

# Étude de la loi normale bidimensionnelle

Iparraguirre Andoni  
Guiffard-Frondziak Hugues

15 mai 2023

## Résumé

Étude des lignes d'isodensité de  $f_z$  et calcul de la probabilité qu'un point tiré de la loi de  $Z$  appartienne à la surface interne à cette courbe. Étude statistique de  $\mu$  et  $\sigma$  pour déterminer des estimateurs.

## 1 Introduction

Dans ce sujet, nous étudions une variable aléatoire bidimensionnelle  $Z$  suivant une loi normale bidimensionnelle, caractérisée par son espérance  $\mu \in \mathbb{R}^2$  et sa matrice de covariance  $\Sigma \in M_2(\mathbb{R})$ . Nous rappelons que  $\Sigma$  doit être symétrique et semi-définie positive, et que l'expression de la densité de  $Z$  est donnée par une formule spécifique. Afin d'éviter les cas dégénérés, nous considérons dans un premier temps la matrice  $\Sigma$  définie positive.

Le sujet se concentre sur deux questions principales :

1. Démontrer, en utilisant la décomposition spectrale de  $\Sigma$ , que les lignes d'isodensité de  $f_z$  sont des ellipses et calculer la probabilité qu'un point tiré selon la loi de  $Z$  appartienne à la surface interne délimitée par l'ellipse d'isodensité  $K$ .
2. Déterminer, par la méthode de votre choix, un estimateur de  $\mu$  et un estimateur de  $\Sigma$ , puis justifier la pertinence de ces estimateurs en utilisant les caractéristiques étudiées en cours.

Enfin, le sujet propose un bonus, qui consiste à étudier le problème en tenant compte des cas dégénérés, où une ou les deux valeurs propres de  $\Sigma$  sont nulles.

Pour rappel, voici l'expression de la densité de  $Z$  :

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(z - \mu) \Sigma^{-1} (z - \mu)\right), \forall z \in \mathbb{R}^2$$

## 2 Développement

### 2.1 Etude Théorique

1.(a) Pour montrer que les lignes d'isodensité de  $f_Z$  sont des ellipses, on commence par écrire la condition pour qu'un point  $z$  appartienne à une ligne d'isodensité pour une densité constante  $c$  :

On pose :

$$K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(z - \mu) \Sigma^{-1} (z - \mu)\right), \forall z \in \mathbb{R}^2$$

Or

$$\Sigma = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$$

Avec,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ la matrice } \Sigma \text{ diagonalisée et } P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

De plus,

$$\det(\Sigma) = \det(\Lambda)$$

Et,

$$\Sigma^{-1} = P \cdot \Lambda^{-1} \cdot P^{-1}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 \cos^2(\theta) + \lambda_1 \sin^2(\theta)}{\lambda_1 \lambda_2} & \frac{\lambda_2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \lambda_1 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{\lambda_2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \lambda_1 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\lambda_1 \lambda_2} & \frac{\lambda_2 \cos^2(\theta) + \lambda_1 \sin^2(\theta)}{\lambda_1 \lambda_2} \end{pmatrix}$$

On veut maintenant calculer le scalaire dans l'exponentiel de la fonction :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} \cdot {}^t(z - \mu) \cdot \Sigma^{-1} \cdot (z - \mu) = (x - \mu_1 \quad y - \mu_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \cos^2(\theta) + \lambda_1 \sin^2(\theta) & \lambda_2 \cos(\theta)\sin(\theta) - \lambda_1 \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \lambda_2 \cos(\theta)\sin(\theta) - \lambda_1 \sin(\theta)\cos(\theta) & \lambda_2 \cos^2(\theta) + \lambda_1 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix} \\
& = ((\lambda_2 \cos^2(\theta) + \lambda_1 \sin^2(\theta))(x - \mu_1) + \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2)(y - \mu_2))(x - \mu_1) + \\
& \quad ((\lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta))(y - \mu_2) + \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2)(x - \mu_1))(y - \mu_2) \\
& = (\lambda_2 \cos^2(\theta) + \lambda_1 \sin^2(\theta))(x - \mu_1)^2 + 2 \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2)(y - \mu_2)(x - \mu_1) + \\
& \quad (\lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta))(y - \mu_2)^2 \\
& = \lambda_1 \sin^2(\theta)(x - \mu_1)^2 + \lambda_2 \cos^2(\theta)(x - \mu_1)^2 + 2 \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2)(y - \mu_2)(x - \mu_1) + \\
& \quad \lambda_1 \cos^2(\theta)(y - \mu_2)^2 + \lambda_2 \sin^2(\theta)(y - \mu_2)^2 \\
& = \lambda_1(\sin^2(\theta)(x - \mu_1)^2 + \cos^2(\theta)(y - \mu_2)^2) + \lambda_2(\cos^2(\theta)(x - \mu_1)^2 + \sin^2(\theta)(y - \mu_2)^2) + \\
& \quad 2 \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2)(y - \mu_2)(x - \mu_1) \\
& = \lambda_1(\sin^2(\theta)(x - \mu_1)^2 + \cos^2(\theta)(y - \mu_2)^2 - 2 \cos(\theta)\sin(\theta)(y - \mu_2)(x - \mu_1)) + \\
& \quad \lambda_2(\sin^2(\theta)(y - \mu_2)^2 + \cos^2(\theta)(x - \mu_1)^2 + 2 \cos(\theta)\sin(\theta)(y - \mu_2)(x - \mu_1)) \\
& = \lambda_1(\sin(\theta)(x - \mu_1) - \cos(\theta)(y - \mu_2))^2 + \lambda_2(\cos(\theta)(x - \mu_1) + \sin(\theta)(y - \mu_2))^2
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de départ:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \lambda_1 \lambda_2}} \exp\left(-\frac{\lambda_1(\sin(\theta)(x - \mu_1) - \cos(\theta)(y - \mu_2))^2}{2\lambda_1\lambda_2} - \frac{\lambda_2(\cos(\theta)(x - \mu_1) + \sin(\theta)(y - \mu_2))^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right) \\
-\ln(K 2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}) &= \frac{(\sin(\theta)(x - \mu_1) - \cos(\theta)(y - \mu_2))^2}{2\lambda_2} + \frac{(\cos(\theta)(x - \mu_1) + \sin(\theta)(y - \mu_2))^2}{2\lambda_1} \\
1 &= \frac{(\sin(\theta)(x - \mu_1) - \cos(\theta)(y - \mu_2))^2}{2\lambda_2 \ln\left(\frac{1}{K 2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)} + \frac{(\cos(\theta)(x - \mu_1) + \sin(\theta)(y - \mu_2))^2}{2\lambda_1 \ln\left(\frac{1}{K 2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)}
\end{aligned}$$

On reconnait l'équation d'un ellipse avec  $(\mu_1, \mu_2)$  les coordonnées de son centre et

$$\sqrt{2\lambda_2 \ln\left(\frac{1}{K 2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)} \text{ et } \sqrt{2\lambda_1 \ln\left(\frac{1}{K 2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)} \text{ les demi-longueurs des axes.}$$

(b)

Pour calculer la probabilité qu'un point tiré selon la loi de Z appartienne à la surface interne  $S_K$  délimitée par l'ellipse d'isodensité K, on doit intégrer la densité de probabilité  $f_Z(z)$  sur cette surface.

$$P(Z \in S_k) = \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu)\Sigma^{-1}(z - \mu)\right) dz$$

$$\iint_{S_k} \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \exp\left(-\frac{[(x - \mu_1)\cos(\theta) + (y - \mu_2)\sin(\theta)]^2}{2\lambda_1} - \frac{[(x - \mu_1)\sin(\theta) - (y - \mu_2)\cos(\theta)]^2}{2\lambda_2}\right) dx dy$$

On pose le changement de variable suivant :

$$X = \frac{(x - \mu_1)\cos\theta + (y - \mu_2)\sin\theta}{\sqrt{2\lambda_1}} \quad Y = \frac{(x - \mu_1)\sin(\theta) - (y - \mu_2)\cos(\theta)}{\sqrt{2\lambda_2}}$$

A l'inverse,

$$x = \sqrt{2\lambda_1}\cos(\theta)X + \sqrt{2\lambda_2}\sin(\theta)Y + \mu_1 \quad y = \sqrt{2\lambda_1}\sin(\theta)X - \sqrt{2\lambda_2}\cos(\theta)Y + \mu_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial X} &= \sqrt{2\lambda_1}\cos(\theta) & \frac{\partial x}{\partial Y} &= \sqrt{2\lambda_2}\sin(\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial X} &= \sqrt{2\lambda_1}\sin(\theta) & \frac{\partial y}{\partial Y} &= -\sqrt{2\lambda_2}\cos(\theta) \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_k} \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \exp(-X^2 - Y^2) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{array} \right| dXdY \\ & \iint_{S_k} \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \exp(-X^2 - Y^2) (-\sqrt{4\lambda_1\lambda_2}\cos^2(\theta) - \sqrt{4\lambda_1\lambda_2}\sin^2(\theta)) dXdY \\ & \iint_{S_k} \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \exp(-X^2 - Y^2) dXdY = \iint_{S_k} \frac{1}{\pi} \exp(-X^2 - Y^2) dXdY \end{aligned}$$

On passe maintenant en polaire pour simplifier l'intégrale, en remarquant que

$$X = r \cos(\varphi) \text{ et } Y = r \sin(\varphi)$$

On a :

$$\iint_{S_k} \frac{1}{\pi} \exp(-r^2) r d\varphi dr = \frac{1}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr = \int_0^r 2r e^{-r^2} dr$$

Il faut aussi passer l'équation de l'ellipse en base polaire pour avoir les bornes de l'intégrale.

$$1 = \frac{((x - \mu_1)\sin(\theta) - (y - \mu_2)\cos(\theta))^2}{2\lambda_2 \ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)} + \frac{((x - \mu_1)\cos(\theta) + (y - \mu_2)\sin(\theta))^2}{2\lambda_1 \ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)}$$

$$1 = \frac{r^2}{\ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)}$$

$$r = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)}$$

Une fois la borne supérieure de r trouvée, nous pouvons intégrer :

$$\int_0^{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)}} 2r e^{-r^2} dr = -e^{-\ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)} + e^0 = 1 - 2\pi K\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$$

Finalement la probabilité qu'un point tiré au hasard soit dans la surface d'isodensité est :

$$P(Z \in S_k) = 1 - 2\pi K\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$$

2. Pour commencer on cherche l'estimateur  $\mu$  en étudiant le max de vraisemblance :

$$\begin{aligned}
 \mu &\rightarrow \ln \mathcal{L}(\mu | z_i) \\
 \ln \mathcal{L}(\mu | z_i) &= \ln \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(z_i - \mu)\right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((z_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(z_i - \mu)) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} \mu + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu^T \Sigma^{-1} z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu^T \Sigma^{-1} \mu
 \end{aligned}$$

On dérive ensuite pour trouver le maximum :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mu | z_i)}{\partial \mu} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} z_i)^T - \sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T) \cdot \mu \right) = 0 \\
 \sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T) \cdot \mu &= \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N (z_i^T (\Sigma^{-1})^T) \\
 \sum_{i=1}^N \mu &= \frac{\sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N (z_i^T (\Sigma^{-1})^T)}{\sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T)} \\
 \sum_{i=1}^N \mu &= \sum_{i=1}^N z_i^T \frac{(\sum_{i=1}^N \Sigma^{-1} + ((\Sigma^{-1})^T))}{\sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T)} \\
 N \cdot \hat{\mu} &= \sum_{i=1}^N z_i^T \\
 \hat{\mu} &= \frac{\sum_{i=1}^N z_i^T}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N z_i}{N}
 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'estimateur  $\mu$ .

Nous faisons de même pour  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned}
 \Sigma &\rightarrow \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i) \\
 \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i) &= \ln \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(z_i - \mu)\right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \ln \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(z_i - \mu)\right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \ln \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} + \sum_{i=1}^N \left( -\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(z_i - \mu) \right)
 \end{aligned}$$

De même on cherche à dériver :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i)}{\partial \Sigma} &= \sum_{i=1}^N \left( 2\pi\sqrt{\det \Sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0 \\
 \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i)}{\partial \Sigma} &= \sum_{i=1}^N \left( \sqrt{\det \Sigma} \cdot \left( -\frac{1}{2 \det \Sigma \sqrt{\det \Sigma}} \right) \cdot \det(\Sigma)(\Sigma^{-1})^T \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0 \\
 \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i)}{\partial \Sigma} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \cdot (\Sigma^{-1})^T - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0 \\
 \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i)}{\partial \Sigma} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0 \\
 \sum_{i=1}^N \Sigma &= \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T \\
 N \cdot \Sigma &= \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T \\
 \hat{\Sigma} &= \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T}{N}
 \end{aligned}$$

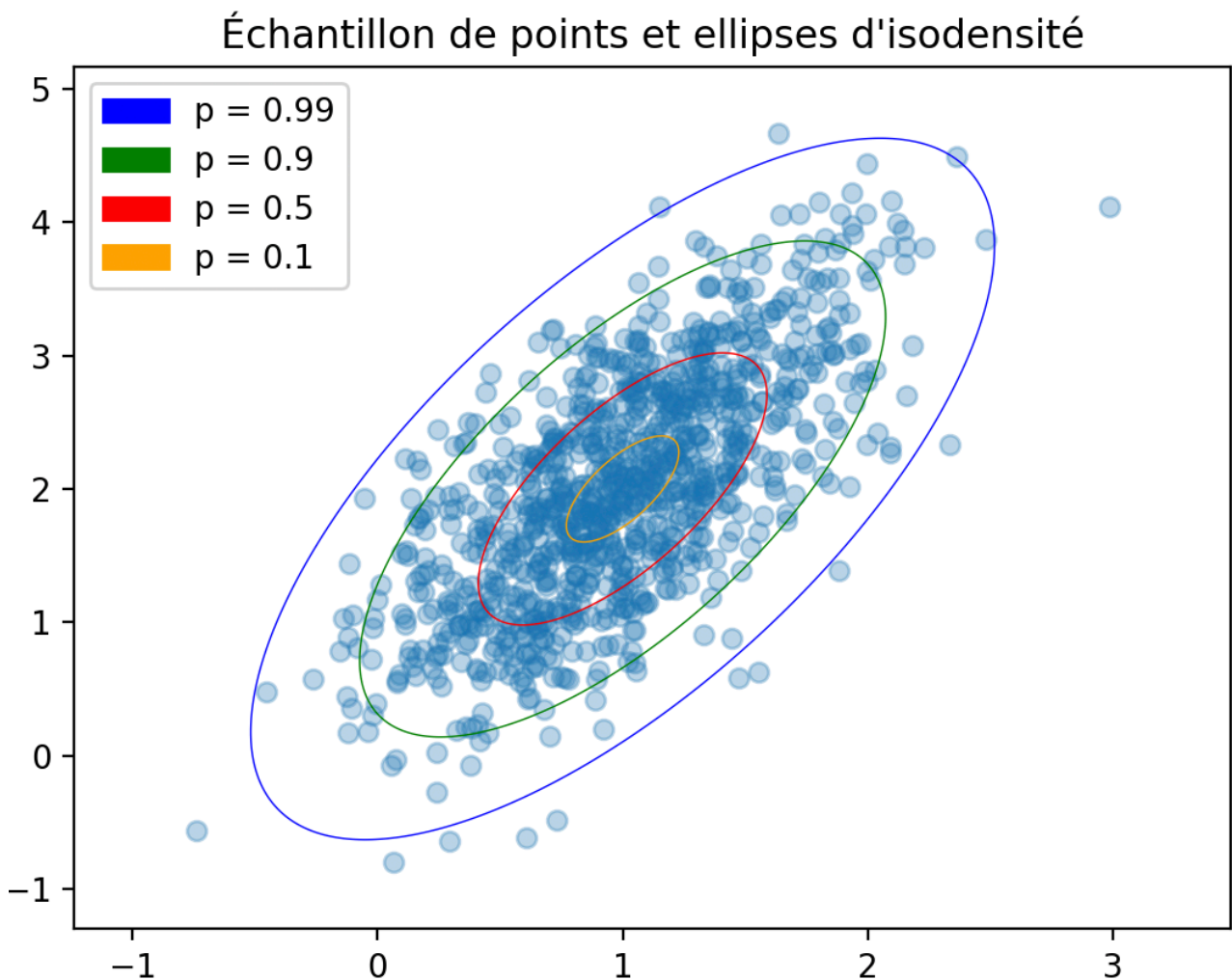
On obtient ainsi l'estimateur de  $\Sigma$ .

## 2.2 Etude Pratique

1. Dans la représentation graphique ci-dessous, nous observons un échantillon de 1000 points tirés selon une loi normale bidimensionnelle avec les paramètres suivants :

$$\mu = [1,2] \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,3 \\ 0,3 & 0,75 \end{pmatrix}$$

Nous utilisons les ellipses d'isodensité pour illustrer la dispersion des points autour de l'espérance et pour visualiser la répartition de la densité de probabilité dans l'espace. Ces ellipses, tracées avec différentes probabilités, nous permettent d'analyser et d'évaluer la précision des estimateurs de l'espérance et de la matrice de covariance pour cet échantillon.

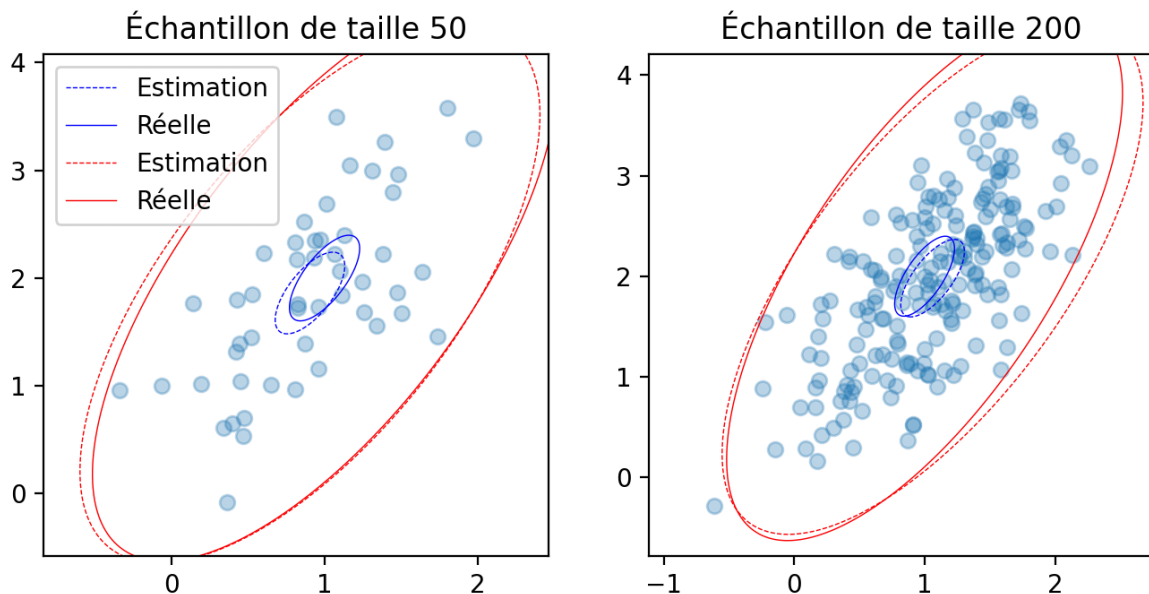


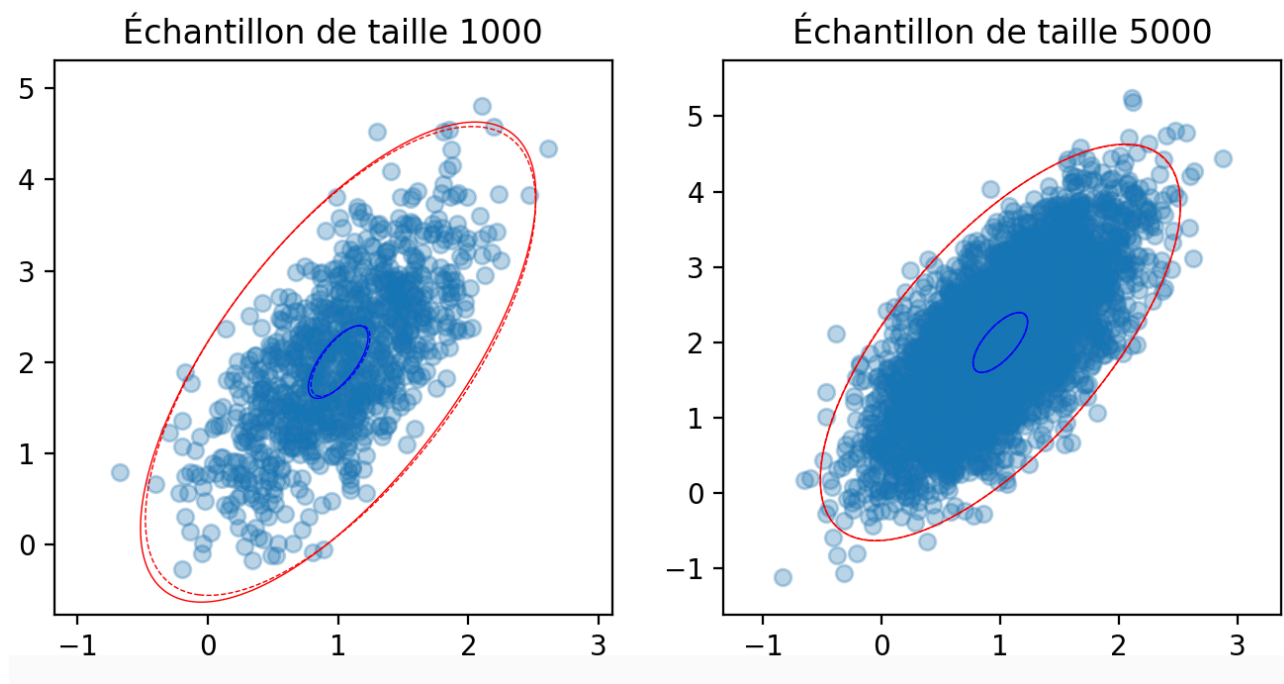


Le graphique met en évidence de manière explicite la relation entre les probabilités et les ellipses d'isodensité correspondantes. Lorsque la probabilité associée à une ellipse d'isodensité augmente, l'ellipse s'agrandit, englobant ainsi une proportion plus importante des points de l'échantillon. Cette observation confirme l'efficacité des estimateurs utilisés pour déterminer l'espérance et la matrice de covariance. De plus, ce graphique offre une représentation visuelle intuitive de la dispersion des points et de la répartition de la densité de probabilité dans le cadre de l'étude de la loi normale bidimensionnelle.

2. L'estimateur  $\hat{\mu}$  a pour but d'estimer l'espérance  $\mu$  de la distribution normale bidimensionnelle, tandis que l'estimateur  $\hat{\Sigma}$  vise à estimer la matrice de covariance  $\Sigma$  correspondante. Dans cette représentation graphique, nous examinons la convergence des estimateurs  $\mu$  et  $\Sigma$  pour des échantillons de points tirés selon une loi normale bidimensionnelle, avec des tailles d'échantillon variables. Les ellipses d'isodensité associées à chaque estimateur sont tracées pour différentes tailles d'échantillon, ce qui permet d'observer visuellement la qualité de ces estimateurs à mesure que la taille de l'échantillon augmente. L'objectif de cette analyse est de démontrer l'efficacité des estimateurs pour différents échantillons et de mettre en évidence l'amélioration de leurs performances avec l'augmentation de la taille de l'échantillon.

### Convergence des estimateurs $\mu$ et $\Sigma$





Les graphiques démontrent de manière claire que les estimateurs de l'espérance  $\mu$  et de la matrice de covariance  $\Sigma$  convergent vers les valeurs réelles à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Les ellipses d'isodensité associées aux estimateurs se rapprochent de plus en plus des ellipses d'isodensité correspondant aux valeurs réelles, confirmant ainsi la convergence des estimateurs. Cette représentation visuelle met en évidence l'importance cruciale de la taille de l'échantillon pour obtenir une estimation précise des paramètres d'une distribution normale bidimensionnelle et démontre l'efficacité des estimateurs utilisés dans cette analyse.

### 3. Conclusion

En résumé, nous avons exploré la loi normale bidimensionnelle et ses propriétés, en nous concentrant sur les ellipses d'isodensité et les estimateurs de ses paramètres. Nous avons démontré que les ellipses d'isodensité sont des représentations graphiques des niveaux de densité de probabilité, et nous avons calculé la probabilité qu'un point tiré selon la loi  $Z$  se situe à l'intérieur de la région délimitée par une ellipse d'isodensité spécifique. De plus, nous avons examiné différentes méthodes permettant d'estimer les paramètres  $\mu$  et  $\Sigma$ .