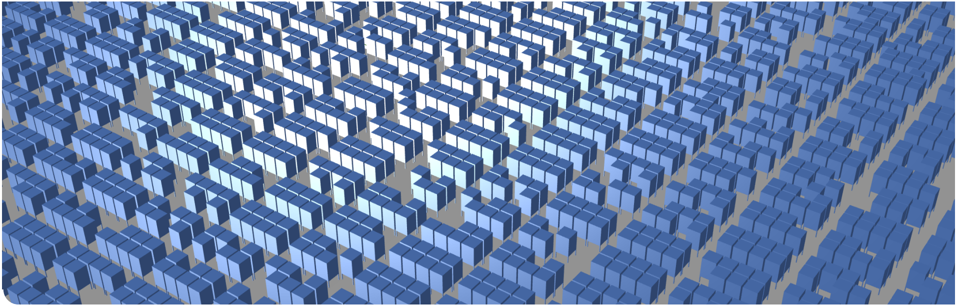
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Grundlagen des Operations Research

Teil 4 – Simplex-Phase 1, Sensitivitätsanalyse

Lin Xie | 02.11.2021

PROF. DR. LIN XIE - WIRTSCHAFTSINFORMATIK, INSBESONDERE OPERATIONS RESEARCH



Wiederholung

Simplex-Algorithmus Phase II

Zusammenfassung

Wiederholung

1. Bringe das LP in die Standardform.
2. Starte mit einer zulässigen Basislösung (evtl. Phase I ausführen).
3. Finde eine Nichtbasisvariable x_q, die den Zielfunktionswert verbessern kann.
   (Bei Maximierung: Nichtbasisvariablen mit positiven Koeffizienten.)
   Falls es keine gibt, dann ist die aktuelle Basislösung optimal.
   (Bei Maximierung: alle Koeffizienten in der Zielfunktion negativ.)
4. Bestimme den Wert für x_q, der zur größtmöglichen Verbesserung der Zielfunktion führt, ohne dass eine Basisvariable unzulässig wird. Sei x_p die erste Basisvariable, die den Wert von x_q beschränkt.
   Falls es keine solche Beschränkung für x_q gibt, dann ist das Problem unbeschränkt.
5. Führe einen Pivotschritt durch, bei dem x_p die Basis verlässt und x_q in die Basis eintritt. Gehe zu Schritt 3.

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem

Wiederholung

Modell:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & z = & 120x_1 & +90x_2 & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to (s.t.)} & & & & \\
 & x_3 = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
 & x_4 = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
 & x_5 = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
 & x_6 = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

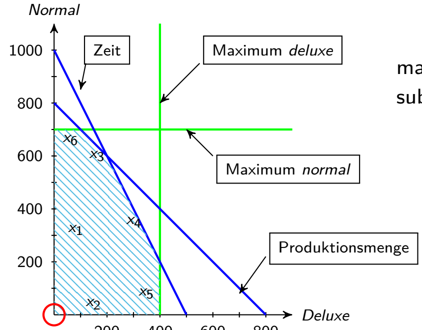
Die Lösung $x_1 = x_2 = 0$, also nichts zu produzieren, ist eine zulässige Lösung für dieses Problem.
Ist dies auch eine optimale Lösung für das Problem?
$\rightarrow$ Nein, aber wie kann die Lösung $x_1 = x_2 = 0$ verbessert werden?

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

Wiederholung

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400$ *und* $x_6 = 700$



$x_1 = x_2 = 0$

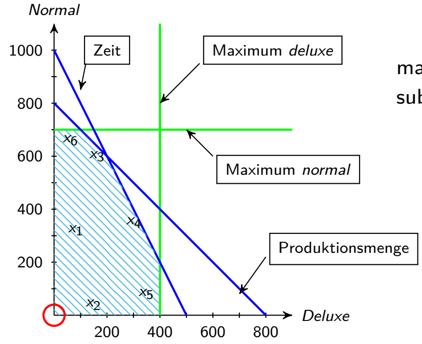
$$
\begin{array}{lllll}
\text{max } z & = & 120x_1 & +90x_2 & \\
\text{subject to} & & & & \\
x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \\
x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \\
x_5 & = 400 & -x_1 & & \\
x_6 & = 700 & & -x_2 & \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

Wiederholung

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400\ \mathit{und}\ x_6 = 700$



$x_1 = x_2 = 0$

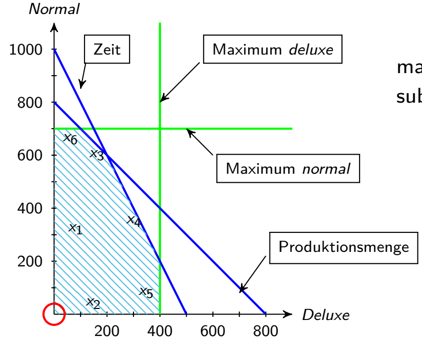
$$
\begin{array}{llll}
\max z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 \\
x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
x_5 & = 400 & -x_1 & \\
x_6 & = 700 & & -x_2 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

Wiederholung

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400$ *und* $x_6 = 700$



$x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{llll}
\max z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
x_5 & =400 & -x_1 & \\
x_6 & =700 & & -x_2 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_1 \leq 800$

$|x_1 \leq 500$

$|x_1 \leq 400$ Min!

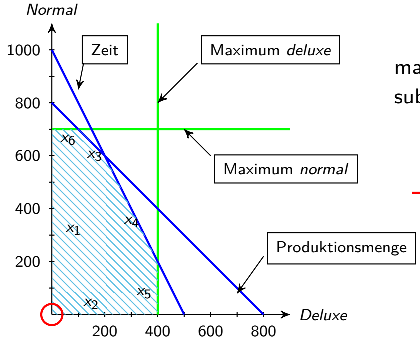
$|x_1 \leq \infty$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

Wiederholung

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800, \; x_4 = 6000, \; x_5 = 400 \; und \; x_6 = 700$



$x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{lll}
\max z & = & 120x_1 + 90x_2 \\
\text{subject to} & & \\
x_3 & = 800 & -x_1 - x_2 \\
x_4 & = 6000 & -12x_1 - 6x_2 \\
x_5 & = 400 & -x_1 \\
x_6 & = 700 & - x_2 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_1 \leq 800$

$|x_1 \leq 500$

$|x_1 \leq 400$ Min!

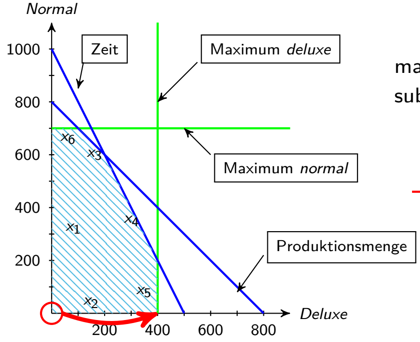
$|x_1 \leq \infty$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

Wiederholung

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400\ \textit{und}\ x_6 = 700$



$x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{llllll}
\max z & = & & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} \\
& x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
& x_5 & =400 & -x_1 & \\
& x_6 & =700 & & -x_2 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_1 \leq 800$

$|x_1 \leq 500$

$|x_1 \leq 400$ Min!

$|x_1 \leq \infty$

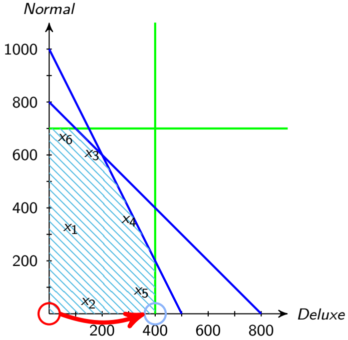
D.h. x_1 kommt in unsere Basis und x_5 verlässt die Basis.

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ und\ x_6 = 700$



$x_5 = x_2 = 0$

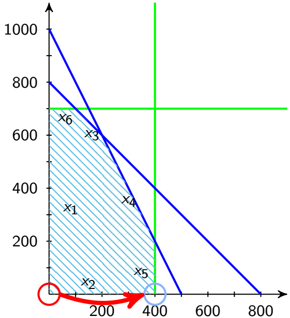
$$
\begin{aligned}
\max z &= 48000 + 90x_2 - 120x_5 \\
\text{subject to} & \\
x_3 &= 400 - x_2 + x_5 \\
x_4 &= 1200 - 6x_2 + 12x_5 \\
x_1 &= 400 - x_5 \\
x_6 &= 700 - x_2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ \mathit{und}\ x_6 = 700$



$x_5 = x_2 = 0$

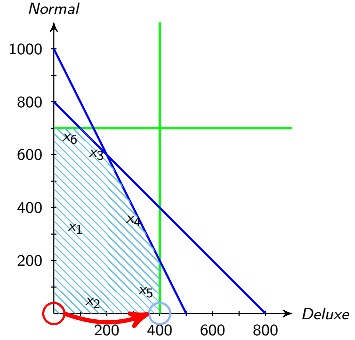
$$
\begin{aligned}
\max z &= 48000 + 90x_2 - 120x_5 \\
\text{subject to} & \\
x_3 &= 400 - x_2 + x_5 \\
x_4 &= 1200 - 6x_2 + 12x_5 \\
x_1 &= 400 - x_5 \\
x_6 &= 700 - x_2 \\
x_1, x_2, &x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ \mathit{und}\ x_6 = 700$



$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
\text{max } z &= 48000 + 90x_2 - 120x_5 \\
\text{subject to} & \\
x_3 &= 400 - x_2 + x_5 \\
x_4 &= 1200 - 6x_2 + 12x_5 \\
x_1 &= 400 - x_5 \\
x_6 &= 700 - x_2 \\
x_1, x_2, &x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Quotiententest:

$|x_2 \leq 400$

$|x_2 \leq 200$ Min!

$|x_2 \leq \infty$

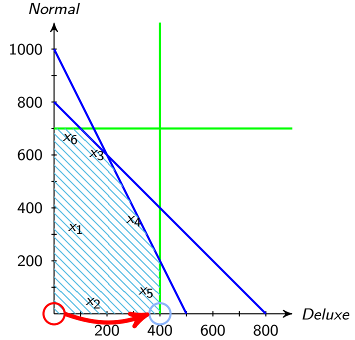
$|x_2 \leq 700$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400, \; x_3 = 400, \; x_4 = 1200 \; und \; x_6 = 700$



$x_5 = x_2 = 0$

$$\begin{array}{llll}
\text{max } z & = 48000 & + 90x_2 & - 120x_5 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & = 400 & - x_2 & + x_5 \\
x_4 & = 1200 & - 6x_2 & + 12x_5 \\
x_1 & = 400 & & - x_5 \\
x_6 & = 700 & - x_2 & \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}$$

Quotiententest:

$|x_2 \leq 400$

$|x_2 \leq 200$ Min!

$|x_2 \leq \infty$

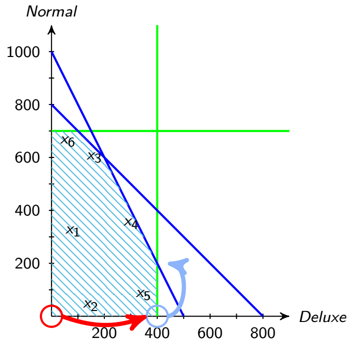
$|x_2 \leq 700$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200$ *und* $x_6 = 700$



$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{llllll}
\max z & = 48000 & +90x_2 & -120x_5 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & = 400 & -x_2 & +x_5 \\
x_4 & = 1200 & -6x_2 & +12x_5 \\
x_1 & = 400 & & -x_5 \\
x_6 & = 700 & -x_2 & \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_2 \leq 400$

$|x_2 \leq 200$ Min!

$|x_2 \leq \infty$

$|x_2 \leq 700$

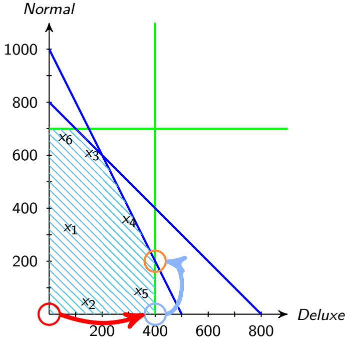
D.h. x_2 kommt in unsere Basis und x_4 verlässt die Basis.

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200\ und\ x_6 = 500$



$x_5 = x_4 = 0$

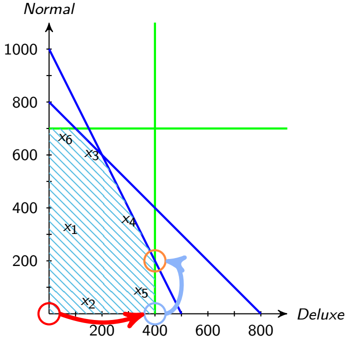
$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= 66000 - 15x_4 + 60x_5\\
\text{subject to}\\
x_3 &= 200 + \tfrac{1}{6}x_4 - x_5\\
x_2 &= 200 - \tfrac{1}{6}x_4 + 2x_5\\
x_1 &= 400 \qquad\quad - x_5\\
x_6 &= 500 + \tfrac{1}{6}x_4 - 2x_5\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200\ und\ x_6 = 500$



$x_5 = x_4 = 0$

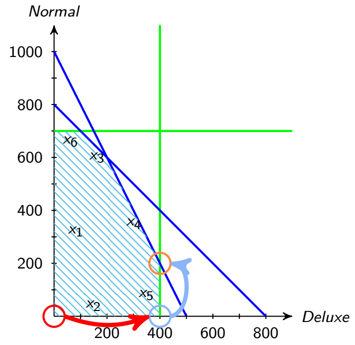
$$
\begin{aligned}
\max z &= 66000 - 15x_4 + 60x_5\\
\text{subject to}&\\
x_3 &= 200 + \tfrac{1}{6}x_4 - x_5\\
x_2 &= 200 - \tfrac{1}{6}x_4 + 2x_5\\
x_1 &= 400 \phantom{+ \tfrac{1}{6}x_4} - x_5\\
x_6 &= 500 + \tfrac{1}{6}x_4 - 2x_5\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200\ \mathit{und}\ x_6 = 500$



$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{array}{llllll}
\max z & = 66000 & -15x_4 & & +60x_5 \\
\text{subject to} & & & & \\
x_3 & = 200 & +\frac{1}{6}x_4 & & -x_5 \\
x_2 & = 200 & -\frac{1}{6}x_4 & & +2x_5 \\
x_1 & = 400 & & & -x_5 \\
x_6 & = 500 & +\frac{1}{6}x_4 & & -2x_5 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_5 \leq 200$ Min!

$|x_5 \leq \infty$

$|x_5 \leq 400$

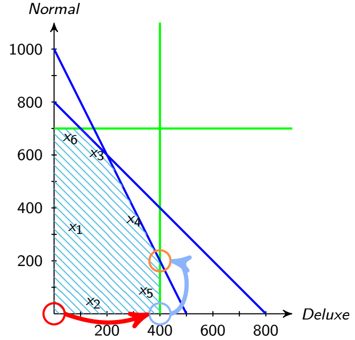
$|x_5 \leq 250$

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200\ \mathit{und}\ x_6 = 500$



$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{array}{llllll}
\max z & = 66000 & -15x_4 & +60x_5 & & \\
\text{subject to} & & & & & \\
x_3 & = 200 & +\frac{1}{6}x_4 & -x_5 & & |x_5 \leq 200 \text{ Min!} \\
x_2 & = 200 & -\frac{1}{6}x_4 & +2x_5 & & |x_5 \leq \infty \\
x_1 & = 400 & & -x_5 & & |x_5 \leq 400 \\
x_6 & = 500 & +\frac{1}{6}x_4 & -2x_5 & & |x_5 \leq 250 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} & &
\end{array}
$$

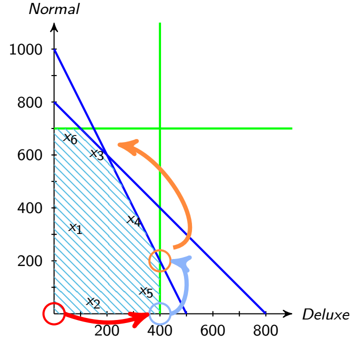
Quotiententest:

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200\ und\ x_6 = 500$



$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
\max z & =66000 & -15x_4 & +60x_5 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & =200 & +\frac{1}{6}x_4 & -x_5 \\
x_2 & =200 & -\frac{1}{6}x_4 & +2x_5 \\
x_1 & =400 & & -x_5 \\
x_6 & =500 & +\frac{1}{6}x_4 & -2x_5 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_5 \leq 200$ Min!

$|x_5 \leq \infty$

$|x_5 \leq 400$

$|x_5 \leq 250$

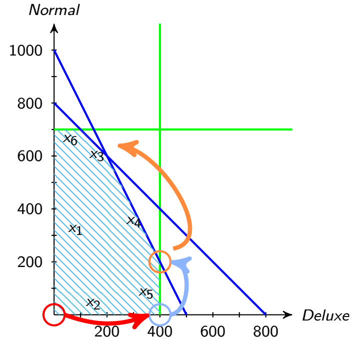
D.h. x_5 kommt in unsere Basis und x_3 verlässt die Basis.

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 4.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_3 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 200,\ x_2 = 600,\ x_5 = 200\ \mathit{und}\ x_6 = 100$



$x_3 = x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= 78000 - 60x_3 - 5x_4 \\
\text{subject to} \quad & \\
x_5 &= 200 \quad - x_3 \quad + \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_2 &= 600 \quad - 2x_3 \quad + \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_1 &= 200 \quad + x_3 \quad - \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_6 &= 100 \quad + 2x_3 \quad - \tfrac{1}{6}x_4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

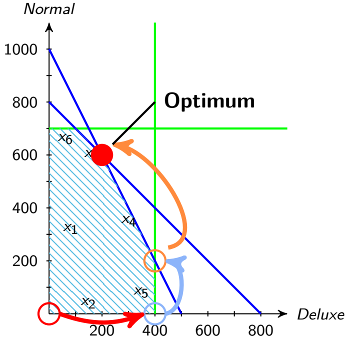
Sind weitere Verbesserungen möglich?

Simplex-Algorithmus Phase II

Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 4.Iteration

Wiederholung

- Basislösung:
  NBV: $x_3 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 200,\ x_2 = 600,\ x_5 = 200$ *und* $x_6 = 100$



$x_3 = x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= 78000 - 60x_3 - 5x_4 \\
\text{subject to} \\
x_5 &= 200 \quad - x_3 \quad + \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_2 &= 600 \quad - 2x_3 \quad + \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_1 &= 200 \quad + x_3 \quad - \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_6 &= 100 \quad + 2x_3 \quad - \tfrac{1}{6}x_4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Sind weitere Verbesserungen möglich?
$\Rightarrow$ Nein. Die optimale Lösung wurde gefunden.

Frage

m := Anzahl der Restriktionen eines LP-Problems
n := Anzahl der Entscheidungsvariablen eines LP-Problems

A. Basis ist eine m*m-Matrix

B. Basis ist eine n*n-Matrix

C. Die Basismatrix ist singulär

D. Die Vektoren in der Basis sind linear abhängig

E. Weiß nicht

Definition: Basis

Wiederholung

- **Definition:** Jede nichtsinguläre m x m-Teilmatrix B von A heißt *Basis* des Standardmodells. m ist hierbei die Anzahl der Restriktionen des LPs.
- B *nichtsingulär* heißt, dass die m-dimensionalen Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind.

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 800 \\ 12x_1 & +6x_2 & & +x_4 & & = 6000 \\ x_1 & & & & +x_5 \quad & = 400 \\ & x_2 & & & \quad +x_6 & = 700 \end{array}$$

B ist hierbei immer eine *Einheitsmatrix*

- Wenn die Basis als Menge von Basisvariablen aufgeschrieben wird, so enthält diese Menge immer genau so viele Elemente wie es Restriktionen im Problem gibt (ohne die NNB): B=$\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

Frage

Für eine degenerierte Basislösung gilt:

- A. Einer Ecke entsprechen mehrere unterschiedliche Basen
- B. Die minimale Anzahl Hyperebenen wie nötig kreuzen sich
- C. Alle Basisvariablen sind ungleich null
- D. Sie treten in Praxisproblemen nur selten auf
- E. Weiß nicht

Spezialfälle von Lösungen

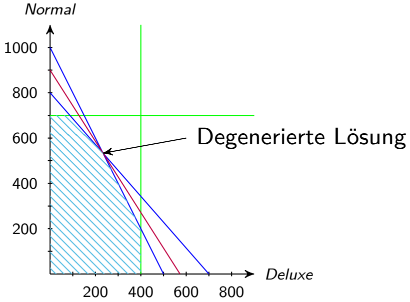
Wiederholung

Degenerierte Lösung:

- Mehr Hyperebenen als nötig kreuzen sich in einer Ecke.
- Mindestens eine der Basisvariablen in der Basislösung ist gleich Null.

Beispiel:
Basis: $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$
Nichtbasisvariablen:
$x_3 = x_4 = 0$
Zusätzlich Basisvariable
$x_7 = 0$

Gleiche Ecke mit:
Basis: $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_4\}$
Nichtbasisvariablen:
$x_3 = x_7 = 0$



Frage

Bei der Lösung mit Simplex-Algorithmus gilt für das u.a. Modell:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & =5000 & +90x_2 & +120x_5 \\
\text{subject to} & & & & \\
 & x_3 & =400 & -x_2 & -x_5 \\
 & x_4 & =1200 & -6x_2 & -12x_5 \\
 & x_1 & =300 & & -x_5 \\
 & x_6 & =700 & -x_2 & \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

A. Die aktuelle Basis ist $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

B. Das Pivot-Element ist $-x_2$ auf den ersten Zeile des Modells

C. Das Pivot-Element ist $-x_5$ auf den ersten Zeile des Modells

D. Das Pivot-Element ist $-12x_5$ auf der zweiten Zeile der Restriktionen

E. Weiß nicht

Simplex-Algorithmus Phase I

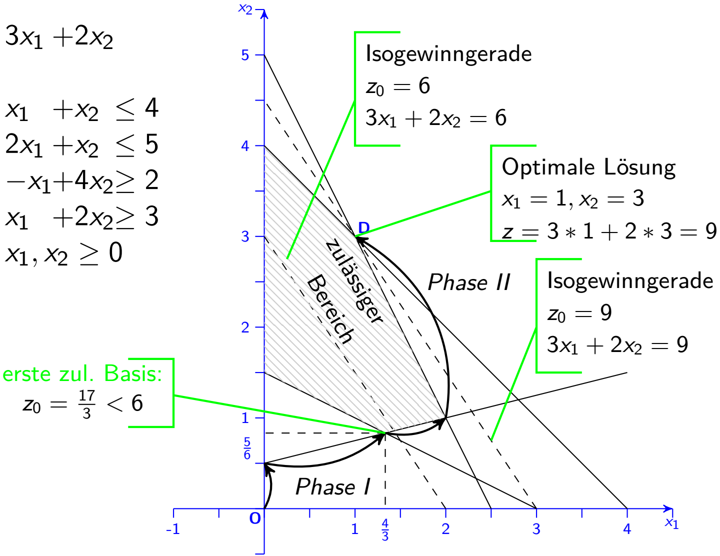
Unzulässige Ausgangsbasislösung

- Wie vorgehen, wenn die Ausgangsbasislösung unzulässig ist?
  $\Rightarrow$ Phase I der Simplex-Methode.
  Diese versucht eine gültige Startbasis für die Phase II zu erzeugen.

- Phase I Grundidee
  Ein Hilfsproblem mit einer neuen Zielfunktion, welche die Summe der Unzulässigkeiten minimiert, wird gelöst
  $\rightarrow$ Maximiere die Summe der Variablen die negative – also unzulässige – Werte annehmen.

Grafische Darstellung

$$\begin{array}{ll} \max z= & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Simplex-Algorithmus Phase I

Beispiel:

Standardformat?

$$\begin{array}{lllll}
\max & z= & 3x_1 & +2x_2 & \\
\text{s.t.} & & & & \\
& x_1 & +x_2 & \leq 4 & \\
& 2x_1 & +x_2 & \leq 5 & \\
& -x_1 & +4x_2 & \geq 2 & \\
& x_1 & +2x_2 & \geq 3 & \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

Anfangsbasis?

Basislösung

Simplex-Algorithmus Phase I

Beispiel: **Standardformat?**

$$\begin{array}{llll} \max & z= & 3x_1 & +2x_2 \\ \text{s.t.} & & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ & -x_1 & +4x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & +2x_2 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} \max & z= & 3x_1 & +2x_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & z- & 3x_1 & -2x_2 & & & & & & = 0 \\ & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & = 4 \\ & & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & & = 5 \\ & & -x_1 & +4x_2 & & & -x_5 & & & = 2 \\ & & x_1 & +2x_2 & & & & -x_6 & & = 3 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Anfangsbasis? BV:(z),x_3, x_4, x_5, x_6 NBV:x_1, x_2

Basislösung 0,4,5,-2,-3, 0,0

Diese Basislösung ist nicht zulässig!$\rightarrow$ Phase I

Wie soll die Zielfunktion in der Phase I lauten?

Simplex-Algorithmus Phase I

Beispiel:

$$\begin{array}{lllll} \max & z= & 3x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.t.} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ & -x_1 & +4x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & +2x_2 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Standardformat?

$$\begin{array}{llllllllll} \max & z= & 3x_1 & +2x_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & z- & 3x_1 & -2x_2 & & & & & = 0 \\ & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = 4 \\ & & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & = 5 \\ & & -x_1 & +4x_2 & & & -x_5 & & = 2 \\ & & x_1 & +2x_2 & & & & -x_6 & = 3 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Anfangsbasis? BV:(z), x_3, x_4, x_5, x_6 NBV: x_1, x_2

Basislösung 0,4,5,-2,-3, 0,0

Diese Basislösung ist nicht zulässig! $\rightarrow$ Phase I

Wie soll die Zielfunktion in der Phase I lauten?

Simplex-Algorithmus Phase I

Standardformat:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & z= & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & z- & 3x_1 & -2x_2 & & & & & = & 0 \\
& & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = & 4 \\
& & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & = & 5 \\
& & -x_1 & +4x_2 & & & -x_5 & & = & 2 \\
& & x_1 & +2x_2 & & & & -x_6 & = & 3 \\
& & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, \boxed{x_5, x_6} \geq 0}
\end{array}
$$

Basis B_0 aus Schlupfvariablen:

$$
\begin{array}{lllll}
z= & 0 & +3x_1 & +2x_2 \\
x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 \\
x_4 = & 5 & -2x_1 & -x_2 \\
x_5 = & \text{-2} & -x_1 & +4x_2 \\
x_6 = & \text{-3} & +x_1 & +2x_2
\end{array}
$$

Simplex-Algorithmus Phase I

Standardformat:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & z= & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & z- & 3x_1 & -2x_2 & & & & & = 0 \\
& & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = 4 \\
& & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & = 5 \\
& & -x_1 & +4x_2 & & & -x_5 & & = 2 \\
& & x_1 & +2x_2 & & & & -x_6 & = 3 \\
& & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, \boxed{x_5, x_6} \geq 0}
\end{array}
$$

Basis B_0 aus Schlupfvariablen:

$$
\begin{array}{llll}
z= & 0 & +3x_1 & +2x_2 \\
x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 \\
x_4 = & 5 & -2x_1 & -x_2 \\
x_5 = & \text{-2} & -x_1 & +4x_2 \\
x_6 = & \text{-3} & +x_1 & +2x_2
\end{array}
$$

Neue Zielfunktion für Phase I:

max s

Wobei s$=x_5 + x_6 = (-2 - x_1 + 4x_2) + (-3 + x_1 + 2x_2) = -5 + 6x_2$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 1:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s= & -5 & & & +6x_2 \\
\text{s.t.} & & & & & \\
& z= & 0 & & +3x_1 & +2x_2 \\
& x_3 = & 4 & & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 = & 5 & & -2x_1 & -x_2 \\
& x_5 = & -2 & & -x_1 & +4x_2 \\
& x_6 = & -3 & & +x_1 & +2x_2 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 1:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s= & -5 & & +6x_2 \\
\text{s.t.} & & & & \\
& z= & 0 & +3x_1 & +2x_2 \\
& x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 = & 5 & -2x_1 & -x_2 \\
& x_5 = & -2 & -x_1 & +4x_2 \\
& x_6 = & -3 & +x_1 & +2x_2 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 1:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & s= & -5 & & +6x_2 \\
\text{s.t.} & & & & \\
& z= & 0 & +3x_1 & +2x_2 \\
& x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 = & 5 & -2x_1 & -x_2 \\
& x_5 = & -2 & -x_1 & +4x_2 \\
& x_6 = & -3 & +x_1 & +2x_2 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\\ \\ \\
\uparrow x_2 & 4 \\
\uparrow x_2 & 5 \\
\uparrow x_2 & \frac{1}{2} \\
\uparrow x_2 & \frac{3}{2} \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 1:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s = & -5 & & +6x_2 & & \\
\text{s.t.} & & & & & & \\
 & z = & 0 & +3x_1 & +2x_2 & & \\
 & x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 & \color{red}{\uparrow x_2} & \color{red}{4} \\
 & x_4 = & 5 & -2x_1 & -x_2 & \color{red}{\uparrow x_2} & \color{red}{5} \\
 & x_5 = & -2 & -x_1 & +4x_2 & \color{red}{\uparrow x_2} & \color{red}{\frac{1}{2}} \quad \color{red}{\leftarrow \textbf{Min}} \\
 & x_6 = & -3 & +x_1 & +2x_2 & \color{red}{\uparrow x_2} & \color{red}{\frac{3}{2}} \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 1:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s= & -5 & & +6x_2 & & \\
\text{s.t.} & & & & & & \\
& z= & 0 & +3x_1 & +2x_2 & & \\
& x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 & \uparrow x_2 & 4 \\
& x_4 = & 5 & -2x_1 & -x_2 & \uparrow x_2 & 5 \\
& x_5 = & -2 & -x_1 & +4x_2 & \uparrow x_2 & \frac{1}{2} \quad \leftarrow \textbf{Min} \\
& x_6 = & -3 & +x_1 & +2x_2 & \uparrow x_2 & \frac{3}{2} \\
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Basistausch: x_2 hinein und heraus x_5

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 2:

Umgewandeltes System nach Basistausch:

$$\begin{array}{lllll} \max & s= & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_5 \\ \text{s.t.} & & & & \\ & z= & 1 & +\frac{7}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 \\ & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_5 \\ & x_3 = & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 \\ & x_4 = & \frac{9}{2} & -\frac{9}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 \\ & x_6 = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Basis B1: NBV: x_1, x_5 BV:(s, z,) $x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6$

Basislösung: 0 0 $-2, 1, \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ -2$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 2:

Umgewandeltes System nach Basistausch:

$$
\begin{array}{lrl|l|l}
\max & s= & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_5 \\
\text{s.t.} & & & & \\
 & z= & 1 & +\frac{7}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 \\
 & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_5 \\
 & x_3 = & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 \\
 & x_4 = & \frac{9}{2} & -\frac{9}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 \\
 & x_6 = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Basis B1: NBV: x_1, x_5 BV:(s, z,) $x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6$

Basislösung: 0 0 $-2, 1, \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ -2$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 2:

Umgewandeltes System nach Basistausch:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & s = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_5 \\
\text{s.t.} & & & & \\
& z = & 1 & +\frac{7}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 \\
& x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_5 \\
& x_3 = & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 \\
& x_4 = & \frac{9}{2} & -\frac{9}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 \\
& x_6 = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 \\
& \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

$x_1 \uparrow \infty$

$x_1 \uparrow \frac{14}{5}$

$x_1 \uparrow 2$

$x_1 \uparrow \frac{4}{3}$

Basis B1: NBV: x_1, x_5 BV:(s, z,) $x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6$

Basislösung: $0\ 0$ $\quad -2, 1, \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ -2$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 2:

Umgewandeltes System nach Basistausch:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s= & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_5 & \\
\text{s.t.} & & & & & \\
 & z= & 1 & +\frac{7}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & \\
 & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_5 & x_1 \uparrow \infty \\
 & x_3 = & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 & x_1 \uparrow \frac{14}{5} \\
 & x_4 = & \frac{9}{2} & -\frac{9}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 & x_1 \uparrow 2 \\
 & x_6 = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & x_1 \uparrow \frac{4}{3} \quad \leftarrow \textit{min} \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Basis B1: NBV: x_1, x_5 BV:(s, z,) $x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6$

Basislösung: $0\ 0$ $\quad -2, 1, \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ -2$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 2:

Umgewandeltes System nach Basistausch:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_5 & \\
\text{s.t.} & & & & & \\
& z = & 1 & +\frac{7}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & \\
& x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_5 & {\color{red} x_1 \uparrow \infty} \\
& x_3 = & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 & {\color{red} x_1 \uparrow \frac{14}{5}} \\
& x_4 = & \frac{9}{2} & -\frac{9}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_5 & {\color{red} x_1 \uparrow 2} \\
& x_6 = & -2 & +\frac{3}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & {\color{red} x_1 \uparrow \frac{4}{3}} \quad {\color{red} \leftarrow \textit{min}} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

Basis B1: NBV: x_1, x_5 BV:(s, z,) $x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6$

Basislösung: $0\ 0$ $\quad -2, 1, \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ -2$

Basistausch: x_1 hinein und heraus x_6

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 3:

Setze $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6$ ein:

$s = -2 + \frac{3}{2}(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6) + \frac{3}{2}x_5 = 0 + x_5 + x_6$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & s = & & x_5 & +x_6 \\
\text{s.t.} & & & & \\
& z = & \frac{17}{3} & -\frac{2}{3}x_5 & +\frac{7}{3}x_6 \\
& x_1 = & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}x_5 & +\frac{2}{3}x_6 \\
& x_2 = & \frac{5}{6} & +\frac{1}{6}x_5 & +\frac{1}{6}x_6 \\
& x_3 = & \frac{11}{6} & +\frac{1}{6}x_5 & -\frac{5}{6}x_6 \\
& x_4 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & -\frac{3}{2}x_6
\end{array}
$$

Simplex-Algorithmus Phase I

Iteration 3:

Setze $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6$ ein:

$$s = -2 + \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6\right) + \frac{3}{2}x_5 = 0 + x_5 + x_6$$

$$\begin{array}{lrlllll}
\max & s = & & x_5 & +x_6 & & \\
\text{s.t.} & & & & & & \\
& z = & \frac{17}{3} & -\frac{2}{3}x_5 & +\frac{7}{3}x_6 & & \\
& x_1 = & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}x_5 & +\frac{2}{3}x_6 & & \textbf{\textit{Ende Phase I}} \\
& x_2 = & \frac{5}{6} & +\frac{1}{6}x_5 & +\frac{1}{6}x_6 & & \\
& x_3 = & \frac{11}{6} & +\frac{1}{6}x_5 & -\frac{5}{6}x_6 & & \\
& x_4 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & -\frac{3}{2}x_6 & &
\end{array}$$

Die Unzulässigkeiten sind abgebaut (s=0 und $x_5, x_6 = 0$, da NBV)!

Ausgangsbasis B2: NBV: x_5, x_6 BV:(z,) $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$

Basislösung: 0 0 $\frac{17}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{11}{6},\ \frac{3}{2}$

Simplex-Algorithmus Phase I

Ausgangssystem für Phase II ist das modifizierte System aus der letzten Iteration in Phase I:

$$
\begin{array}{lrcccc}
\max & z = & \frac{17}{3} & -\frac{2}{3}x_5 & +\frac{7}{3}x_6 \\
\text{s.t.} & & & & \\
 & x_1 = & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}x_5 & +\frac{2}{3}x_6 \\
 & x_2 = & \frac{5}{6} & +\frac{1}{6}x_5 & +\frac{1}{6}x_6 \\
 & x_3 = & \frac{11}{6} & +\frac{1}{6}x_5 & -\frac{5}{6}x_6 \\
 & x_4 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & -\frac{3}{2}x_6
\end{array}
$$

Zusammenfassung Simplex Phase I

1. Bringe das LP in die Standardform.
2. Prüfe, ob die Basislösung unzulässig ist. Falls ja, starte Simplex Phase I. Ansonsten gehe zu Schritt 9.
3. Stelle neue Zielfunktion s auf mit max s = Summe aller unzulässigen Variablen. Ersetze die Variablen in s so, dass nur NBV in dieser Gleichung stehen.
4. Stelle das neue LP mit der Zielfunktion max s auf und nehme z auch als Restriktion auf.
5. Falls alle Basisvariablen zulässig sind, ist eine zulässige Lösung gefunden. Gehe zu Schritt 8. Ansonsten: Finde ein x_q in s, das den Zielfunktionswert für s verbessern kann (positiver Koeffizient). Falls es kein solches x_q gibt und es noch unzulässige Basisvariablen gibt, dann hat das Originalproblem keine zulässige Lösung. Beende den Algorithmus.
6. Bestimme die Werte für x_q, sodass die jeweilige Basisvariable auf Null gesetzt wird. Suche das Minimum. Die zugehörige Basisvariable ist x_p.
7. Führe einen Pivotschritt durch, bei dem x_p die Basis verlässt und x_q in die Basis eintritt. Gehe zu Schritt 5.
8. Lösche die Zielfunktion s und stelle LP mit modifizierter Zielfunktion max z auf. Gehe zu Schritt 9.
9. Start Simplex Phase II.

Vorbereitungen für die Sensitivitätsanalyse

Exkurs: Ökonomische Interpretation von LP-Lösungen

Nobel-Preis für Wirtschaftswissenschaften (1975)
für L. V. Kantorovich und T. C. Koopmans für den Beitrag zur Theorie der optimalen Ressourcen-Verwendung

Quelle: nobelprize.org

Beispiel: Fahrradfabrik – Ausgangs- und Optimalssystem

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} \\
 & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
 & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
 & x_5 & =400 & -x_1 & \\
 & x_6 & =700 & & -x_2 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} \\
 & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Beispiel: Fahrradfabrik – Ausgangs- und Optimalssystem

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & & \\
& x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
& x_5 & =400 & -x_1 & \\
& x_6 & =700 & & -x_2 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} & & & & \\
& x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Strukturvariable: x_1, x_2; Schlupfvariable: x_3, x_4, x_5, x_6

Beispiel: Fahrradfabrik – Ausgangs- und Optimalssystem

$$
\begin{array}{lllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & & \\
 & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
 & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
 & x_5 & =400 & -x_1 & \\
 & x_6 & =700 & & -x_2 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} & & & & \\
 & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Strukturvariable: x_1, x_2; Schlupfvariable: x_3, x_4, x_5, x_6

Frage

In dem optimalen Gleichungssystem:

- Welche Variablen sind in der Basis? Sind auch Schlupfvariablen in der Basis?

Beispiel: Fahrradfabrik – Ausgangs- und Optimalssystem

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 & \\
\text{subject to} & & & & & \\
 & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 & \\
 & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 & \\
 & x_5 & =400 & -x_1 & & \\
 & x_6 & =700 & & -x_2 & \\
 & & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} & & & & \\
 & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Strukturvariable: x_1, x_2; Schlupfvariable: x_3, x_4, x_5, x_6

Frage

In dem optimalen Gleichungssystem:

- Welche Variablen sind in der Basis? Sind auch Schlupfvariablen in der Basis?
- Welche Ressourcen sind aufgebraucht (Restriktionen sind aktiv? Hinweis: Der Wert einer NBV x_j bei der optimalen Lösung ist 0.)

Definition: Reduzierte Kosten und Schattenpreise

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & & & \\
& x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 & \\
& x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 & \\
& x_5 & =400 & -x_1 & & \\
& x_6 & =700 & & -x_2 & \\
& & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} & & & & \\
& x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

- Man kann die Einträge von den Struktur- bzw. Schlupfvariablen in der modifizierten Zielfunktion bei der berechneten optimalen Basislösung als Reduzierte Kosten bzw. Schattenpreise bezeichnen.

Definition: Reduzierte Kosten und Schattenpreise

$$\begin{array}{lllll} \max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\ \text{subject to} & & & & \\ & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\ & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\ & x_5 & =400 & -x_1 & \\ & x_6 & =700 & & -x_2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\ \text{subject to} & & & & \\ & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}$$

- Man kann die Einträge von den Struktur- bzw. Schlupfvariablen in der modifizierten Zielfunktion bei der berechneten optimalen Basislösung als Reduzierte Kosten bzw. Schattenpreise bezeichnen.
- Die **Reduzierten Kosten (Reduced Cost)** einer strukturellen Variable stellt die marginale Auswirkung im Zielfunktionswert dar, wenn der Wert der Variable um eine Einheit erhöht wird.
  $c_1' = 0, c_2' = 0$

Definition: Reduzierte Kosten und Schattenpreise

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} \\
 & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
 & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
 & x_5 & =400 & -x_1 & \\
 & x_6 & =700 & & -x_2 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
\max & z & =78000 & \color{red}{-60}x_3 & \color{red}{-5}x_4 \\
\text{subject to} \\
 & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

- Man kann die Einträge von den Struktur- bzw. Schlupfvariablen in der modifizierten Zielfunktion bei der berechneten optimalen Basislösung als Reduzierte Kosten bzw. Schattenpreise bezeichnen.
- Die **Reduzierten Kosten (Reduced Cost)** einer strukturellen Variable stellt die marginale Auswirkung im Zielfunktionswert dar, wenn der Wert der Variable um eine Einheit erhöht wird.
  $c'_1 = 0, c'_2 = 0$
- Der **Schattenpreis (Shadow Price)** einer Restriktion gibt an, wie viel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn die Kapazität der entsprechenden Ressource um eine Einheit erhöht wird.
  $c'_3 = -60, c'_4 = -5, c'_5 = 0, c'_6 = 0$

Beispiel: Fahrradfabrik – Interpretation der reduzierten Kosten

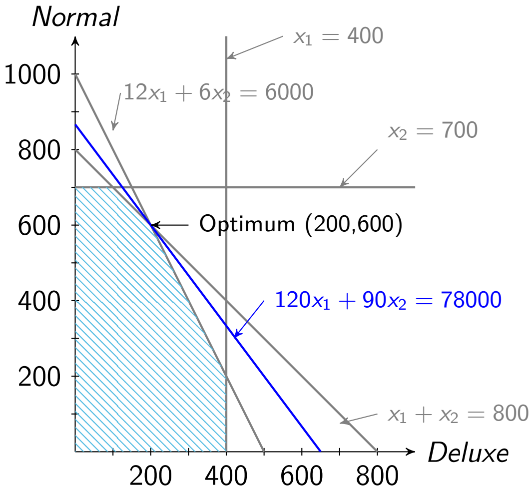
$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} \\
& x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
& x_5 & =400 & -x_1 & \\
& x_6 & =700 & & -x_2 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} \\
& x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_1 & =200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

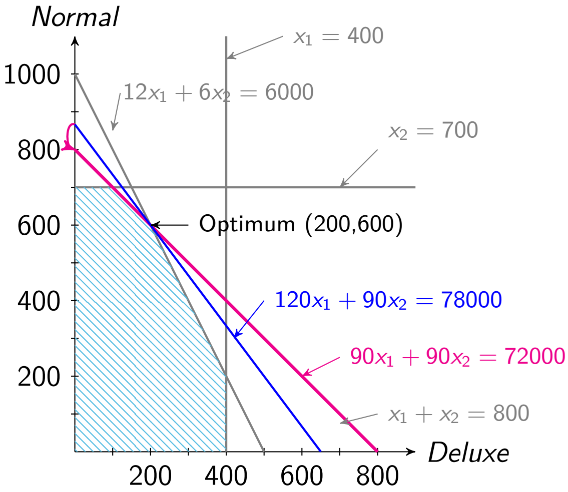
Frage 1

Wie ändert sich die Lösung, wenn der Preis vom Fahrradtyp Deluxe marginal erhöht oder reduziert wird?

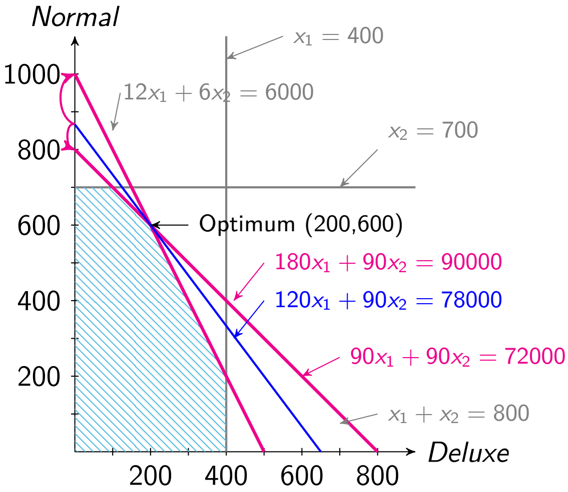
Beispiel: Fahrradfabrik – Grafische Lösung



Beispiel: Fahrradfabrik – Grafische Lösung



Beispiel: Fahrradfabrik – Grafische Lösung



Beispiel: Fahrradfabrik – Interpretation der Schattenpreise

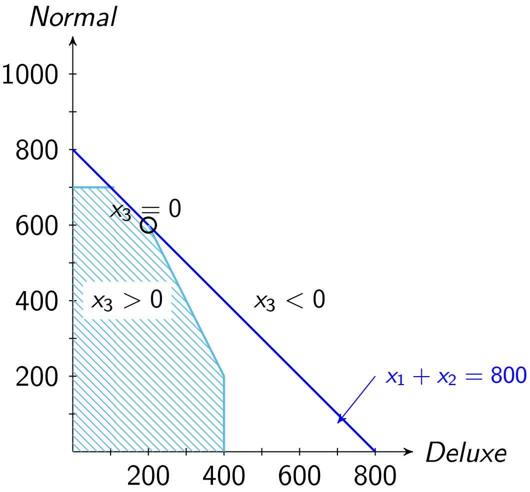
$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} \\
 & x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 \\
 & x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
 & x_5 & = 400 & -x_1 & \\
 & x_6 & = 700 & & -x_2 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = 78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} \\
 & x_5 & = 200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_2 & = 600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_1 & = 200 & +x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & x_6 & = 100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

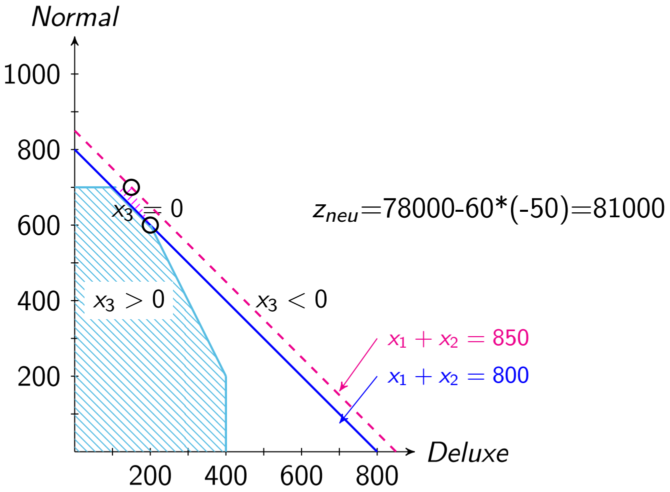
Frage 2

Wie ändert sich die Lösung, wenn die Produktionsmenge von Fahrräder marginal erhöht wird?

Beispiel: Fahrradfabrik – Grafische Lösung



Beispiel: Fahrradfabrik – Grafische Lösung



Wichtige Anmerkung I

- *Reduced Cost/Shadow Price* c'_j für eine NBV x_j ist ihr Koeffizient in der modifizierten Zielfunktion
  - Reduzierte Kosten *(reduced Cost)* für Strukturvariable x_j
  - Schattenpreis *(Shadow Prices)* für die zu der Schlupfvariable x_j gehörende Restriktion
- *Reduced Cost/Shadow Price* c'_j ist
  - negativ (oder 0) für eine Max-Zielfunktion
  - positiv (oder 0) für eine Min-Zielfunktion
- Der Wert einer NBV x_j bei der optimalen Lösung ist 0

Wichtige Anmerkung II

- Falls eine Veränderung eine Einschränkung des zulässigen Bereichs bewirkt, dann kann sich der Zielfunktionswert nicht verbessern, sondern höchstens verschlechtern.
- Falls eine Veränderung eine Erweiterung des zulässigen Bereichs bewirkt, dann wird sich der Zielfunktionswert nicht verschlechtern, sondern eher verbesseren (z.B. Kapazitätserweiterung).

Wichtige Anmerkung II

- Falls eine Veränderung eine Einschränkung des zulässigen Bereichs bewirkt, dann kann sich der Zielfunktionswert nicht verbessern, sondern höchstens verschlechtern.
- Falls eine Veränderung eine Erweiterung des zulässigen Bereichs bewirkt, dann wird sich der Zielfunktionswert nicht verschlechtern, sondern eher verbesseren (z.B. Kapazitätserweiterung).
- Offene Frage: Bis zu welchen Grenzen gelten *marginale* Veränderungen, die mit Hilfe der Reduzierten Kosten und Schattenpreise berechnet werden?

Sensitivitätsanalyse

Motivation

- Zum Zeitpunkt der Planung ist nicht immer genau bekannt, welche exakte Daten zukünftig eintreten werden.
- Unter **Sensitivitätsanalyse** versteht man das Testen der optimalen Lösung eines Optimierungsmodells auf Reaktionen gegenüber Veränderungen der folgenden Ausgangsdaten:
  - die Zielfunktionskoeffizienten c_j
  - die rechten Seiten b_i
  - die Koeffizienten a_{ij} der Nebenbedingungen
- Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, um welchen Wert ein einzelner Koeffizient c_j bzw. ein einzelnes b_i eines LPs verändert werden kann, ohne dass die optimale Lösung ihre Optimalitätseigenschaft veliert.

Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

- In welchem Intervall $[c_k - c_k^-, c_k + c_k^+]$ sich der Zielfunktionskoeffizient c_k bewegen darf, ohne dass die optimale Basislösung ihre Optimalitätseigenschaft verliert, d.h. ohne dass ein Basistausch erforderlich wird.
- Ist x_k **Nichtbasisvariable** mit den aktuellen Reduzierten Kosten $c_k^{'}$, so gilt $c_k^- = \infty$ und $c_k^+ = -c_k^{'}$.
- Ist x_k **Basisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$c_k^- := \left\{ \begin{array}{cl} \infty, & \text{es ex. kein } a^{'}_{\sigma(k),j} < 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{c_j^{'}}{a^{'}_{\sigma(k),j}} | a^{'}_{\sigma(k),j} < 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

$$c_k^+ := \left\{ \begin{array}{cl} \infty, & \text{es ex. kein } a^{'}_{\sigma(k),j} > 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{-c_j^{'}}{a^{'}_{\sigma(k),j}} | a^{'}_{\sigma(k),j} > 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

Änderung von Zielfunktionskoeffizienten – Beispiel

$$
\begin{array}{lllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & & \\
& x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
& x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
& x_5 & =400 & -x_1 & \\
& x_6 & =700 & & -x_2 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\
\text{subject to} & & & & \\
& x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\
& x_1 & =200 & +1x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & &
\end{array}
$$

- Ist x_k **Nichtbasisvariable** mit den aktuellen Reduzierten Kosten $c_k^{'}$, so gilt $c_k^{-} = \infty$ und $c_k^{+} = -c_k^{'}$.
- Ist x_k **Basisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$
c_k^{-} := \begin{cases} \infty, & \text{es ex. kein } a_{\sigma(k),j}^{'} < 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{c_j^{'}}{a_{\sigma(k),j}^{'}} \middle| a_{\sigma(k),j}^{'} < 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{cases}
$$

$$
c_k^{+} := \begin{cases} \infty, & \text{es ex. kein } a_{\sigma(k),j}^{'} > 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{-c_j^{'}}{a_{\sigma(k),j}^{'}} \middle| a_{\sigma(k),j}^{'} > 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{cases}
$$

Änderung von Zielfunktionskoeffizienten – Beispiel

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\ \text{subject to} \\ & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\ & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\ & x_5 & =400 & -x_1 & \\ & x_6 & =700 & & -x_2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\ \text{subject to} \\ & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_1 & =200 & +1x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

- Ist x_k **Nichtbasisvariable** mit den aktuellen Reduzierten Kosten $c_k^{'}$, so gilt $c_k^{-} = \infty$ und $c_k^{+} = -c_k^{'}$.
- Ist x_k **Basisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$c_k^{-} := \begin{cases} \infty, & \text{es ex. kein } a^{'}_{\sigma(k),j} < 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{c_j^{'}}{a^{'}_{\sigma(k),j}} \middle| a^{'}_{\sigma(k),j} < 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{cases}$$

$$c_k^{+} := \begin{cases} \infty, & \text{es ex. kein } a^{'}_{\sigma(k),j} > 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{-c_j^{'}}{a^{'}_{\sigma(k),j}} \middle| a^{'}_{\sigma(k),j} > 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{cases}$$

Änderung von Zielfunktionskoeffizienten – Beispiel

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\ \text{subject to} \\ & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\ & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\ & x_5 & =400 & -x_1 & \\ & x_6 & =700 & & -x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\ \text{subject to} \\ & x_5 & =200 & -x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_1 & =200 & +1x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} \end{array}$$

- Ist x_k **Nichtbasisvariable** mit den aktuellen Reduzierten Kosten $c_k^{'}$, so gilt $c_k^{-} = \infty$ und $c_k^{+} = -c_k^{'}$.
- Ist x_k **Basisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$c_k^{-} := \begin{cases} \infty, & \text{es ex. kein } a^{'}_{\sigma(k),j} < 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{c_j^{'}}{a^{'}_{\sigma(k),j}} | a^{'}_{\sigma(k),j} < 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{cases}$$

$$c_k^{+} := \begin{cases} \infty, & \text{es ex. kein } a^{'}_{\sigma(k),j} > 0 \text{ mit } j \neq k \\ min\left\{ \frac{-c_j^{'}}{a^{'}_{\sigma(k),j}} | a^{'}_{\sigma(k),j} > 0, j \neq k \right\}, & sonst \end{cases}$$

Änderung von Ressourcenbeschränkungen

- In welchem Intervall $[b_q - b_q^-, b_q + b_q^+]$ sich eine Ressourcenbeschränkung b_q bewegen darf, ohne dass die optimale Basislösung ihre Optimalitätseigenschaft verliert, d.h. ohne dass ein Basistausch erforderlich wird.
- Ist x_q **Basisvariable**, so gilt $b_q^- = x_q$ und $b_q^+ = \infty$.
- Ist x_q **Nichtbasisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$b_q^- := \left\{ \begin{array}{cc} \infty, & \text{es ex. kein } a_{iq}^{'} < 0 \\ min\left\{ -\frac{b_i^{'}}{a_{iq}^{'}} | a_{iq}^{'} < 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

$$b_q^+ := \left\{ \begin{array}{cc} \infty, & \text{es ex. kein } a_{iq}^{'} > 0 \\ min\left\{ \frac{b_i^{'}}{a_{iq}^{'}} | a_{iq}^{'} > 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

Änderung von Ressourcenbeschränkungen – Beispiel

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & & 120x_1 & +90x_2 \\ \text{subject to} & & & & & \\ & x_3 & =800 & -x_1 & & -x_2 \\ & x_4 & =6000 & -12x_1 & & -6x_2 \\ & x_5 & =\color{red}{400} & -x_1 & & \\ & x_6 & =\color{red}{700} & & & -x_2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\ \text{subject to} & & & & \\ & x_5 & =200 & -1x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_1 & =200 & +1x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}$$

- Ist x_q **Basisvariable**, so gilt $b_q^- = x_q$ und $b_q^+ = \infty$.
- Ist x_q **Nichtbasisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$b_q^- := \left\{ \begin{array}{cc} \infty, & \text{es ex. kein } a'_{iq} < 0 \\ min\left\{ -\frac{b'_i}{a'_{iq}} | a'_{iq} < 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

$$b_q^+ := \left\{ \begin{array}{cc} \infty, & \text{es ex. kein } a'_{iq} > 0 \\ min\left\{ \frac{b'_i}{a'_{iq}} | a'_{iq} > 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

Änderung von Ressourcenbeschränkungen – Beispiel

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & 120x_1 & +90x_2 \\ \text{subject to} \\ & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\ & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\ & x_5 & =400 & -x_1 & \\ & x_6 & =700 & & -x_2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \max & z & =78000 & -60x_3 & -5x_4 \\ \text{subject to} \\ & x_5 & =200 & -1x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_2 & =600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_1 & =200 & +1x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & x_6 & =100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

- Ist x_q **Basisvariable**, so gilt $b_q^- = x_q$ und $b_q^+ = \infty$.
- Ist x_q **Nichtbasisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$b_q^- := \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & \text{es ex. kein } a'_{iq} < 0 \\ min \left\{ -\frac{b'_i}{a'_{iq}} | a'_{iq} < 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

$$b_q^+ := \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & \text{es ex. kein } a'_{iq} > 0 \\ min \left\{ \frac{b'_i}{a'_{iq}} | a'_{iq} > 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

Änderung von Ressourcenbeschränkungen – Beispiel

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & & 120x_1 & +90x_2 \\ \text{subject to} & & & & & \\ & x_3 & = & 800 & -x_1 & -x_2 \\ & x_4 & = & 6000 & -12x_1 & -6x_2 \\ & x_5 & = & 400 & -x_1 & \\ & x_6 & = & 700 & & -x_2 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & 78000 & -60x_3 & -5x_4 \\ \text{subject to} & & & & & \\ & x_5 & = & 200 & -1x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_2 & = & 600 & -2x_3 & +\frac{1}{6}x_4 \\ & x_1 & = & 200 & +1x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & x_6 & = & 100 & +2x_3 & -\frac{1}{6}x_4 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}$$

- Ist x_q **Basisvariable**, so gilt $b_q^- = x_q$ und $b_q^+ = \infty$.
- Ist x_q **Nichtbasisvariable**, dann gelten folgende Aussagen:

$$b_q^- := \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & \text{es ex. kein } a_{iq}^{'} < 0 \\ min\left\{ -\frac{b_i^{'}}{a_{iq}^{'}} | a_{iq}^{'} < 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

$$b_q^+ := \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & \text{es ex. kein } a_{iq}^{'} > 0 \\ min\left\{ \frac{b_i^{'}}{a_{iq}^{'}} | a_{iq}^{'} > 0, i = 1, ..., m \right\}, & sonst \end{array} \right\}$$

Beispiel: Fahrradfabrik – Lösungsrepot von Lingo

Variable	Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	**Allowable Increase**	**Allowable Decrease**
x_1	200.0	0	120.0	60.0	30.0
x_2	600.0	0	90.0	30.0	30.0

Constraint	Value	Shadow Price	Current RHS	**Allowable Increase**	**Allowable Decrease**
Menge	0	60.0	800	50.0	200.0
Max. Deluxe	200.0	0	400	Infinity	200.0
Max. Normal	100	0	700	Infinity	100.0
Zeit	0	5.0	6000	1200.0	600.0

- Mengenrestriktion: Basis ändert sich nicht, falls RHS
  - $800 - 200 = 600$ nicht unterschreitet
  - und $800 + 50 = 850$ nicht überschreitet

Wichtige Anmerkung

- Fast alle großen Praxisprobleme haben *degenerierte* optimale Lösungen
  - Somit ist der Wert vieler Basisvariablen gleich 0. In diesem Fall gehören zu einem Eckpunkt mehrere Werte der Reduzierten Kosten.

Wichtige Anmerkung

- Fast alle großen Praxisprobleme haben *degenerierte* optimale Lösungen
  - Somit ist der Wert vieler Basisvariablen gleich 0. In diesem Fall gehören zu einem Eckpunkt mehrere Werte der Reduzierten Kosten.
- Was heißt das für die (klassische) Sensitivitätsanalyse?

Wichtige Anmerkung

- Fast alle großen Praxisprobleme haben *degenerierte* optimale Lösungen
  - Somit ist der Wert vieler Basisvariablen gleich 0. In diesem Fall gehören zu einem Eckpunkt mehrere Werte der Reduzierten Kosten.
- Was heißt das für die (klassische) Sensitivitätsanalyse?
  - Die Analyse ist in solchen Fällen wertlos!

Wichtige Anmerkung

- Fast alle großen Praxisprobleme haben *degenerierte* optimale Lösungen
  - Somit ist der Wert vieler Basisvariablen gleich 0. In diesem Fall gehören zu einem Eckpunkt mehrere Werte der Reduzierten Kosten.
- Was heißt das für die (klassische) Sensitivitätsanalyse?
  - Die Analyse ist in solchen Fällen wertlos!
- Weiterhin ist die Analyse wertlos, wenn es *ganzzahlige* Variablen gibt!

Wichtige Anmerkung

- Fast alle großen Praxisprobleme haben *degenerierte* optimale Lösungen
  - Somit ist der Wert vieler Basisvariablen gleich 0. In diesem Fall gehören zu einem Eckpunkt mehrere Werte der Reduzierten Kosten.
- Was heißt das für die (klassische) Sensitivitätsanalyse?
  - Die Analyse ist in solchen Fällen wertlos!
- Weiterhin ist die Analyse wertlos, wenn es *ganzzahlige* Variablen gibt!
- *Reduzierte Kosten* und *Schattenpreise* verlieren für eine ökonomische Interpretation bei degenerierten großen LP-Modellen an Bedeutung, jedoch sind sie z.B. für die Lösung großer LP-Modelle mit sehr vielen Variablen sehr hilfreich (Column-Generation-Methode)

Fazit und Ausblick

Fazit und Ausblick

Lernziele

- Durchführen das Hilfsproblem Simplex Phase I
- Verstehen der Reduzierten Kosten/Schattenpreise
- Durchführen von Sensitivitätsanalysen

Nächste Woche

- Ganzzahlige Variablen
- Schwellenwerte
- Fixkosten
- Alternative Restriktionen

Literatur

- L. Suhl, T. Mellouli. Optimierungssysteme – Modelle, Verfahren, Software, Anwendungen. 3. Auflage, Springer Gabler, Berlin/Heidelberg, 2013, Seite 52–67.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Leuphana Universität Lüneburg
Wirtschaftsinformatik, insbesondere Operations Research
Prof. Dr. Lin Xie
Universitätsallee 1
Gebäude 4, Raum 314
21335 Lüneburg
Fon +49 4131 677 2305
Fax +49 4131 677 1749
xie@leuphana.de