

# Unidade II:

## Somatórios ( $\Sigma$ )



**PUC Minas**

Instituto de Ciências Exatas e Informática  
Departamento de Ciência da Computação

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

- **Motivação**  $\Sigma$
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

# Principal Motivação na Ciência da Computação

- Levantamento de custo (e.g., tempo e memória) de algoritmos
- O custo de um algoritmo é a soma dos custos das suas operações

# Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos  $n$  primeiros números inteiros

## Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^n i$$

## Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

início

Matemática

$$\sum_{i=1}^n i$$

## Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^n i$$

condição de  
parada



## Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

termo

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

## Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {  
    int menor = i;  
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){  
        if (array[menor] > array[j]){  
            menor = j;  
        }  
    }  
    swap(menor, i);  
}
```

## Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?



```

for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}

```

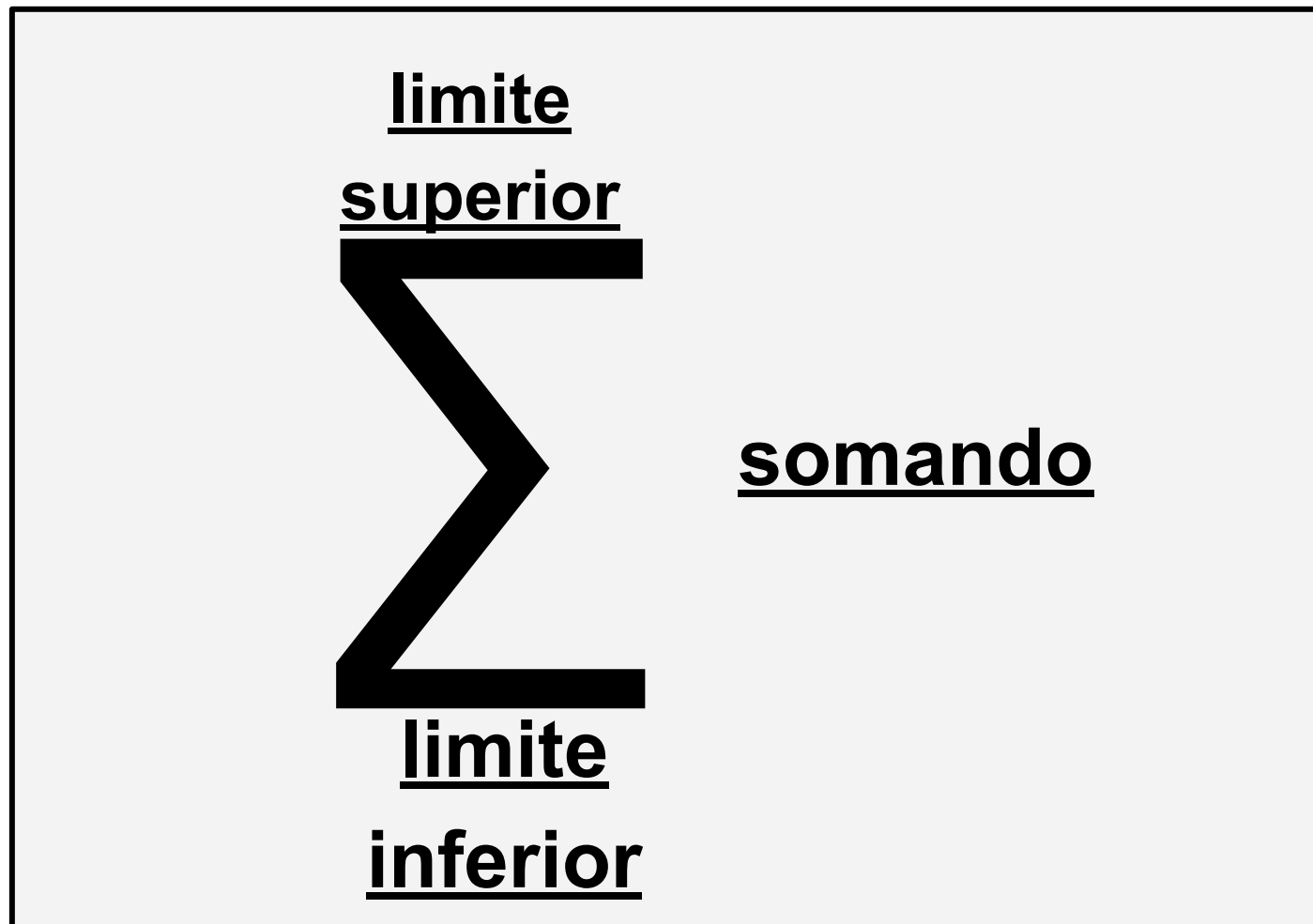
i	0	1	2	3	...	n-2
$c(i) = (n - (i+1))$	n-1	n-2	n-3	n-4	...	1

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

- Motivação
- **Notação**  $\Sigma$
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

# Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



# Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

limite superior

**$\Sigma$**

limite inferior

somando

Exemplo:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

# Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

A large, bold, black sigma symbol ( $\Sigma$ ) is centered within a light gray rectangular box. The symbol is stylized with thick strokes.

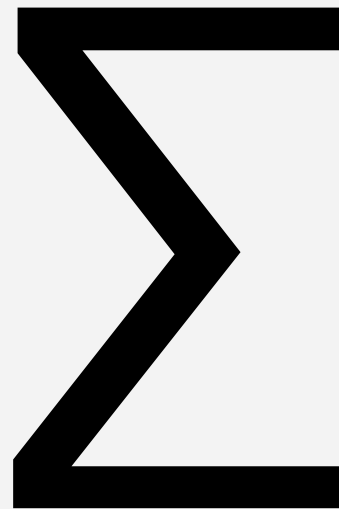
somando

os dois

limites

# Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



os dois

limites

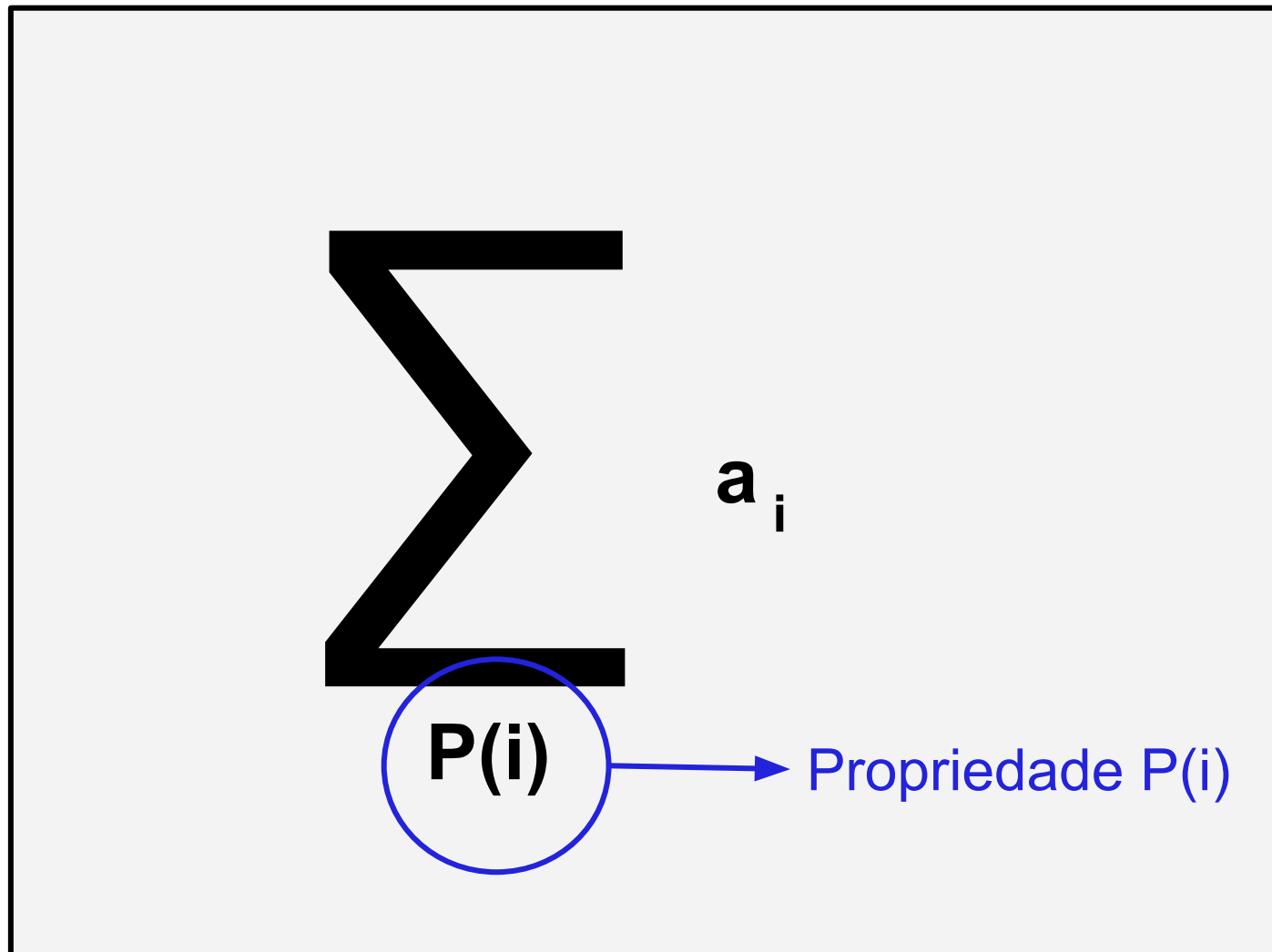
somando

Exemplo:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$$



## Notação Sigma



## Notação Sigma

Exemplo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ é ímpar}}} a_i = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_n \text{ (se } n \text{ é ímpar)}$$



**P(i)**

Propriedade P(i)

## Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} a_i = \sum_1^n a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=1}^{i \leq n} a_i$$

## Exercício Resolvido (3)

- Resolva os somatórios abaixo:

a)  $\sum_{n=1}^4 n^2 = ?$

d)  $\sum_{i=1}^3 (2i + x) = ?$

b)  $\sum_{i=1}^4 3i = ?$

e)  $\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = ?$

c)  $\sum_{i=1}^4 (3 - 2i) = ?$

f)  $\sum_{m=1}^4 8k - 6m = ?$

## Exercício Resolvido (3a)

$$\sum_{n=1}^4 n^2 = ?$$



Escolha 1 resposta:

☐  $1 + 2 + 3 + 4$

☐  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

☐  $(1 + 2 + 3 + 4)^2$

☐  $1^2 + 4^2$

## Exercício Resolvido (3a)

$$\sum_{n=1}^4 n^2 = ?$$



Escolha 1 resposta:

☐  $1 + 2 + 3 + 4$



☒  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

☐  $(1 + 2 + 3 + 4)^2$

☐  $1^2 + 4^2$

## Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{i=1}^4 3i = ?$$

## Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{i=1}^4 3i = ?$$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação  $\sum_{i=1}^n$  incrementa o índice  $i$ . Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação  $\sum_{i=1}^n$



## Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{i=1}^4 3i = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 4) = 30$$



## Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{i=1}^4 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^4 i = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$



## Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = ?$$

## Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = (3 - (2 \cdot 1)) + (3 - (2 \cdot 2)) + (3 - (2 \cdot 3)) + (3 - (2 \cdot 4)) = -8$$



## Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = \sum_{1}^4 3 - 2 \sum_{1}^4 i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$



## Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = 3 \sum_{1}^4 1 - 2 \sum_{1}^4 i = 3(1+1+1+1) - 2(1+2+3+4) = -8$$



## Exercício Resolvido (3d)

$$\sum_{i=1}^3 (2i + x) = ?$$

## Exercício Resolvido (3d)

$$\sum_{i=1}^3 (2i + x) = 2(1+2+3) + (x+x+x) = 12 + 3x$$





## Exercício Resolvido (3e)

$$\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = ?$$

## Exercício Resolvido (3e)



$$\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = 0 \cdot (-1) \cdot 5 +$$
$$1 \cdot 0 \cdot 4 +$$
$$2 \cdot 1 \cdot 3 +$$
$$3 \cdot 2 \cdot 2 +$$
$$4 \cdot 3 \cdot 1 +$$
$$5 \cdot 4 \cdot 0 = 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0 = 30$$

## Exercício Resolvido (3f)

$$\sum_{m=1}^4 8k - 6m = ?$$



Escolha 1 resposta:

☐  $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$

☐  $2 + 4 + 6 + 8$

☐  $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$

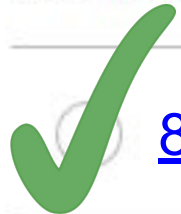
☐  $0 + 2 + 4 + 6$

## Exercício Resolvido (3f)

$$\sum_{m=1}^4 8k - 6m = ?$$



Escolha 1 resposta:



☒  $8k - 6$  +  $8k - 12$  +  $8k - 18$  +  $8k - 24$

☐  $2 + 4 + 6 + 8$

☐  $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$

☐  $0 + 2 + 4 + 6$

## Exercício Resolvido (4)

Podemos afirmar que  $\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_{i=2}^4 i \cdot (i-1) \cdot (5-i)$  ? Justifique.

## Exercício Resolvido (4)

Podemos afirmar que  $\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_{i=2}^4 i \cdot (i-1) \cdot (5-i)$  ? Justifique.

Sim, pois como os termos  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_5$  são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a  $(a_2 + a_3 + a_4)$



## Exercício Resolvido (5)

Considere a soma  $4 + 25 + 64 + 121$ .

Qual expressão é igual à soma acima?



Escolha todas as respostas aplicáveis:

---

☐  $\sum_{i=0}^3 (i^2 + 2i + 4)$

---

☐  $\sum_{i=0}^3 (3i + 2)^2$

---

☐ Nenhuma das anteriores

---

## Exercício Resolvido (5)

Considere a soma  $4 + 25 + 64 + 121$ .

Qual expressão é igual à soma acima?




Escolha todas as respostas aplicáveis:

☐  $\sum_{i=0}^3 (i^2 + 2i + 4)$

☒  $\sum_{i=0}^3 (3i + 2)^2 = (3 \times 0 + 2)^2 + (3 \times 1 + 2)^2 + (3 \times 2 + 2)^2 + (3 \times 3 + 2)^2 = 4 + 25 + 64 + 121$

☐ Nenhuma das anteriores



- Motivação
- Notação
- **Relações de Recorrência e Somas Múltiplas** 
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

# Relações de Recorrência

- Assunto discutido na disciplina FPAA
- Técnica usada para calcular somas
- Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \text{ para } n > 0 \end{array} \right.$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fib}(0) = 1 \\ \text{fib}(1) = 1 \\ \text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) \end{array} \right.$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fib}(0) = 1 \\ \text{fib}(1) = 1 \\ \text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) \end{array} \right.$$

i	0	1	2	3	4	5	6	
fib(i)	1	1	2	3	5	8	13	...

# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{cases}$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = ?$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = 4 \cdot \text{fat}(3)$$

$$\text{fat}(3) = 3 \cdot \text{fat}(2)$$

$$\text{fat}(2) = 2 \cdot \text{fat}(1), \text{ contudo, sabemos que } \text{fat}(1) = 1$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = 4 \cdot \text{fat}(3)$$

$$\text{fat}(3) = 3 \cdot \text{fat}(2)$$

$$\text{fat}(2) = 2 \cdot 1$$



# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = 4 \cdot \text{fat}(3)$$

$$\text{fat}(3) = 3 \cdot 2$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = 4 \cdot 6$$

# Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = 24$$

# Somas Múltiplas

- Os termos de um somatório podem ser especificados por dois ou mais índices, por exemplo:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_i \cdot b_j = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 + \\ a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 + \\ a_3 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

# Somas Múltiplas

- Outra forma de representação é utilizando dois somatórios, por exemplo:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_i b_j = \left( \sum_{1 \leq i \leq 3} a_i \right) \left( \sum_{1 \leq j \leq 3} b_j \right)$$

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas**  $\Sigma$
- Alguns Métodos Gerais

## Frase de [GRAHAM, 95]

*A chave do sucesso na manipulação de somas está na habilidade de transformar uma soma em outra mais simples ou mais perto de algum objetivo*



- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas**  $\Sigma$
- Alguns Métodos Gerais
  - Regras Básicas de Transformação
  - Propriedades



- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas**  $\Sigma$
- Alguns Métodos Gerais
  - **Regras Básicas de Transformação**
  - Propriedades

# Regras Básicas de Transformação

- Distributividade
- Associatividade
- Comutatividade

## Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Por exemplo, temos:

$$c \cdot a_{-1} + c \cdot a_0 + c \cdot a_1 = c \cdot (a_{-1} + a_0 + a_1)$$

## Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Outro exemplo, foi dado no Exercício Resolvido 3b e repetido abaixo:

$$\sum_{i=1}^4 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^4 i = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$

## Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Também se aplica à divisão

$$\sum_{i \in I} \frac{a_i}{c} = \frac{1}{c} \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

## Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Por exemplo, temos:

$$(a_{-1} + b_{-1}) + (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) = (a_{-1} + a_0 + a_1) + (b_{-1} + b_0 + b_1)$$

## Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Também se aplica à subtração:

$$\sum_{i \in I} (a_i - b_i) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i$$

## Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Outro exemplo, foi dado no Exercício Resolvido 3c e repetido abaixo:

$$\sum_{i=1}^4 (3 - 2i) = \sum_{i=1}^4 3 - 2 \sum_{i=1}^4 i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$



## Comutatividade

- Permite colocar os termos em qualquer ordem

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

- Por exemplo, temos:

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_{-1} + a_0$$

# Exemplo de Aplicação da Comutatividade

- Os programas abaixo apresentam o mesmo resultado devido a regra de comutatividade

```
for(int i = 0; i < n; i++)  
    for(int j = 0; j < n; j++)  
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int j = 0; j < n; j++) //invertendo os fors  
    for(int i = 0; i < n; i++)  
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int i = n-1; i >= 0; i--) //decrementando  
    for(int j = n-1; j >= 0; j--)  
        soma += mat[i][j];
```

# Resumo das Regras Básicas de Transformação

- Distributividade**

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Associatividade**

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Comutatividade**

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

## Exercício Resolvido (6)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^n a_i + \sum_{1}^n b_i$$

## Exercício Resolvido (6)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_3^n a_i + \sum_1^n b_i$$



$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_3^n (a_i + b_i)$$

$$= -a_1 - a_2 + \sum_1^n (a_i + b_i)$$

## Exercício Resolvido (7)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a) \quad ( \quad ) \quad \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b) \quad ( \quad ) \quad \sum_{p=0}^{1000} (3 + p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c) \quad ( \quad ) \quad \sum_{\ell=1}^n (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^n \ell;$$

$$d) \quad ( \quad ) \quad \sum_{k=0}^{12} k^p = \left( \sum_{k=0}^{12} k \right)^p ;$$

$$e) \quad ( \quad ) \quad \sum_{t=8}^{32} (3 + t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

## Exercício Resolvido (7)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) (✓)  $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$

b) (✗)  $\sum_{p=0}^{1000} (3 + p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$

c) (✓)  $\sum_{\ell=1}^n (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^n \ell;$

d) (✗)  $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left( \sum_{k=0}^{12} k \right)^p ;$

e) (✓)  $\sum_{t=8}^{32} (3 + t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$

## Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta, use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$



## Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$



Primeiro somatório:  $(3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)$

No segundo,  $(3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4])$

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

## Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$



Primeiro somatório:  $(3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)$

No segundo,  $(3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4])$

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

Observação:  $(n-i)$  “simula” um decremento no valor de  $i$

## Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma  $S_n$  dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

## Exercício Resolvido (9)

**Recordando Progressão Aritmética**

- Uma PA é uma sequência cuja razão (diferença) entre dois termos consecutivos é constante. Por exemplo, 5, 7, 9, 11, 13, ...
- Cada termo da PA será  $a_i = a + b.i$ , onde **a** é o termo inicial; **b**, a razão; e **i**, a ordem do termo
- Na sequência acima, **a** e **b** são iguais a 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: (5 + 2.0), (5 + 2.1), (5 + 2.2), (5 + 2.3), (5 + 2.4), ...

## Exercício Resolvido (9)

**Recordando Progressão Aritmética**

- **Exercício**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, ...

## Exercício Resolvido (9)

**Recordando Progressão Aritmética**

- **Exercício**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, ...

Os valores a e b são 1 e 3, respectivamente, logo, temos:

$$1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$1 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$1 + 3 \cdot 2 = 7$$

$$1 + 3 \cdot 3 = 10$$

$$1 + 3 \cdot 4 = 13$$

...

## Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma  $S_n$  dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

## Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma  $S_n$  dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**



$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando  $i$  por  $(n-i)$ :

$$S_n = \sum_{0 \leq (n-i) \leq n} [a + b.(n-i)]$$



## Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma  $S_n$  dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**



$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando  $i$  por  $(n-i)$ :

$$S_n = \sum_{0 \leq (n-i) \leq n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

## Exercício Resolvido (9)

- Como  $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b \cdot i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b \cdot n - b \cdot i]$ , podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b \cdot i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b \cdot n - b \cdot i]$$



## Exercício Resolvido (9)

- Como  $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$ , podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$



- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i + a + b.n - b.i]$$

## Exercício Resolvido (9)

- Como  $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$ , podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$



- Aplicando associatividade, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i + a + b.n - b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n]$$

- **Simplificando**, temos

## Exercício Resolvido (9)

- **Usando distributividade**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



Lembre que  $[2.a + b.n]$   
não depende de  $i$ , logo,  
pode “sair” do somatório

## Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



$(n+1)$

## Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$



## Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$



- **Dividindo por dois**, temos:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$



## Exercício Resolvido (10)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{0 \leq i \leq n} i$ . Em tempo, esse é o somatório de Gauss.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b \cdot i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$

## Exercício Resolvido (10)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{0 \leq i \leq n} i$ . Em tempo, esse é o somatório de Gauss.

Resposta: Nesse caso, temos uma progressão cujos valores a e b são zero e um, respectivamente

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [0 + 1 \cdot i] = \frac{(2 \cdot 0 + 1 \cdot n) \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$



## Exercício Resolvido (11)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos  $n$  primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

## Exercício Resolvido (11)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos  $n$  primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

```
int somatorio(int n){  
    return ((n * (n+1))/2);  
}
```



# Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

## Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Aplicando associatividade, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$



## Exercício Resolvido (12)

• O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

• Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

$n \cdot (n-1)$        $1 \cdot (n-1)$  ✓

## Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - (n-1)$$





## Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Sabendo que:

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$



## Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$



## Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) &= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) \\ &= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2} \end{aligned}$$



## Exercício Resolvido (12)

• O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

• Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) &= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) \\
 &= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2} \\
 &= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2}
 \end{aligned}$$



## Exercício Resolvido (12)

• O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza  $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$  comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

• Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) &= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) \\
 &= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2} \\
 &= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2} \\
 &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)
 \end{aligned}$$



## Exercício Resolvido (13)

- Justifique as expressões abaixo:

a) 
$$\sum_{1}^n i = \sum_{0}^n i$$

b) 
$$\sum_{1}^n a_i \neq \sum_{0}^n a_i$$

c) 
$$\sum_{1}^n a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$$

## Exercício Resolvido (13a)

- Justifique as expressões abaixo:

a)

$$\sum_{1}^n i = \sum_{0}^n i$$



**Resposta:** Os dois somatórios são iguais, entretanto, o segundo faz uma soma a mais que é com seu primeiro termo cujo valor é zero.

## Exercício Resolvido (13b)

- Justifique as expressões abaixo:



b)

$$\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{i=0}^n a_i$$

**Resposta:** Os somatórios são diferentes, porque, não necessariamente, o primeiro termo ( $a_0$ ) é igual a zero



## Exercício Resolvido (13c)

- Justifique as expressões abaixo:



c)

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

**Resposta:** O resultado dos dois somatórios é  $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n)$

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Encontrar fórmula fechada**

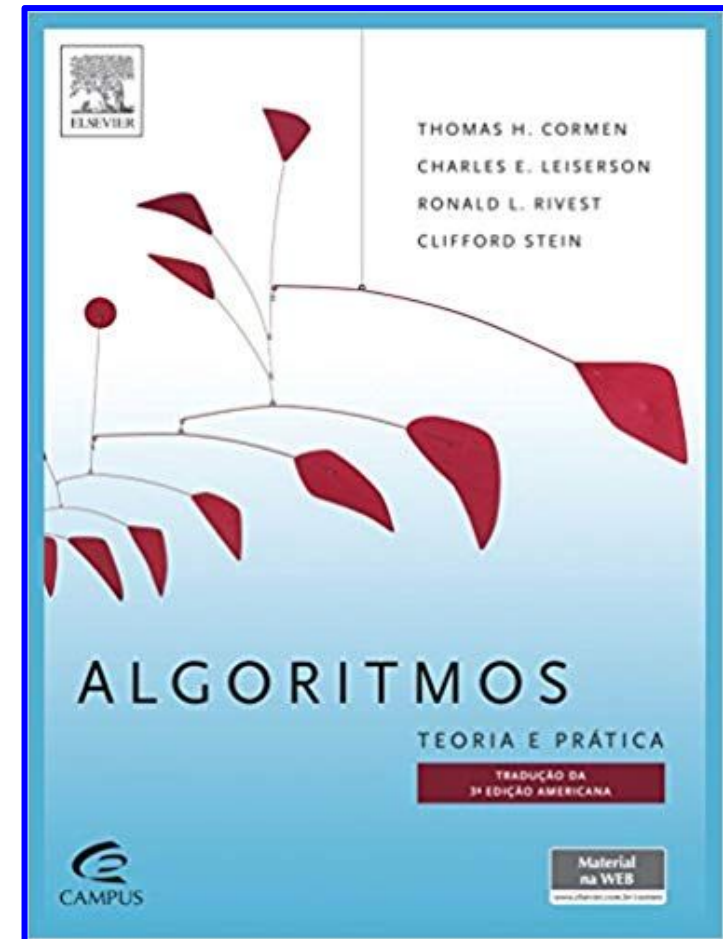
- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Alguns Métodos Gerais**  $\Sigma$

- **Procure!!!**
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- Perturbe a soma



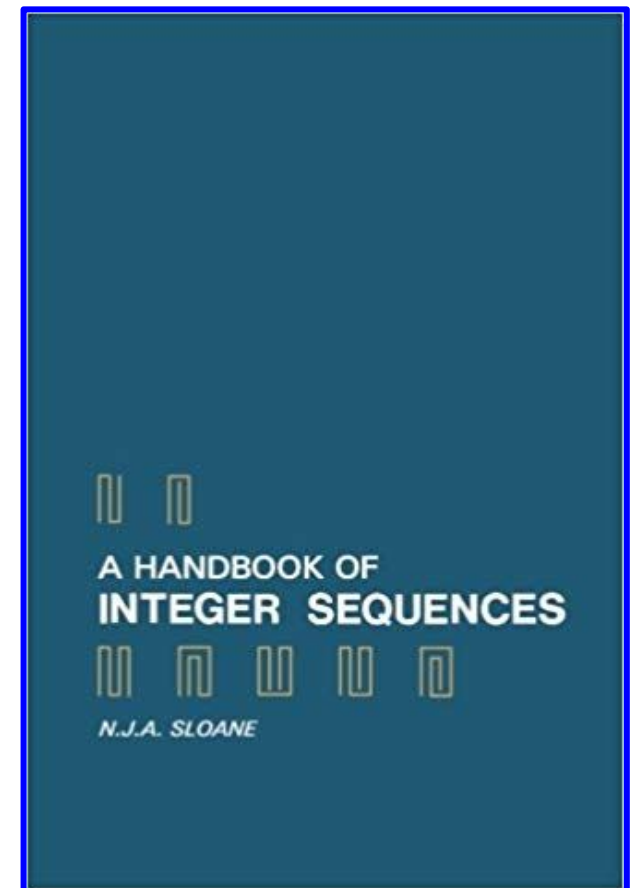
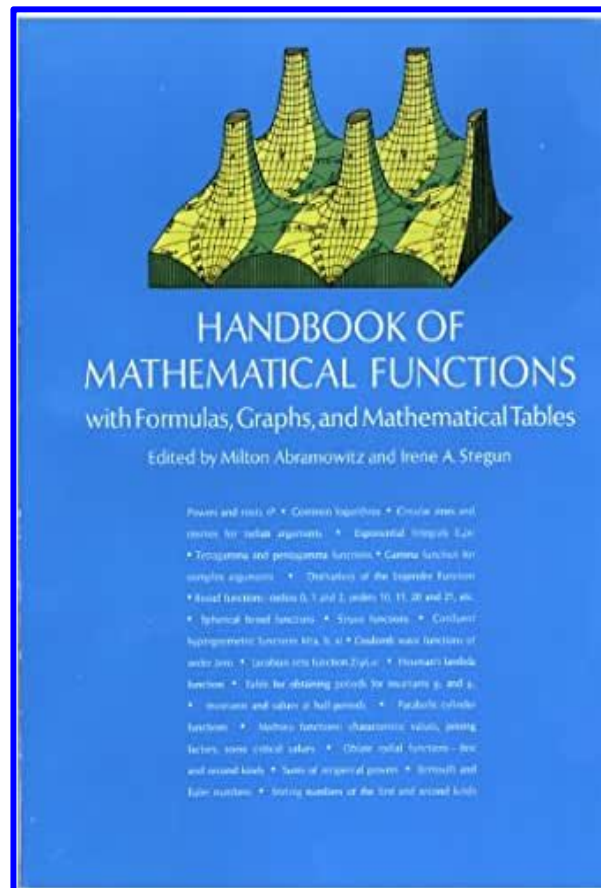
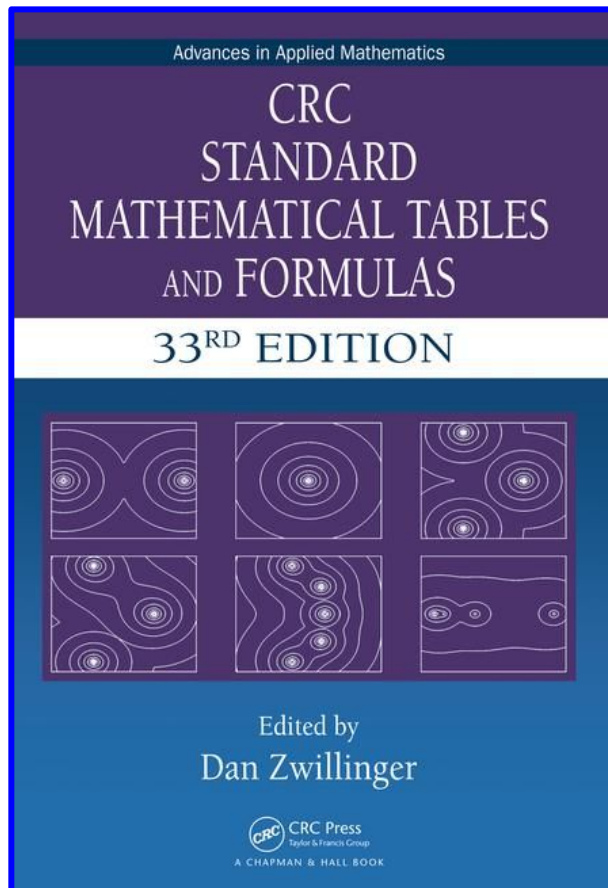
# Método Procure!!!

- Possivelmente, todas as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure



# Método Procure!!!

- Possivelmente, todos as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure



# Somatório do Quadrado Perfeito

- Este material explica cada método mostrando a fórmula do somatório do quadrado perfeito dos ***n*** primeiros inteiros

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

<b>n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>...</b>
<b>n<sup>2</sup></b>	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	
<b>S<sub>n</sub></b>	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	