

Técnicas de Projeto (Parte 4)

Projeto e Análise de Algoritmos

Daniel Capanema

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

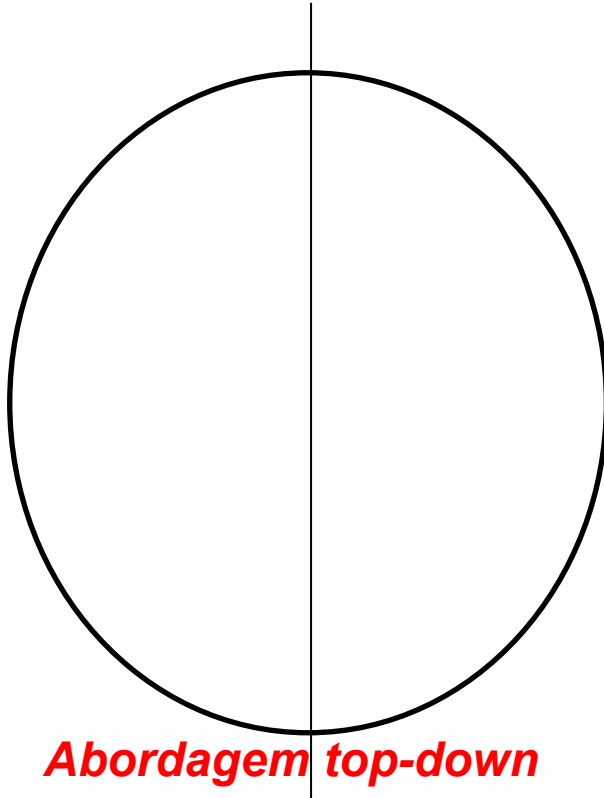
Programação Dinâmica

- Programação não está relacionado com um programa de computador.
 - A palavra está relacionada com um método de solução baseado em tabela.
- Programação dinâmica (PD) × Divisão-e-conquista (DC):
 - DC quebra o problema em sub-problemas menores.
 - PD resolve todos os sub-problemas menores mas somente reusa as soluções ótimas.

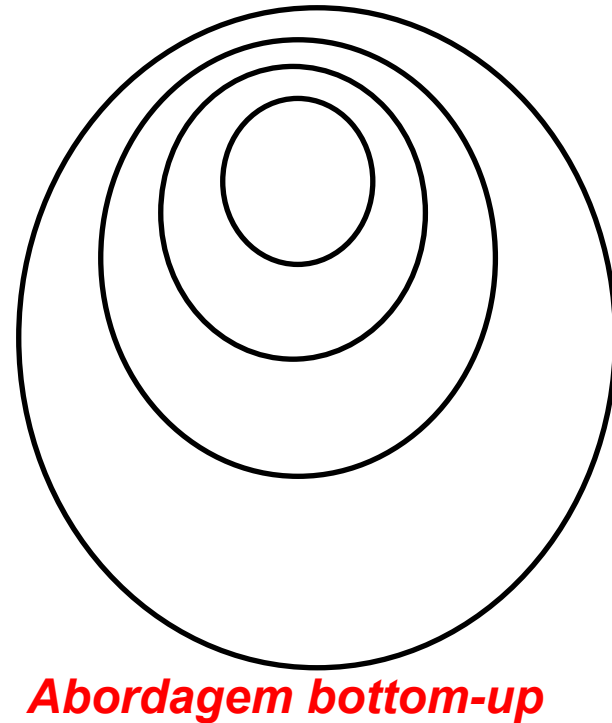
Programação Dinâmica

- Programação dinâmica quebra o problema em vários problemas sobrepostos.

Divisão e Conquista



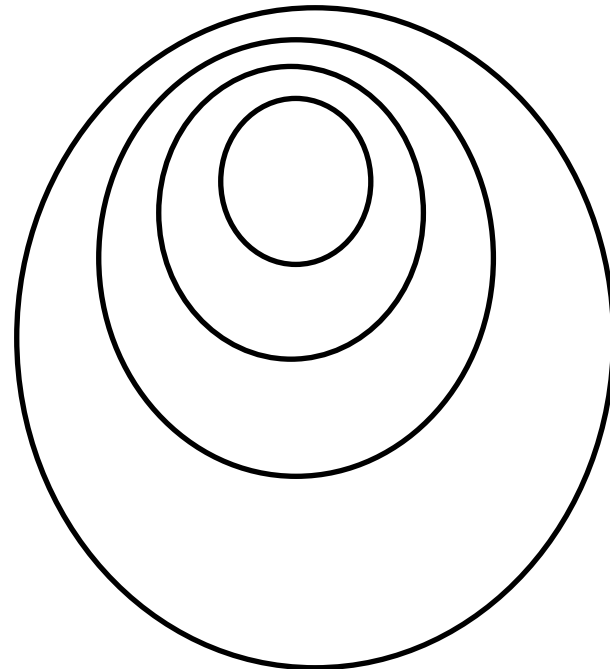
Programação Dinâmica



Programação Dinâmica

- Programação dinâmica quebra o problema em vários problemas sobrepostos.
- ❑ É um método para a construção de algoritmos para a resolução de problemas computacionais, em especial os de otimização combinatória.
- ❑ É aplicável a problemas nos quais a solução ótima pode ser computada a partir da solução ótima previamente calculada e memorizada (evitar recálculo) de outros subproblemas que, sobrepostos, compõem o problema original.

Programação Dinâmica



Programação Dinâmica

- O que um problema de otimização deve ter para que a **programação dinâmica** seja aplicável são duas principais características:
 1. Subestrutura ótima:
 - Quando uma solução ótima para o problema contém em seu interior soluções ótimas para subproblemas.
 2. Superposição de subproblemas:
 - Quando um algoritmo recursivo reexamina o mesmo problema muitas vezes.

Programação Dinâmica

- Quando $\sum \text{Tamanhos dos sub-problemas} = O(n)$
 - É provável que o algoritmo recursivo tenha **complexidade polinomial**.
- Quando a divisão de um problema de tamanho n resulta em:
 - n Sub-problemas \times Tamanho $n - 1$ cada um
 - É provável que o algoritmo recursivo tenha **complexidade exponencial**.
- Nesse caso, a técnica de programação dinâmica pode levar a um algoritmo mais eficiente.
 - A programação dinâmica calcula a solução para todos os sub-problemas, partindo dos sub-problemas menores para os maiores, armazenando os resultados em uma tabela.
 - A vantagem é que uma vez que um sub-problema é resolvido, a resposta é armazenada em uma tabela e nunca mais é recalculado.

Sequência de Fibonacci

- Suponha o exemplo da sequência de Fibonacci, implementada de forma recursiva
 - Quando a forma recursiva é implementada sem maiores cuidados, sem memorização, o seu cálculo de tempo cresce exponencialmente.

```
Se  n <= 1  então      F(n) := 1
      caso contrário  F(n) := F(n-1) + F(n-2)
```

- Quando implementada de forma recursiva "ingênua" (naive), sem memorização, a dupla chamada à F na segunda linha, causa a necessidade da repetição de cálculos, que cresce exponencialmente.

Sequência de Fibonacci

- Suponha o exemplo da sequência de Fibonacci, implementada de forma recursiva
 - Observe que a rigor esse caso não é um problema de programação dinâmica!
 - O cálculo do n -ésimo número de Fibonacci cresce linearmente, e não exponencialmente.
 - Porém este exemplo ainda assim é utilizado, pois a simplicidade é grande.

Sequência de Fibonacci

- Fibonacci com PD:
 - Solução iterativa: criar um vetor para armazenar os valores anteriores.

1	1	2	3	5	8	...
---	---	---	---	---	---	-----

$$Fib(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Sequência de Fibonacci

- Fibonacci com PD:
 - Solução iterativa: criar um vetor para armazenar os valores anteriores.

```
// PD, bottom up, não usa recursividade e armazena os resultados anteriores em Array

int DP_Bottom_Up(int n) {
    memo[0] = memo[1] = 1; // Valores padrões
    //de 2 a n ( já sabemos que fib(0) e fib(1) = 1)
    for (int i=2; i<=n; i++) {
        memo[i] = memo[i-1] + memo[i-2];
    }
    return memo[n];
}
```

- Tabela de memo(n) guarda valor dos somatórios; para cada entrada basta acrescentar 1 termo

Problema do Troco das Moedas

- Dado um conjunto de **n moedas**, cada uma com valor c_i , e, dada uma quantidade **P**, precisamos achar o **numero mínimo de moedas** para obter aquela quantidade
- Definimos a função **D (i, Q)** como o número mínimo de moedas necessário para obter uma quantidade Q, usando os i primeiros tipos de moedas (1...i).
- A solução da função Troco pode utilizar o ou mais moedas do tipo i
 - Se não usa nenhuma moeda do tipo i então:
 - $D(i, Q) = D(i-1, Q)$
 - Se usa sim, k moedas do tipo i, então:
 - $D(i, Q) = D(i-1, Q - K * c_i) + k$

Problema do Troco das Moedas

- $M=\{1,2,4,5,8\}$
- $S=17$

n

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
4	0	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	3	4	4	5	4	5
5	0	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4
8	0	1	1	2	1	1	2	2	1	2	2	3	2	2	3	3	2	3

Problema do Troco das Moedas

- $M=\{1,2,6,8\}$
- $S=12$

n

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
6	0	1	1	2	2	3	1	2	2	3	3	4	2
8	0	1	1	2	2	3	1	2	1	2	2	3	2

Problema do Troco das Moedas

- $M=\{1,4,6\}$
- $S= 8$

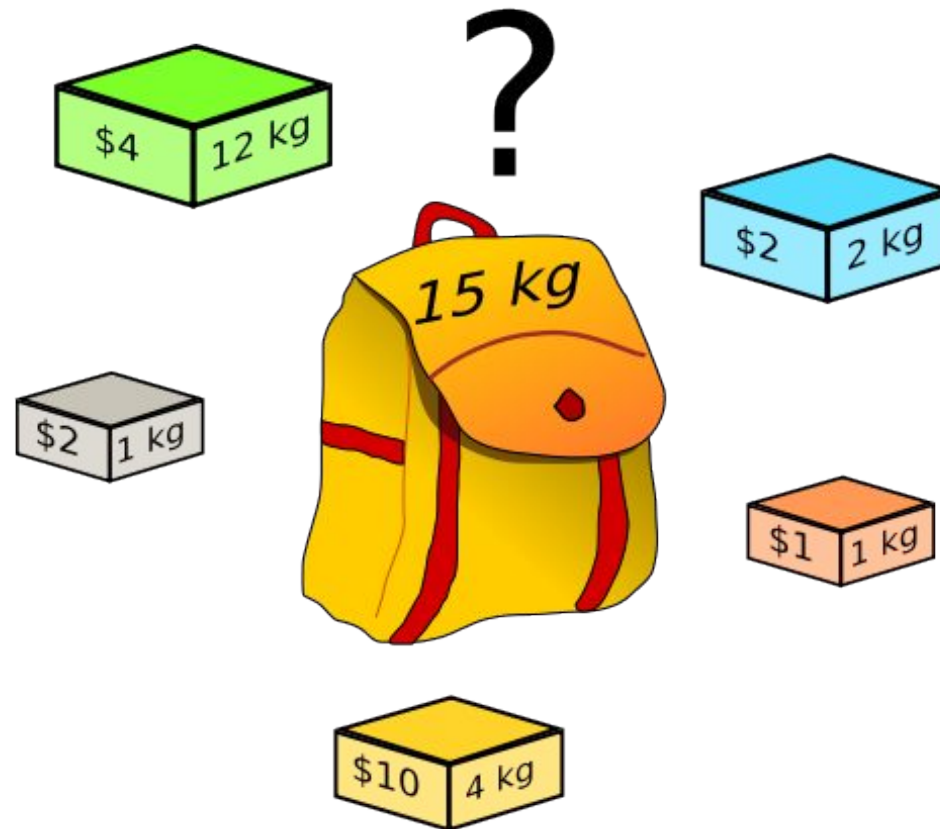
Problema do Troco das Moedas

```

Moedas ( int P, int N, int C[], int D[][] ) {
    int i, j;
    For ( i=0; i <=N; i++)
        D[i][0]=0;
    For ( i=1; i <=P; i++)
        D[0][i]=NUM_MAX;
    For ( i=1; i<=N; i++) {
        For ( j=1; j<=P; j++) {
            If ( C[i] > j )
                D[i][j] = D[ i-1 ][j];
            Else if ( D[i-1][j] < ( D[i][j-C[i]]+1 ) )
                D[i][j]=D[i-1][j];
            Else
                D[i][j]= D[i][j-C[i]]+1;
        }
    }
}

```

Problema da Mochila



Problema da Mochila

- Este é um problema de otimização e como tal possui muitas soluções possíveis, onde cada uma delas tem um valor
- Desejamos descobrir uma solução com o valor ótimo de acordo com um critério de minimização ou maximização.
- Existem muitas variações deste problema, consideraremos a mais simples delas:
 - Definição Mochila(n, K): dados um inteiro K e n itens de tamanhos diferentes tal que o i -ésimo item tem um tamanho inteiro k_i , descobrir um subconjunto de itens cujos tamanhos somam exatamente K , ou determine que nenhum tal subconjunto existe.

Problema da Mochila

- Observações
 - A mochila pode ser um caminhão, navio, chip de silício, etc.
 - $Mochila(i,j)$ denotará o problema com os primeiros i itens e uma mochila de tamanho j .
 - Por simplicidade, nos concentraremos apenas em descobrir se uma solução existe.

Problema da Mochila

- Algoritmo Mochila (S, K)
- Entrada: um vetor S de tamanho n armazenando os tamanhos dos itens e o tamanho K da mochila.
- Saída: um vetor bidimensional P tal que
 - $P(i, j).existe = true$ se existe uma solução com os primeiros i elementos para uma mochila de tamanho j ;
 - $P(i, j).pertence = true$ se o i -ésimo elemento pertence a solução.

Problema da Mochila

Início

```
P(0,0).existe = true;
para j = 1 até K faça
    P(0,j).existe = false;
para i = 1 até n faça
    para j = 0 até K faça
        P(i,j).existe = false;
        if P(i - 1, j).existe então
            P(i,j).existe = true;
            P(i,j).pertence = false;
        senão se (j - S(i) >= 0) então
            se P(i - 1, j - S(i)).existe então
                P(i,j).existe = true;
                P(i,j).pertence = true.
```

Fim

Problema da Mochila

- O problema da mochila (em inglês, Knapsack problem) é um problema de otimização combinatória
- Nome devido ao modelo de uma situação em que é necessário preencher uma mochila com objetos de diferentes pesos e valores
- O objetivo é que se preencha a mochila com o maior valor possível, não ultrapassando o peso máximo

Problema da Mochila

$$T(i, j) = \begin{cases} T(i-1, j) & \text{se } R[i] > S[j] \\ \max(T(i-1, j), T(i-1, S[j] - R[i]) + V[i]) & \text{se } R[i] \leq S[j] \end{cases}$$

Problema da Mochila

Capacidade 10

<i>Peso</i>	<i>Lucro</i>	Item	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w1=3	x1=5	1	0	0	0	5	5	5	10	10	10	15	15
w2=4	x2=7	2	0	0	0	5	7	7	10	12	14	15	17
w3=5	x3=8	3	0	0	0	5	7	8	10	12	14	15	17

Problema da Mochila

Capacidade 10

<i>Peso</i>	<i>Lucro</i>	Item	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w1=3	x1=5	1	0	0	0	5	5	5	10	10	10	15	15
w2=4	x2=7	2	0	0	0	5	7	7	10	12	14	15	17
w3=5	x3=8	3	0	0	0	5	7	8	10	12	14	15	17

Multiplicação de Matrizes

- Seja

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \times \dots \times \mathbf{M}_n$$

- onde M_i é uma matriz com d_{i-1} linhas e d_i colunas, $2 \leq i \leq n$.
- Isto serve para dizer apenas que a matriz M_i possui uma quantidade de linhas igual a quantidade de colunas de M_{i-1} (d_{i-1}) e uma quantidade de colunas dada por d_i .
- A ordem da multiplicação pode ter um efeito enorme no número total de operações de adição e multiplicação necessárias para obter \mathbf{M} .
- Considere o produto de uma matriz $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ por outra matriz $\mathbf{q} \times \mathbf{r}$ cujo algoritmo requer $\mathbf{O(pqr)}$ operações.

Multiplicação de Matrizes

- Considere o produto

$$M = M_1[10, 20] \times M_2[20, 50] \times M_3[50 \times 1] \times M_4[1, 100]$$

- onde as dimensões de cada matriz aparecem entre colchetes.
- Sejam duas possíveis ordens de avaliação dessa multiplicação:

$$M = M_1 \times (M_2 \times \underbrace{(M_3 \times M_4)})$$

$50 \times 1 \times 100 = 5\,000$ operações

$$M = (M_1 \times \underbrace{(M_2 \times M_3)}) \times M_4$$

$20 \times 50 \times 1 = 1\,000$ operações

$$M = M_1 \times \underbrace{(M_2 \times M_a)}, \text{ sendo } M_a[50, 100]$$

$20 \times 50 \times 100 = 100\,000$ operações

$$M = \underbrace{(M_1 \times M_a)} \times M_4, \text{ sendo } M_a[20, 1]$$

$10 \times 20 \times 1 = 200$ operações

$$M = \underbrace{M_1 \times M_b}, \text{ sendo } M_b[20, 100]$$

$10 \times 20 \times 100 = 20\,000$ operações

$$M = \underbrace{M_b \times M_4}, \text{ sendo } M_b[10, 1]$$

$10 \times 1 \times 100 = 1\,000$ operações

Total = 125 000 operações

Total = 2 200 operações

Multiplicação de Matrizes

- Tentar todas as ordens possíveis para minimizar o número de operações $f(n)$ é exponencial em n , onde $f(n) \geq 2^{n-2}$.
- Usando programação dinâmica é possível obter um algoritmo $O(n^3)$.
- Seja m_{ij} o menor custo para computar $M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_j$, para $1 \leq i \leq j \leq n$.

Multiplicação de Matrizes

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j, \\ \text{Min}_{i \leq k < j} (m_{ik} + m_{k+1,j} + d_{i-1}d_kd_j), & \text{se } j > i. \end{cases}$$

- m_{ik} representa o custo mínimo para calcular $M' = M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_k$.
- $m_{k+1,j}$ representa o custo mínimo para calcular $M'' = M_{k+1} \times M_{k+2} \times \dots \times M_j$.
- $d_{i-1}d_kd_j$ representa o custo de multiplicar $M' [d_{i-1}; d_k]$ por $M'' [d_k; d_j]$.
- $m_{ij}; j > i$ representa o custo mínimo de todos os valores possíveis de k entre i e $j - 1$, da soma dos três termos.

Multiplicação de Matrizes

- A solução usando programação dinâmica calcula os valores de m_{ij} na ordem crescente das diferenças nos subscritos.
- O cálculo inicia com m_{ii} para todo i , depois $m_{i,i+1}$ para todo i , depois $m_{i,i+2}$, e assim sucessivamente.
- Desta forma, os valores m_{ik} e $m_{k+1,j}$ estarão disponíveis no momento de calcular m_{ij} .
- Isto acontece porque $j - i$ tem que ser estritamente maior do que ambos os valores de $k - i$ e $j - (k + 1)$ se k estiver no intervalo $i < k < j$.

Multiplicação de Matrizes

AVALIAMULTMATRIZES($n, d[0..n]$)

▷ Parâmetro: n (n^o de matrizes); $d[0..n]$ (dimensões das matrizes)

▷ Constante e variáveis auxiliares:

$MaxInt$ = maior inteiro

$i, j, k, h, n, temp$

$m[1..n, 1..n]$

```

1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
2    do  $m[i, i] \leftarrow 0$ 
3  for  $h \leftarrow 1$  to  $n - 1$ 
4    do for  $i \leftarrow 1$  to  $n - h$ 
5      do  $j \leftarrow i + h$ 
6         $m[i, j] \leftarrow MaxInt$ 
7        for  $k \leftarrow i$  to  $j - 1$  do
8           $temp \leftarrow m[i, k] + m[k + 1, j] + d[i - 1] \times d[k] \times d[j]$ 
9          if  $temp < m[i, j]$ 
10             then  $m[i, j] \leftarrow temp$ 
11  print  $m$ 

```

- A execução de AVALIAMULTMATRIZES obtém o custo mínimo para multiplicar as n matrizes, assumindo que são necessárias pqr operações para multiplicar uma matriz $p \times q$ por outra matriz $q \times r$.

Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de

$$M = M_1[10, 20] \times M_2[20, 50] \times M_3[50, 1] \times M_4[1, 100],$$

sendo

d	10	20	50	1	100
	0	1	2	3	4

produz como resultado

$m_{11} = 0$	$m_{22} = 0$	$m_{33} = 0$	$m_{44} = 0$
$m_{12} = 10.000$ $M_1 \times M_2$	$m_{23} = 1.000$ $M_2 \times M_3$	$m_{34} = 5.000$ $M_3 \times M_4$	
$m_{13} = 1.200$ $M_1 \times (M_2 \times M_3)$	$m_{24} = 3.000$ $(M_2 \times M_3) \times M_4$		
$m_{14} = 2.200$ $(M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$			

Problema Subsequência Comum Mais Longa

- Dada uma sequência $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, outra sequência $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ é uma subsequência de X se existe uma sequência estritamente crescente $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$ de índices de X tais que, para todo $j = 1, 2, \dots, k$, temos:

$$X_{i_j} = Z_j$$

- Exemplo:
- $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Z = \langle B, C, D, B \rangle$ Z é uma subsequência de X com sequência de índice correspondente $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$.

Problema Subsequência Comum Mais Longa

- Dada duas sequências X e Y , dizemos que uma sequência Z é uma **subsequência comum** de X e Y se Z é uma subsequência de X e de Y ao mesmo tempo.
- Exemplo:
- $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$ a sequência $\langle B, C, A \rangle$ é uma subsequência comum. A sequência $\langle B, C, B, A \rangle$ é uma subsequência comum mais longa (LCS – longest common subsequence)

Problema Subsequência Comum Mais Longa

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i = y_i \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i \neq y_i \end{cases}$$

Problema Subsequência Comum Mais Longa

	yj	A	C	T	G	T	G	C	A
xi	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	1	1	1	1	1	1	1	1
C	0	1	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	2	2	3	3	3	3	3
T	0	1	2	3	3	4	4	4	4
G	0	1	2	3	4	4	5	5	5
T	0	1	2	3	4	5	5	5	5
C	0	1	2	3	4	5	5	6	6
A	0	1	2	3	4	5	5	6	7

Problema Subsequência Comum Mais Longa

	yj	A	C	T	G	T	G	C	A
xi	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	□	□	□	□	□	□	□	□
C	0	□	□	□	□	□	□	□	□
G	0	□	□	□	□	□	□	□	□
T	0	□	□	□	□	□	□	□	□
G	0	□	□	□	□	□	□	□	□
T	0	□	□	□	□	□	□	□	□
C	0	□	□	□	□	□	□	□	□
A	0	□	□	□	□	□	□	□	□

Maior subsequência comum: ACGTGCA

Problema Subsequência Comum Mais Longa

```

LCS-LENGTH(X, Y)
1 m ← comprimento [X]
2 n ← comprimento [Y]
3 for i ← 0 to m
4   do c[i, 0] ← 0
5 for j ← 0 to n
6   do c[0, j] ← 0
7 for i ← 1 to m
8   do for j ← 0 to n
9     do if  $x_i = y_j$ 
10      then c[i, j] ← c[i-1, j-1] + 1
11      b[i, j] ← " "
12    else if c[i-1, j] ≥ c[i, j-1]
13      then c[i, j] ← c[i-1, j]
14      b[i, j] ← "↑"
15    else c[i, j] ← c[i, j-1]
16      b[i, j] ← "←"
17 return c e b
  
```

Problema Subsequência Comum Mais Longa

```
PRINT-LCS (b, X, i, j)
1  if i = 0 ou j = 0
2    then return
3  if b[i, j] =↖ " "
4    then PRINT-LCS (b, X, i, j)
5    print Xi
6  else if b[i, j] = "↑"
7    then PRINT-LCS (b, X, i-1, j)
8  else PRINT-LCS (b, X, i-1, j)
```

Programação Dinâmica: Princípio de Otimalidade

- A solução eficiente está baseada no **princípio da otimalidade**:
 - Em uma seqüência ótima de escolhas ou de decisões cada sub-seqüência deve também ser ótima.
- Cada sub-seqüência representa o custo mínimo, assim como m_{ij} , $j > i$.
- Assim, todos os valores da tabela representam escolhas ótimas.

Programação Dinâmica: Princípio de Otimalidade

- O princípio da otimalidade não pode ser aplicado indiscriminadamente.
- Se o princípio não se aplica é provável que não se possa resolver o problema com sucesso por meio de programação dinâmica.
 - Quando, por exemplo, o problema utiliza recursos limitados e o total de recursos usados nas sub-instâncias é maior do que os recursos disponíveis.
- Exemplo do princípio da otimalidade: suponha que o caminho mais curto entre Belo Horizonte e Curitiba passa por Campinas. Logo,
 - O caminho entre BH e Campinas também é o mais curto possível;
 - Como também é o caminho entre Campinas e Curitiba;
- Logo, o princípio da otimalidade se aplica.

Programação Dinâmica: Princípio de Otimalidade

- Seja o problema de encontrar o caminho mais longo entre duas cidades. Temos que:
 - Um caminho simples nunca visita uma mesma cidade duas vezes.
 - Se o caminho mais longo entre Belo Horizonte e Curitiba passa por Campinas, isso não significa que o caminho possa ser obtido tomando o caminho simples mais longo entre Belo Horizonte e Campinas e depois o caminho simples mais longo entre Campinas e Curitiba.
- Observe que o caminho simples mais longo entre BH e Campinas pode passar por Curitiba!
 - Quando os dois caminhos simples são agrupados não existe uma garantia que o caminho resultante também seja simples.
 - Logo, o princípio da otimalidade não se aplica.

Programação Dinâmica

- **Quando aplicar PD?**

- Respeitam as duas características principais.
- Problema computacional deve ter uma formulação recursiva.
- Não deve haver ciclos na formulação (usualmente o problema deve ser reduzido a problemas menores).
- Número total de instâncias do problema a ser resolvido deve ser pequeno (n).
- Tempo de execução é $O(n) \times$ tempo para resolver a recursão.

Exercícios

1. Seja o problema da maior subsequência crescente, projete uma solução, para encontrar o tamanho da maior subsequência.
2. Seja uma estrada pedagiada. Os pedágios devem estar nas cidades ao longo da rodovia distantes pelo menos x Km. Cada pedágio colocado dará um lucro de y_i . Projete um algoritmo para instalar os pedágios que produzirá o maior lucro possível.