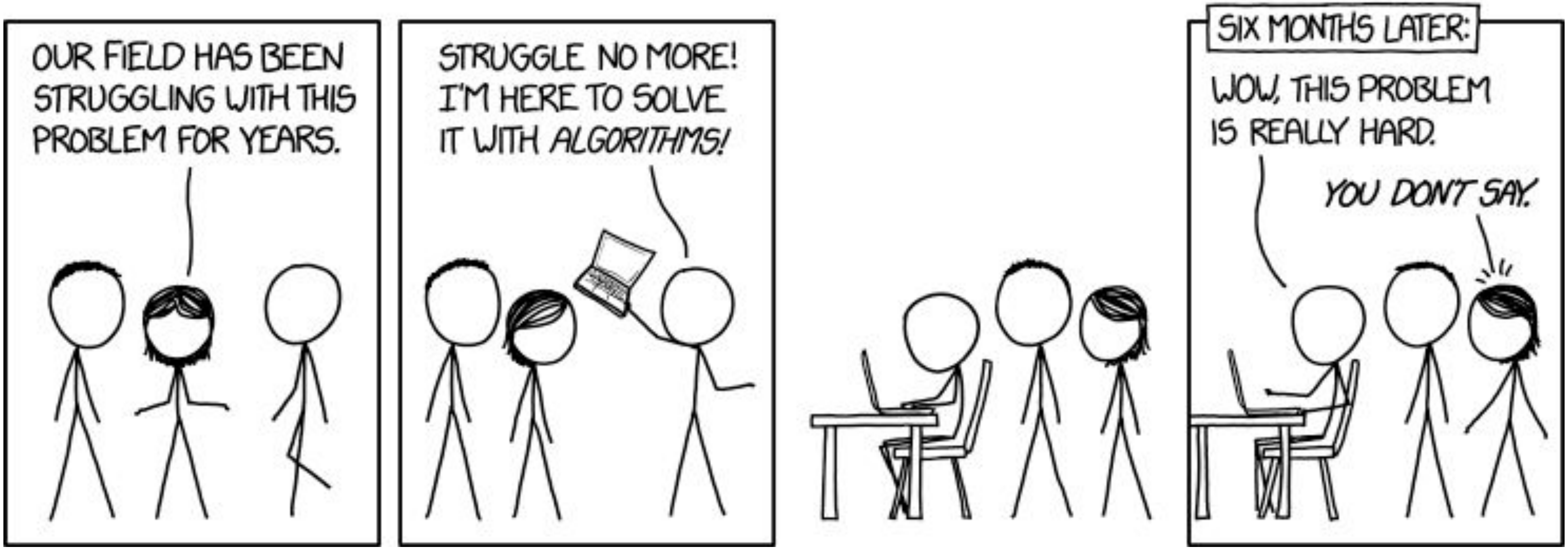
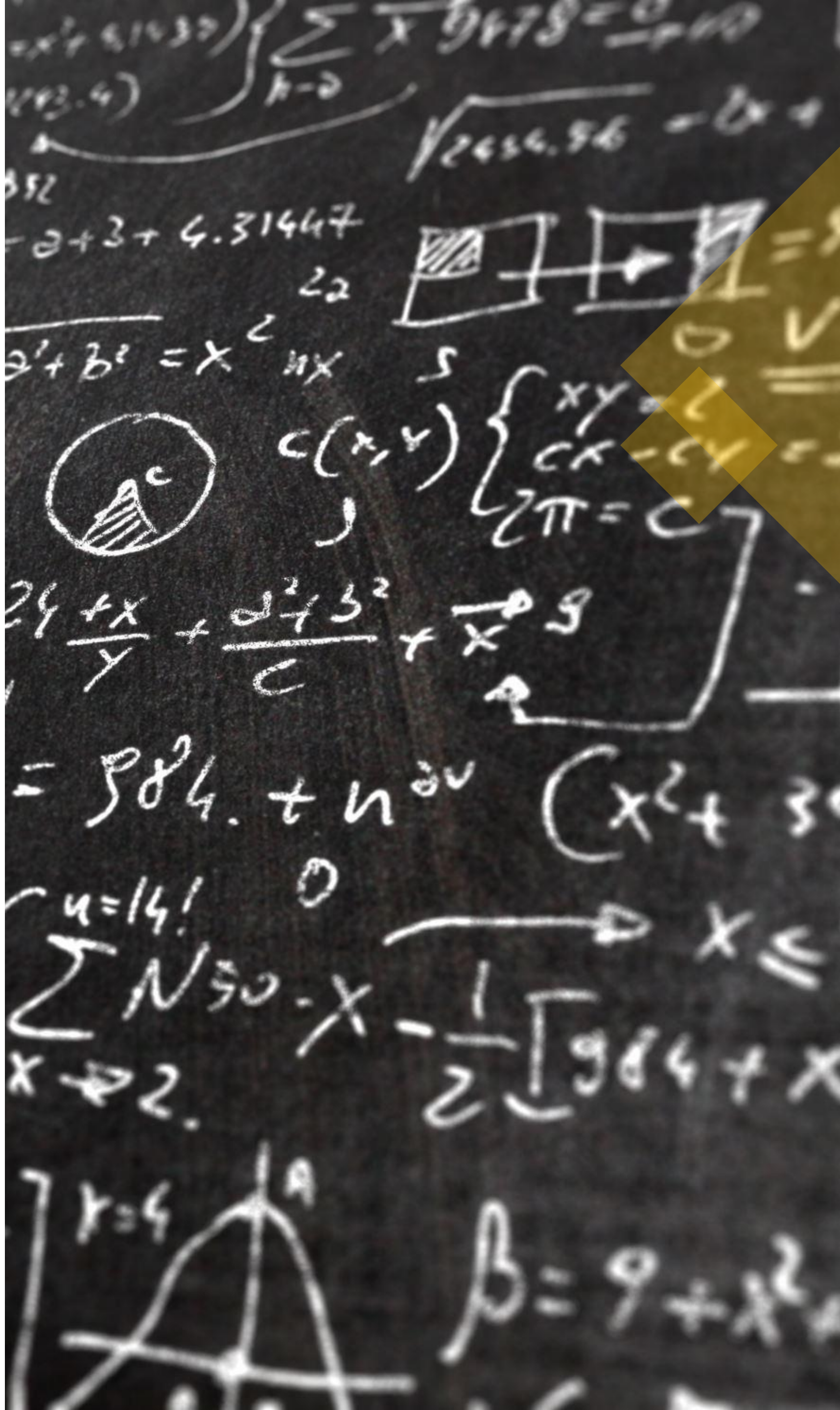
Fundamentos Matemáticos


OUR FIELD HAS BEEN STRUGGLING WITH THIS PROBLEM FOR YEARS.
STRUGGLE NO MORE! I'M HERE TO SOLVE IT WITH *ALGORITHMS!*
SIX MONTHS LATER:
WOW, THIS PROBLEM IS REALLY HARD.
YOU DON'T SAY.

Preâmbulo

- A análise de algoritmos ou programas utiliza técnicas de matemática discreta;
- Essas técnicas utilizam a manipulação de somas, produtos, permutações, fatoriais, coeficientes binomiais, solução de equações de recorrência, entre outras;



Preâmbulo

- Qual o valor de cont?
- ==========================
- F(n) = F(n-1)+F(n-2); n ≥ 3
- F(1) = 1
- F(2) = 1

```c
#include<stdio.h>
int main(){
    int n= 9, cont = 0;

    for (int i=1;i<=n;i++){
        for (int j=1;j<=i;j++){
            cont++;
        }
    }
    printf("Valor do contador %d \n", cont);
    return 0;

}
```

Preâmbulo

N	10	20	40
Chamada de função	109	13.529	204.668.309

Máquina	N=10	N=100
4 bilhões de instruções por segundo	< 1 segundo	?

```
int fibo (int n) {
   if (n <= 2)
      return 1;
    else
        return fibo(n-1)+fibo(n-2);
}
```

Potenciação

- Definição: seja *a* um número real e *x* um número inteiro.

$$a^x = \begin{cases} a \times a \times a \times \cdots \times a \ (x \text{ vezes}) & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-x}} & \text{se } x < 0 \text{ e } a \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

- Se a é um número real e x = n/m é um número racional com n sendo inteiro e m sendo inteiro positivo
  - $a^x = a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n$

- Propriedades

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Somatório

- https://pt.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-3/v/sigma-notation-sum

Logaritmo

Definição 1.1: *Logaritmo*

O *logaritmo de n na base a*, denotado $\log_a n$, é o valor x tal que x é o expoente a que a deve ser elevado para produzir n ($a^x = n$).

$\log_a n = b$ se e somente se $a^b = n$

$$\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

Logaritmo

Dados números reais a, b, $c \geq 1$, as seguintes igualdades são válidas:

(i) $\log_a 1 = 0$

(ii) $\log_a a = 1$

(iii) $a^{\log_a b} = b$

(iv) $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

(v) $\log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b$

(vi) $\log_c(a^b) = b \log_c a$

(vii) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

(viii) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

(ix) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Logaritmo

- for (int i = n; i > 0; i /= 2)
  - a *= 2;
- Quantas multiplicações serão executadas?

N	Número de multiplicações
7	
8	
15	
16	
32	
33	

Logaritmo

- for (int i = n; i > 0; i /= 2)
  - a *= 2;
- Quantas multiplicações serão executadas?

N	Valor de i	Número de multiplicações
7	7,3,1	3
8	8,4,2,1	4
15	15,7,3,1	4
16	16,8,4,2,1	5
32	32,16,8,4,2,1	6
33	33,16,8,4,2,1	6

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

Somatórios

- Notação somatório permite reduzir uma soma em uma única expressão;
- Letra grega sigma $\sum$;

Parar em $n = 3$

(inclusive)

$$\sum_{n=1}^{3} 2n - 1$$

Expressão para cada termo do somatório

Começa em $n = 1$

Somatório

- Transformar em somatório
  - 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 ➔ $\sum_{i=1}^{100} i$
  - 7 + 9+ 11+...+ 403 + 405 ➔
  - 1/1 + 1/2 + 2/3 + 6/4 + 24/5 ➔
- Desenvolver os somatórios
  - $\sum_{n=1}^{5} 2n - 1$ = 2*1 – 1 + 2*2 – 1 + 2*3 – 1....
  - $\sum_{j=2}^{\infty}\left(-1^{j}\right) * j$ = ?
  - $\sum_{i=1}^{10} 1$ = ?
  - $\sum_{n=1}^{4} \frac{k}{n+1}$ = ?

Somatório - Propriedades

- Somatório de Constante
  - $\sum_{i=1}^{n} k = k + k + k + \cdots + k = nk$
- Somatório do produto de uma constante por variável
  - $\sum_{i=1}^{n} kx_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i$
- Somatório de soma ou subtração de variáveis
  - $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i - z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i$
- Separando último termo
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n$
- Separando primeiro termo
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i$

Alguns somatórios

- Progressão Aritmética
  - $soma = \frac{(a_1 + a_n)}{2} * n$
  - $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = (1 + 9) + 10/2$
  - $1 + 3 + 5 + 7 + 9$
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n)}{2}\ n$
- Soma de quadrados
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - https://www.youtube.com/watch?v=Sp2DyqKwOK8

Alguns somatórios

- Resolver
  - $\sum_{n=1}^{7} 3n^2 + 2n + 4$
  - $\sum_{n=1}^{7} 3n^2 + \sum_{n=1}^{7} 2n + \sum_{n=1}^{7} 4$
  - $3\sum_{n=1}^{7} n^2 + 2\sum_{n=1}^{7} n + 7 * 4$
  - $3(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) + 2 * \frac{(1+n)}{2} * n + 28$
- Soma de cubos
  - $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Alguns somatórios

- Progressão Geométrica
  - aq^0, aq^1, aq^2, aq^3, aq^4,...
  - q ➔ razão
  - 3, 6, 12, 24, 48,...
  - Qual é a razão q?
  - Qual o valor do sexto elemento da série?
  - Número de termos (n) = n+1;
  - $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

Alguns somatórios

- Série Geométrica ou exponencial
  - aq^0, aq^1, aq^2, aq^3, aq^4,...aq^n
  - $\sum_{k=0}^{n} aq^k = aq^0 + aq^1 + aq^2 + \cdots + aq^n$
  - $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$
  - $\sum_{k=0}^{99} 2(3^k) = 2 \sum_{k=0}^{99} 3^k = 2 \left(\frac{3^{100} - 1}{3-1}\right) = 3^{100} - 1$

Alguns somatórios

- Série Harmônica
  - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$
  - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$

Exercício

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a) \quad (\quad) \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b) \quad (\quad) \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c) \quad (\quad) \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

$$d) \quad (\quad) \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k \right)^p;$$

$$e) \quad (\quad) \sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

Exemplo

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
        for (int j = (i + 1); j < n; j++){
            if (array[menor] > array[j]){
                menor = j;
            }
        }
        swap(menor, i);
}
```

Exemplo

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
        for (int j = (i + 1); j < n; j++){
            if (array[menor] > array[j]){
                menor = j;
            }
        }
        swap(menor, i);
}
```

i	0	1	2	3	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	n-4		1

$$\boxed{\sum (n - i - 1)}$$

Exemplo

- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1)$ = $\sum_{i=0}^{n-2} n \; - \; \sum_{i=0}^{n-2} i \; - \; \sum_{i=0}^{n-2} 1$
- $\sum_{i=0}^{n-2} n$ = n*(n-1); $\sum_{i=0}^{n-2} i$ = $\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)$; $\sum_{i=0}^{n-2} 1$ = 1*(n-1)
- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = n*(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1}(i-1) - (n-1)$
- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = n*(n-1) - (n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1$
- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = n*(n-1) - (n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i + (n-1)$
- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = n*(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i$
- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = n*(n-1) - \frac{(n-1)*n}{2}$
- $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \frac{(n-1)*n}{2}$

Somatório Duplo

- $\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$
- $\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$
- $\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$
- $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Somatório Duplo

- Propriedades
  - Troca de Somatórios
    - $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$
  - Lei Distributiva
    - $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_i c_j = \sum_{i=1}^{3} b_i \sum_{j=1}^{3} c_j$
- Exemplo
  - $\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=2}^{5} x_i - 3 = \sum_{j=2}^{5}\sum_{i=1}^{8} x_i - 3 = 4 * (\sum_{i=1}^{8} x_i - \sum_{i=1}^{8} 3)$

Produtório

- $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 * x_2 * \cdots * x_n$
- $\prod_{i=1}^{n} k = k * K * \ldots * k = k^n$
- $\prod_{i=1}^{n} kx_i = kx_1 * kx_2 * \cdots * kx_n = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i$
- $\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 * x_2 y_2 * \cdots * x_n y_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} y_i$
- $\prod_{i=1}^{n} i = 1 * 2 * \cdots * n = n!$
- $\log \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$

Produtório

- $X = \{1,3,4\}$
- $Y = \{2,5,0\}$
- $\prod_{i=1}^{3} x_i = 1 * 3 * 4 = 12$
- $\prod_{i=1}^{3} 2x_i = 2^3 \prod_{i=1}^{n} x_i = 8 * 12 = 96$
- $\prod_{i=1}^{3} x_i y_i = \prod_{i=1}^{3} x_i \prod_{i=1}^{3} y_i = 12 * 0 = 0$

Função de Recorrência

- “Uma equação de recorrência é uma maneira de definir uma função por uma expressão envolvendo a mesma função”
- $T(n) = T(n-1) – n; T(1) = 1$

Função de Recorrência

- F(n) = n + F(n/3); f(1) = 1
- F(n/3) = n/3 +f(n/3/3)
- F(n/3/3) = n/3/3 + f(n/3/3/3)
- .....
- F(n/3/3.../3) = n/3/3.../3+f(n/3/3.../3/3)
- F(n) = n + n*(1/3) + n*($1/3^2$) + n*($1/3^3$) + ...+ f(n/3/3.../3/3)
- F(n) = n(1/3 + ($1/3^2$) + ($1/3^3$) ... ...+ f(n/3/3.../3/3))
- F(n) = n$\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^i = n\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3n}{2}$

Função de Recorrência

- Função 1
  - $S_3 = 180$
  - $S_{n+1} = S_n + 180$
- Função 2
  - $D_3 = 0$
  - $D_{n+1} = D_n + n + 1$
- https://www.youtube.com/watch?v=IT679ay8Y2s&list=PLrVGp617x0hAttp3LQVBBF2td1uHjfhbr&index=9