ENSISA IR 1A
Projet maths S6
Année 2022/2023

À propos de la loi normale bidimensionnelle

1 Présentation du problème

Dans tout le sujet, on considère une variable aléatoire Z suivant une la loi normale bidimensionnelle d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^2$ et de matrice de covariance $\Sigma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que Σ doit être symétrique et semi-définie positive, et que l'expression de la densité de Z est donnée par :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t(z-\mu)\ \Sigma^{-1}\ (z-\mu)\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Afin d'éviter les cas dégénérés, on considérera dans la suite la matrice Σ définie positive.

Le but de la première partie du sujet est d'étudier les lignes d'isodensité de f_Z, et de calculer la probabilité qu'un point tiré selon la loi de Z appartienne à la surface interne à cette courbe. Plus précisément, pour tout $p \in [0\ ;\ 1]$, il s'agira de déterminer la ligne d'isodensité K délimitant une surface intérieure S_K telle que $P(Z \in S_K) = p$.

La deuxième partie prolonge la première en s'intéressant à l'aspect statistique. Il s'agit de déterminer des estimateurs de μ et Σ dont la pertinence pourra être illustrée en utilisant les résultats de la partie précédente.

2 Travail attendu

Le travail attendu mêle développements mathématiques et études numériques à but illustratif effectuées à l'aide de Python, dont les détails sont donnés dans la suite. Le travail final sera présenté dans un rapport synthétique d'une dizaine de pages.

— **Consignes concernant le rendu.**

1. Le rapport devra comporter les éléments suivants :
   — une brève introduction,
   — l'étude mathématique de différentes caractéristiques des lois normales bidimensionnelles présentées dans la suite ; il s'agit de propositions et non d'obligations,
   — les résultats des études numériques réalisées ; des propositions sont présentées dans la suite,
   — et une brève conclusion.
2. Le travail sera à déposer sur Moodle au plus tard le dimanche 4 juin 2023 à 23 :59. Il sera constitué de votre rapport, ainsi que de vos scripts.

3. Le travail est à réaliser par groupe de deux étudiants. Un seul rendu est attendu par groupe.
4. Citer les sources, le cas échéant.

— **Quelques conseils.**
  — L'étude de chacune des caractéristiques présentées dans la suite est conseillée, mais non indispensable si vous manquez de temps ou si vous éprouvez des difficultés quant à leur compréhension.
  — Préférez la qualité à la quantité. J'attends par exemple des scripts propres et suffisamment commentés ; il en va de même des développements mathématiques.
  — Au moment de conclure, questionnez-vous sur la représentativité de vos résultats.
  — En cas de besoin, n'hésitez pas à me solliciter.

— **Données.** Pour l'étude numérique, vous êtes libres de vous baser sur les valeurs que vous souhaitez.

2.1 Développements mathématiques

1. (a) Démontrer, en utilisant la décomposition spectrale de Σ, que les lignes d'isodensité de f_Z sont des ellipses dont les caractéristiques seront données en fonction de μ et Σ.
   (b) Calculer la probabilité qu'un point tiré selon la loi de Z appartienne à la surface interne S_K délimitée par l'ellipse d'isodensité K. Pour tout $p \in [0\ ;\ 1]$, en déduire l'ellipse d'isodensité K vérifiant $P(Z \in S_K) = p$.
2. Déterminer, par la méthode de votre choix, un estimateur de μ et un estimateur de Σ dont vous justifierez la pertinence en utilisant les caractéristiques étudiées en cours.

2.2 Étude numérique

1. Représenter un échantillon de points tirés selon la loi de Z ainsi que les ellipses d'isodensité associées à des probabilités p au choix.
2. Calculer la valeur des estimateurs de μ et Σ sur des échantillons de taille variable, et illustrer leur convergence en utilisant, par exemple, les ellipses d'isodensité.

2.3 Bonus

1. Reprendre l'étude du problème, en considérant les cas dégénérés :
   (a) dans un premier temps, considérer qu'une seule valeur propre de Σ est nulle,
   (b) dans un second temps, considérer le cas où les deux valeurs propres sont nulles.

Références.
— À venir. :-)