text{kHz}$, při kterém je $|H(j\omega_p)| = 0.707$. Tato hodnota odpovídá poklesu modulové charakteristiky o 3dB .

```

1 % zdroj : Linearni obvody a systemy
2 % Jan Bicak - strana 16
3 % Vykreslete modulovou, fazovou charakteristiku,
4 % charakteristiku skupinoveho zpozdeni a
5 % impulzni odezvu prenosove fce
6 % Q(p) 3.9506e+009
7 % H(p) = _____ = _____
8 % N(p) p^2 + 8.8889e+004p + 3.9506e+009
9 %
10 Q = 3.9506e+009;
11 N = [1, 8.8889e+004, 3.9506e+009];
12 f = linspace(0, 3e4, 200);
13 w = 2*pi*f;
14 %komplexni frekvencki odezva z analogove prenosove fce
15 H = freqs(Q, N, w);
16 figure(1)
17 plot(f, abs(H)); grid;
18 xlabel f
19 ylabel '|H(jf)|'
```



Obrázek 22.2.3: Modulová, fázová charakteristika a skupinové zpoždění filtru

```

20 title 'Modulova\u00e1 charakteristika'
21 figure(2)
22 plot(f, phase(H)); grid
23 xlabel f; ylabel 'arg\u00e1H(jf)';
24 title 'Fazova\u00e1 charakteristika'
25 % diff(X) – difere\u0101e prvku vektoru
26 % [X(2)\u2013X(1) X(3)\u2013X(2) ... X(n)\u2013X(n\u20131)]
27 t = diff(-phase(H))./diff(w); % approximace derivace
28 figure(3)
29 plot(f(1:199), t); grid

```

```
30 xlabel f; ylabel '\tau(f)';  
31 title 'Skupinové zpoždění'  
32 % vektorové vyjádření prevede na symbolické vyjádření  
33 P = poly2sym(Q)/poly2sym(N)  
34 % inverzní Laplaceova transformace  
35 ih = ilaplace(P)  
36 % konverze racionalního čísla na desetinné číslo  
37 vpa(ih,5)  
38 figure(4)  
39 t = linspace(0, 3e-4, 200);  
40 plot(t, subs(ih)); grid  
41 xlabel f; ylabel 'h(t)';  
42 title 'Impulzní odezva'
```

Výpis 22.2: SAS_exam_03_Hp.m

Část IX

Senzory a akční členy

Obsah

23.1 Základní pojmy	206
23.1.1 Elektrické teploměry	207
23.1.2 Odporové snímače	207

23.1 Základní pojmy

Teplota je charakteristika tepelného stavu hmoty. V obecném významu je to vlastnost předmětů a okolí, kterou je člověk schopen vnímat a přiřadit jí pocity studeného, teplého či horkého. V přírodních a technických vědách a jejich aplikacích je to *skalární intenzivní veličina*, která je vzhledem ke svému pravděpodobnostnímu charakteru vhodná k popisu stavu ustálených makroskopických systémů. Teplota souvisí s kinetickou energií částic látky.

Teplota je základní fyzikální veličinou soustavy SI s jednotkou kelvin (K) a vedlejší jednotkou stupeň Celsia ($^{\circ}\text{C}$). Nejnižší možnou teplotou je teplota absolutní nuly (0 K; $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$), ke které se lze libovolně přiblížit, avšak nelze jí dosáhnout.

Do této skupiny patří především rozsáhlá část snímačů teploty. Z hlediska měřených veličin můžeme provést následující rozdělení.

1. Snímače teploty

a. Snímače pro dotykové měření

- elektrické
 - odporové kovové
 - odporové polovodičové
 - termoelektrické
 - polovodičové
- dilatační
- termoelektrické
- tlakové
- speciální

b. Snímače pro bezdotykové měření

- monochromatické pyrometry
- pásmové pyrometry
- radiační pyrometry

2. Snímače tepla

3. Snímače tepelného toku

23.1.1 Elektrické teploměry

23.1.2 Odporové snímače

Odporové snímače využívají princip změny elektrického oporu vlivem změny teplot. Základním požadavkem kladeným na materiál snímače je co největší a stálý teplontí součinitel odporu a zároveň co největší měrný odpor. Pro tyto účely se používají kovové a polovodičové materiály.

23.1.2.1 Kovové odporové snímače

Jsou to především čisté kovy, které se používají pro realizaci vlastního odporového článku. Požadavkem je, aby nereagovaly s izolačním nebo ochranným krytem. Jakékoli chemické nebo fyzikální vlivy by mohly způsobit nestálost odporu při stálé teplotě. Použitý materiál nemá vykazovat změnu teplotního součinitele odporu s časem (stárnutí) a hysterezi. Nejčastěji používanými materiály je *platina*, *nikl*, *měď*, *slitina stříbro-zlato* a další [Zehnula1983].

Platina je výhodná pro velkou chemickou stálost, vysokou teplotou tavení a možností dosažení vysoké čistoty. Pro snímače teploty se používá tzv. fyzikálně čistá platina, jejíž čistota se pohybuje kolem 99,93 až 99,99 % Pt. Měření ukázala, že změny základního odporu u sériově vyráběných přesných teploměru se pohybí kolem $5 \times 10^{-6} R_o$ (což odpovídá 0,001 K), u nejlepších teploměrů je tato hodnota ještě o řadu menší. Proto se používá platina pro etalonový teploměr v oblasti teplot $-259,34^{\circ}\text{C}$ až $630,74^{\circ}\text{C}$.

Závislost odporu na teplotě pro rozsah 0 až 630°C se vyjadřuje rovnicí

$$R_{\vartheta} = R_0(1 + A\vartheta + B\vartheta^2) \quad (23.1.1)$$

kde R_0 je odpor při 0°C , ϑ ... teplota ve $^{\circ}\text{C}$, A ... konstanta ($3,9075 \times 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$), B ... konstanta ($-0,575 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$).

V rozmezí od 0°C do -190°C se vyjadřuje závislost odporu na teplotě rovnicí

$$R_{\vartheta} = R_0[1 + A\vartheta + B\vartheta^2 + C(\vartheta - 100)\vartheta^3)] \quad (23.1.2)$$

kde C je konstanta ($-4 \times 10^{12} \text{ }^{\circ}\text{C}$).

Část X

Teorie elektrických obvodů

Obsah

24.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů	212
24.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)	212
24.2.1 Ilustrativní příklad	213
24.2.2 Pravidla pro sestavování rovnic	214
24.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí	215
24.3.1 Metoda razítek	216
24.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA	217
24.5 Napěťový dělič	219

Ke každému skutečnému, fyzicky realizovanému, elektrickému obvodu lze nakreslit **obvodové schéma**. Toto schéma je vlastně *obvodovým modelem* skutečného obvodu. Obvodový model je sestaven ze základních obvodových prvků - **dvojpólů**. Název plynoucí z důležité topologické vlastnosti dvojpólů - mají dvě svorky [**Patocka2**].

Základních obvodových prvků je celkem pět: rezistor, cívka, kondenzátor, ideální zdroj napětí, ideální zdroj proudu. Zdůrazněme následující skutečnosti:

- Každý ze základních prvků je uvažován jako **ideální** (nemá žádné jiné parazitní vlastnosti).
- Kombinací základních prvků vznikne **náhradní zapojení** skutečného prvku, včetně jeho parazitních vlastností.
- Z pěti základních prvků je tedy možno sestavit **libovolný obvodový model** (elektrický obvod) **pasivní i aktivní**.
- U **aktivních obvodů** (např. zesilovačů) se uplatňují řiditelné, neboli parametrické prvky. Typickým příkladem je bipolární tranzistor, jenž je řízen proudem do báze.

24.1 Metody řešení lineárních elektrických obvodů

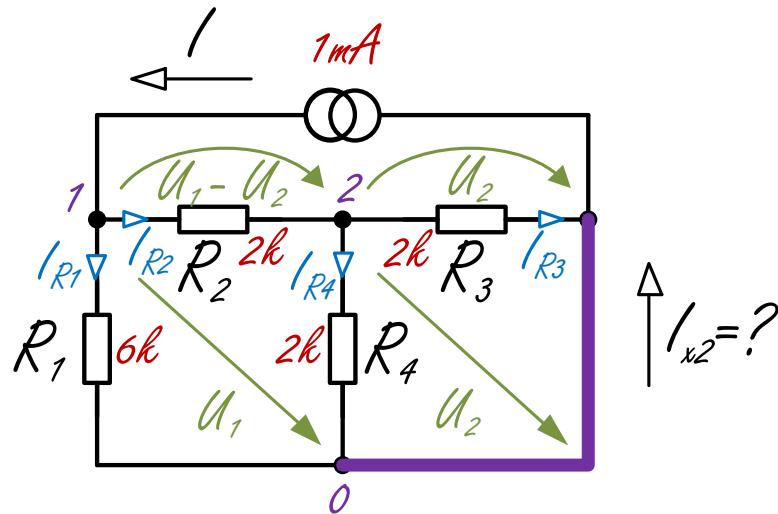
24.2 Klasická metoda uzlových napětí (MUN)

Metoda uzlových napětí je založena na tomto postupu:

- Jeden z uzlů obvodu se prohlásí za tzv. **referenční uzel**. Přiřadí se mu číslo 0, případně v počítačovém simulátoru značka uzemnění. Vzhledem k tomuto uzlu se budou vztahovat napětí ostatních uzlů obvodu. Tato napětí se nazývají **uzlová napětí** a tvoří **soustavu neznámých obvodových veličin** metody. Je vhodné orientovat všechna uzlová napětí tak, aby čítací šipky směřovaly do referenčního uzlu. Uzlová napětí jsou neznámými metody i tehdy, je-li naším konečným cílem počítat jiné obvodové veličiny. Každé napětí a každý proud v obvodu jsou totiž vyjádřitelné jako lineární kombinace uzlových napětí.
- Pro každý uzel obvodu, vyjma referenčního, sestavíme rovnici 1. KZ ve tvaru: *součet proudů tekoucích dovnitř uzlu z vnějších zdrojů proudu = součtu proudů vytékajících větvemi obvodu ven z uzlu*.
- Rovnice vyřešíme, tj. získáme velikosti uzlových napětí. Z nich pak dopočteme požadovaný výsledek analýzy.

24.2.1 Ilustrativní příklad

Metodu uzlových napětí lze objasnit na příkladu zapojení na obr. 24.2.1. Je třeba určit proud I_{x2} . Nejprve očísloveme uzly. Zvolíme referenční uzel a přiřadíme mu číslo



Obrázek 24.2.1: Řešení obvodu metodu uzlových napětí - MUN [BIOLEK]

o. Zde je třeba zdůraznit, že referenční uzel je možno volit zcela libovolně. Většinou se volí tak, aby případné hledané napětí bylo rovno jednomu z napětí uzlových. Dále si všimneme, že uzel, v němž je se spojuje rezistor R_3 a proudový zdroj, je vlastně součástí referenčního uzlu a jako takový se přídavně nečísluje - má již označení 0.

Vyznačená uzlová napětí U_1 a U_2 tvoří soustavu dvou neznámých, k níž musíme sestavit dvě rovnice. Budou to rovnice 1. KZ pro uzly 1 a 2. Protože počítáme proud I_{x2} , postačí určit uzlové napětí U_2 . Z něj totiž snadno určíme proud rezistorem R_3 a z něj I_{x2} .

Podle obr. 24.2.1 napíšeme 1. KZ pro rovnováhu proudů v uzlech 1 a 2:

$$\begin{aligned} \text{uzel1 : } I &= I_{R1} + I_{R2} \\ \text{uzel2 : } 0 &= -I_{R1} + I_{R2} + I_{R4} \end{aligned} \quad (24.2.1)$$

Orientaci čítacích šipek větvových proudů můžeme volit naprosto libovolně. Pokud se v orientaci zmýlíme, vyjde u daného proudu opačné znaménko.

Větvové proudy na pravé straně rovnic vyjádříme pomocí větvových vodivostí a větvových napětí, která závisí na uzlových napětí (viz obr. 24.2.1):

$$\begin{aligned} uzel1 : I &= G_1 U_1 + G_2(U_1 - U_2) \\ uzel2 : 0 &= -G_2(U_1 - U_2) + G_3 U_2 + G_4 U_2 \end{aligned} \quad (24.2.2)$$

Vytknutím neznámých upravíme rovnice na konečný tvar

$$\begin{aligned} uzel1 : I &= (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 \\ uzel2 : 0 &= -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 \end{aligned} \quad (24.2.3)$$

Dosadíme-li vodivosti v [mS], vyjdou proudy na levé straně v [mA]

$$\begin{aligned} uzel1 : 1 &= \frac{2}{3}U_1 - \frac{1}{2}U_2 \\ uzel2 : 0 &= -\frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2}U_2 \end{aligned} \quad (24.2.4)$$

Tyto rovnice dávají řešení

$$[U_1, U_2] = \left[2, \frac{2}{3} \right] V \quad (24.2.5)$$

Pohledem na schéma 24.2.1 zjistíme, že při $U_2 = \frac{2}{3}V$ bude proud $I_{R3} = \frac{1}{3}mA$ a hledaný proud I_{x2} vychází z 1. KZ

$$I_{x2} = I - I_{R3} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}mA. \quad (24.2.6)$$

24.2.2 Pravidla pro sestavování rovnic

Nyní pustme se do zobecnění poznatků z předchozího příkladu. Rovnice 24.2.4 zapíšeme v maticovém tvaru Porovnáme-li maticovou rovnici s původním schématem obvodu 24.2.1 dospejeme k následujícím pravidlům:

- Pravidlo o sestavení vektoru budicích proudů na levé straně maticové rovnice:

$$\begin{array}{c} \text{uzel 1: } \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline U_1 & U_2 \\ \hline G_1 + G_2 & -G_2 \\ \hline -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline U_2 \\ \hline \end{array} \\ \text{uzel 2: } \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

- V i-tém řádku je algebraický součet proudů, tekoucích dovnitř i-tého uzlu z vnějších zdrojů proudu.
- Pravidla o sestavení čtvercové vodivostní (admitanční) matice:
 - Prvek i,j na hlavní diagonále obsahuje součet všech vodivostí (admitancí), které jsou připojeny k uzlu i .
 - Prvek $i,j (i \neq j)$ mimo hlavní diagonálu obsahuje záporně vztatý součet všech vodivostí, které jsou připojeny bezprostředně mezi uzly i a j .

Základní lineární dvojpóly (R, L, C) jsou reciprocní, tzn. chovají se stejně ve směru obou uzelů. Jinými slovy, jejich impedance je v obou případech stejná. Proto u obvodů s těmito součástkami vykazují admitanční matice *symetrii*, tj. prvky matice i, j a j, i jsou totožné.

24.3 Modifikovaná metoda uzlových napětí

Výhodou metody uzlových napětí je její snadná algoritmizace: algoritmus pro sestavení soustavy rovnic přímo ze schématu je velmi jednoduchý a lze jej tedy implementovat do počítačových programů pro analýzu a simulaci. Nevýhodou metody ovšem je, že neumožňuje analyzovat obvody se zdroji napětí a součástkami, které nemají admitanční rovnici. Bohužel, k těmto součástkám patří nejen například takové prvky jako je obyčejný transformátor, ale i různé operační zesilovače, konvejory, a další moderní analogové prvky [Bielek].

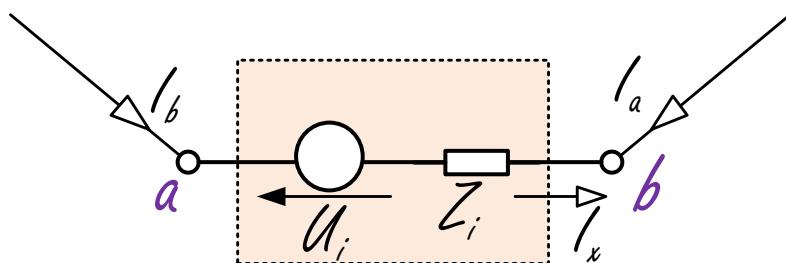
Proto klasická metoda MUN musí být podrobena určité modifikaci, která jednak zachová její výhodu - snadnou algoritmizovatelnost - jednak umožní analyzovat lineární obvody bez výše uvedených omezení. Jsou to metody:

- Metoda razítek
- Metoda zakázaného řádku
- Metoda U/I

24.3.1 Metoda razítek

Každý "problémový" prvek je popsán minimálně jednou přídavnou rovnicí a o stejný počet obohatí množinu neznámých. Současně dojde k modifikaci některých původních rovnic 1. KZ. Maticová rovnice pak získá zvláštní strukturu: k původní admitanční matici MUN přibudou řádky a sloupce, jejichž prvky obecně nemají rozdíl mezi admittancí. Jsou to tzv. *razítka* původních elektrických prvků. Celá matice se pak nazývá **pseudoadmitanční**. Zvětšení rozměru soustavy rovnic obvykle při počítačové analýze nemusí být na závadu. Při ručním řešení jde však prakticky vždy o problém [Bielek].

Uvažujme obvod popsáno rovnicemi klasické MUN. Mezi uzly a a b obvodu dodatečně připojíme obecný dvojpól, který je popsán svým Théveninovým modelem podle obr. 24.3.1. Včleněním dvojpólu dojde ke změně napěťových a proudových poměrů v obvodu. Dvojpólem bude protékat proud I_x , který modifikuje proudové poměry mezi v uzlech a a b . Dojde i k změně původních uzlových napětí.



Obrázek 24.3.1: Začlenění obecného lineárního dvojpólu, popsánoho Théveninovým modelem do obvodu [Bielek]

Původní rovnice popisující rovnováhu proudů v uzlu a musí být na pravé straně doplněna o proud I_x , vytékající ven z uzlu, a v uzlu b o proud I_x se záporným znaménkem, protože vtéká dovnitř uzlu b . Navíc uzlová napětí U_a a U_b jsou nyní vázána podmínkou

$$Z_i I_x + U_b = U_i + U_a, \text{ nebo } U_i = Z_i I_x + U_b - U_a \quad (24.3.1)$$

Všechny tyto modifikace lze zahrnout do nové soustavy rovnic MMUN:

Vektor neznámých uzlových napětí je rozšířen o další neznámou, I_x . Počet rovnic je rovněž zvětšen o jedničku, a to o výše uvedenou podmínce mezi uzlovými napětími U_a a U_b . Přitom napětí U_i je začleněno do vektoru známých budicích veličin na levé straně. Modifikace rovnic 1. KZ pro uzly a a b je provedena zápisem $+1$ a -1 do sloupce " I_x ".

Právě provedený zápis je návodem, jak pomocí MMUN analyzovat například obvody obsahující zdroj napětí. Impedance Z_i může být i nulová, pak se bude jednat o ideální zdroj napětí. Při $U_i = 0$ a $I_i = 0$ lze modelovat zkrat mezi uzly a počítat proud, tekoucí tímto zkratem.

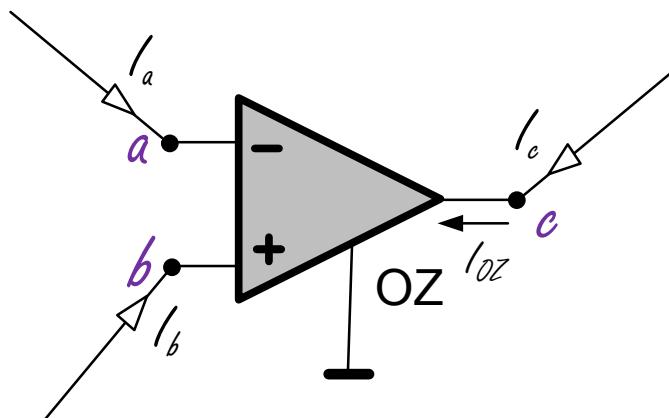
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c}
 U_a & U_b \\
 \hline
 I_a & \\
 \hline
 I_b & \\
 \hline
 \vdots & \\
 \hline
 U_i &
 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|c}
 I_a & I_a & \dots & I_x & +1 \\
 \hline
 I_b & I_b & \dots & -1 & -1 \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 U_i & U_i & \dots & Z_i & I_x
 \end{array}
 \end{array}$$

razítka

Obrázek 24.3.2: Razítka v pseudoadmitanční matici [Bielek]

24.4 Obvody s ideálním operačním zesilovačem typu VFA

Ideální OPAMP, na obr. 24.4.1 po vložení do obvodu způsobí ztotožnění uzlových napětí U_a a U_b , a modifikaci proudových poměrů v uzlu c .



Obrázek 24.4.1: Ideální operační zesilovač typu VFA

Ve spodním přídavném řádku je zapsána rovnice

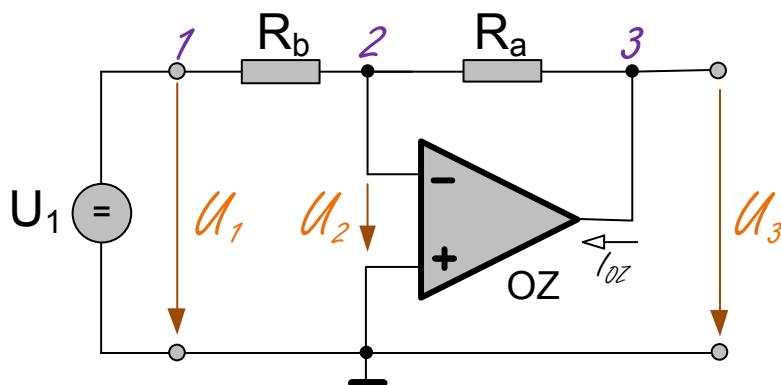
$$0 = 1 \cdot U_a - 1 \cdot U_b \quad (24.4.1)$$

Výsledek řešení se nezmění, jestliže obě strany této rovnice vynásobíme libovolným nenulovým číslem. Ve spodním řádku tedy může být namísto $[1, -1]$ například $[15, -15]$. Je-li jeden ze vstupů OZ spojený s referenčním uzlem, neobjeví se příslušné uzlové napětí v rovnicích a proto v posledním řádku bude figurovat jen jedna jednička místo uvedené dvojice. Jednička v řádku c a sloupci I_{OZ} reprezentuje připočtení proudu I_{OZ} do celkové bilance proudů, vytékající z uzlu c .

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & U_a & U_b & U_c & & I_{OZ} \\
 \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ \vdots \\ \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc} I_a & & & & \\ & I_b & & & \\ & & I_c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{OZ} \end{array} \right] = & \left[\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] \\
 & +1 & -1 & & \dots & I_{OZ} \\
 \hline & & & & &
 \end{array}$$

Obrázek 24.4.2: MMUN - pro ideální OPAMP typu VFA

Příklad 24.4.1. Uvažujme invertující zesilovač s ideálním operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 24.4.3. Napište rovnice MMUN.



Obrázek 24.4.3: Invertující zesilovač

Rovnice MMUN budou v maticovém zápisu vypadat takto: Předposlední rovnice říká, že uzlové napětí U_1 je rovno napětí signálového zdroje U_{IN} . Jednička v posledním řádku reprezentuje jednoduchou rovnici $U_2 = 0$. Ačkoliv je obvod poměrně jednoduchý, je pro ruční řešení neefektivní, neboť jsme získali soustavu o 5 rovnic a 5 neznámých.

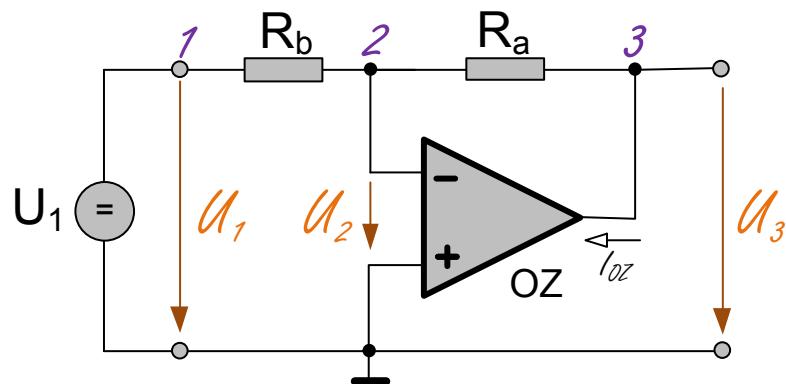
Příklad 24.4.2. Uvažujme invertující zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 24.4.4. Napište rovnice MMUN.

Příklad 24.4.3. Uvažujme diferenciální zesilovač s ideální operačním zesilovačem typu VFA s naznačenými uzly tak, jak je na obr. 24.4.5. Napište rovnice MMUN.

U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
G_b	$-G_b$		-1		U_1	
$-G_b$	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

* =

Tabulka 24.4.1: Invertující zesilovač



Obrázek 24.4.4: Neinvertující zesilovač

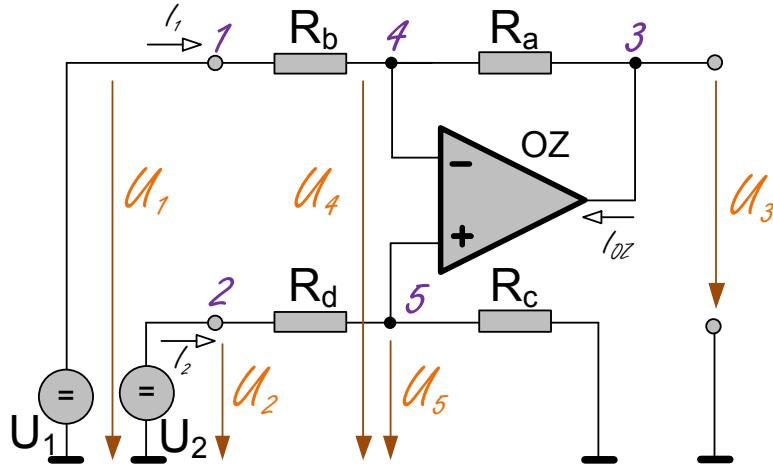
U_1	U_2	U_3	I_1	I_{OZ}	x	b
			-1		U_1	
	$G_a + G_b$	$-G_a$			U_2	
	$-G_a$	G_a		1	U_3	
1					I_1	
	1				I_{OZ}	

* =

Tabulka 24.4.2: Neinvertující zesilovač

24.5 Napěťový dělič

V elektronických soustavách se největších přesností dosahuje u rezistorů, kde je standardně zaručována chyba menší než 1%, u přesných 0.1% a u velmi přesných 0.01%.

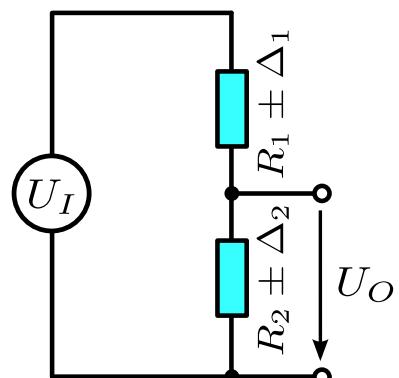


Obrázek 24.4.5: Diferenciální zesilovač

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	I_1	I_2	I_{OZ}	x	b
G_b			$-G_b$		-1				
	G_d			$-G_d$		-1			
		G_a	$-G_a$					1	
$-G_b$		$-G_a$	$G_a + G_b$					*	
	$-G_d$			$G_c + G_d$					
			-1	1					
1									
	1								

Tabulka 24.4.3: Diferenciální zesilovač

Bude nás zajímat jaký vliv má tolerance rezistorů na výsledný poměr výstupního ku vstupnímu napětí a také, zda-li při různě zvoleném poměru těchto rezistorů se bude měnit velikost chyby, ačkoliv budou mít stejnou přesnost. Intuitivně předpokládáme, že nejnepríznivější situace nastane, když hodnoty použitých rezistorů padnou na opačné strany tolerančních pásem, jenž reprezentuje Δ_1 a Δ_2 tj.



Obrázek 24.5.1

$R_2 - \Delta_2 R_2$ a $R_1 + \Delta_1 R_1$ nebo $R_2 + \Delta_2 R_2$ a $R_1 - \Delta_1 R_1$. V obou případech bude chyba stejná, proto si vybereme například první případ a zapíšeme (rov. 24.5.1).

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2 - \Delta_2 R_2}{R_1 + \Delta_1 R_1 + R_2 - \Delta_2 R_2} \quad (24.5.1)$$

a po úpravě

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2}$$

Polynom ve jmenovateli rozvineme do následující podoby

$$[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) = (1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 + (1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1$$

$$(1 + \Delta_1)R_1 + (1 - \Delta_2)R_2 = [(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - (1 + \Delta_1)R_2 - (1 - \Delta_2)R_1$$

a získáme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{(1 - \Delta_2)R_2}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)](R_1 + R_2) - [(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}$$

Nyní vydělíme jmenovatel i čitatel $(R_1 + R_2)$ a dostaneme

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta_2)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta_1) + (1 - \Delta_2)] - \frac{[(1 + \Delta_1)R_2 + (1 - \Delta_2)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (24.5.2)$$

Standardně rezistory volíme se stejnou tolerancí, tedy $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ a získáme výslednou rovnici pro poměr $\frac{U_o}{U_i}$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{(1 - \Delta)R_2}{R_1 + R_2}}{[(1 + \Delta) + (1 - \Delta)] - \frac{[(1 + \Delta)R_2 + (1 - \Delta)R_1]}{R_1 + R_2}} \quad (24.5.3)$$

Řekněme například, že pro návrh děliče máme k dispozici rezistory s tolerancí 1% a vstupní napětí je 1 V. Obvod, ve kterém je dělič použit, umožňuje volit různé poměry, ale jejich součet je konstantní. Na otázku jaký poměr zvolit, abychom při dané toleranci rezistorů dostali výstupní napětí s největší přesností odpovídá následující tabulka.

R_1	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$19k\Omega$
R_2	$19k\Omega$	$10k\Omega$	$1k\Omega$
U_{out}	0,950	0,500	0,050
U_{out}^*	0,949	0,495	0,049
$\varepsilon_r [\%]$	0,101	1,000	1,883

Tabulka 24.5.1

Obsah

25.1 Fyzikální podstata přechodných dějů	224
25.1.1 Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti	225
25.2 Přechodný jev kmitavého obvodu	230

25.1 Fyzikální podstata přechodných dějů

V obvodu, který je v ustáleném stavu, nechť dojde buďto

- ke změně parametru aktivního prvku (např. připojení nebo odpojení zdroje napětí nebo proudu),
- ke změně parametru pasivního prvku (např. zvětšení nebo zmenšení odporu, indukčnosti nebo kapacity),
- ke změně topologické struktury (např. přerušení větve, spojení větve nakrátko, připojení další větve).

Kteroukoliv z uvedených změn dostaneme nový obvod jemuž přísluší nový *ustálený stav*; tento stav však nenastane okamžitě. Zmíněná změna přivede obvod do *neustáleného stavu*, v němž odezvy napětí a proudů - nazýváme je **přechodnými jevy** - se postupně přibližují k hodnotám nového ustáleného stavu. Přechodné jevy, ač - přesně vzato - probíhají v nekonečně dlouhé době, jsou v praxi jevy krátkodobými, neboť odezvy se trvale "dostatečně těsně" přiblíží k hodnotám nového stavu již v poměrně krátké době - v běžných případech jsou to mikrosekundy až milisekundy.

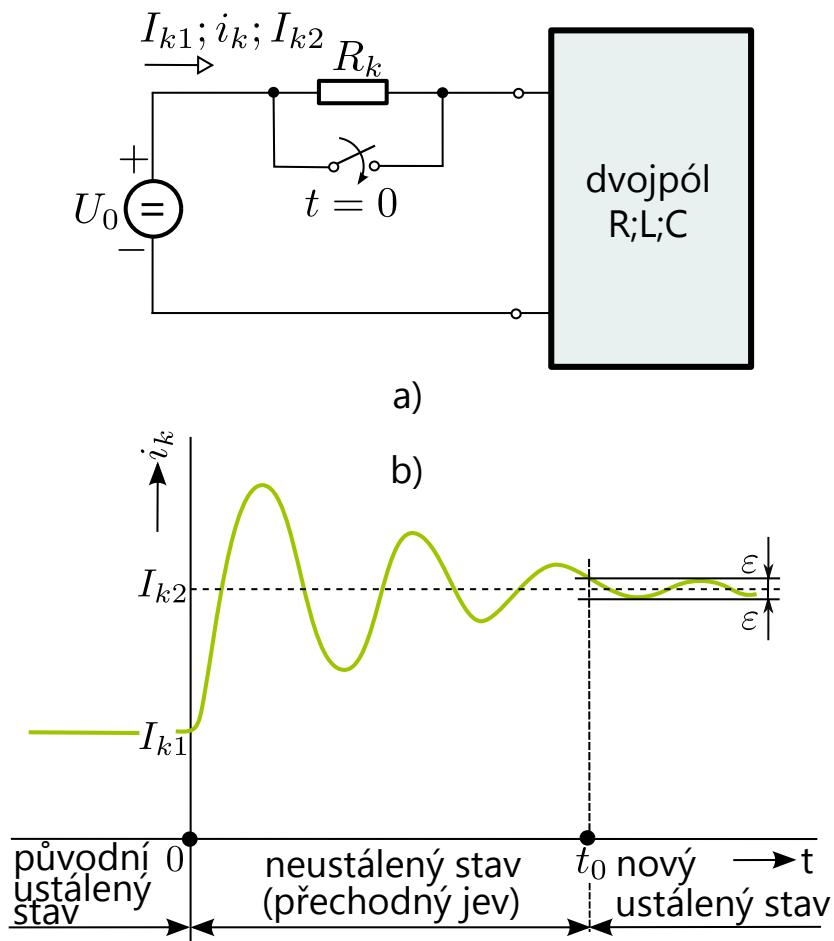
Naskytá se otázka, proč odezvy obvodu obecně nepřecházejí z původního do nového ustáleného stavu skokem a proč dochází k neustálenému stavu obvodu. Obvod má elektromagnetickou energii $W(t)$, která je součtem energií elektrického pole kondenzátoru $W_e(t)$ a energií magnetického pole cívek $W_m(t)$. Elektromagnetická energie obvodu

$$W(t) = \sum_k W_{e_k}(t) + \sum_k W_{m_k}(t)$$

je tedy funkcí napětí na jeho kondenzátorech a proudů v jeho cívkách. Protože tyto veličiny určují energetický stav obvodu, nazýváme je **stavovými veličinami**.

Elektrické výkony P v reálném elektrickém obvodu mají z fyzikálních důvodů vždy konečnou hodnotu. U obvodů, které jsou dostatečně adekvátními modely respektujícími tuto skutečnost (nazýváme je obvody s konečnými výkony) je to postačující podmínkou pro to, aby jejich energie $W = W(t)$ byla spojitou funkcí času (neboť $P = \frac{dW}{dt}$). Z uvedených vztahů pro energii obvodu $W(t)$ je patrné, že $W = W(t)$ bude spojitou funkcí, jsou-li stavové veličiny *spojitými funkcemi*. To znamená, že hodnota stavových veličin v okamžiku před vznikem přechodného jevu je táz jako v okamžiku po jeho vzniku. Pro přechodný jev v okamžiku $t = 0$ platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0_-} u_c(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} u_c(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0_-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} i_L(t) \quad (25.1.1)$$



Obrázek 25.1.1: K objasnění pojmu "neustálený stav" a "přechodný jev"

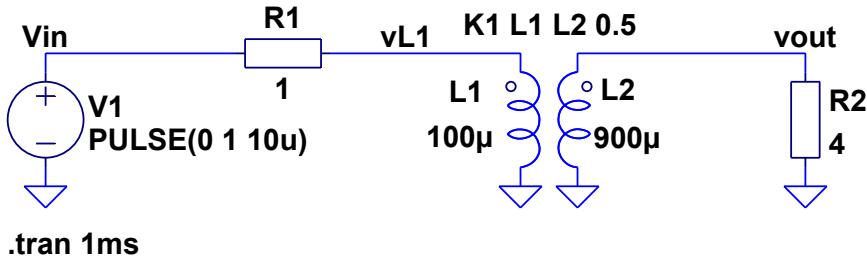
25.1.1 Přechodné jevy v jednodušších obvodech; charakteristické pojmy a vlastnosti

Příklad 25.1.1. Transformátor: Na primární vinutí vzduchového transformátoru s činitelem $k < 1$ je v čase $t = 0$ připojen zdroj napětí $U_1 = \text{konst}$. Formulujte postup pro výpočet odezv $i_1(t)$ a $i_2(t)$ pro obecné parametry zapojení a výsledky ověřte simulací pro následující hodnoty: $U_1 = 1V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, transformátor má převod $1 : 3$.

Klasické řešení: Podle II. Kirchhoffova zákona platí soustava rovnic:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_1 \quad (25.1.2)$$

A transformer with two windings, 1 to 3 turns winding ratio



Obrázek 25.1.2: Transformer.asc: Zapojení vzduchového transformátoru pro simulaci v programu LTSpice

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (25.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + L_1 \lambda & L_{12} \lambda \\ L_{12} \lambda & R_2 + L_2 \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (25.1.4)$$

$$(R_1 + L_1 \lambda) - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (25.1.5)$$

$$R_1 R_2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + L_1 L_2 \lambda - L_{12}^2 \lambda^2 = 0 \quad (25.1.6)$$

$$\lambda^2 (L_1 L_2 - L_{12}^2) + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \lambda + R_1 R_2 = L_1 L_2 \quad (25.1.7)$$

$$\lambda^2 \left(\frac{L_1 L_2 - L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) + \left(\frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2} \right) \lambda + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0 \quad (25.1.8)$$

Zavedeme-li $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$, $k = \frac{L_1^2}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $k^2 = \frac{L_1^2}{L_1 L_2}$, $\sigma = 1 - k^2$ dostaneme

$$\sigma \lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{\tau_2} = 0 \quad (25.1.9)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \lambda + \frac{1}{\sigma \tau_1 \tau_2} = 0 \quad (25.1.10)$$

Je-li $\lambda_1 = -\beta + \alpha$ a $\lambda_2 = -\beta - \alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (25.1.11)$$

$$\beta = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)^2 + \frac{4\sigma}{\tau_1 \tau_2}} \quad (25.1.12)$$

Jelikož $k < 1$; je $0 < \sigma < 1$; rozborem rovnice 25.1.12 plyne, že pak je $\alpha \neq 0$, reálné. Soustava rovnic 25.1.2 má tedy obecné řešení

$$i_1(t) = i_{10} + i_{1p} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{U_0}{R} \quad (25.1.13)$$

$$i_2(t) = i_{20} + i_{2p} = K_3 e^{\lambda_1 t} + K_4 e^{\lambda_2 t} \quad (25.1.14)$$

Integrační konstanty K_1, K_2, K_3 a K_4 určíme z matematických počátečních podmínek: $i_1(0) = i_2(0) = 0$ (což jsou zároveň fyzikální počáteční podmínky) a $\frac{di_1}{dt}|_{t=0}, \frac{di_2}{dt}|_{t=0}$, které určíme z rovnic 25.1.2 pro $t = 0$:

$$L_1 i'_1 + L_{12} i'_2 = U_0 \Rightarrow i'_1 = \left(\frac{U_0 - L_{12} i'_2}{L_1} \right) \quad (25.1.15)$$

$$L_2 i'_2 + L_{12} i'_1 = 0 \quad (25.1.16)$$

Dále postupujeme tak, že do druhé rovnice dosadíme vyjádřenou první derivaci primárního proudu z první rovnice a získáme vztah pro první derivaci sekundárního proudu v čase $t = 0$:

$$\frac{di_1}{dt}|_{t=0} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (25.1.17)$$

$$\frac{di_2}{dt}|_{t=0} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 \quad (25.1.18)$$

Aplikací těchto počátečních podmínek na obecné řešení 25.1.13 plynou vztahy

$$i_1(0) = K_1 + K_2 + \frac{U_0}{R} ; \quad \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \quad (25.1.19)$$

$$i_2(0) = K_3 + K_4 ; \quad -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^2} U_0 = \lambda_1 K_3 + \lambda_2 K_4 \quad (25.1.20)$$

Z první a třetí rovnice vypočítáme $K_1; K_2$, ze druhé a čtvrté rovnice $K_3; K_4$. Dosazením do rovnice 25.1.13 dostaneme po úpravě odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$. Speciálně pro $R_1 = R_2 = R; L_1 = L_2 = L$ je

$$i_1(t) = \frac{U_0}{2R} \left(2 - e^{-\frac{t}{\tau_3}} - e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (25.1.21)$$

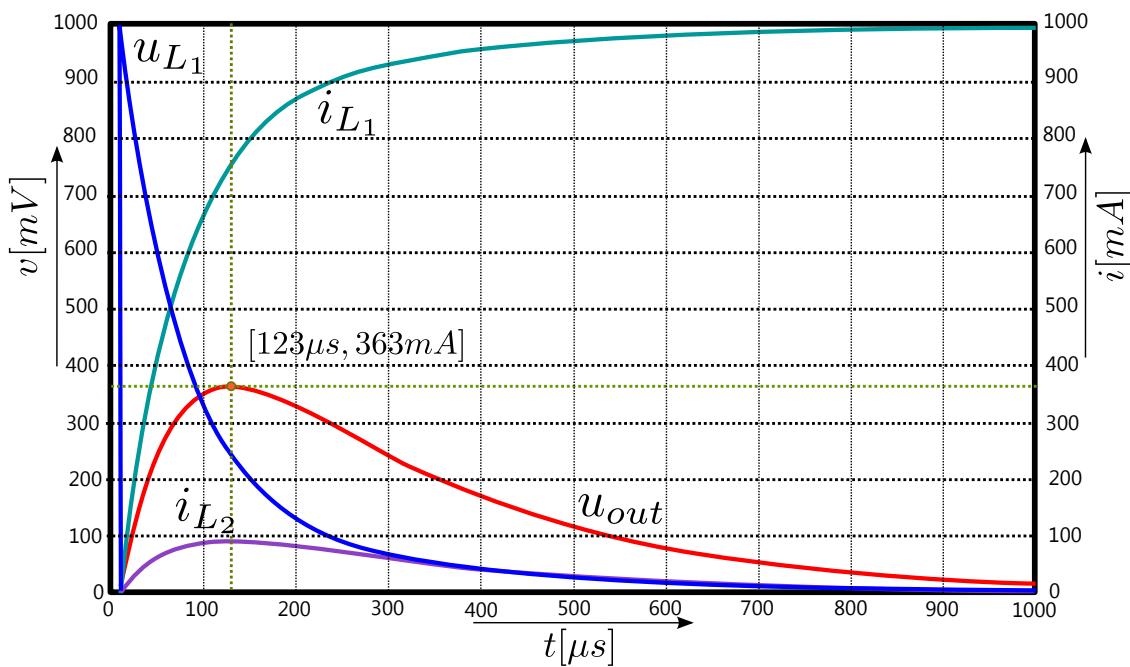
$$i_2(t) = \frac{U_0}{2R} \left(-e^{-\frac{t}{\tau_3}} + e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right) \quad (25.1.22)$$

kde je $\tau_3 = \frac{L+L_{12}}{R}; \tau_4 = \frac{L-L_{12}}{R}$

Operátorové řešení: Laplaceovou transformací rovnice 25.1.2 dostáváme

$$(R_1 + pL_1)I_1(p) + pL_{12}I_2(p) = \frac{U_0}{p} \quad (25.1.23)$$

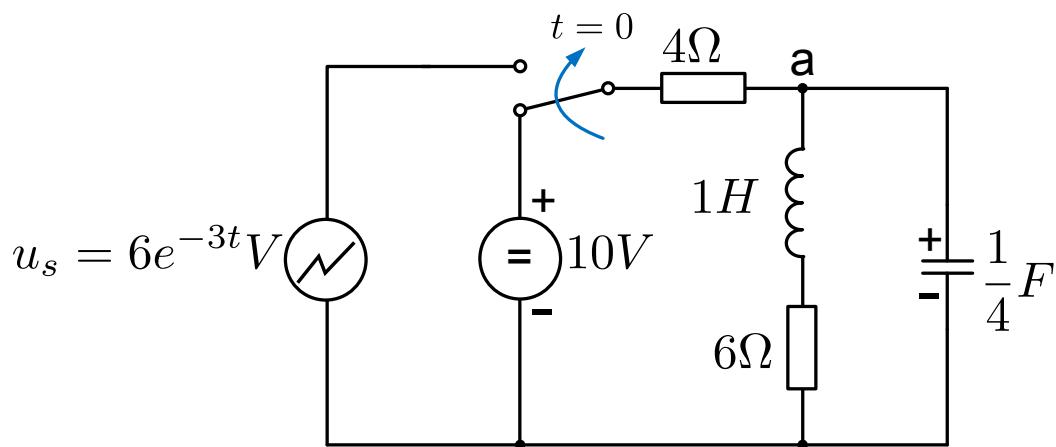
$$pL_{12}I_1(p) + (R_2 + pL_2)I_2(p) = 0 \quad (25.1.24)$$



Obrázek 25.1.3: Odezva na jednotkový skok transformátoru s parametry: $k = 0.5, L_1 = 100\mu H, L_2 = 900\mu H$

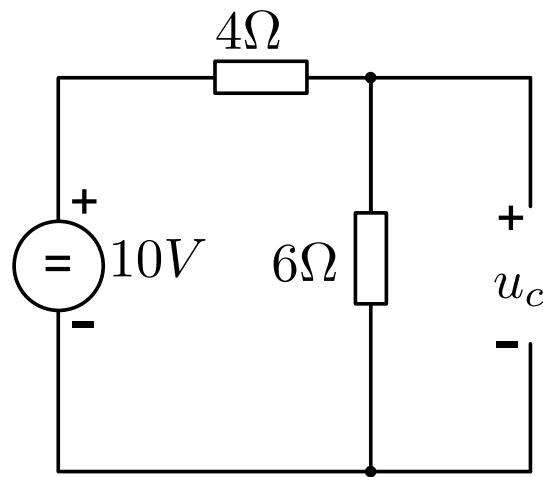
Zavedeme $\sigma; \tau_1; \tau_2$, vypočítáme obrazy proudů a jejich zpětnou transformací dostaneme rovnice pro odezvy $i_1(t)$ a $i_2(t)$.

Příklad 25.1.2. Najděte odezvu napětí na kondenzátoru $u_c(t)$ obvodu na obrázku 25.1.4 pro $t > 0$. (zdroj [Dorf])



Obrázek 25.1.4: Obvod k příkladu 25.1.2

Řešení: Nejdříve stanovíme počáteční podmínky, které vyplývají z ustáleného stavu v době $t = 0^-$. Obvod na obr. 25.1.4 můžeme překreslit do podoby na obr. 25.1.5



Obrázek 25.1.5: Obvod k příkladu 25.1.2

$$u_c(t) = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad [V] \quad (25.1.25)$$

25.2 Přechodný jev kmitavého obvodu

Kmitavým obvodem máme na mysli obvod s jedním stupněm volnosti, složeného z odporu R , kapacity C a indukčnosti L , zapojených v sérii. Je jedním z nejdůležitějších případů elektrotechnické praxe. Dosud probírané případy (obvod RL a RC) jsou vždy určitým zjednodušením úplného obvodu s jedním stupněm volnosti, vzniklé tak, že buď indukčnost obvodu, nebo kapacita jsou zanedbatelné vzhledem k ostatním prvkům. Rozbor přechodného stavu kmitavého obvodu (dále stručně obvodu RLC) umožňuje stanovit směrnice pro možnost tohoto zjednodušení a jeho důsledky.

Zopakujme, že přechodný stav, je vždy dán superpozicí nového ustáleného stavu a vlastní přechodné složky, jejíž průběh závisí jen na vlastnostech obvodu a počátečních podmínkách (a nikoliv na průběhu vstupního signálu), proto nejdříve budeme řešit tzv. *volný stav obvodu*, tj. stav, kdy vnější působení na vstupu je nulové. Za těchto okolností může v obvodu existovat přechodný jev, je-li v obvodu (tj. v akumulačních prvcích) na počátku nahromaděná určitá energie. Vzhledem k tomu, že to může být jednak energie elektrického pole v kondenzátoru, jednak energie magnetického pole v cívce, je počáteční stav úplně určen, známe-li hodnoty napětí na kapacitě a proudu v indukčnosti v počátečním okamžiku; matematicky vyjádřeno, stanovíme počáteční podmínky vždy ve tvaru

$$u_C(0) = U_{C_0} \quad i(0) = I_0. \quad (25.2.1)$$

Protože za volného stavu jsou vstupní svorky spojeny *nakrátko*, je rovnice pro proud v obvodu

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (25.2.2)$$

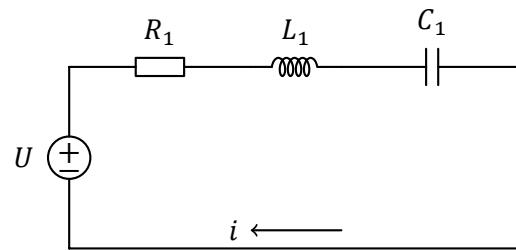
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + U_{C_0} = 0 \quad (25.2.3)$$

Řešení provedem pomocí Laplaceovy transformace. K přihlédnutí k počátečním podmínkám dostaneme rovnici

$$I(p)(R + Lp + \frac{1}{pC}) = I_0L - \frac{U_{C_0}}{p}, \quad (25.2.4)$$

a z ní

$$I(p) = \frac{pCLI_0 - CU_{C_0}}{p^2LC + pRC + 1}. \quad (25.2.5)$$



Obrázek 25.2.1: Schéma sériového kmitavého obvodu

Obsah

26.1 Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty	232
26.2 Obvody s nastaviteľnými parametry	234

V této kapitole se seznámíme se *symbolicko-komplexní metodou* (SKM), jež má základní důležitost pro teorii obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Potom prozkoumáme vlastnosti jednodušších obvodů v tomto stavu a metody jejich analýzy. Posléze pojednáme o elektrickém výkonu v obvodech a o nejdůležitějších otázkách přenosu energie [Mayer1975].

26.1 Periodické veličiny a jejich charakteristické hodnoty

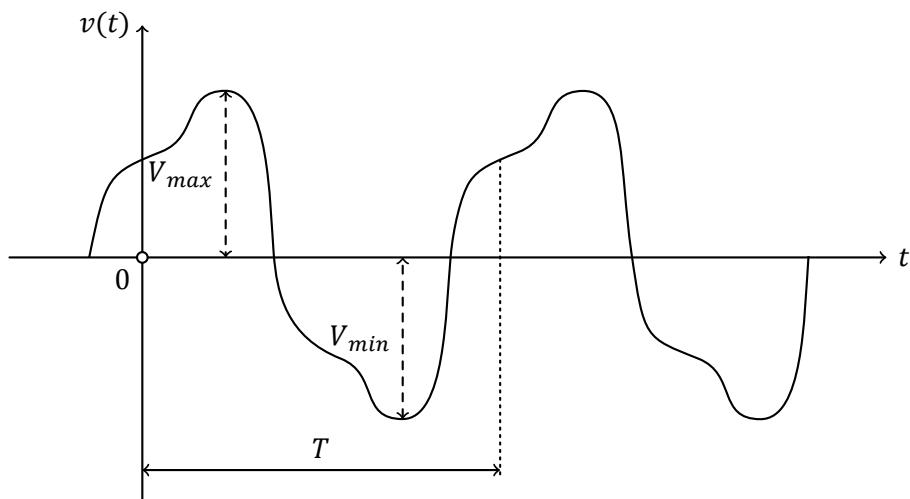
Periodickou veličinou nazýváme takovou veličinu v , jejíž závislost na čase lze vyjádřit periodickou funkcí, pro níž existuje konstanta $T > 0$ taková, že pro každé t platí vztah

$$v(t + T) = v(t), \quad (26.1.1)$$

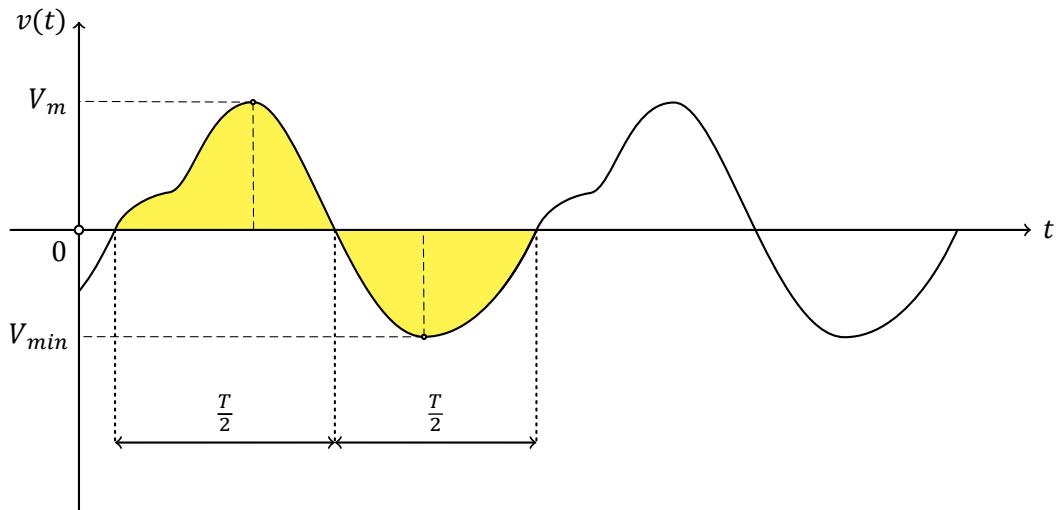
Konstanta T se nazývá **perioda** resp. *doba kmitu*. V aplikacích se zpravidla používá nejmenší kladná perioda, tzv. *základní perioda*; pro stručnost budeme hovořit pouze o periodě. Je-li dána periodická veličina na jakémkoliv intervalu $(t_0, t_0 + T)$, je tím zřejmě definována pro všechna $t > t_0$. Průběh veličiny v na jakémkoliv intervalu délky T se nazývá **cyklem**. Počet cyklů za jednotku času (za sekundu) udává **kmitočet frekvenci** periodické veličiny

$$f = \frac{1}{T}, \quad (26.1.2)$$

V elektrotechnice rozdělujeme periodické veličiny do dvou skupin:

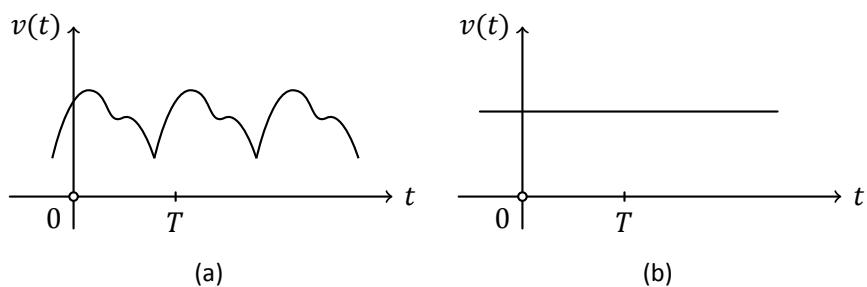


Obrázek 26.1.1: Příklad periodické veličiny $v = v(t)$ pro kterou platí $v(t + T) = v(t)$



Obrázek 26.1.2: Časový průběh **střídavé veličiny** $v = v(t)$, pro kterou platí, že obsahy ploch v jednom cyklu nad osou t a pod osou t jsou totožné

- Veličiny v , jež během svého cyklu změní znaménko (obr.26.1.1) nazýváme **kmitavé**. Speciálním případem kmitavých veličin jsou **střídavé veličiny**, jež mají tu vlastnost, že po dobu $T/2$ jsou trvale kladné, po dobu $T/2$ naopak záporné a obsahy ploch omezených grafem funkce $v = v(t)$ v jednom cyklu nad osou t a pod osou t jsou *totožné* (obr. 26.1.2).
- Veličiny v , jež nemění své znaménko, tj. jsou trvale kladné nebo trvale záporné (obr.26.1.3) nazýváme **pulsující**. Speciálním případem jsou **stejnosměrné veličiny**, které nemění svou hodnotu, tj. $v = \text{konst}$ (obr.26.1.3 (b)).



Obrázek 26.1.3: Časový průběh pulsující periodické veličiny a konstantní veličiny

Praktický význam mají zejména tyto hodnoty periodických veličin:

- *Maximální hodnota* V_m periodické veličiny v , tj. největší hodnota, které tato veličina dosahuje $v_m = \max v(t)$

- *Minimální hodnota* V_{min} periodické veličiny v , tj. nejmenší hodnota, které tato veličina dosahuje $v_m = \min v(t)$

Maximální a minimální hodnoty střídavé veličiny se nazývají též *vrcholovými hodnotami* (kladnými nebo zápornými), obr. 26.1.1 a 26.1.2.

26.2 Obvody s nastavitelnými parametry

V praxi se setkáváme s obvody, u nichž lze (spojitě nebo stupňovitě) nastavit odpor odporníku, kapacitu kondenzátoru, vlastní nebo vzájemnou indukčnost cívek, amplitudu, fázi nebo kmitočet zdroje (napětí nebo proud). Nazveme je *obvody s nastavitelnými parametry*.

Část XI

Elektronické součástky

Obsah

27.1 Základní pojmy z magnetismu	238
27.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou	241
27.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení	242
27.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru	245
27.4.1 Situace při sekundárním vinutí naprázdno	245
27.4.2 Situace při zatížení sekundárního vinutí	246
27.5 Ztráty v reálném transformátoru	250
27.5.1 Joulový ztráty ve vinutí	250
27.5.2 Hysterezní ztráty v jádře	251
27.5.3 Ztráty výřivými proudy v jádře	252
27.6 Rozptyl transformátoru	252
27.7 Cívky s feromagnetickým jádrem	254
27.7.1 Fyzikální rozbor a příprava pro návrh	254
27.7.2 Důsledky a význam použití vzduchové mezery	254
27.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů	255

Následující kapitoly pojednávají o transformátorech a cívkách z hlediska souvislostí mezi napětím, kmitočtem, sycením, přenášeným výkonem, rozměry a ztrátami. Získané poznatky pak umožní návrh různých typů transformátorů a cívek pracujících v odlišných režimech.

27.1 Základní pojmy z magnetismu

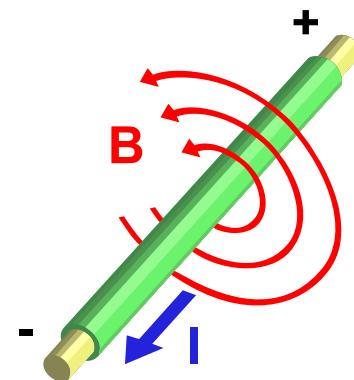
Základní veličinou pro popis magnetických polí a jejich účinků je *vektor magnetické indukce - \mathbf{B}* . Dle soustavy SI je jednotkou magnetické indukce *tesla [T]* a projevuje se silovými účinky na vodiče protékané proudy a indukováním napětí při jeho změně. Je proto dobře měřitelný. První rovnice (Ampérův zákon) ze souboru Maxwellových rovnic určuje rovnost oběhového integrálu magnetické indukce po uzavřené křivce proudům protékaných vodiči, jež jsou touto křivkou uzavřeny.

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (27.1.1)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m je magnetická konstanta - **permeabilita vakua**. Elektrické proudy jsou stále obklopeny magnetickými poli. Tato pole se dají zesílit cívkou s magnetickým jádrem. Na tomto jevu je založen jeden z elementárních principů elektrotechniky.

Protože je tento zákon stěžejní k pochopení ostatních principů, je vhodné si také uvědomit vztah jednotky magnetické indukce k základním jednotkám soustavy SI:

$$1T = 1 \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1 \frac{kg}{C \cdot s} = 1 \frac{kg}{A \cdot s^2} = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$



Obrázek 27.1.1: Elektrický proud ve vodiči způsobuje vznik magnetické pole v jeho okolí.

Spřažený magnetický tok

Principiálně není transformátor nic jiného než soustava vzájemně magneticky vázaných cívek. Pro jednoduchost je v dalším popisu uvažován transformátor s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím, přičemž všechny závěry bude možné později rozšířit i na složitější systémy. Při odvozování matematického modelu transformátoru vyjdeme

z Faradayova zákona elektromagnetické indukce (druhá Maxwellova rovnice), který říká, že časová změna magnetického pole vytvoří vírové pole elektrické:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (27.1.2)$$

Vztah platí, uvažujeme-li nulovou velikost posuvného proudu tj. polarizačního a Maxwellova proudu. Tvoří-li smyčku l tenký vodič, indukuje se v něm napětí:

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (27.1.3)$$

V rov. 27.1.3 je úmyslně vynecháno záporné znaménko na pravé straně rovnice. To platí, je-li na vodič (cívku) pohlíženo jako na spotřebič napájený ze zdroje napětí (což odpovídá funkci primárního vinutí transformátoru). Takováto cívka vytvoří časově proměnné magnetické pole:

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int u(t) dt \quad (27.1.4)$$

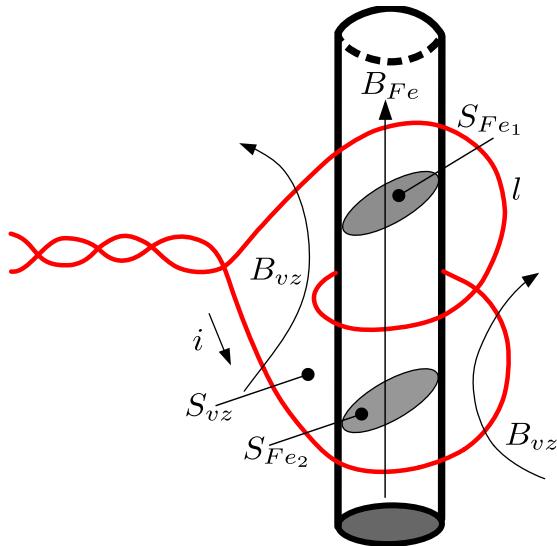
Konstanta Ψ_0 představuje Newtonovou počáteční integrační konstantu, funkce $\Psi(t)$ tzv. **spřažený magnetický tok s cívkou**. Je vidět, že *velikost spřaženého magnetického toku je úměrná pouze velikosti integrálu napětí na cívce, nemusí již být přímo úměrná proudu cívkou* (to platí jen ve speciálním případě lineárních magnetických obvodů). Tento poznatek je velice důležitý, magnetický tok bude stejný jak pro vzduchové cívky, tak pro cívky s feromagnetickým jádrem (rozdíl bude spočívat pouze v průběhu a velikosti proudu cívky). Sycení jádra transformátoru napájeného ze zdroje napětí je závislé pouze na průběhu tohoto napětí. Pro spřažený magnetický tok cívky dále platí:

$$\Psi(t) = \oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \quad (27.1.5)$$

kde S je orientovaná ohraničená plocha, jejíž hranice je tvořena křivkou l , viz probíhající osou vodiče po celé jeho délce. Tento vztah platí zcela obecně pro jakákoli prostředí, v nichž se magnetické pole nachází a pro libovolné tvary plochy S . Při návrhu transformátoru obvykle známe průběh spřaženého magnetického toku. Je vidět, že některé indukční čáry B_{vz} neprocházejí materiélem jádra, jedná se o tzv. **rozptyl**. Přesný průběh spřaženého magnetického toku bychom získali aplikací rov. 27.1.5, který bychom pro tento konkrétní případ mohli upravit do podoby

$$\Psi(t) = \int \mathbf{B}_{vz}(t) \cdot d\mathbf{S}_{vz} + \sum_{i=1}^N \int \mathbf{B}_{Fe}(t) \cdot d\mathbf{S}_{Fe_i} \quad (27.1.6)$$

Protože vyčíslení tohoto vztahu je velice obtížné, zavedeme určité zjednodušující podmínky:



Obrázek 27.1.2: Část magnetického obvodu se dvěma závity primárního vinutí.

- zanedbáme rozptyl $B_{Fe} \gg B_{vz}$,
- magnetická indukce B_{Fe} je ve feromagnetiku rozložena homogenně a siločáry jsou kolmé k průřezu jádra.

Pak pro spřažený magnetický tok můžeme psát

$$\Psi(t) = N \cdot B_{Fe}(t) \cdot S_{Fe} = N \cdot \Phi(t) \quad (27.1.7)$$

Rov. 27.1.7 by platila přesně, pokud by všechny indukční čáry \mathbf{B} protnuly plochu S_{Fe} N-krát. Ve skutečnosti ale všechny siločáry neprochází všemi závity a vztah platí jen přibližně. Chyba je malá u feromagnetických obvodů (transformátory, cívky s feromagnetickým jádrem), kde je magnetická vodivost materiálu mnohonásobně větší, než magnetická vodivost vzduchu (řádově 1000x) a rozptyl je tudíž zanedbatelný. Velká je tato chyba například u vzduchových cívek, kde je rov. 27.1.7 nepoužitelná.

27.2 Souvislost indukovaného napětí a proudu cívkou

Bylo již řečeno, že časový průběh spřaženého magnetického toku je úměrný integrálu napětí na cívce, nemusí však již být přímo úměrný proudu cívky. Indukované napětí je jednoznačně určeno rov. 27.1.3. Spřažený magnetický tok je obecnou funkcí proudu cívky, přičemž proud je funkci času:

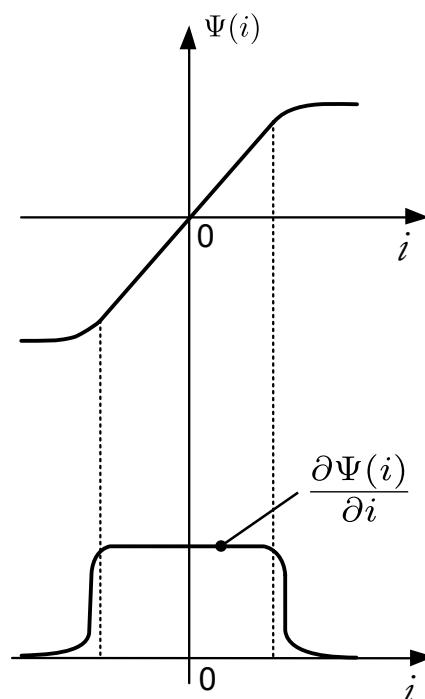
$$\Psi(t) = f[i(t)] \quad (27.2.1)$$

Dosadíme-li rov. 27.2.1 do rov. 27.1.3 a použijeme-li větu o derivaci složené funkce¹, obdržíme pro napětí na cívce:

$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{\Psi(i)}{di} \frac{di}{dt} = L_d \cdot \frac{di}{dt} \quad (27.2.2)$$

kde
 $L_d = \frac{d\Psi(i)}{di}$ má význam **diferenciální indukčnosti**. Ta může být ve speciálních případech konstantní, ale ve většině reálných aplikací je funkcí proudu cívky. Jako příklad uvedeme transformátor s feromagnetickým jádrem. Zde je závislost spřaženého magnetického toku na proudu silně nelineárně závislá, obr. 27.2.1. Potom mluvíme o nelineárních magnetických obvodech.

Na obr. 27.2.1 je zobrazena **statická magnetizační charakteristika** a její derivace, představující průběh diferenciální indukčnosti vinutí v závislosti na proudu. Vidíme, že pro malé proudy je indukčnost největší s rostoucím proudem prudce klesá, nastane-li tzv. přesycení magnetického obvodu transformátoru. Tomuto režimu se snažíme správným návrhem transformátoru vyhnout. Velmi často se v technické praxi zavádí zjednodušení, při kterém se reálný magnetický



Obrázek 27.2.1: Statická magnetizační charakteristika transformátoru s feromagnetickým jádrem a závislost diferenciální indukčnosti na proudu.

¹Je-li $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, potom derivace y podle proměnné x je rovna derivaci y podle proměnné u , násobené derivací u podle proměnné x

obvod linearizuje - diferenciální indukčnost je považována za konstantní (nezávislá na proudu cívky). Mluvíme pak o lineárních magnetických obvodech. Toto zjednodušení je použitelné pouze tehdy, pokud reálný magnetický obvod (transformátor) provozujeme v určitých mezích magnetizačního proudu, kdy se skutečná indukčnost příliš nemění. Nelineární magnetizační charakteristika na obr. 27.2.1 se linearizuje do podoby na obr. 27.2.2.

Závislost spřaženého magnetického toku na proudu cívky je tedy lineární ($L = \text{konst}$) viz obr. 27.2.2:

$$\Psi(t) = f[i(t)] = L \cdot i(t) \quad (27.2.3)$$

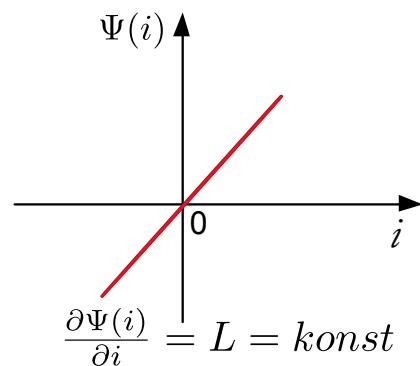
Dosazením spřaženého magnetického toku do Faradayova zákona elektromagnetické indukce - rov. 27.1.3

$$u(t) = \frac{d}{dt} f[i(t)] = \frac{d}{dt} [L \cdot i] = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (27.2.4)$$

Ve zvláštním případě stejnosměrných veličin, kdy proud má lineární charakter, přejde vztah 27.2.3 do tvaru, který představuje tzv. **statickou definici indukčnosti**.

$$\Psi(t) = L \cdot I \quad (27.2.5)$$

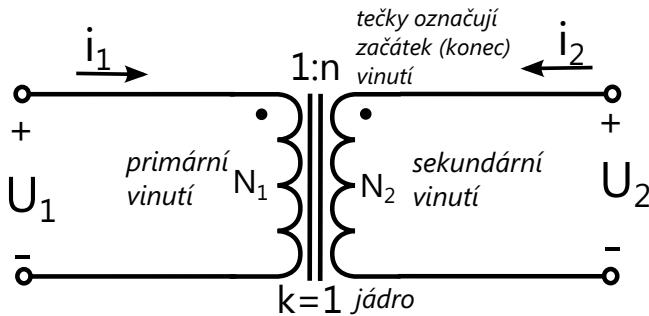
Je ale třeba zdůraznit, že rov. 27.2.3, rov. 27.2.4 a rov. 27.2.5 platí pouze pro lineární magnetické obvody. Jestliže jsou použity při matematickém popisu transformátorů nebo cívek s feromagnetickým jádrem, je třeba mít na paměti, že tento linearizovaný model lze použít jen v určitém omezeném rozsahu daným skutečnou magnetizační charakteristikou. Nicméně, lineární model transformátoru je pro svou jednoduchost často používán.



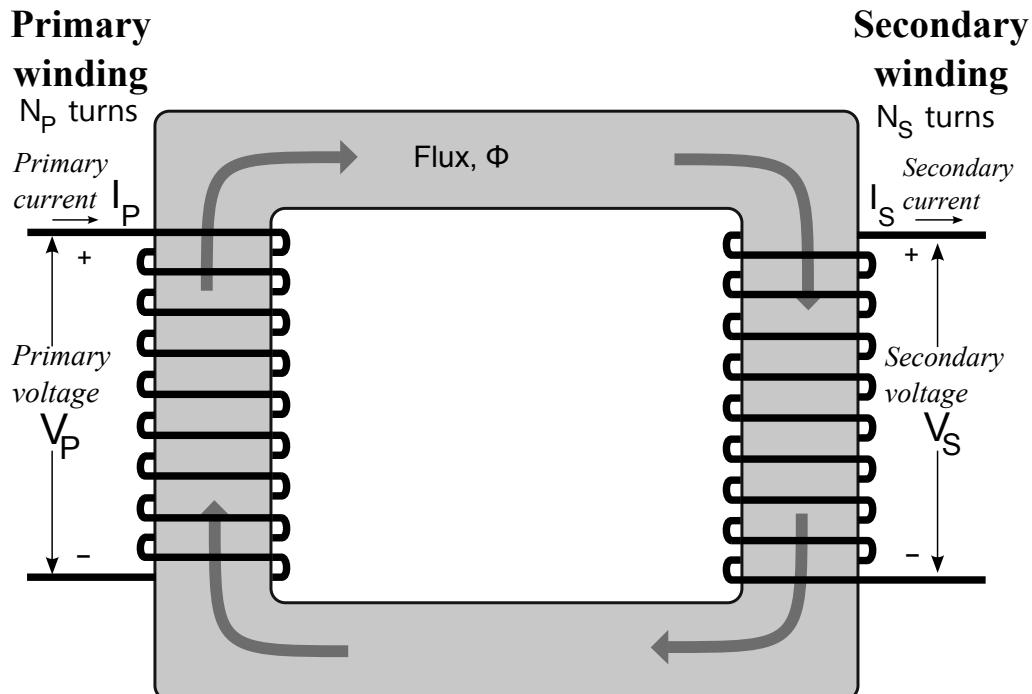
Obrázek 27.2.2: Linearizovaná magnetizační charakteristika. Směrnice této přímky je právě rovna L

27.3 Princip činnosti, základní konstrukční provedení

Definice 27.3.1. *Transformátor je elektrický netočivý stroj, který umožňuje přenášet elektrickou energii z jednoho obvodu do jiného pomocí vzájemné elektromagnetické indukce. To znamená, že mění její parametry (napětí, proudy), přitom forma energie na vstupu i výstupu zůstává elektrická.*



(a) Schématická značka transformátoru s jádrem



(b) Principiální provedení transformátoru se dvěma vinutími

Obrázek 27.3.1: Ideální transformátor s jádrem, s jedním primárním a jedním sekundárním vinutím. Tečky označují začátky (resp. konec) vinutí. Význam má jejich poloha tečky vůči druhé. Budeme-li je chápat jako začátky vinutí, měl by se drát primáru a sekundáru vinout tak, jak je naznačeno na obrázku

Transformátory jsou nezbytnou součástí řady elektrotechnických zařízení, počínaje vazebními a napájecími transformátorky sdělovacích a polovodičových zařízení až k transformátorům blokovým a přenosovým, užívaným v energetice. Jejich výkony se pohybují od zlomků VA do stovek MVA. Podobně je tomu s jejich napětími od malých

až po vvn. Zásadně transformátory mohou být jedno nebo vícefázové (obvykle třífázové)

Princip transformátoru je založen na **zákonu elektromagnetické indukce** - tedy magnetický tok vybuzený jedním vinutím indukuje napětí ve vinutí druhém (primár, sekundár). Obrázek 27.1(b) ukazuje, že magnetický tok je z jednoho vinutí do druhého veden prostřednictvím magnetického obvodu. Fyzikální princip vychází z **2. Maxwellovy rovnice 27.1.2.**

Převod transformátoru

$$n = \frac{N_1}{N_2}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (27.3.1)$$

27.4 Zjednodušený rozbor funkce transformátoru

Uvažujme pro začátek transformátor s dokonale těsnou vazbou, tedy s činitelem vazby $k = 1$, s nulovým rozptylovým magnetickým tokem a s konečnou velikostí indukčnosti L_1 a L_2 primárního a sekundárního vinutí

27.4.1 Situace při sekundárním vinutí naprázdno

Podle indukčního zákona platí pro primární a sekundární napětí

$$u_1(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (27.4.1a)$$

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_\mu}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad (27.4.1b)$$

kde $\Phi_\mu(t)$ je magnetický tok v jádře. Porovnáním rov. 27.4.1a a rov. 27.4.1b dostaneme následující rovnici:

$$u_2(t) = u_1(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (27.4.2)$$

Je zřejmé, že $u_1(t)$ a $u_2(t)$ mohou mít sice různou velikost, ale mají zcela stejný časový průběh. Z rov.

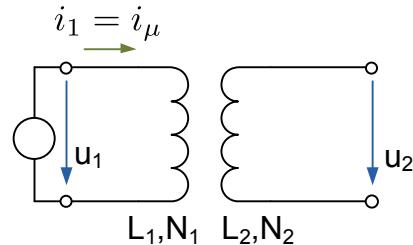
27.4.1a plyne, že magnetický tok je jednoznačně určen časovým integrálem z přiloženého primárního napětí:

$$\Phi_\mu(t) = \frac{\int u_1(t) dt}{N_1} + \Phi_{\mu_{poc}} \quad (27.4.3)$$

Primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu, tj. nesmí mít stejnosměrnou složku, jinak by magnetický tok rostl nade všechny meze (v praxi do přesycení). Velikost integrační konstanty $\Phi_{\mu_{poc}}$ závisí na konkrétním režimu transformátoru. Z rovnice také plyne užitečný vztah:

$$\Delta\Phi_\mu(t) = \frac{\max |\int u_1(t) dt|}{N_1} \quad (27.4.4)$$

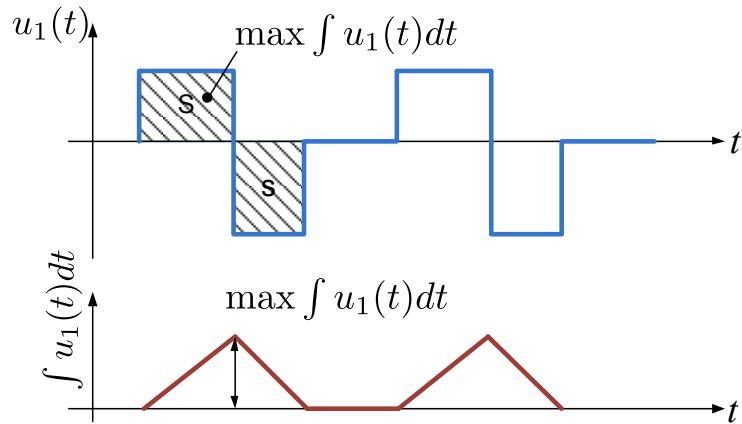
Je-li $u_1(t)$ periodická funkce s nulovou střední hodnotou, pak neurčitý integrál z $u_1(t)$ je rovněž periodická funkce, jejíž střední hodnota již ovšem nulová být nemusí (viz obr. 27.4.2). Φ_μ je rozkmit magnetického toku v jádře transformátoru. Z rovnice 27.4.3 je patrné, že bez bližší znalosti režimu transformátoru sice nelze přesně stanovit meze, v nichž se magnetický tok periodicky pohybuje, ale dle rov. 27.4.4 umíme přesně stanovit



Obrázek 27.4.1: Transformátor naprázdno.

rozkmit toku čili vzdálenost mezi. Pro předpokládané homogenní rozložení pole ve feromagnetickém jádře lze určit rozkmit magnetické indukce:

$$\Delta B_\mu(t) = \frac{\Delta\Phi_\mu(t)}{S} = \frac{\max |\int u_1(t)dt|}{N_1 S} \quad (27.4.5)$$



Obrázek 27.4.2: Znázornění časového integrálu primárního napětí transformátoru.

pro lineární magnetické obvody vztah mezi tokem a magnetizačním proudem:

$$N_1 \Phi_\mu(t) = L_1 i_\mu(t) \quad (27.4.6)$$

Proud $i_\mu(t)$ je primární proud při sekundárním vinutí naprázdno, tzv. **magnetizační proud**. Je tedy přímo úměrný magnetickému toku $\Phi_\mu(t)$.

$$i_\mu(t) = \frac{N_1 \Phi_\mu(t)}{L_1} \quad (27.4.7)$$

Dosadíme-li za $\Phi_\mu(t)$ rov. 27.4.3 uvedené na stránce 245, dostaneme známý vztah mezi proudem a napětím cívky, vyjádřený v integrálním tvaru:

$$i_\mu(t) = i_{\mu_{poc}} + \frac{1}{L_1} \int u_1(t) dt \quad (27.4.8)$$

Opět vidíme, že primární napětí musí mít nulovou střední hodnotu.

27.4.2 Situace při zatížení sekundárního vinutí

Rovnice 27.4.2 až rov. 27.4.8 zůstávají v platnosti. Připojíme-li k sekundárnímu vinutí zátěž, začne téci sekundární proud $i_2(t)$. Např. pro odporovou zátěž bude platit

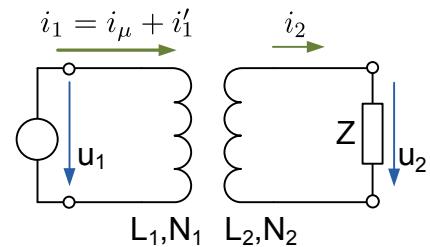
$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (27.4.9)$$

Se sekundárním proudem je svázán magnetický tok $\Phi_2(t)$

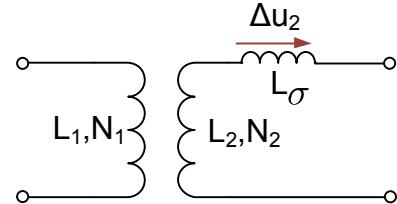
$$\Phi_2(t) = \frac{L_2 i_2(t)}{N_2} \quad (27.4.10)$$

Proud $i_2(t)$, tedy i tok $\Phi_2(t)$, mohou mít bohužel stejnosměrnou složku (zátěží může být např. jednocestný usměrňovač). Stejnosměrnou složku proudu však transformátor obecně neumí přetransformovat na primární stranu a pak dochází ke stejnosměrné předmagnetizaci jádra (sekundární proud stejnosměrnou složku obsahuje, primární proud nikoli). Jedná se o škodlivý jev, který může způsobit, zvláště při větších proudech i přesycení magnetického obvodu. Jev nastává např. při napájení transformátoru ze sítě. Síť se totiž jeví v průběhu celé pracovní periody jako napěťový zdroj s malou vnitřní impedancí. Za zvláštních okolností transformátor stejnosměrnou složku transformovat umí, např. v jednočinném propustném měniči. Zde je transformátor po určitou část periody od primárního zdroje odpojen, v té chvíli se vnitřní impedance primárního zdroje jeví jako nekonečně velká. Oba typy napájení je nutno rozlišovat.

Dále proto uvažujeme pouze takové typy zátěží, které stejnosměrnou složku nevytvářejí (např. zátěž typu dvoucestný můstkový usměrňovač již tuto nečistotu nemá). Pak při uvažování dokonalé vazby, tj. při činiteli vazby $k = 1$, je v celém magnetickém obvodu sekundární tok $\Phi_2(t)$ plně vykompenzován primárním tokem $\Phi_1(t)$ stejně velikosti, ale opačného znaménka. Tok $\Phi_1(t)$ je svázán s "přidavným" primárním proudem, tedy proudem přetransformovaným ze sekundáru na primár - nazvaný jako $i'_1(t)$. Proud vzniká v primárním vinutí v důsledku Lenzova pravidla. Je zodpovědný za čerpání energie z primárního napájecího zdroje a jeho existence je současně v souladu se zákonem zachování energie



Obrázek 27.4.3: Transformátor zatížený.



Obrázek 27.4.4: Zjednodušená představa rozptylu reálného transformátoru.

$$\Phi_1(t) = \frac{L_1 i'_1}{N_1} = \Phi_2(t) \quad (27.4.11)$$

Srovnáním rov. 27.4.10 a rov. 27.4.11 obdržíme známý vztah pro transformaci proudů:

$$i'_1(t) = i_2(t) \frac{L_2 N_1}{N_2 L_1} = i_2(t) \frac{N_2^2 N_1}{N_2 N_1^2} = i_2(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (27.4.12)$$

Celkový primární proud $i_1(t)$ tedy při zatížení transformátoru sestává ze dvou zcela nezávislých složek. Jednou složkou je magnetizační proud $i_\mu(t)$, který tekl už i ve stavu naprázdno (a nyní při zatížení se nezměnil) a druhou je výše zmiňovaný přetransformovaný proud $i'_1(t)$:

$$i_1(t) = i'_1(t) + i_\mu(t) \quad (27.4.13)$$

Z dosud uvedených skutečnosti plyne důležitý závěr: tok v jádře zůstává nezměněn i při zatížení, je tedy stále roven původnímu toku $\Phi_\mu(t)$, protože tok $\Phi_1(t)$ od proudu $i'_1(t)$ a tok $\Phi_2(t)$ od proudu $i_2(t)$ se plně kompenzují. *Sycení jádra u bezrozptylového transformátoru tedy vůbec nezávisí na velikosti zatěžovacího proudu, tedy ani na velikosti přenášeného výkonu!*

Reálné transformátory mají vždy určitý *rozptylový tok*. Ten je svázán s tzv. rozptylovými indukčnostmi (primární a sekundární): Takový transformátor si můžeme představit jako transformátor bezrozptylový s připojenými indukčnostmi $L_{\sigma 1}$ do série s primárním vinutím a $L_{\sigma 2}$ do série se sekundárním vinutím. Z hlediska vnějšího chování transformátoru lze uvažovat i jedinou rozptylovou indukčnost L_σ , přepočtenou jen na sekundární stranu (viz obr. 27.4.4).

Tento tok je samozřejmě svázán s úbytkem sekundárního napětí $\Delta u_2(t)$ na L_σ . Čili *rozptylová indukčnost způsobuje nenulovou výstupní reaktanci transformátoru*, Transformátor je pak "měkký", zatěžovací proud způsobí úbytek napětí:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_\sigma(t)}{dt} \quad (27.4.14)$$

Skutečný transformátor má navíc nenulové odpory vodičů, na kterých vznikají podle Ohmova zákona další úbytky napětí a navíc Joulový ztráty.

Vraťme se nyní znovu k transformátoru bezrozptylovému, s dokonalou vazbou, a předpokládejme, že jeho vinutí mají navíc nulový odpor (supravodič). Pak na nich nevzniká průchodem proudu žádný ztrátový výkon a proudy $i_2(t)$ a $i'_1(t)$ lze libovolně zvyšovat. Jejich magnetické účinky se dokonale zruší, nemají tedy vliv na velikost sycení v jádře a transformátorem lze přenášet "libovolně" velký výkon (ve skutečnosti však omezený tzv. kritickou proudovou hustotou supravodiče, při níž zaniká supravodivý jev - pro niob asi 50 A/mm²).

U měděného (hliníkového) vinutí je nutno volit průřez vodičů úměrný proudu, aby nebyla překročena dovolená proudová hustota s ohledem na přehřátí vodičů vlivem

Joulova tepla. Rovnice 27.4.5 navíc napovídá, že musíme volit určitý počet primárních závitů N_1 , abychom nepřekročili maximální sycení jádra. N_1 je tím větší, čím je větší maximum - amplituda časového integrálu primárního napětí a čím menší průřez má jádro. Má-li se pak vinutí vtěsnat do okénka jádra, nelze zvyšovat průřez vodiče a tím i proudovou zatížitelnost libovolně. Díky tomu lze s daným průřezem magnetického obvodu S a průřezem okénka S_0 realizovat transformátor schopný přenést jen určitý omezený výkon.

Je tedy zřejmé, že maximální výkon bude přímo úměrný ploše okénka S_0 , protože čím je S_0 větší, tím tlustší vodiče můžeme použít a tím větší proudy (výkon) je možno transformovat. Kromě toho je maximální výkon přímo úměrný i průřezu magnetického obvodu S , protože čím je S větší, tím méně závitů N_1 potřebujeme pro dané sycení, viz rov. 27.4.5, a proto mohou být opět tlustší vodiče. Čili lze napsat:

$$P_{max} \approx S \cdot S_0 \quad (27.4.15)$$

Zamyslíme-li se nad rov. 27.4.5, lze úměru rov. 27.4.15 ještě doplnit. Maximální hodnota sycení tj. maximum funkce $B(t)$ je přímo úměrná maximu funkce časového integrálu primárního napětí. Uvažujme, že napětí neobsahuje stejnosměrnou složku, je periodické s kmitočtem f , ale jinak libovolného tvaru, tj. libovolného obsahu vyšších harmonických.

Pak je maximum časového integrálu takového primárního napětí (maximum toku, amplituda toku) zcela jistě konečné a nepřímo úměrné kmitočtu. To znamená, že zvýšíme-li kmitočet n -krát při zachování amplitudy a tvaru napětí, klesne maximum integrálu n -krát a bude moci být dle rov. 27.4.5 také n -krát méně závitů N_1 , aby sycení zůstalo stejné. Pak ve stejném poměru n můžeme zvýšit průřez vodičů, aniž bychom se báli, že se vinutí nevejde do okénka. Lze pak přenášet n -krát větší proud a výkon (napětí se nezměnila, pouze vzrostl kmitočet). Čili maximální výkon je přímo úměrný kmitočtu. Rovnici 27.4.15 lze proto doplnit:

$$P_{max} \approx f \cdot S \cdot S_0 \quad (27.4.16)$$

Pro jádra z plechu EI z křemíkové oceli lze pomocí tohoto vztahu s uvažováním přímé úměry mezi S_0 a S , odvodit vztah

$$P_{max} \approx S^2 \quad [W, cm^2] \quad (27.4.17)$$

Ten předpokládá maximální sycení $1T$, proudovou hustotu asi $2,5A/mm^2$ a kmitočet $50Hz$. A týká se opravdu jen EI jader, protože při jeho odvození byla uvažována konkrétní závislost mezi S_0 a S pro tato jádra.

Ze vztahu rov. 27.4.16 vidíme, že zvyšování pracovního kmitočtu umožňuje přenášet větší výkon při zachování rozměrů jádra. To je základem filosofie všech spínaných zdrojů (měničů) s transformátorem. Kmitočet však nelze u reálného transformátoru zvyšovat nade všechny meze. Omezení představují hysterezní a vířivé ztráty v jádře a dále rozptylová indukčnost.

27.5 Ztráty v reálném transformátoru

27.5.1 Joulový ztráty ve vinutí

Joulový (ohmický) ztráty vznikají na odporu vinutí průchodem proudu. Tato skutečnost nutí zvyšovat průřez vodičů a způsobuje tak nutné zvyšování plochy okénka jádra S_0 a zvětšování celého transformátoru.

Z hlediska těchto ztrát se primární a sekundární vinutí chovají jako lineární odpory R_1 a R_2 . Joulový ztráty jsou proto úměrné kvadrátu efektivní hodnoty procházejícího proudu a jsou dány vztahem:

$$P_R = R_1 I_{1ef}^2 + R_2 I_{2ef}^2 \quad (27.5.1)$$

Efektivní hodnota proudů procházejících vinutími obecně není úměrná přenášenému činnému výkonu a může být v praxi někdy nečekaně vysoká. Např. u síťového transformátoru se sekundárním usměrňovačem a filtračním kondenzátorem bez vyrovnávací nárazové tlumivky. Zde odebíraný sekundární proud $i_2(t)$ a tedy přetransformovaná složka primárního proudu $i'_1(t)$ tvar úzkých nabíjecích impulsů s velkou amplitudou. Jeho celková efektivní hodnota je několikrát větší než efektivní hodnota užitečné 1. harmonické, která se v tomto případě pouze samotná podílí na přenosu činného výkonu. Ten je totiž dán součinem efektivní hodnoty harmonického sekundárního napětí, efektivní hodnoty pouze 1. harmonické sekundárního proudu a $\cos \phi$ oné 1. harmonické proudu!

Pro omezení ohřevu vinutí na přípustnou mez je nutno omezit odpory vinutí. Při návrhu pracujeme s tzv. dovolenou proudovou hustotou J . Teče-li proud rovnoměrně celou plochou průřezu vodiče, platí vztahy:

$$J_1 = \frac{I_{1ef}}{S_1} \quad J_2 = \frac{I_{2ef}}{S_2} \quad (27.5.2)$$

S_1 a S_2 jsou průřezy primárního a sekundárního vinutí.

Doporučená hodnota J se pohybuje v případě měděných vodičů v rozmezí 1,5 až $7A/mm^2$. Pro větší transformátory s velkým objemem vinutí je třeba volit vždy hustotu menší. Při konstantní proudové hustotě totiž celkový Joulový ztrátový výkon roste s třetí mocninou lineárních rozměrů cívky, chladící povrch pouze s druhou mocninou. Vinutí těsně pod chladícím povrchem mohou mít větší proudovou hustotu než vinutí vnitřní.

Bez nuceného proudění vzduchu volíme u toroidních transformátorů hustotu J v rozsahu 2 až $5A/mm^2$, podle velikosti a počtu vrstev vinutí. U malých hrnčkových feritových jader lze volit nouzově až $4,5A/mm^2$. U běžně užívaných síťových transformátorů s mnohovrstvými cívками vinutými na kostrách se doporučuje hodnota $1,5A/mm^2$ (pro velké transformátory) až $3,5A/mm^2$ (pro malé transformátorky). Při použití nuceného proudění vzduchu může být hustota J větší.

U transformátorů pracujících na vysokém kmitočtu musíme počítat s uplatněním **skinefektu**, díky němuž proud teče jen ve vrstvě pod povrchem vodiče a střední část tlustého vodiče by tak byla nevyužita.

27.5.2 Hysterezní ztráty v jádře

Hysterezní ztráty souvisejí s energií W potřebnou na přemagnetování jádra. Energie W je úměrná ploše hysterezní smyčky (viz. obr. 3.5). Plocha hysterezní smyčky má fyzikální rozměr J/m^3 , jedná se tedy o objemovou hustotu ztrátové energie. Ta je pak velká pro materiály magneticky tvrdé, se širokou hysterezní smyčkou tj. s velkou *remanencí* B_R a *koercitivní intenzitou* H_C . Takové materiály proto nejsou pro jádra transformátoru vhodná. Naopak požadujeme materiály magneticky měkké, s co nejužší hysterezní smyčkou a s co nejmenší remanentní indukcí.

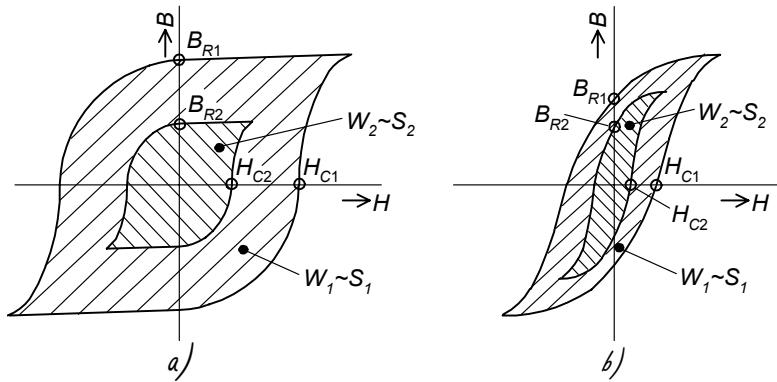
Je zřejmé, že velikost plochy hysterezní smyčky S a tedy i energie W souvisí nejen s vlastnostmi materiálu B_R a H_C , ale i s amplitudou indukce B_m . Přibližně platí, že plocha S je úměrná kvadrátu B_m (viz. obr. 3.5). Hysterezní ztrátový výkon je dán součinem této energie W a pracovního kmitočtu f , v jehož „rytmu“ dochází k přemagnetovávání.

$$P_h = W \cdot f \approx B_m^2 \cdot f^2 \quad (27.5.3)$$

- Budeme-li měnit kmitočet a současně zachovávat sycení, tzn. budeme udržovat konstantní poměr amplitudy $u_1(t)$ a kmitočtu f při proměnném počtu závitů N_1 – viz rozbor vztahu (27.4.5). Pak bude díky konstantnímu sycení B_m i konstantní energie W . Ze vztahu (27.5.3) je pak vidět, že hysterezní ztráty budou přímo úměrné kmitočtu.

$$P_h \approx f \quad (27.5.4)$$

Toto je typický případ transformátoru v pulsních měničích, kdy volíme vysoký kmitočet za účelem snížení N_1 (aby se vinutí mohlo vinout tlustším vodičem) při zachování (nepřekročení) dovoleného sycení.



Obrázek 27.5.1: Hysterezní smyčka feromagnetického materiálu:
a) magneticky tvrdý materiál,
b) magneticky měkký materiál.

- Měníme-li kmitočet a současně zachovávat týž transformátor (totéž N_1 a S) a tutéž amplitudu $u_1(t)$. Pak z rozboru vztahu (27.4.5) vyplývá, že indukce bude nepřímo úměrná kmitočtu. Čili ze vztahu (27.5.3) pak vidíme, že hysterezní ztráty budou *hyperbolicky*, nepřímo úměrně, klesat s rostoucím kmitočtem.

$$P_h \approx \frac{1}{f} \quad (27.5.5)$$

Tento režim transformátoru se nazývá *odbuzovací*, neboť při růstu kmitočtu klesá indukce. V pulsních měničích by ale takový režim neměl žádný význam, protože bychom sice zvýšili kmitočet, ale museli bychom použít stále stejný objemný a těžký transformátor s velkým N_1 , stanoveným pro původní nízký kmitočet.

27.5.3 Ztráty vířivými proudy v jádře

27.6 Rozptyl transformátoru

Vraťme se nyní k zjednodušenému modelu rozptylu z obr. 27.4.4. Pro velikost rozptylové indukčnosti L_σ platí:

$$L_\sigma = \lambda_\sigma \cdot N_2^2 \quad (27.6.1)$$

kde λ_σ je *magnetická vodivost rozptylového magnetického obvodu*. Rozptylovou indukčnost L_σ (tj. sekundární rozptylovou indukčnost plus primární rozptylovou indukčnost přepočtenou na sekundární stranu) je nutno chápat jako indukčnost

určující výstupní reaktanci transformátoru napájeného ovšem z ideálního napěťového primárního zdroje. Lze ji snadno změřit, zkratujeme-li primární vinutí a měříme sekundární indukčnost $L_{2,k}$:

$$L_\sigma = L_{2,k} = L_2(1 - k^2) \quad (27.6.2)$$

kde k má význam činitele vazby a lze jej určit ze známého vztahu:

$$k = \frac{M}{L_1 L_2} \quad (27.6.3)$$

Zajímá nás ovšem **výstupní reaktance** ωL_σ , nikoliv samotná indukčnost L_σ , neboť napěťový úbytek je úměrný (při harmonickém průběhu napětí):

$$\Delta u_2(t) \approx \omega L_\sigma \quad (27.6.4)$$

Je zřejmé, že při konstantní rozptylové indukčnosti může být transformátor na vysokých kmitočtech naprosto nepoužitelný (měkký). Pak nezbývá, než velmi úzkostlivě a co nejvíce minimalizovat rozptylovou indukčnost. Je proto nutné podle rov. 27.6.1 minimalizovat rozptylovou magnetickou vodivost λ_σ . Ta je přibližně určená rovnicí:

$$\lambda_\sigma = \mu_0 \frac{S_\sigma}{l_\sigma} \quad (27.6.5)$$

kde $\mu_0 = 4 \cdot \pi 10^{-7} H/m$ je permeabilita vakua. S_σ a l_σ jsou **ekvivalentní průřez a délka rozptylových cest**. Protože nelze snížit permeabilitu vzduchu, je nutno upravit geometrii jádra a současně zabezpečit co největší poměr permeability jádra k permeabilitě okolního prostředí. Jádro musí mít tvar bez ostrých zlomů ve směru magnetického toku, nejlépe kruhový tvar, tj. *toroidní jádro*. Je důležitá velká magnetická vodivost jádra λ . Ta je dána vztahem:

$$\lambda = \mu_r \mu_0 \frac{S}{l} \quad (27.6.6)$$

μ_r je relativní permeabilita materiálu, S je průřez jádra, l je délka střední siločáry. Nestačí jen velká permeabilita μ_r , ale i velký poměr $\frac{S}{l}$. Pro minimalizaci rozptylu jsou proto vhodná "baculatější" jádra s velkým S a malým l (často například několik toroidů s malým průměrem tj. malým l paralelně pro dosažení velkého S). Tím ale vzniká problém malého okénka S_0 pro vinutí, což znemožňuje vinout vodiči s velkým průřezem a přenášet tak velké výkony. Tyto protichůdné požadavky na tvar jádra bývají kritické a je nutno je v návrhu kompromisně vyřešit.

Rozptylovou indukčnost dále zmenšíme způsobem vinutí. Jsou-li vinutí na kostřičce, pak je vineme na sebe, nikoliv vedle sebe s přepážkou. Blíže jádru umístíme vinutí s menším počtem závitů. Vhodné je také střídavé prokládání jednotlivých vrstev primárního a sekundárního vinutí, roste však neúměrně pracnost (cena) a klesá činitel plnění okénka. *Bifilární vinutí* s nejtěsnější vazbou nelze uskutečnit v případě rozdílných počtů závitů (což je téměř vždy) a v případě nároků na izolační pevnost mezi vinutími rozprostřenými rovnoměrně po obvodu celého toroidu.

Poznámka k transformátorům obecně (nejen síťovým)

Všimněme si, že v celém výkladu není nikde zmínka o použití *vzduchové mezery v magnetickém obvodu jádra*. V kapitole Cívky s feromagnetickým jádrem je zamýšlení o vzduchových mezerách v magnetických obvodech a je zde vysvětlen jedený případ, kdy má smysl mezeru v transformátoru použít. Je zde ukázáno, že v případě předpokladu platnosti rov. [27.4.4](#) (což je mimo jiné případ běžných napájecích transformátorů) je použití vzduchové mezery bezúčelné a škodlivé, vede totiž ke vzrůstu magnetizačního proudu a zvýšení rozptylových toků.

27.7 Cívky s feromagnetickým jádrem

27.7.1 Fyzikální rozbor a příprava pro návrh

27.7.2 Důsledky a význam použití vzduchové mezery

27.8 Efektivní hodnoty proudů typických průběhů

Pro správnou volbu průřezu drátu pro vinutí je nutné stanovit přípustné oteplení, které je určeno efektivní hodnotou proudu. Pro nejčastější průběhy proudů jsem odvodil vztahy pro výpočet efektivních hodnot.

1. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.1(a):

$$\begin{aligned}
 I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} t \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \int_0^{\delta T} t^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{I_{max}}{\delta T} \right)^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\delta T} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{I_{max}^2}{(\delta T)^2} \frac{(\delta T)^3}{3} = I_{max}^2 \frac{\delta}{3}
 \end{aligned} \tag{27.8.1}$$

2. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.1(b): Pravý průběh na obrázku 27.1(b) je speciálním případem levého průběhu jehož efektivní hodnotu snadno určíme jako $I_{max} \sqrt{\frac{1}{3}}$. Pro úplnost provedeme výpočet následujícím způsobem

$$I_{ef}^2 = I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2 = I_{max}^2 \frac{\delta}{3} + I_{max}^2 \frac{1-\delta}{3} = I_{max}^2 \frac{1}{3} \tag{27.8.2}$$

výpočet dílčí efektivní hodnoty proudu I_{ef2} :

$$\begin{aligned}
 I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^T \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}(t - \delta T) \right)^2 dt \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \tau = t - \delta T \Rightarrow \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt \Rightarrow \tau_d = 0 \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_{max}}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}^2}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_{max}}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\
 &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\tau + \frac{2}{T(\delta-1)} \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{1}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)}
 \end{aligned} \tag{27.8.3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{I_{max}^2}{T} \left(T(1 - \delta) - T(1 - \delta) + \frac{T}{3}(1 - \delta) \right) \\ &= I_{max}^2 \frac{1 - \delta}{3} \end{aligned}$$

3. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.8.2:

$$I_{ef} = I_{max}. \quad (27.8.4)$$

4. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.8.3:

$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{2I_{max}\delta} \quad (27.8.5)$$

$$I_{ef1}^2 = I_{ef2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (27.8.6)$$

5. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.8.4:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} I_{max}^2 dt = \frac{1}{T} I_{max}^2 [t]_0^{\delta T} = I_{max}^2 \delta \quad (27.8.7)$$

6. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.8.5:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left(I_{max} - I_n + \frac{I_n}{\delta T} t \right)^2 dt \quad (27.8.8)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{2I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 t^2 \right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 t + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} t^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{t^3}{3} \right)_0^{\delta T}$$

$$= \frac{1}{T} \left((I_{max} - I_n)^2 \delta T + \frac{I_n(I_{max} - I_n)}{\delta T} \delta T^2 + \left(\frac{I_n}{\delta T} \right)^2 \frac{\delta T^3}{3} \right)$$

$$= \delta \left((I_{max} - I_n)^2 + I_n \cdot (I_{max} - I_n) + \frac{I_n^2}{3} \right)$$

$$= \delta \left(I_{max}^2 - 2I_{max}I_n + I_n^2 + I_{max}I_n - I_n^2 + \frac{I_n^2}{3} \right)$$

$$= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \quad (27.8.9)$$

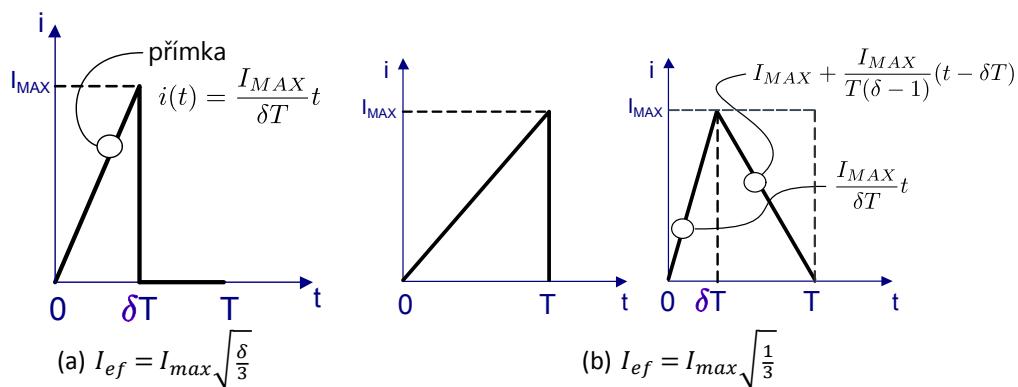
7. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.8.6:

$$\begin{aligned}
 I_{ef1}^2 &= \delta \left(I_{max}^2 - I_{max}I_n + \frac{I_n^2}{3} \right) \\
 I_{ef2}^2 &= \frac{1}{T} \int_{\delta T}^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}(t - \delta T) \right)^2 dt \\
 &= \text{meze :} \begin{pmatrix} \tau = t - \delta T & \tau_h = T(1-\delta) \\ d\tau = dt & \tau_d = 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max} + \frac{I_n}{T(\delta-1)}\tau \right)^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{T(1-\delta)} \left(I_{max}^2 + \frac{2I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \tau^2 \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \left[I_{max}^2 \tau + \frac{I_{max}I_n}{T(\delta-1)}\tau^2 + \left(\frac{I_n}{T(\delta-1)} \right)^2 \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T(1-\delta)} \\
 &= (1-\delta) \left[I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3} \right]
 \end{aligned} \tag{27.8.10}$$

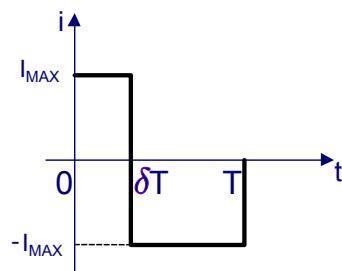
$$I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2} = \sqrt{I_{max}^2 + I_{max}I_n - \frac{I_n^2}{3}} \tag{27.8.11}$$

8. Výpočet efektivní hodnoty proudu s průběhem na obrázku 27.8.7:

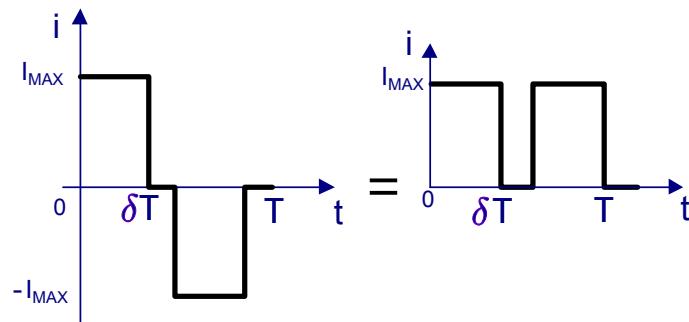
$$\begin{aligned} I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{\delta T} (I_{max} \sin(t))^2 dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^{\delta T} \sin^2(t) dt \quad (27.8.12) \\ &= \frac{I_{max}^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \underbrace{\frac{\sin(t) \cos(t)}{2}}_{\sin(\delta T)=0} \right]_0^{\delta T} = I_{max} \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$



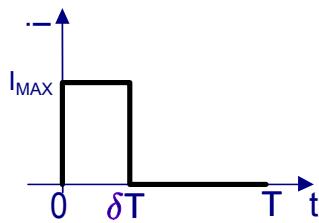
Obrázek 27.8.1: Typické průběhy proudů, jejichž efektivní hodnotu je nutné stanovit při dimenzování vinutých komponent.



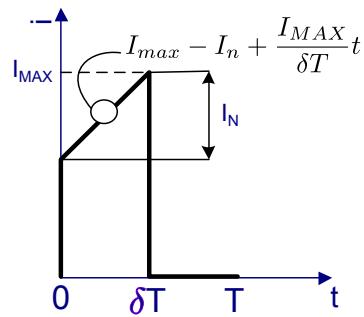
Obrázek 27.8.2: $I_{ef} = I_{max}$



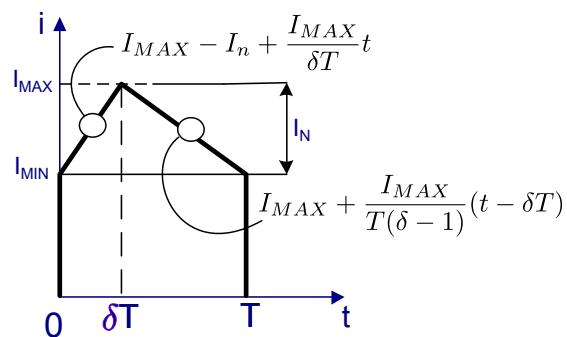
Obrázek 27.8.3: $I_{ef} = I_{max} \sqrt{2\delta}$



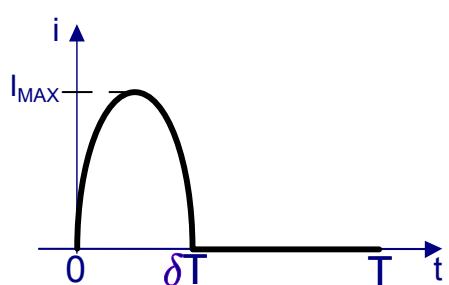
Obrázek 27.8.4: $I_{ef} = I_{max}\sqrt{\delta}$



Obrázek 27.8.5: $I_{ef} = I_{max}\sqrt{\delta \left(I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max} \right)}$



Obrázek 27.8.6: $I_{ef} = \sqrt{I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max}}$



Obrázek 27.8.7: $I_{ef} = \sqrt{I_{max}^2 + \frac{I_n^2}{3} - I_n I_{max}}$

Část XII

Analogové elektronické systémy

Obsah

28.1 Historie	266
28.2 Simulace a analýza v programu LTspice IV	267

28.1 Historie

V roce 1971 vytvořil student „University of California“, Berkeley, USA *Larry Nagel* program SPICE1 (*SPICE = Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*). Program umožňoval analýzu dějů v obvodech, obsahujících zejména bipolární a unipolární tranzistory. O věrohodnost výsledků bylo usilováno propracovaností modelů i matematických algoritmů řešení rovnic. Uživatel měl navíc možnost rozšiřování sortimentu analyzovaných součástek technikou makromodelů zakladáním tzv. *podobvodů* (*subcircuits*) SPICE. Protože program byl v podstatě volně šířitelný, stal se brzo standardním simulačním nástrojem pro elektrotechnické úlohy. Usilovně se pracovalo na jeho zdokonalování.

V roce 1975 byla představena verze SPICE2 s podstatně vylepšenými modely i numerickými algoritmy. Tato verze byla v průběhu téměř 20 let postupně zdokonalována na Berkeleyské univerzitě až do dnes všeobecně známého standardu SPICE2G.6, který byl v r. 1983 zpřístupněn k volnému používání. Zdrojové texty SPICE1 a SPICE2 byly napsány ve Fortranu. Vzhledem k zvýšenému využívání unixových pracovních stanic padlo v Berkeley rozhodnutí přepsat SPICE2 do jazyka C. Tak začala vznikat verze SPICE3. Dnes je rozšířena verze SPICE3F.2. Oproti SPICE2G.6 se vyznačuje řadou vylepšení, ovšem z různých důvodů došlo k ztrátě zpětné kompatibility se SPICE2G.6.

S růstem výkonnosti počítačů PC byly programy, dosud běžící na výkonných pracovních stanicích, přepisovány na programy spustitelné na „PCčkách“. Tak vznikl standard PSpice. Dnes existuje více simulačních programů, které využívají v podstatě tři ne zcela kompatibilní standardy: SPICE2, SPICE3, PSPICE. Všechny lze rozdělit na tzv. „*Spice-like*“ a „*Spice-compatible*“ simulátory.

Označení „*Spice-like*“ znamená, že simulátor je schopen generovat podobné výsledky analýzy jako SPICE, avšak nemusí být schopen čist standardní vstupní soubory SPICE. Typickými příklady jsou staré verze programů Micro-Cap nebo TINA, program apod. Termínem „*Spice-compatible*“ se označují simulační programy, které dokáží čist standardní vstupní soubory SPICE, provádět klasické SPICE analýzy, a generovat výsledky v standardním SPICE2G.6 tvaru. Ze současných programů jsou to například PSpice, HSpice (standard SPICE3), WINSpice (standard SPICE3), MicroCap od verze IV, Multisim, LTspice (standard SPICE3) a další.

Kromě toho existují programy pro simulaci obvodů, které nemají s výše uvedenými skupinami programů mnoho společného. Jedná se zejména o jednoúčelové programy, specializované na analýzy obvodů, které nelze realizovat programy typu SPICE. Programy typu „*SPICE-compatible*“ jsou široce využívány mimo jiné proto, že umožňují neomezené rozšiřování sortimentu modelovaných součástek o nové typy, jejichž modely se průběžně objevují na webu a následně i v inovovaných knihovnách nových verzí programů. Na akademických pracovištích i v průmyslu je oblíbeným produktem OrcadPSpice.[**Biolek2**]

28.2 *Simulace a analýza v programu LTspice IV*

Obsah

29.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače	270
29.1.1 Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru	270

V této kapitole se budeme zabývat rozbory vlastností základních obvodů a jejich účelným spojováním do funkčních bloků určených pro zesilování signálů. [Neumann]

29.1 Zjednodušení výpočet tranzistorového zesilovače

Přesný výpočet tranzistorového zesilovače vychází z určení dvojbranových parametrů tranzistoru a pokračuje sestavením matice obvodu a řešením této matice. Při použití vybraných rovnic matematických modelů pro programy SPICE lze dojít ke zjednodušenému řešení, ve kterém se některé parametry zanedbají a sestavené náhradní schema pak řešit libovolnou metodou. Přesto dostaneme výsledky s přesností, která pro obvyklé technické řešení postačuje.

29.1.1 Obecná převodní charakteristika bipolární tranzistoru

Převodní charakteristika udává závislost výstupního proudu na vstupním napětí. Pro zapojení SE představuje převodní charakteristiku exponenciální závislost kolektorového proudu na napětí mezi bází a emitorem. Strmost je dána derivací funkce (tečnou) v daném pracovním bodě a odpovídá paramетru y_{21} .

Obsah

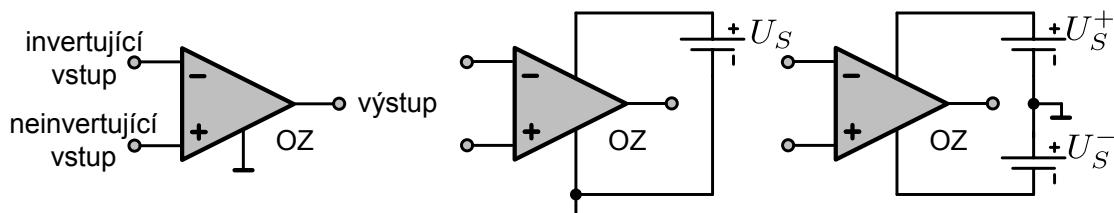
30.1	Úvod	272
30.2	Parametry operačního zesilovače	273
30.2.1	Lineární parametry a lineární model	273
30.2.2	Nelineární parametry	273
30.3	Ideální operační obvod	274
30.3.1	Paralelní operační obvod	274
30.3.2	Sériový operační obvod	276
30.3.3	Složený operační obvod	276

30.1 Úvod

Operační zesilovače (OZ, aj: opamp) původně vznikly jako složité elektronické obvody pro náročné použití při zpracování analogových (spojitě se měnících) stejnosměrných a nízkofrekvenčních střídavých signálů v analogových počítačích. Moderní polovodičová technologie umožnila vytvoření OZ v podobě levných integrovaných obvodů s malým počtem vývodů, které mají nepatrnou spotřebu, jsou odolné proti přetížení a umožňují jednoduše realizovat nejrůznější elektronická zařízení.

Svůj název získaly z dob *analogových počítačů*, ve kterých se používaly k realizaci matematických operací. Tyto integrované obvody se svými vlastnostmi blíží *ideálnímu zesilovačům napětí*. Jejich zesílení bez vnější zpětné vazby se blíží nekonečnu (10^7). Vstupní odpor je velmi velký ($10^4\Omega$) a výstupní odpor je malý (10Ω). Kmitočtový rozsah sahá od stejnosměrného signálu do desítek megahertzů. Vlastní šum a zkreslení zesilovače jsou rovněž malé. V dnešním pojetí je možné vymezit operační zesilovač jako **stejnosměrný zesilovač** s velkým zesílením a malým vlastním rušením, schopný stabilní činnosti v uzavřené zpětnovazební smyčce [**Dostal**].

Směr signálového toku operačním zesilovačem (dále je OZ) od vstupu k výstupu je vyznačen trojúhelníkovým tvarem jeho symbolické značky na obr. 30.1.1.



Obrázek 30.1.1: Symbolická značka OP s vyznačenými signálovými svorkami (a) a skutečná realizace zemní svorky (b, c)

Shrnutí

1. Operační zesilovač má čtyři signálové svorky, i když se často kreslí jen tři - oba vstupy a výstup. Čtvrtou signálovou svorkou je zem.
2. Souhlasné napětí u_{CM} je totožné s napětím jeho neinvertujícího vstupu u^+ .
3. Ideální operační zesilovač má za všech okolností nulové diferenční vstupní napětí a nulové vstupní proudy.

30.2 Parametry operačního zesilovače

Ideální operační zesilovač je nedosažitelná abstrakce. K posouzení kvality skutečného operačního zesilovače slouží řada funkčních parametrů jako soubor dat, která lze zjistit měřením na svorkách.

Operační zesilovač, jako každý aktivní elektronický obvod, je obvod nelineární. Funkční charakteristiky OZ však připouštějí linearizaci bez přílišného odklonu od skutečnosti. Odpovídající kvazilineární parametry jsou podkladem lineárního modelu OZ. Ostatní parametry jsou podstatné nonlinearity, které tvoří meze jeho lineární oblasti.

30.2.1 Lineární parametry a lineární model

Obr. 30.2.1 ukazuje úplný lineární model operačního zesilovače. Se zřetelem k pozdější analýze chyb operačního obvodu je vhodné rozdělit znázorněné lineární parametry na **aditivní** a **multiplikativní**.

- Aditivní parametry zahrnují náhradní rušivé zdroje náhodných fluktuací: E_R , I_R^- , I_R^+ , které způsobují aditivní chyby operačního obvodu nezávislé na jeho signálovém vybuzení.
- Multiplikativní parametry představované čtyřmi odpory R_D , R_{CM}^- , R_{CM}^+ , R_0 a dvěma řídicími konstantami $-A$, $1/X$ závislých generátorů, vystihují pasivní a přenosové vlastnosti OZ způsobují multiplikativní chyby operačních obvodů úměrné jeho signálovému vybuzení.

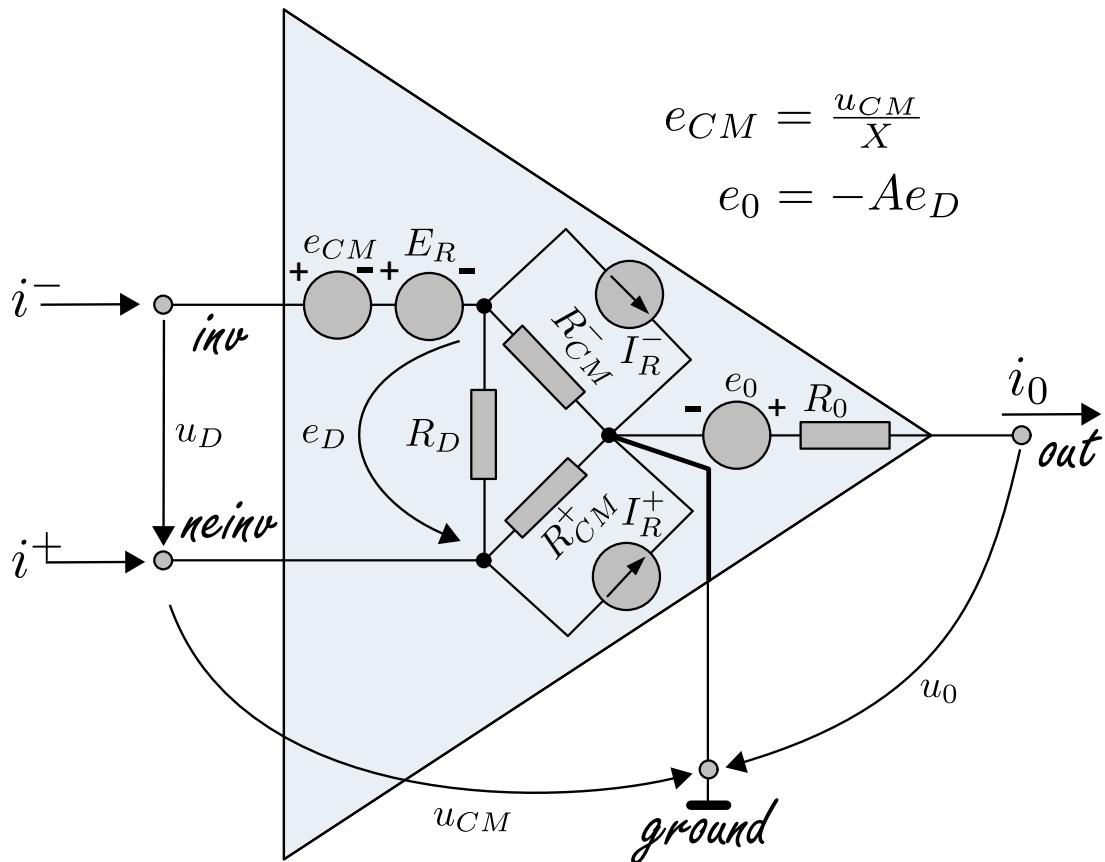
Vnitřní, na svorkách neměřitelný napěťový úbytek e_D na odporu R_D zastavá v tomto modelu vazbu mezi vstupem a výstupem.

Při práci s proměnnými signály v časové nebo frekvenční oblasti se význam použitých symbolů vhodně rozšíří na impedance, operátorové přenosy apod.

30.2.2 Nelineární parametry

Chyby, které provázejí approximaci skutečného operačního zesilovače lineárním modelem, se zvětšují se vstupním a výstupním vybuzením. To se týká zejména linearizace převodní charakteristiky napříkladno $u_0(u_D)$ výrazem $-A(u_D - E_R - e_{CM})$, výstupní charakteristiky $u_0(i_0)$ výrazem $e_0 - R_0 i_0$ a vstupní charakteristiky $e_{CM}(u_{CM})$ výrazem u_{CM}/X . Skutečný průběh každé z těchto charakteristik se vyznačuje velmi ostrým kolénem, při jehož překročení ztrácejí lineární parametry smysl. Signálové vybuzení, které přísluší tomuto kolenu, tak vymezuje dosti přesně oblast lineárního chování [Dostal].

Třem svorkovým proměnným u_{CM} , u_O , i_0 přísluší tři statické nonlinearity (omezení rozkmitu) a tři dynamické nonlinearity (omezení rychlosti)



Obrázek 30.2.1: Lineární model operačního zesilovače

30.3 Ideální operační obvod

30.3.1 Paralelní operační obvod

Napěťový invertor ukazuje, že vstupní signálový proud může být generován také synteticky, kombinací napěťového signálového zdroje a sériového rezistoru. Takovým způsobem vytvořený *napěťový invertor* na obr. * je jedním z nejčastějších operačních obvodů.

Vstupní napětí u_s je celé vloženo na rezistor R_1 (jeho pravý konec je virtuálně uzemněn) a vyvolává ekvivalentní vstupní proud $\frac{u_s}{R_1}$. Tento přítékající proud je

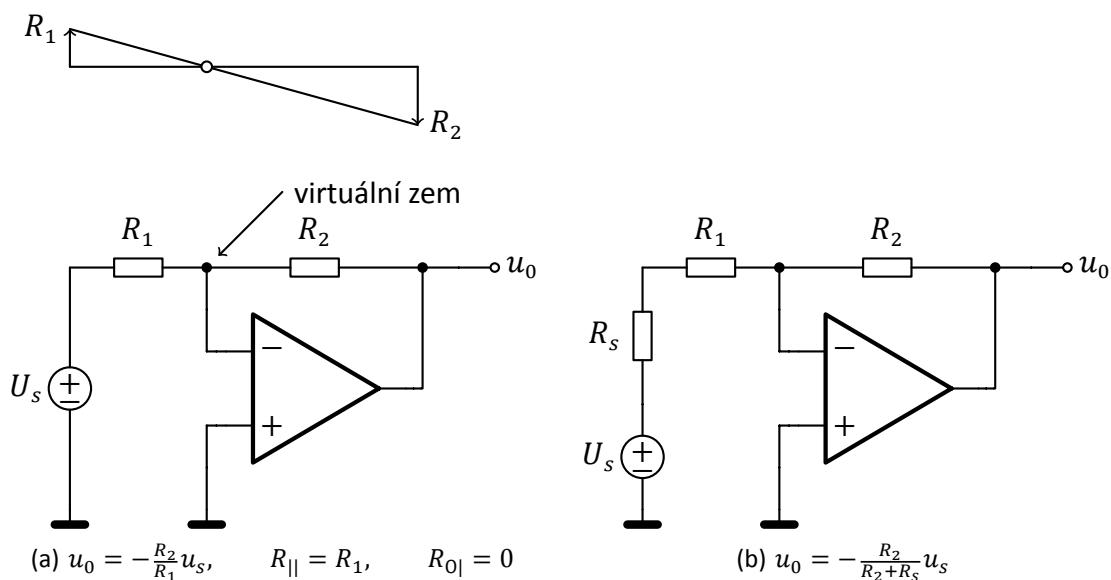
kompenzován proudem $-\frac{u_0}{R_2}$ odsávaným přes zpětnovazební rezistor R_2 do výstupu operačního zesilovače

$$\frac{u_s}{R_1} = -\frac{u_0}{R_2}.$$

Ideální operační rovnice

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1} u_s. \quad (30.3.1)$$

Vyjadřuje úměrnost signálových napětí $-u_0$ a u_s velikostem přilehlých rezistorů R_2 a R_1 . Pro snadnější zapamatování se nabízí představa dvouramenné páky s délkami ramen R_1 a R_2 , otočné v bodě odpovídajícímu virtuální zemi, která přenáší výchylku u_s levého konce na výchylku u_0 pravého konce v opačné polaritě.



Obrázek 30.3.1: Napěťový invertor. Jeho mechanickou analogií je dvouramenná páka (a). Přítomnost vnitřního odporu signálového zdroje R_s v operační rovnici je důsledkem konečného vstupního odporu $R_{||} = R_1$ (b).

Zesílení napěťového invertoru

$$G_i = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (30.3.2)$$

je záporné a nastavitelné v širokých mezích od 0 do ∞ výběrem rezistorů R_1 a R_2 . Zvláštním případem je jednotkový invertor se stejnými rezistory $R_1 = R_2$, který prostě invertuje polaritu vstupního napětí:

$$u_0 = -u_s, \quad G_i = -1.$$

Výstupní odpor napěťového invertoru je ideálně nulový. Jeho vstupní odpor však ztrácí onen vyhranění charakter typický pro kanonické operační obvody a nabývá indiferentní velikosti

$$R_{||} = R_1, \quad (30.3.3)$$

rovné velikosti virtuálně uzemněného rezistoru R_1 .

Napěťový inverzor zatěžuje signálový zdroj (obr. *). To se projevuje poklesem svorkového napětí signálového zdroje o úbytek na vnitřním odporu R_s , nebo jinak řečeno, přítomností nedefinovaného a nestáleého vnitřního odporu R_s v operační rovnici inverzoru:

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1 + R_s} u_s. \quad (30.3.4)$$

Taková vlastnost se obvykle považuje za nedostatek.

30.3.2 Sériový operační obvod

30.3.3 Složený operační obvod

Operační obvody, které není možné zahrnout do předcházejích dvou velkých tříd, se vyznačují:

- signálovým buzením obou vstupů operačního zesilovače,
- násobnou zpětnou vazbou,
- kombinací záporné a kladné zpětné vazby,
- použitím několika operačních zesilovačů,
- nestandardním zapojením operačního zesilovače.

30.3.3.1 Signálové buzení obou vstupů

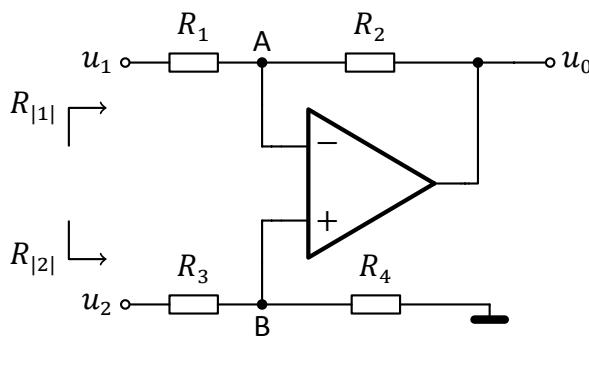
Rozdílový zesilovač na obr. 30.3.2 je lineární operační obvod se dvěma vstupy. Jeho výstupní napětí se najde superpozicí [Dostal].

Nechť působí napětí u_1 a napětí u_2 je nulové. Neinvertující vstup operačního zesilovače je uzemněn přes paralelní kombinaci rezistorů R_3 a R_4 . Operační obvod představuje napěťový invertor a první složka výstupního napětí má velikost

$$-\frac{R_2}{R_1}u_1.$$

Nechť působí napětí u_2 a napětí u_1 je nulové. Operační obvod představuje neinvertující zesilovač s předřazeným děličem R_3 a R_4 a druhá složka výstupního napětí má velikost

$$u_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = u_2 \frac{R_2/R_1 + 1}{R_4/R_3 + 1} \cdot \frac{R_4}{R_3}.$$



rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{R_4}{R_3} &= \frac{R_2}{R_1} \\ u_0 &= \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1) \\ R_{|1|} &= R_1 \\ R_{|2|} &= R_3 + R_4 \\ R_{0|} &= 0\end{aligned}$$

Obrázek 30.3.2: Rozdílový zesilovač. Podmínky potlačení souhlasné složky vstupních napětí u_1 a u_2 je poměrové vyvážení zpětnovazebních rezistorů, $R_4/R_3 = R_2/R_1$. S ohledem na offset se obvykle volí uplná symetrie, tj. $R_4 = R_2$ a $R_3 = R_1$.

Současné působení obou vstupních napětí ve vyváženém operačním obvodě

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1},$$

přísluší výstupní napětí

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1), \quad (30.3.5)$$

úměrné rozdílu vstupních napětí bez ohledu na jejich absolutní velikost. Odtud název operačního obvodu. Důvod zařazení napěťového děliče (R_3, R_4) je zřejmý - dělič sjednocuje zesílení invertujícího a neinvertujícího vstupu, která se liší absolutně o jednotku.

Dvěma vstupům přísluší dva vstupní odpory. První vstupní odpor

$$R_{|1|} = R_1$$

je roven velikosti rezistoru R_1 , protože vnitřní odpor bodu A^1 je nulový. Druhý vstupní odpor

$$R_{|2|} = R_3 + R_4$$

je roven součtu rezistorů R_3 a R_4 , protože vnitřní odpor zbytku operačního obvodu v bodě B je nekonečný. Tyto dva vstupní odpory jsou různé, i když jsou obě větve (R_1, R_2) a (R_3, R_4) stejné.

Vstupní odpory $R_{|1|}$ a $R_{|2|}$ přísluší dvěma samostatným uzemněným zdrojům signálových napětí u_1 a u_2 podle 30.3.2. Volnému (izolovanému) signálovému napěťovému zdroji připojenému diferenčně mezi vstupy rozdílového zesilovače, by příslušel diferenční vstupní odpor

$$R_{|D|} = R_1 + R_3,$$

rovný součtové velikosti rezistorů $R_{|1|}$ a $R_{|3|}$, protože body A a B jsou virtuálně zkratovány.

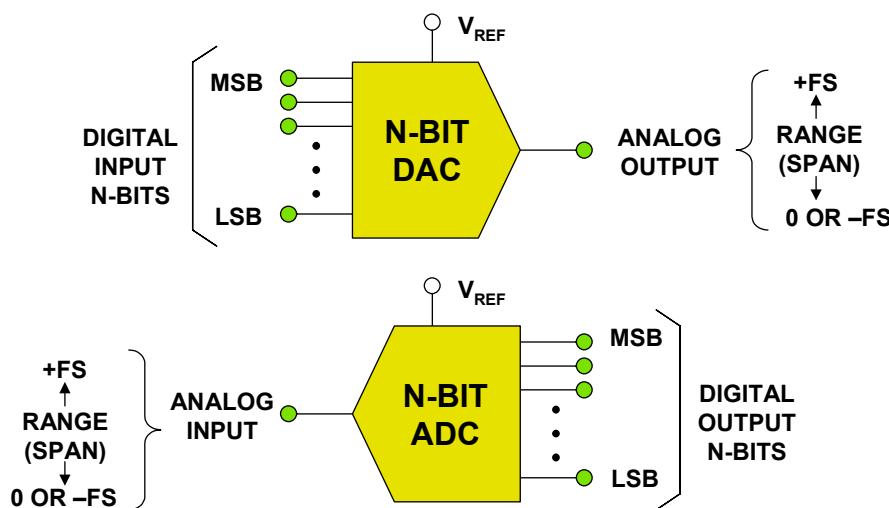
¹obdoba virtuální země

Obsah

31.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem	280
31.1.1 Základní struktura převodníků	281
31.1.2 Statické a dynamické parametry převodníků	281
31.1.3 Vzorkování	282
31.1.4 Kvantování	282
31.1.5 Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC	286
31.2 Principy A/D převodníků	289
31.3 Převod číslicového signálu na analogový	290
31.3.1 DA převodník DAC0800	292

31.1 Konverze mezi digitálním a analogový signálem

Při zpracování analogového signálu je jednou z důležitých funkcí převod tohoto signálu z analogové podoby do číslicové a naopak. Proto jsou analogově-číslicové převodníky resp. číslicově-analogové převodníky (ADC - Analog-to-Digital Converter), (DAC - Digital-to-Analog Converter) velmi důležitými prvky jakéhokoli systému zpracovávajícího signál [Haze]. Na obrázku 31.1.1 je definováno rozhraní obou typů převodníku.



Obrázek 31.1.1: Definice rozhraní bloku analogově-číslicového (ADC) a číslicově-analogového (DAC) převodníku

Analogově-číslicové převodníky (Analog-to-Digital Converters) slouží k převedení analogového signálu na signál číslicový. Pro A/D převodník má analogová stupnice vstupního signálu délku FS (*Full scale*), udávanou např. ve voltech. Stupnice číslicového signálu pak vyznačuje diskrétní hodnoty výstupu, které převodník generuje při převodu analogového signálu [Neumann].

Číslicově-analogové převodníky (Digital-to-Analog Converters) slouží k opačnému procesu, tedy k převedení číslicového signálu na signál analogový, což by šlo realizovat pomocí lineárního digitálního potenciometru a připojeného zdroje referenčního napětí na jeho vstupu [Neumann]. Pro N-bitové binární slovo by musel mít $n - 1$ rezistorů a n resp. $2n - 1$ spínačů. To je monoliticky téměř nerealizovatelné již pro osmi- a vícebitové slovo. Řešení převodníků proto musí být mnohem úspornější, i když úspory budou vykoupeny jinými nevýhodami, případně omezeními pro jejich použití.

31.1.1 Základní struktura převodníků

Obě skupiny převodníků mohou typicky obsahovat komparátory, číslicové obvody, spínače, integrátory, vzorkovací obvody a/nebo pasivní součástky. Nezbytnou a důležitou součástí je i přesný zdroj referenčního napětí. V mnoha případech pak také platí, že DAC je jednou z částí ADC.

Analogově číslicový převod můžeme pomyslně rozložit do tří etap [Sebesta].

1. Převod signálu se spojitým časem na signál s diskrétním časem. Tomuto převodu říkáme vzorkování.
2. Kvantování vzorku s cílem vyjádřit vzorky konečnou množinou čísel. Tento krok je provázen vznikem tzv. kvantovacího šumu. Uvedený jev souvisí s nelineárním zkreslením známým z teorie obvodů.
3. Kódování spočívající zpravidla v binárním vyjádření čísel představujících velikosti vzorku.

31.1.2 Statické a dynamické parametry převodníků

Statické parametry převodníků jsou určovány pomocí *převodní charakteristiky*, zatím co dynamické vlastnosti se vyhodnocují z kmitočtového spektra převodníku [Haze].

- rozsah,
- integrální a diferenciální nelinearity (*integral - INL, differential - DNL nonlinearity*),
- rozlišení převodníku (*resolution*),
- přesnost (*accuracy*),
- chyba monotónnosti,
- chyba nastavení nuly (*offset error*),
- hysterese a další.

K hlavním dynamickým parametrům patří

- odstup signál - šum (*signal to noise ratio - SNR*) kap. [31.1.5.1](#),
- efektivní počet bitů (*effective number of bits - ENOB*),
- harmonické zkreslení (*total harmonic distortion - THD*),
- odstup signál-šum a zkreslení (*signal to noise and distortion - SINAD*),
- dynamický rozsah bez parazitních složek (*spurious free dynamic range - SFDR*),
- šum - vrcholový, efektivní (*noise - peak, rms*),
- doba přepnutí a ustálení.

31.1.3 Vzorkování

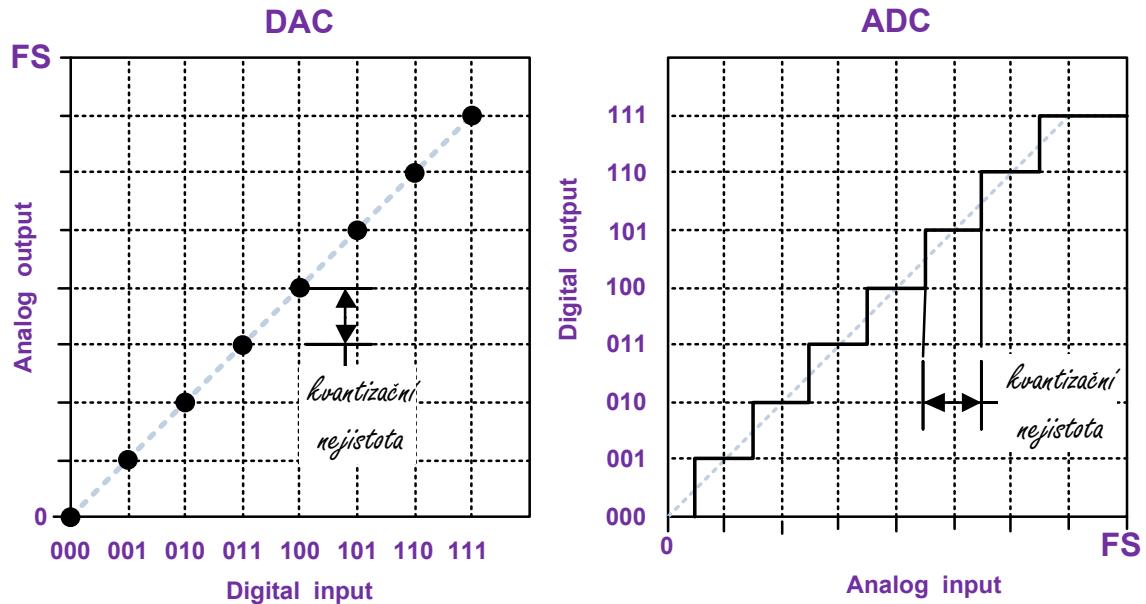
31.1.4 Kvantování

Pro přechod od časově spojitého signálu se spojitou množinou hodnot k číslicovému signálu, je nutné provést (výškové) kvantování, tj. kvantování hodnot signálu, které je patrné z obrázku [31.1.4](#). Je zřejmé, že mapování spojitého intervalu vstupních hodnot na diskrétní hodnoty digitálního výstupu způsobí, že každá hodnota digitálního výstupu platí pro vstupní signál měnící se v určitém podintervalu. Délka podintervalu, pro který platí jedna hodnota digitálního výstupu se nazývá **kvantizační krok převodníku** - Q , jenž je roven bitu s nejnižší váhou - LSB.

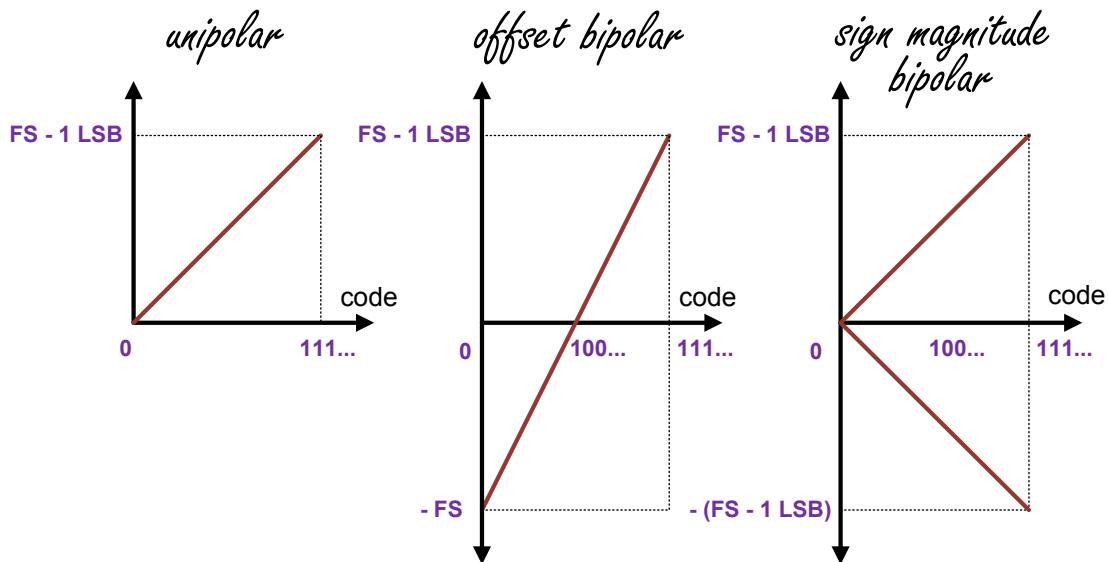
Převodní charakteristika DA i AD převodníku je znázorněna na obr. [31.1.2](#). Analogový signál je spojitusý a číslicový signál vyjadřuje jen jeho vybrané diskrétní hodnoty. Proto je převodní charakteristika nespojituá. Naproti tomu digitální vstup vytvoří na výstupu pouze omezený počet hodnot výstupního signálu.

Počet úrovní AD převodníku, do kterého je rozdělen rozsah vstupního analogového signálu definuje **rozlišovací schopnost ADC** a lze ji vyjádřit různými způsoby, jak ukazuje tabulka [31.1.1](#) pro 2 až 24bitového převodníku.

Kvantizační chyba, jejíž průběh je na obr. [31.1.4](#), v dynamickém režimu, tj. při časových změnách vstupní analogové veličiny, způsobuje **kvantizační šum**. Ten lze pozorovat např. tehdy, kdy čísla získaná z převodníku A/D jsou vedena do převodníku D/A a jím je analogový signál rekonstruován. Rekonstruovaný signál se jeví jako signál původní, avšak se superponovaným rušivým signálem. Vzájemným odečtení rekonstruovaného a původního signálu, dostaneme samostatný rušivý signál, který lze podrobit analýze. *Pokud je vzorkovací signál nekorelovaný se vzorkovaným signálem, je možno kvantizační šum považovat za náhodný.* Vztah mezi původním signálem a signálem degradovaným kvantizačním šumem vyjadřuje parametr - SNR



Obrázek 31.1.2: Ideální přenosová funkce 3bitového unipolárního AD a DA převodníku. V případě DA převodníku je přenosová funkce tvořena osmi body, nikoliv čárou.



Obrázek 31.1.3: Unipolární a bipolární převodníky [Kester2004]

- SNR - Signal to Noise Ratio: poměr signálu k šumu

$$SNR = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{(y(t) - x(t))^2\}} \quad (31.1.1)$$

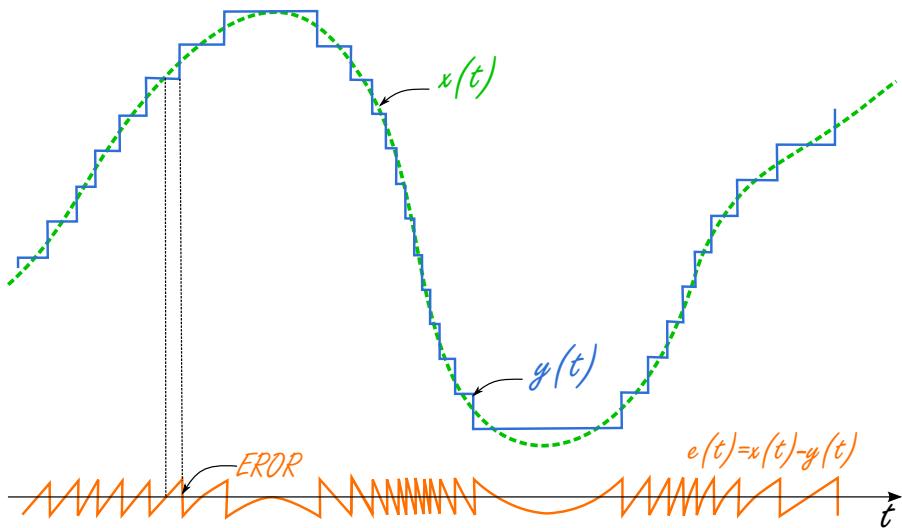
Rozlišení N	2^N	Napětí 10V FS	ppm FS	% FS	dB FS
2-bit	4	2.5 V	250000	25	-12
4-bit	16	625 mV	62500	6,25	-24
6-bit	64	156 mV	15625	1,56	-36
8-bit	256	39,1 mV	3906	0,39	-48
10-bit	1024	9,77 mV	977	0,098	-60
12-bit	4096	2.44 mV	244	0,024	-72
14-bit	16384	610 μ V	61	0,061	-84
16-bit	65536	153 μ V	15	0,0015	-96
18-bit	262144	38 μ	4	0,0004	-108
20-bit	1048576	9.54 μ	1	0,0001	-120
22-bit	4194304	2.38 μ	0,24	0,000024	-132
24-bit	16777216	596 nV	0,06	0,000006	-144

Tabulka 31.1.1: Porovnání rozlišovací schopnosti AD převodníku s různou délkou výstupního slova. Z tabulky vyplývá, že kvantizační krok 24bitového ADC odpovídá velikosti úbytku na rezistoru $2,2k\Omega$ při teplotě $25^\circ C$, který vzniká vlivem tepelného šumu (viz Johnsonův šum) jenž je při šířce pásmo 10 kHz roven 600 nV.

- $E\{\cdot\}$ … operátor průměrování
- $x(t)$ … vstupní analogový signál
- $y(t)$ … rekonstruovaný kvantovaný signál

Kvantizační chybu lze approximovat nekorelovaným pilovým průběhem s amplitudou špička-špička rovnou kvantizačnímu kroku Q . Ačkoliv takto provedená analýza (viz kapitola 31.1.5) není přesná, v běžných aplikacích zcela postačuje.

Na obr. 31.1.5 je kvantování realizováno tak, že je zajištěna minimální chyba kvantování, tj. převodník provádí operaci zaokrouhlování na nejbližší hodnotu. To znamená, že např. číslo jedna bude generováno vstupem v intervalu $1 \pm 0,5V$, je-li FS rovno 8V a máme-li k dispozici osm kvantizačních úrovní.



Obrázek 31.1.4: Kvantizační chyba je rovna rozdílu původního $x(t)$ a kvantovaného signálu v úrovni $y(t)$ [Bennett]

Převodník, který má v celém intervalu předváděných vstupních hodnot konstantní kvantizační krok, se též označuje jako lineární kvantizér. Převodník s přirozeným binárním kódem o N bitech je schopen na analogové straně reprezentovat $n-1$ nenulových úrovní analogové veličiny, přičemž platí

$$n = 2^N \quad (31.1.2)$$

A jde-li o lineární N -bitový kvantizér, můžeme vyjádřit kvantizační krok vztahem

$$Q = \frac{FS}{n} = \frac{FS}{2^N} \quad (31.1.3)$$

Nejvyšší úroveň vstupní veličiny A pak bude

$$A_{max} = \frac{n-1}{n} + \frac{Q}{2} \quad (31.1.4)$$

V sekvenci bitů binárního čísla generovaného převodníkem se zpravidla první bit, který představuje nejvyšší binární řád, označuje MSB (*Most Significant Bit*), tedy nejvýznamnější bit. Poslední bit, tj. bit v poloze nejnižšího řádu, má označení LSB (*Least Significant Bit*), tedy nejméně významný bit. Je zřejmé, že LSB jednoznačně určuje základní krok na ose číslicového signálu. Dojde-li ke změně pouze v hodnotě LSB, změní se analogová hodnota právě o kvantizační krok. LSB tedy na analogové straně určuje rozlišovací schopnost převodníku. Např. osmibitový převodník má rozlišovací schopnost $FS/256$, tj. přibližně 0,4%. Je-li $FS = 2V$, musí rozlišit 8 mV[Neumann].

Vzhledem k diskretizaci hodnot původního analogového signálu při převodu A/D dochází ke *kvantizačním chybám*. Je-li např. vstupní veličinou okamžité napětí u_a a této hodnotě odpovídá na výstupu číslo D , pak kvantizační chybu ε_q lze vyjádřit takto:

$$\varepsilon_q = u_a - FS \frac{D}{2^N} \quad (31.1.5)$$

31.1.5 Kvantizační šum ideálního N-bitového ADC

V předchozí kapitole byla nastíněna možnost aproximace kvantizační chyby jakéhokoliv AC signálu v časové oblasti (viz 31.1.4) nekorelovaným pilovým průběhem, za cenu určité nepřesnosti vyvážené jednoduším matematickým aparátém.

Vyjděme tedy z převodní charakteristiky ideálního N-bitového převodníku zatížené kvantizační chybou, tak jak je znázorněna na obr. 31.1.5. Z té je patrné, že chyba může v absolutní hodnotě dosáhnout maximálně $e(t) = \frac{Q}{2}$, resp. $\pm \frac{1}{2} LSB$ a v rámci kvantizačního kroku ji lze popsat přímkou se strmostí s :

$$e(t) = st, -\frac{Q}{2s} < t < +\frac{Q}{2s}$$

Statisticky je pravděpodobnost jejího rozložení $1/Q$ a je rovnoměrná od $-\frac{Q}{2}$ do $+\frac{Q}{2}$.

Z výše uvedeného plyne, že okamžitá hodnota kvantizační chyby $\varepsilon_q(t) = y(t) - x(t)$ může dosáhnout rozkmitu maximálně $\pm \frac{Q}{2}$ a jelikož předpokládáme rovnoměrné rozložení hodnot, je hustota pravděpodobnosti amplitud rovna $\frac{1}{Q}$.

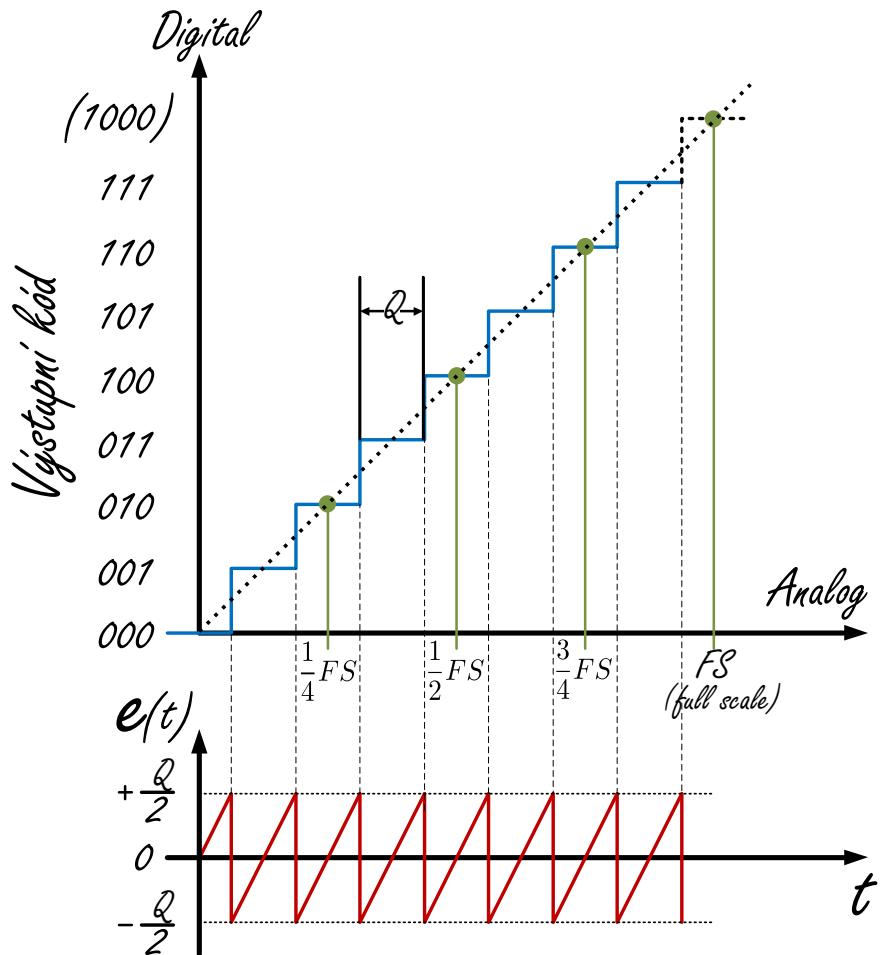
Kvantizační šum σ^2 je definován jako výkon (rozptyl) střídavé složky kvantizační chyby ε_q a jeho efektivní hodnotu σ můžeme odvodit pomocí věty o druhém centrálním momentu nebo výpočtem efektivní hodnoty v časové oblasti.

1. V pravděpodobnostním počtu je K-tý moment definován jako:

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

tedy

$$e(t) = \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (x - x_0)^2 p(x) dx = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2}{12}$$



Obrázek 31.1.5: Převodní charakteristika ideálních převodníků a závislost chyby kvantizace na vstupní analogové hodnotě

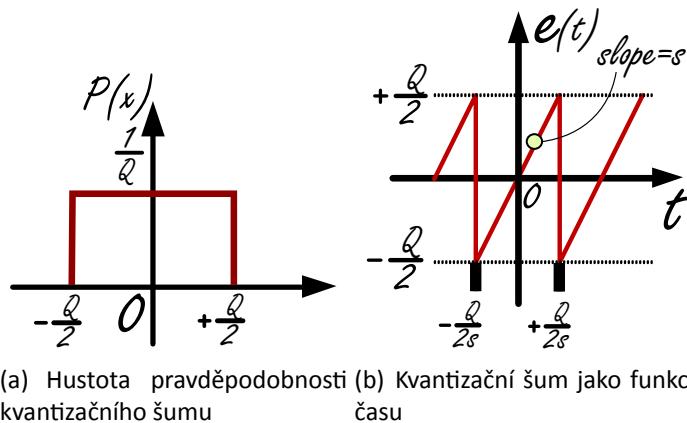
2. V časové oblasti má kvantizační šum pilový průběh viz obr. 31.6(b). Z definičního integrálu efektivní hodnoty dostaneme

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{+\frac{Q}{2}} (st)^2 dt = \frac{Q^2}{12}.$$

Též můžeme využít znalosti efektivní hodnoty pro průběh tohoto typu: $\frac{U_m}{\sqrt{3}}$ a dosazením za $U_m = \frac{Q}{2}$ získáme opět stejný výsledek jako při výpočtu integrálu

Tedy efektivní hodnota kvantizačního šumu ideálního N-bitového převodníku je:

$$e(t) = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (31.1.6)$$



Obrázek 31.1.6: K odvození efektivní hodnoty kvantizačního šumu

Předpokládejme na vstupu převodníku ustálený harmonický signál o amplitudě X . Dále předpokládejme, že signál s amplitudou X_m by pokryl celý rozsah převodníku FS . Pak se dá ze vztahu 31.1.1 vyjádřit odstup signálu od šumu SNR ideálního N -bitového převodníku jako podíl jejich výkonů resp. kvadrátu efektivních hodnot signálu a šumu v decibelech vztahem

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 \quad (31.1.7)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = 10 \log \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 = 20 \log \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \quad (31.1.8)$$

(31.1.9)

$$SNR = 1,76 + 6,02N + 20 \log \left(\frac{X}{X_m} \right) \quad (31.1.10)$$

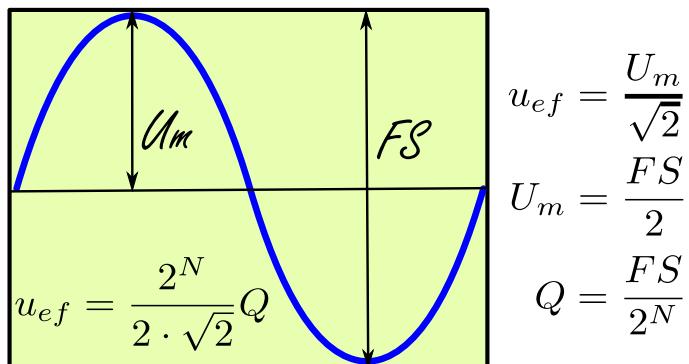
Lze tedy říci, že každý bit navíc v digitálním výstupu A/D převodníku přinese zlepšení odstupu signálu od šumu o 6 dB. Naproti tomu je třeba vědět, že uvedený výraz počítá s harmonickým signálem různého rozkmitu. Při zmenšování amplitudy bude relativní podíl šumu v signálu vyšší. Poměry se také mohou velmi změnit, když signál nebude mít harmonický charakter.

31.1.5.1 Odstup signálu od šumu

Z předchozí kapitoly víme, že SNR je definován jako poměr výkonu signálu k výkonu šumu ($výkon = ef.hodnota^2$). Pro samotný kvantizační šum platí:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{\frac{2^N}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot Q}{\frac{Q}{\sqrt{12}}} \right)^2 = N20 \log 2 + 20 \log \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{12}} \quad (31.1.11)$$

$$SNR_{dB} = 6,02 \cdot N + 1,76 dB$$



Obrázek 31.1.7

Tato hodnota platí pouze pro ideální převodník pouze s kvantizační chybou, a sinusový signál s rozkmitem přes celý rozsah převodníku. Skutečný převodník má ovšem vlivem dalších chyb SNR menší než SNR určený pouze pro kvantizační šum. Tato hodnota se nazývá SINAD nebo SNDR - *Signal-to-Noise and Distortion ratio*.

Známe-li SNR skutečného převodníku, můžeme určit počet efektivních bitu N_{ef} tzn. *efektivní rozlišitelnost převodníku*. Ten je vždy menší než N .

$$N_{ef} = \frac{SNR - 1,76}{6,02} \quad (31.1.12)$$

31.2 Principy A/D převodníků

Převod analogového signálu na číslo lze uskutečnit několika různými postupy:[Neumann]

1. Vstupní signál se porovnává s kvantovanou referenční veličinou a komparátory okamžitě vyhodnotí, který z nich je větší. Přímým výstupním údajem je binární číslicové slovo.
2. Vstupní signál i referenční veličina se v určité časové sekvenci zavádějí do integrátoru a komparátor na jeho výstupu určuje sekvenci impulsů, vypovídající o hodnotě vstupní analogové veličiny. Informací o vstupní veličině dále přenáší počet impulsu, jejich kmitočet nebo kódovaná sekvence impulsů. Tato informace může být převedena číslicovým blokem (obvykle blokem DSP) na binární číslicové slovo.

Bývá také používáno třídění na *převodníky s přímým a nepřímým vyhodnocením analogové veličiny*.

- Převodníky s přímým vyhodnocením porovnávají hodnoty analogové veličiny s vybranými kvatizačními úrovněmi současně nebo postupně, a to tak, že každá úroveň má vlastní komparátor. K těmto převodníkům patří *převodníky paralelní a kaskádní*.
- K nepřímému převodu můžeme využít postupného provoláváním vstupní veličiny s vhodnými vzorky referenčního napětí, dodávanými na vstup jediného komparátoru v pořadí a velikosti řízené logickými obvody. U těchto převodníků je vstupní analogová veličina porovnávaná s výstupní veličinou převodníku D/A, přičemž je číslicový vstup tohoto převodníku měněn tak, aby se obě veličiny k sobě přibližovaly. Pokud se k sobě dostatečně přiblíží, je převod ukončen. I zde jsou v podstatě jen dvě jednoduché možnosti přibližování výstup převodníku D/A k určité úrovni vstupní veličiny: buď se přibližování děje se stálým krokem, kdy jde o krokování po jednotlivých kvantovacích úrovních (*převodníky sledovací*), nebo postupnou approximací (*převodníky approximační*), kdy první krok rozhoduje o hodnotě MSB, další kroky porovnávají binárně zmenšované hodnoty odpovídající jednotlivým binárním řádům s tím, že poslední krok určí hodnotu LSB.
- Jinou možností nepřímého převodu A/D je převést hodnotu vstupní veličiny na takový parametr pomocného signálu, který se pak dá snadno převést na číslicový údaj. Tímto parametrem je nejčastěji kmitočet, jindy to může být i počet impulsů v určitém časovém intervalu nebo kódovaná sekvence impulsů. U těchto převodníků j kromě komparátoru typickým funkčním blokem integrátor.

31.3 Převod číslicového signálu na analogový

Číslicově-analogové převodníky převádějí číslicový signál zpravidla ve formě binárně kódovaného čísla na proud nebo napětí.

$$U_A = D \cdot U_{REF} \quad I_A = D \cdot I_{REF} \quad (31.3.1)$$

kde U_{REF}, I_{REF} jsou referenční napětí a proud určující rozsah výstupní veličiny. Je-li referenční napětí konstantní jedná se o klasické převodníky DAC. Při proměnném referenčním napětí se jedná o násobící převodníky MDAC, které realizují násobení časově proměnného referenčního spojitého a vstupního číslicového signálu. Hodnota číslicového signálu D se vyjadřuje ve dvojkovém nebo dvojkově desítkovém (BCD) kódu. Ve dvojkovém kódu:

$$D_B = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{-i} \quad (31.3.2)$$

n je počet bitů dvojkového čísla. Bit a_1 s nejvyšší vahou $1/2$ se označuje **MSB**, bit a_n s nejnižší vahou 2^{-n} se označuje **LSB**. Maximální hodnota číslicového signálu $D_{MAX} = 1 - 2^{-n}$ a proto maximální hodnota výstupní veličiny je vždy o 1 LSB menší, než je rozsah převodníku. Veličina $2^{-n} \cdot U_{REF}$, resp. $2^{-n} \cdot I_{REF}$ se nazývá **kvantum referenčního napětí nebo proudu** a určuje **rozlišitelnost** převodníku. Převodní funkci D/A převodníku můžeme v případě binárního kódu vyjádřit vztahem

$$U_A = U_{REF} \cdot (a_n 2^{-n} + a_{n-1} 2^{-(n-1)} + \dots + a_1 2^{-1}) \quad (31.3.3)$$

Statické vlastnosti D/A převodníku jsou určeny převodní charakteristikou, která je obvykle lineární (obr. 31.3.1). Převodní charakteristika reálného DA převodníku je zatížena chybou nuly, chybou zisku, integrální a diferenciální nelinearitou a monotónností převodu.

Z převodní charakteristiky lze tedy určit následující parametry převodníku:

- Chybu nuly (posunu) ε_0

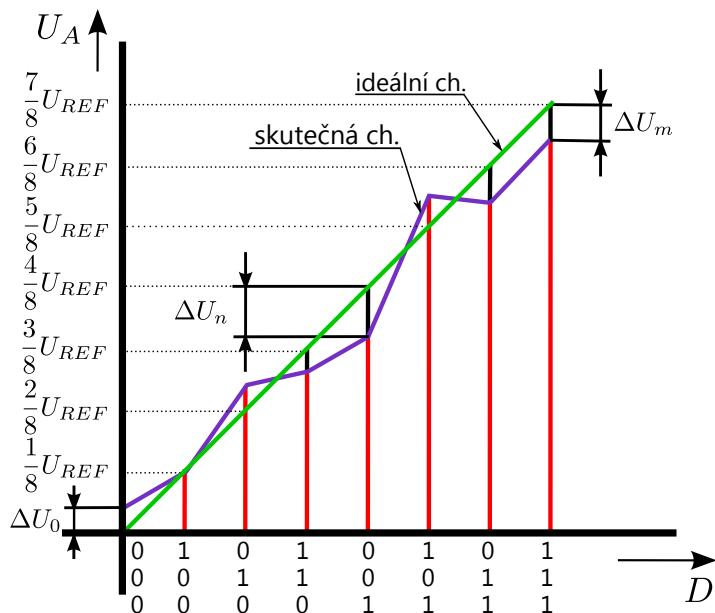
$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta U_0}{U_{REF}} \quad (31.3.4)$$

- Chybu měřítka (zesílení) ε_m

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta U_m - \Delta U_0}{U_{REF}} \quad (31.3.5)$$

- Integrální nelinearitu I_{NL} jako maximální odchylku výstupního napětí skutečného převodníku od ideální hodnoty v celém rozsahu převodníku

$$I_{NL} = \frac{\max \Delta U_n}{U_{REF}} \quad (31.3.6)$$



Obrázek 31.3.1: Statická převodní charakteristika 3 bitového DA převodníku

Všechny tyto chyby se vyjadřují buď v procentech jmenovitého rozsahu U_{REF} převodníku, nebo v jednotkách ideální kvantizační úrovně (kvanta) $q = 2^{-n} \cdot U_{REF}$.

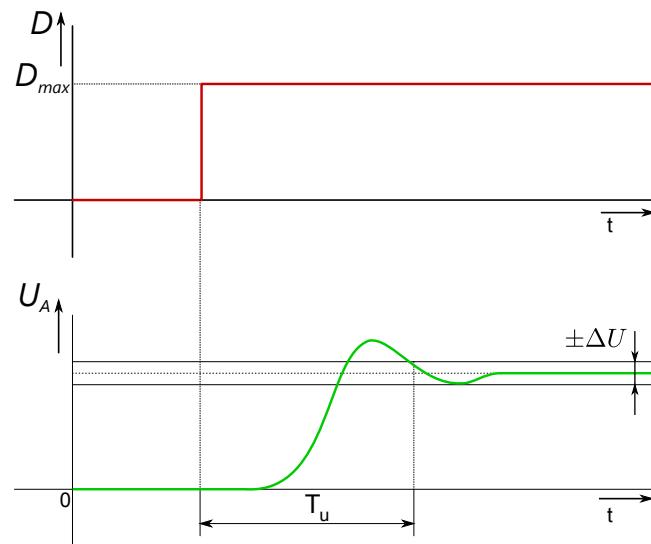
Dynamické vlastnosti D/A převodníku jsou charakterizovány **dobou ustálení** T_u (obr. 31.3.2), potřebnou k ustálení výstupního signálu na jmenovitou hodnotu se zadánou chybou ΔU obvykle $\pm 0.5LSB$.

U násobících D/A převodníků se navíc určuje kmitočtový rozsah referenčního napětí kmitočtem f_m , při kterém poklesne výstupní napětí převodníku o $3dB$ oproti stejnosměrnému napětí při maximální hodnotě číslicového signálu.

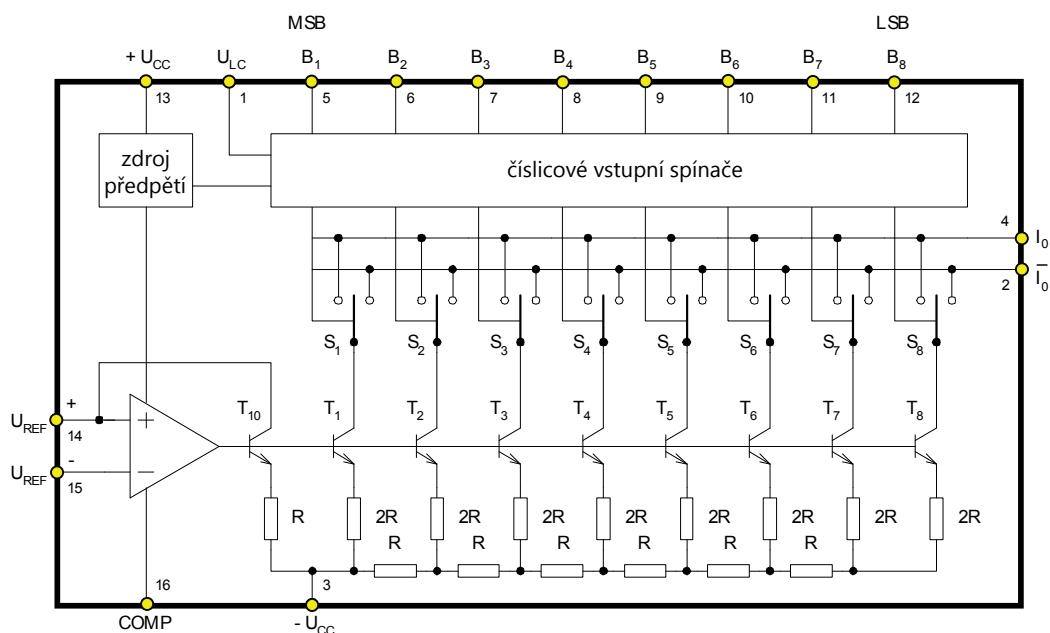
31.3.1 DA převodník DAC0800

D/A převodník DAC0800 je velmi rychlý násobící D/A převodník s rozlišením 8 bitů, pracující na principu spínaných proudových zdrojů (viz obr. 31.3.3).

Vstup převodníku je proudový, proudový výstup je řešen jako komplementární. IO v sobě slučuje proudové spínače, váhové odpory a řídící zesilovač. Analogová reference, přesné vnější odpory, korekční kondenzátor a výstupní zesilovač se připojují vně převodníku. Převodník DAC0800 generuje váhové proudy do komplementárních



Obrázek 31.3.2: Doba ustálení T_u DA převodníku. Je to celková doba od změny vstupního kódu D do ustálení analogového výstupu s přesností $\pm \frac{1}{2} LSB$



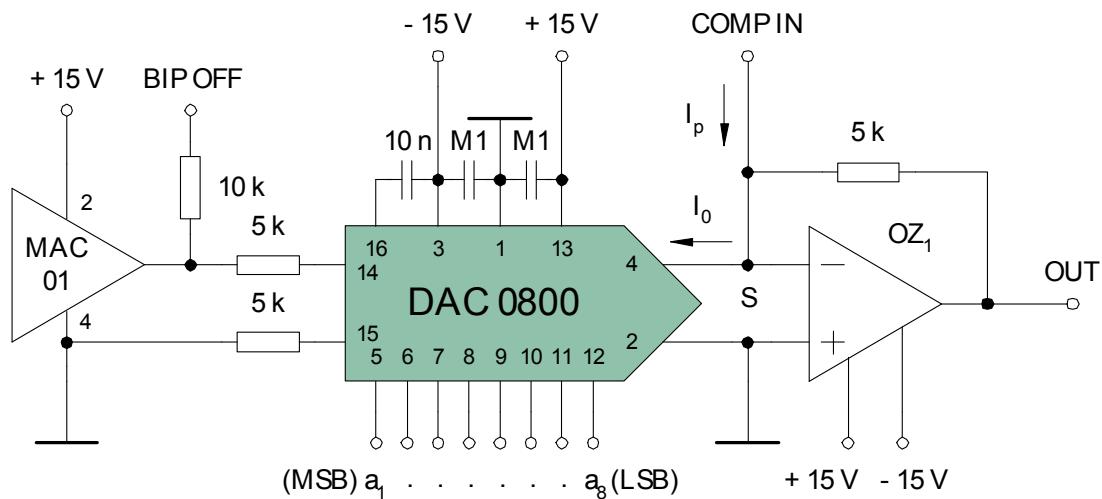
Obrázek 31.3.3: Blokové schéma DA převodníku DAC0800

proudových sběrnic I_0 a \bar{I}_0 prostřednictvím spínaných proudových zdrojů s tranzistory T_1 až T_8 a odporovou síťí $R - 2R$ viz obr. 31.3.3. Při úrovni H na číslicových vstupech

B_1 až B_8 připojí spínače S_1 až S_8 příslušné váhové proudy na výstup I_0 a při úrovni L na výstup I_0 .

Nezávislost váhových proudů na teplotních změnách zajišťuje referenční zdroj proudu s tranzistorem T_{10} a zesilovačem Z, ke kterému se připojuje referenční proud o jmenovité hodnotě $2mA$. Kondenzátor s kapacitou $10nF$ připojený mezi vývody 3 a 16 slouží ke kmitočtové kompenzaci zesilovače Z. Číslicové vstupy S_1 až B_8 řídí spínače S_1 až S_8 prostřednictvím převodníku úrovní, přičemž svorkou V_{LC} (pin 1) lze volit slučitelnost převodníku s obvody TTL, DTL, CMOS atd.

Vstupní referenční proud I_{REF} je odvozen pomocí vnějšího přesného odporu R_{REF} ze zdroje referenčního napětí U_{REF} . Souběh referenčního proudu a plného výstupního proudu I_{FS} je zachován v rozpětí dvou dekád proměnné unipolární reference a umožňuje použít IO též jako násobící převodník. Výstupní proudy I_0 , \bar{I}_0 z vysokoimpedančních výstupů se mohou využívat přímo nebo pomocí vnějších odporů, popřípadě pomocí OZ, se mohou převést na napětí. Převodník pracuje se vstupním přímým binárním kódem při využití přímého proudového výstupu I_0 nebo se vstupním komplementárním binárním kódem, využije-li se doplňkový proudový výstup \bar{I}_0 . Rozhodovací úroveň číslicových vstupů lze z vnějšku nastavit na potřebnou hodnotu. Proto lze k řízení převodníku DAC0800 použít všechny běžně používané řady log. obvodů.



Obrázek 31.3.4: Příklad zapojení převodníku DACo800

Příklad zapojení D/A převodníku je na obr. 31.3.4. Obsahuje kromě vlastního D/A převodníku DAC0800 zdroj referenčního napětí MAC01 se jmenovitým referenčním napětím +10 V a invertor se zesilovačem, pracujícím ve funkci převodníku proudu na napětí pro realizaci napěťového výstupu převodníku. Funkce je následující: Napětí +10V

z MAC01 je pomocí odporu $5k\Omega$ převedeno na proud $I_{REF} = 2mA$, který je přiveden do kladného referenčního vstupu DAC0800, kde je vynásoben nastavenou hodnotou číslicového signálu, zadanou pomocí osmi dvoupolohových přepínačů. Poté se proud $-2 \cdot (1 - 2^{-8}) mA$ objeví na výstupu I_0 a invertující zesilovač převede na odpovídající napětí. Zpětnovazební rezistor zesilovače $5k\Omega$ určuje rozsah výstupního napětí o až 10 V (unipolární režim). Jsou-li svorky BIP OFF a COMP IN propojeny, pak do sčítacího bodu S je přiveden proud $I_p = I_{REF}/2$ tj. 1 mA ($I_p = 10V/10k\Omega$) opačného směru než I_0 , který způsobí trvalý posun výstupní napěťové úrovně převodníku o $-5V$, takže rozsah převodníku bude $\pm 5V$ (bipolární režim) a hodnota výstupního napětí je určena dvojkovým kódem s posunutím (MSB určuje polaritu výstupního napětí).

Obsah

32.1 Filtry ARC 2. řádu	298
32.1.1 Základní principy funkce filtrů ARC	298
32.1.2 Obvody s náhradou cívky	298
32.1.3 Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností	298
32.1.4 Vliv reálných odporů a kondenzátorů	299

32.1 Filtry ARC 2. řádu

32.1.1 Základní principy funkce filtrů ARC

Při realizaci filtrů RLC pro nízké kmitočty jsou největší problémy s kvalitou, rozměry a cenou cívek. Proto se pro nízké kmitočty s výhodou nahrazují **aktivními filtry RC** (filtry ARC). Jejich základní princip spočívá v "náhradě" cívky pomocí zapojení **aktivního prvku** (operační zesilovač, tranzistor) se dvěma rezistory a kapacitory. Nahradit cívku můžeme v zásadě dvěma základními způsoby. První spočívá v použití obvodu, který přímo nahrazuje cívku jako dvojpól a vykazuje mezi určitými svorkami příslušnou indukčnost. Druhý princip, jak bude ukázáno dále, nahrazuje cívku nepřímo, pomocí transformace výchozího LRC obvodu na ekvivalentně se chovající strukturu RCD, která indukční prvek neobsahuje, ale na druhou stranu potřebuje **syntetický prvek D** - dvojný kapacitor (kmitočtově závislý negativní rezistor).

32.1.2 Obvody s náhradou cívky

Aktivní filtry ARC, které vycházejí z filtru RLC a využívají k tomu přímou či nepřímou náhradu cívek, mají velké množství různých variant zapojení. Objasnění jejich funkce představuje i řadu různých pohledů na činnost filtru. V oblasti návrhu ARC filtru převažují dva hlavní přístupy. Velmi názorný je takový přístup, který vytváří obvody, vykazující na vstupních svorkách induktivní impedanci. Ty lze využít jako přímou náhradu indukčnosti ve filtru RLC. Zřejmě nejčastější je ale takový pohled, kdy vytváříme celý obvod ARC s přenosovou funkcí 2. řádu jako ekvivalenci obvodu LRC 2. řádu, přičemž přímá náhrada cívky v obvodu nemusí být na první pohled zřejmá.

32.1.3 Stavební prvky filtrů ARC a základní vlivy jejich reálných vlastností

Stavebními prvky filtrů ARC jsou rezistory, kapacitory a aktivní prvky, jak již bylo naznačeno v předešlém textu. I pro nejjednodušší posouzení funkce, klasifikaci a výběr optimálního zapojení filtrů ARC je potřeba rozumět alespoň základním vlivům reálných vlastností těchto stavebních prvků na výsledné parametry ARC obvodu.

32.1.4 Vliv reálných odporů a kondenzátorů

(C_1 , i C_2) vytvářejí se zbytkem obvodu rezonanční obvod RLC, lze vliv jejich ztrát modelovat sériovým či paralelním spojením ideálního kapacitoru s rezistorem. Tento vliv lze posuzovat v principu shodně jako u filtrů RLC. Při ideálních vlastnostech zbývající části obvodu určuje hodnotu činitele jakosti celkového obvodu činitel jakosti reálného kondenzátoru $Q_c = \frac{1}{tg\delta}$. Jeho hodnota musí být proto podstatně vyšší než výsledná funkční hodnota činitele jakosti celého obvodu (alespoň 10x). Při nižších hodnotách je třeba tento vliv brát v úvahu a pokud je to možné, kompenzujeme jej snížením vnějšího zatlumení tak, aby výsledné Q odpovídalo požadovanému. Je potřebné si uvědomit, že ztráty kondenzátorů může obdobně zvýšit i sériové či paralelní spojení kondenzátorů s parazitními odpory, jako je např. vnitřní odpor zdroje, parazitní vstupní a výstupní odpor aktivních prvků apod.

Část XIII

Elektronické napájecí zdroje

Obsah

33.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích	304
33.2 Neřízené usměrňovače	304
33.2.1 Usměrňovače s nesetrváčnou zátěží	304
33.2.2 Usměrňovače se sběrným kondenzátorem (s RC zátěží)	304
33.2.3 Usměrňovače s nárazovou tlumivkou (s RL zátěží)	304
33.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí	305
33.3.1 Nelineární (parametrické) stabilizátory	306
33.3.2 Lineární spojité stabilizátory	309
33.4 Násobiče napětí	310
33.5 Ochranné a signalační obvody zdrojů	310
33.5.1 Pojistky	310

33.1 Metody snímání proudu v napájecích zdrojích

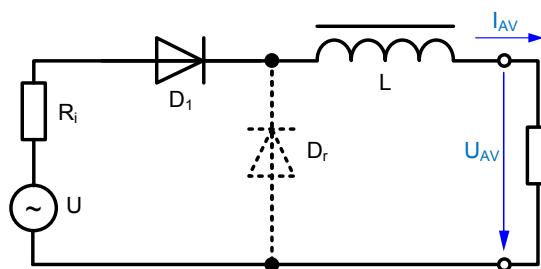
33.2 Neřízené usměrňovače

33.2.1 Usměrňovače s nesetrvačnou zátěží

33.2.2 Usměrňovače se sběrným kondenzátorem (s RC zátěží)

33.2.3 Usměrňovače s nárazovou tlumivkou (s RL zátěží)

Základní schéma zapojení je na obr. 33.2.1. Obsah vyšších rušivých harmonických produktů lze snížit sériově se zátěží zapojeným obvodem typu hornofrekvenční zádrž. I zde je filtrační účinek závislý na poměru zatěžovací konstanty $\tau_L = \frac{L}{R_L}$ a doby periody $T = \frac{1}{f}$ - je to činitel $K = \tau_L/T$. ($K \uparrow: \tau_L \uparrow, T \downarrow \Rightarrow L \uparrow, R_L \downarrow$). Tyto usměrňovače jsou tedy výhodné pro zátěže typu "malé napětí x velký proud". I tady lze elegantně podpořit velkou hodnotu koeficientu K tím, že obvod budeme napájet signálem o vysokém kmitočtu. Zatím co v případě RC zátěže byl kondenzátor pamětí napětí, tady použitá tlumivka je naopak pamětí proudu. Z toho důvodu je např. jednocestné zapojení s nárazovou tlumivkou fyzikálně nevhodné, protože mohou nastat jen dva krajní (a oba špatné) případy.



Obrázek 33.2.1: Jednocestný jednofázový usměrňovač RL zátěží.

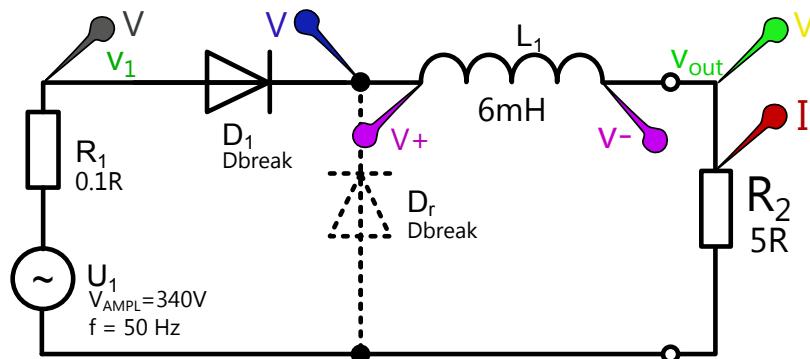
- Bude-li indukčnost veliká (v limitě nekonečná), pak podle Lenzova pravidla udrží proud v obvodu (je celý v sérii) na stálé hodnotě i co do směru, dioda se nemůže vůbec uzavřít a obvod nemůže usměrňovat - nebude mít střídavou složku.

- Naopak při malé hodnotě (proti jakési kritické) dioda zavře, obvod se přeruší a energie magnetického pole cívky (je vázána existencí proudu) se nemůže uplatnit v překlenutí mezer dodávky energie na výstup. Při dalším otevření diody můžou navíc nastat přechodné děje.

Existuje však velice jednoduchá a plně funkční úprava a tou je doplnění jednocestného usměrňovače tzv. **rekuperační (nulovou) diodou** - D_R (kreslena čárkováně viz obr. 33.2.1). Při uzavření hlavní diody D_1 se tlumivka snaží držet proud obvodem ve stejné velikosti a ve stejném směru a tento proud otevře rekuperační diodu D_R .

Mezi filtrací se sběrným kondenzátorem (RC zátěží) a s nárazovou tlumivkou (RL zátěží) je ještě zajímavý rozdíl: filtrace paralelním kondenzátorem pracuje s hyperbolicky se měnící impedancí $X_C = \frac{1}{\omega C}$ a potlačení vysokých čísel harmonických je čím dál tím menší. Obvod se sériovou tlumivkou pracuje s impedancí $X_L = \omega L$ a potlačující efekt lineárně roste. *Zvlnění na RC zátěži má proto obvykle dosti značný obsah vysokých harmonických a je pilovitého průběhu. Zvlnění na RL zátěži je za stejných podmínek K harmonicky čistší a má charakter sinusovky.*

Příklad 33.2.1. Proveďte simulaci vyznačených obvodových veličin obvodu na obrázku 33.2.2 se zadanými hodnotami prvků v programu PSpice¹.

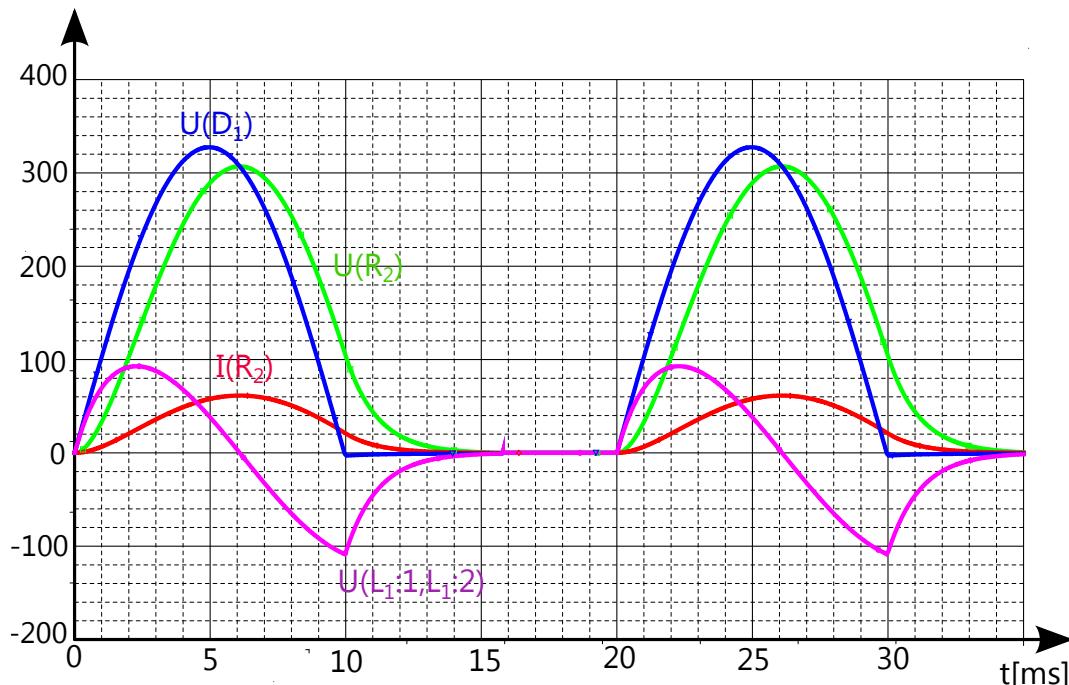


Obrázek 33.2.2: Neřízený Jednofázový usměrňovač s nulovou diodou. Simulované veličiny jsou vyznačeny barevnými markery.

33.3 Stabilizátory stejnosměrného napětí

Stabilizátory napětí na svém výstupu konstantní napětí v pokud možno co nejširším rozsahu odebíraného výstupního proudu a dodávaného vstupního napětí [Zahlava]

¹Simulace je provedena v programu OrCAD PSpice ver. 16.3

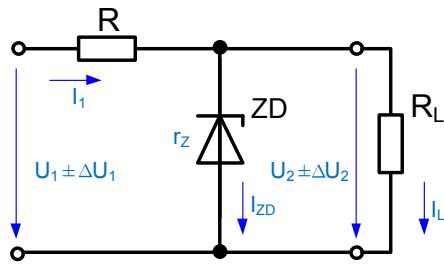


Obrázek 33.2.3: Průběhy vyznačených veličin jednofázového neřízeného usměrňovače s RL zátěží (6mH, 5Ω) a nulovou diodou [ENZ/SIMoo2]

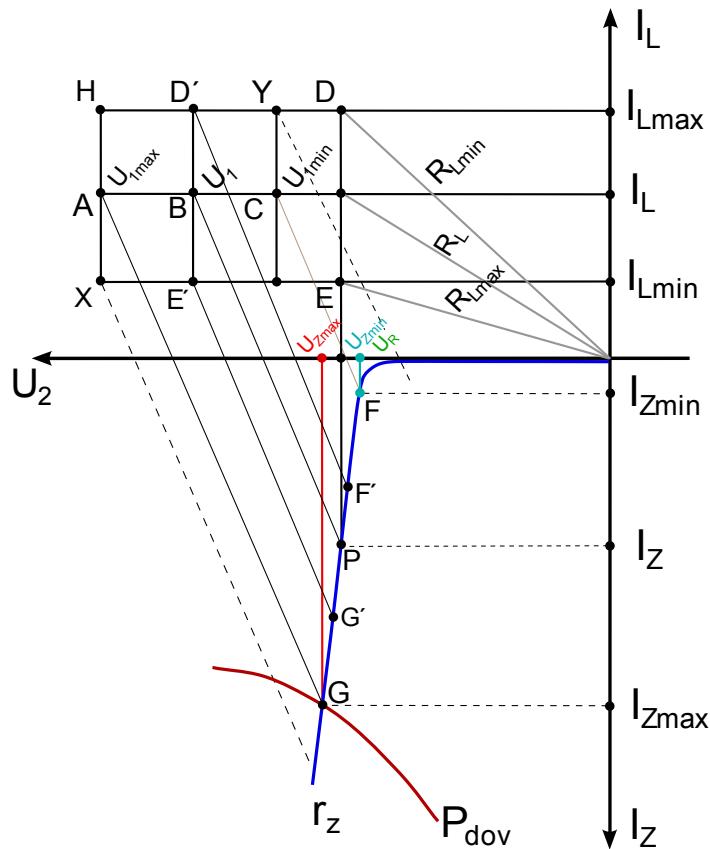
- nelineární (parametrické) stabilizátory napětí,
- lineární spojité stabilizátory napětí

33.3.1 Nelineární (parametrické) stabilizátory

Využívají vlastnosti VA charakteristik některých jako je otevřený PN přechod, Zenerovy diody, termistory a jiné. Pro tyto účely potřebujeme tzv. prvky triodového typu u kterých platí, že *dynamický vnitřní odpor je podstatně nižší jak statický*. Tedy $R_{dyn} < R_{stat}$. Pro naše účely jsou nejčastěji používané Zenerovy diody a dvojpólové integrované napěťové referenční obvody. Zenerovy diody jsou vyráběny jako malovýkonové (anodová ztráta do 1W) a výkonové (obvykle 10W a více). Pro referenční účely jsou často doplněny dalšími pomocnými kompenzačními prvky. Vlastní princip nelineárního spojitého stabilizátoru (podivný název „parametrický“ nebudeme používat) je velice prostý: obvod dle obr. 33.3.1 tvoří dělič s horním odporem lineárním a dolním (je paralelně k zátěži) tvořeným popsaným nelineárním odporem triodového typu. Za těchto okolností má tento obvod pochopitelně přenos dynamický podstatně menší jak statický a tedy je to stabilizátor napětí.



Obrázek 33.3.1: Nelineární spojitý stabilizátor napětí.



Obrázek 33.3.2: Grafické řešení nelineárního stabilizátoru.

Řešení je výhodné v grafické podobě - obr. 33.3.2. Ve třetím kvadrantu je nakreslena VA charakteristika². Bod B odpovídá zvolenému vstupnímu napětí U_1 a výstupnímu proudu I_2 a tedy i velikosti odporu R_L . Úloha může být nyní dána např. kolísáním vstupního napětí od $U_{1\max}$ do $U_{1\min}$ (body A a C), nebo kolísáním zátěže nebo proudu I_2 (

²Je typická určitým Zenerovým napětím U_z , sklonem pracovní části VA charakteristiky (dynamickým vnitřním odporem r_z) a dovolenou anodovou ztrátou P_{dov} . Tato ztráta závisí na způsobu chlazení.

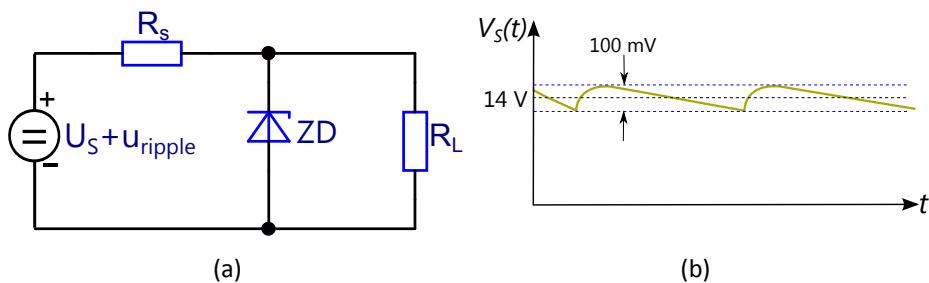
body E' a D'). Při současném působení změn vznikne obrazec (přibližně obdélník) X, E, D, H, což je geometrické místo možných stavů obvodů. Na vlastní VA charakteristice prvku pro volený "předřadný" odpor R vzniknou body G, P a F a to je grafické řešení. Vidíme, kdy hrozí "zhasnutí" nebo přetížení Zenerovy diody. Projekcí bodu G, P a F na vodorovnou osu zjistíme okamžité hodnoty výstupního napětí stabilizátoru U_2 a jeho kolísání ΔU_2 . Lze snadno odečíst zvládnutelné kolísání vstupního napětí či velikosti zátěže atd. Z obrázku je také vidět, že zlepšení stabilizačního účinku obvodu lze dosáhnout zvětšením vstupního napětí (větší odpor R) nebo výběrem diody s menším dynamickým odporem r_z . Velice vtipná možnost zlepšení přenosových vlastností stabilizátoru je při náhradě lineárního odporu R nelineárním prvkem s pentodovým charakterem VA charakteristiky. Může to být třeba bipolární nebo lépe unipolární tranzistor. Pak vlastně Zenerovu diodu napájíme zdrojem konstantního proudu a to je hojně využíváno v integrovaných stabilizátozech.

Z obr. 33.3.1 lze snadno odvodit činitel napěťové stabilizace

$$S_u = \frac{\Delta u_{vst}}{\Delta u_{vyst}} = \frac{R + r_z \parallel R_L}{r_z \parallel R_L} \cong \frac{R + r_z}{r_z}, \text{ kde } r_z \ll R_L \quad (33.3.1)$$

Příklad 33.3.1. Vliv nenulového dynamického odporu Zenerovy diody na zvlnění výstupního napětí [PAEE] str. 369.

Zadání: $U_S = 14V; u_{ripple} = 100mV; U_Z = 8V; r_z = 10\Omega; R_S = 50\Omega; R_L = 150\Omega$.



Obrázek 33.3.3: K příkladu nenulového dynamického odporu Zenerovy diody na přenos zvlnění ze vstupního napětí na výstupní napětí

Řešení: Abychom stanovili velikost výstupního napětí, amplitudu zvlnění napětí na zátěži a mohli také určit vliv velikosti dynamického odporu r_z , vyjdeme z náhradního lineárního obvodu na obrázku 33.3.4.

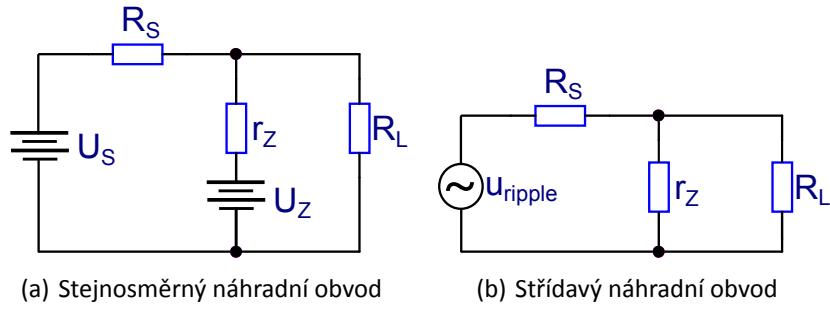
1. Stejnosměrný ekvivalentní obvod:

$$U_L = U_S \frac{R_L \parallel r_z}{R_S + R_L \parallel r_z} + U_z \frac{R_S \parallel R_L}{r_z + R_S \parallel R_L} = 2.21 + 6.32 = 8.53V \quad (33.3.2)$$

2. Střídavý ekvivalentní obvod:

$$u_L = v_{ripple} \frac{r_z \parallel R_L}{R_S + r_z \parallel R_L} = 0.016V \quad (33.3.3)$$

Tedy jedna šestina zvlnění vstupního napětí se přenese na výstupní svorky stabilizátoru.



Obrázek 33.3.4: Stabilizátor se ZD lze pro výpočet jeho ss chování v okolí pracovního bodu linearizovat pomocí NLO

Schopnost stabilizace je horší, čím větší má Zenerova dioda dynamický odpor r_z . Proto musí být r_z výrazně nižší, než hodnoty rezistorů R_S a R_L (viz rov. 33.3.3).

33.3.2 Lineární spojité stabilizátory

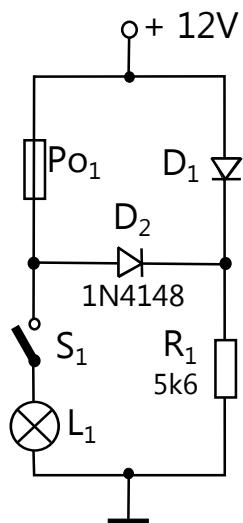
33.4 Násobiče napětí

33.5 Ochranné a signalizační obvody zdrojů

33.5.1 Pojistiky

33.5.1.1 Signalizace přerušené pojistky

Rozsvícením svítivé diody D_1 , je uživatel upozorněn na přerušenou tavnou pojistku Po_1 v zařízení napájeném malým napětím. Je-li pojistka v pořádku, je při zapnutém vypínači S_1 na svítivé diodě napětí tvořené úbytky na pojistce a otevřené diodě D_2 , jenž nestačí pro její rozsvícení. Jakmile se však pojistka přeruší, dioda D_1 se rozsvítí. Průchodu proudu spotřebičem přes D_2 při sepnutém vypínači S_1 brání její polarizace.



Obrázek 33.5.1: Obvod signalizující přerušení pojistky v nízkonapěťovém obvodu.

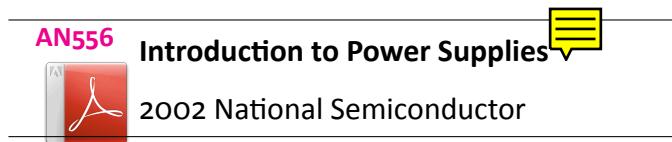
Obsah

34.1 Úvod	312
34.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice	312
34.3 DC/DC měniče bez transformátoru	315
34.3.1 Vymezení pojmu a základních požadavků	315
34.3.2 Step-down converter (snižující neinvertující měnič)	319
34.3.3 Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)	321
34.3.4 Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou)	322
34.3.5 Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)	322
34.3.6 SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)	322
34.4 DC/DC měniče s transformátorem	323
34.4.1 Jednočinný propustný měnič	323
34.4.2 Jednočinný blokující měnič	331
34.5 Metody regulace spínaných zdrojů	333
34.5.1 Základy impulzní regulace	333
34.5.2 Regulační smyčka	333
34.6 Sbírka zapojení neizolovaných měničů	335
34.6.1 Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem	335

34.1 Úvod

Spínané napájecí zdroje plní funkci stejnou jako zdroje se spojitou regulací. Výkonový člen spínacích zdrojů je však zatěžován impulzně, tj. střídavě spínán a rozepínán. Lze tedy využít výhody impulzního režimu, tj. odebírat impulzní výkon podstatně větší, než je trvalý výkon při lineárním režimu regulátoru s týmž výkonovým členem. Spínací zdroje mají obecně větší účinnost než zdroje se spojitou regulací. Jsou výhodné zvláště tam, kde je velký rozdíl napětí na vstupu a výstupu regulátoru a kde jsou požadované malé rozměry. Impulzní regulace zajistí stabilizované výstupní napětí i pro velké změny vstupního napětí; účinnost zdroje se při tom téměř nemění. I přes větší obvodovou složitost jsou ekonomicky výhodnější, neboť jejich použití vede k podstatné energetické úspoře.

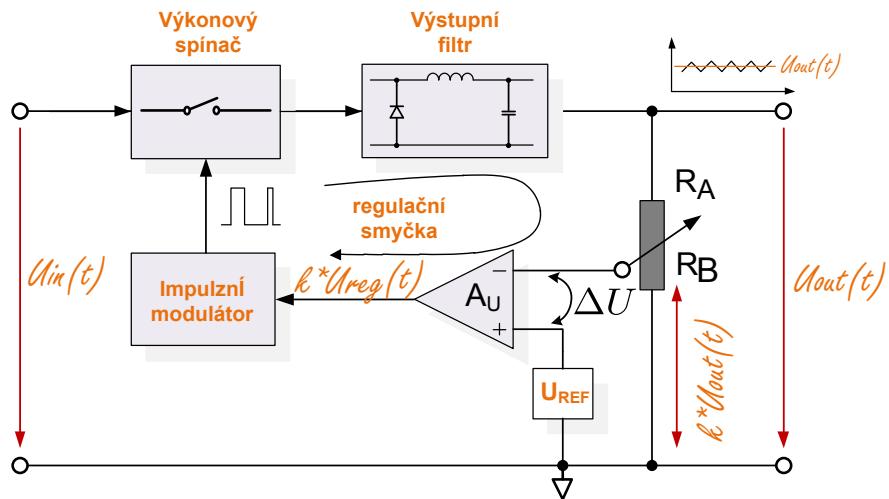
Impulzně regulované zdroje však mají v porovnání se zdroji s lineární regulací i některé nevýhodné vlastnosti, například pomalejší reakci výstupního napětí na rychlé změny zatěžovacího výstupního proudu. Při požadavku malého zvlnění výstupního napětí se nesmí zanedbat vliv impulzního charakteru těchto zdrojů. Impulzně regulované zdroje jsou také zdrojem rušivých signálů, které jsou generovány spínacími prvky [Hammembauer].



34.2 Impulzní regulace ve výkonové elektronice

Základním principem a současně odlišností impulzní regulace od regulace klasické je v její *nespojitost*. To znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí stabilizováno zásahy regulačního člena pouze v určitých, časově omezených intervalech. Podstata regulačního člena (regulátoru) tedy spočívá v řízení vzájemných časových relací aktivního a pasivního intervalu pracovního cyklu v závislosti na velikosti zesílené regulační odchylky.

Akční člen je tedy řízen dvouhodnotovým signálem, mající význam *zapnutí* nebo *vypnutí* výkonové součástky. Následující příklad demonstруje, jak lze tento signál vytvořit pomocí **pulzně-šířkové modulace** v simulátoru **LTS spice**. V simulacích některých topologií spínaných zdrojů bude místo zdroje s lineárně narůstajícím výstupním napětím viz obr. 34.2.3 použita regulační odchylka.



Obrázek 34.2.1: Základní schéma impulzního regulátoru

Srovnáme-li pro názornost klasický a impulzní regulátor na úrovni blokových schémat, vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál U_{REF} , zesilovač regulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprostě odlišné.

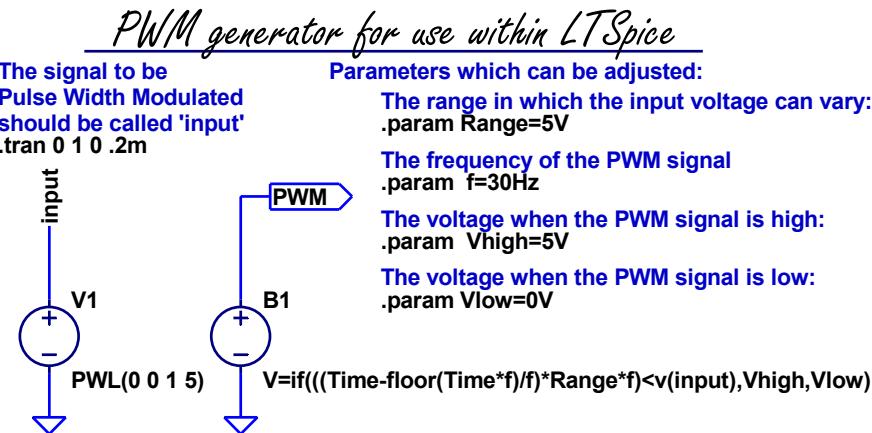
U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpór výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní. Z toho, jak je již známo, vyplývá velká poměrná výkonová ztráta na regulačním členu a tedy i malá účinnost spojité regulace za běžných provozních podmínek.

Impulzní regulace obr. 34.2.1 umožňuje výrazně snížit výkonovou ztrátu na regulačním členu. V tomto případě pracuje regulační prvek (tranzistor) jako řízený spínač. Proud jím tedy prochází pouze po určité interval pracovního cyklu. Přitom okamžitá výkonová ztráta v aktivním (sepnutém) stavu je vzhledem k $U_{CES} \rightarrow 0$ řádově menší, než u lineárního regulátoru. Další předností je, že velikost ztráty v podstatě nezávisí na rozdílu vstupního a výstupního napětí, ale prakticky pouze na kolektorovém proudu tranzistoru.

Možnost použít spínací regulační člen při stabilizaci stejnosměrného napětí je podmíněna jeho vzájemnou součinností s filtrováním členem, který na rozdíl od aplikace ve spojitém regulátoru musí mít výrazný akumulační charakter. Uspořádání filtru, který je pro větší výkony vždy typu LC, je podřízeno topologii měniče. Princip činnosti nerozlučně vázané dvojice spínač - akumulační výstupní filtr spočívá v akumulaci energie, která je v

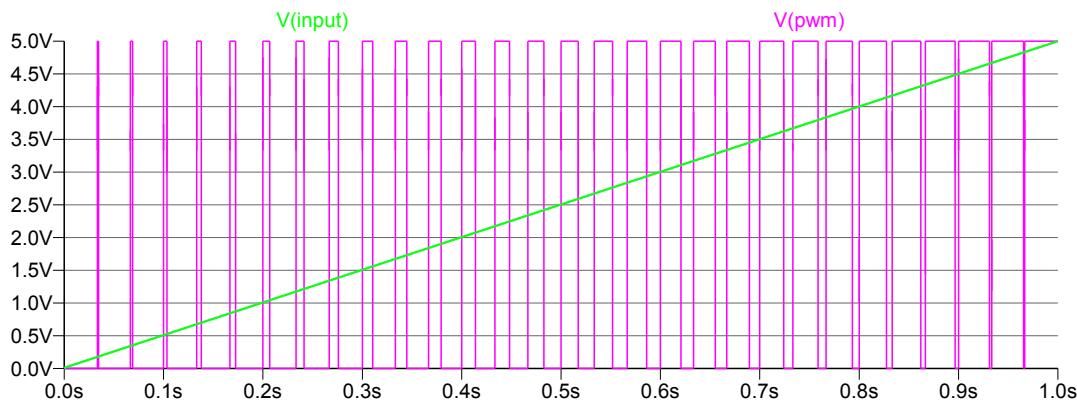
aktivním intervalu odebrána ze zdroje, aby mohla být v následujícím pasivním intervalu (spínač vypnut) dodávána z filtru do zátěže [Hammembauer].

Příklad 34.2.1. Na obr. 34.2.2 je realizován generátor šířkově modulovaného signálu pro simulátor LTSpice, jenž s výhodou využívá komponenty *B-source*, umožňující behaviorální popis požadovaného průběhu. Podrobnějším pohledem na zápis rovnic



Obrázek 34.2.2: Realizace PWM generátoru pomocí komponenty B-source (*Arbitrary behavioral voltage or current source*) v LTSpice (soubor pwm.asc)

dle obr. 34.2.2, lze dojít k závěru, že zdroj *B1* na svůj výstup vnutí hodnotu parametru *Vhigh*, nebo *VLow*, podle výsledku rozhodovací funkce *if*. Tj. jeli $Time - floor(Time*f)/f)*Range*f$ větší než $V(input)$, bude na výstupu $V_{high} = 5V$, v opačném případě $V_{low} = 0V$. Funkce *floor* zaokrouhluje hodnotu svého argumentu na celé číslo (*integer*), což vede na schodovitý průběh a funkce *Time* umožňuje do vztahu vnést okamžitou hodnotu simulačního času. Vzájemný odečtením získáme pilový průběh, kterým se komparuje s okamžitou hodnotou zdroje $V(input)$.



Obrázek 34.2.3: Výstupní signál $V(\text{pwm})$ z PWM generátoru na obr. 34.2.2 má-li rozhodovací napětí $V(\text{in})$ lineární charakter

34.3 DC/DC měniče bez transformátoru

34.3.1 Vymezení pojmu a základních požadavků

DC - DC měniče jsou obvody sloužící k regulaci elektrické energie, které mění vstupní stejnosměrné napětí U_1 na jiné výstupní stejnosměrné napětí U_2 . Budeme se přitom zabývat měniči tzv. *napěťového typu*, což jsou měniče napájené konstantním vstupním napětím z napěťového zdroje, nikoliv proudem, z proudového zdroje. V této kapitole se omezíme pouze na měniče bez transformátoru, které tedy neumožňují galvanické oddělení výstupu od vstupu [Patocka].

Každý měnič sestává z vlastního silového obvodu a řídicí elektroniky (regulačních obvodů). Silové obvody nesmí využívat při regulaci energie rezistorů a proto se mohou skládat jen ze **spínačů** a **akumulačních prvků**, tj. *indukčnosti a kapacit*.

34.3.1.1 Napájecí zdroj a zátěž měniče

DC/DC měniče mohou přenášet energii z principu oběma směry. Mohou tedy čerpat energii ze zdroje a dodávat ji do zátěže nebo také opačně energii čerpat ze zátěže a dodávat ji do zdroje. Pojmy zátěž a zdroj je proto nutné chápat v širším slova smyslu.

- Zdrojem s konstantním napětím U_1 , schopným dodávat i akumulovat energii, je akumulátor. Použijeme-li jako zdroj např. usměrňovač se sběrným kondenzátorem, pak není schopen dlouhodobě jímat energii z měniče, tj. dlouhodobě nesmí ve střední hodnotě převládat směr proudu do kladné svorky zdroje (krátkodobě, v okamžité hodnotě, je takový směr možný). Nabíjením sběrného kondenzátoru by totiž rostlo napětí U_1 . Tomu lze zabránit přeměnou dodávané energie na teplo ve vybíjecím rezistoru, či na Zenerově diodě, zapojené paralelně ke sběrnému kondenzátoru.
- Z hlediska schopnosti spotřeby či dodávky energie, lze rozlišovat zátěž *aktivní* a *pasivní*. Aktivní zátěž je opět např. akumulátor, ale třeba i stejnosměrný motor. Jeho náhradní zapojení, platné v ustáleném stavu, je uvedeno na obr. 11). Vnitřní rotační (pohybové) indukované napětí je úměrně otáčkám, proud pak momentu na hřídeli a to včetně znamének.

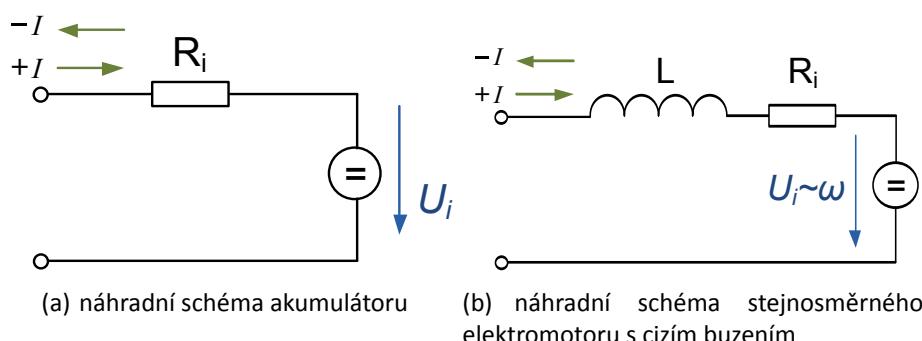
Teče-li proud ve střední hodnotě do zátěže (+I), pak motor pohání, tj. mění elektrickou energii na mechanickou (pracuje v *motorickém režimu*). Teče-li ze zátěže (-I), pak motor brzdí, tj. mění z vnějšku dodávanou mechanickou energii na energii elektrickou (pracuje v *generátorickém režimu*).

34.3.1.2 Pracovní kvadranty

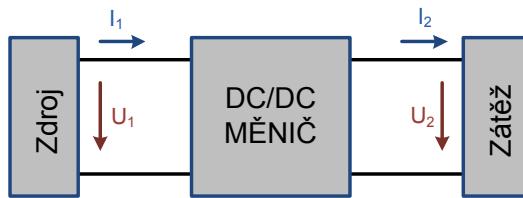
Označme si vstupní a výstupní napětí a proud měniče podle obr. 34.3.2. Podle polarity výstupního napětí U_2 a výstupního proudu I_2 může měnič pracovat ve čtyřech kvadrantech tzv. **VA-roviny** (viz obr. 34.3.3).

V kvadrantech 1 i 3 dodává měnič energii do zátěže. Je-li zátěží motor, tak pohání. Pasivní zátěže mohou pracovat pouze v těchto kvadrantech. V kvadrantech 2 a 4 dodává aktivní zátěž energii zpět do měniče. Jde-li o motor¹, pak brzdí.

¹Velikost napětí ss. motoru je úměrná otáčkám (rychlosti), polarita je dána směrem otáčení (uvažujeme



Obrázek 34.3.1: Aktivní zátěž.

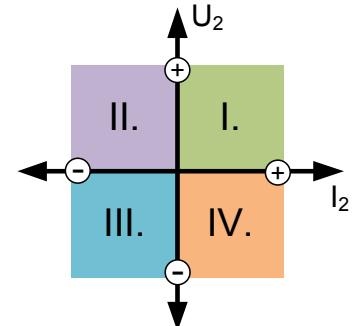


Obrázek 34.3.2: Označení vstupních a výstupních veličin DC/DC měniče.

34.3.1.3 Možnosti zapojení silového obvodu

Na první pohled jsou zřejmá určitá omezení:

- Indukčnost nikdy nesmí být zapojena paralelně ke vstupu či výstupu (protože tam je napětí s nenulovou střední hodnotou).
- Kapacita nikdy nesmí být zapojena do série se vstupní nebo výstupní svorkou měniče (protože tudy prochází proud s nenulovou střední hodnotou).
- Jako akumulační prvek nelze použít samostatně kapacitu, není-li v obvodu použita ještě indukčnost (protože by v měniči napěťového typu docházelo k nepřípustnému nárazovému nabíjení kondenzátoru zkratovým proudem). Čili měnič napěťového typu musí obsahovat alespoň jednu indukčnost.
- Žádný spínač nesmí zkratovat vstup ani výstup měniče.

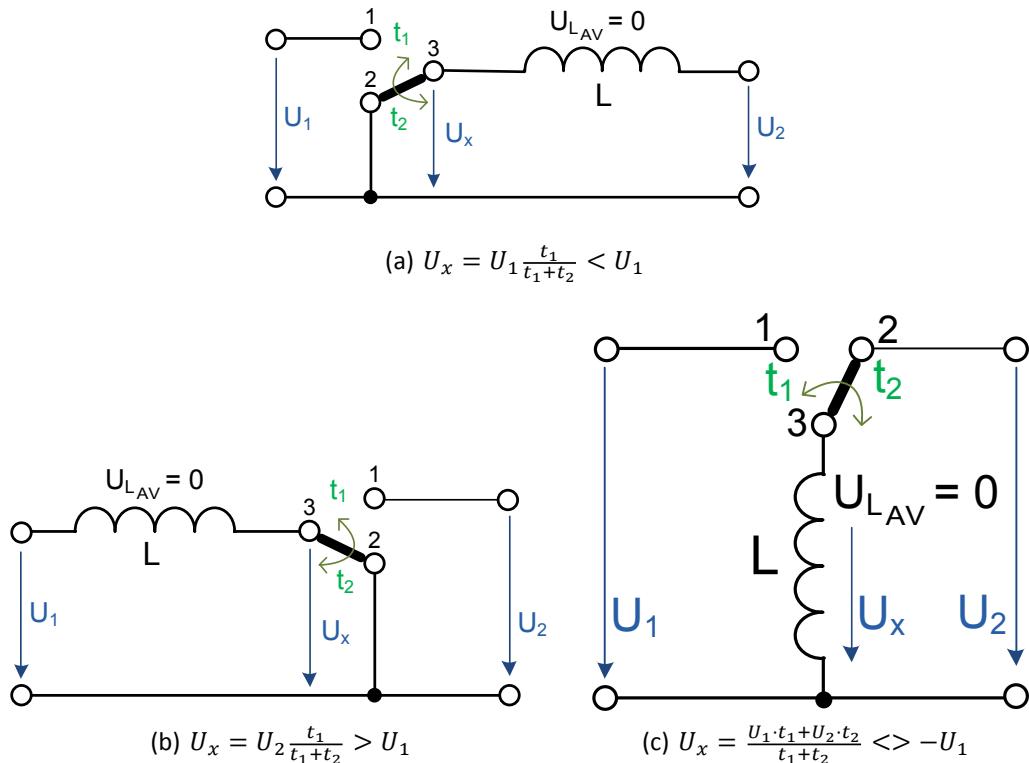


Obrázek 34.3.3: Pracovní kvadranty ve VA rovině.

34.3.1.4 Nejjednodušší měniče s jediným akumulačním prvkem

Pro výchozí představu, vysvětlující princip činnosti, vytvoříme silový obvod měniče ze dvou prvků. Bude to indukčnost L a ideální přepínač. Vezmeme-li v úvahu omezení z kap. 34.3.1.3, existují podle obr. 34.3.4 jen tři způsoby, jak takový měnič zapojit [Patocka].

motor s cizím buzením, např. s permanentními magnety). Velikost proudu je úměrná momentu na hřídeli, polarita je opět dáná směrem momentu, tj. zda motor brzdí či pohání. Je třeba si povšimnout, že přechod mezi generátorickým a motorickým režimem mezi kvadranty 2 a 1 nebo mezi 3 a 4 (tj. takový, kdy se nemění polarita napětí, ale jen proudu) vůbec nemusí být na hřídeli motoru opticky pozorovatelný, neboť v dané chvíli přechodu se změní jen znaménko momentu (proudu) a přesto otáčky hřídele mohou být konstantní.



Obrázek 34.3.4: Principiální schémata DC/DC měničů s jediným akumulačním prvkem.

Označme střední hodnotu napětí mezi společným uzlem přepínače 3 a zemí jako U_x . Předpokládejme, že přepínač je ovládán periodickým signálem s periodou T a s nastavitelnou střídou, takže po dobu t_1 spojuje svorky 3 - 1 a po dobu $t_2 = T - t_1$ pak svorky 3 - 2. Popišme nyní nejzákladnější vlastnosti tří měničů z obr. 34.3.4.

1. Střední hodnota U_x na obr. 34.4(a) musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (34.3.1)$$

Výstupní napětí je rovno U_x , neboť střední hodnota napětí na indukčnosti L musí být nulová. Platí proto:

$$U_2 = U_x = U_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} < U_1 \quad (34.3.2)$$

Výstupní napětí je vždy menší než vstupní a má stejnou polaritu. Jde tedy o měnič **snižující a neinvertující**. Jeho jiné názvy jsou: **step-down, chopper, buck, propustný měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 1 a 2. Čili měnič je schopen dávat napětí U_2 jediné polarity, ale proud I_2 muže téci oběma směry (je-li to umožněno - aktivní zátěž).

2. Střední hodnota U_x na obr. 34.4(b) musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = U_2 \frac{t_1}{t_1 + t_2} > U_1 \quad (34.3.3)$$

Vstupní napětí U_1 je rovno U_x (nulová střední hodnota napětí na indukčnosti L). Odsud pro U_2 platí:

$$U_2 = U_1 \frac{t_1 + t_2}{t_1} > U_1 \quad (34.3.4)$$

Střední hodnota výstupního napětí je vyšší než vstupní napětí a má stejnou polaritu. Jde tedy o zvyšující a neinvertující měnič. Jiný název je měnič **step-up, boost**. Možné pracovní kvadranty² jsou opět 1 a 2.

3. Střední hodnota U_x na obr. 34.4(c) musí vzhledem k činnosti přepínače být:

$$U_x = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{t_1 + t_2} <> -U_1 \quad (34.3.5)$$

Protože U_x je střední hodnota napětí na indukčnosti L, musí platit $U_x = 0$ tj.

$$U_1 = -\frac{t_1}{t_2} U_1 <> -U_1 \quad (34.3.6)$$

Výstupní napětí má opačnou polaritu než vstupní, jde tedy o měnič *invertující*. Velikost výstupního napětí může být větší i menší než vstupní. Vžité názvy jsou měnič **buck-boost, měnič se společnou tlumivkou, blokující měnič**. Možné pracovní kvadranty jsou 3 a 4.

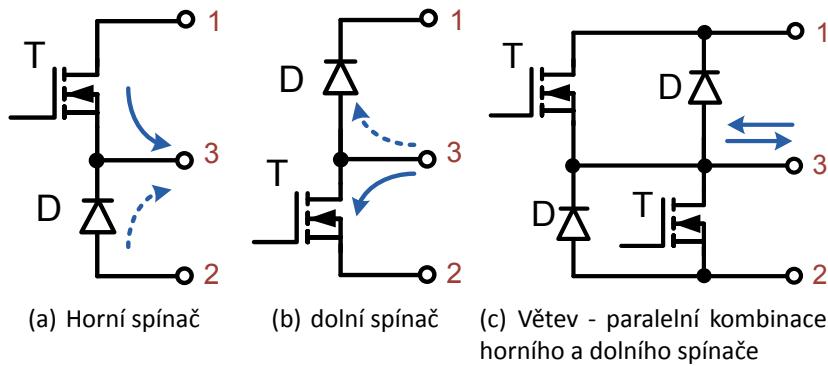
34.3.1.5 Prakticky realizované silové obvody

Kap. 34.3.1.4 ukazuje, že elektronicky ovládaný přepínač tvoří základní stavební kámen každého měniče. Tyto přepínače se ve skutečných obvodech realizují pomocí tzv. horních a dolních spínačů, což jsou *trojpóly* podle obr. 34.3.5.

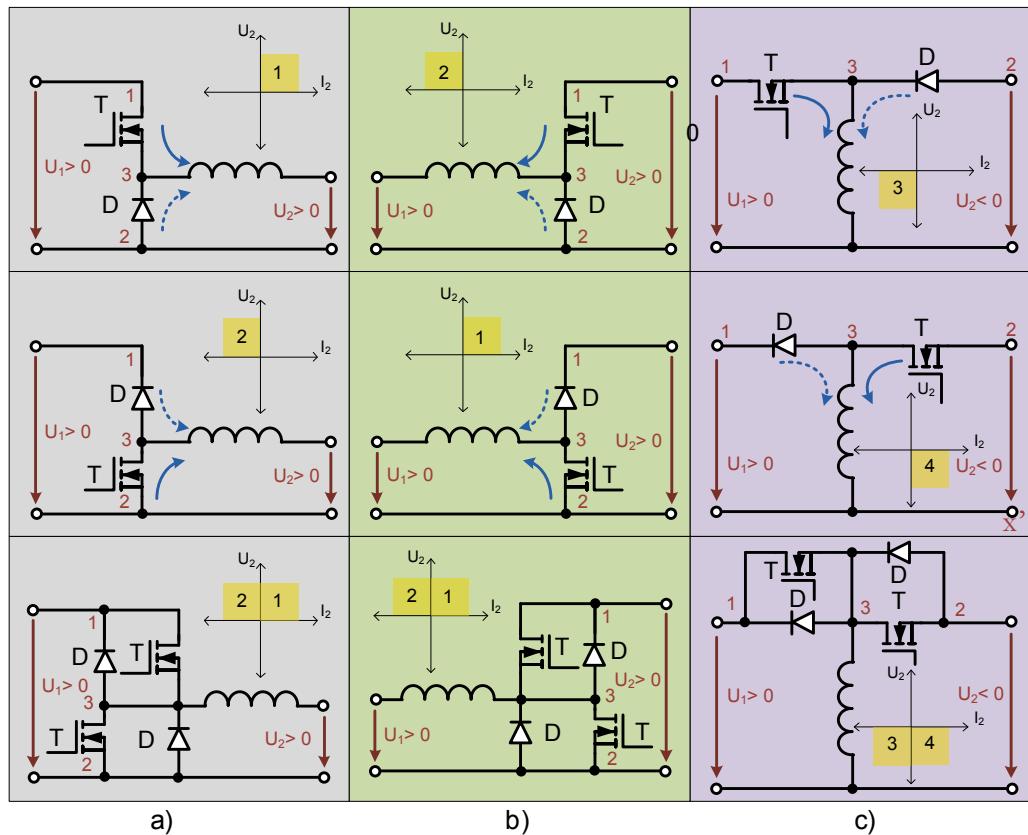
34.3.2 Step-down converter (snižující neinvertující měnič)

Jedná se o měnič s horním spínačem. Další jeho používané názvy jsou: propustný měnič, chopper, buck. *Pracuje v 1. kvadrantu*.

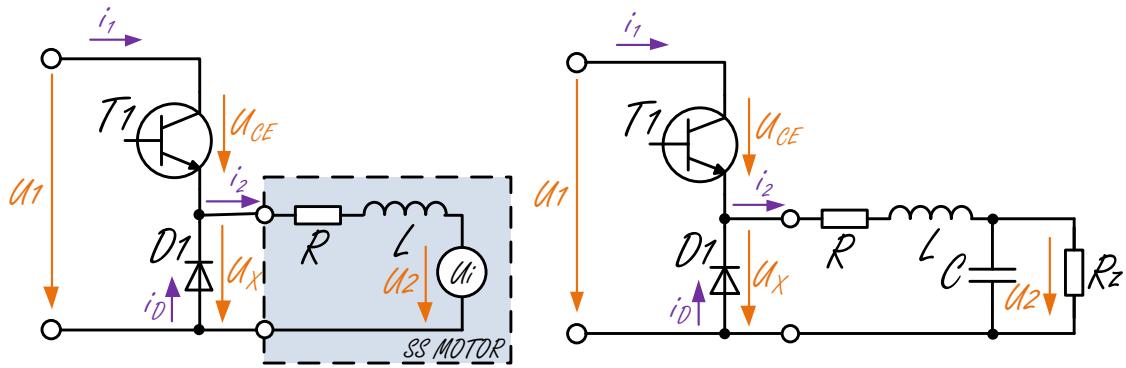
²Měnič 34.4(a) pracující v kvadrantu 1 je měničem 34.4(b) pracujícím v kvadrantu 2. Naopak 34.4(a) v kvadrantu 2 je 34.4(b) v kvadrantu 1. Čili 34.4(a) a 34.4(b) je vlastně týž obvod, pouze zaměňuje vstup a výstup.



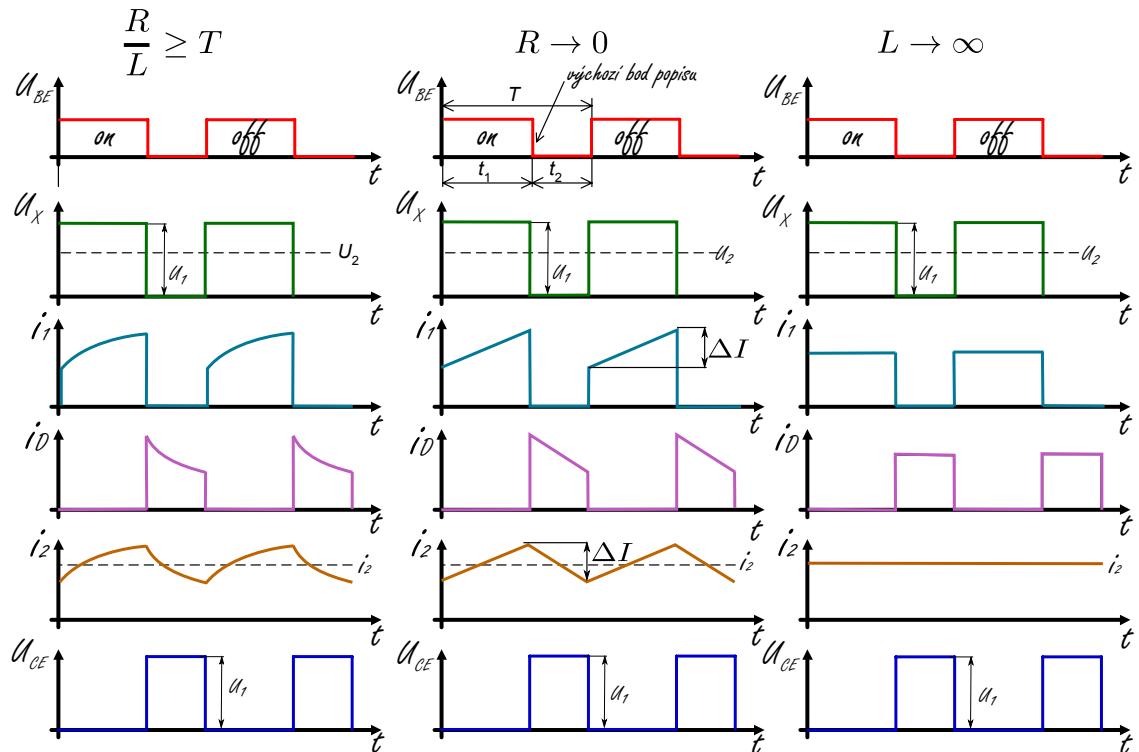
Obrázek 34.3.5: Horní a dolní spínač.



Obrázek 34.3.6: Skutečné silové obvody měničů z obr. 34.3.4 a jejich pracovní kvadranty: a) měnič snižující neinvertující (step-down), b) měnič zvyšující neinvertující (step-up), c) měnič invertující (buck-boost)

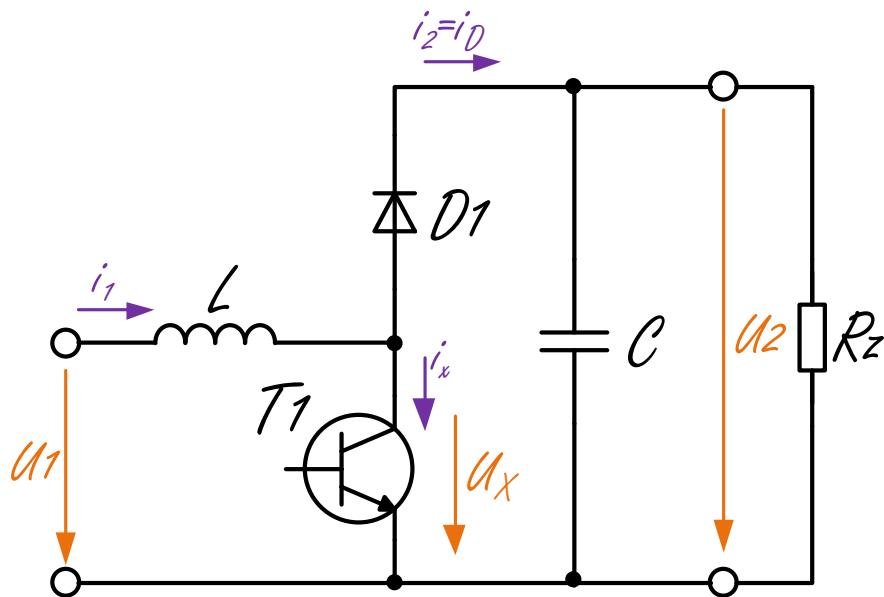


Obrázek 34.3.7: Snižující měnič pracující v prvním kvadrantu s aktivní zátěží typu stejnosměrný motor nebo s LC filtrem



Obrázek 34.3.8: Průběhy napětí a proudů snižujícího měniče

34.3.3 Step-up converter (zvyšující neinvertující měnič)



Obrázek 34.3.9: Zvyšujícího měnič pracující v prvním kvadrantu - Schéma zapojení

34.3.4 Buck-boost converter (Invertující měnič se společnou tlumivkou)

34.3.5 Cuk converter (Měnič se společným kondenzátorem)

34.3.6 SEPIC converter (Single-ended primary inductor converter)

34.4 DC/DC měniče s transformátorem

Základní popis DC/DC měničů bez transformátoru, provedený v kap. 34.3, platí i pro měniče s transformátorem. Doplněním vhodně zapojeného vf. impulsního transformátoru je umožněno galvanické oddělení výstupního a vstupního napětí a transformaci napětí a proudu. Nejčastěji se v praxi setkáme s transformátorovými verzemi měniče propustného z kap. 34.3.2 a měniče blokujícího z kap. 34.3.3 Existuje i transformátorová verze měniče Čukova z kap. 34.3.5.

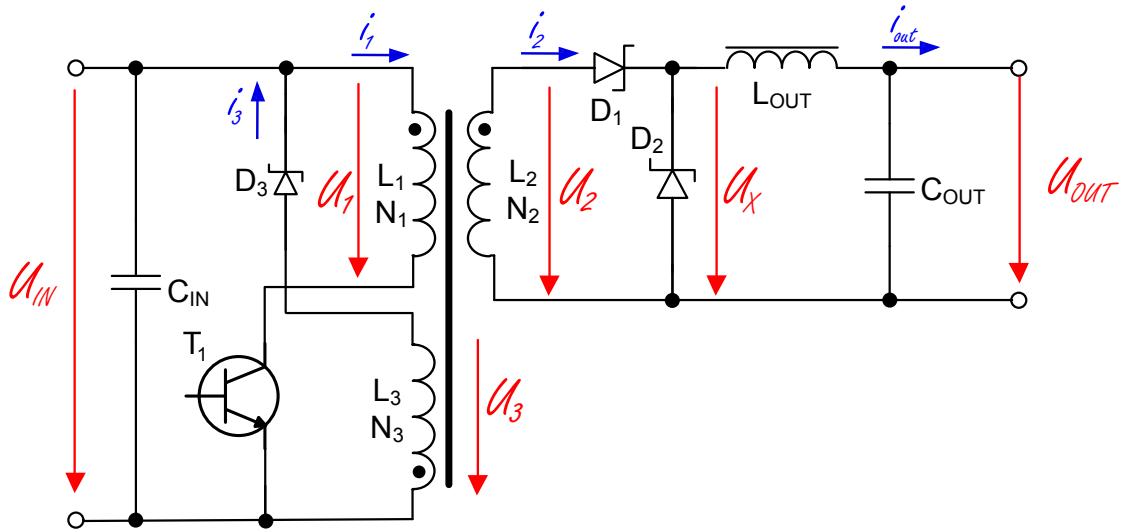
Snižující měnič z kap. 34.3.2 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako **měnič propustný**, neboť díky transformátoru lze převodovým poměrem zajistit výstupní napětí i vyšší než vstupní (názvy „snižující měnič“ a „step-down“ by tedy byly zavádějící). Princip činnosti však v hrubých rysech zůstává stejný.

Invertující měnič se společnou tlumivkou z kap. 34.3.4 je v transformátorové verzi nazýván výhradně jako měnič blokující, neboť díky transformátoru lze vyrobit napětí libovolné polarity (název „invertující měnič“ proto pozbývá výstižnosti).

Základní stavební kameny měničů bez transformátoru tj. horní spínač a dolní spínač (kap. 34.3.1.5) tvoří základ i u měničů s transformátorem, i když v zapojeních jsou tranzistor a jeho protilehlá dioda rozděleny tím, že je tranzistor na primární straně a dioda na sekundární. Použití transformátoru navíc vyžaduje demagnetizační obvody (zajištění nulové střední hodnoty primárního napětí) a další výstupní usměrňovací diodu (diody). To vše vede k tomu, že transformátorové měniče jsou **jednokvadrantové**. Výstupní napětí má jedinou možnou polaritu a výstupní proud jediný možný směr takový, že zátěž se chová vždy jako spotřebič, nikoli jako generátor.

34.4.1 Topologie Forward (Jednočinný propustný měnič)

Již z označení vyplývá, že k přenosu energie ze vstupního do výstupního obvodu dochází v aktivním intervalu 0 až δT , během něhož se současně akumuluje energie v magnetickém poli tlumivky L_{OUT} . Po dobu zbývající části periody $(1 - \delta)T$ je tlumivka od transformátoru oddělena a na výstup dodává energii nahromaděnou v magnetickém poli. Vzhledem k *blokujícímu měniči* je zde výhoda účinného LC filtru tvořeného tlumivkou a výstupním kondenzátorem C_{OUT} po dobu celého pracovního cyklu. Ve srovnání s blokujícím měničem je tedy možné dosáhnout řádově menší dynamické odchylky $\Delta U_{OUT}(t)$. Navíc proud tekoucí L_{OUT} , skládající se z ustálené složky I_{OUT} a pilovitého průběhu Δi_L má spojitý charakter v průběhu celé periody T .



Obrázek 34.4.1: Propustný měnič s akumulační tlumivkou a demagnetizačním vinutím

34.4.1.1 Popis činnosti

Nyní se věnujme podrobnějšímu rozboru funkce propustného měniče. Interval δT začíná **sepnutím tranzistoru** T_1 kladným impulzem z řídicích obvodů do jeho báze [Hammembauer], které přivede vstupní napětí na primární vinutí N_1 . V kapitole 27.4.1 byl odvozen vztah 27.4.4 pro magnetizační tok v jádře transformátoru. Pro nynější případ platí $u_1(t) = U_{in}$. Pak 27.4.4 nabude tvaru [Patocka]:

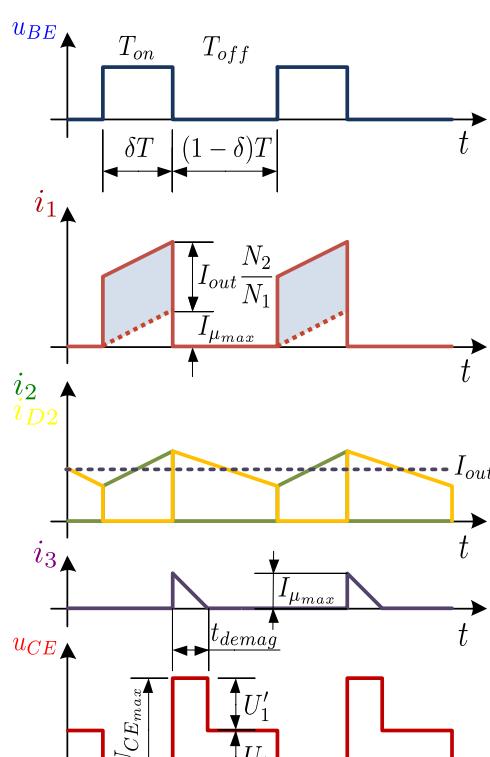
$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{N_1} U_{in} t \quad (34.4.1)$$

Takže po zapnutí tranzistoru tok lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci doby zapnutí δT bude mít své maximum

$$\Phi_{\mu_{max}} = \frac{1}{N_1} U_{in} \delta T \quad (34.4.2)$$

Během doby δT bude sekundární napětí $u_2(t)$:

$$u_2(t) = N_2 \frac{\Phi_\mu(t)}{dt} = \frac{N_2}{N_1} U_{in} = U_2 \quad (34.4.3)$$



Čili během doby δT je sekundární napětí konstantní. Protože jde o kladné napětí, je D_1 otevřená, D_2 zavřená a výstupní proud I_{out} musí téci ze sekundárního vinutí transformátoru.

Kolektorovým obvodem a primárním vinutím N_1 teče proud i_{prim} . Propustně polarizovanou diodou D_1 prochází transformovaný vstupní proud přes L_{out} do zátěže a výstupního filtračního kondenzátoru C_{OUT} . Tento sekundární proud i_2 se časem lineárně zvětšuje od určitého $I_{L_{min}}$ a zároveň se lineárně zvětšuje také proud i_1 , závislého na převodu transformátoru. Z kapitoly [27.4.1](#) víme, že primární proud zatíženého transformátoru bude mít hodnotu

$$i_1(t) = i_\mu(t) + I_2 \frac{N_2}{N_1} \quad (34.4.4)$$

Pro magnetizační proud $i_\mu(t)$ přitom platí vztah [\(27.4.8\)](#). V našem případě je $u_1(t) = U_{in}$ a proto tento vztah dostane konkrétní podobu:

$$i_\mu(t) = \frac{U_1 t}{L_1} \quad (34.4.5)$$

Vidíme, že stejně jako tok $\Phi_\mu(t)$ tak i magnetizační proud $i_\mu(t)$ lineárně narůstá (z nulové počáteční hodnoty). Na konci δT má magnetizační proud své maximum:

$$i_{\mu_{max}}(t) = \frac{U_1 \delta T}{L_1} \quad (34.4.6)$$

Během doby δT je odebírána energie ze zdroje U_{in} (složka $I_{out} \frac{N_2}{N_1}$ primárního proudu) a dodávána do zátěže.

Nyní vypneme tranzistor T_1 . Proud $i_1(t)$ musí téměř skokem zaniknout. V jádře ale existuje na konci doby δT magnetický tok $\Phi_{\mu_{max}}$, odpovídající proudu $I_{\mu_{max}}$.

Celková energie magnetického pole v okamžiku vypínání tranzistoru činí $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}^2$. Proud primárního vinutí je tranzistorem násilně přerušen.

Předpokládejme nejdříve, že neexistuje demagnetizační vinutí N_3 . Pak by při skokovém zániku primárního magnetizačního proudu stejně prudce zanikl i s ním svázaný tok $\Phi_{\mu_{max}}$. Pokles toku s obrovskou (teoreticky nekonečnou) strmostí $-\frac{d\Phi}{dt}$ způsobí vznik napěťového Diracova impulsu, opačné polarity oproti stavu v době δT , kdy tok narůstal. Tímto impulsem, přičteným k napětí U_1 , je napěťově namáhán zavírající se tranzistor. Přitom se celá energie $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}^2$ přemění na křemíkovém čipu v teplo a je přičinou jeho neodvratné destrukce. U reálného tranzistoru je velikost napěťového impulsu vždy omezena průrazným napětím tranzistoru. Nikdy totiž není tranzistor natolik pomalý, že by omezujícím faktorem byla malá strmost $-\frac{di_c}{dt}$ zániku kolektorového proudu během vypínání. Destrukční energetické účinky však zůstávají v každém případě zcela ekvivalentní.

Aby popsaná situace nenastala, je zde demagnetizační vinutí N_3 . Děj pak bude vypadat takto: Po vypnutí tranzistoru T_1 se opravdu na primárním vinutí objeví napětí U'_1 opačné polarity, než bylo U_1 v sepnutém stavu, viz. obr. 34.4.2. Toto napětí však bude mít přesně definovanou velikost, kterou „dovolí“ vinutí N_3 . Na tom se totiž objeví také indukované napětí u_3 . Vzhledem k obrácené orientaci vinutí vůči N_1 bude mít záporný pól „na zemi“ a kladný pól na diodě D_2 . Toto napětí by „chtělo“ být opět teoreticky nekonečné, ale D_2 se otevře a pracuje v součinnosti se zdrojem U_1 jako napěťový omezovač, omezující napětí u_3 na velikost U_1 . Celá magnetizační energie $\frac{1}{2}L_1I_{\mu_{max}}^2$ je vinutím N_3 odevzdána zpět do zdroje. Pak je zřejmé, že napětí indukované v primárním vinutí musí být:

$$U'_1 = u_3 \frac{N_1}{N_3} = U_1 \frac{N_1}{N_3} \quad (34.4.7)$$

Tento stav, kdy $u_1 = -U_1$ a $u_3 = U_1$, trvá po dobu, než tok $\Phi_\mu(t)$ klesne z počáteční hodnoty $\Phi_{\mu_{max}}$ na nulu. K tomu je třeba konečné doby t_{demag} , neboť U_1 není nekonečné a proto strmost poklesu $\frac{d\Phi}{dt}$ nemůže být nekonečně velká. Velikost U_1 je v této době konstantní a proto klesá tok lineárně. Celý jev se nazývá *demagnetizací jádra*.

Během demagnetizace se předává magnetizační energie jádra zpět do zdroje pomocí proudu $i_3(t)$. Proud $i_3(t)$ je přímo úměrný klesajícímu toku $\Phi_\mu(t)$ takto:

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \int u_3 dt = \frac{1}{L_3} \int \frac{N_3 d\Phi_\mu(t)}{dt} dt = \frac{N_3 \Phi_\mu(t)}{L_3} \quad (34.4.8)$$

Po skončení demagnetizace (uplynutí t_{demag}) je již magnetický tok nulový, jádro je energeticky neutrální, proto i napětí u_1 , u_2 , u_3 skokem zanikají na nulu. V neutrálním stavu soustava setrvává až do skončení doby $(1 - \delta)T$, tj. do zapnutí tranzistoru.

Pro magnetický tok během procesu demagnetizace musí platit:

$$\Phi_{\mu}(t) = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{\int u_1(t)dt}{N_1} = \Phi_{\mu_{max}} - \frac{U'_1 t}{N_1} \quad (34.4.9)$$

Po uplynutí t_{demag} je tok nulový. Položíme-li tedy $\Phi_{\mu}(t)$ dle (34.4.9) rovný nule, lze odsud vyjádřit t_{demag} .

$$t_{demag} = \frac{N_1 \Phi_{\mu_{max}}}{U'_1} \quad (34.4.10)$$

Za $\Phi_{\mu_{max}}$ dosadíme vztah (34.4.2) a za U_1 vztah (34.4.7). Tím dostaneme:

$$t_{demag} = \frac{N_3}{N_1} \delta T \quad (34.4.11)$$

Je zřejmé, že musíme zajistit, aby $(1 - \delta)T > t_{demag}$, jinak by tok ještě nestačil úplně zaniknout a už bychom znova spínali tranzistor. V průběhu dalšího sepnutí by se tok (a magnetizační proud) zvýšil opět o hodnotu $\Phi_{\mu_{max}}$ (resp. $I_{\mu_{max}}$, ale už z nenulové počáteční hodnoty a tak by neustále vzrůstal (během dalších period by se „aintegroval“ teoreticky na hodnotu $\rightarrow \infty$), až by došlo k přesycení jádra a tím k prudkému lavinovitému růstu magnetizačního proudu (neboť by současně klesla indukčnost L_1). Jev by postupoval až do zničení tranzistoru. Z výše uvedeného důvodu musí být maximální střída δ omezena na hodnotu:

$$\delta_{max} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{demag}} \quad (34.4.12)$$

Dosazením (34.4.11) za t_{demag} dostaneme:

$$\delta_{max} = \frac{N_1}{N_1 + N_3} \quad (34.4.13)$$

Výstupní napětí U_{out} je rovno střední hodnotě napětí u_X a platí proto:

$$U_{out} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (34.4.14)$$

34.4.1.2 Proudové a napěťové dimenzování součástek

V době t_{demag} je tranzistor namáhan napětím $U_{CE_{max}}$:

$$U_{CE_{max}} = U_1 + U'_1 = U_1 + \frac{N_3}{N_1} U_1 = U_1 \frac{N_1 + N_3}{N_1} \quad (34.4.15)$$

- Volíme-li $N_3 < N_1$, je $U'_1 > U_1$ a tedy namáhání $U_{CE_{max}} > 2U_1$. Zato je ale maximální dovolená střída $\delta_{max} > 0,5$ a je tedy větší maximální dosažitelné výstupní napětí.
- Volíme-li $N_3 > N_1$, je $U'_1 < U_1$ a je tedy $U_1 < U_{CE_{max}} < 2U_1$. Zato je ale maximální dovolená střída $\delta_{max} < 0,5$ a je tedy menší maximální dosažitelné výstupní napětí.

Volba poměru N_3/N_1 proto záleží na tom, co je v dané aplikaci více kritické, zda napěťové namáhání tranzistoru, či co největší dosažitelné výstupní napětí (s neměnným převodem N_2/N_1). V praxi se nejčastěji volí $N_3 = N_1$ z důvodu snadného souběžného (*bifilárního*) vinutí obou cívek - viz později.

- *Proudové a dimenzování T_1 :*

Zanedbáme-li magnetizační proud, pak lze psát, viz. obr. 34.4.2, pro špičkovou, střední a efektivní hodnotu kolektorového proudu tranzistoru následující rovnice:

$$I_{1_{max}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \quad (34.4.16)$$

$$I_{1_{av}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \delta \quad (34.4.17)$$

$$I_{1_{rms}} = I_{out} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\delta} \quad (34.4.18)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_1 :*

$$I_{D_{1max}} = I_{out} \quad (34.4.19)$$

$$I_{D_{1av}} = I_{out} \delta \quad (34.4.20)$$

$$I_{D_{1rms}} = I_{out} \sqrt{\delta} \quad (34.4.21)$$

$$U_{D_{1Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_3} \quad (34.4.22)$$

- *Proudové a napěťové dimenzování D_2 :*

$$I_{D_{2max}} = I_{out} \quad (34.4.23)$$

$$I_{D_{2av}} = I_{out} (1 - \delta) \quad (34.4.24)$$

$$I_{D_{2rms}} = I_{out} \sqrt{1 - \delta} \quad (34.4.25)$$

$$U_{D_{2Rmax}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (34.4.26)$$

- Proudové a napěťové dimenzování D_3 :

$$I_{D_{3max}} = I_3 = I_{\mu_{max}} \frac{N_1}{N_3} = \frac{U_1 \delta_{max} T}{L_1} \cdot \frac{N_1}{N_3} \quad (34.4.27)$$

$$I_{D_{3av}} = I_{3_{av}} = \frac{I_3}{2} \delta \quad (34.4.28)$$

$$I_{D_{3rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_{demag}} \left(I_3 \frac{t}{t_{demag}} \right)^2 dt} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t_{demag}}{T}} \quad (34.4.29)$$

$$U_{D_{3Rmax}} = U_1 + U_1 \frac{N_3}{N_1} \quad (34.4.30)$$

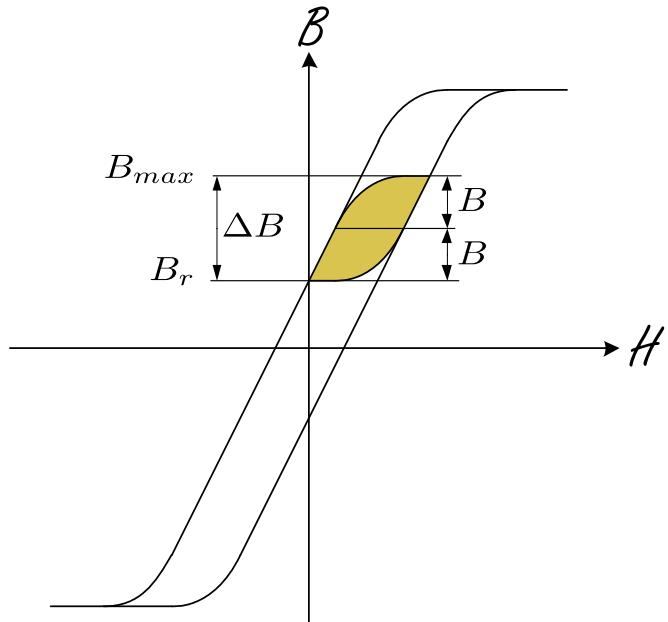
Poznámka 34.4.1. Všimneme si, že funkce tohoto měniče je kromě transformátoru zcela analogická funkci snižujícího měniče z kap. 34.3.2. Horní spínač je zde rozdělen tak, že tranzistor je na primární straně (pro větší podobnost s obr. 34.3.7 lze v obr. 34.4.1 vzájemně zaměnit umístění tranzistoru a primárního vinutí transformátoru, tj. z kladného pólu U_{in} nejprve tranzistor). Dioda D_2 , tvořící s tranzistorem horní spínač, je až na sekundární straně. Dioda D_1 jen odděluje výstupní obvod od sekundárního napětí v době, kdy je záporné, protože toto napětí nemůže mít nenulovou stejnosměrnou složku (stejně tak ani napětí u_1 a u_3).

34.4.1.3 Přehled metod demagnetizace jádra transformátoru

V kapitole 34.4.1.1 byl popsán jeden z možných způsobů, jak demagnetizovat jádro transformátoru, tak aby v dalším pracovním cyklu nedošlo k posunu pracovního bodu magnetického materiálu jádra a následně k jeho přesycení. Velikost magnetizačního proudu je dle vztahu 34.4.6 dána poměrem napěťové plochy $U_{in} \cdot t_{on}$ přiložené na vinutí primární cívky a hodnotou její magnetizační indukčnosti ($L_{mag} = L_1$)

$$i_{mag} = \frac{U_{prim} \cdot t_{on}}{L_{mag}}$$

Pracovní oblast transformátoru je v prvním kvadrantu, jak naznačuje obr. 34.4.3, neboť polovodičový spínač přikládá mezi svorky primárního vinutí pouze unipolární pulzy. Měnič se také proto nazývá jednočinný, protože energie je ze zdroje předávána do zátěže pouze jedenkrát za periodu, v jednom tzv. aktivním běhu, tj. v době t_{on} , kdy je tranzistor sepnut a magnetická indukce se v jádře zvyšuje z hodnoty remanentní indukce B_r o velikost magnetického zdvihu ΔB .



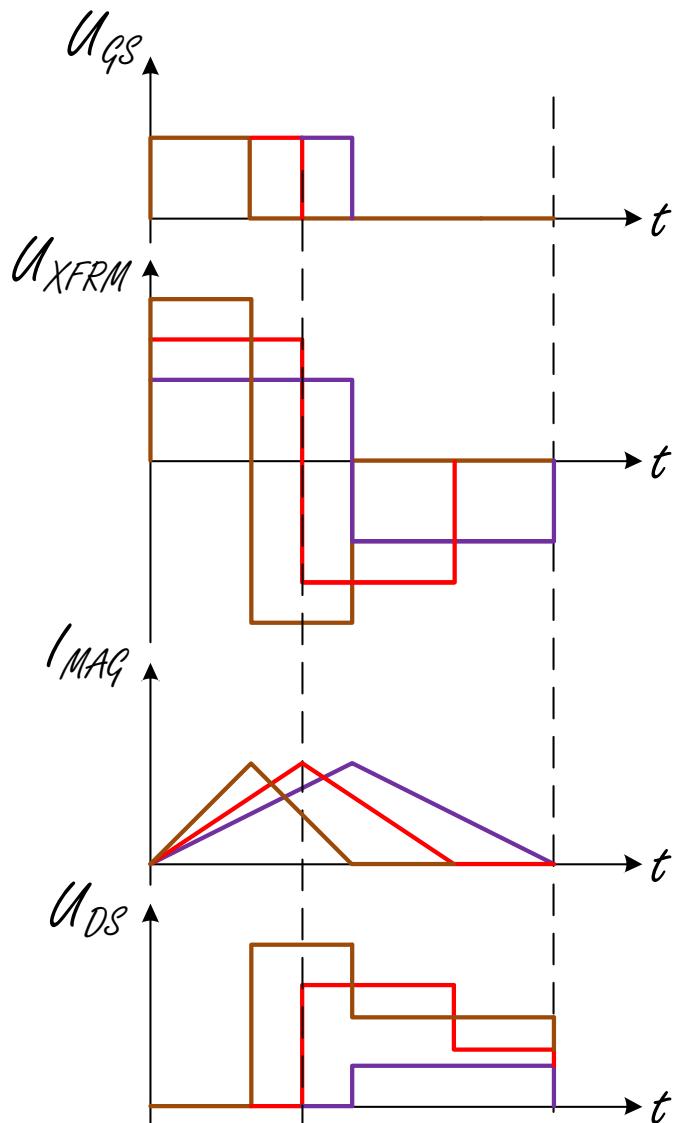
Obrázek 34.4.3: Transformátor jednočinného propustného měniče pracuje v prvním kvadrantu hysterezní smyčky

Pokud bychom měřili magnetizační proud primárního vinutí, dospěli bychom k průběhům na obr. 34.4.4, jenž vykazují stejnou vrcholovou hodnotu pro různé hodnoty vstupního napětí. Je to dáno tím, že pokud měnič během měření pracoval v uzavřené regulační smyčce, bude součin $V_{in} \cdot t_{on}$ konstantní a za předpokladu, že magnetizační indukčnost je též neměnná, pak dle předchozí rovnice dospějeme $i_{mag_{max}} = konst.$

34.4.1.4 Jednočinný propustný měnič s aktivním clampingem

34.4.1.5 Vlastnosti měniče

Obecně pro všechny varianty propustných měničů s transformátorem lze říci, že jsou vhodné pro přenos velkých výkonu. Je to dáno principem činnosti, kdy proud podílející se na přenosu výkonu se nepodílí na magnetizaci jádra transformátoru (teče v době t_{on} a to jak na sekundární straně tak i na primární – kompenzace magnetických účinků). Může se proto zvyšovat, aniž by rostlo sycení jádra transformátoru. Toto sycení je určeno pouze integrálem primárního napětí a počtem primárních závitů. Lze proto zvýšením pracovního kmitočtu docílit zmenšení velikosti transformátoru, jak to bylo vysvětleno na konci kap. 27.4.

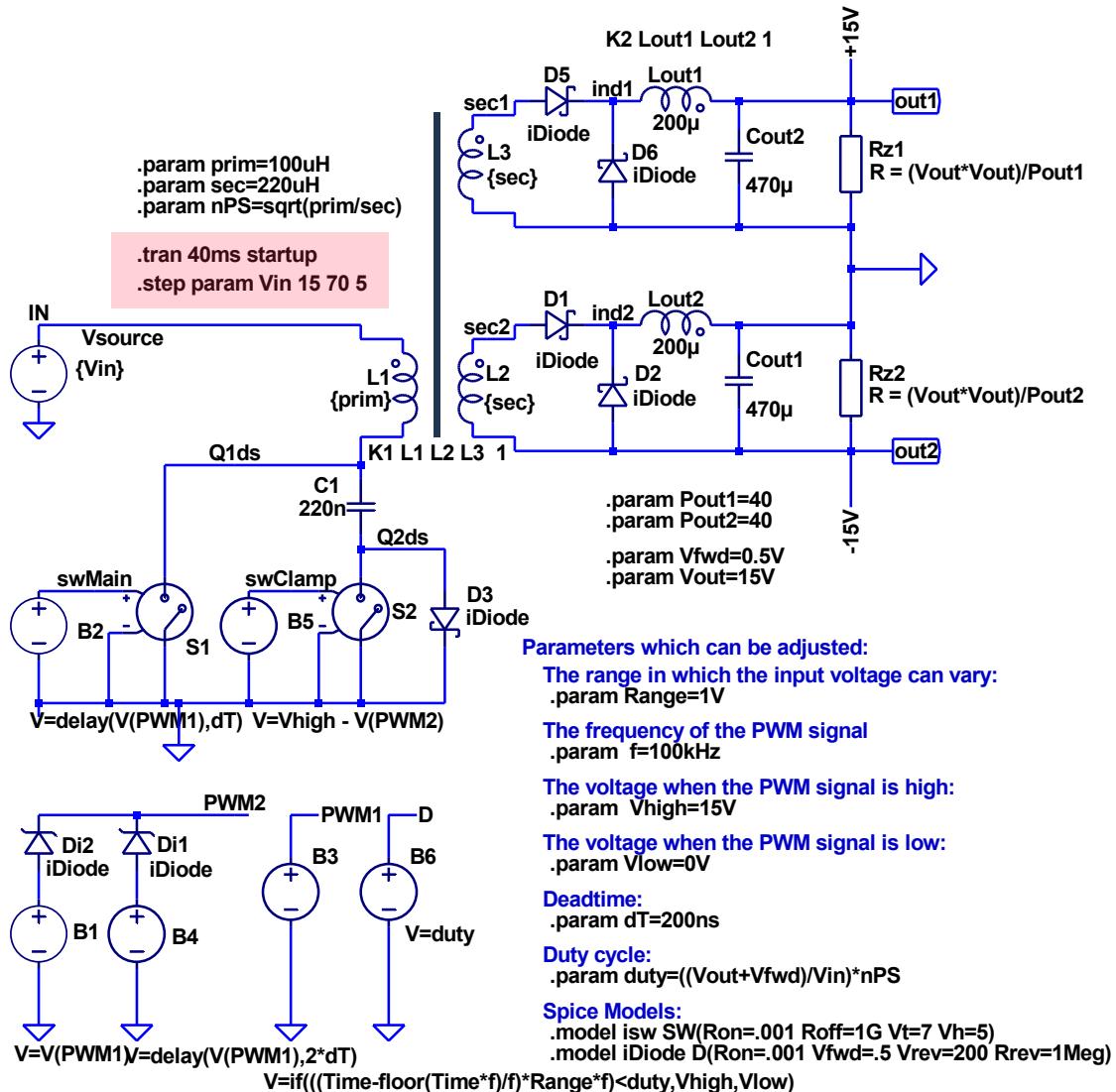


Obrázek 34.4.4: Vrcholová hodnota magnetizačního proudu je konstantní pro jakékoliv velikosti vstupního napětí, neboť regulační smyčka zajistí, aby napěťová plocha $V_{in} \cdot t_{on}$ byla konstantní

34.4.2 Jednočinný blokující měnič

Základem tohoto měniče je „invertující měnič se společnou tlumivkou“ z kapitoly 34.3.4. Všimneme si, že z původního schématu (obr. 8.12) vymizela tlumivka, jejíž funkci nyní zastane transformátor. Princip činnosti je vlastně úplně stejný, pokud si uvědomíme, že jádro nynějšího transformátoru je magnetováno stejně jako jádro tlumivky na obr. 8.12, viz. průběh $i_L(t)$ v obr. 8.12 a průběh $\Phi_\mu(t)$ v obr. 9.8. Jediný rozdíl je v tom, že

Model of the forward converter with active clamping technique



Obrázek 34.4.5: Propustný měnič s aktivním clampingem

stejných magnetických poměrů je nyní dosaženo pomocí dvou vinutí místo původního jednoho (v době t_1 pomocí L_1 a v době t_2 pomocí L_2). Tím se dosáhne galvanického oddělení. Vznikl tak transformátor, ovšem režim jeho činnosti je takový, že magnetické účinky v jádře se podobají tlumivce. Režim je zcela odlišný od režimu transformátoru v propustných měničích.

34.5 Metody regulace spínaných zdrojů

34.5.1 Základy impulzní regulace

Základním principem a současně odlišností impulsní regulace od regulace klasické je její nespojitost. To v zásadě znamená, že nehledě na detailní realizaci, je výstupní napětí U_{out} stabilizováno zásahy regulačního členu pouze v určitých, časově omezených intervalech T_a . [Hammembauer]

Srovnejme pro názornost klasický a impulsní regulátor na úrovni blokových schémat. (obr. 4.1 a obr. 5.9). Vidíme, že obě jsou formálně dosti podobná. U obou nacházíme napěťový normál U_{REF} , zesilovač regulační odchylky A_u , budící obvod i výkonový regulační člen a samozřejmě i zpětnovazební smyčku. Tím však, snad až na základní podstatu regulační smyčky podobnost končí. Funkčně jsou oba regulátory naprosto odlišné.

U spojitého lineárního regulátoru ovládá odchylka výstupního napětí od jmenovité velikosti spojité okamžitý odpor výkonového regulačního členu v libovolném okamžiku tak, aby výstupní napětí bylo konstantní.

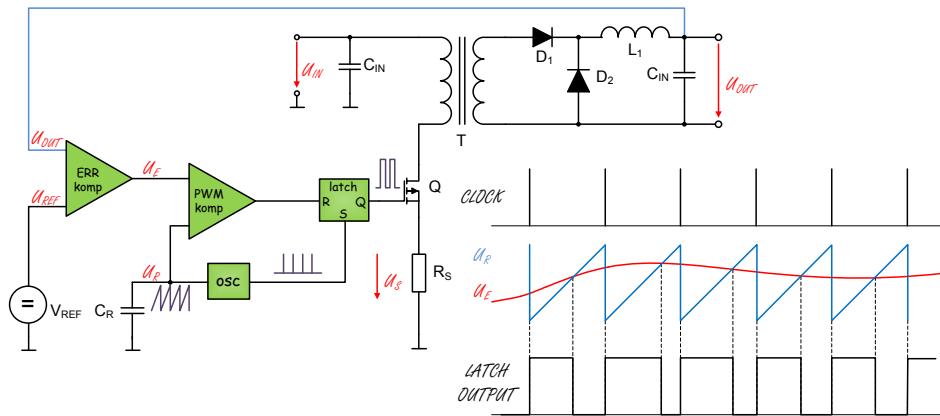
34.5.2 Regulační smyčka

34.5.2.1 Porovnání regulátoru s napěťovým a proudovým řízením

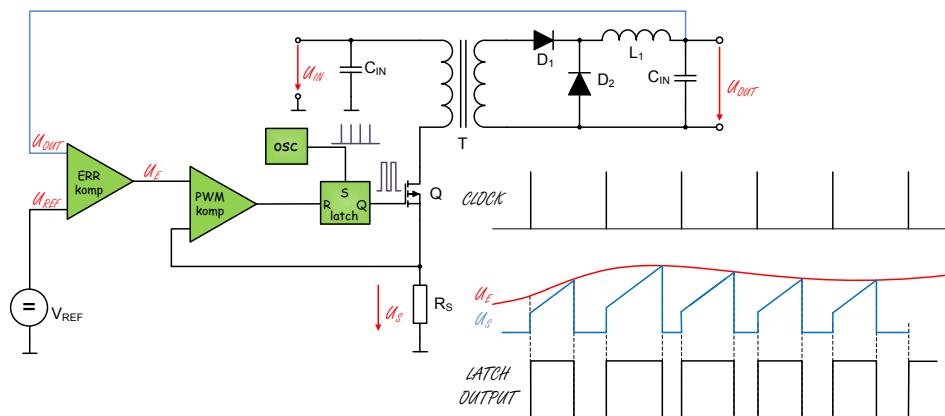
The current mode control method uses two control loops –an inner, current control loop and an outer loop for voltage control. Figure 1 shows a forward converter (buck family) using current mode control. When the switching transistor is on, current through Rsense is proportional to the upward ramping filter inductor current. When the ramp voltage Vs reaches Ve (the amplified output voltage error), the switching transistor turns off. Thus, the outer voltage control loop defines the level at which the inner loop regulates peak current through the switch and through the filter inductor. [SLUP075]

Výhody:

- Input voltage feed-forward, resulting in good open-loop line regulation.
- Simplified loop –inductor pole and 2nd order characteristic eliminated.



Obrázek 34.5.1: Regulátor s napěťovým řízením - Voltage mode control [[SLUA119]]



Obrázek 34.5.2: Regulátor s proudovým řízením - Current mode control [[SLUA119]]

- Optimum large-signal behavior.
- No conditional loop stability problems.
- Flux balancing (symmetry correction) in push-pull circuits.
- Automatic pulse-by-pulse current limiting.
- Current sharing of paralleled supplies for modular power systems.
- Less complexity/cost (current sense/amp is not an added complication).

Nevýhody (continuous mode only):

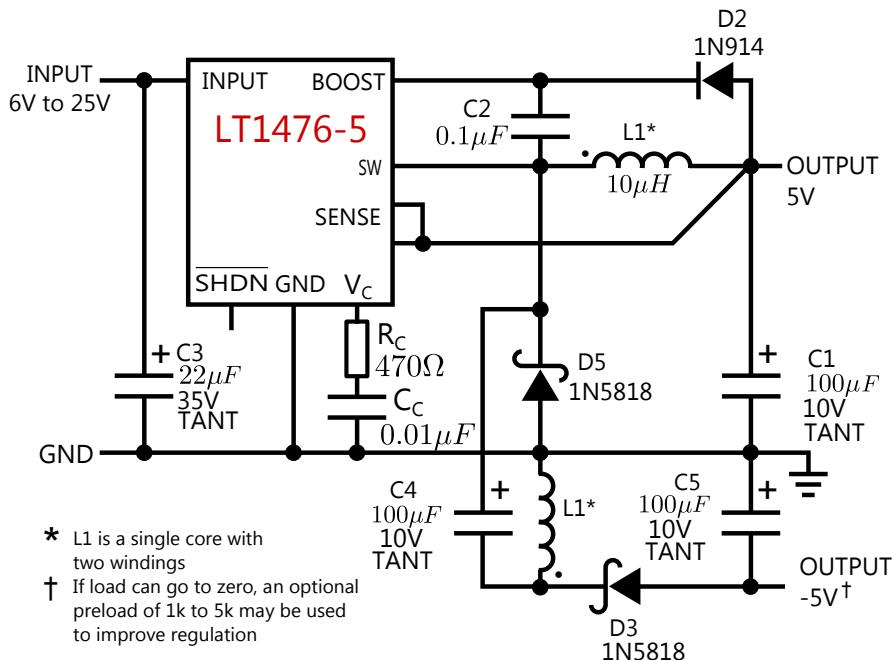
- Peak/avg. current error and instability –slope compensation
- Noise immunity is worse because of shallower ramp.
- Half Bridge runaway
- DC open loop load regulation is worse.
- (1-D) current error in Boost or Flyback circuits.
- Loop irregularities with multiple output buck circuits.

34.6 Sbírka katalogových zapojení neizolovaných měničů

Existují dvě možnosti, jak provádět řízení pomocí PWM odlišující se *typem zpětné vazby*, která je buď čistě **napěťovou vazbou** (*voltage mode control*), nebo **napěťovou vazbou s vnitřní proudovou smyčkou** (*current mode control*). V následující diskusi se pokusíme konzistentním způsobem vysvětlit vlastnosti obou řídících algoritmů (slua119)

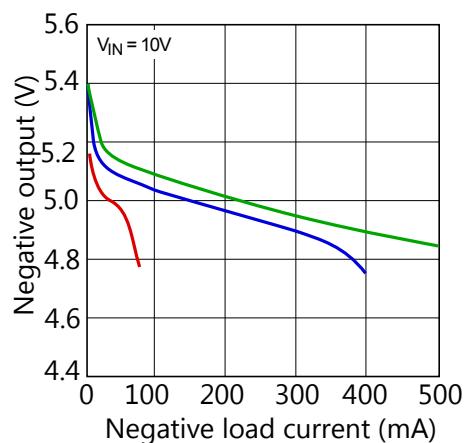
34.6.1 Zdroj symetrického napětí s jedním induktorem

Toto řešení na obr. 34.6.1 nabízí spínaný zdroj symetrického napětí za použití několika dalších součástek a induktoru s dvojím vinutím. Základní částí zdroje je napěťový regulátor snižující vstupní kladné napětí založený na obvodu *LT1376-5* se spínacím kmitočtem 500 kHz a možností zatížení proudem až 1,5 A.



Obrázek 34.6.1: Spínaný zdroj napětí $\pm 5V$ vystačí s jedinou indukčností s dvojím vinutím. [DN100]. Linear Technology Corp. (Dual Output Regulator Uses Only One Inductor)

Druhá polovina induktoru L_1 společně s D_3 , C_5 a C_4 je určena pro tvorbu záporného napětí pomocí **SEPIC topologie - Single Ended Primary Inductance Converter**. Kondenzátor C_4 vnučuje oběma vinutím stejně napětí. Bez něho pracuje tato část jako blokující měnič (**flyback**), která by sice poskytla $-5V$, ale jen naprázdno se značnou závislostí na zátěži (nedokonalá vazba mezi vinutími).



Obrázek 34.6.2: Zatěžovací charakteristika záporné větve.

Část XIV

Číslicové elektronické systémy

Obsah

35.1 Co je číslicový systém	340
35.1.1 Dvojstavové signály	340
35.2 Kombinační logické funkce	341
35.2.1 Realizace kombinačních logických funkcí	341
35.2.2 Základní pravidla Booleovy algebry	341
35.2.3 Zjednodušování zápisu logické funkce	342

35.1 Co je číslicový systém

V číslicovém systému se pracuje se signály, které mají jen konečný počet diskrétních hodnot. Tím se liší od systémů analogových, u kterých jsou signály spojité, tj. mohou ve vymezeném rozsahu nabývat nekonečný počet hodnot. V číslicovém systému může i čas být veličinou diskrétní, tj. signály se mohou měnit jen v určitých okamžicích. Takovéto číslicové systémy se pak nazývají **synchronní** - na rozdíl od systémů **asynchronních**, u kterých ke změnám signálů může docházet kdykoliv. Synchronní systémy jsou podstatně častější, neboť existence přesně stanovených okamžiků změn signálů zavádí "pořádek" do časování signálů v systému a tím usnadňuje jeho konstrukci i výrobu v podobě integrovaných obvodů. Přesné časování je zajištěno hodinovými (taktovacími) impulsy, což je velmi významný signál systému [Pinker2006].

Číslicové systémy se dělí na dvě skupiny

- **kombinační systémy**,
- **sekvenční systémy**.

U kombinačních systémů jsou výstupní signály závislé pouze na momentálních vstupních signálech. U sekvenčních systémů jsou výstupní signály závislé nejen na momentálních vstupních signálech, ale i na vstupních signálech v minulosti. Systém tedy má *vnitřní paměť*.

35.1.1 Dvojstavové signály

Jak již bylo řečeno, číslicové signály mají jen konečný počet diskrétních hodnot. V naprosté většině jrou to právě jen dvě hodnoty. Dvouhodnotové nebo dvoustavové signály snižují nároky na výrobní tolerance. Bylo tak možné zavést výrobní postupy, které umožňují hromadnou a levnou výrobu součástek.

Předpokládejme, že číslicové součástky jsou napájeny kladným napětím $+U_{cc}$. Jedna hodnota bude vyjádřena nižším napětím, druhá vyšším napětím. Dvě možné hodnoty signálu označíme jako '0' a '1' (v souladu se značením v **Boolově algebře**).

35.2 Kombinační logické funkce

Základním pojmem při úvahách o kombinačních systémech představuje pojem kombinační logická funkce. *Kombinační logická funkce* je pravidlo přiřazující každé kombinaci hodnot 0 a 1 přiřazených vstupním proměnným z definičního oboru funkce jedinou hodnotu výstupní proměnné. Pro daný počet vstupních proměnných je těchto funkcí konečný počet. Kombinační logické funkce mohou být úplně nebo neúplně určené. *Úplně určená kombinační logická funkce* je taková funkce, jejíž definiční obor zahrnuje všechny kombinace vstupních proměnných. U *neúplně určené kombinační logické funkce* její definiční obor nezahrnuje některé tyto kombinace. Kombinací se zde rozumí kombinace hodnot 0 a 1 přiřazených jednotlivým vstupním proměnným. Úplně určeným funkcím se někdy říká úplné funkce, funkcím neúplně určeným pak neúplné funkce.

35.2.1 Realizace kombinačních logických funkcí

Nejčastěji se v digitální technice setkáme s těmito způsoby realizace kombinační logické funkce:

- pomocí digitálních integrovaných obvodu typu NAND, NOR (popř. AND, OR) a dalších obvodů realizujících základní kombinační logické funkce - např. AND-OR-INVERT, EX-OR atd.,
- pomocí multiplexeru a demultiplexeru,
- pomocí speciálních kombinačních integrovaných obvodu (převodníky kódu, generátory parity, sčítáčky, násobičky a podobně - sem patří i použití multiplexeru a demultiplexeru),
- pomocí pamětí (např. PROM a EEPROM),
- pomocí programovatelných logických obvodu (PLD).

35.2.1.1 Použití multiplexerů a demultiplexerů k realizaci kombinačních logických funkcí

35.2.2 Základní pravidla Booleovy algebry

Nejdůležitější postuláty:

$$x + 0 = x \quad x \cdot 0 = 0 \quad | \quad x + 1 = 1 \quad x \cdot 1 = 1 \quad \text{Univerzální vazba} \quad (35.2.1)$$

$$x + \bar{x} = 1 \quad | \quad x \cdot \bar{x} = 0 \quad \text{Doplňek} \quad (35.2.2)$$

$$x + x = x \quad | \quad x \cdot x = x \quad \text{Idempotence} \quad (35.2.3)$$

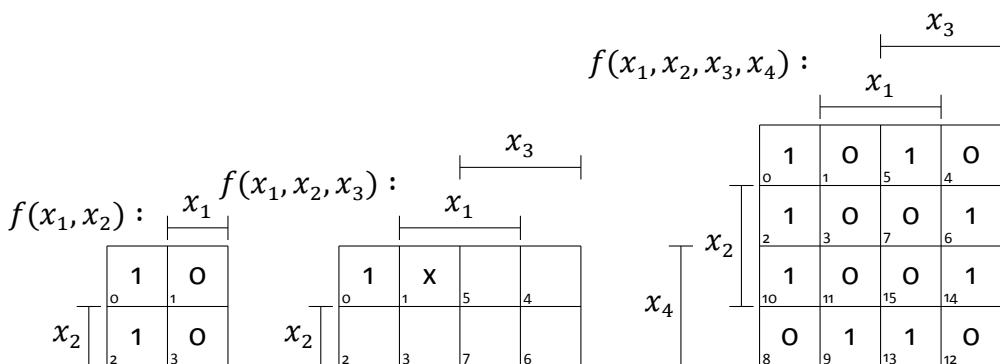
35.2.3 Zjednodušování zápisu logické funkce

Logická funkce vyjádřená úplnou součtovou (disjunktivní) nebo součinovou (konjuktivní) formou z pravdivostní tabulky není jediným možným zápisem logické funkce. Dá se většinou nalézt jednodušší algebraický zápis, z něhož můžeme předpokládat, že povede na realizaci méně složitého číslicového obvodu. Který ze zápisů logické funkce povede na minimální složitost obvodu závisí nejen na použitých logických členech, ale též na dalších kritériích: zpoždění, spotřeba obvodu, jeho spolehlivost, potlačení hazardních stavů, atd. První metodou je *algebraická minimalizace*,

35.2.3.1 Karnaughova metoda minimalizace pomocí mapy

Jednou z možností grafického zápisu logické funkce je mapa. Nejpoužívanější je **Karnaughova mapa** (čti "karnau"). Mapa je uspořádána do čtverce či obdélníka a to tak, že *sousední pole* se liší vždy jen v jedné proměnné.

Mapu chápáme jako uspořádaný zápis pravdivostní tabulky vzniklou transformací řádku tabulky na jedno pole mapy [Podlesak1994]. Tedy, každé pole mapy jednoznačně odpovídá určité kombinaci všech proměnných. Nalézá-li se pole pod pruhem vyznačeným u proměnné, bude tato proměnná nenegovaná. Nalézá-li se mimo pruh, bude proměnná negovaná. Tak např. pole označené jako x v mapě pro tři proměnné bude odpovídat kombinaci $x_1 \bar{x}_2 x_3$. Jak je názorně vidět, z pravdivostní tabulky funkce lze snadno sestavit její mapu a naopak. Řádkům pravdivostní tabulky, ve kterých je funkční hodnota 1, odpovídají pole mapy s vepsanou jedničkou; obdobně to platí i pro nuly. V mapě lze znázornit i neurčené stavy prázdným poličkem (nebo pomlčkou) [Wakerly1999].



Obrázek 35.2.1: Příklad Karnaughovy mapy pro dvě, tři a čtyři proměnné

Přiřazení kombinací hodnot vstupních proměnných (součinů) jednotlivým polím mapy se označuje jako *kódování*. Řádky i sloupce Karnaughovy mapy jsou kódovány

Index	x_4	x_3	x_2	x_1	f	Index	x_4	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

Tabulka 35.2.1: Pravdivostní tabulka logické funkce čtyř proměnných, kterou se pokusíme vyjádřit také pomocí Karnaughovy mapy

Grayovým kódem. Základní vlastností Grayova kódu je to, že sousední slova konstantí délky se liší pouze v jedné proměnné. Tuto vlastnost splňuje i první a poslední kódové slovo (kód je uzavřen sám do sebe) viz 35.2.2. Právě tato vlastnost je využita při konstrukci Karnaughovy mapy - souřadnice polí jsou uspořádány tak, že u sousedních polí se liší jen v jedné proměnné. Tudíž geometricky sousedící pole jsou sousední i v algebraickém smyslu (liší se v jediné proměnné).

Každé pole s hodnotou 1 odpovídá **mintermu** z pravdivostní tabulky. Sousední pole tedy odpovídají mintermům lišícím se jen jednou proměnnou, a ty lze spojovat do **implikantů**. Sousední jsou i pole na okrajích mapy, neboť i ta se liší jen v jedné proměnné (konce řádek, konce sloupců a rohy mapy). Spojováním výrazů sousedních políček provádíme minimalizaci, která díky jasnému geometrickému postupu vyhýbá problematickému hledání těchto součtů nebo součinů.

Spojování polí se vyznačí **smyčkou**. Pole po dvojcích sousední lze spojovat do větších smyček, ty opět do větších atd. Každá smyčka tedy musí mít stranu dlouhou právě 2^k polí, kde k je celé kladné číslo. Smyčky zahrnují 2 pole, 4 pole, 8 polí, atd. Každá smyčka v mapě odpovídá implikantu funkce. Princip minimalizace spočívá v pokrytí všech jedniček¹ (a libovolných neurčených stavů) soustavou smyček pro součtovou formu, přičemž:

- smyčky musí být co možná největší,

¹nul pro součinovou formu

Číslo	Binární kód	Grayův kód
	x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Tabulka 35.2.2: Binární a Grayův kód pro tři proměnné

- smyček musí být co nejmenší počet.

Tento princip je ilustrován na následující mapě funkce čtyř proměnných. Jako příklad vezmeme funkci definovanou pravdivostní tabulkou 35.2.1. Odpovídající Karnaughova mapa pro čtyři proměnné je na obrázku 35.2.1. Základní součtový tvar této funkce je dán rovnici:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &+ x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4. \end{aligned} \quad (35.2.4)$$

V mapě můžeme vytvořit celkem čtyři smyčky, kterými spojíme sousední políčka. Všimněme si, že některé smyčky se částečně překrývají. To však nevadí, protože k logické funkci můžeme na základě postulátu 35.2.3 (*idempotence*) přidat tentýž součin několikrát.

Smyčka ze dvou políček označená na mapě 35.2.2 jako č. 1, může být vyjádřena:

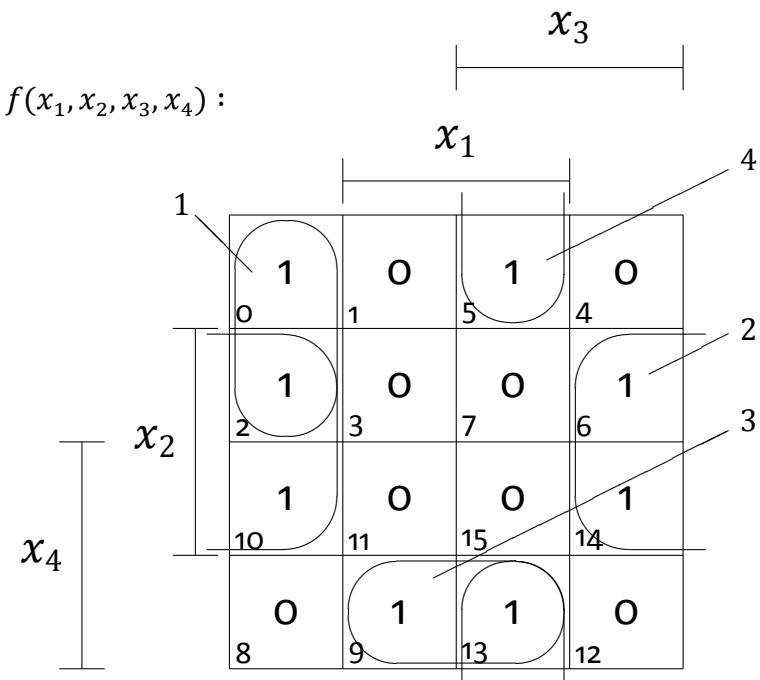
$$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 = \overline{x_1 x_3 x_4} (\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_1 x_3 x_4} \quad (35.2.5)$$

Smyčka ze čtyř polí na pravé a levé straně (označená č. 2):

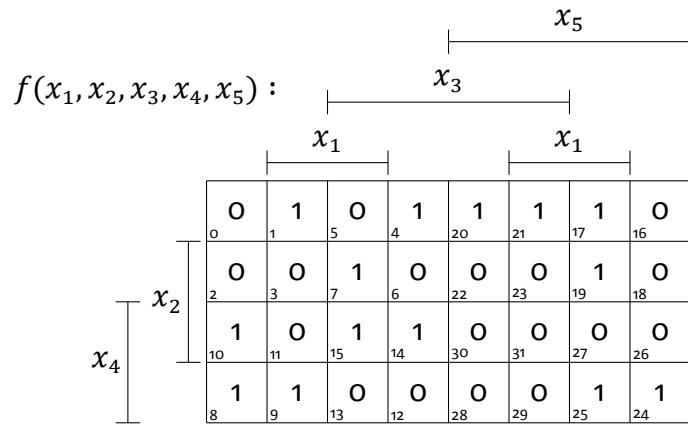
$$\begin{aligned} \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 &= \\ \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} (\overline{x_4} + x_4) + \overline{x_1} x_2 x_3 (\overline{x_4} + x_4) &= \\ \overline{x_1} x_2 (\overline{x_3} + x_3) &= \overline{x_1} x_2 \end{aligned} \quad (35.2.6)$$

Smyčka ze dvou polí v poslední řádce (označená č. 3):

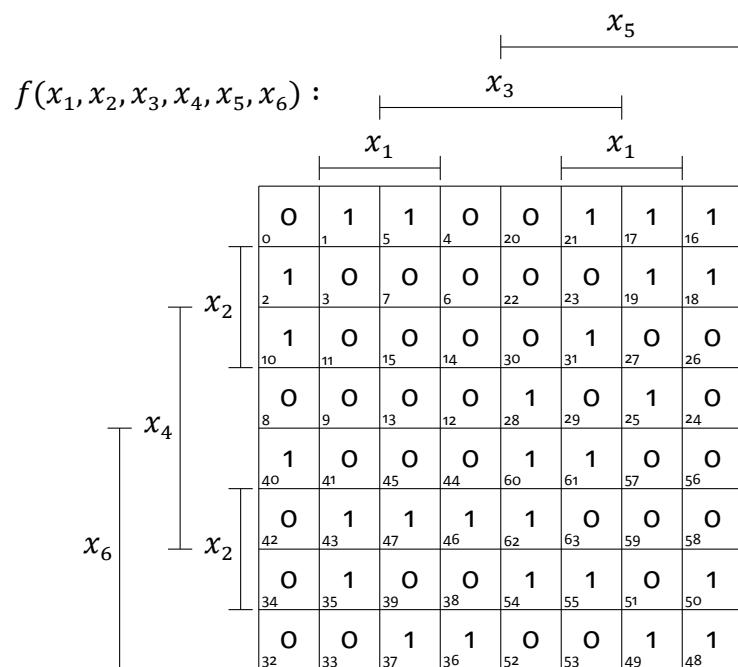
$$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 = \quad (35.2.7)$$



Obrázek 35.2.2: Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy. Zakreslené smyčky byly vytvořeny tak, aby každá zahrnovala co největší počet polí s vepsanou jedničkou.



Obrázek 35.2.3: Příklad Karnaughovy mapy pro pět proměnných



Obrázek 35.2.4: Příklad Karnaughovy mapy pro šest proměnných

Obsah

36.1 Rozdělení číslicových integrovaných obvodů	348
36.1.1 Vlastnosti logických hradel	348
36.1.2 Bipolární digitální obvody	348
36.2 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd	349
36.2.1 3.3V → 5V	350
36.2.2 5V → 3.3V	353

36.1 Rozdelení číslicových integrovaných obvodů

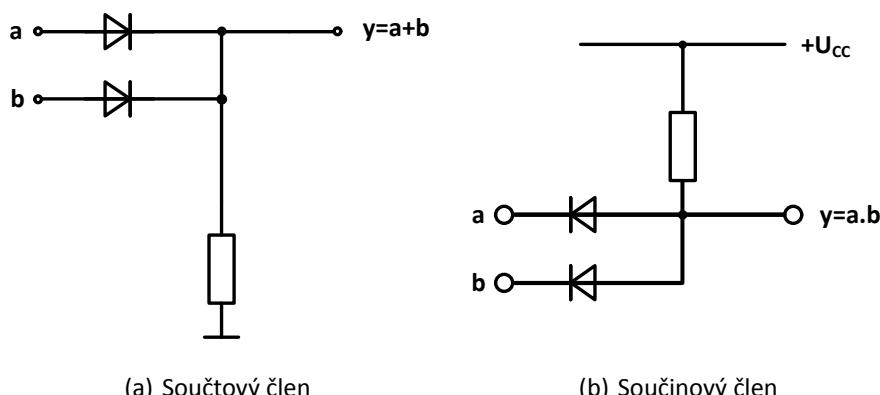
36.1.1 Vlastnosti logických hradel

36.1.2 Bipolární digitální obvody

V bipolární technologii jsou skupiny logických obvodů charakterizovány z hlediska režimu činnosti tranzistorů a tvoří dvě základní skupiny. Jsou to logické IO - s tranzistory pracujícími:

- v saturaci: tranzistor spínán z vypnutého stavu do saturace,
- v nesaturačním - aktivním režimu: tranzistor přepínán mezi stavem vypnutým (nebo slabě sepnutým) a aktivním (nesaturačním) módem.

V obou skupinách je přepínanou součástkou *tranzistor NPN*. *Komplementární tranzistor PNP* je využíván pouze jako zatěžovací prvek nebo jako proudový zdroj; pro tyto účely se rovněž využívá i rezistor.



Obrázek 36.1.1: Diodová logika

36.2 Přizpůsobení logických obvodů různých napěťových tříd

Vyskytne-li se v číslicovém návrhu potřeba použít logická hradla z odlišných napěťových tříd, budeme postaveni před problém jejich vzájemného propojení zachovávající jejich funkčnost. Pro správnou volbu vhodného napěťového přizpůsobení logických hradel z různých rodin, je nutné znát nejen jejich rozhodovací napětí, ale také následující parametry, které jsou uvedeny v tabulce 36.2.1:

- maximální úroveň logické '0' na vstupu hradla - $V_{IL_{max}}$
- minimální úroveň logické '1' na vstupu hradla - $V_{IH_{min}}$
- maximální úroveň logické '0' na výstupu hradla - $V_{OL_{max}}$
- minimální úroveň logické '1' na výstupu hradla - $V_{OH_{min}}$

	$V_{OH_{min}}$	$V_{OL_{max}}$	$V_{IH_{min}}$	$V_{IL_{max}}$
5V TTL	2.4V	0.5V	2.0V	0.8
3.3V LVTTL	2.4V	0.4V	2.0V	0.8
5V CMOS $(V_{CC}-0.3V)$	4.7V $(V_{CC}-0.3V)$	0.5V	3.5V $(0.7 \times V_{CC})$	1.5V $(0.3 \times V_{CC})$
3.3V LVCMOS $(V_{CC}-0.3V)$	3.0V $(V_{CC}-0.3V)$	0.5V	2.3V $(0.7 \times V_{CC})$	1.0V $(0.3 \times V_{CC})$

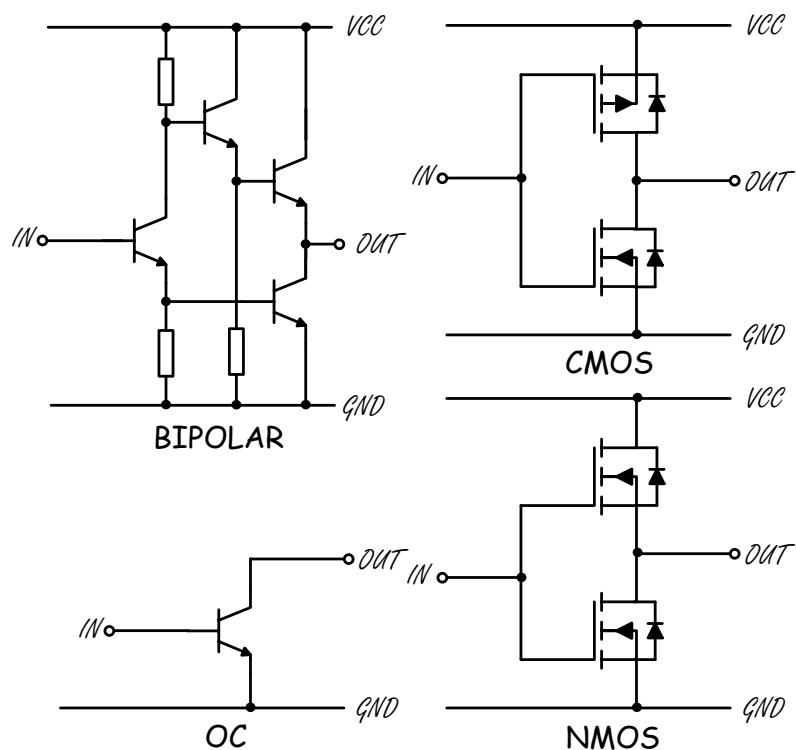
Tabulka 36.2.1: Rozhodovací úrovně napěťových tříd: 5V TTL, 3.3V LVTTL, 5V CMOS, 3.3V LVCMOS

Úroveň logické nuly a jedničky na výstupu určuje konstrukce koncové části digitálního obvodu. Nejčastější provedení jsou na obr. 36.2.1. Jsou-li různé digitální obvody připojeny na společnou sběrnici, může dojít k situaci, kdy některý z výstupních vývodů bude buzen vyšším napětím než je napájecí napětí příslušného obvodu. I v tomto případě výstupní část digitálního obvodu rozhoduje o výsledném chování.

Shrňme základní vlastnosti technologií číslicových obvodů uvedených na obr. 36.2.1:

- Bipolární koncový stupeň nedovoluje plný rozkmit výstupního signálu. Je-li obvod napájen 5 V, je výstup při úrovni H limitován na $V_{CC} - 2 \times V_{BE}$ (cca 3.6V). To je hodnota, která na rozhraní 3 V systému nezpůsobuje příliš velký napěťový rozdíl, a tedy proudu, tekoucímu z napájecího zdroje 5 V systému do zdroje 3 V systému.

- Výstupní napětí typické CMOS součástky se prakticky pohybuje v rozsahu GND - VCC.
- Některé součástky mají výstup typu *open kolektor* - *OC* resp. *open drain* - *OD*, tj. neexistuje vnitřní obvod, jenž by uvedl výstup do stavu H. K tomu je zapotřebí *pull-up* rezistoru, který připojí výstup k napětí, které může být i vyšší než je napájecí - VCC. Očividně, tento způsob umožňuje relativně snadné rozhraní, ale pro dosažení vyšších rychlostí je nutné volit relativně malý odpor, což zvyšuje spotřebu.
- U NMOS stupně je podobně jako u bipolárního stupně výstupní napětí logické úrovni H omezeno úbytkem na kanálu horní NMOS tranzistoru na $V_{CC} - V_{TH} \approx 3,5$ V. Obvykle je tedy možné přímé řízení 3V systému.



Obrázek 36.2.1: Koncové stupně bipolárních, CMOS, NMOS obvodů a obvodů s otevřeným kolektorem

36.2.1 3.3V → 5V

Nejjednodušším a nejvíce žádoucím způsobem je přímé připojení 3.3V výstupu k 5V vstupu, což lze provést pouze v případě, že jsou splněny následující požadavky:

- $V_{OH}(3.3V) > V_{IH}(5V)$,
- $V_{OL}(3.3V) < V_{IL}(5V)$.

Hodnoty prahových napětí logické nuly a jedničky v předchozí tabulce 36.2.1 dokládají, že v případě logiky 3.3V LVCMS a 5V TTL je možné použít přímého připojení.

Pokud oba tyto požadavky nejsou splněny, je třeba použít na rozhraní obou logik přizpůsobovací obvody, popsané v následujících textu.

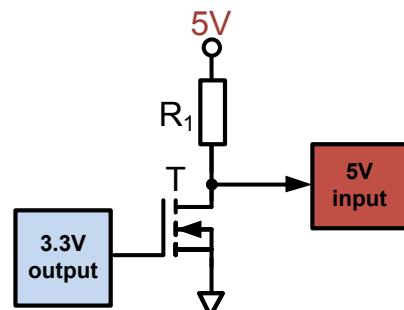
36.2.1.1 MOSFET Translator

Levné řešení problému vzájemného přizpůsobení logických obvodů odlišných napěťových tříd, pro které platí $V_{OH}(3.3V) < V_{IH}(5V)$ nabízí použití MOSFETu s prahovým napětím

$$V_{GS_{th\max}} < V_{OH_{min}}$$

Při výběru hodnoty R_1 je třeba vzít v úvahu:

- spínací rychlosť vstupu,
- zvýšení spotřeby díky proudu přes rezistor R_1 .



Obrázek 36.2.2: 3.3V → 5V: N-MOSFET

Při změně logické úrovně '0' → '1' na vstupu 5V logiky je nutné počítat se zpožděním, které je dáno časovou konstantou RC článku, tvořeného rezistorem R_1 a celkovou kapacitou na vstupu hradla. Důsledkem je tedy určitá minimální spínací perioda:

$$T_{SW_{min}} = 3 \cdot R_1 \cdot C_{IN},$$

která je vyšší, čím nižší spotřeby se návrhář snaží dosáhnout ($R_1 \uparrow$). Zpoždění při spínání '1' → '0' má příznivější hodnotu, neboť $R_{dsON} \ll R_1$.

36.2.1.2 Diodový Offset

Hodnoty vstupního prahového napětí 5V CMOS a výstupní prahová napětí pro 3.3V LVTTL a LVCMS jsou uvedeny v tabulce 36.2.2

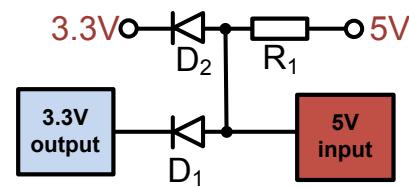
Threshold	5V CMOS IN	3.3V LVTTL OUT	3.3V LVCMOS OUT
High	$> 3.5V$	$> 2.4V$	$> 3.0V$
Low	$< 1.5V$	$< 0.4V$	$< 0.5V$

Tabulka 36.2.2: Přehled vstupní a výstupních prahových napětí různých logik, chceme-li ke vstupu 5V CMOS připojit 3.3V LVTTL nebo 3.3V LVCMOS. [AN240]

Všimněme si, že obě prahová napětí vstupu 5V CMOS logiky jsou o volt vyšší než u výstupu 3.3V logiky. Zapotřebí je tedy obvod, který zvyšuje vysokou a nízkou úroveň prahového napětí.

Pokud bychom vytvořili posunutí o alespoň o 0.7V pro obě úrovně prahového napětí, dosáhli bychom vzájemného přizpůsobení. Obvod na obr. 36.2.3, posuneme hodnotu nízké úrovně výstupního prahového napětí o úbytek v propustném směru diody D_1 (typicky 0.7V), na 1.1V až 1.2V. Úroveň vysokého prahového napětí se nastavuje pomocí pull-up rezistoru a diody D_2 vázané na 3.3V napájení. Výstupní napětí je tedy také posunuto přibližně 0,7V nad 3,3V napájení, tj. na 4,0 až 4.1V, což je vysoko nad 3,5V prahem vstupu 5V CMOS logiky.

Poznámka 36.2.1. Aby obvod fungoval správně, musí být pull-up rezistor podstatně menší než vstupní odpor 5V CMOS logiky, aby se zabránilo snížení výstupního napětí díky efektu vstupního odporového děliče a také musí být dostatečně velký, aby proud tekoucí do 3.3V napájení a výstupu hradla byl v mezích specifikace.



Obrázek 36.2.3: 3.3V → 5V: Diodový offset

36.2.1.3 Komparátor

Základní funkce komparátoru je následující:

- napětí na invertujícím (-) vstupu je větší než na neinvertujícím vstupu (+), výstup komparátoru se nastaví do nízké úrovně,
- je-li napětí na neinvertujícím vstupu (+) větší než na invertujícím vstupu (-), výstup komparátoru se nastaví do vysoké úrovně.

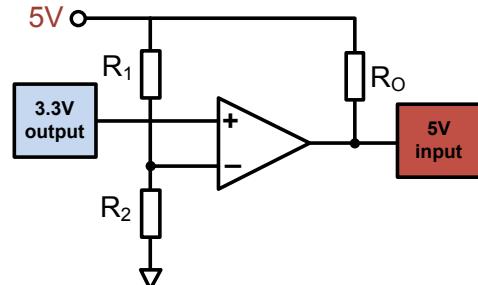
36.2.1.3.1 Výpočet hodnoty odporu R_1 a R_2 :

Poměr R_1 a R_2 je závislý na napětí logické nuly a jedničky na výstupu hradla 3.3V logiky. Invertující vstup by měl být nastaven do poloviny mezi prahovými hladinami V_{OL} a V_{OH} . Pro LVCMS je toto napětí rovno

$$1.75V = \frac{3V + 0.5V}{2}.$$

Budeme-li volit velikost R_2 , pak hodnotu odporu R_1 snadno dopočítáme dle následující rovnice:

$$R_1 = R_2 \left(\frac{5V}{1.75V} - 1 \right).$$

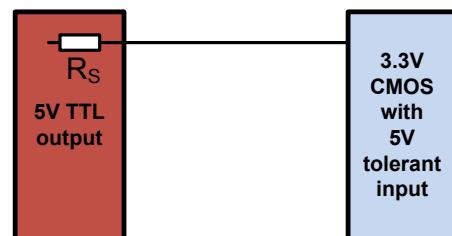


Obrázek 36.2.4: 3.3V → 5V: Komparátor;
 $R_1 = 1,8k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$

36.2.2 5V → 3.3V

36.2.2.1 Přímé propojení

Hradla napěťové třídy 5V mají výstupy s typickými prahovými hodnotami $V_{OH} = 4,7V$, $V_{OL} = 0,4V$ zatímco hradla 3.3V LVCMS mají vstupy s prahovými hodnotami $V_{IH} = 0,7 \times V_{DD}$, $V_{IL} = 0,2 \times V_{DD}$. Je-li tedy na 5V výstupu logická nula, bude také správně interpretována 3V vstupem, neboť platí $V_{OL} = 0,4 < V_{IL} = 0,8$. Ani v případě logické jedničky nevzniká žádný konflikt, neboť $V_{OH} = 4,7 > V_{IH} = 2,1$. Pokud je tedy 3V vstup 5V tolerantní, je možné přímé propojení, v opačném případě je třeba použít některou z následujících technik.



Obrázek 36.2.5: 5V → 3.3V: Přímé propojení

36.2.2.2 Diodový omezovač

Některé digitální obvody mají své vstupy chráněny vnitřními omezovacími diodami tzv. diode clamp (obr. ??). Proteče-li těmito diodami větší proud než udávají katalogové hodnoty, může dojít k poškození vstupu, nebo v lepším případě k efektu latching-up. Typický 5V výstup má kolem 10Ω , proto chceme-li využít těchto diod, musíme přidat sériový odpor, jenž limituje velikost propustného proudu. Nepříjemným důsledkem je ovšem vzniklý RC článek se vstupní kapacitou hradla C_L , který snižuje rychlosť. Není-li vstup takto chráněn je možné jej doplnit externí diodou dle obr. ??.

Část XV

Mikroprocesorová technika

Obsah

37.1 AVR Architektura	358
37.1.1 Strojový cyklus	358
37.1.2 Prefetch a pipelining	358

37.1 AVR Architektura

AVR architektura vychází z koncepce rychle přístupného registrového pole, které obsahuje 32 obecně použitelných registrů délky 8 bitů. Přístup do registrového pole je proveden v jediném strojovém cyklu. To znamená, že během jednoho strojového cyklu lze vykonat jednu aritmeticko-logickou operaci¹

Tato technika, umožňuje vyšší výkon ve srovnání s mikrokontroléry řady 8051, které disponují instrukcemi o délce od 12 do 48 hodinových cyklů, navíc se pro výpočty musí používat akumulátor, který je jen jeden. Registrové pole lze v tomto smyslu chápat jako skupinu akumulátorů.

37.1.1 Strojový cyklus

Strojový cyklus mikrokontrolérů AVR přímo odpovídá hodinovému cyklu. Nedochází k žádnému dělení hodinových cyklů jako například u mikrokontrolérů řady 8051²

37.1.2 Prefetch a pipelining

Mikrokontroléry AVR používají jednoduchý *předvýběr instrukce (prefetch)* umožňující *jednofázové zřetězení instrukcí (pipelining)*

¹oba operandy aritmeticko-logické operace jsou načteny z registrového pole, operace je provedena a výsledek směruje opět do registrového pole v jediném strojovém cyklu

²jeden strojový cyklus obsahuje 12 hodinových cyklů

Obsah

38.1 Stručný úvod	360
--------------------------	-------	------------

38.1 Stručný úvod

Část XVI

Programovatelné logické obvody

Obsah

39.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů	364
39.1.1 Historie	364
39.1.2 Obvody typu Simple Programmable Logic Device	368
39.1.3 Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD . .	373
39.1.4 Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA	374
39.1.5 Terminologie	375
39.2 Dynamické parametry PLD	377

39.1 Typy struktur programovatelných logických obvodů

Programovatelný logický obvod nebo programovatelné logické zařízení, často také PLD (*programmable logic device*) nebo FPD (*Field-Programmable Device*), je elektronická součástka (obvod) používaná pro vytváření digitálních obvodů. Na rozdíl od hradel, registrů a jiných digitálních obvodů není funkce zařízení tohoto druhu v době výroby ještě definovaná. Než může být PLD použito, musí být nejprve naprogramováno.

39.1.1 Historie

Historické kořeny moderních programovatelných polí jsou v prvních programovatelných pamětech typu PROM (*firma Radiation, 1970*) a jejich zákaznicky programovatelných verzích EPROM (*Intel, 1971*) a EEPROM (*Intel, 1978*). Paměť PROM lze využít pro realizaci kombinačních logických funkcí tak, že paměť využijeme jako tzv. *vyhledávací tabulku LUT* (angl. *Lookup Table*). V tomto případě přivádíme na adresové vodiče PROM paměti vstupní signály (proměnné). Obsah paměti PROM vytvoříme tak, že na adresy jejichž hodnota je tvořena vektorem hodnot vstupních proměnných uložíme hodnoty, které jsou tvořeny vektory požadovaných výstupních hodnot. Výstupní datové signály paměti PROM pak reprezentují výstupy kombinanční logiky. Tímto způsobem můžeme např. paměti PROM o velikosti 2 Kb s organizací 256x8 bitů (8 adresových vodičů, 8 datových vodičů), vytvořit programovatelný logický obvod, kterým lze realizovat 8 kombinačních funkcí s 8 vstupními signály (proměnnými). Výhodou takového realizace je, že všechny realizované funkce mají stejné zpoždění ze vstupu na výstup a to pro všechny možné kombinace vstupních hodnot. Na principu generátorů logických funkcí pomocí paměti (LUT) je založena funkce obvodů FPGA.

Permanentní paměti, jako takové, ale neumožňovaly úspornou realizaci logické funkce. Mezi první programovatelné logické obvody lze zařadit obvody PLA (angl. *Programmable Logic Array*), neboť v roce 1970 společnost Texas Instruments - TI podařilo vyvinout maskou programovatelný integrovaný obvod TMS2000, založený na paměti ROAM (angl. *Read Only Associative Memory*) společnosti IBM. TMS2000 disponoval 17 vstupy, 18 výstupy s 8 JK klopnými obvody. Obvod bylo možné programovat modifikací vodivé propojovací masky během výroby (tj. koncový uživatel jej nemohl programovat). Obvody PLA obsahovaly pole hradel AND následované polem hradel OR. Logická funkce tedy vznikala v disjunktivní formě, tj. jako součet součinů. Tento způsob tvorby logické funkce se uchytil a na tomto principu je založena funkce dnešních obvodů architektur SPLD a CPLD. Nicméně se tyto obvody na trhu příliš neprosadily.

Vývoj však pokračoval dál a v roce 1975 přišla na trh firma Signetics Corporation s obvody nazvanými FPLA - (*Field Programmable Logic Array*), konkrétně

se jednalo o obvod 82S100. Po převzetí firmy Signetics firmou Philips byl tento obvod označován také jako PLS100. Obvody FPLA tvořilo programovatelné pole AND následované programovatelným polem hradel OR. Tyto obvody však měly poměrně dlouhou dobu přenosu signálu ze vstupu na výstup. Pro návrh obvodů neexistoval žádný jazyk, a tak musel návrhář nastavovat přímo hodnoty jednotlivých programovatelných buňek. Tyto nevýhody spolu s poměrně vysokou cenou způsobili malé rozšíření těchto obvodů.

Dalším významným krokem bylo uvedení obvodů PAL - (*Programmable Logic Array*). Tyto obvody navrhla firma MMI - Monolithic Memories, Inc v roce 1978. Obvody PAL vycházeli z obvodů FPLA a obsahovaly programovatelné pole hradel AND, které bylo následováno pevným neprogramovatelným polem hradel OR. Ke každému hradlu OR tak bylo možno připojit pouze omezený počet výstupů hradel AND (součinů). Díky tomuto zjednodušení došlo ke snížení doby přenosu signálu ze vstupu na výstup. Oba tyto typy obvodů FPLA i PLA byly totiž založeny na bipolární PROM technologii s programovatelnými pojistkami tzv. *fusible-link*. Programování bylo realizováno vstříknutím dostatečně velkého náboje, který způsobil přepálení vybrané vnitřní pojistky. Zbývající neporušené pojistky se staly součástí implementovaného číslicový obvodu. Pojistky ovšem zvyšují zpoždění signálu v obvodu, zvětšují složitost a ve výsledku i cenu. Počet součinů, které byly připojeny na vstup hradla OR, byl na základě praktických zkušeností stanoven na osm. Velkou výhodou těchto obvodů bylo, že se daly programovat v tehdy již běžných programátorech paměti PROM. Mezi první obvody řady PAL patří například PAL16L8 (kombinační výstupy) a PAL16R8 (výstupy s registry).

Firma MMI dále napsala pro tyto obvody návrhový software, který umožňoval popsat číslicový systém pomocí velmi jednoduchého jazyka ve formě booleovských rovnic a z něj pak vygenerovat výstup, jímž bylo možné obvody PAL naprogramovat. Tím došlo k významnému zjednodušení vlastního návrhu obsahu těchto obvodů. Tento software se jmenoval PALASM (*PAL Assembler*) a firma MMI ho zveřejnila ve formě zdrojového kódu napsaného v jazyce FORTRAN. Program PALASM umožňoval dokonce softwarovou simulaci navrženého obvodu. Díky funkcím návrhu a simulace lze PALASM označit za první návrhový systém pro PLD obvody. Všechny zmíněné obvody dnes řadíme do první generace PLD obvodů. Za zmínu ještě stojí, že firmy *Signetics Corporation* a MMI již mezi dnešními výrobci programovatelných obvodů nenajdeme.

Vývoj v oblasti PLD obvodů pokračoval a postupně se začaly objevovat nové PLD obvody, které řadíme již do druhé generace. V roce 1983 uvedla firma AMD (*Advanced Micro Devices*) obvod PAL22V10. Tento obvod byl založen na obvodech PAL popsaných v předchozím odstavci, přinesl však jedno významné vylepšení, a to tzv. **výstupní makrobuňku** (OLMC - angl. *Output Logic Macro Cell*). Tyto obvody bývají označovány jako obvody PAL s makrobuňkou. Výstupní makrobuňka byla umístěna na každém výstupu obvodu. Každou makrobuňku bylo možné naprogramovat buď jako kombinační nebo

registrový výstup. Dále bylo možné u jakékoliv makrobuňky programovat, zda má být výstup v přímé nebo negované formě. Výstup makrobuňky byl třístavový, ovládaný jedním logickým součinem, což umožňovalo přepnutí makrobuňky z výstupního režimu do funkce vstupu. Tento typ obvodu vyrábělo svého času kromě firmy AMD mnoho dalších firem, např. Cypress Semiconductor, Lattice Semiconductor a Texas Instruments.

Všechny dosud zmíněné obvody měly jednu nevýhodu - byly programovatelné pouze jednou (OTP - *One Time Programmable*). Díky rozvoje technologie u pamětí EPROM se dostala tato technologie i do oblasti PLD obvodů a tudíž se na trhu objevili PLD obvody, jejichž obsah bylo možné smazat pomocí ultrafialového záření - obvody lze opakováně mazat a znova programovat.

V roce 1984 vstoupila na scénu firma DATA I/O se svým návrhovým systémem **ABEL**, jenž disponoval jazykem vyšší úrovně, určený pro popis číslicových systémů (HDL - *Hardware Description Language*), který byl nazván stejně jako návrhový systém, tj ABEL - *Advanced Boolean Expression Language*. Jazykem ABEL lze popsat číslicový systém pomocí booleovských rovnic, pravdivostní tabulky a stavových automatů, přičemž tyto způsoby je možné kombinovat. Práva na jazyk ABEL získala po několika akvizicích firma XILINX. Tento jazyk již sedmou revizi a dodnes ho některé současné návrhové systémy podporují (např. Xilinx a Lattice Semiconductor). Pro návrh nových číslicových systémů založených na PLD obvodech se však doporučuje používat některý z novějších HDL jazyků, např. jazyk VHDL nebo jazyk Verilog.

Další vývoj PLD obvodů pokračoval s nástupem technologie pamětí EEPROM a jejím využití v PLD obvodech. Této nové technologie bylo využito zejména u PLD obvodů označovaných jako GAL - *Generic Array Logic*. Obvody GAL lze zařadit do třetí generace PLD obvodů. Obvody typu GAL jsou také zařazovány do třídy jednoduchých programovatelných obvodů (SPLD).

Na konci osmdesátých let minulého století nastává v oblasti PLD obvodů bouřlivý vývoj. Vývojem a výrobou PLD se na konci osmdesátých a začátkem devadesátých let již zabývá mnoho firem a vývoj PLD obvodů již nelze od této doby přehledně rozdělit ani stručně popsat. V průběhu tohoto období vznikají nové řady PLD obvodů, nazývané CPLD - *Complex Programmable Logic Device*. Jmenujme např. alespoň obvody MACH firmy AMD a dále vznik první řady obvodů MAX, kterou společně vyvinula firma ALTERA a Cypress Semiconductor. Nové obvody v této době na trh uvádí také firma XILINX (řady XC7200 a XC7300), QuickLogic, Lattice Semiconductor a tak by bylo možné pokračovat dál a dál. Z uvedeného je vidět, že cesta vývoje PLD obvodů nebyla a není ani dnes nijak přímočará a byla navíc od svých počátků provázena soudními spory firem o patentová práva a tato situace trvá dodnes.

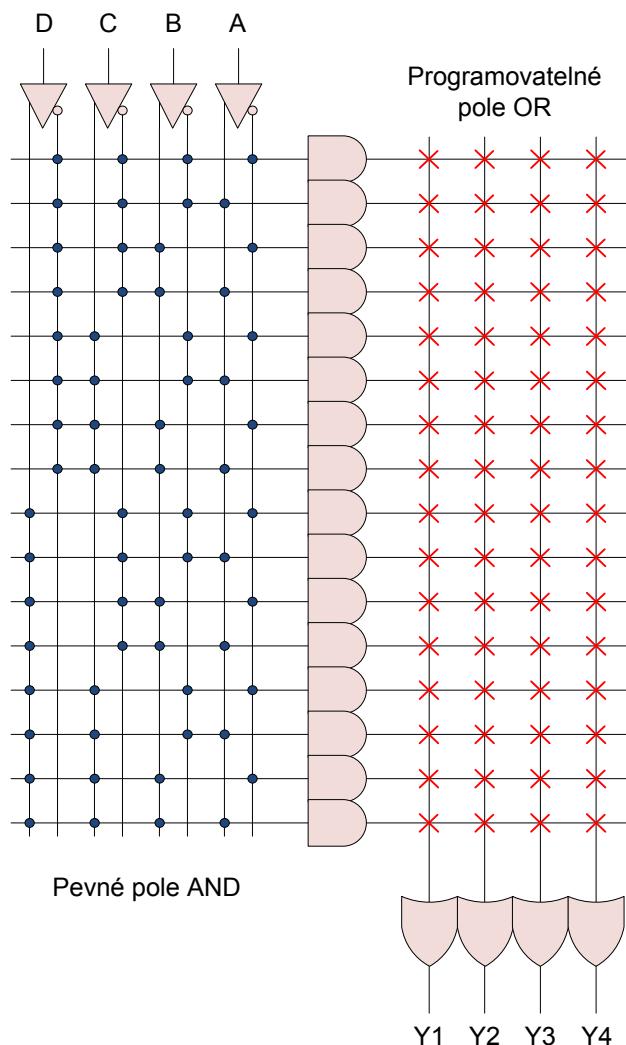
Lze však říci, že od začátku devadesátých let vyvíjí většina firem dvě od sebe velmi odlišné architektury PLD obvodů. První je architektura CPLD obvodů, založená na programovatelné matici hradel AND, hradlech OR a makrobuňkách (vychází tedy z původní koncepce obvodů PAL) a na programovatelných místech používá buňky EEPROM nebo FLASH.

Kvůli rostoucí velikosti obvodů se začalo později místo rozšiřování logických funkcí užívat spíše skládání více matic PLD obvodů do jednoho pouzdra. Vznikly tak obvody, které dnes nazýváme CPLD (*Complex Programmable Logic Device, Altera, 1988*). Od CPLD byl už pak jen malý krok k prvním FPGA obvodům (*Xilinx, 1984*). Dnes dostupná FPGA se ovšem od architektur z poloviny osmdesátých let významně odlišují. Trendem je pozvolný příklon k hrubozrnným architekturám; obvodům, které kromě elementárních programovatelných logických bloků obsahují také další komplexní podpůrné bloky.

39.1.2 Obvody typu Simple Programmable Logic Device

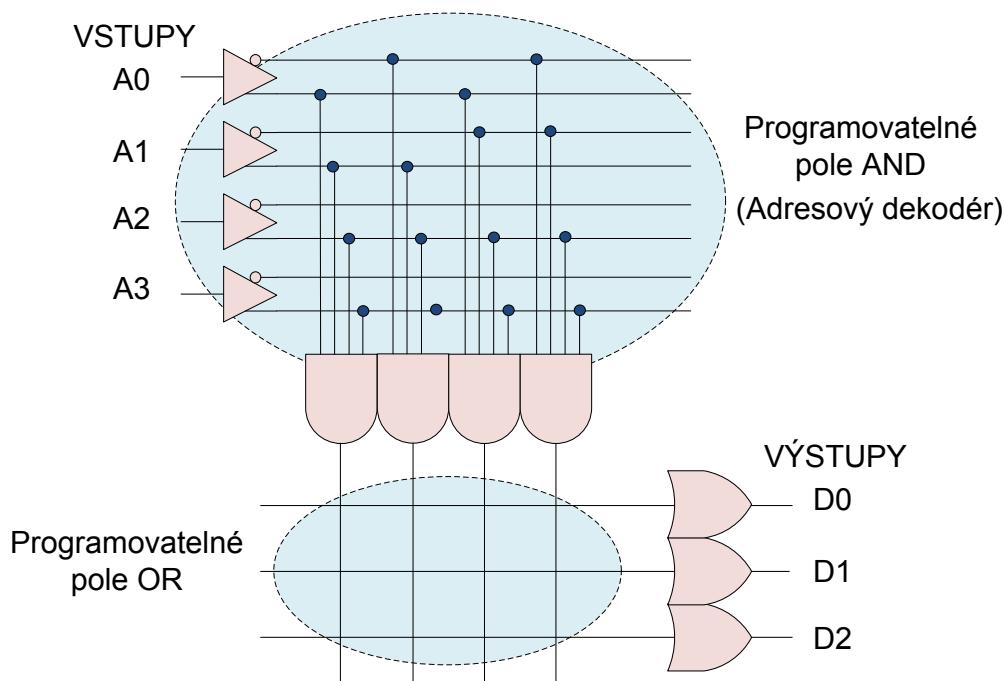
39.1.2.1 Programmable Read Only Memory (PROM)

Po mnoho let nebyly obvody PROM *Programmable Read Only Memory* zařazovány do skupiny programovatelných logických obvodů, ačkoliv většina nejmenších PROM (např. 32x8) byly používány jako logické prvky (dekodéry, převodní tabulky kódů, znakové generátory).



Obrázek 39.1.1: PLD typu Programmable Read Only Memory (PROM)

Obvody PROM představuje matici paměťových buněk, jejíž řádky jsou adresovatelné vstupní signály a datové sloupce představují výstupní signály. Počet adresových a datových signálů determinuje rozměr matice. Např. 4 vstupní signály umožňují adresaci 16 řádků, 4 datové signály indikují, že každý řádek se skládá ze 4 paměťových buněk. Z pohledu architektury obvodů PLD obsahují PROM pevné propojovací pole hradel AND, následované programovatelným polem hradel OR (viz obr. 39.1.1)



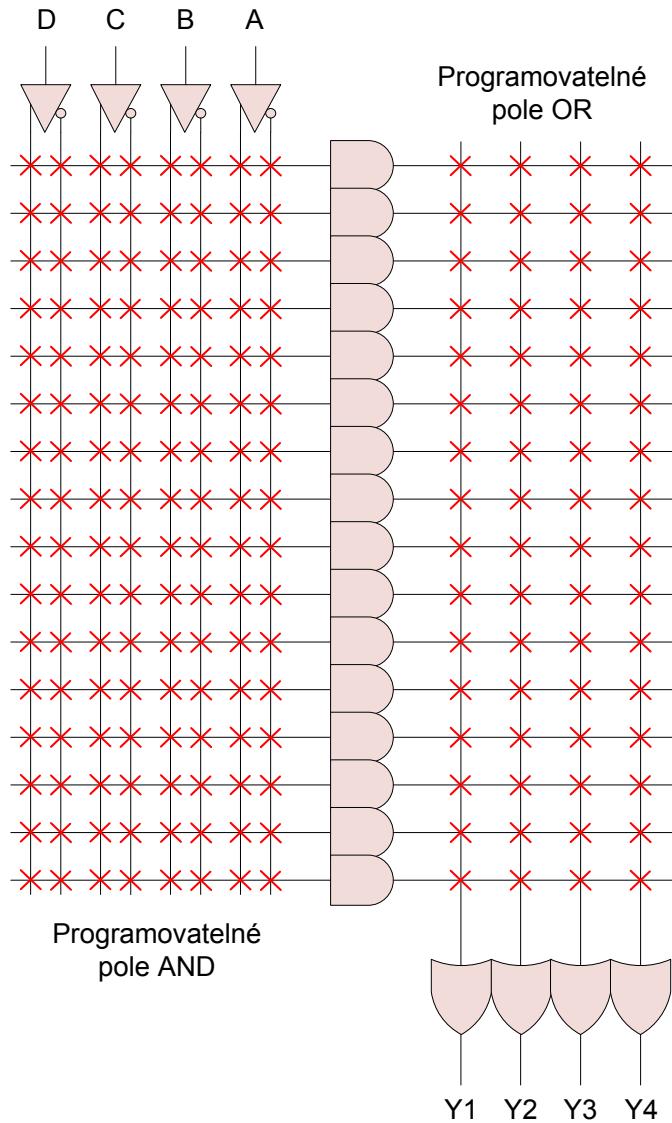
Obrázek 39.1.2: Schéma obvodu PROM

Všeobecně platí, že obvody PROM jsou nevhodnějším kandidátem implementace takových aplikací, které vyžadují, aby na každou kombinaci vstupních signálů byla jiná odezva výstupních signálů. Překážkou je omezení počtu vstupních signálů, eventuálně je limitující také velikost programovatelné matice. Její velikost se přidáním nového vstupu vždy zdvojnásobí (omezení počtu vstupních signálů jistým způsobem řeší obvody typu PAL viz kap. 39.1.2.3)[PLD_Grada].

Na obr. 39.1.2 je uvedena architektura obvodu PROM prostřednictvím symboliky obvodů PLD. Každý term odpovídá jedné z jeho adres. Programovatelná hradlo OR odpovídají datovým bitům obvodu PROM (výstupní slovo). Např. PROM velikosti 32×8 představuje obvod PLD s 5 vstupy, 32 součinovými termi ($32 = 2^5$) a 8 programovatelnými výstupními OR hradly.

39.1.2.2 PLD typu Programmable Logic Array (PLA)

Obvody PLA(*Programmable Logic Array*) patří k průkopníkům v oblasti programovatelných logických polí. Obsahují programovatelné pole hradel AND a zároveň i programovatelné pole hradel OR (viz obr. 39.1.3). Vstupní signály jsou přivedeny v přímém i invertovaném stavu do pole AND hradel.



Obrázek 39.1.3: Architektura obvodů PLA

Oproti obvodům PROM, mají obvody PLA toto pole programovatelné, takže je možné snadno vytvořit součinové termy z libovolné kombinace vstupních (přímých i

negovaných) signálů. Součinové termy jsou přivedeny do programovatelného pole OR hradel, které umožňuje připojení libovolného termu k libovolnému hradlu OR. Jeden term může být přiveden na vstup i několika hradel OR. Na jejich výstupu je formována požadovaná logická funkce ve tvaru "součtu součinů".

Je-li obvod PLD vybaven programovatelným polem AND, jako je tomu u obvodů PLA (a i např. u PAL kapitola 39.1.2.3), může být využita pouze polovina programovatelných spínačů propojovacího pole. Tato skutečnost je zřejmá, protože vstupní signály jsou do pole přivedeny v přímém i invertovaném tvaru a v žádném součin se nemůže současně vyskytovat přímý i invertovaný signál (součin by vždy nabýval hodnoty logická nula). Takže nejméně polovina (a v praxi i více, protože všechny součiny vždy neobsahují všechny veličiny) není při konstrukcích logických funkcí využita. Je tedy zřejmé, jak neefektivně je využita plocha křemíkového čipu, na kterém je obvod typu PLA realizován. Tato skutečnost stimuluje další vývoj a vznik nových architektur obvodů PLD [**PLD_Grada**].

39.1.2.3 PLD typu Programmable Array Logic (PAL)

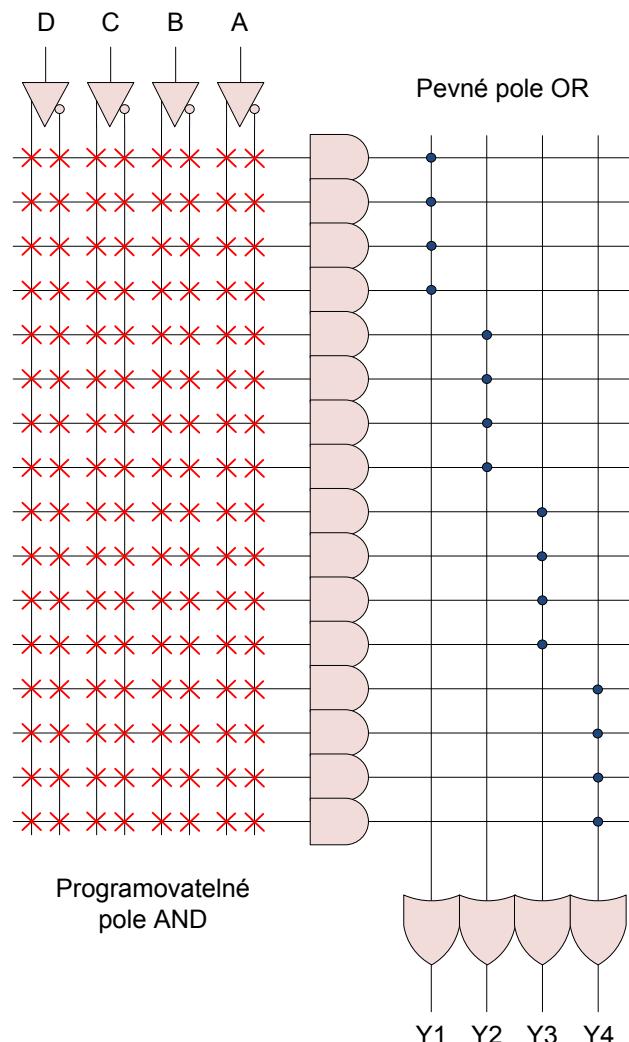
Obvody typu PAL jsou dalším z typů programovatelných logických obvodů. Jsou to PLD obvody s programovatelným polem hradel AND a pevným polem hradel OR. K jednomu hradlu OR lze připojit pouze omezený počet součinových termů, přičemž nelze současně jeden term připojit k několika hradlům OR.

Jednoduší architektura oproti v té době existujícím FPLA obvodům, umožnila zkrácení doby přenosu signálu. Obvody PAL byly navrženy tak, aby "vypadaly" jako standardní obvody PROM a mohly tak být programovány standardními programátory obvodů PROM. Tím se výrobci obvodů PAL vyvarovali požadavků na dodatečné vývojové prostředí, jak tomu bylo v době uvedení na trh v případě FPLA obvodů.

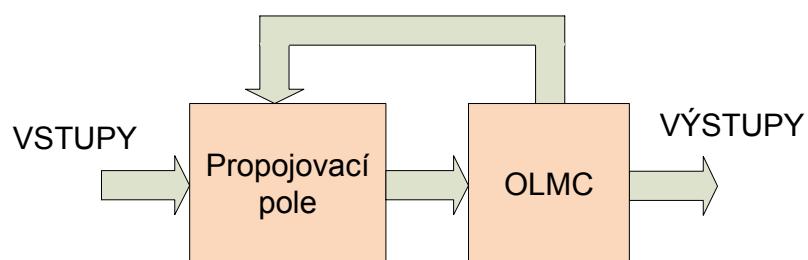
39.1.2.4 PLD typu Simple Programmable Logic Device - SPLD

Obvody

typu GAL (*Generic Array Logic*) patří do skupiny elektricky reprogramovatelných obvodů PLD (*EEPLD - Electrically Erasable Programmable Logic Device*). Z hlediska klasifikace PLD obvodů lze obvody GAL charakterizovat jako obvody s programovatelným polem AND hradel a pevným polem hradel OR. Významná odlišnost od obvodů PAL spočívá v možnosti elektrického reprogramování a využití makrobuňky (Output Logic Macrocell) na výstupech obvodu.



Obrázek 39.1.4: Architektura obvodů PAL



Obrázek 39.1.5: Obecná struktura obvodu GAL

39.1.3 Obvody typu Complex Programmable Logic Device - CPLD

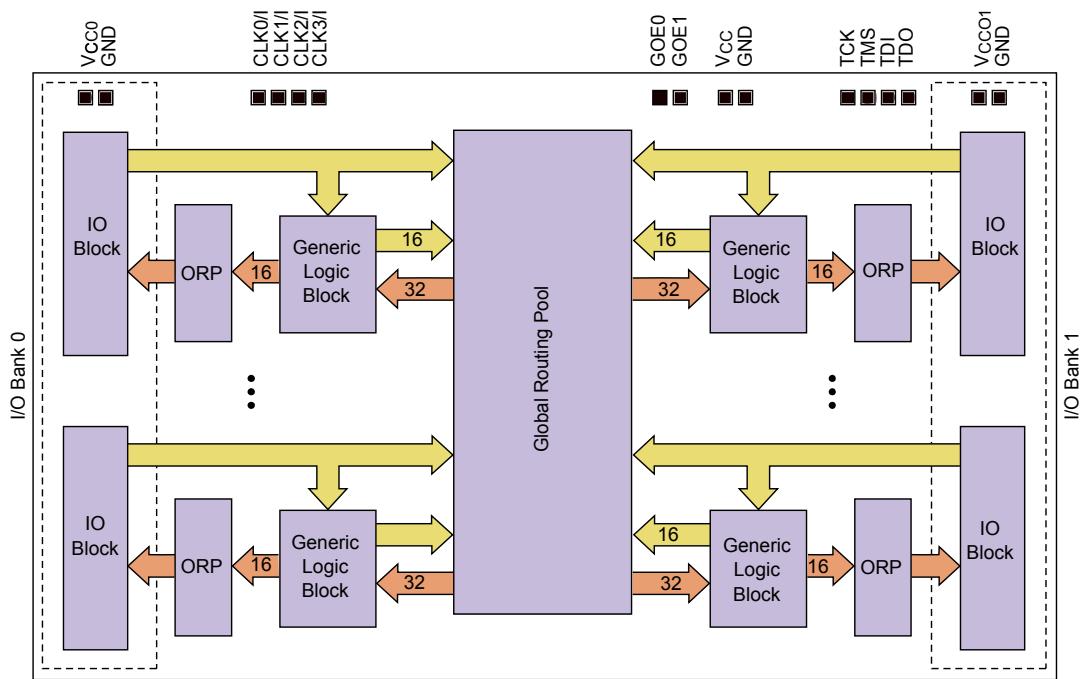
Obvody typu CPLD patří podobně jako obvody SPLD do skupiny elektricky reprogramovatelných PLD obvodů (EEPLD). Většina CPLD obvodů je programovatelná v cílovém systému, nesou tedy i označení ISP (*In-system programming*). Tyto obvody jsou typické, podobně jako obvody GAL, svou programovatelnou maticí hradel AND následovanou hradlem OR a makrobuňkou. Na výstupu hradla OR je tak stejně jako u obvodů GAL formována pořadovaná logická funkce ve tvaru *součtu součinů*. Od obvodů GAL se však obvody CPLD liší hlavně velkým centrálním propojovacím polem. Makrobuňky jsou sdruženy do větších skupin a tvoří tzv. **funkční bloky** [Pinker2006]. Pro architekturu obvodů CPLD jsou charakteristické tyto čtyři struktury:

- velké centrální propojovací pole (*Global Routing Pool*),
- programovatelné funkční bloky (*Generic Logic Block - GLB*), uspořádané kolem propojovacího pole, sestávající z:
 - programovatelné matice AND,
 - několika makrobuňek,
 - alokátoru součinů,
- výstupní propojovací pole (*Output Routing Pool - ORP*),
- vsutpní/výstupní bloky (*I/O Blocks*).

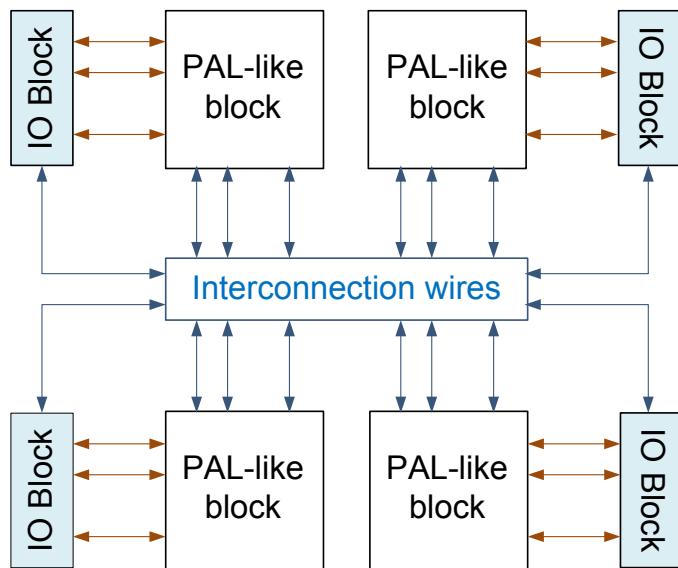
Všechny výše uvedené stavební prkny mají u různých výrobců různá označení, jejich význam a funkce je však velmi podobná. Pomocí makrobuňek lze realizovat různě složité kombinační a sekvenční logické či paměťové funkce. Přes programovatelné **vstupní/výstupní bloky** lze přivádět vstupní signály z vývodů obvodu nebo naopak vyvádě výstupní signály. Na rozdíl od jednodušších SPLD, kde vstupní/výstupní obvody jsou přímo spojeny s makrobuňkou, jsou však u CPLD zásadně od makrobuňek odděleny a tvoří samostatný I/O blok, do kterého mohou výstupní signály z makrobuňek vstupovat přes programovatelné **výstupní propojovací pole**. Tím se všeobecně zlepší využití jak makrobuňek, tak výstupních obvodů.

Všechny vstupní/výstupní bloky a všechny makrobuňky lze spolu vzájemně propojit pomocí **centrálního programovatelného propojovacího pole**.

39.1.4 Obvody typu Field-Programmable Gate Array - FPGA



Obrázek 39.1.6: Architektura CPLD ispMACH4000 společnosti Lattice



Obrázek 39.1.7: Obecná struktura obvodu CPLD

39.1.5 Terminologie

- **PLA** — *Programmable Logic Array* nebo také **FPLA** *Field Programmable Logic Array*: Obvod obsahuje matici AND za nímž následuje matice OR, jež jsou obě programovatelné.
- **PAL** - *Programmable Array Logic*¹: Relativně jednoduchý PLD obvod obsahující programovatelnou matici AND, za níž následuje pevná matice OR (obr.39.1.4).
- **SPLD** — *Simple programmable logic device*: Označení je společné pro PLA a PAL struktury.
- **CPLD** — *Complex programmable logic device*: Název zahrnuje obvody jejichž složitost je někde mezi architekturami obvodů PAL a FPGA a nese rysy obou těchto architektur. Základním stavebním blokem je tzv. *makrobuňka*, která realizuje logický výraz ve tvaru normální disjunktivní formy.
- **FPGA** — *Field-Programmable Gate Array*: Obvody mají z programovatelných obvodů nejobecnější strukturu a obsahují nejvíce logiky. Základním stavebním blokem jsou logické buňky (*logic elements*; Altera), nebo také řezy (*slices*; Xilinx), jež jsou zpravidla sdruženy do větších logických bloků² (*logic array block*, LAB);

¹obchodní známka je v současnosti ve vlastnictví společnosti Lattice Semiconductor

²Výrobci FPGA obvodů používají vlastní názvosloví k popisu jejich architektur.

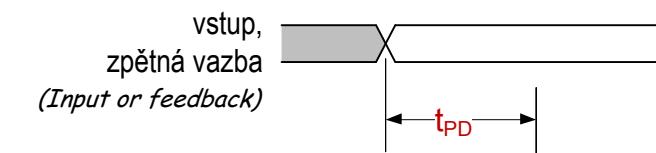
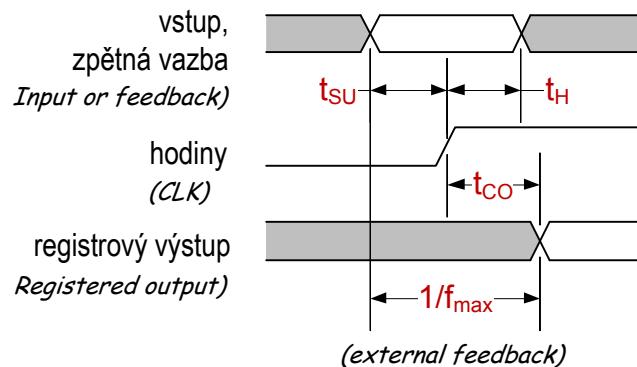
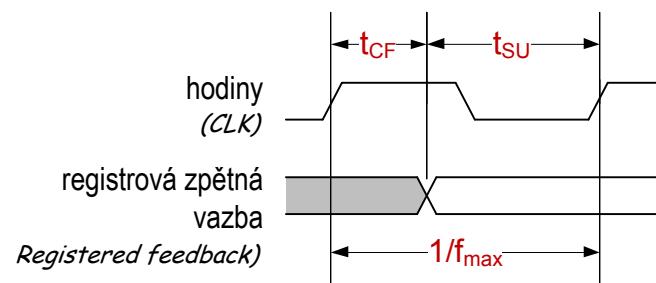
Altera) resp. (*configurable logic block*, CLB; Xilinx). Logické buňky obsahují tzv. vyhledávací tabulku (*Look-up table*, LUT), která dovoluje realizovat jednoduché kombinační funkce. LUT má obvykle čtyři vstupní signály, které mají význam indexu (pointeru) do této tabulky. K propojení CLB slouží programovatelná propojovací struktura PI (*programmable interconnect*).

39.2 Dynamické parametry PLD

Programovatelné logické obvody mohou pracovat jako obvody kombinační, nebo častěji jako obvody sekvenční [Wakerly1999]. Symboly pro doby jenž jsou dále popsány, se v různých firemních publikacích liší, význam však zůstáva.

- t_{PD} - *doba zpoždění* - ve funkci kombinančního obvodu t_{PD} je doba od změny signálů na vstupech obvodu do změny signálů na jeho výstupech. Je podstatná pro režim bez hodinových impulzů u ryze kombinančního obvodu. U sekvenčního obvodu Mealyho typu je to zpoždění obvodu v době mezi hodinovými impulzy,
- t_{CO} - *doba zpoždění po hodinovém impulzu* - doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu,
- t_{CF} - opět se jedná o zpoždění jako v předchozím případě, tj. je to doba od aktivní hrany hodinového impulzu do změny výstupního signálu registru, jenž je ovšem veden jako zpětnovazební vstup. Běžně platí, že $t_{CF} < t_{CO}$ a pokud jej výrobce neuvádí, lze předpokládat $t_{CF} = t_{CO}$
- t_{SU} - *doba předstihu* - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní až do aktivní hrany hodinového impulzu,
- t_H - *doba přesahu* - je doba, po kterou vstupní signál musí být konstantní po aktivní hraně hodinového impulzu,
- f_{max} - *maximální kmitočet hodinových impulzů* - Je to nejvyšší frekvence, na které zařízení může pracovat spolehlivě a je ekvivalentní k převrácené hodnotě minimální periody hodinových impulzů.

Dynamické parametry u programovatelných logických obvodů jsou závislé na vnitřních cestách signálů. U obvodů CPLD je situace jednodušší, neboť cesty signálů jsou do jisté míry pevně dány a jedná se jen o jejich výběr. Výrobci uvádějí korekční vztahy pro výše uvedené doby, kterými jsou respektovány logické zátěže a způsob využití vnitřních bloků. Složitější situace je u obvodů FPGA, kde cesty signálů nejsou předem definovány a v procesu návrhu budou teprve vyvrtány. Jednotlivé doby proto musí dodatečně doložit návrhový systém [Pinker2006].

(a) Doba zpoždění t_{PD} (b) Doba zpoždění po hodinovém impulu t_{CO} , doba předstihu

(c)

Obrázek 39.2.1: Základní dynamické parametry PLD: t_{PD} , t_{CO} , t_{CF} , t_{SU} , t_H , f_{max}

Obsah

40.1 Návrh číslicového obvodu	380
40.1.1 Popis číslicové funkce	380
40.2 Úvod	381
40.3 Základní vlastnosti jazyka VHDL	382
40.4 Logické úrovně	383
40.5 Souběžné příkazy	384
40.6 Sekvenční příkazy	385
40.7 Technologicky nezávislá část návrhu	385
40.7.1 Dynamicky řízené sekvenční obvody	385
40.7.2 Staticky řízené sekvenční obvody	386
40.7.3 Kombinační obvody	386
40.8 Knihovna LPM	386
40.8.1 Posuvný registr - lpm shiftreg	386

40.1 Návrh číslicového obvodu

40.1.1 Popis číslicové funkce

Máme-li představu o funkci a struktuře budoucího číslicového obvodu, nastupuje proces *zachycení návrhu* (design entry, design capture), při kterém je nutné naše představy přenést do počítačem zpracovatelné formy. Tuto úlohu, lze splnit na různých úrovních abstrakce [**Stastny2010**]:

- **hradlové/schématické** - navrhujeme přímo kreslením schématu budoucího obvodu. Výhodou tohoto postupu je jeho srozumitelnost a zachycení skutečné podoby návrhu - co máme ve schématu je to, co se realizuje. Nevýhody nicméně převyšují výhody. Kreslení schéma je obvykle specifické pro zvolený obvod, protože často používáme struktury, které jsou k dispozici jen na příslušném PLD obvodu. Konverze do jiného obvodu, znamená překleslení schématu. Vlastní proces kreslení je pomalý a únavný, protože pracujeme na nízké úrovni abstrakce - kreslíme obvod hradlo po hradle. Chceme-li například realizovat stavový automat, musíme nejprve zminimalizovat jeho přechodovou a výstupní funkci a pak nakreslit schéma. Snadno se můžeme dostat do situace, kdy je nutné kompletní překreslení.
- **meziregistrových přenosů** - tzv. RTL (*Register Transfer Level*). RTL popis je dnes standardním prostředkem pro popis číslicové funkce. Číslicové synchronní obvody se skládají ze dvou základních typů logických bloků: paměťových prvků (registrů) a kombinačních funkcí. Na úrovni abstrakce, číslicový obvod popisujeme tak, že jednotlivé struktury popíšme pomocí těchto dvou typů logiky a doplníme informaci o jejich vzájemném propojení (odkud, kam a přes jaké kombinanční logické funkce jsou přelévána data mezi registry). Popis obvodu je realizován v textové podobě pomocí zápisu ve speciálním programovacím jazyku (HDL - *Hardware Description Language*). Pro popis se používají nejčastěji jazyk VHDL a Verilog. Použití RTL úrovně má nesporné výhody: získáme technologicky nezávislý popis obvodu na relativně vysoké úrovni abstrakce, přičemž jeden řádek zdrojového kódu je v hardware reprezentován typicky desítkami/stovkami hradel. To zvyšuje produktivitu práce, zpřehledňuje vlastní návrh, zjednoduší přenos návrhu mezi různými technologiemi a zrychluje jak vlastní návrh, tak pozdější opravy. Jedinou nevýhodou je nevhodnost pro ryze asynchronní návrh, to ale není při práci s hradlovými poli omezující, neboť hradlová pole jsou určena právě pro synchronní číslicové obvody.
- **algoritmické** - neustále se zkracující délka návrhového cyklu spolu s rostoucí komplexitou navrhovaných systémů nutí návrháře používat stále vyšší úrovně

abstrakce. Architektura na RTL úrovni je navrhována vždy s ohledem ke skutečnému časování obvodu a použitěm paralelizmu. Systém je na této úrovni narvržen s odpovídajícím počtem výpočetních jednotek, řídicích bloků, sběrnic, apod. Problém nastává v okamžiku, kdy v pozdějších fázích návrhu zjistíme, že navržená architektura nesplňuje očekávání. Právě odstranění informace o paralelismu a časování ze zdrojového kódu je přínosem *algoritmické syntézy*. Funkce bloku je popsána v některém z jazyků na "vyšší úrovni" - např. ANSI C, Handel-C, SystemC, nebo System Verilog. Příslušný syntézní nástroj pak dostane informaci o počtu funkčních jednotek a časování ve formě jednoduchých omezení (například povolíme použití nejvíše dvou násobiček a dvou sčítáček) a na základě předloženého algoritmu vygeneruje RTL kód výsledného systému (datových cest i řídicích bloků). Každá změna v architektuře je triviální - zjistíme-li, že výpočetní výkon systému je příliš nízký, stačí jen znova spustit syntézní proces s jiným počtem aritmetických jednotek. Rychlosť celého procesu umožňuje vyzkoušet celou řadu alternativ architektury a najít nevhodnější kompromis mezi plochou a rychlosťí obvodu. Zjednodušuje se i verifikace. Použitelnost algoritmické syntézy zatím omezuje fakt, že výsledek není tak dobrý v porovnání s návrhem od profesionála.

40.2 Úvod

Název

VHDL představuje akronym — VHSIC Hardware Description Language. Samo označení VHSIC je další akronym představující název projektu, v rámci něhož byl jazyk VHDL zpracován, a znamená Very High Speed Integrated Circuits. I když označení VHDL v tomto kontextu není příliš přiléhavé, vžilo se a obecně se používá. Jazyk VHDL byl původně vyvinut především pro modelování a simulaci rozsáhlých systémů. Na mnoha jeho konstruktech je to znát, některé z nich nemají pro syntézu vůbec význam. Zde se však budeme zabývat především použitím jazyka VHDL k vytváření modelů určených pro syntézu číslicových systémů. České termíny budou v prvním výskytu zapsány tučně. Často tyto termíny nejsou ustálené, a proto budeme uvádět i jejich anglické ekvivalenty, které již většinou mají ustálenou podobu.

40.3 Základní vlastnosti jazyka VHDL

- Je to otevřený standard (*open standard*). K jeho použití pro sestavení návrhových systémů není třeba licence jeho vlastníka, jako je tomu u jiných jazyků HDL (například u jazyka ABEL). To je jeden z důvodů, proč je tento jazyk v návrhových systémech často používán.
- Umožňuje pracovat na návrhu, aniž je předtím zvolen cílový obvod. Ten může být zvolen až v okamžiku, kdy jsou známy definitivní požadavky na prostředí, v němž má navrhovaný systém pracovat, a je možno cílový obvod měnit podle potřeby při zachování textu popisujícího systém, může být zvolen obvod PLD nebo FPGA (*Device-independent design*).
- Je možno provést simulaci navrženého obvodu na základě téhož zdrojového textu, který pak bude použit pro syntézu a implementaci v cílovém obvodu. Zdrojový text je možno zpracovávat v různých simulátorech a v syntetizérech různých výrobců. Odsimulovaný text může být použit v dalších projektech s různými cílovými obvody, což je podporováno hierarchickou strukturou jazyka. Této vlastnosti jazyka se říká přenositelnost (*portability*) kódu.
- V případě úspěšného zavedení výrobku na trh lze popis modelu systému v jazyku VHDL použít jako podklad pro jeho implementaci do obvodů **ASIC** vhodných pro velké série.

Některé námítky proti VHDL:

- Jazyk VHDL je dosti „upovídáný“, jazykové konstrukty nejsou navrženy tak, aby zdrojový text byl stručný a při popisu modelu určitého systému se setkáme s opakováním bloků stejného znění. Ty je však možno snadno vytvářet využitím kopírování a podobných možností současných editorů.
- V jazyku VHDL je možno vytvořit neefektivní konstrukce, efektivnost nebo její nedostatek nemusí být na první pohled ze zdrojového textu patrné. To je však vlastnost i jiných jazyků vysší úrovně a výsledná efektivnost konstrukce závisí nejen na kvalitě programových návrhových prostředků, ale také na zkušenosti konstruktéra (návrháře).

Základní verze jazyka VHDL byla přijata jako standard IEEE číslo 1076 v roce 1987. Konstrukty odpovídající tomuto standardu se označují jako konstrukty jazyka VHDL-87. Podobně jako další standardy IEEE, i tento standard se v pravidelném pětiletém intervalu

aktualizuje. Upravená verze standardu byla přijata v roce 1993, odkazuje se na ni jako na standard VHDL - 93.

Vedle jazyka VHDL se setkáme také s jazykem Verilog, který má podobné použití. Uvádí se, že jazyk VHDL je rozšířený zejména v Evropě, zatímco Verilog se používá hlavně v asijských zemích. V USA se používají oba tyto jazyky.

Vyjadřovací schopnosti jazyku VHDL jsou dány příkazy, jenž mají souběžný nebo sekvenční charakter. Některé příkazy jsou jen jednoho druhu, jiné mohou být obojího druhu. Toto rozlišení se týká toho, ve které části popisu se příkazy mohou používat. Pro stručnost budeme dále mluvit o souběžných a o sekvenčních příkazech, i když jde spíše o to, kde se tyto příkazy nacházejí či mohou nacházet. V následujících kapitolách jsou příkazy rozděleny do dvou velkých skupin:

- **Souběžné příkazy (concurrent statements)**: zapisují se v textu jazyka mimo procesy, definice funkcí a procedur.
- **Sekvenční příkazy (sequential statements)**: slouží k algoritmickému vyjádření popisu. Tyto příkazy mohou být zapsány jen v procesech, v definicích funkcí a procedur.

40.4 Logické úrovně

Od jazyka určeného k návrhu a modelování integrovaných obvodů očekáváme schopnost modelovat základní logické úrovně - *log. o* a *log. 1*. Ty jsou pro jednoduché simulace postačující, ale již například pro návrh a modelování třístavových budičů sběrnic potřebujeme mít možnost pracovat se stavem vysoké impedance *Z*. Dalším jednoduchým příkladem může být modelování zkratu na sběrnici, který může vzniknout v situaci, kdy dva budiče budí jeden spoj opačnými logickými úrovněmi. Balíček *std_logic_1164* knihovny IEEE pro tyto účely zavádí *devítistavovou logiku*.

- 'U': uninitialized. This signal hasn't been set yet.
- 'X': unknown. Impossible to determine this value/result.
- 'o': logic 0
- '1': logic 1
- 'Z': High Impedance

- 'W': Weak signal, can't tell if it should be 0 or 1.
- 'L': Weak signal that should probably go to 0
- 'H': Weak signal that should probably go to 1
- '-': Don't care.

Všimněme si, že tato knihovna je připojena všemi ukázkovými kódy. Logický signál, který má popsaných hodnot nabývat, je pak definován jako signál typu `std_logic`, nebo `std_logic_vector` pokud se jedná o sběrnici. Pomocí nich modelujeme standardní propojení logických prvků, tj. "obyčený kus drátu". [**Stastny2010**]

40.5 Souběžné příkazy

40.6 Sekvenční příkazy

40.7 Technologicky nezávislá část návrhu

V následujícím textu jsou uvedeny základní způsoby popisu chování sekvenčních (např. klopné obvody) a kombinačních obvodů. Klopné obvody jsou rozdělovány na **hranově citlivé** a **úrovňově citlivé**. Je možné je popsat jako *jednobitové paměti*. Hranově citlivý klopný obvod je obvod řízený změnou na vstupu synchronizace (*clock input*). Bývá označován "*flip-flop*". Úrovňově citlivý klopný obvod je nazýván v české terminologii *zdrž*. Obvykle je však srozumitelný anglický název "*latch*".

40.7.1 Dynamicky řízené sekvenční obvody

Obvody řízené změnou signálu na vstupu synchronizace jsou ve VHDL popisovány použitím příkazu process a podmíněného příkazu **if**. V podmíněném příkazu jsou rozlišovány události (events), které znamenají vzestupnou hranu nebo sestupnou hranu signálu na vstupu synchronizace. Při popisu je možné použít dvou různých zápisů, ve kterých se objevuje atribut události synchronizačního signálu `clk` `clk'event` nebo volání funkce.

- `(clk'event and clk='1')` vzestupná hrana signálu
- `(clk'event and clk='0')` sestupná hrana signálu
- `rising_edge(clk)` volání funkce vzestupné hrany
- `falling_edge(clk)` volání funkce sestupné hrany

Uvedené příklady ukazují možnosti vyjádření vzestupné a sestupné hrany ve VHDL. Vyjádření pomocí atributu je častěji používané, protože tento konstrukt je rozeznatelný při syntéze obvodového řešení. Nicméně použití volání funkce je výhodnější při simulaci, protože nastává pouze při změně signálu `clk` z $0 \rightarrow 1$ a z $1 \rightarrow 0$, ale ne z $X \rightarrow 1$ nebo z $0 \rightarrow X$, které nepředstavují platný přechod z jednoho stavu do druhého. Devět hodnot signálu, které jsou označované jako `std_logic` jsou určeny k modelování poruchových stavů logické sítě. Jsou to hodnoty '`U`', '`X`', '`0`', '`1`', '`Z`', '`W`', '`L`', '`H`', '`-`'.

40.7.2 Staticky řízené sekvenční obvody

V následujících odstavcích jsou popisovány klopné obvody řízené úrovní synchronizačního signálu, které jsou známé pod názvem **zdrž** (*latch*).

40.7.3 Kombinační obvody

40.8 Knihovna LPM

Knihovna **LPM** (angl. *Library of Parametrized module*) obsahuje parametrizovatelné moduly jako jsou hrada, čítače, multiplexory, klopné obvody, aritmetické a paměťové funkce.

Standard LPM byl navržen v roce 1990 jako jedna z možností pro efektivní návrh číslicových systémů do odlišných technologií, jako jsou např. obvody PLD, hradlová pole a standardní buňky. Předběžná verze standardu vyšla v roce 1991, další úprava předběžné verze pak v roce 1992. Standard byl přijat organizací EIA (angl. *Electronic Industries Alliance*) v dubnu roku 1993 jako doplněk do standardu EDIF.

EDIF je formát pro přenos návrhu mezi návrhovými nástroji různých výrobců. Formát EDIF popisuje syntaxi, která reprezentuje logický netlist. LPM do něj pak přidává množinu funkcí, která popisuje logické operace netlistu. Před rozšířením o LPM musel každý EDIF netlist typicky obsahovat technologicky specifické logické funkce, které zabraňovaly tomu, aby byl návrh ve větší míře nezávislý na cílové technologii [Pinker2006].

40.8.1 Posuvný registr - lpm shiftreg

Jméno	Popis	komentář
data[]	Data input to the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH.
clock	Positive-edge-triggered clock	Vstup hodinového signálu.
enable	Clock enable input	Blokuje hodinový signál.
shiftin	Serial shift data input	Pro funkci je nutné použít alespoň jeden ze signálů data[], aset, aclr, sset, sclr, a/nebo shiftin.
load	Synchronous parallel load	(1) load operation (podmínka: enable = 1); (0) shift operation (výchozí).
aclr	Asynchronous clear input	Signál aclr má vyšší prioritu než signál aset.
aset	Asynchronous set input	Naplní registr g[] hodnotou LPM_AVALUE
sclr	Synchronous clear input	Signál sclr má vyšší prioritu než signál sset.
sset	Synchronous set input	Naplní registr g[] hodnotou LPM_SVALUE
q[]	Data output from the shift register	Šířku registru určuje parametr LPM_WIDTH. Vyžaduje shiftout.
shiftout	Serial shift data output	Vyžaduje registr q[].

Tabulka 40.8.1: Popis portů komponenty lpm_shiftreg.

```

11      lpm_width      : natural;
12      lpm_direction : string := "LEFT";
13      — Constant value that is loaded when aset is high.
14      lpm_avalue     : string := "UNUSED";
15      — Constant value that is loaded on the rising edge of
16      — clock when sset is high.
16      lpm_svalue     : string := "UNUSED";
17      lpm_pvalue     : string := "UNUSED";
18      lpm_type       : string := "L_SHIFTREG";
19      lpm_hint       : string := "UNUSED"
20 );
21 port (
22     — Data input to the shift register.
23     data : in std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) := (OTHERS
24         => '0');
25     — Positive-edge-triggered clock. (Required)
26     clock : in std_logic;
27     — Clock enable input
28     enable : in std_logic := '1';
29     — Serial shift data input.
30     shiftin : in std_logic := '1';
31     — Synchronous parallel load. High (1): load operation; low
32     — (0): shift operation.
33     load : in std_logic := '0';
34     — Asynchronous clear input.
35     aclr : in std_logic := '0';
36     — Asynchronous set input.
37     aset : in std_logic := '0';
38     — Synchronous clear input.
39     sclr : in std_logic := '0';
40     — Synchronous set input.
41     sset : in std_logic := '0';
42     — Data output from the shift register.
43     q : out std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0);
44     — Serial shift data output.
45     shiftout : out std_logic
46 );
47 end LPM_SHIFTREG;
48
49 architecture LPM_SYN of LPM_SHIFTREG is
50     — FUNCTION DECLARATION
51     function conv_STR_to_VECT (str : string) return
52         std_logic_vector is
53         — conversion string to std_logic_vector

```

```

51  variable len      : integer := str'length;
52  variable ivalue : std_logic_vector(lpm_width+4 downto 0) := 
53    (others => '0');
54  variable digit   : std_logic_vector(3 downto 0) := (others =>
55    '0');
56  variable ten     : std_logic_vector(3 downto 0) := "1010";
57 begin
58  if (str /= "UNUSED") then
59    for i in 1 to len loop
60      case str(i) is
61        when '0' => digit := "0000";
62        when '1' => digit := "0001";
63        when '2' => digit := "0010";
64        when '3' => digit := "0011";
65        when '4' => digit := "0100";
66        when '5' => digit := "0101";
67        when '6' => digit := "0110";
68        when '7' => digit := "0111";
69        when '8' => digit := "1000";
70        when '9' => digit := "1001";
71        when others =>
72          ASSERT FALSE
73          REPORT "Illegal character "& str(i) & " in string"
74            parameter!
75          SEVERITY ERROR;
76      end case;
77      ivalue(lpm_width+3 downto 0) :=
78        unsigned(ivalue(lpm_width-1 downto 0)) * unsigned(ten)
79        + unsigned(digit);
80    end loop;
81  end if;
82  return ivalue(lpm_width-1 downto 0);
83 end conv_STR_to_VECT;

84 — SIGNAL DECLARATION
85 signal i_q : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0) := (OTHERS
86   => '0');
87 signal init           : std_logic := '0';
88 signal tmp_init       : std_logic := '0';
89 signal i_shiftout_pos : natural := lpm_width-1;

90 begin
91 — PROCESS DECLARATION
92  — basic error checking for invalid parameters

```

```

89      MSG: process
90      begin
91          if (lpm_width <= 0) then
92              ASSERT FALSE
93              REPORT "Value of lpm_width parameter must be greater than
94                  0!" severity error;
95          end if;
96          wait;
97      end process MSG;
98
99      process (tmp_init)
100     begin
101         if (tmp_init = '1') then
102             init <= '1';
103         end if;
104     end process;
105
106    process (clock, aclr, aset, init)
107        variable avalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
108            conv_STR_to_VECT(lpm_avalue);
109        variable svalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
110            conv_STR_to_VECT(lpm_svalue);
111        variable pvalue : std_logic_vector(lpm_width-1 downto 0):=
112            conv_STR_to_VECT(lpm_pvalue);
113
114    begin
115        — INITIALIZE TO PVALUE —
116        if (init = '0') then
117            if (lpm_pvalue /= "UNUSED") then
118                i_q <= pvalue;
119            end if;
120            if ((lpm_direction = "LEFT") or (lpm_direction =
121                "UNUSED")) then
122                i_shiftout_pos <= lpm_width-1;
123            elsif (lpm_direction = "RIGHT") then
124                i_shiftout_pos <= 0;
125            else
126                ASSERT FALSE
127                REPORT "Illegal lpm_direction property value for
128                    LPM_SHIFTREG!"
129                SEVERITY error;
130            end if;
131            tmp_init <= '1';
132        elsif (aclr = '1') then

```

```
127      i_q <= (OTHERS => '0');
128      elsif (aset = '1') then
129          if (lpm_avalue = "UNUSED") then
130              i_q <= (OTHERS => '1');
131          else
132              i_q <= avalue;
133          end if;
134      elsif (rising_edge(clock)) then
135          if (enable = '1') then
136              if (sclr = '1') then
137                  i_q <= (OTHERS => '0');
138              elsif (sset = '1') then
139                  if (lpm_svalue = "UNUSED") then
140                      i_q <= (OTHERS => '1');
141                  else
142                      i_q <= svalue;
143                  end if;
144              elsif (load = '1') then
145                  i_q <= data;
146              else
147                  if (lpm_width < 2) then
148                      i_q(o) <= shiftin;
149                  elsif (lpm_direction = "LEFT") then
150                      i_q <= (i_q(lpm_width-2 downto 0) & shiftin);
151                  else
152                      i_q <= (shiftin & i_q(lpm_width-1 downto 1));
153                  end if;
154              end if;
155          end if;
156      end process;
157
158      q <= i_q;
159      shiftout <= i_q(i_shiftout_pos);
160
161  end LPM_SYN;
```


Část XVII

Elektromagnetická kompatibilita

Část XVIII

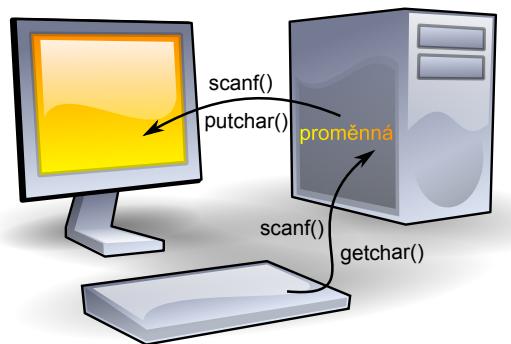
C

Obsah

42.1 Hlavičkový soubor stdio.h	400
42.2 Standardní vstup a výstup znaku	400
42.3 Standardní vstup a výstup řetězců	402
42.4 Formátovaný standardní vstup a výstup	402
42.5 Souhrnné cvičení	402

Jazyk C, narodil od Pascalu, nedefinuje žádnou I/O (vstupně/výstupní -Input/Output) operaci jako část jazyka. Nezbytné vstupy a výstupy jsou řešeny tak, že standardní knihovna obsahuje několik funkcí, které I/O zajišťují.

Nejvíce strojově závislé akce jsou I/O operace a tímto způsobem se tedy důsledně oddělují strojově závislé a strojově nezávislé části jazyka. Tato skutečnost je pak významným přínosem při vytváření kompilátoru pro jiný počítač.



Obrázek 42.0.1: Operace pro terminálový vstup a výstup

42.1 Hlavičkový soubor stdio.h

Aby bylo možno správně používat všechny funkce pro vstupu a výstupu, je nutné na začátku programu připojit "popis" těchto funkcí. Ten se nachází v hlavičkovém (*header*) souboru stdio.h:

```
#include <stdio.h> //zde není středník
```

Od tohoto okamžiku je pak možné používat dále popsané funkce.

42.2 Standardní vstup a výstup znaku

Výstup jednoho znaku zajišťuje putchar() a vstup jednoho znaku funkce getchar().

- `int putchar(int c);`

- **int getchar(void);**

 Obě funkce pracují s proměnnými **int** a ne **char**.

```

1  ****
2  /* Cteni_tisk_znaku.C
3  /* Cteni a tisk znaku
4  /* P. Herout   10.1991
5  ****
6  #include <stdio.h>
7
8 main()
9 {
10    int c;
11
12    printf("\nZadej znak:");
13    c = getchar() + 1;
14    printf("%c (ASCII %d)\n", c, c);
15 }
```

Výpis 42.1: Cteni_tisk_znaku.c Čtení a tisk znaku ze standardního vstupu na standardní výstup.

Příklad 42.2.1. Čtení znaku ze standardního vstupu a jejich zápis na standardní výstup ukazuje následující program, představující jednoduchou variantu příkazu kopírování souboru (nutno ovšem přesměrovat vstup a výstup). 

```

1  ****
2  /* CPY.C
3  /* CoPY character
4  ****
5
6  #include <stdio.h>
7
8 int main(void)
9 {
10    int c;
11
12    while ((c = getchar()) != EOF)
13        putchar(c);
14    return 0;
15 }
```

Výpis 42.2: CPY.c Kopíruje znak ze standardního vstupu na standardní výstup.

42.3 Standardní vstup a výstup řetězců

Standardní vstup a výstup řetězců je jednoduchou nadstavbou nad čtením znaku. Obě funkce,

- **char *gets(char *s);**
- **int puts(const char *s);**

pracují s řetězci. **gets()** načte do znakového pole vstupní řetězec az do konce řádku, symbol '\n' není do znakového pole zapsán. Ukazatel na pole (načtený řetězec) je rovněž návratovou hodnotou. Chybu signalizuje návrat NULL. **puts()** zapíše řetězec na výstup a přidá přechod na nový řádek '\n'. Chybu představuje návratové EOF, jinak vrací kladné cele číslo.

Jednoduchost použití skrývá velké nebezpečí. Funkce **gets()** nemá informaci o délce oblasti vymezené pro čtený řetězec. Je-li oblast kratší, než vstupní řádek, dojde jeho načtením velmi pravděpodobně k přepsání paměťové oblasti související s vyhrazenou pamětí. A to se všemi důsledky z toho vyplývajícími.

42.4 Formátovaný standardní vstup a výstup

42.5 Souhrnné cvičení

Příklad 42.5.1. Vytvořte program, který vygeneruje ASCII tabulku se čtyřmi sloupcí ve formátu [znak|kód|znak|kód]. Rozsah tabulky definujte pomocí dvou symbolických konstant **MIN_ASCII**, **MAX_ASCII**.

```

1  /*************************************************************************/
2  /*  ASCII.C               */
3  /*  Generate ASCII table   */
4  /*************************************************************************/
5  #include <stdio.h>
6  #include <conio.h>
7
8  #define MIN_ASCII 32
9  #define MAX_ASCII 127
10 #define BASE      ' '
11 #define TABLE_HEADING "\tASCII\t\tASCII\nChar\tCode\tChar\tCode\n"
12

```

```
13 char ascii_table_tittle []= "uuuuuuuASCIIuCODEuTABLE";
14
15 main ()
16 {
17     int index = 0, i, task = 0;
18
19     printf ("%s\n", ascii_table_tittle);
20     printf ("-----\n");
21     printf ("%s", TABLE_HEADING);
22     printf ("=====\\n");
23
24     while (task < MAX_ASCII)
25     {
26         for (i = 0; i < 2; i++)
27         {
28             task = BASE + index + i;
29             printf ("%c\t%d\t", task, task);
30         }
31         printf ("\n");
32         index += 2;
33     } /* end while */
34
35     while (!kbhit ());
36     return 0;
37 }
```

Výpis 42.3: ASCII.c Generuje ASCII tabulku na terminálu.

Obsah

43.1 Základy práce s pointery	406
-------------------------------	-----

Pointery (též ukazatele nebo směrníky) jsou „*srdce a duše jazyka C*“. Pointer je proměnná, jako každá jiná, pouze hodnota uložená v této proměnné má jiný význam. Pointer představuje *adresu paměti* a na této adrese se teprve ukrývá příslušná hodnota. Pointer je tedy proměnná uchovávající paměťovou adresu.[\[Herout \]](#)

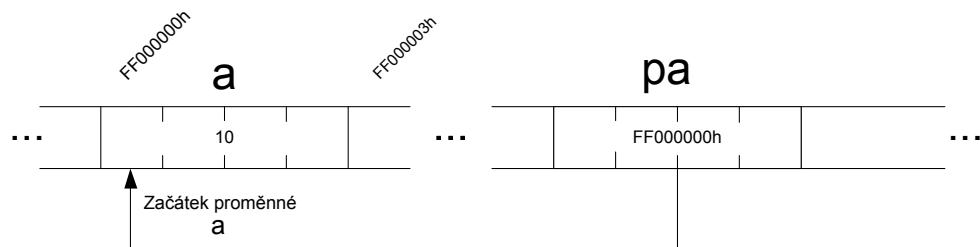
43.1 Základy práce s pointery

Příklad 43.1.1. Vytvořte funkce kopírující prvky jednoho pole do druhého pomocí indexu i ukazatele.

```

1  /*************************************************************************/
2  /* soubor CPYARRY.C                                                 */
3  /* na funkcích kopirujicich prvky jednoho pole do druheho      */
4  /* ukazuje pristup k prvkum pole pomoci indexu i pomocni           */
5  /* ukazatele, tedy pointerovou aritmetiku                         */
6  /*************************************************************************/
7  #include <stdio.h>
8
9 #define N      6
10
11 void copy_array1(int *a, int *b, int n)
12 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku
13 {
14     register int i = 0;
15     for (; i < n; i++)
16         b[i] = a[i];
17 }
18
19 void copy_array2(int *a, int *b, int n)
20 // a - vstupni pole, b - vystupni pole, n - pocet prvku

```



Obrázek 43.1.1: Princip ukazatele v paměti

```
21  {
22      while (n-- > 0)
23          *b++ = *a++;
24  }
25
26  void print_array(int *p, int n)
27  // vytiskne celociselné pole o n prvcích
28  // zacne a skonci na novem radku
29  {
30      puts("");
31      while (n-- > 0)
32          printf("\t%d", *p++);
33      puts("");
34  }
35
36  int main()
37  {
38      int pole1[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
39      pole2[N], dim1;
40      dim1 = sizeof(pole1) / sizeof(int);
41
42      print_array(pole1, dim1);
43      copy_array1(pole1, pole2, N);
44      print_array(pole2, N);
45      copy_array2(pole1 + 3, pole2, N);
46      print_array(pole2, N);
47      return 0;
48 }
```

Výpis 43.1: CPYARRY.C Kopíruje prvky jednoho pole do druhého.

Výstup programu:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6
4 5 6 7 8 9
```


Obsah

44.1	Připojení externích souborů	410
44.2	Definice maker	410
44.2.1	Symbolické konstanty	410
44.2.2	Makra	410
44.3	Podmíněný překlad	410

Preprocesor interpretuje jednoduché direktivy pro vložení zdrojového kódu z jiného souboru (**#include**), definice maker (**#define**) a podmíněné vložení kódu (**#if**). C preprocesor přijímá tyto direktivy:

#define	#elif	#else	#endif
#error	#if	#ifdef	#ifndef
#include	#line	#pragma	#undef

Tabulka 44.0.1: Seznam platných direktiv jazyka C

44.1 Připojení externích souborů

44.2 Definice maker

Definice maker ve významu rozsahu polí je typickým příkladem použití preprocesoru. Ve zdrojovém textu se neodvoláváme na magická čísla, ale na vhodně symbolicky pojmenovaná makra, která zvýší čitelnost programu.

Pro větší přehlednost rozdělme makra na

- symbolické konstanty,
- makra

Klíčem nechť je skutečnost, že makro na rozdíl od symbolické konstanty má argumenty.

44.2.1 Symbolické konstanty

44.2.2 Makra

44.3 Podmíněný překlad

Preprocesor může během své činnosti vyhodnocovat, je-li nějaké makro definováno, či nikoliv. Při použití klíčového slova preprocesoru **defined** pak může spojovat taková vyhodnocení do rozsáhlejších logických výrazů. Argument **defined** nemusí být uzavřen do závorek. Může se však vyskytnout jen za **#if** nebo **#elif**. Například si ukažme složitější podmínu:

Část XIX

ANSI/C++

Obsah

45.1 Objektově orientované programování	414
45.1.1 Třídy: první nahlédnutí	415
45.1.2 Některé rozdíly mezi C a C++	421
45.1.3 Úvod do přetěžování funkcí	423
45.1.4 Práce s ukazateli	425

C++ je rozšířená verze jazyka C. C++ zahrnuje vše, co je součástí jazyka C, a přidává podporu objektově orientovaného programování (zkráceně OOP). C++ navíc obsahuje mnohá vylepšení, a prvky, které z něj jednoduše dělají "lepší C", nezávisle na objektově orientovaném programování. Kromě několika málo zanedbatelných výjimek platí, že C je podmnožinou jazyka C++.

Poněvadž byl C++ vytvořen pro podporu OOP, začne následující podkapitola popisem OOP. Je důležité si uvědomit, že jazyka C++ může být použito i pro psaní programů, které nejsou objektově orientovány. Tato kapitola, kromě představení nejdůležitějších vlastností jazyka C++, diskutuje především o rozdílech mezi způsoby programování v C a v C++ [Schildt].

45.1 Objektově orientované programování

Objektově orientované programování je výkonný způsob jak přistupovat k úloze programování. Již od raných začátků bylo programování spojováno s rozličnými metodologiemi. V každém kritickém momentě během vývoje programování byly vytvářeny nové přístupy, které pomohly programátorům zvládat stále složitější programy. První programy byly vytvářeny pouhým nastavením přepínačů na panelu počítače. Tento postup byl vhodný pouze pro velmi malé programy. Později vytvořený jazyk symbolických instrukcí již umožňoval psaní delších programů. K dalšímu vývoji došlo v roce 1955, kdy byl vytvořen první programovací jazyk vysoké úrovně - FORTRAN.

S využitím programovacího jazyka vysoké úrovně byl programátor schopen psát programy o délce několika tisících řádků. Nejstarší metodou použitou pro programování byl *ad hoc* přístup "všechno jde". Jestliže to bylo přípustné pro relativně krátké programy, pak u rozsáhlých programů to vedlo k vytváření nečitelných a nezvládnutelných "špagety kódů"

Eliminaci "špagety kódů" umožnil až vznik *strukturovaných programovacích jazyků* v šedesátých letech. Byly to jazyky Algol a Pascal. Volně lze interpretovat, že je-li jazyk C strukturovaný, pak typ programování, které v něm provádíme, by se mohl označit jako strukturované programování. Strukturované programování se opírá o dobře definované řídící struktury, bloky kódů, vyloučení příkazů GOTO, lokální (stand-alone) podprogramy, které podporují rekurzi, a lokální proměnné.

Přestože strukturované programování přinášelo výborné výsledky, když bylo použito pro středně složité programy, v mnoha bodech zklamalo, když program přesáhl určitou velikost. K tomuto účelu bylo vytvořeno objektově orientované

programování. OOP vzalo nejlepší myšlenky včleněné do strukturovaného programování a zkombinovalo je s výkonnými novými koncepty, které dovolují organizovat programy mnohem efektivněji.

Obecně všechny OOP jazyky sdílejí tři definované vlastnosti:

- zapouzdření (encapsulation),
- polymorfismus (polymorphism),
- dědičnost (inheritance).

45.1.1 Třídy: první nahlédnutí

Snad nejdůležitějším samostatným prvkem jazyka C++ je **třída**. Je to mechanismus používaný pro vytváření objektů. Jako taková, je třída srdcem mnoha prvků jazyka C++. Třídy jsou pro programování v C++ tak významné, že je vhodné předložit na tomto místě jejich stručný přehled.

Definice 45.1.1 (Třída). Třída je základním obecným pojmem *klasifikace*, jak při návrhu uspořádávat informace do smysluplné entity. Základním pojmem je objekt, *instance třídy*, jako konkrétní případ realizace předpisu. Objekt si „pamatuje“ svůj stav (v podobě *dat* čili *atributů*) a zveřejněním některých svých operací (nazývaných *metody*) poskytuje rozhraní, jak s ním pracovat. Při používání objektu nás zajímá, jaké operace (služby) poskytuje, ale ne, jakým způsobem to provádí - to je princip zapouzdření. Jestli to provádí sám nebo využije služeb jiných objektů, je celkem jedno. Vlastní implementaci pak můžeme změnit (např. zefektivnit), aniž by se to dotklo všech, kteří objekt používají.

Abstrakce objektu, která v architektuře programu podchycuje na obecné úrovni podstatu všech objektů podobného typu, se nazývá třída. Třída je předpis, jak vyrobit objekt daného typu.

Příklad 45.1.1. Nechť má sousedka (chápejme ji jako objekt) má nějaké jméno, je nějak vysoká, umí chodit a umí mluvit. Totéž platí i pro mne. Mohu tedy při modelování těchto dvou objektů, sousedky a mě, abstrahovat od nepodstatných dílčích odlišností a díky této abstrakci vytvořit obecnou třídu Člověk, která bude mít atributy jméno a příjmení (obojí je nějaký řetězec znaků) a metody chodit a mluvit.

Třída je deklarována klíčovým slovem **class**. Syntaxe deklarace **class** je podobná její struktuře. V obecné formě vypadá takto

```
class jméno-řídy {
    // privátní-funkce a členy
public:
    // veřejné funkce a členy
} seznam-ůobjekt
```

Seznam objektů je v deklaraci třídy nepovinný. Stejně jako struktura, se mohou objekty třídy deklarovat později. Zatímco jméno třídy je také nepovinné, z praktického hlediska je vlastně vždy potřeba. Je to proto, že se jméno třídy stává novým typem jména použitého k deklaraci objektů třídy.

Funkce a proměnné deklarované uvnitř třídy jsou označeny jako *členy této třídy*. Znamená to, že jsou přístupné pouze pro ostatní členy třídy. Pro deklaraci členů veřejné třídy se použije klíčové slovo **public** s dvojtečkou. Všechny funkce a proměnné deklarované za tímto specifikátorem jsou přístupné jak pro členy třídy, tak i pro další části programu, které obsahují třídu.

Toto je jednoduchá deklarace třídy:

```
class myclass{
    // privátní vzhledem k myclass
    int a;
public:
    void set_a(int num);
    int get_a();
};
```

Tato třída má pouze jednu privátní proměnnou nazvanou *a* a dvě veřejné funkce *set_a()* a *get_a()*. Tyto funkce jsou deklarovány uvnitř třídy pomocí jejich **prototypů**. Funkce, které jsou deklarovány jako součásti třídy se nazývají *členské funkce*.

Jelikož je *a* privátní, není dostupné pro žádný kód vně *myclass*. Ovšem funkce *set_a()* a *get_a()* jsou členy *myclass*, takže mají k *a* přístup. *set_a()* a *get_a()* jsou deklarovány jako veřejné členy *myclass* a mohou být volány každou částí programu, která *myclass* obsahuje.

Ačkoliv jsou funkce *set_a()* a *get_a()* deklarovány v *myclass*, nejsou ještě definovány. Aby jsem definoval členskou funkci, musím spojit typové jméno třídy se jménem funkce. To se udělá uvozením jména funkce jménem třídy se dvojicí dvojteček. Dvojice dvojteček se nazývá *operátor rozlišení oblasti* (scope resolution operator). Následující příklad ukazuje, jak jsou členské funkce *set_a()* a *get_a()* definovány:

```
void myclass :: set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass :: get_a()
{
    return a;
}
```

Jak `get_a()`, tak i `set_a()` mají přístup k `a`, které je privátní v `myclass`. Poněvadž `get_a()` i `set_a()` jsou členy `myclass`, mohou přímo přistupovat k jejím soukromým datům.

Obecně se pro definici členské funkce musí použít následující tvar:

```
re-type jméno-třídy :: jmého-funkce (seznam-úparametr)
{
    // článek funkce
}
```

Deklarace `myclass` nedefinuje žádný objekt typu `myclass`. Definuje pouze typ objektu, který bude vytvořen, když bude deklarován. Pro vytvoření objektu se použije jako specifikátor jméno třídy. Například tento řádek deklaruje dva objekty typu `myclass`:

```
myclass ob1, ob2; //toto jsou objekty typu myclass
```

Jakmile je vytvořen objekt třídy, může se program odkazovat na jeho veřejné členy pomocí tečkových operátorů bezmála takovým způsobem, jímž jsou prvky struktury zpřístupněny. Dle předcházející deklarace objektů volají následující příkazy `set_a()` pro objekty `ob1` a `ob2`:

```
ob1.set_a(10); // nastaví verzi ob1 na 10
ob2.set_a(99); // nastaví verzi ob2 na 99
```

Každý objekt obsahuje vlastní kopii všech dat deklarovaných uvnitř třídy. Znamená to, že a náležející `ob1` je odlišné a různé od a navázaného na `ob2`.

Příklad 45.1.2. Tento program předvádí `myClass`, popsanou výše v textu. Nastavuje hodnoty a pro `ob1` a `ob2`, a pak zobrazuje hodnotu a pro každý objekt.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass {
    // privatni vzhledem k myclass
    int a;
```



```

public :
    void set_a(int num);
    int get_a();
};

void myclass :: set_a(int num)
{
    a = num;
}

int myclass :: get_a()
{
    return a;
}

int main()
{
    myclass ob1, ob2;

    ob1.set_a(10);
    ob2.set_a(99);

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";

    return 0;
}

```

Program by měl na obrazovce zobrazit hodnoty 10 a 99.

Příklad 45.1.3. V *myClass* z předchozího příkladu je *a* privátní. Znamená to, že k ní mohou přímo přistupovat pouze členské funkce z *myClass*. (To je důvodem, proč je vyžadována veřejná funkce *get_a()*). Tedy při pokusu o přístup k privátnímu členu třídy z některé části programu, která není členem třídy, objeví se při překladu chyba. Pokud je *myClass* definována tak, jak bylo předvedeno v předešlém příkladě, pak následující volání funkce *main()* zapříčiní chybu:

```

// Toto je fragment obsahující chybu.
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    myclass ob1, ob2;
    ob1.a = 10; // ERROR! ůžneme řpistupovat
                 // k privátnímu členu
    ob2.a = 99; // dle čnelenských funkcí.

    cout << ob1.get_a() << "\n";
    cout << ob2.get_a() << "\n";
}

```

```
    return o;
}
```

Příklad 45.1.4. Stejně jako mohou existovat funkce veřejného členu, mohou existovat i proměnné veřejného členu. Jestliže například *a* bylo deklarováno ve veřejné části *myClass*, lze se na ně odkazovat z kterékoliv části programu, jak je předvedeno dále:



```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass {
public:
// nyní je a řveejně
int a;
// a nyní není řpoteba set_a() a get_a()
};

int main ()
{
myclass ob1, ob2;

ob1.a = 10;
ob2.a = 99;

cout << ob1.a << "\n";
cout << ob2.a << "\n";

return 0;
}
```

Protože je v tomto příkladě *a* deklarováno jako veřejný člen *myClass*, je přímo přístupné z *main()*. Pro přístup k *a* je použit tečkový operátor. Obvykle, když se volá členská funkce nebo se přistupuje k členské proměnné z vnějšího prostředí mimo třídu, je nutná plná specifikace daná jménem objektu i s tečkovým operátorem následovaným jménem člena, aby bylo jasné, na kterého člena objektu se odkazuje.

Příklad 45.1.5. Aby byla ukázána síla objektů, následující program vytváří třídu pojmenovanou *stack*, která implementuje zásobník použitelný například pro uchování znaků:

```
#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklaruje třídu stack pro znaky
class stack {
```

```
char stck[SIZE];      // uklada zasobnik
int tos;              // index vrcholu zasobniku
public:
void init();          // inicializace stack
void push(char ch);   // vlozeni znaku do stack
char pop();           // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::init()
{
    tos = 0;
}

// Vsunuti znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}

int main()
{
    stack s1, s2; // vytvoreni dvou zasobniku
    int i;

    // inicializace zasobniku
    s1.init();
    s2.init();

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push(a);
    s2.push(x);
    s1.push(b);
```

```

s2.push(y);
s1.push(c);
s2.push(z);

// vyjmout znaku ze zásobníku
for(i=0; i<3; i++)
    cout << "Pop s1: " << s1.pop() << "\n";
for(i=0; i<3; i++)
    cout << "Pop s2: " << s2.pop() << "\n";

return 0;
} \end{lstlisting}

```

Program zobrazí následující výstupy:

```

Pop s1: c
Pop s1: b
Pop s1: a
Pop s2: z
Pop s2: y
Pop s2: x

```

Podívej se na program ještě jednou. Třída `stack` obsahuje dvě privátní proměnné: `stck` a `tos`. Pole `stck` uchovává znaky umístěné v zásobníku a `tos` obsahuje index horní úrovně zásobníku. Veřejné funkce zásobníku jsou `init()`, `push()` a `pop()` a slouží k inicializaci zásobníku, vkládání hodnoty a k vyjmutí hodnoty. Uvnitř `main()` jsou vytvořeny dva zásobníky `s1` a `s2` a do každého z nich jsou vloženy tři znaky. Je důležité uvědomit si, že každý zásobníkový objekt je oddělený od druhého. To znamená, že znaky vložené do `s1` nemohou žádným způsobem ovlivnit znaky vložené do `s2`. Každý objekt obsahuje vlastní kopii `stck` a `tos`. To je základní princip pro pochopení objektů. Ačkoliv všechny objekty třídy sdílejí své členské funkce, každý objekt vytváří a udržuje svá vlastní data.

45.1.2 Některé rozdíly mezi C a C++

Ačkoliv je jazyk C++ rozšířenou množinou jazyka C, existují mezi nimi drobné rozdíly a bylo by dobré se s nimi na začátku seznámit. Především, když v C nemá funkce žádné parametry, její prototyp má v seznamu parametrů funkce slovo **void**. Například když v "céčku" funkce nazvaná `f1()` nemá parametry (a vrací **char**), pak její prototyp bude vypadat následovně:

```
char f1( void );
```

Přestože v C++ zůstává void stále jako volitelný, bude se prototyp pro f1() psát běžně takto:

```
char f1();
```

C++ se odlišuje od C tím, že je v něm specifikován prázdný seznam parametrů. Kdyby se předchozí prototyp objevil v programu C, pak se to bude chápát, že o parametrech nebylo řečeno nic. V C++ to znamená, že funkce nemá parametry. Proto tedy v předchozím příkladě nebyl využit k deklaraci prázdného seznamu explicitně parametr void. (Použití parametru void k deklaraci prázdného seznamu parametrů není zakázáno; je to pouze nadbytečné. Jelikož většina programů C++ usiluje o téměř posvátném zanícení o výkonnost, neuvidíš téměř nikdy, že by bylo void tímto způsobem použito.) Zapamatuj si, že v C++ jsou následující dvě deklarace zcela rovnocenné:

```
char f1();  
char f1( void );
```

Další drobná diference mezi C a C++ spočívá v tom, že v programech C++ musí mít všechny funkce prototypy. Zapamatuj si, že v C jsou prototypy doporučeny, ale technicky jsou nepovinné. V C++ jsou však vyžadovány. Jak je patrno z příkladu v předchozí části, prototyp členské funkce obsažený v třídě slouží rovněž jako její obecný prototyp a žádný další samostatný prototyp již není požadován. Třetím rozdílem mezi C a C++ je, když je funkce deklarována aby vracela hodnotu, musí hodnotu opravdu vracet. Jestliže má totiž funkce jiný návratový typ než void, musí pak každý příkaz return uvnitř funkce obsahovat hodnotu. V C není vyžadováno, aby vracely hodnotu funkce, které nejsou void. Jestliže hodnota neexistuje, "vrací se" jakási nahodilá hodnota.

Jestliže v C nespecifikujete explicitně návratový typ funkce, předpokládá se návratový typ integer. V C++ bylo toto pravidlo potlačeno, a proto musíš explicitně deklarovat všechny návratové typy funkcí. Další rozdíl mezi C a C++ je, že v programech C budeš muset brát ohled na to, kde mohou být lokální proměnné deklarovány. V C mohou být lokální proměnné deklarovány pouze na začátku bloku před všemi "výkonnými" příkazy. V C++ mohou být lokální proměnné deklarovány kdekoli. Výhodou tohoto přístupu je, že lokální proměnné mohou být deklarovány ta, kde budou poprvé použity, což může napomoci v prevenci před nechtěnými vedlejšími účinky.

Konečně také v C++ definuje datový typ **bool** pro uložení hodnot Boolean (popř. pravda/nepravda). C++ rovněž definuje klíčová slova **true** a **false**, která jsou jedinými hodnotami, které může hodnota typu Boolean nabývat. V C++ je výstupní hodnotou relačních a logických operátorů hodnota typu **bool** a všechny podmíněné příkazy musí

hodnotu `bool` vyhodnocovat. V C je hodnota `true` nenulová a hodnota `false` odpovídá nule. Tak je to i v C++, poněvadž při použití v booleánských výrazech je každá nenulová hodnota automaticky převedena na `true` a každá nulová hodnota je převedena na `false`. Funguje to i opačným směrem. Když je booleánská hodnota použita ve výrazech `integer`, pak se `true` převádí na 1 a `false` na 0. Přidání `bool` umožňuje důkladnější ověřování typů a poskytuje způsob, jak navzájem rozlišovat Boolean a `integer`. Využívání je samozřejmě nepovinné, ale `bool` je nejpohodlnější.

45.1.3 Úvod do přetěžování funkcí

Po třídách je snad nejdůležitější a vše postupující vlastností C++ přetěžování funkcí. Přetěžování funkcí nejen poskytuje mechanismus jímž C++ poskytuje jeden typ polymorfismu, ale také utváří základ, na němž může být programovací prostředí dynamicky rozšiřováno. Kvůli důležitosti přetěžování je v následujících odstavcích předložen stručný úvod.¹

V C++ mohou dvě nebo více funkcí sdílet stejné jméno, pokud se liší typy jejich argumentů nebo jejich počet anebo se liší obojí.

Je velmi snadné přetížit funkci: jednoduše deklaruješ a definuješ všechny požadované verze. Správnou verzi překladač automaticky vybere dle počtu nebo typu argumentů použitých při volání funkce.

Příklad 45.1.6. Následující program definuje tři funkce pro výpočet absolutní hodnoty nazvané `abs()` - pro každý typ dat jednu.

```
#include <iostream>
using namespace std;

// Přetizení abs() třemi způsoby
int abs(int n);
long abs (long n);
double abs (double n);

int main()
{
    cout << "Absolute value of -10" << abs(-10) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10L" << abs(-10L) << "\n";
    cout << "Absolute value of -10.01" << abs(-10.01) << "\n";

    return 0;
}
```

¹V C++ lze přetěžovat i operátory.

```
// abs() pro hodnoty int
int abs(int n)
{
    cout << "In\_integer\_abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty long
long abs (long n)
{
    cout << "In\_Long\_abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}

// abs() pro hodnoty double
double abs (double n)
{
    cout << "In\_double\_abs()\n";
    return n<0 ? -n : n;
}
```

Překladač automaticky volá správně jednu ze tří verzí `abs()` dle typu dat, která jsou uvedena v argumentu. Program vytvoří následující výstup:

In integer abs() Absolute value of -10: 10

In long abs() Absolute value of -10L: 10

In double abs() Absolute value of -10.01: 10.01

Uvedený příklad je velmi jednoduchý, nicméně ukazuje význam přetěžování funkcí. Jelikož lze jediné jméno použít k popisu obecné třídy činností, je umělá složitost, která vyplývá z použití tří mírně odlišných jmen - v tomto případě `abs()`, `labs()` a `fabs()` - ~~pravidlo eliminc~~.

Příklad 45.1.7:

```
#include <iostream>
using namespace std;

void date(char *date) // datum jako retezec
void date(int month, int day, int year) // datum jako cisla

int main()
{
    date("11/22/2010");
    date(11, 22, 2010 );
}
```

```
// Datum jako retezec.  
void date(char *date)  
{  
    cout << "Date:_" << date << "\n";  
}  
  
// Datum jako integer  
void date(int month, int day, int year)  
{  
    cout << "Date:_" << month << "/";  
    cout << day << "/" << year << "\n";  
}
```

Příklad 45.1.7 ilustruje jak může přetížení funkce zajistit mnohem přirozenější přístup k funkci. Protože je poměrně běžné, že je datum reprezentováno buď řetězcem, nebo třemi celočíselnými hodnotami obsahující den, měsíc a rok, záleží jen na uživateli, aby vybral tu nejpohodlnější formu, dle dané situace

45.1.4 Práce s ukazateli

Příklad 45.1.8. Práce s ukazateli:

Výstup programu:

```
num is 123
The address of num is 0x28ff44
*p_num is 123
p_num is 0x28ff44
```

Příklad 45.1.9. Napište funkci *swap* která prohodí hodnoty dvou proměnných typu *int*. Výsledek funkce *swap* vytiskněte na výstupu terminálu.

```
// Program that includes a function that swaps
// any two integers passed to it
#include <iostream>
using namespace std;
void swap(int &num1, int &num2);
int main()
{
    int i=10, j=20;
    cout << "\n\nBefore swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    swap(i, j);
    cout << "\n\nAfter swap, i is " << i << " and j is " << j <<
        "\n\n";
    return 0;
}

void swap(int &num1, int &num2)
{
    int temp;           // Variable that holds
                       // in-between swapped value.
    temp = num1;        // The calling function's variables
    num1 = num2;        // (and not copies of them) are
    num2 = temp;        // changed in this function.
    return;
}
```

Výstup programu:

Before swap, i is 10 and j is 20

After swap, i is 20 and j is 10

Příklad 45.1.10. Následující příklad ukazuje použití **ukazatele na funkci**. Program se nejprve zeptá, zda se má provádět sčítání nebo násobení. Podle této odpovědi vloží do proměnné *operation* ukazatel na funkci *add* nebo na funkci *multiply*. Dále zadáme dvě čísla, která se použijí jako parametry vybrané funkce.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int add(int a, int b)
{
    return a+b;
}
int multiply(int a, int b)
{
    return a*b;
}
int main()
{
    int (*operation) (int , int );
    int x, y, sel;
    cout << "We will add(1) or multiply(2)?";
    do {
        cin >> sel;
    } while (sel != 1 && sel != 2);
    if (sel == 1) operation = add;
    if (sel == 2) operation = multiply;
    cout << "Enter two integers: ";
    cin >> x >> y;
    cout << "Result is " << operation(x, y) << endl;
    return 0;
}
```


Obsah

46.1 Funkce konstruktor a destruktur	430
--	-----

46.1 Funkce konstruktor a destruktur

Je zcela běžné, že některé části programu vyžadují inicializaci. Potřeba inicializace je mnohem častější, když se pracuje s objekty. K ošetření této situace poskytuje C++ funkci konstruktor, která může být vložena do deklarace třídy. Všechny inicializace, které je nutno na objektu provést, může automaticky vykonat konstruktor. Konstruktor má stejné jméno jako třída, jejíž je součástí a nemá návratový typ (není to ani povoleno). Následující příklad ukazuje krátkou třídu, jež obsahuje konstruktor.

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass(); // konstruktor
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

V tomto jednoduchém příkladě je hodnota `a` inicializována konstruktorem `myclass()`. Konstruktor je volán při vytváření objektu `ob`. Objekt je vytvářen tehdy, když se provádí jeho deklarační příkaz. V C++ je deklarační příkaz proměnné vlastně

"příkazem činnosti". Když se programuje v C, lze deklarační příkazy považovat za zavádění proměnných. Ovšem v C++, poněvadž objekt může mít konstruktor, bude ve skutečnosti příkaz pro deklaraci proměnné vyvolávat celou řadu činností.

Pro globální objekty je konstruktor objektu volán jen jednou, když se program začíná poprvé spouštět. Pro lokální objekty je konstruktor volán pokaždé, když je prováděn deklarační příkaz. Doplňkem konstruktoru je destruktur. Tato funkce volána, když je objekt rušen. Když se pracuje s objekty, je běžné, že se musí provést v souvislosti s rušením objektu určité akce (např. uvolnění zabrané paměti). Následující třída již destruktur obsahuje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

class myclass{
    int a;
public:
    myclass();      // konstruktor
    ~myclass();     // destruktur
    void show();
};

myclass::myclass()
{
    cout << "In constructor\n";
    a = 10;
}

myclass::~myclass()
{
    cout << "Destructing....\n"
}

void myclass::show()
{
    cout << a;
}

int main()
{
    myclass ob;

    ob.show();

    return 0;
}
```

Destrukter třídy je volán, když je objekt rušen. Lokální objekty jsou rušeny, když odcházejí mimo oblast. Globální objekty jsou rušeny, když program končí.

Není možné získat adresu konstruktoru nebo destruktorku.

Příklad 46.1.1. Třída *stack* vytvořená v příkladu 45.1.5 vyžadovala inicializační funkci k nastavení proměnné pro *index* zásobníku. To je přesně ten druh operací, pro něž byl konstruktor navržen. Zde je vylepšení verze třídy *stack*, která používá konstruktor pro automatickou inicializaci zásobníkového objektu po jeho vytvoření:

```
#include <iostream>
using namespace std;

#define SIZE 10

// Deklarace tridy znakového objektu
class stack{
    char stck[SIZE];      // uklada zasobnik
    int tos;                // index vrcholu zasobniku
public:
    stack();                // konstruktor
    void push(char ch); // vlozeni znaku do stack
    char pop();           // vyjmuti znaku ze stack
};

// inicializace stack
void stack::stack()
{
    cout << "Constructing a stack\n";
    tos = 0;
}

// Vlozeni znaku.
void stack::push(char ch)
{
    if(tos == SIZE) {
        cout << "Stack is full";
        return;
    }

    stck[tos] = ch
    tos++;
}

// Vyjmuti znaku.
char stack::pop()
{
    if(tos == 0){
        cout << "Stack is empty";
    }
    tos--;
    return stck[tos];
}
```

```

int main()
{
    // vytvori dva zasobniky, ktere se
    // automaticky inicializuj
    stack s1, s2;
    int i;

    // vlozeni znaku do zasobniku
    s1.push(a);
    s2.push(x);
    s1.push(b);
    s2.push(y);
    s1.push(c);
    s2.push(z);

    //vyjmuti znaku ze zasobniku
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop_s1:" << s1.pop() << "\n";
    for(i=0; i<3; i++)
        cout << "Pop_s2:" << s2.pop() << "\n";

    return 0;
}

```

Je Vidět, že úloha inicializace je konstruktorem provedena automaticky lépe, než pomocí samostatné funkce, která by musela být explicitně volána programem. Když je inicializace provedena automaticky při vytváření objektu, eliminuje to možnost, že by kvůli výskytu chyby inicializace neproběhla. Je to další cesta, jak omezit složitost programu.

Příklad 46.1.2. Tento příklad předvádí nutnost existence nejen konstruktoru, ale i destruktoru. Vytváří se zde jednoduchá řetězcová třída, nazvaná *strtype*, která obsahuje řetězec a jeho délku. Když je objekt *strtype* vytvořen, je mu přidělena paměť pro uložení řetězce a jeho počáteční hodnota je nastavena na 0. Když je objekt *strtype* zrušen, je paměť uvolněna.

```

#include <iostream>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
using namespace std;

#define SIZE 255

class strtype {
    char *p;
    int len;
public:
    strtype(); // konstruktor
    ~strtype(); // destruktur

```

```
void set(char *ptr);
void show();
};

// inicializace retezcoveho objektu
strtype::strtype()
{
    p = (char *) malloc(SIZE);
    if (!p) {
        cout << "Allocation_error\n";
        exit(1);
    }
    *p = '\0';
    len = 0;
}

strtype::~strtype()
{
    cout << "Freeing_p\n";
    free(p);
}

void strtype::set(char *ptr)
{
    if (strlen(p) >= SIZE) {
        cout << "String_too_big\n";
        return;
    }
    strcpy(p, ptr);
    len = strlen(p);
}

void strtype::show()
{
    cout << p << "-_Length:_" << len;
    cout << "\n";
}

int main()
{
    strtype s1, s2;

    s1.set("This_is_a_test.");
    s2.set("I_Like_C++.");

    s1.show();
    s2.show();

    return 0;
}
```

}

Tento program používá pro přidělení a uvolnění paměti funkce `malloc` a `free`.
Přestože to funguje perfektně, dále je ukázáno, že v C++ se používá jiný způsob pro
dynamickou správu paměti.

Část XX

Výkonová elektronika

Obsah

47.1 Takt a komutace	440
-----------------------------	------------

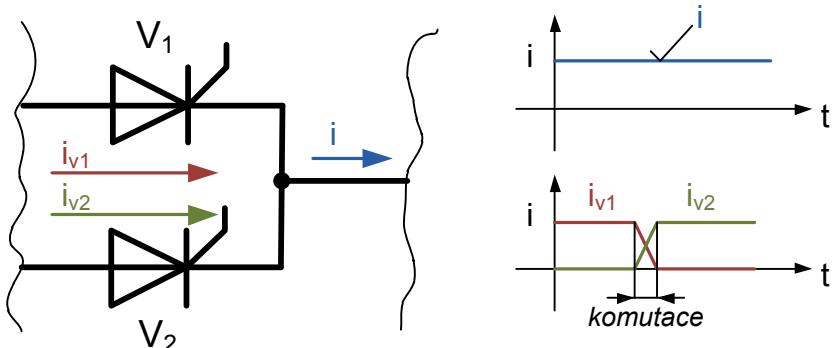
47.1 Takt a komutace

Spínáním hlavních polovodičových součástek v *hlavním obvodu* měniče nebo spínače je realizována žádaná funkce, tj. přeměna parametrů elektrické energie, u měničů, a spínání u spínačů. *Vedlejší obvod*, včetně vedlejších polovodičových součástek, zajišťuje činnost hlavního obvodu (např. vypínání hlavních tyristorů). Každá část hlavního obvodu mezi dvěma uzly je *hlavní větev*. Každá část vedlejšího obvodu mezi dvěma uzly je *vedlejší větev*.

Takt je časový interval mezi dvěma po sobě následujícími změnami vodivosti větví měniče či spínače. Označujeme jej značkami sepnutých součástek. Tak např. takt V1, V2 je časový interval, ve kterém jsou sepnuty součástky V1, V2.

Komutace větví měniče (spínače) je elektromagnetický děj v obvodu měniče (spínače) charakterizovaný přechodem proudu z jedné větve měniče (spínače) na druhou aniž by byl přerušen proud odtékající z (nebo přitékající do) uzlu obou větví. Termín komutace měniče (spínače) nelze zaměňovat s termínem komutace polovodičové součástky. Ke komutaci běžné dochází po sepnutí polovodičové součástky jedné z komutujících větví, *Sepnutí a nárůst proudu v této větvi, pokles proudu a nakonec vypnutí polovodičové součástky ve druhé větvi, umožňuje komutační napětí působící na obě větve*.

- **Vnější komutace** (dříve označována jako přirozená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným vně měniče. Užšími termíny síťová komutace nebo zátěžová komutace je blíže určován původ komutačního napětí.
- **Vlastní komutace** (dříve označována jako nucená komutace) se vyznačuje zdrojem komutačního napětí umístěným ve vlastním obvodu měniče.
- **Přímá komutace** probíhá v jednom komutačním taktu (obr. 47.1.1), přímo z jedné hlavní větve na druhou. Přímou komutaci je možno označit též jako jednostupňovou.



Obrázek 47.1.1: Komutace.

Obsah

48.1 MOSFET tranzistory	442
48.1.1 Odhad ztrátového výkonu tranzistoru	442

48.1 MOSFET tranzistory

48.1.1 Odhad ztrátového výkonu tranzistoru

Odhad ztrátového výkonu bude proveden pro potřeby výběru optimálního MOSFET tranzistoru pro danou výkonovou aplikaci

48.1.1.1 Typy ztrát v MOSFET struktuře a antiparalelní diodě

Celkové ztrát ve spínacím režimu lze rozdělit do tří složek:

- **Vodivostní ztráty** (Conduction losses)
- **Spínací ztráty** (Switching losses)
- **Blokovací ztráty** (Blocking "leakage" losses)

$$P_{TOTAL} = P_C + P_{SW} + P_B \doteq P_C + P_{SW} \quad (48.1.1)$$

Obsah

49.1	Úvod	444
49.2	Výkonové tranzistory MOS	445
49.2.1	Princip funkce tranzistoru MOS	445
49.2.2	Struktury tranzistorů MOS	445
49.2.3	Statické parametry	445
49.2.4	Výkonový tranzistor ve spínacím režimu	445
49.3	Tranzistory IGBT	445
49.3.1	Statické parametry	445
49.3.2	Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT	445
49.4	Metody řízení spínacího procesu	445
49.4.1	Vliv velikosti hradlového odporu	445
49.4.2	Aktivní řízení spínání (Active gate control)	445
49.5	Způsoby detekce nadproudů	447
49.5.1	Uvažované typy zkratových obvodů ve věti výkonového měniče s indukční zátěží	449
49.5.2	Monitorování velikosti kolektorového napětí	450
49.5.3	Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping	450

49.1 Úvod

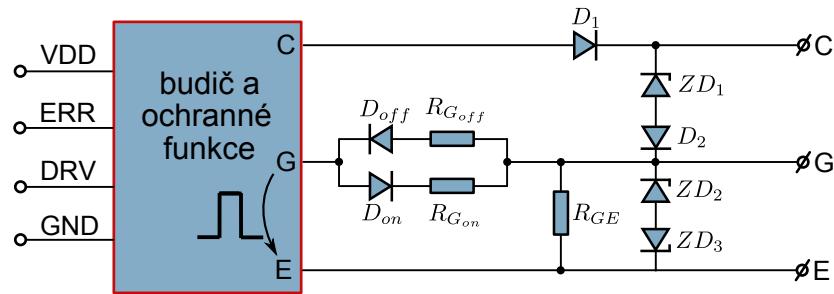
V obecném smyslu se pojmem budič výkonové součástky rozumí určité rozhraní mezi řídící jednotkou a výkonovou součástkou. Základní funkcí je přizpůsobit logické řídící signály způsobu ovládání hradla výkonové součástky. S rostoucím instalovaným výkonem a spínací frekvencí výkonového elektronického systému jsou na budiče kladený vyšší nároky. Častým požadavkem je spínání výkonové součástky na plovoucím potenciálu vůči řídícímu signálu. Z toho vyplývá nutnost galvanického oddělení řídících signálů na rozhraní mezi řídícími a výkonovými obvody elektronického systému. Ve většině aplikací jsou také na galvanické oddělení kladený ještě bezpečnostní požadavky. Můžeme se proto setkat s budiči, které mají řídící signály galvanicky odděleny, ačkoliv výkonový spínač pracuje na stejném potenciálu jako řídící elektronika, nebo například s budiči s dvojitou izolací.

Při spínání často dochází k potenciálovým skokům mezi hradlem a řídící elektronikou, což klade mimořádné požadavky na kvalitu galvanického oddělení a odolnost proti rušení vlivem du/dt . Budič tudíž vyžaduje vlastní, rovněž galvanicky oddělený napájecí zdroj, který je jednoznačně řešen vždy impulsním transformátorem. Velmi důležitou součástí budiče jsou rychlé elektronické ochrany, jejich úkolem je zajistit "nezničitelnost" výkonového spínače. Informaci o nestandardním stavu kterékoliv ochrany je nutno hlásit zpět do řídícího systému.

V následující kapitole se budeme věnovat konstrukci a návrhu budičů pro výkonové spínače typu IGBT pro trakční aplikace. Při provozu nejen trakčních měničů, se během spínacího procesu IGBT prvku generují vysoké strmosti kolektorového napětí a proudu, které vytváří rušení (EMI) a přepěťové špičky při vypínání. Jelikož budič představuje elektronický obvod, pracující ve velmi těsné blízkosti výkonového spínače, existuje vždy elektromagnetická vazba, přes kterou se šíří rušení a je tedy nezbytné zkoumat jeho odolnost. Zpomalení spínacího procesu sice omezuje generované strmosti, ale vede ke zvyšování ztrát. Dosažení optimálního kompromisu mezi úrovní rušení a výkonovou ztrátou vede na konstrukci komplexních budičů, které spínací proces výkonové součástky kontrolují ve všech jeho fázích.

49.2 Výkonové tranzistory MOS**49.2.1 Princip funkce tranzistoru MOS****49.2.2 Struktury tranzistorů MOS****49.2.3 Statické parametry****49.2.4 Výkonový tranzistor ve spínacím režimu****49.2.4.1 Zapínací proces****49.2.4.2 Vypínací proces****49.3 Tranzistory IGBT****49.3.1 Statické parametry****49.3.2 Spínací vlastnosti tranzistoru IGBT****49.4 Metody řízení spínacího procesu****49.4.1 Vliv velikosti hradlového odporu****49.4.2 Aktivní řízení spínání (Active gate control)**

Příklad budiče IGBT s čistě odporovým řízením spínacího procesu je na obrázku 49.4.1, z něhož je patrné, že při zapínání tranzistoru je na hradlo připojeno napětí $U_{d_{ON}}$ přes předřazený zapínací rezistor $R_{G_{ON}}$ a analogickým způsobem při vypínání je předřazen rezistor $R_{G_{OFF}}$. Spínací proces je tedy řízen pouze těmito rezistancemi. Na obrázku 49.4.1 jsou též vyznačeny základní ochrany:



Obrázek 49.4.1: Princip budiče s čistě odporovým řízením spínání společně se základními ochranami IGBT

- Gate-Emitter-clamping (ZD₂, ZD₃),
- desaturation-monitoring (D₁),
- overvoltage clamping (ZD₁),

které obvykle zajišťují činnost IGBT v bezpečné pracovní oblasti (Safe operating area - SOA) i během vystavení tranzistoru nejhorším pracovním podmínkám, jako jsou například zkrat nebo přepětí.

There are some drawbacks of the resistive control. There is no separate influence on collector current and collector emitter voltage in the switching interval. The switching losses increase relatively strong with higher RG. Varying the gate resistance influences both the switching and delay times. Often it is not possible to control overvoltages at turn-off sufficiently and in case of series connection of IGBTs additional measures are to be taken. To avoid these drawbacks and to adapt and optimize the switching behaviour to the requirements, the gate drive can be controlled actively. A lot of work has been done and published in this field, mostly for IGBTs in series connection or for high power [3, 4]. There are only few investigations aimed at the power range below high power [5], where because of extreme sensitivity to costs only a limited number of additional electronic components are allowed.

49.4.2.1 Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového proudu (dI/dt control)

Je-li $U_{GE} = U_{d_{ON}} > U_{GE_{th}}$ je IGBT spínač ve vodivém stavu a pouze celková parazitní indukčnost v obvodu zkratového proudu omezuje dI/dt kolektorového proudu. Doporučovanou možností jak redukovat maximální kolektorový proud $I_{C_{max}}$ a také maximální $dI_C/dt|_{max}$ je snížení hradlového napětí U_{GE} . Pro odvození závislosti strmosti

kolektorového proudu na hradlovém napětí vyjděme z náhradního schématu dle obr. 49.4.2 a idealizovaných průběhů spínacího a vypínacího procesu výkonového spínače dle obrázku *. Kolektorový proud v saturaci je možné vyjádřit vztahem

$$I_C = g_m \cdot (U_{GE} - U_{GE_{th}}) \quad (49.4.1)$$

kde g_m označuje transkonduktanci, $U_{GE_{th}}$ je prahové napětí (threshold voltage)

$$I_G = C_{GS} \frac{dU_{GS}}{dt} \quad (49.4.2)$$

$$\frac{dI_C}{dt} = g_m \frac{dU_{GS}}{dt} = \frac{g_m}{C_{GS}} \cdot I_G \quad (49.4.3)$$

Je-li $U_Z > U_{LSE} + U_{GE}$ pak neprochází proud skrz větev omezovače na obr. 49.4.3 a můžeme sestavit náhradní rovnici dle obr. **. Hradlový proud vyjádříme z rovnice (49.4.3) a dosadíme do rov. 49.4.4.

$$U_{d_{ON}} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}})I_G + U_{GS} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (49.4.4)$$

$$U_{d_{ON}} - U_{GS} = (R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} \frac{dI_C}{dt} + L_{SE_1} \frac{dI_C}{dt} \quad (49.4.5)$$

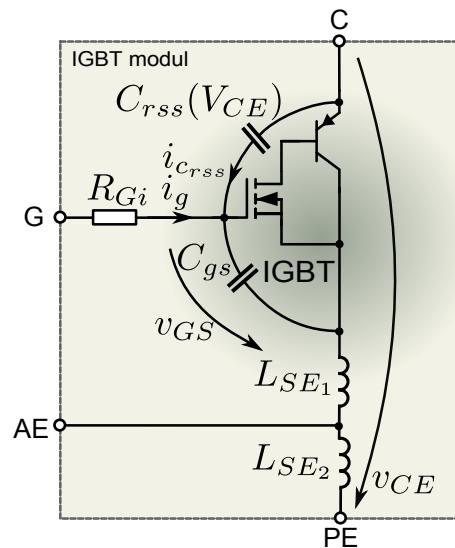
$$\frac{dI_C}{dt} = \frac{U_{d_{ON}} - U_{GS}}{(R_{G_{int}} + R_{G_{ext}}) \frac{C_{GS}}{g_m} + L_{SE_1}} \quad (49.4.6)$$

49.4.2.2 Řízení spínacího procesu podle strmosti kolektorového napětí (dU/dt control)

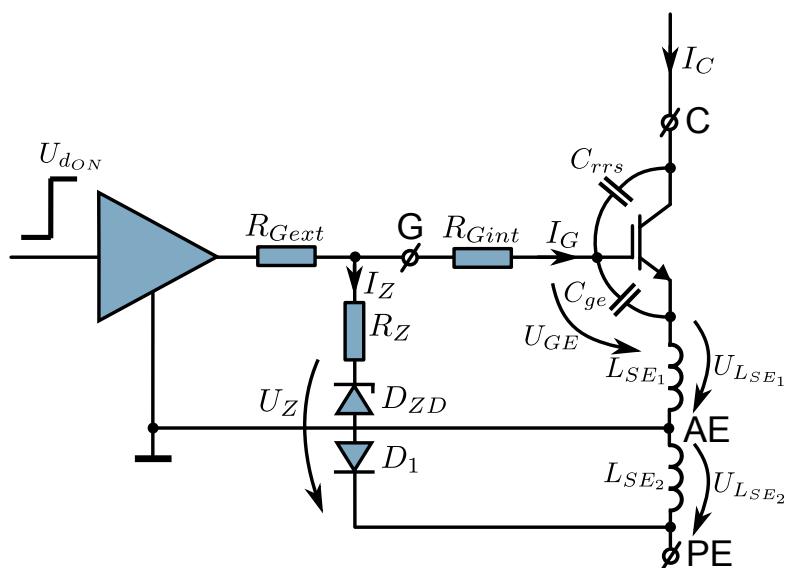
Jednoduchý způsob realizace tohoto způsobu řízení

49.5 Způsoby detekce nadproudu

Vysoká spolehlivost provozu výkonového systému, je v současnosti standardním požadavkem moderní komerční aplikace IGBT. Ochrana výkonových prvků před destrukcí v případě nadproudů je tedy nezbytná a bývá řešena následujícími konvenčními metodami:



Obrázek 49.4.2: Náhradní schéma IGBT modulu (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)



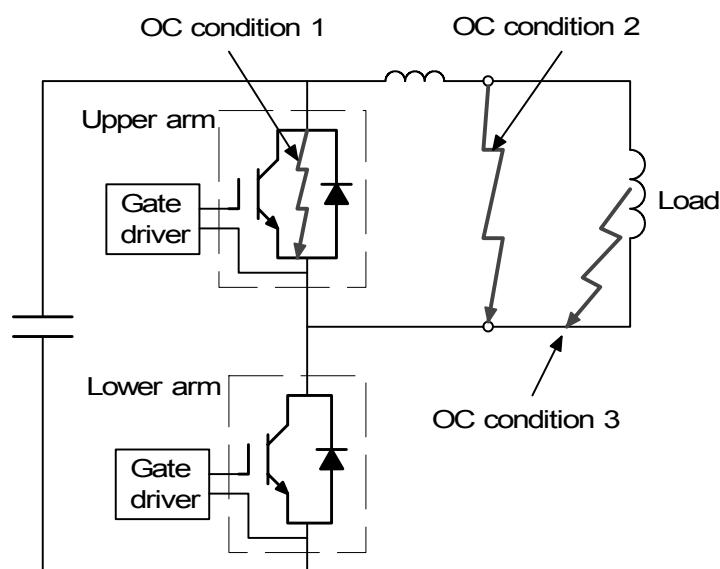
Obrázek 49.4.3: Obvod budiče se zavedenou zpětnou vazbou od di/dt tvořenou součástkami $R_Z, ZD1, D1$ (kapacita C_{CE} a antiparalelní dioda nejsou vyznačeny)

- hlídání hodnoty kolektorového napětí U_{CE} - collector-emitter voltage monitoring method (viz 49.5.2),
- proudový transformátor - current transformer (CT).

První metoda je velice jednoduchá a její princip spočívá ve vyhodnocování úbytku mezi kolektorem a emitorem sepnutého tranzistoru. Problém nastává u vysokonapěťových aplikací, kde je nutné použít vysokonapěťovou signálovou diodu a navíc ochrana nefunguje během přechodného děje spínacího procesu, protože napětí U_{CE} klesá pomalu. Je tedy vhodné používat tuto ochranu v kombinaci s jinou. Širokému použití proudových transformátorů jen pro ochranné účely brání především cena spolu s velkým počtem kusů pro pokrytí všech možných kombinací zkratových obvodů, jež v dané aplikaci mohou nastat.

Následující kapitoly budou věnovány metodám detekce poruchového stavu a způsobům bezpečného vypnutí IGBT i v těchto nepříznivých režimech. Nejprve bude nutné kategorizovat možné poruchové režimy podle chování IGBT. Zajištění těchto funkcí je náplní moderního budiče IGBT.

49.5.1 Uvažované typy zkratových obvodů ve větví výkonového měniče s indukční zátěží



Obrázek 49.5.1: Znázornění třech uvažovaných zkratových obvodů ve věti výkonového měniče s indukční zátěží

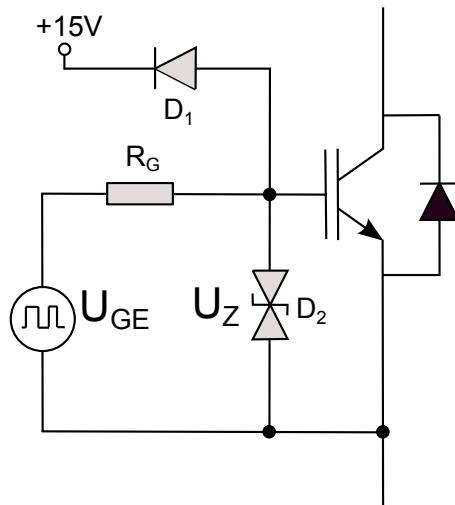
49.5.2 Monitorování velikosti kolektorového napětí

49.5.3 Omezovač hradlového napětí - V_{GE} clamping

$$U_{Z_{GE}} = U_Z \cdot (1 + \alpha_T \cdot \Delta\vartheta_j) \cdot (1 + T_V) \leq U_{GE_{peak}}, \quad (49.5.1)$$

$$U_{GE_{max}} \leq U_Z \cdot (1 - T_V) \quad (49.5.2)$$

kde: U_Z ... jmenovité napětí transilu; $U_{GE_{peak}}$... špičková hodnota hradlového napětí - při zkratu: $\leq 17,5V$; α_T ... teplotní koeficient transilu; $\Delta\vartheta_j$... oteplení nad jmenovitou teplotou okolí $25^{\circ}C$; T_V ... katalogová tolerance transilu



Obrázek 49.5.2: Jednoduchá realizace omezovače hradlového napětí pomocí Shottkyho diody nebo tranzilu

Na obrázku 49.5.2 jsou znázorněny dvě jednoduché možnosti. V případě použití transilu je nutné dbát zvýšenou pozornost jeho výběru. Průrazné napětí musí mít co nejnižší rozptyl a při změně teploty okolí nesmí v běžném provozu omezovat budicí signál. Těmto požadavkům nejlépe vyhovuje transil 1.5KE16CA:

- $\alpha_T = 8 \cdot 10^{-4}$ ($12mV/K$),
- $\Delta\vartheta_j = 50K$ (předpoklad),
- $T_V = 5\%$,

z čehož vyplývají následující kontrolní rovnice

$$U_Z(@ + 75^\circ C; +5\%) = 17,53V \approx U_{GE_{peak}} \quad (49.5.3)$$

$$U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%) = 14,53V \approx U_{GE_{min}} \quad (49.5.4)$$

$$U_Z(@ + 25^\circ C; -5\%) = 15,20V \geq U_{GE_{max}} \quad (49.5.5)$$

V případě krajní hodnoty $U_Z(@ - 25^\circ C; -5\%)$ dojde při buzení $U_{GE} = \pm 15V$ ke krátkodobé aktivaci ochranného transilu, což způsobí jeho ohřátí a posunutí hladiny U_Z .

Efektivita varianty se Shottkyho diodou (viz obr.49.5.2) je závislá na velikosti parazitní indukčnosti mezi hradlem a kondenzátorem zdroje budiče. Zdroj budiče musí také zajistit aby napětí na tomto kondenzátoru při funkci ochrany nevzrůstalo.

Část XXI

Elektrické přístroje

Obsah

50.1 Teorie spínacího oblouku	456
50.1.1 Plazma elektrického oblouku	456
50.1.2 Charakteristika vypínacího pochodu	456
50.1.3 Elektrický oblouk a jeho zhášení	460
50.1.4 Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového	460

50.1 Teorie spínacího oblouku

50.1.1 Plazma elektrického oblouku

Ve spínací technice se zabýváme plazmatem vznikajícím hořením elektrického oblouku při spínání elektrických obvodů. Dále popisované vlastnosti elektrického oblouku jsou rozpracovány pro druh plazmatu hořící ve vypínací dráze zhášecích komor vypínačů. Toto plazma se charakterizuje jako vysokotlaké (tlaky plynu vyšší než 0,1 MPa) a elektrické proudy řádově kiloampéry. Pozornost bude soustředěna zejména na elektrický oblouk hořící v tlakoplynových zhášecích komorách při vypínání elektrických obvodů. V tlakoplynových zhášecích komorách byl oblouk nejvíce prozkoumán u tlakovzdušného principu a u vypínačů s plynem SF₆ [BartaVostracky].

50.1.2 Charakteristika vypínacího pochodu

50.1.2.1 Základní uspořádání zhášecích komor

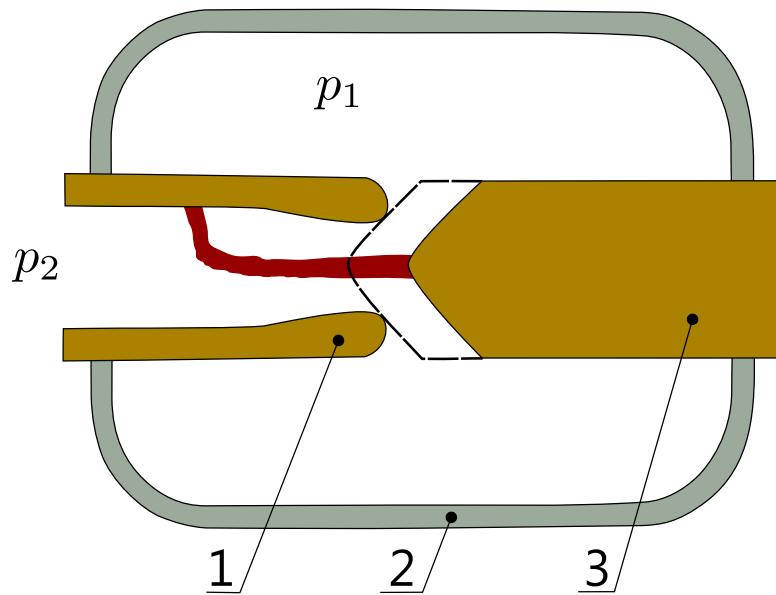
Základním uspořádáním zhášecích komor lze rozdělit z hlediska proudění plynu na zhášecí komory:

- s jednostranným prouděním,
- s dvoustranným prouděním.

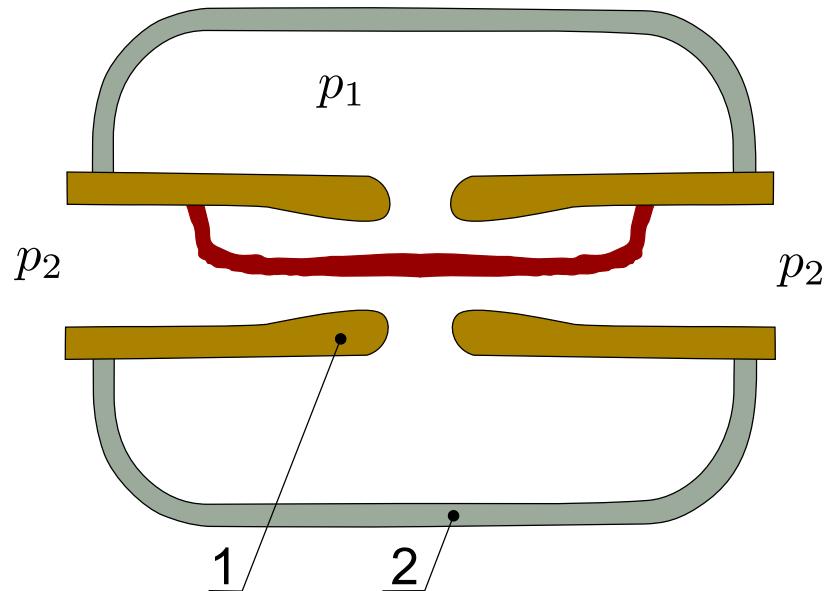
Na obrázcích je schématicky znázorněn oblouk, který je axiálně ofukován plynem z prostoru zhášecí komory s tlakem p_1 přes zhášecí trysky dutinou kontaktů do výfuku, kde je nižší tlak p_2 .

Legenda:

1. Zhášecí tryska
2. Tlaková izolační nádoba
3. Kontakt
 - p_1 ... tlak ve zhášecí komoře
 - p_2 ... tlak ve výfukovém prostoru



Obrázek 50.1.1: Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s jednostranným prouděním.

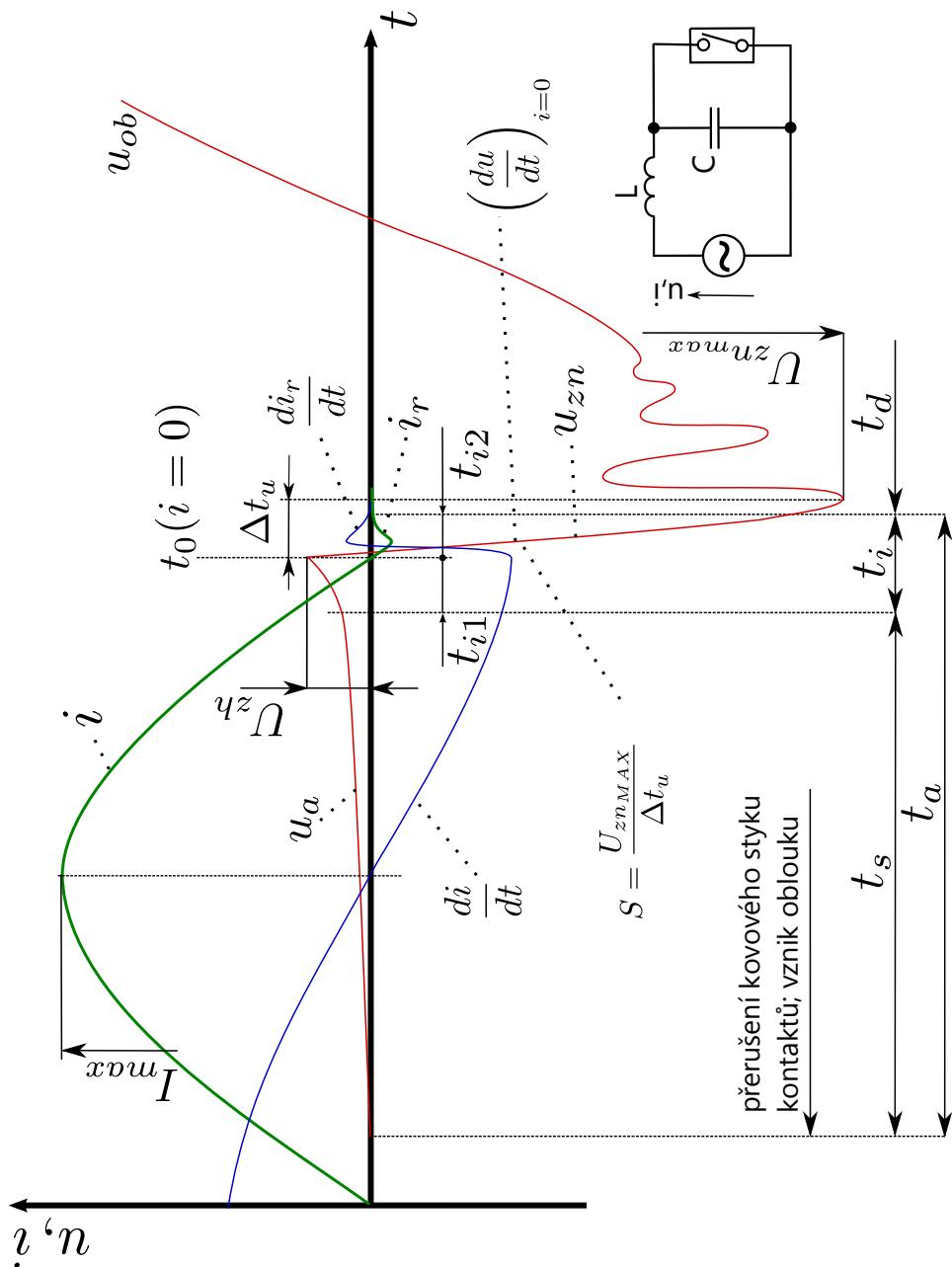


Obrázek 50.1.2: Schématické uspořádání zhášecí komory tlakovzdušného vypínače s dvoustranným prouděním.

50.1.2.2 Tři základní intervaly vypínačího pochodu

Vypínačí pochod lze z hlediska zkoušení vypínačů rozdělit do tří základních intervalů:

1. $t_s \dots$ **Silnoproudý interval**
2. $t_i \dots$ **Interakční interval**
3. $t_d \dots$ **Dielektrický interval**
 - $t_s \dots$ silnoproudý interval
 - $t_i \dots$ interakční interval
 - $t_{i1} \dots$ interval výrazné změny obloukového napětí
 - $t_{i2} \dots$ interval zbytkového proudu
 - $t_d \dots$ dielektrický interval
 - $t_a \dots$ doba hoření oblouku
 - $\frac{di}{dt} \dots$ derivace proudu podle času
 - $i_r \dots$ zbytkový proud
 - $\frac{di_r}{dt} \dots$ derivace zbytkového proudu podle času
 - $u_a \dots$ napětí oblouku
 - $U_{zh} \dots$ zhášecí amplituda napětí
 - $U_{zn_{max}} \dots$ maximální hodnota zotaveného napětí
 - $u_{0b} \dots$ obnovené napětí
 - $S \dots$ strmost zotaveného napětí (podle IEC)
 - $\Delta t_u \dots$ doba od průchodu proudu nulou do okamžiku protnutí tečny obalující křivku u_{zn} v hodnotě $U_{zn_{max}}$
 - $\frac{du}{dt}|_{i=0} \dots$ okamžitá strmost zotaveného napětí v nulové hodnotě proudu



Obrázek 50.1.3: Základní intervaly vypínačího pochodu.

Charakteristické parametry vypínače v intervalech vypínacího pochodu:

- $\mathbf{t}_s : i, I_{max}, u_a$
- $\mathbf{t}_a : \frac{di}{dt}, i_r, \frac{du}{dt}, u_{zn}, U_{zn_{max}}$
- $\mathbf{t}_d : \frac{du}{dt}, S, U_{zn_{max}}$

Rozdelení vypínacího pochodu do těchto intervalů umožňuje snadněji specifikovat základní kritéria, kterým musí zhášecí komora vyhovovat při vypínání. Při vypínání střídavého proudu charakter proudění plynu závisí nejen na časově proměnlivém zdvihu kontaktů, druhu plynu a tlakových poměrech, ale i na předcházejícím proudu, přičemž všechny veličiny jsou vzájemně závislé. Hranice intervalů však lze určit jen přibližně, protože jsou závislé na kmitočtu proudu a na časové konstantě oblouku. Časová konstanta oblouku je proměnlivá nejen s velikostí proudu, ale závisí i na uspořádání zhášecí komory.

50.1.3 Elektrický oblouk a jeho zhášení

50.1.4 Zhášecí vlastnosti fluoridu sírového

Jak bylo uvedeno v předchozích kapitolách, ve zhášecí komoře výkonových vypínačů po zhasnutí oblouku ještě zůstává po krátkou dobu mezi elektrodami zbytkové plazma, které obsahuje značný počet volných elektronů. Je-li toto množství kolem 10^{14} až 10^{15} elektronů v metru krychlovém, pak je splněna podmínka pro tvorbu elektronových *lavin* nebo *strimérů* a strmě stoupající zotavené napětí může způsobit jiskrový výboj, který přejde okamžitě v obloukový opětný zápal. Protože v plazmě oblouku je hustota elektronů závislá na její teplotě, nemá-li dojít k opětnému zápalu, musí plazmu dobře fungující vypínač rychle ochladit. Chladící pochod je podmíněn vlastností plynu vyjádřenou

textbftepelnou vodivostí $[\frac{W}{K \cdot m}]$, kterou způsobují tyto dva dílčí jevy:

- Odvod kinetické energie plynu, který probíhá při vzájemných srážkách molekul rozkmitaných tepelnou energií plynu,
- Disociace molekul, kdy při rozkladech molekul na základní atomy se při nepružných srážkách pohlcuje disociační energie a tím se kinetická energie molekul přeměňuje na potenciální energii atomů. Tato se odvádí difúzí do oblastí plynu s nízkou teplotou.

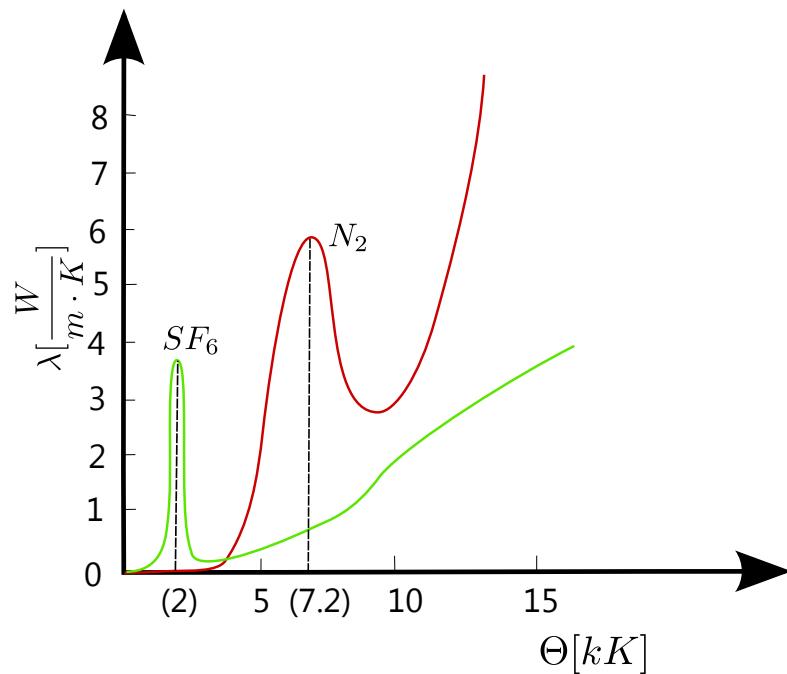
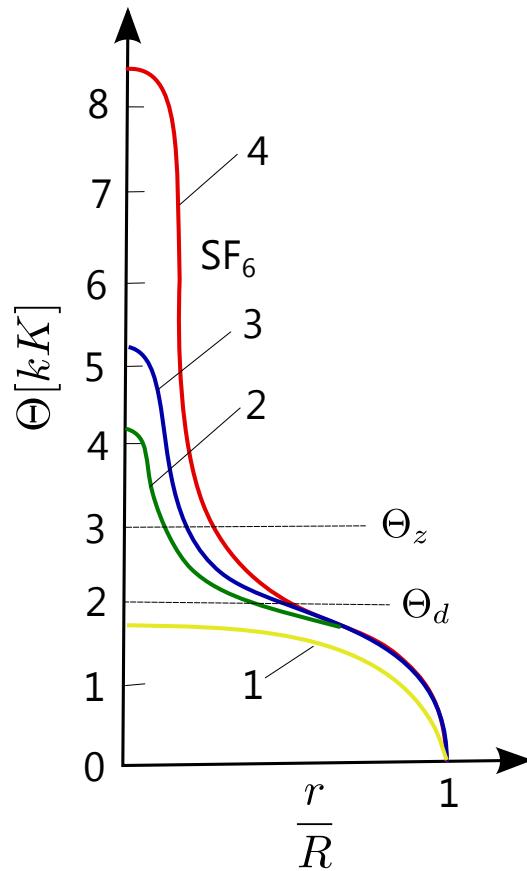
Disociace molekul nastává jen v úzkém teplotním intervalu charakterizovaném **disociační teplotou** Θ_d . Proto má křivka tepelné vodivosti plynu kolem teploty Θ_d značně vyjádřené maximum.

- Plyn SF₆: $\Theta_d = 2500K$.
- Plyn N₂ (vzduch): $\Theta_d = 7500K$.

Rozdílné teploty Θ_d jsou způsobeny tím, že disociační energie molekuly dusíku N₂ je 14.5eV, zatímco síra S disociuje z molekuly SF₆ již při energii 10.4eV. Průběh křivek tepelných vodivostí různých plynů dovoluje současně odhadnout prostorové rozdělení teplot v elektrickém oblouku, neboť v místech s *maximální tepelnou vodivostí* je *minimální teplotní spád (gradient)*. Proto se v křivkách znázorňující rozdělení teploty oblouku v závislosti na jeho poloměru objevují v okolí disociačních teplot pro dusík N₂ a SF₆ znatelné zlomy pro různé velikost proudů. Z těchto průběhů je také možné určit dvě zcela rozdílné oblasti oblouku:

- **Trup oblouku:** velmi jasné zářící oblast s vysokými teplotami ležícími nad Θ_d
- **Plášť oblouku:** difúzně svítivá část oblouku s teplotami dosahujícími maximálně Θ_d

Důležitost disociační teploty Θ_d molekuly plynu zvlášť vyniká při sledování rychlosti zmenšování hustoty elektronů ve zbytkové plazmě oblouku, která je kritériem vzniku elektrického výboje mezi kontakty. Protože ve žhavém trupu je úbytek hustoty elektronů stokrát rychlejší než ve vnějším pláště oblouku, zaniká po nule proudu nejprve zářivý trup oblouku. *Zotavené napětí* působí již jen na *plášť oblouku*, v němž se hustota elektronů zmenšuje jen velmi zvolna. Protože kritickou veličinou pro elektrický výboj v plynném prostředí je hustota elektronů kolem $10^{14}/m^3$, bylo z kinetické teorie plynů odvozeno, že tento stav odpovídá přibližně teplotě kolem **3000 K**.

(a) Tepelné vodivosti dusíku (N_2) a fluoridu sírového (SF_6)(b) Křivky rozdělení teplot oblouku v závislosti na poloměru oblouku v SF_6 ; 1 až 4 různé proudy oblouku

Obrázek 50.1.4: Základní charakteristiky oblouku hořícího v plynech SF_6 a porovnání s dusíkem