Unidade II:
Somatórios (∑)

PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Agenda

- **Motivação** ∑
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Principal Motivação na Ciência da Computação

- Levantamento de custo (e.g., tempo e memória) de algoritmos

- O custo de um algoritmo é a soma dos custos das suas operações

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i = 1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

início

Matemática

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

condição de parada

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

termo

Matemática

$$\sum_{i = 1}^{i \le n} i$$

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
        int menor = i;
        for (int j = (i + 1); j < n; j++){
                if (array[menor] > array[j]){
                        menor = j;
                }
        }
        swap(menor, i);
}
```

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

✓

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
        int menor = i;
        for (int j = (i + 1); j < n; j++){
                if (array[menor] > array[j]){
                        menor = j;
                }
        }
        swap(menor, i);
}
```

i	0	1	2	3	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	n-4		1

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Agenda

- Motivação
- **Notação** ∑
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\underline{\textbf{limite inferior}}}^{\underline{\textbf{limite superior}}} \underline{\textbf{somando}}$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\underline{\text{limite inferior}}}^{\underline{\text{limite superior}}} \underline{\text{somando}}$$

Exemplo:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

• Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum \quad \underline{\textbf{somando}}$$

<u>os dois limites</u>

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum \underline{\textbf{somando}}$$

os dois limites

Exemplo:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

$$\sum_{P(i)} a_i$$

Propriedade P(i)

Notação Sigma

Exemplo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ é ímpar}}} a_i = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_n \quad (\text{se } n \text{ é ímpar})$$

$$\sum_{P(i)}$$

P(i) → Propriedade P(i)

Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \le n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i = \sum_{1 \le i \le n} a_i = \sum\nolimits_{i=1}^{i \le n} a_i$$

Exercício Resolvido (3)

- Resolva os somatórios abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$

b) $\sum_{1}^{4} 3i = ?$

c) $\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = ?$

d) $\sum_{1}^{3} (2i + x) = ?$

e) $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = ?$

f) $\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$

Exercício Resolvido (3a)

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- ○ $1 + 2 + 3 + 4$
- ○ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- ○ $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- ○ $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (3a)

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- $1 + 2 + 3 + 4$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i \;=\; ?$$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i = ?$$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação $\sum_{1}^{n}$ incrementa o índice i. Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação $\sum_{i=1}^{n}$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i = (3 \,.\, 1) + (3 \,.\, 2) + (3 \,.\, 3) + (3 \,.\, 4) = 30$$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i = 3 . \sum_{1}^{4} i = 3 . (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = ?$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = (3 - (2 \;.\; 1)) + (3 - (2 \;.\; 2)) + (3 - (2 \;.\; 3)) + (3 - (2 \;.\; 4)) = -8$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = \sum_{1}^{4} 3 - 2\sum_{1}^{4} i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = 3\sum_{1}^{4} 1 - 2\sum_{1}^{4} i = 3(1+1+1+1) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Exercício Resolvido (3d)

$$\sum_{1}^{3} (2i + x) = ?$$

Exercício Resolvido (3d)

$$\sum_{1}^{3} (2i + x) = 2(1+2+3) + (x+x+x) = 12 + 3x$$

Exercício Resolvido (3e)

$$\sum_{0}^{5} i \, . \, (i-1) \, . \, (5-i) \; = \; ?$$

Exercício Resolvido (3e)

$$\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \begin{array}{l} 0 \,.\, (-1) \,.\, 5 \;+ \\ 1 \,.\, 0 \,.\, 4 \;+ \\ 2 \,.\, 1 \,.\, 3 \;+ \\ 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \;+ \\ 4 \,.\, 3 \,.\, 1 \;+ \\ 5 \,.\, 4 \,.\, 0 = 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0 = 30 \end{array}$$

Exercício Resolvido (3f)

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- ○ $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$
- ○ $2 + 4 + 6 + 8$
- ○ $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- ○ $0 + 2 + 4 + 6$

Exercício Resolvido (3f)

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Escolha 1 resposta:

- ✓ 8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24
- $2 + 4 + 6 + 8$
- $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- $0 + 2 + 4 + 6$

Exercício Resolvido (4)

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? Justifique.

Exercício Resolvido (4)

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? Justifique.

Sim, pois como os termos a_0, a_1 e a_5 são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a $(a_2 + a_3 + a_4)$

Exercício Resolvido (5)

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?

Khan Academy

Escolha todas as respostas aplicáveis:

- $\sum_{i=0}^{3} (i^2 + 2i + 4)$
- $\sum_{i=0}^{3} (3i + 2)^2$
- Nenhuma das anteriores

Exercício Resolvido (5)

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?

Escolha todas as respostas aplicáveis:

- $\sum_{i=0}^{3} (i^2 + 2i + 4)$
- ✓ $\sum_{i=0}^{3} (3i + 2)^2$ = $(3x0+2)^2+(3x1+2)^2+(3x2+2)^2+(3x3+2)^2$ = 4+25+64+121
- Nenhuma das anteriores

Agenda

- Motivação
- Notação
- **Relações de Recorrência e Somas Múltiplas** ∑
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Relações de Recorrência

- Assunto discutido na unidade 2
- Técnica usada para calcular somas
- Exemplo

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \text{ para } n > 0 \end{cases}$$

Exemplo de Relação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$
\begin{cases}
fib(0) = 1 \\
fib(1) = 1 \\
fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)
\end{cases}
$$

Exemplo de Relação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$
\begin{cases}
fib(0) = 1 \\
fib(1) = 1 \\
fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)
\end{cases}
$$

i	0	1	2	3	4	5	6	...
fib(i)	1	1	2	3	5	8	13	

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \,.\, fat(n-1) \end{cases}$$

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \,.\, fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = ?

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \,.\, fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = 4 . fat(3)

fat(3) = 3 . fat(2)

fat(2) = 2 . fat(1), contudo, sabemos que fat(1) = 1

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \,.\, fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = 4 . fat(3)

fat(3) = 3 . fat(2)

fat(2) = 2 . 1

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \,.\, fat(n-1) \end{cases}$$

$fat(4) = 4 \,.\, fat(3)$

$fat(3) = 3 \,.\, 2$

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \;.\; fat(n-1) \end{cases}$$

$fat(4) = 4 \;.\; 6$

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$
\begin{cases}
fat(1) = 1 \\
fat(n) = n \,.\, fat(n-1)
\end{cases}
$$

$fat(4) = 24$

Somas Múltiplas

- Os termos de um somatório podem ser especificados por dois ou mais índices, por exemplo:

$$\sum_{1 \leq i,\, j \leq 3} a_i.b_j = a_1.b_1 + a_1.b_2 + a_1.b_3 + a_2.b_1 + a_2.b_2 + a_2.b_3 + a_3.b_1 + a_3.b_2 + a_3.b_3$$

Somas Múltiplas

- Outra forma de representação é utilizando dois somatórios, por exemplo:

$$\boxed{\sum_{1 \le i,\, j \le 3} a_i b_j = \left(\sum_{1 \le i \le 3} a_i\right)\left(\sum_{1 \le j \le 3} b_j\right)}$$

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

Frase de [GRAHAM, 95]

A chave do sucesso na manipulação de somas está na habilidade de transformar uma soma em outra mais simples ou mais perto de algum objetivo

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
  - Regras Básicas de Transformação
  - Propriedades
- Alguns Métodos Gerais

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** $\sum$
- Alguns Métodos Gerais

- **Regras Básicas de Transformação**
- Propriedades

Regras Básicas de Transformação

- Distributividade
- Associatividade
- Comutatividade

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i}$$

- Por exemplo, temos:

$$c.a_{-1} + c.a_0 + c.a_1 = c.(a_{-1} + a_0 + a_1)$$

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i}$$

- Outro exemplo, foi dado no Exercício Resolvido 3b e repetido abaixo:

$$\sum_{1}^{4} 3i = 3 \,.\, \sum_{1}^{4} i = 3 \,.\, (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i}$$

- Também se aplica à divisão

$$\boxed{\sum_{i \in I} \frac{a_i}{c} = \frac{1}{c} \,.\, \sum_{i \in I} a_i}$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

- Por exemplo, temos:

$$(a_{-1}+ b_{-1}) + (a_0+ b_0) + (a_1+ b_1) = (a_{-1}+ a_0+ a_1) + (b_{-1}+ b_0+ b_1)$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

- Também se aplica à subtração:

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i - b_i) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i}$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

- Outro exemplo, foi dado no Exercício Resolvido 3c e repetido abaixo:

$$\sum_{1}^{4}(3 - 2i) = \sum_{1}^{4} 3 - 2\sum_{1}^{4} i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Comutatividade

- Permite colocar os termos em qualquer ordem

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}}$$

- Por exemplo, temos:

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_{-1} + a_0$$

Exemplo de Aplicação da Comutatividade

- Os programas abaixo apresentam o mesmo resultado devido a regra de comutatividade

```
for(int i = 0; i < n; i++)
    for(int j = 0; j < n; j++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int j = 0; j < n; j++)  //invertendo os fors
    for(int i = 0; i < n; i++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int i = n-1; i >= 0; i--) //decrementando
    for(int j = n-1; j >= 0; j--)
        soma += mat[i][j];
```

Resumo das Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**

$$\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

- **Associatividade**

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- **Comutatividade**

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_{3}^{n} (a_i + b_i)$$

$$= -a_1 - a_2 + \sum_{1}^{n} (a_i + b_i)$$

Exercício Resolvido (7)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b)\ (\quad)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c)\ (\quad)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3\sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

$$d)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p;$$

$$e)\ (\quad)\ \sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

Exercício Resolvido (7)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a)\ (✓)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b)\ (✗)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c)\ (✓)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3\sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

$$d)\ (✗)\ \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p;$$

$$e)\ (✓)\ \sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta, use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.(4-i))$$

Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.(4-i))$$

Primeiro somatório: (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)

No segundo, (3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4])

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

✓

Primeiro somatório: (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)

No segundo, (3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4])

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

Observação: (n-i) "simula" um decremento no valor de i

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a + b.i)$$

Exercício Resolvido (9)

• A

s

Recordando Progressão Aritmética

• Uma PA é uma sequência cuja razão (diferença) entre dois termos consecutivos é constante. Por exemplo, 5, 7, 9, 11, 13, …

• Cada termo da PA será $\mathbf{a_i = a + b.i}$, onde **a** é o termo inicial; **b**, a razão; e, **i**, a ordem do termo

• Na sequência acima, **a** e **b** são iguais a 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: (5 + 2.0), (5 + 2.1), (5 + 2.2), (5 + 2.3), (5 + 2.4), …

Exercício Resolvido (9)

Recordando Progressão Aritmética

- **<u>Exercício</u>**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Exercício Resolvido (9)

Recordando Progressão Aritmética

- **Exercício**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Os valores a e b são 1 e 3, respectivamente, logo, temos:

$1 + 3 . 0 = 1$
$1 + 3 . 1 = 4$
$1 + 3 . 2 = 7$
$1 + 3 . 3 = 10$
$1 + 3 . 4 = 13$
...

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por ***(n-i)***:

$$S_n = \sum_{0 \le (n-i) \le n} [a + b.(n-i)]$$

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por ***(n-i)***:

$$S_n = \sum_{0 \le (n-i) \le n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (9)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]}$$

Exercício Resolvido (9)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i + a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (9)

- Como $S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]}$$

- Aplicando associatividade, podemos combinar os dois somatórios:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n]}$$

- **Simplificando**, temos

Exercício Resolvido (9)

- **Usando distributividade**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \,.\sum_{0 \le i \le n} 1$$

Lembre que [2.a + b.n] não depende de i, logo, pode “sair” do somatório

Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \, . \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$\sum_{0 \le i \le n} 1 = (n+1)$$

Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

- **Dividindo por dois**, temos:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (10)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{0 \le i \le n} i$. Em tempo, esse é o somatório de Gauss.

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (10)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{0 \leq i \leq n} i$. Em tempo, esse é o somatório de Gauss.

Resposta: Nesse caso, temos uma progressão cujos valores a e b são zero e um, respectivamente

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [0 + 1.i] = \frac{(2 \,.\, 0 + 1 \,.\, n) \,.\, (n+1)}{2} = \frac{n \,.\, (n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (11)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Exercício Resolvido (11)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

```
int somatorio(int n){
    return ((n * (n+1))/2);
}
```

✓

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Aplicando associatividade, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n \quad - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i \quad - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n-2} n}_{n\ .\ (n-1)} - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n-2} 1}_{1\ .\ (n-1)}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \sum_{0 \le i \le n-2} i - (n-1)$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Sabendo que:

$$\sum_{0 \leq i \leq \mathbf{n}} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{\mathbf{2}} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{\mathbf{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)$$

Exercício Resolvido (13)

- Justifique as expressões abaixo:

a) $$\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$$

b) $$\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$$

c) $$\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$$

Exercício Resolvido (13a)

- Justifique as expressões abaixo:

a) $$\boxed{\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i}$$

✓

Resposta: Os dois somatórios são iguais, entretanto, o segundo faz uma soma a mais que é com seu primeiro termo cujo valor é zero.

Exercício Resolvido (13b)

- Justifique as expressões abaixo:

✓

b) $$\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$$

Resposta: Os somatórios são diferentes, porque, não necessariamente, o primeiro termo (a_0) é igual a zero

Exercício Resolvido (13c)

- Justifique as expressões abaixo:

✓

Resposta: O resultado dos dois somatórios é $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n)$

c) $$\boxed{\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}}$$

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Encontrar fórmula fechada**

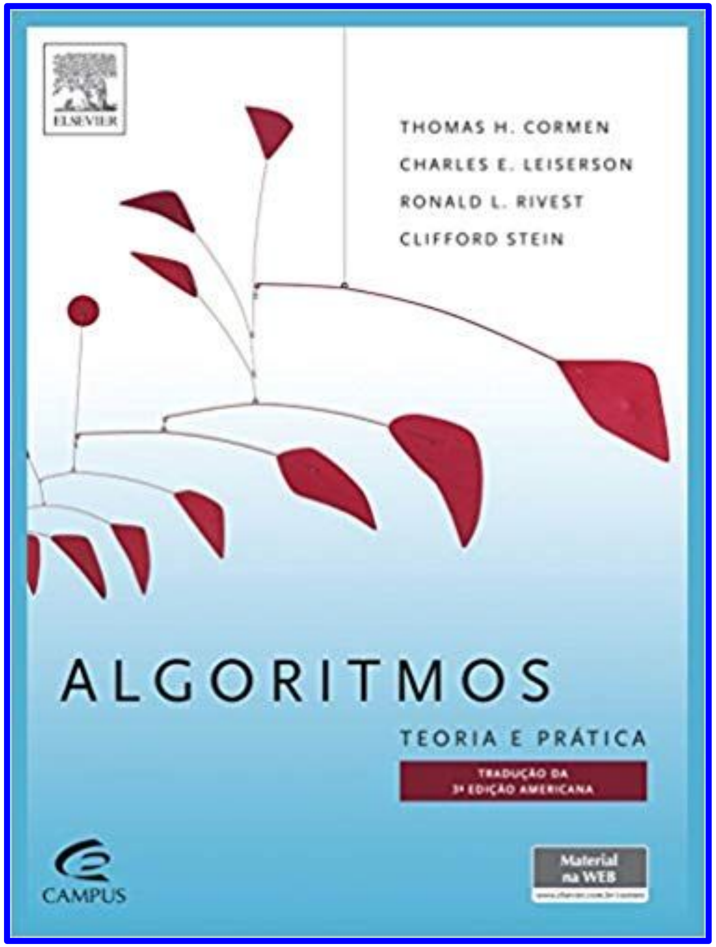
Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Alguns Métodos Gerais** ∑

- **Procure!!!**

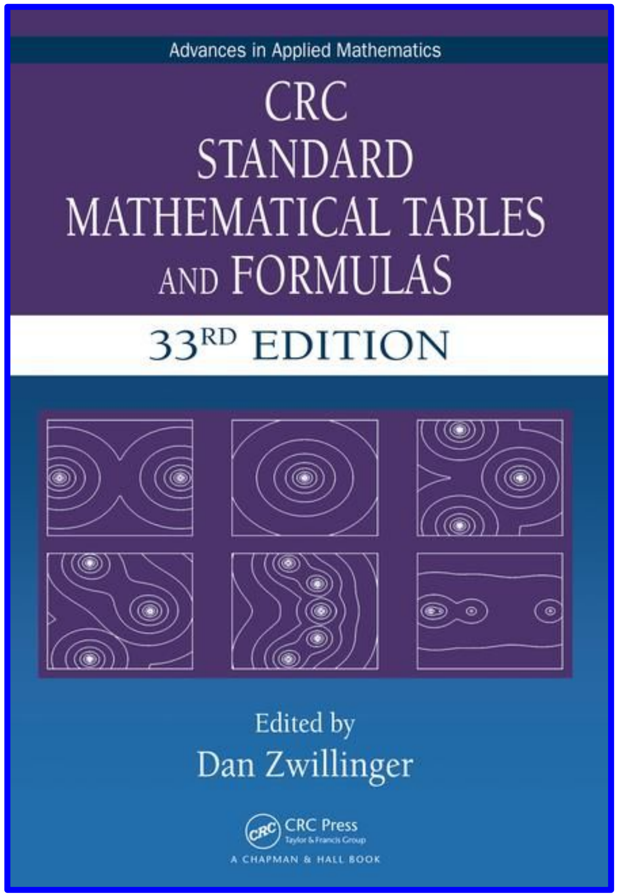
Método Procure!!!

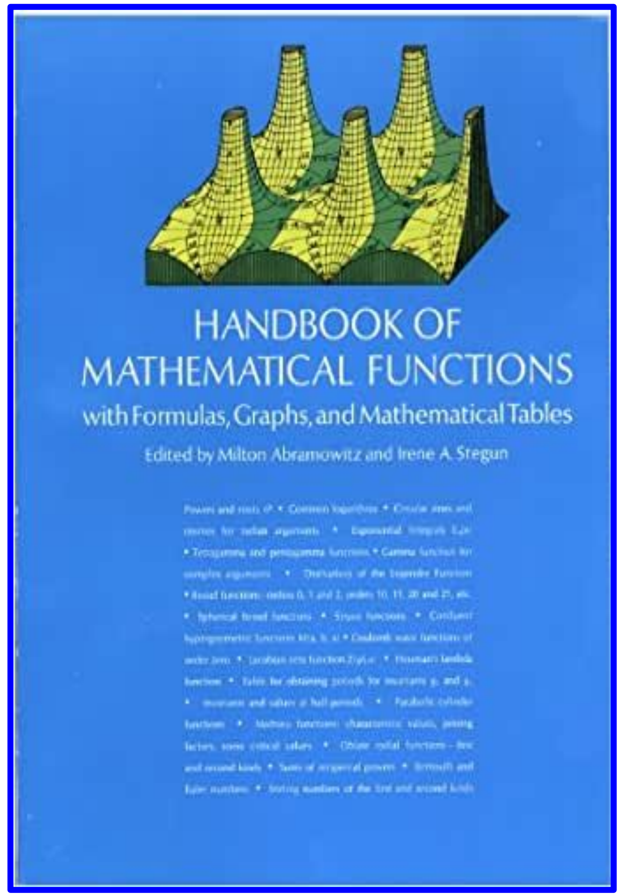
- Possivelmente, todas as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure

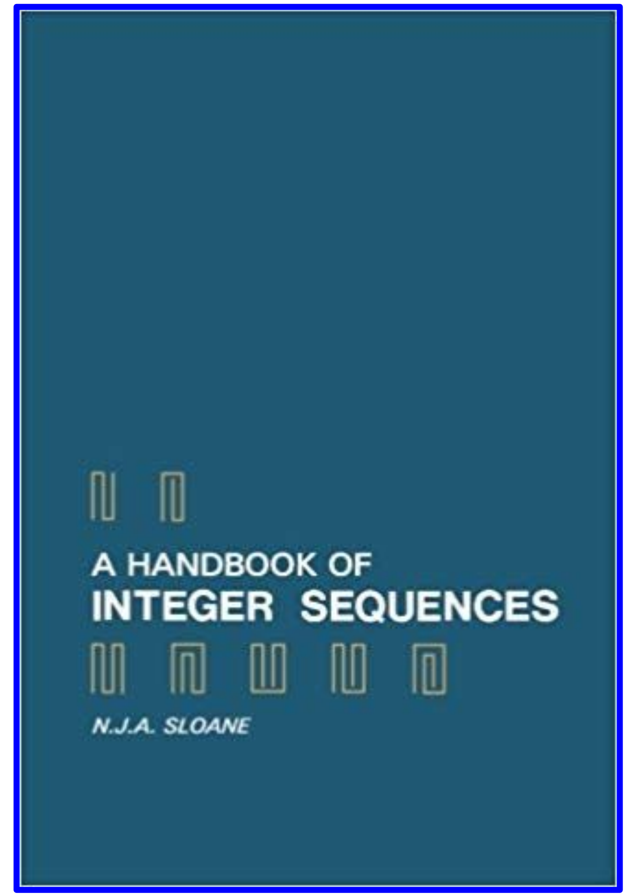


Método Procure!!!

- Possivelmente, todos as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure







Somatório do Quadrado Perfeito

- Este material explica cada método mostrando a fórmula do somatório do quadrado perfeito dos ***n*** primeiros inteiros

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \ge 0$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	
S_n	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	