

# Unidade V:


## Ordenação Interna - Quicksort



**PUC Minas**

Instituto de Ciências Exatas e Informática  
Departamento de Ciência da Computação

- Funcionamento básico
- Algoritmo em C#
- Análise dos número de comparações e movimentações
- Escolha do Pivô
- Conclusão

- **Funcionamento básico** 
- Algoritmo em C#
- Análise dos número de comparações e movimentações
- Escolha do Pivô
- Conclusão

# Introdução

- Proposto por Hoare em 1960 e publicado em 1962
- Algoritmo de ordenação mais rápido para a maioria das situações
- Provavelmente, ele é o mais utilizado
- Algoritmo do tipo dividir para conquistar

# Funcionamento Básico


- Divide o *array* em duas partes que serão independentemente ordenadas e a combinação de seus resultados produz a solução final
  - A parte da esquerda terá elementos menores ou iguais a um pivô
  - A parte da direita terá elementos maiores ou iguais a um pivô

# Funcionamento Básico

- Particionamento:
  - Escolha arbitrariamente um pivô
  - Percorra o *array* a partir da esquerda enquanto  $array[i] < \text{pivô}$
  - Percorra o *array* a partir da direita enquanto  $array[j] > \text{pivô}$
  - Se  $i \leq j$  então troque  $array[i]$  com  $array[j]$
  - Continue o processo enquanto  $i \leq j$

# Funcionamento Básico

- No final do particionamento, o *array* estará particionado de tal forma que:
  - Os elementos *array[esq]*, *array[esq+1]*, . . . , *array[j]* são  $\leq$  que pivô
  - Os elementos *array[i]*, *array[i+1]*, . . . , *array[dir]* são  $\geq$  que pivô

- Funcionamento básico
- **Algoritmo em C#** 
- Análise dos número de comparações e movimentações
- Escolha do Pivô
- Conclusão



## Algoritmo em C#

```
void quicksort(int esq, int dir) {  
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];  
    while (i <= j) {  
        while (array[i] < pivo)  
            i++;  
        while (array[j] > pivo)  
            j--;  
        if (i <= j)  
            { swap(i, j); i++; j--; }  
    }  
    if (esq < j)  
        quicksort(esq, j);  
    if (i < dir)  
        quicksort(i, dir);  
}
```

Na primeira chamada, teremos:  
quicksort(0, n-1)

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

## Algoritmo em C#

```
void quicksort(int esq, int dir) {  
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];  
    while (i <= j) {  
        while (array[i] < pivo)  
            i++;  
        while (array[j] > pivo)  
            j--;  
        if (i <= j)  
            { swap(i, j); i++; j--; }  
    }  
    if (esq < j)  
        quicksort(esq, j);  
    if (i < dir)  
        quicksort(i, dir);  
}
```

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

## Algoritmo em C#

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
    
```

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

<b>i</b>															
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>30</b>	<b>5</b>	<b>20</b>	<b>48</b>	<b>71</b>	<b>82</b>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>esq</b>															<b>dir</b>

# Algoritmo em C#

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

															j	
i	0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq																dir

# Algoritmo em C#

pivô

10

**$(0 + 15) / 2: 7$**

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

															j	
i	0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq																dir

# Algoritmo em C#

pivô

10

**0 <= 15: true**

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i

j

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq								dir							





## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i

j

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

1 < 10: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

i

j

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i

j

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

5 < 10: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

i

j

0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

			<i>i</i>												<i>j</i>	
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
<i>esq</i>															<i>dir</i>	

## Algoritmo em C#

pivô

10

3 < 10: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

			<i>i</i>												<i>j</i>	
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
<i>esq</i>																<i>dir</i>

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

				<i>i</i>												<i>j</i>	
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
<i>esq</i>																<i>dir</i>	

## Algoritmo em C#

pivô

10

15 < 10: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

				i													j
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
esq																	dir



## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

82 > 10: true

				<b>i</b>												<b>j</b>	
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>30</b>	<b>5</b>	<b>20</b>	<b>48</b>	<b>71</b>	<b>82</b>		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
<b>esq</b>																<b>dir</b>	

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

				<i>i</i>												<i>j</i>	
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
<i>esq</i>																<i>dir</i>	

## Algoritmo em C#

pivô 10

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}

```

71 &gt; 10: true

				<b>i</b>												<b>j</b>	
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>30</b>	<b>5</b>	<b>20</b>	<b>48</b>	<b>71</b>	<b>82</b>		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
<b>esq</b>																<b>dir</b>	

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

				i									j		
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

48 > 10: true

				<i>i</i>												<i>j</i>	
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
<i>esq</i>																	<i>dir</i>

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

				i					j						
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

20 > 10: true

				i									j		
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															
														dir	

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

				i						j						
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir



## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

5 > 10: false

				<b>i</b>												<b>j</b>	
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>30</b>	<b>5</b>	<b>20</b>	<b>48</b>	<b>71</b>	<b>82</b>		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
<b>esq</b>																<b>dir</b>	

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

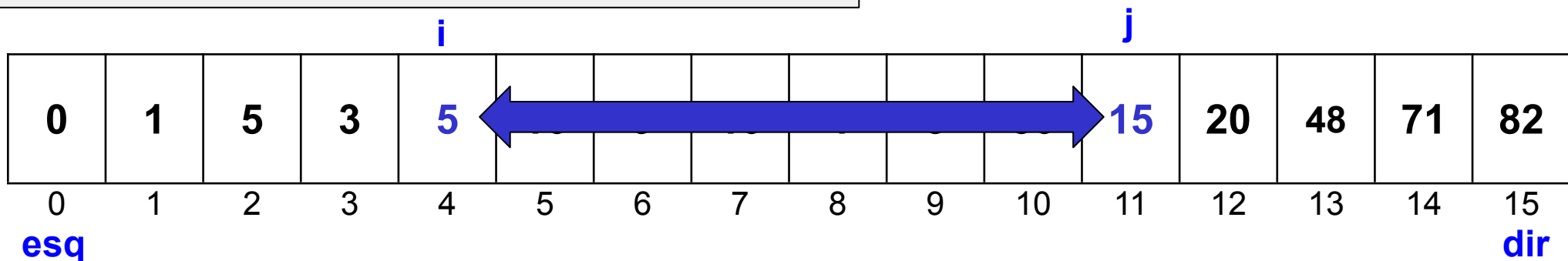
4 <= 11: true

				<i>i</i>						<i>j</i>					
0	1	5	3	15	16	9	10	4	3	30	5	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>esq</i>															
												<i>dir</i>			

## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```



## Algoritmo em C#

pivô

10

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++; j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}

```

0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

5 <= 10: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

					<i>i</i>					<i>j</i>						
0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
<i>esq</i>																<i>dir</i>

## Algoritmo em C#

pivô 10

16 < 10: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

					i					j					
0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

30 > 10: true

					i					j					
0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

					i				j							
0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir



## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

3 > 10: false

					i				j							
0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir

## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

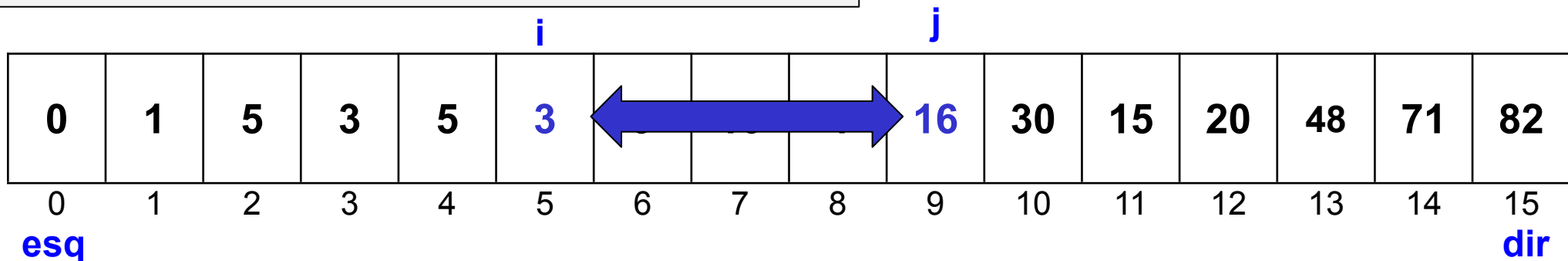
5 <= 9: true

					i				j							
0	1	5	3	5	16	9	10	4	3	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir

## Algoritmo em C#

pivô 10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```



## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++; j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

						i	j									
0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

6 <= 8: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

9 < 10: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

							i	j								
0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir

## Algoritmo em C#

pivô 10

10 < 10: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

							i	j								
0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir



## Algoritmo em C#

pivô 10

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}

```

4 &gt; 10: false

0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							i	j							dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

7 <= 8: true

							i	j								
0	1	5	3	5	3	9	10	4	16	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq																dir

## Algoritmo em C#

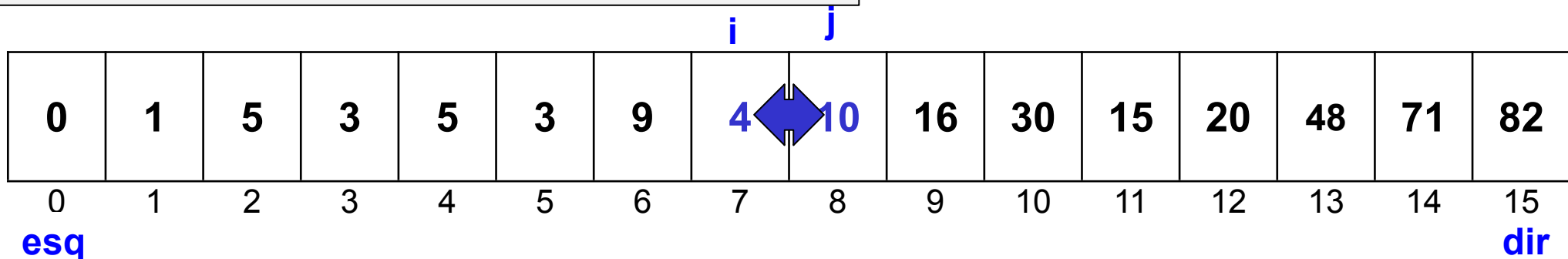
pivô

10

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}

```



## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++; j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							j	i							dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

8 <= 7: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {   swap(i, j);   i++;   j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

0 < 7: true

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							j	i							dir

## Algoritmo em C#

pivô

10

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {   swap(i, j);   i++;   j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							j	i							dir

## Algoritmo em C#

pivô

?

Obs(1): esq e dir são 0 e 7, respectivamente.

Obs(2): o pivô será definido novamente.

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								



## Algoritmo em C#

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

<b>i</b>															
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>30</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>48</b>	<b>71</b>	<b>82</b>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>esq</b>								<b>dir</b>							

## Algoritmo em C#

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
    
```

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
    
```

$(0 + 7) / 2 = 3$

pivô

3

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

0 <= 7: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

0 < 3: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq								dir							

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

1 < 3: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								



## Algoritmo em C#

pivô

3

5 < 3: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

4 > 3: true

		i					j									
0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq							dir									

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

9 > 3: true

i

j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i j

0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

3 > 3: false

		i			j										
0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

2 <= 5: true

		i			j											
0	1	5	3	5	3	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
esq							dir									

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```





## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++; j--;
        }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i j

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

3 <= 4: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

i j

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

3 < 3: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

			i	j											
0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

5 > 3: true

			i	j											
0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

i j

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            swap(i, j);
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

3 > 3: false

i j

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

3 <= 3: true

i j

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}

```

i j

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq				dir											



## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {  
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];  
    while (i <= j) {  
        while (array[i] < pivo)  
            i++;  
        while (array[j] > pivo)  
            j--;  
        if (i <= j)  
        {  
            swap(i, j);  
            i++; j--;  
        }  
    }  
    if (esq < j)  
        quicksort(esq, j);  
    if (i < dir)  
        quicksort(i, dir);  
}
```

Obs: O elemento [3] está na posição correta



0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq			dir												

## Algoritmo em C#

pivô

3

4 <= 2: false

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
        if (esq < j)
            quicksort(esq, j);
        if (i < dir)
            quicksort(i, dir);
    }
}
```

j

i

0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {
            swap(i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
}
```

0 < 2: true

```
if (esq < j)
    quicksort(esq, j);
if (i < dir)
    quicksort(i, dir);
}
```

j

i

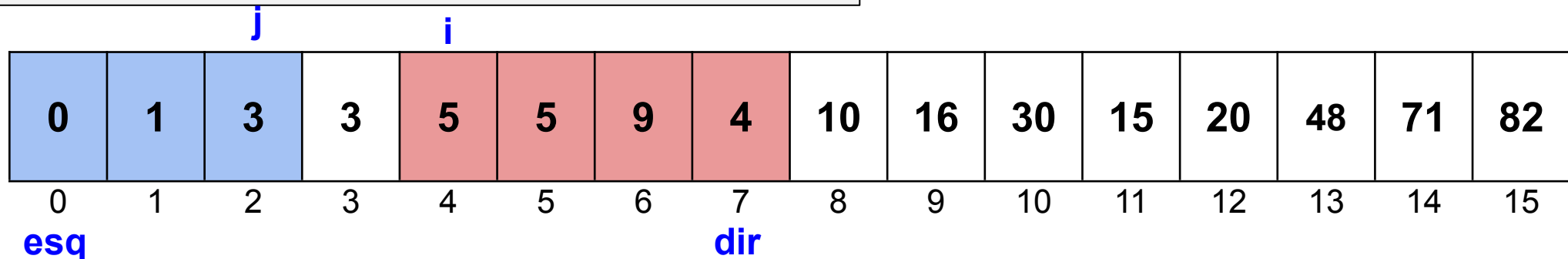
0	1	3	3	5	5	9	4	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq							dir								

## Algoritmo em C#

pivô

3

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
        {   swap(i, j);   i++;   j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```



## Algoritmo em C#

pivô 10

Voltando para a primeira chamada do Quicksort

8 < 15: true

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

0	1	3	3	4	5	5	9	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

## Algoritmo em C#

pivô 10


Voltando para a primeira chamada do Quicksort

```

void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq, j = dir, pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}

```

0	1	3	3	4	5	5	9	10	16	30	15	20	48	71	82
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
esq															dir

- Funcionamento básico
- Algoritmo em C#
- **Análise dos número de comparações e movimentações** 
- Escolha do Pivô
- Conclusão

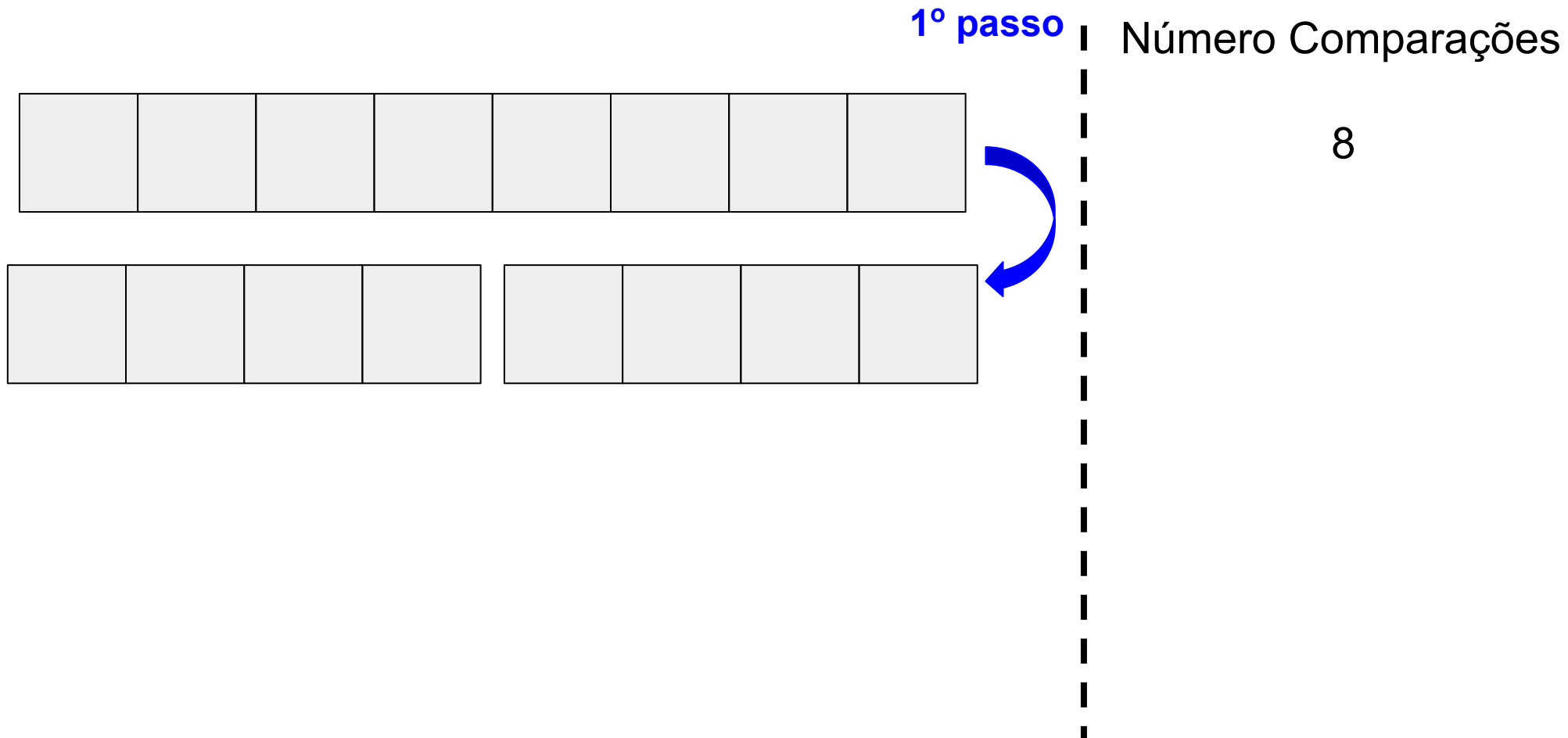
# Análise do Número de Comparações

- **Melhor caso:** Sistemáticamente, cada partição divide o *array* em duas partes iguais



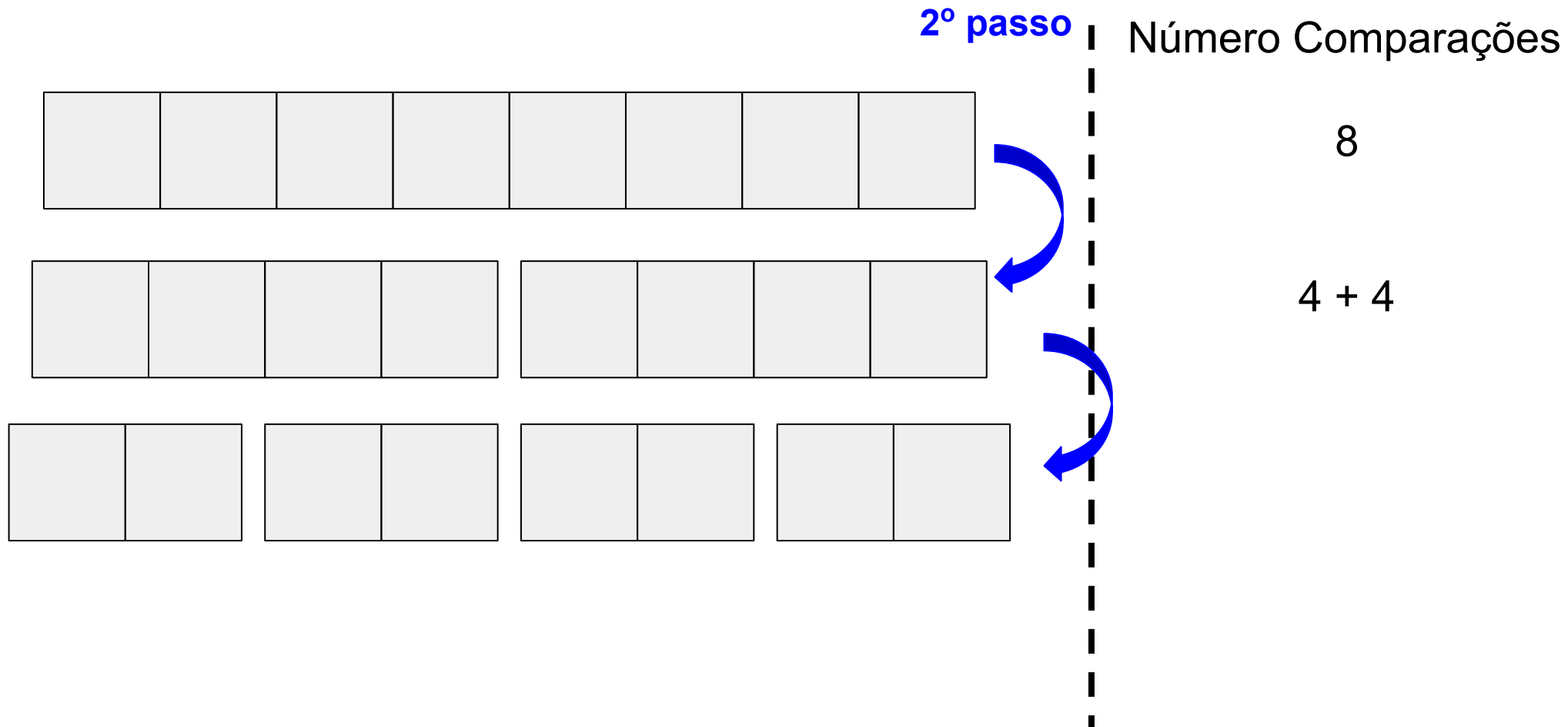
# Análise do Número de Comparações

- **Melhor caso:** Sistemáticamente, cada partição divide o *array* em duas partes iguais



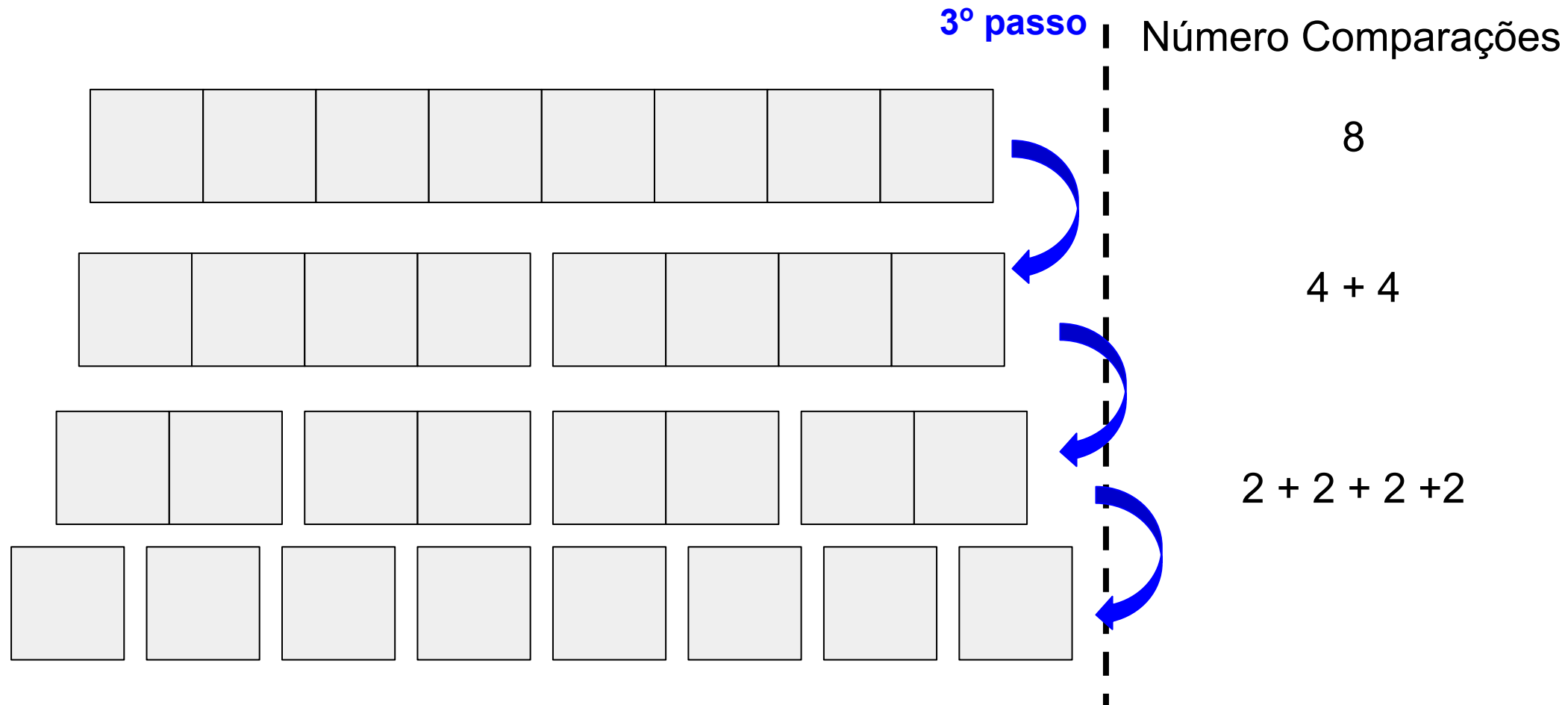
# Análise do Número de Comparações

- **Melhor caso:** Sistemáticamente, cada partição divide o *array* em duas partes iguais



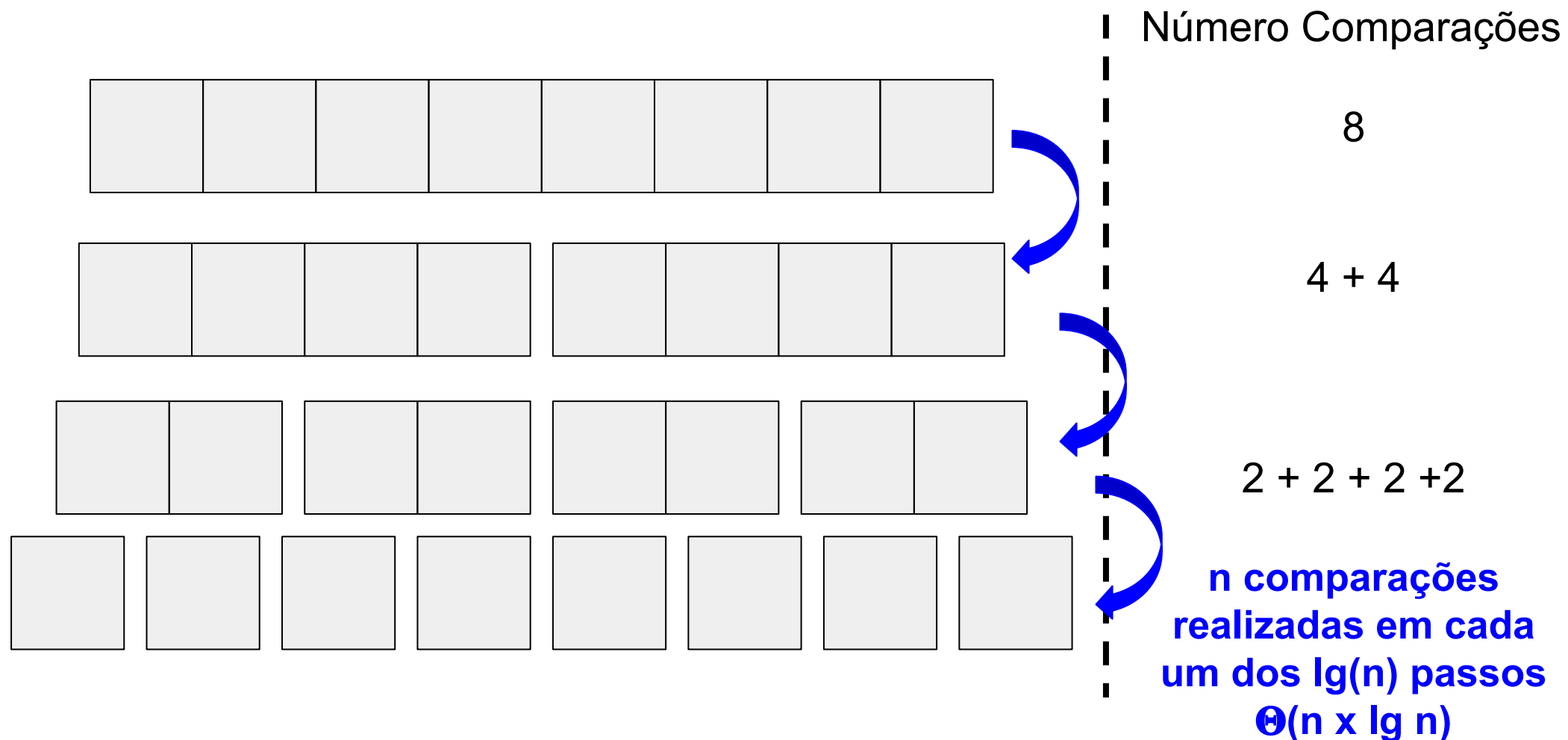
# Análise do Número de Comparações

- **Melhor caso:** Sistemáticamente, cada partição divide o *array* em duas partes iguais



# Análise do Número de Comparações

- **Melhor caso:** Sistemáticamente, cada partição divide o *array* em duas partes iguais



# Análise do Número de Comparações

- **Melhor caso:** Sistemáticamente, cada partição divide o *array* em duas partes iguais

$$C(n) = 2 * C\left(\frac{n}{2}\right) + n = n * \lg(n) - n + 1$$

A análise de complexidade do Quicksort depende de equação de recorrência (vista nas disciplinas Teoria dos Grafos e Computabilidade e Projeto e Análise de Algoritmos)

# Análise do Número de Comparações

- **Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo

# Análise do Número de Comparações

- **Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo

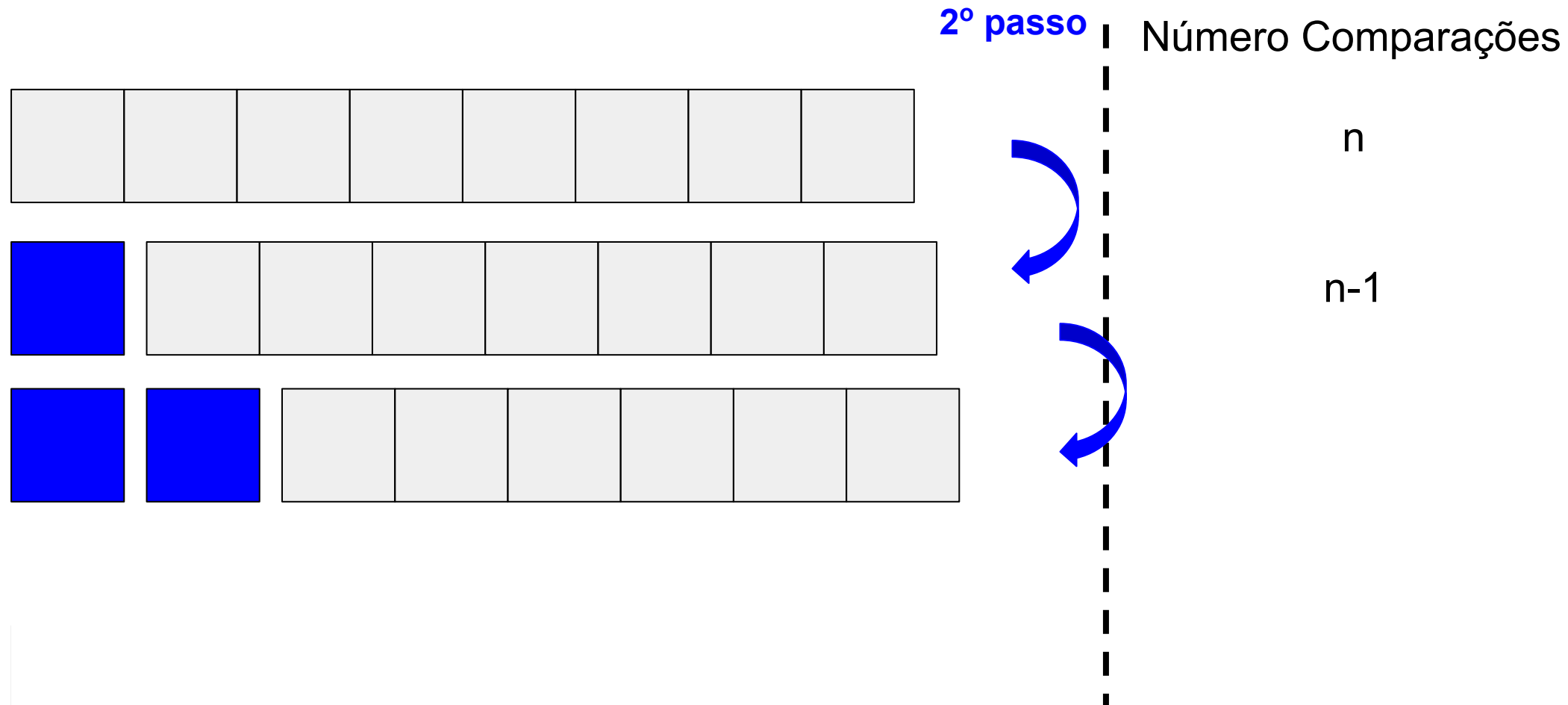
1º passo | Número Comparações

n



# Análise do Número de Comparações

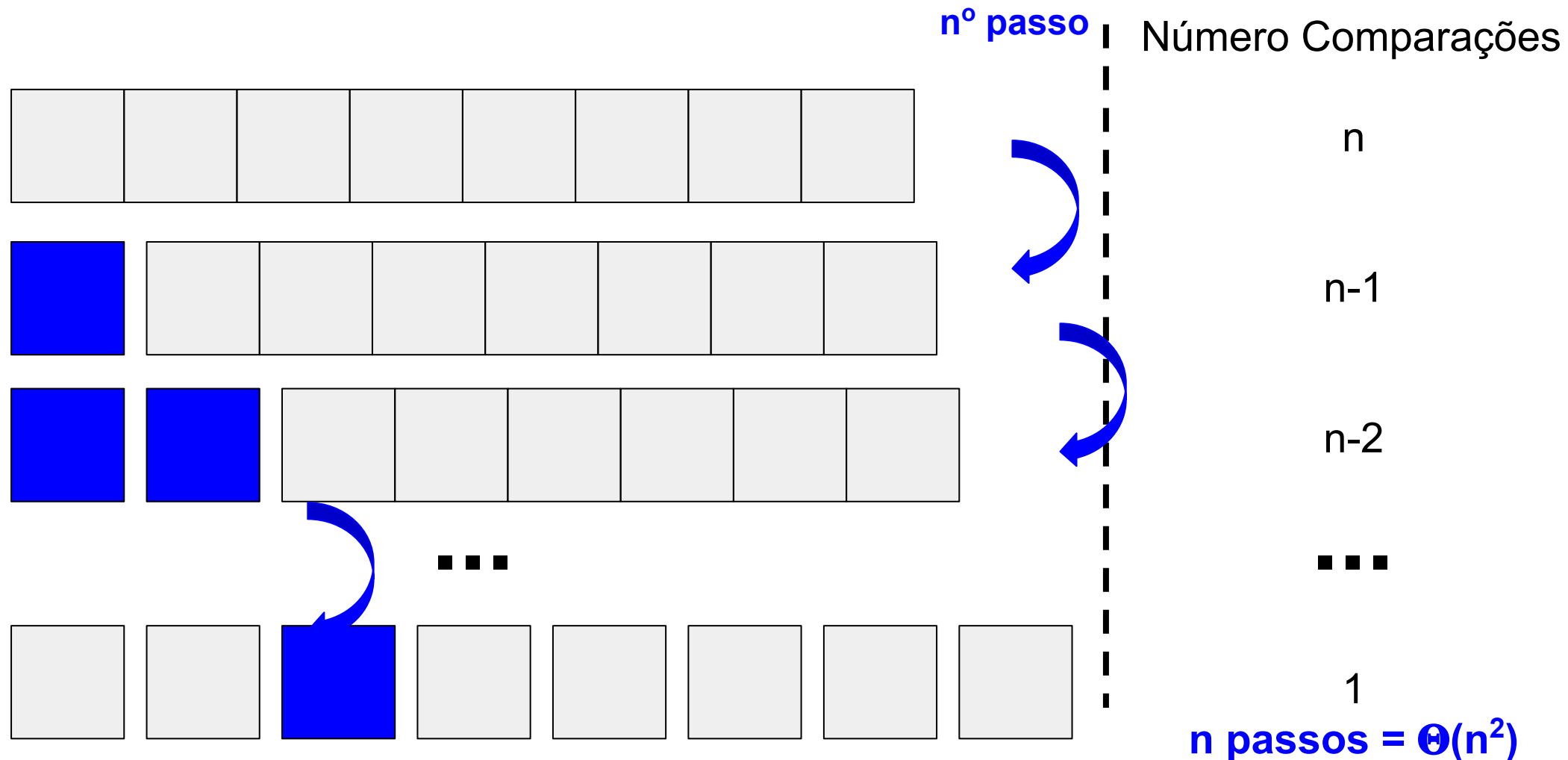
- **Pior caso:** Sistematicamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo





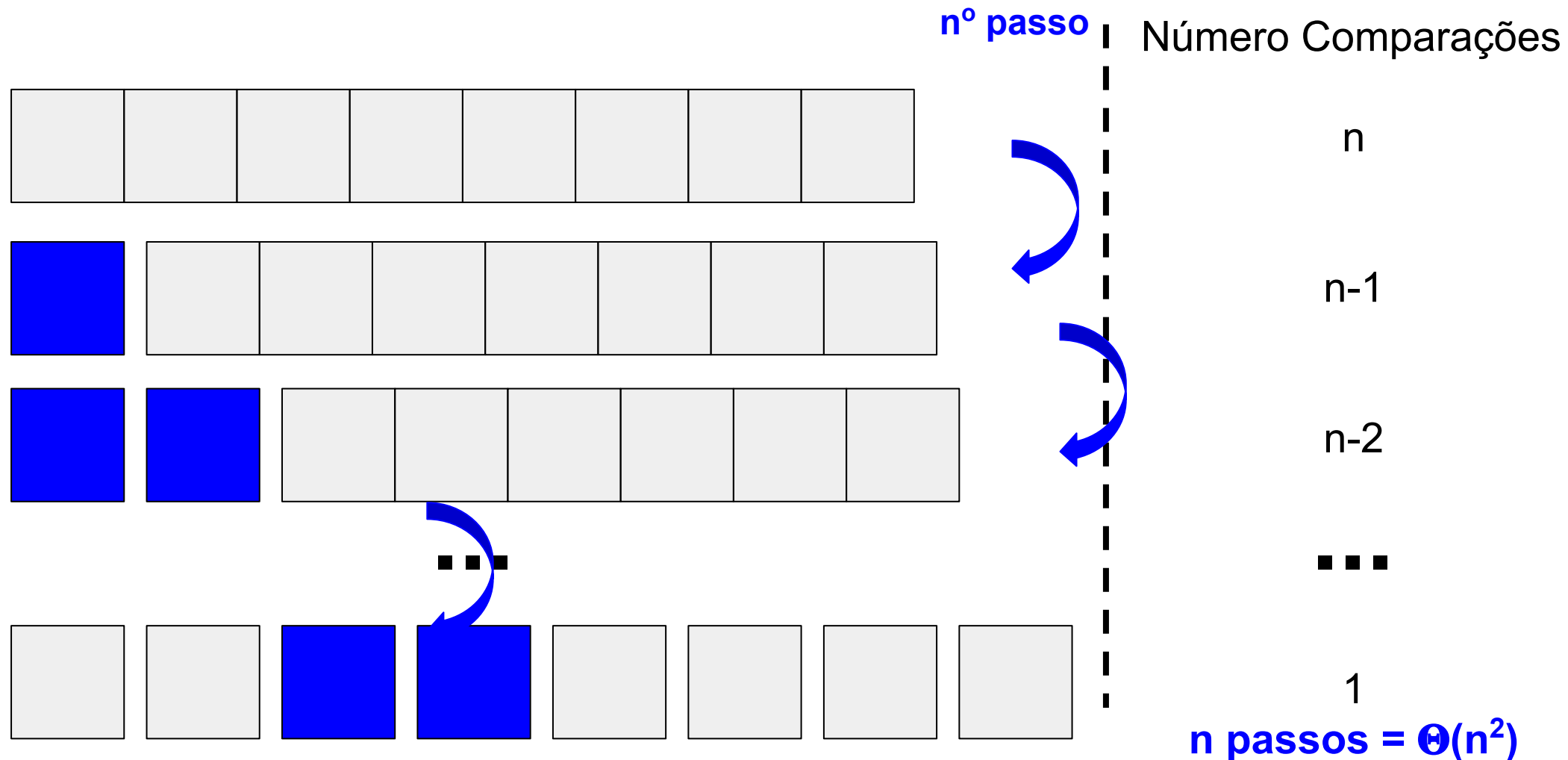
# Análise do Número de Comparações

- Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



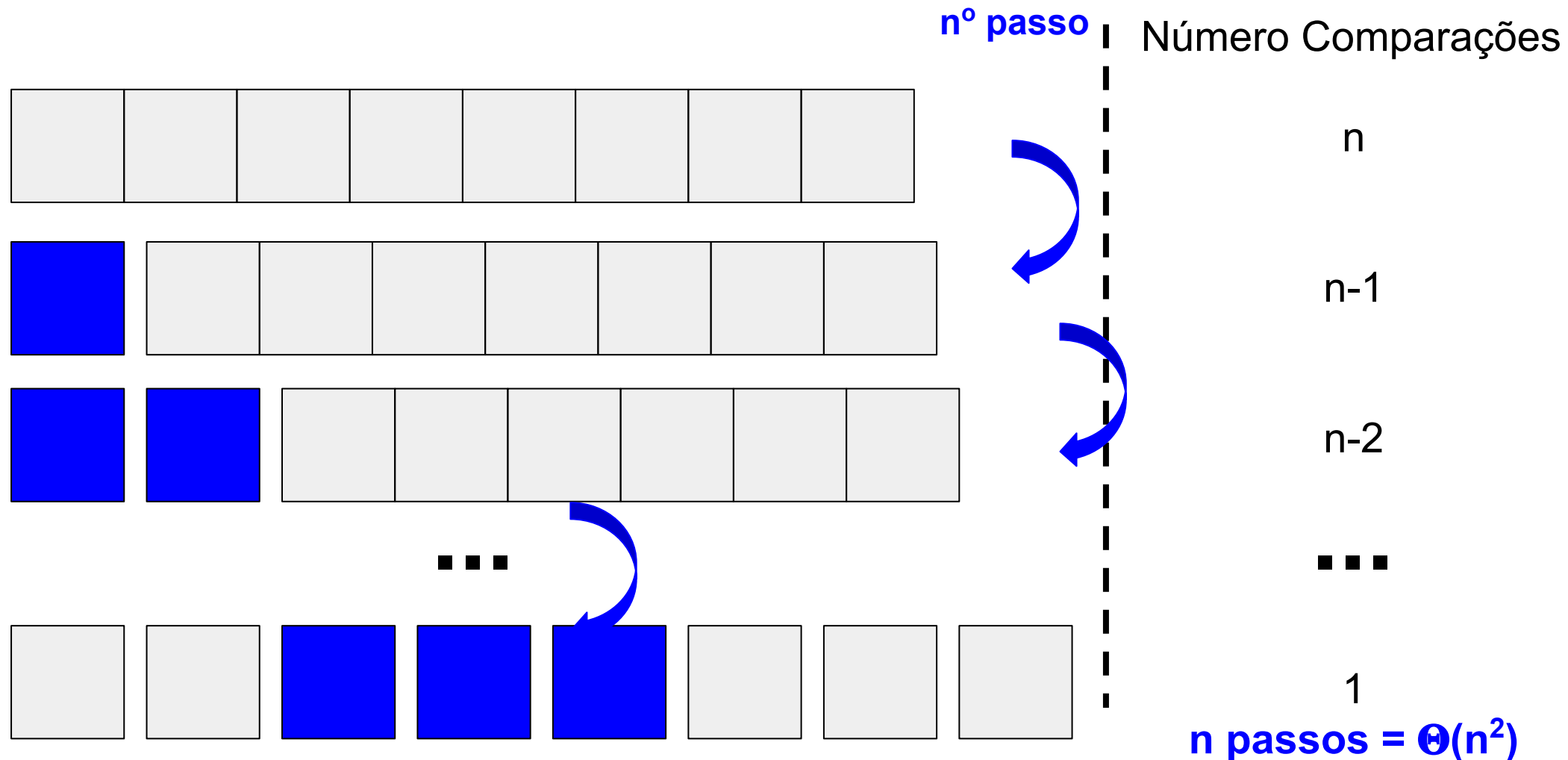
# Análise do Número de Comparações

- Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



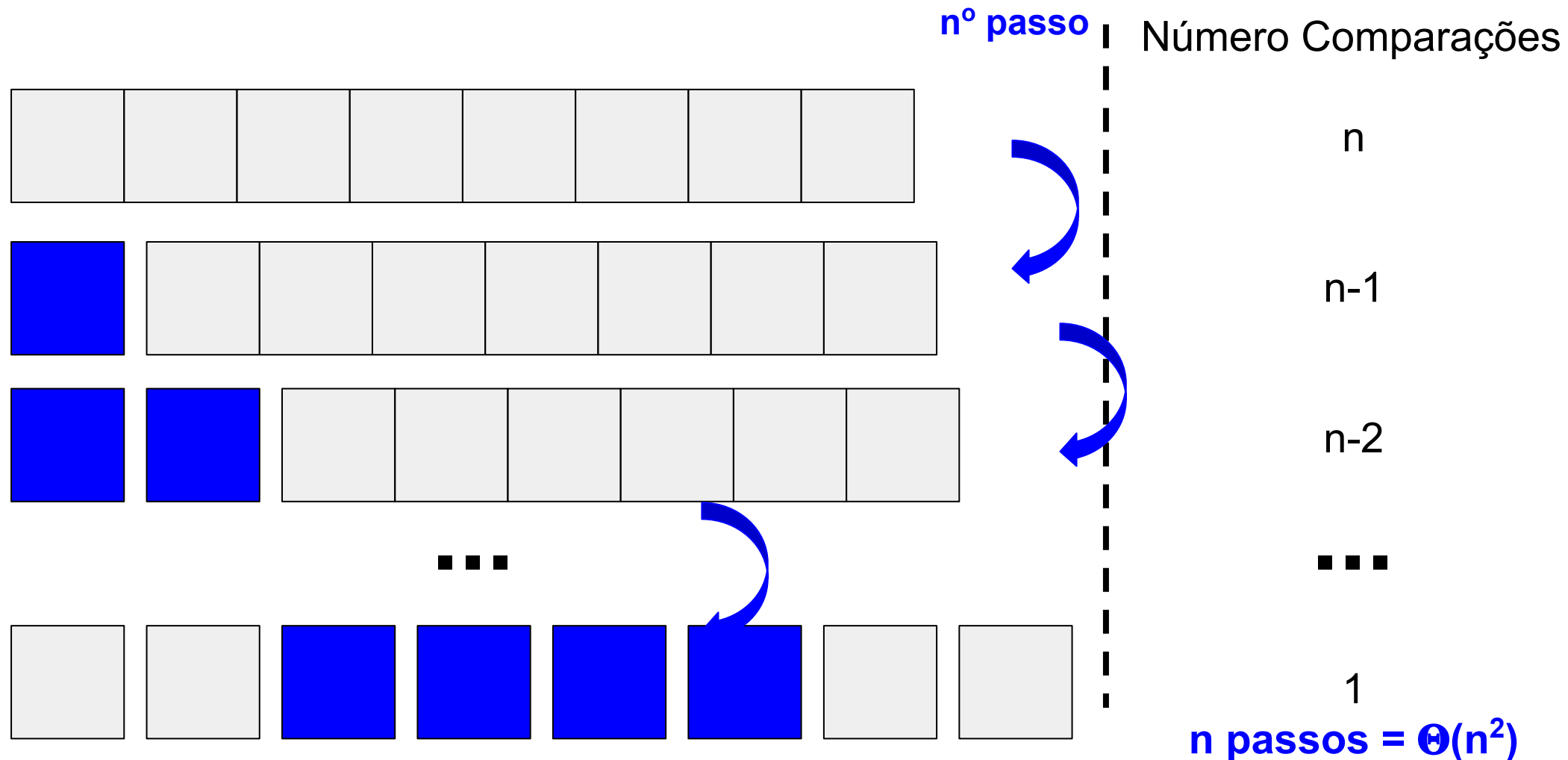
# Análise do Número de Comparações

- Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



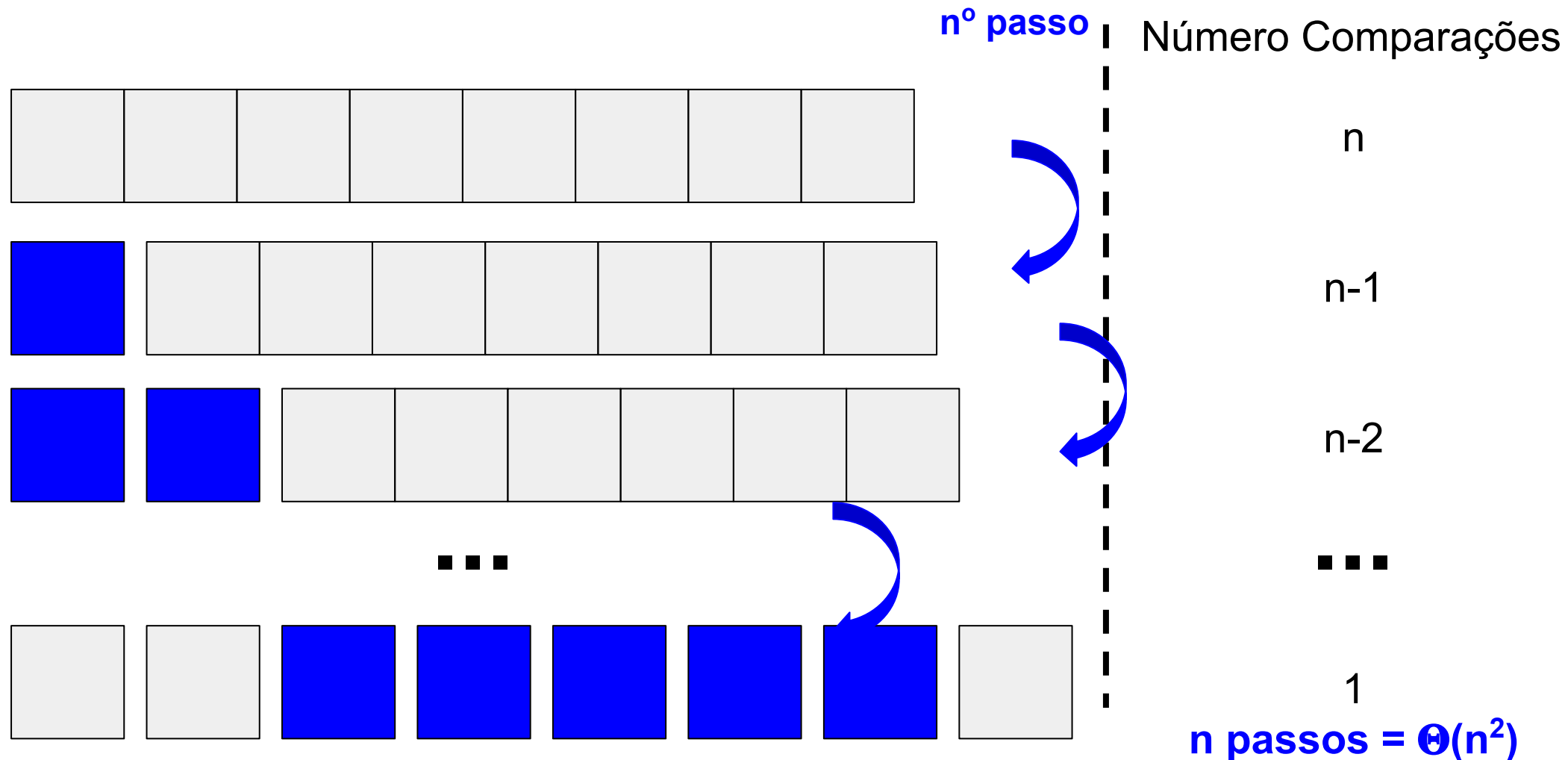
# Análise do Número de Comparações

- Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



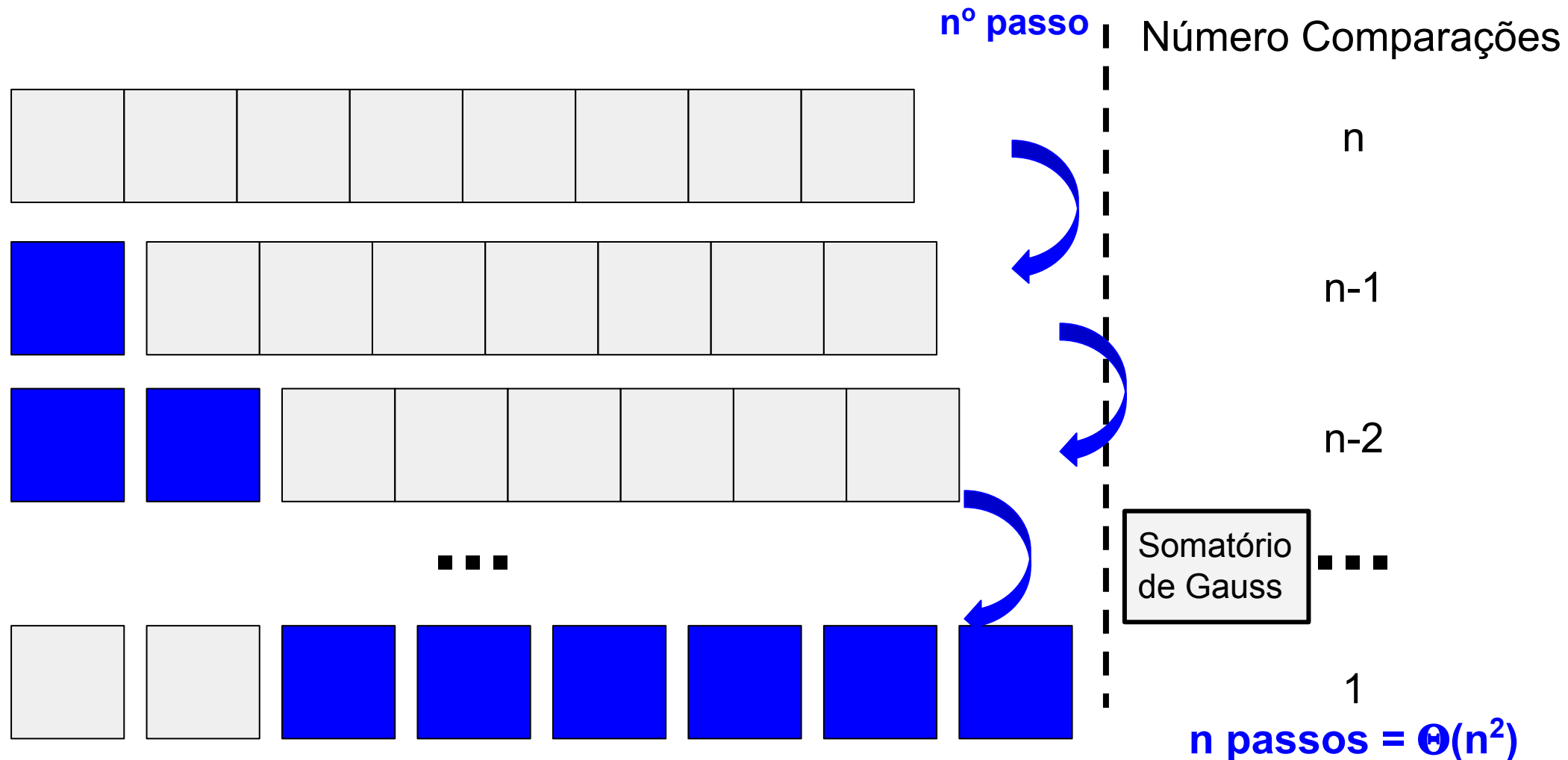
# Análise do Número de Comparações

- Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



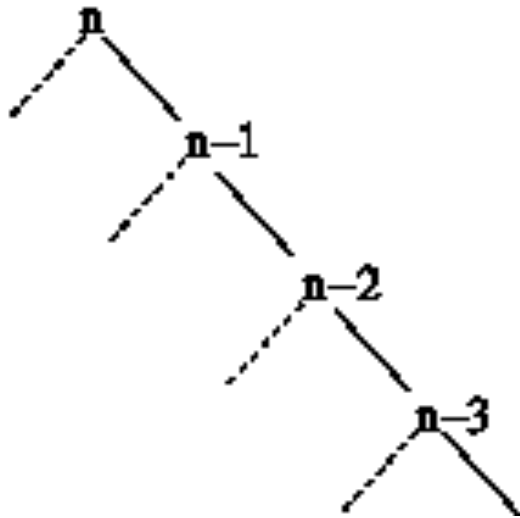
# Análise do Número de Comparações

- Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



# Análise do Número de Comparações

- **Pior caso:** Sistemáticamente, o pivô é o menor ou o maior elemento do *array*, eliminando um elemento em cada chamada do algoritmo



$$C(n) = \Theta(n^2)$$

- Existem diversas técnicas para **evitar** o pior caso como, por exemplo, fazer com que o pivô seja a mediana de três elementos do *array*

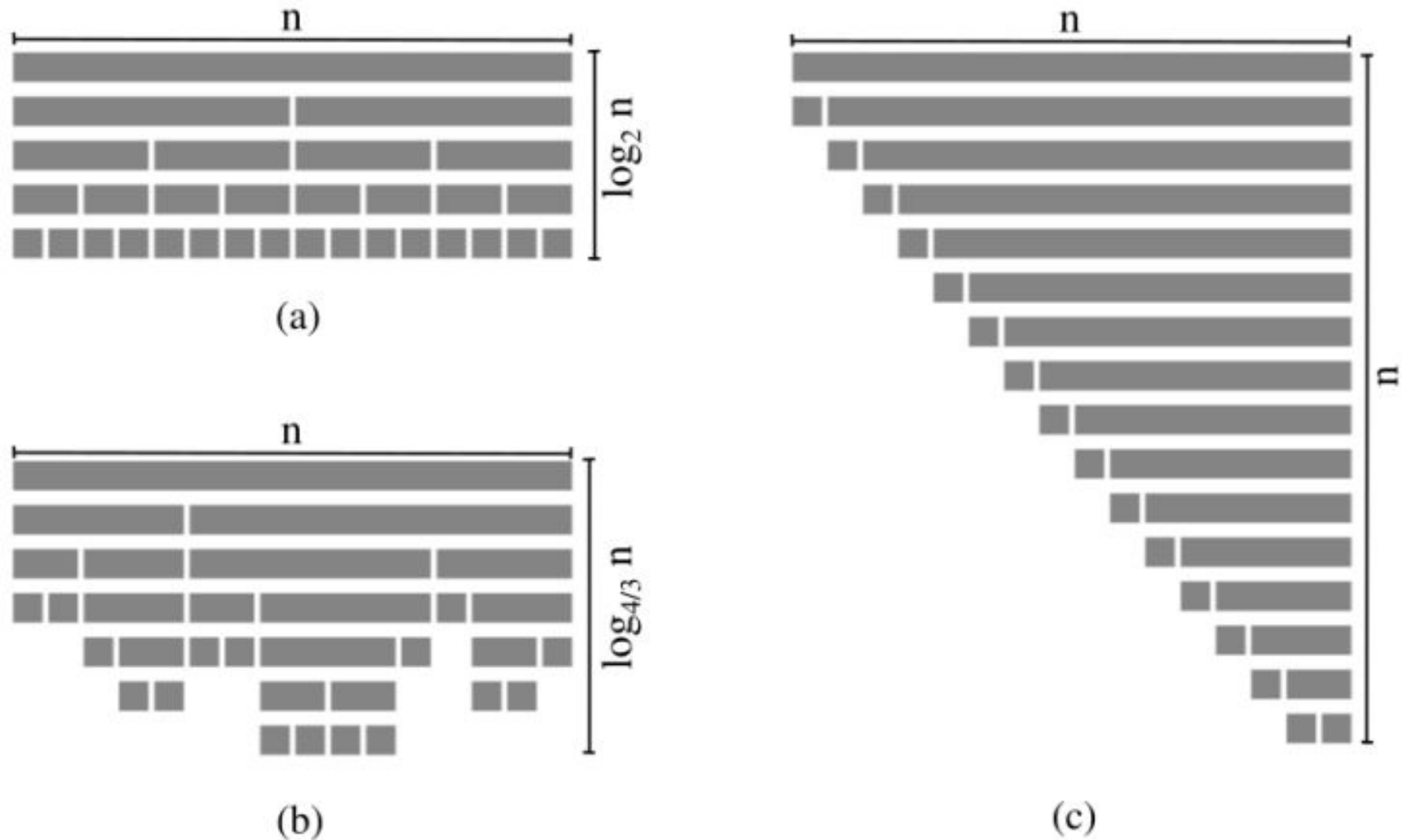
# Análise do Número de Comparações

- **Caso Médio:** Sedgewick e Flajolet (1996, p. 17):

$$C(n) \approx 1,386 * n * \lg(n) - 0,846 * n$$



# Análise do Número de Comparações




**Figura:** (a) Melhor caso. (b) Caso médio. (c) Pior caso.

# Análise do Número de Movimentações

- No **pior caso**, há  $\lceil n/2 \rceil$  trocas em cada execução da função de partição
- Nesse caso, o pivô está no meio do *array* e os elementos superiores estão sistematicamente no início da lista e; os inferiores, no fim
- Lembrando que em cada troca temos 3 movimentações

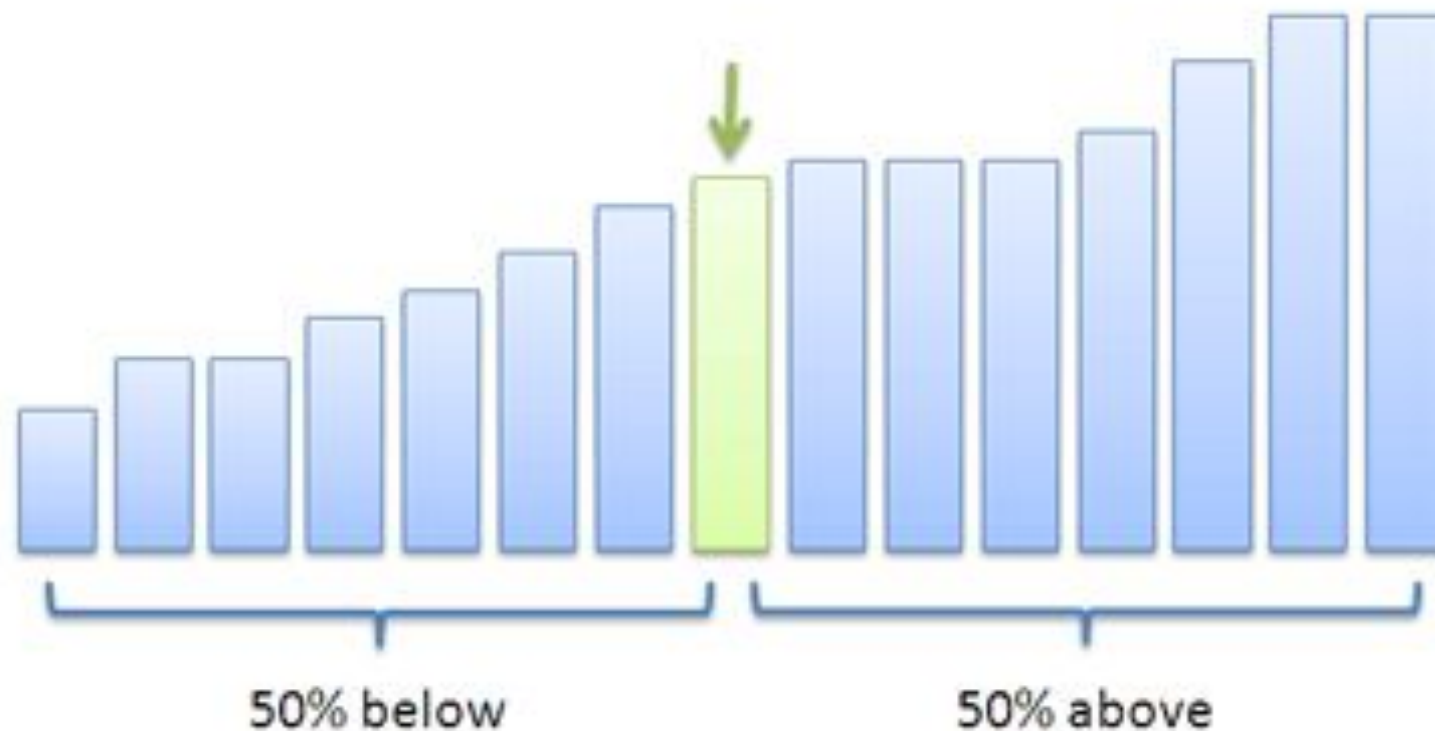
# Análise do Número de Movimentações

- No **melhor caso**, temos apenas a troca do ( $i == j$ ), logo, teremos uma troca (três movimentações) por chamada recursiva

- Funcionamento básico
- Algoritmo em C#
- Análise dos número de comparações e movimentações
- **Escolha do Pivô** 
- Conclusão

# Mediana, o Pivô Perfeito

## Median



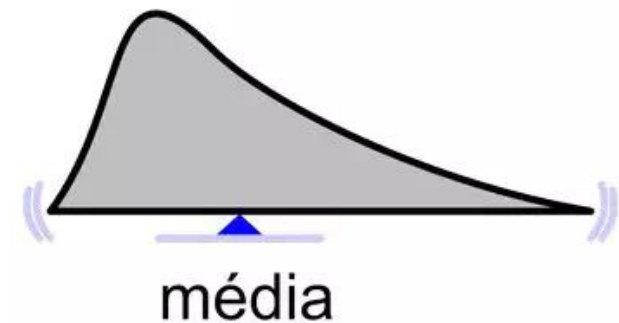
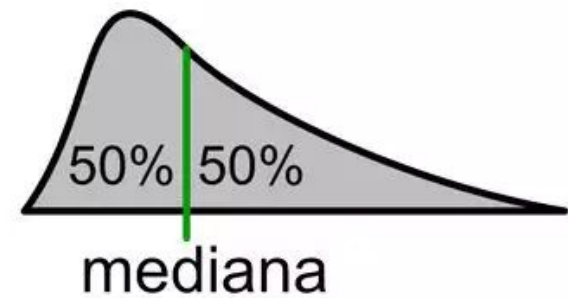
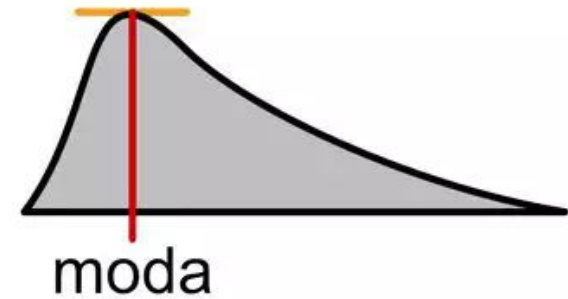
# Mediana depende da Ordenação



## Média como Pivô

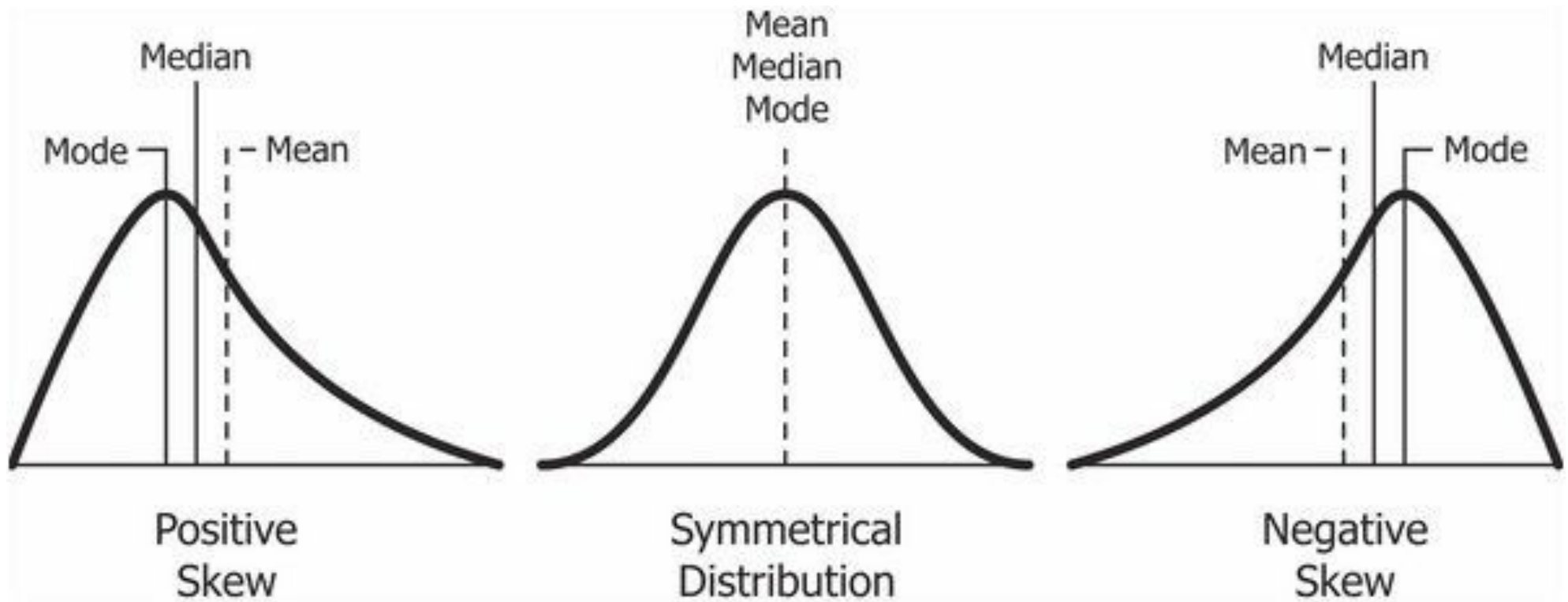
Moda: custo  $\Theta(n)$

Média: custo  $\Theta(n)$



# Informação Privilegiada

- Quando conhecemos a distribuição dos dados, podemos utilizar a estratégia de escolha do pivô mais adequada àquela distribuição





# Escolha Aleatória

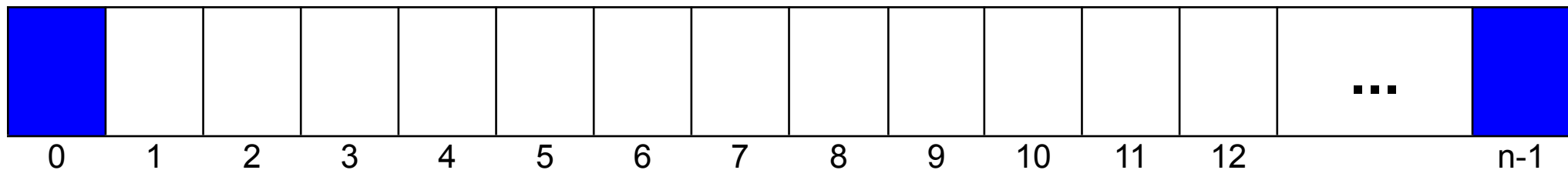
- Escolher aleatoriamente um item da lista como pivô
- Na média, teremos uma partição da lista na proporção:  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$
- Se a partição da lista ocorrer pelo menos metade das vezes nessa proporção, o tempo de execução esperado é  $\Theta(n \times \log n)$

# Mediana de Três

- Escolhemos três elementos aleatoriamente
- A mediana dos três será o pivô
- Esta estratégia aumenta ainda mais as chances de se obter o caso médio  $\Theta(n \times \log n)$
- Como existe um custo para se obter três elementos aleatórios e obter a mediana, essa estratégia é utilizada apenas em listas “grandes”. Em listas menores, a escolha aleatória simples é mais adequada

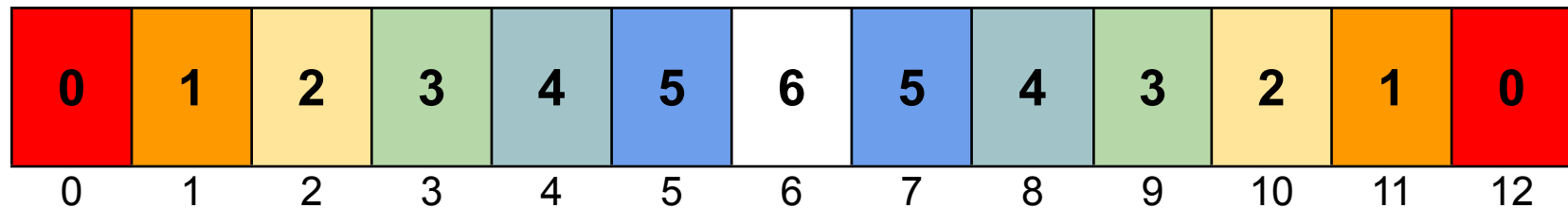
# Primeiro ou Último Elemento


- É uma técnica simples, contudo, se os elementos estiverem em ordem crescente ou decrescente teremos o **pior caso** do Quicksort



## Elemento do Meio

- É uma técnica simples em que o **pior caso** do Quicksort acontece se, sistematicamente, os elementos formarem uma espécie de triângulo



- Funcionamento básico
- Algoritmo em C#
- Análise dos número de comparações e movimentações
- Escolha do Pivô
- **Conclusão** 

# Conclusão

- A razão de sua velocidade é a simplicidade do seu anel interno
- Vantagens:
  - Extremamente eficiente
  - Necessita de apenas uma pequena pilha como memória auxiliar
  - Faz em média  $\Theta(n \times \lg(n))$  comparações

- Desvantagens:
  - Seu pior caso para comparações é quadrático
  - Sua implementação é delicada e difícil
  - Método não estável

## Exercício (1)

- Mostre todas as comparações e movimentações do algoritmo anterior para o *array* abaixo:

12	4	8	2	14	17	6	18	10	16	15	5	13	9	1	11	7	3
----	---	---	---	----	----	---	----	----	----	----	---	----	---	---	----	---	---