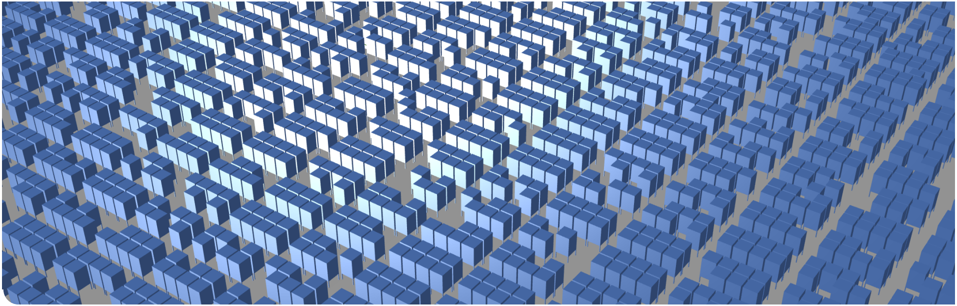
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Grundlagen des Operations Research

Teil 1 – Grafisches Lösen

Lin Xie | 19.10.2021

PROF. DR. LIN XIE - WIRTSCHAFTSINFORMATIK, INSBESONDERE OPERATIONS RESEARCH



Modellierung

Fallbeispiel Fahrradfabrik (vorlesungsbegleitend)

- Wir betrachten eine Fahrradfabrik, in der unterschiedliche Fahrradtypen (Normal und Deluxe) hergestellt werden.
- Für jeden Typ besteht wegen begrenzter Materialzufuhr eine maximale Fertigungszahl.
- Die Fahrradtypen werden auf gemeinsam genutzten Maschinen gefertigt, die eine maximale Laufzeit haben.
- Gesucht ist die gewinnmaximale Kombination der Typen, die in Fertigung gehen sollen.

Was ist das Problem?

- Es gibt eine Entscheidungssituation
- Es werden mindestens zwei Entscheidungen getroffen
- Jede Teilentscheidung beeinflusst das Ergebnis
- Auswirkungen von Teilentscheidungen sind nicht unmittelbar erkennbar
- Die Greedy-Strategie funktioniert nicht

Was ist das Problem?

- Es gibt eine Entscheidungssituation Welche?
- Es werden mindestens zwei Entscheidungen getroffen
- Jede Teilentscheidung beeinflusst das Ergebnis
- Auswirkungen von Teilentscheidungen sind nicht unmittelbar erkennbar
- Die Greedy-Strategie funktioniert nicht

Was ist das Problem?

- Es gibt eine Entscheidungssituation Welche?
- Es werden mindestens zwei Entscheidungen getroffen Welche?
- Jede Teilentscheidung beeinflusst das Ergebnis
- Auswirkungen von Teilentscheidungen sind nicht unmittelbar erkennbar
- Die Greedy-Strategie funktioniert nicht

Was ist das Problem?

- Es gibt eine Entscheidungssituation Welche?
- Es werden mindestens zwei Entscheidungen getroffen Welche?
- Jede Teilentscheidung beeinflusst das Ergebnis Warum?
- Auswirkungen von Teilentscheidungen sind nicht unmittelbar erkennbar
- Die Greedy-Strategie funktioniert nicht

Was ist das Problem?

- Es gibt eine Entscheidungssituation Welche?
- Es werden mindestens zwei Entscheidungen getroffen Welche?
- Jede Teilentscheidung beeinflusst das Ergebnis Warum?
- Auswirkungen von Teilentscheidungen sind nicht unmittelbar erkennbar
- Die Greedy-Strategie funktioniert nicht Warum nicht?

Beispiel: Fahrradfabrik

Beispiel an der Fahrradfabrik

- Entscheide: Wie viele Produkte der Sorten Normal und Deluxe sollen gefertigt werden, wenn der Gewinn maximal sein soll?
- Zwei Entscheidungen: Anzahl der Sorten Normal und Deluxe
- Unterschiedlicher Einfluss auf Ergebnis: Die Sorten Normal und Deluxe unterscheiden sich in Stückkosten und -umsatz
- Auswirkungen von Teilentscheidungen: Eine höhere Anzahl von Deluxe-Produkten könnte eine geringere Fertigung bei Normal-Produkten erzwingen
- Greedy Strategie: Es ist nicht sinnvoll, die Produktion von Deluxe zu maximieren

Definition des Optimierungsmodells

Ein Optimierungsmodell zur Entscheidungsunterstützung besteht aus drei Elementen:

1. **Zielfunktion**
   Eine Größe soll maximiert oder minimiert werden
   (oft Gewinn oder Kosten)
2. **Entscheidungsvariablen**
   Für das Ziel relevante Größen, die wir beeinflussen können
3. **Restriktionen**
   Die Einflussgrößen können nicht beliebig gewählt werden

Definition des Optimierungsmodells

Ein Optimierungsmodell zur Entscheidungsunterstützung besteht aus drei Elementen:

1. **Zielfunktion**
   Eine Größe soll maximiert oder minimiert werden
   (oft Gewinn oder Kosten)
2. **Entscheidungsvariablen**
   Für das Ziel relevante Größen, die wir beeinflussen können
3. **Restriktionen**
   Die Einflussgrößen können nicht beliebig gewählt werden

$\boxed{\textbf{Das Modell aufschreiben!} \rightarrow \textbf{Werte?}}$

Beispiel: Fahrradfabrik

2D-Problem – Beispiel an der Fahrradfabrik

- Wir betrachten eine Fahrradfabrik, in der die unterschiedlichen Fahrradtypen *Normal* und *Deluxe* gefertigt werden. Der Gewinn pro Fahrrad liegt bei 90€ bzw. 120€
- Die Maximalproduktion pro Typ beträgt 700 und 400 Stück.
- Die Maschinenlaufzeit beschränkt die Gesamtzahl auf 800 Stück.
- Die Fertigung von einem *Deluxe* Fahrrad dauert 12 Min und damit doppelt so lange wie ein *Normales*. Insgesamt stehen 100 Arbeitsstunden pro Tag zur Verfügung.

Beispiel: Fahrradfabrik

1. **Entscheidungsvariablen**
   $x_1 =$ Anzahl der herzustellenden Fahrräder des Typs Deluxe
   $x_2 =$ Anzahl der herzustellenden Fahrräder des Typs Normal
2. **Zielfunktion**
   $max\ z = 120x_1 + 90x_2$
   Entscheidungsvariablen mit Koeffizienten, hier Gewinn
3. **Restriktionen**

$x_1 + x_2 \leqslant 800$	Produktionsmaximum für beide Typen:800
	Zeitrestriktion?
$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$	Keine negative Produktion

Beispiel: Fahrradfabrik - Modell

Mathematisches Modell

$max\ z = 120x_1 + 90x_2$	Zielfunktion(Gewinnmax.)
subject to (s.t.)	
$x_1 + x_2 \leqslant 800$	Restriktion(Produktionsmenge)
$x_1 \leqslant 400$	Restriktion(Maximum *deluxe*)
$x_2 \leqslant 700$	Restriktion(Maximum *normal*)
$12x_1 + 6x_2 \leqslant 6000$	Restriktion(Zeit)
$x_1, x_2 \geqslant 0$	Restriktion(Nichtnegativität)

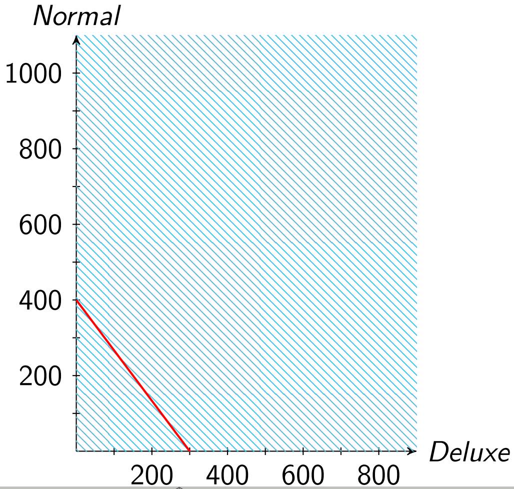
Grafische Lösung

Andere Darstellung des Problems

- Beachte hierzu:
  - Anzahl Entscheidungsvariablen = Dimension des Problems
  - Für 2D- und 3D-Optimierungsprobleme ist eine grafische Darstellung des Problems möglich.
- Für die Darstellung gilt:
  - Wert auf der Achse = Wert der Entscheidungsvariable

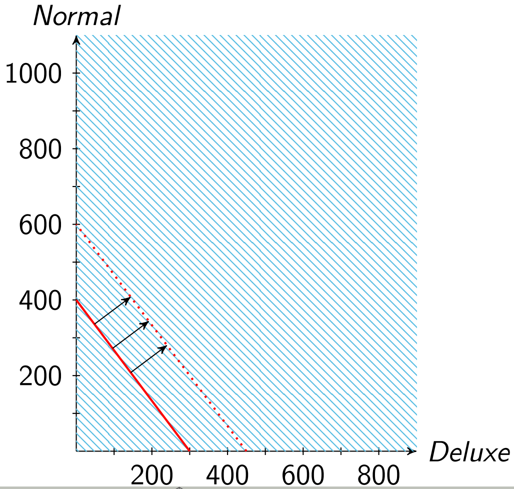
Grafische Lösung

2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



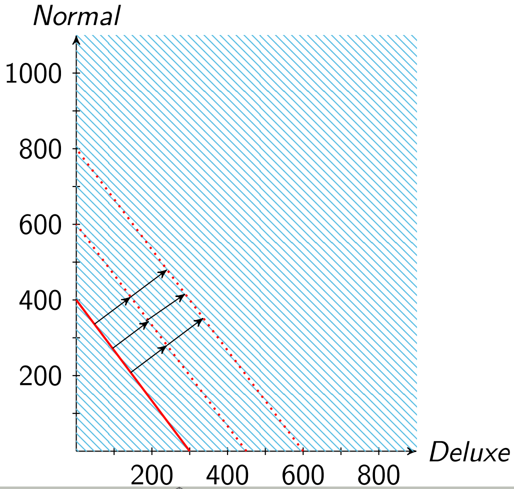
Grafische Lösung

2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



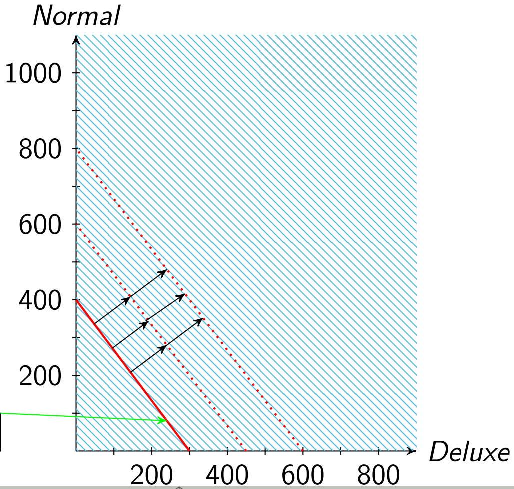
Grafische Lösung

2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



Grafische Lösung

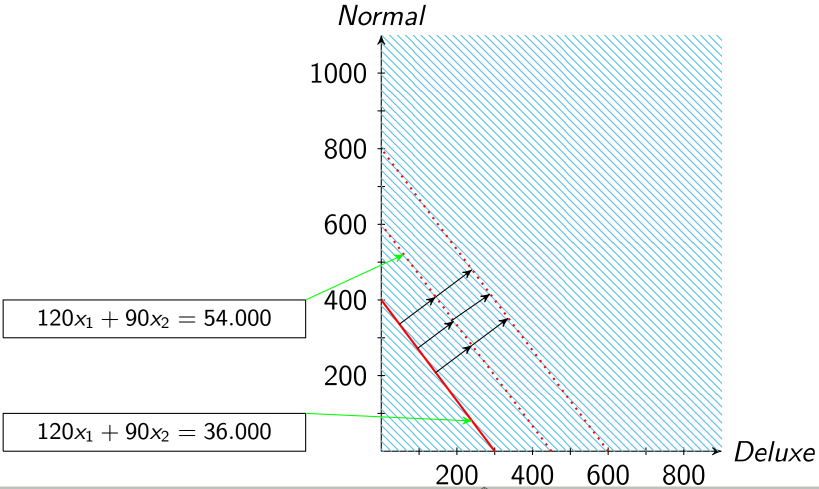
2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



$120x_1 + 90x_2 = 36.000$

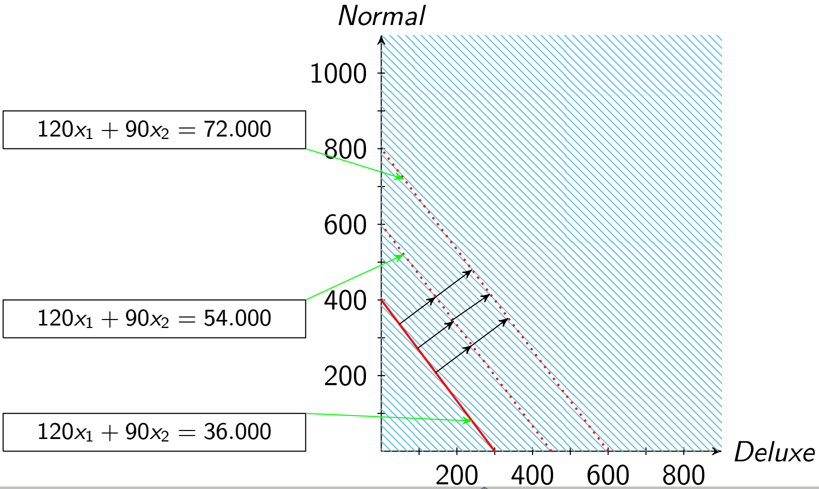
Grafische Lösung

2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



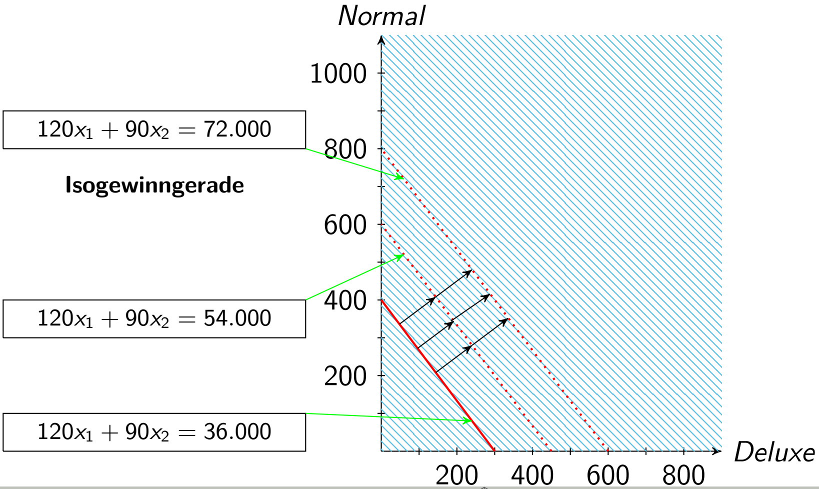
Grafische Lösung

2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



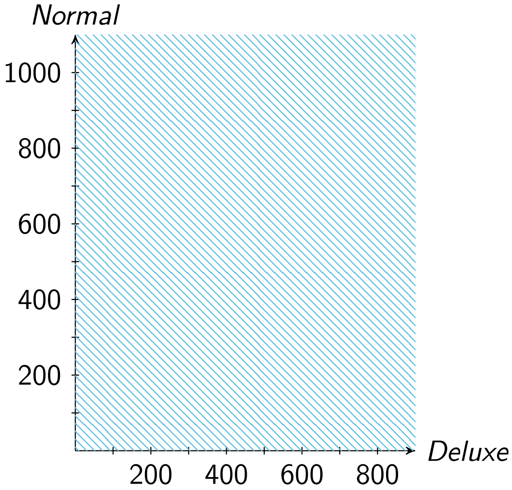
Grafische Lösung

2D-Problem – Der gesamte Raum mit der Zielfunktion



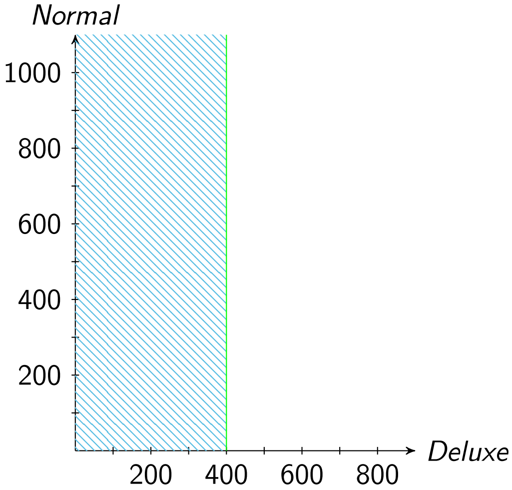
Grafische Lösung

2D-Problem – Der durch eine Restriktion eingeschränkte Raum



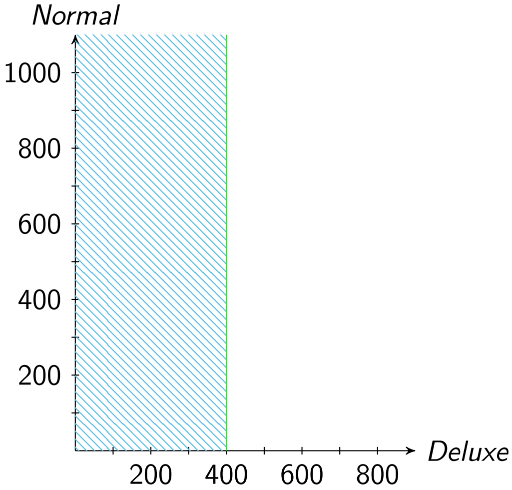
Grafische Lösung

2D-Problem – Der durch eine Restriktion eingeschränkte Raum



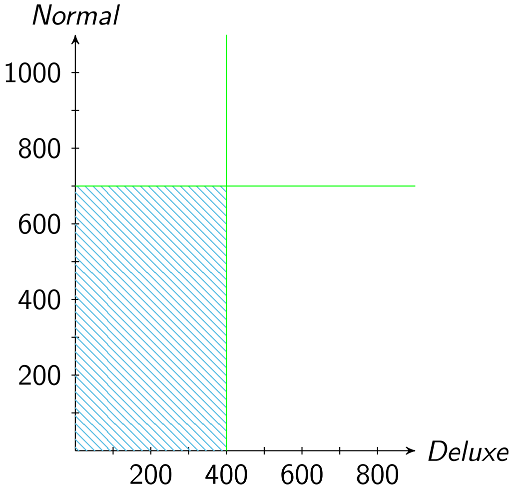
Grafische Lösung

2D-Problem – Der Lösungsraum



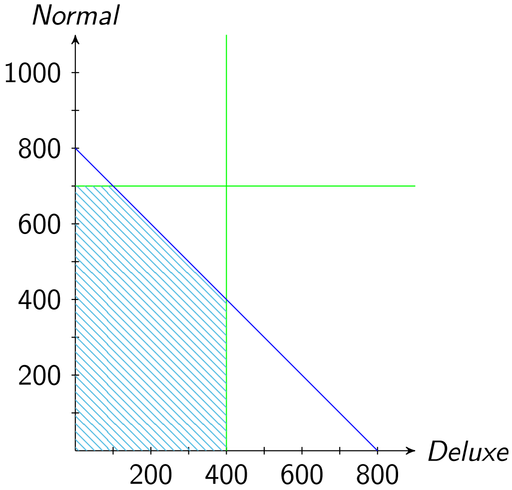
Grafische Lösung

2D-Problem – Der Lösungsraum



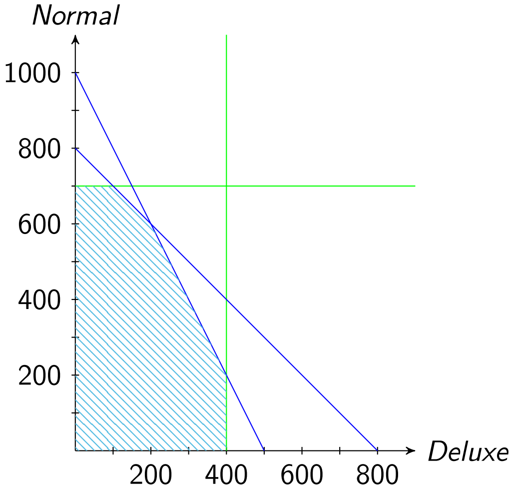
Grafische Lösung

2D-Problem – Der Lösungsraum

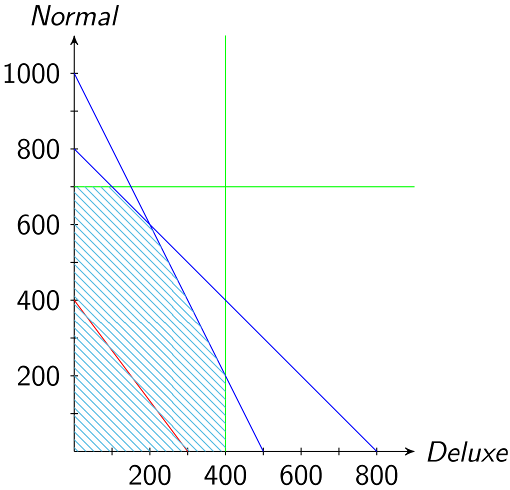


Grafische Lösung

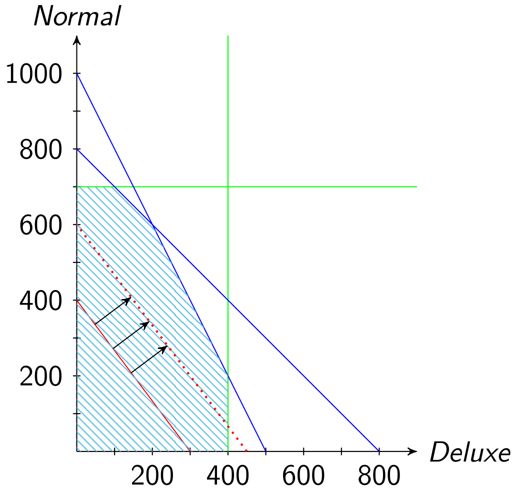
2D-Problem – Der Lösungsraum



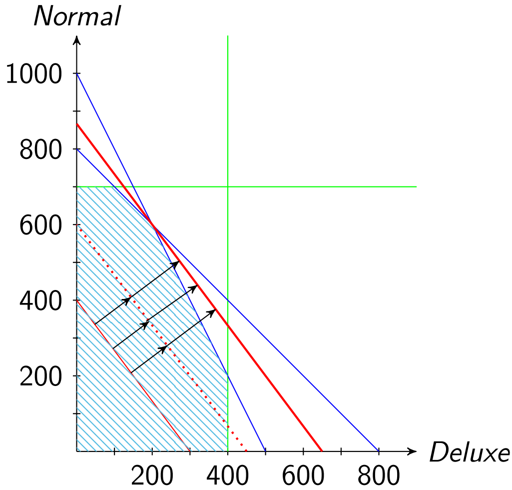
2D-Problem – Der Lösungsraum mit der Zielfunktion



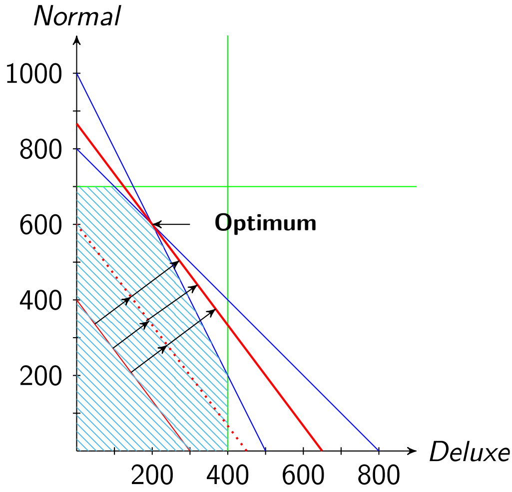
2D-Problem – Der Lösungsraum mit der Zielfunktion



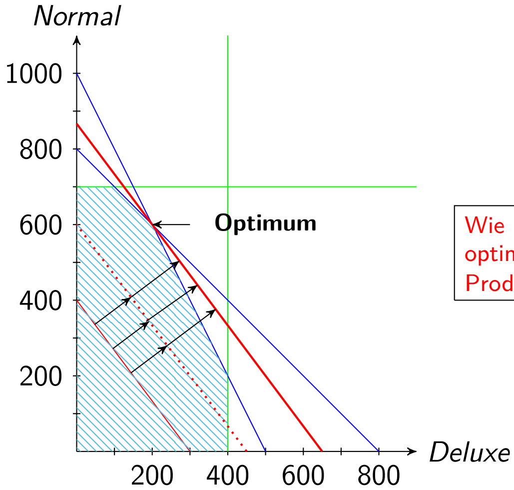
2D-Problem – Der Lösungsraum mit der Zielfunktion



2D-Problem – Der Lösungsraum mit der Zielfunktion

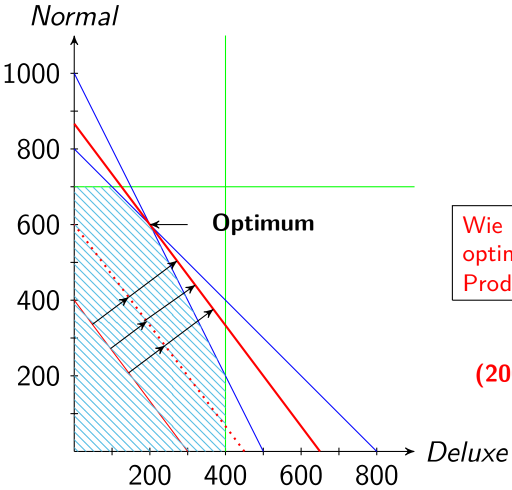


2D-Problem – Der Lösungsraum mit der Zielfunktion



Wie lautet der optimale Produktionsplan?

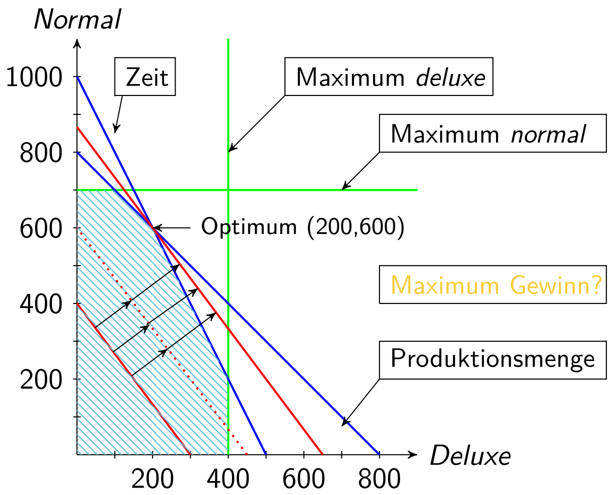
2D-Problem – Der Lösungsraum mit der Zielfunktion



Wie lautet der optimale Produktionsplan?

(200,600)

Beispiel: Fahrradfabrik – Grafische Lösung



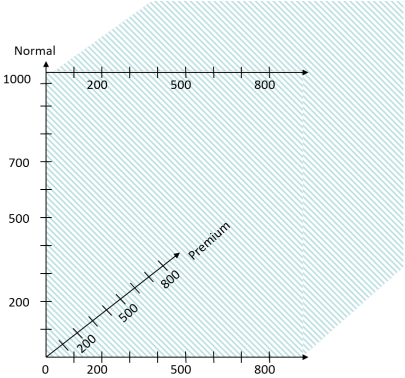
Grafische Lösung - Vorgehen

- **Schritt 1:** Zeichne Restriktionsgeraden des LP-Problems mit zwei Variablen
  - Diese sind die Randgeraden der durch die Restriktionen dargestellten Halbebenen.
  - Bestimme den zulässigen Bereich
- **Schritt 2:** Lösungen gleichen Wertes liegen auf sog. Isogewinn-Hyperebenen (im 2-dimensionalen Fall auf Isogewinn-Geraden).
  - Setze Zielfunktionswert auf eine Konstante $z = z_0$
  - zeichne die so definierte Isogewinn-Gerade.
- **Schritt 3:** Verschiebe Isogewinngerade parallel bis ggf. zu einer optimalen Ecke.

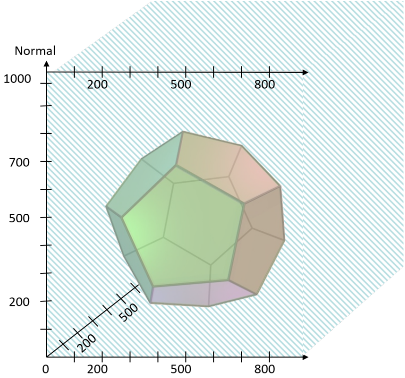
Beispiel Fahrradfabrik: 3D-Problem

- Wir betrachten eine Fahrradfabrik, in der die unterschiedlichen Fahrradtypen Normal, Deluxe und Premium gefertigt werden. Der Gewinn liegt jeweils bei 90€, 120€ bzw. 400€.
- Die Maximalproduktion pro Typ beträgt 700, 400 und 50 Stück.
- Die Maschinenlaufzeit beschränkt die Gesamtzahl auf 900 Stück.
- Die Fertigung von einer Fertigungseinheit Deluxe dauert doppelt so lange wie eine Einheit Normal und halb so lange wie eine Einheit Premium.
- Viele weitere Restriktionen denkbar. Was ist nun das Problem?

3D-Problem – Der Gesamtraum



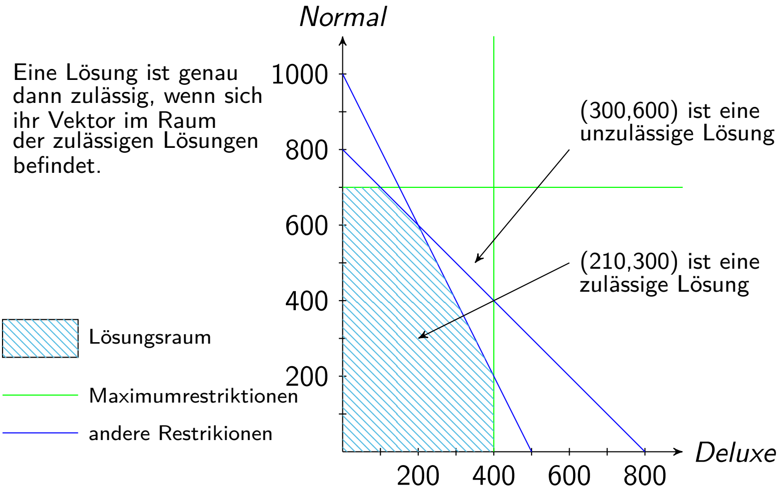
3D-Problem – Der Lösungsraum



Interpretation von Lösungstypen

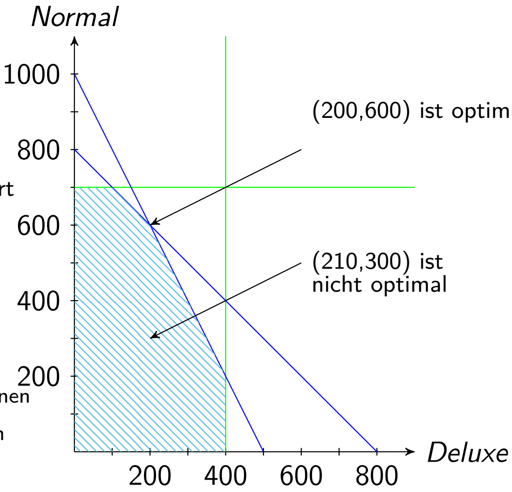
Definition: Zulässige Lösung

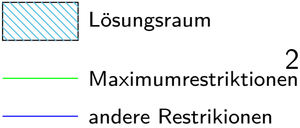
Eine Lösung ist genau dann zulässig, wenn sich ihr Vektor im Raum der zulässigen Lösungen befindet.



Definition: Optimale Lösung

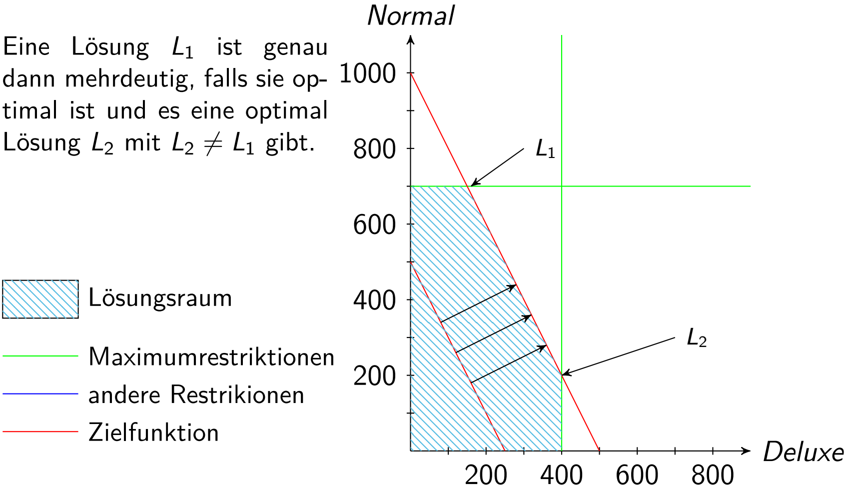
Eine Lösung ist genau dann optimal, wenn sie zulässig ist und es keine andere zulässige Lösung mit einem besseren Zielfunktionswert gibt.





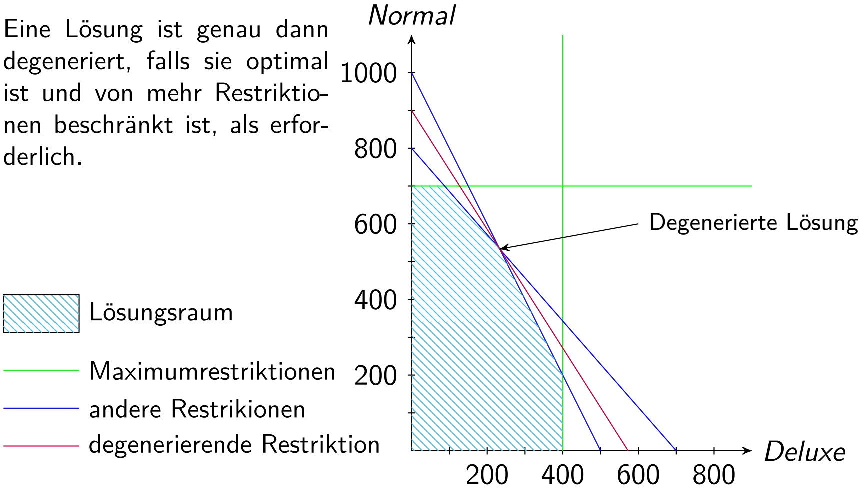
Definition: Mehrdeutige Lösung

Eine Lösung L_1 ist genau dann mehrdeutig, falls sie optimal ist und es eine optimal Lösung L_2 mit $L_2 \neq L_1$ gibt.



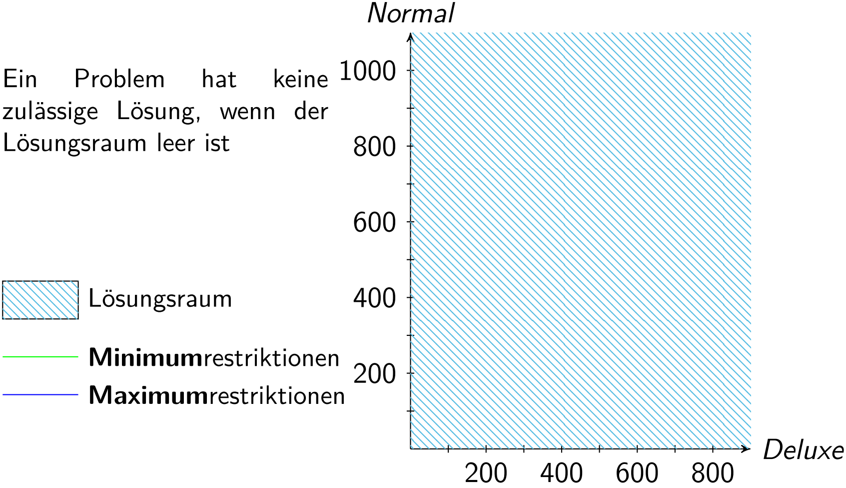
Definition: Degenerierte Lösung

Eine Lösung ist genau dann degeneriert, falls sie optimal ist und von mehr Restriktionen beschränkt ist, als erforderlich.



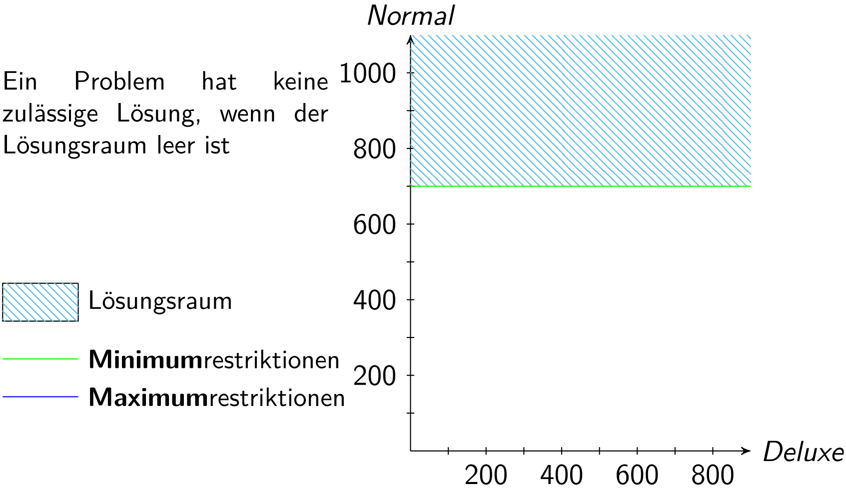
Sonderfall: Problem ohne zulässige Lösung

Ein Problem hat keine zulässige Lösung, wenn der Lösungsraum leer ist



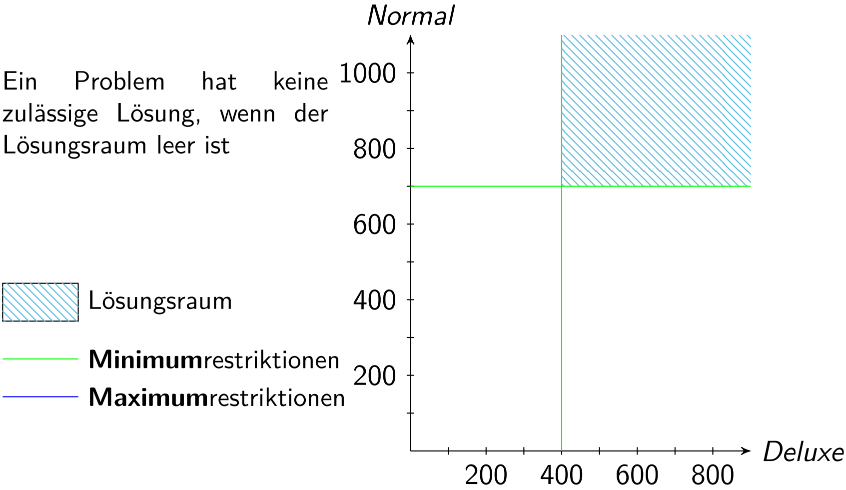
Sonderfall: Problem ohne zulässige Lösung

Ein Problem hat keine zulässige Lösung, wenn der Lösungsraum leer ist



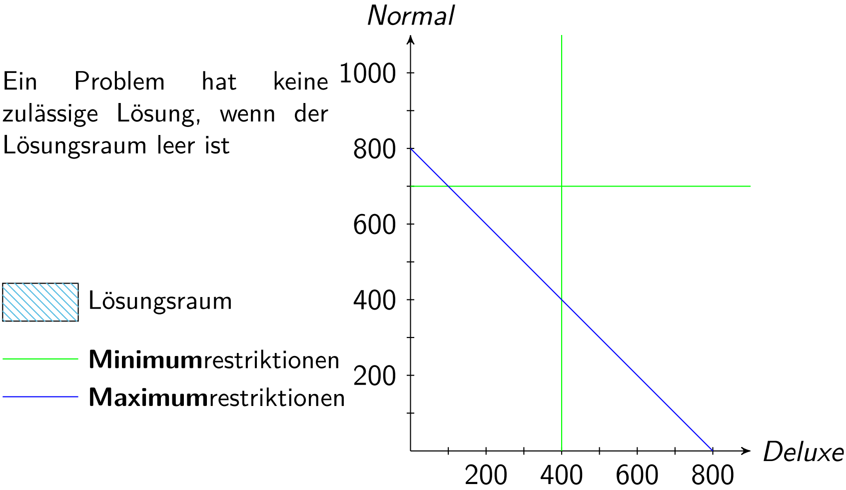
Sonderfall: Problem ohne zulässige Lösung

Ein Problem hat keine zulässige Lösung, wenn der Lösungsraum leer ist



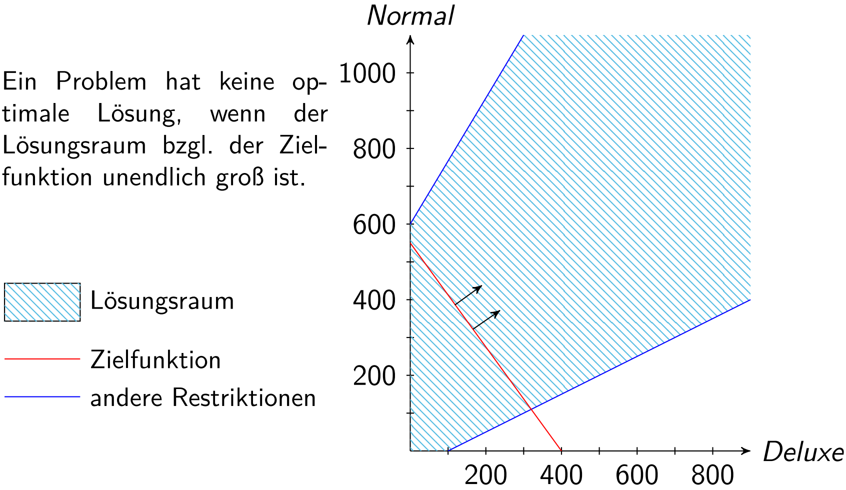
Sonderfall: Problem ohne zulässige Lösung

Ein Problem hat keine zulässige Lösung, wenn der Lösungsraum leer ist



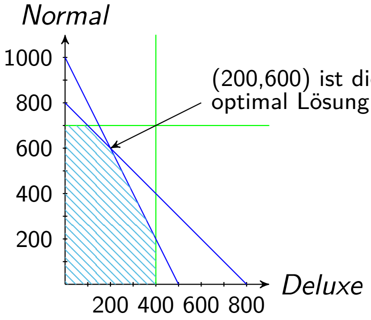
Sonderfall: Problem ohne optimale Lösung

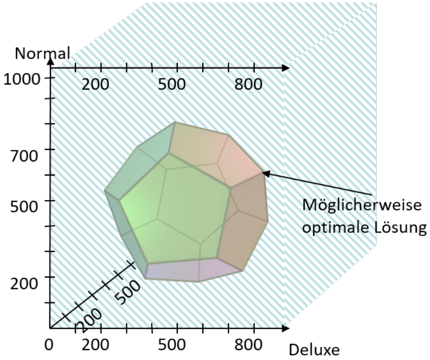
Ein Problem hat keine optimale Lösung, wenn der Lösungsraum bzgl. der Zielfunktion unendlich groß ist.



Anmerkung zu optimalen Lösungen

Eine optimale Lösung eines Problems liegt immer am Rand des zulässigen Bereichs.





Fazit und Ausblick

Fazit und Ausblick

- Lernziele
  - Aufstellen von einfachen LPs
  - Grafisches Lösen von zweidimensionalen LPs
  - Unterscheiden von Lösungstypen (optimal, unzulässig etc.)
- Nächste Vorlesung
  - Modellieren von LPs
  - Lösen von Optimierungsproblemen mit Hilfe von Software

Aufgabe

Installieren Sie die Software LINGO und fragen Sie eine Lizenz nach unter `https://www.lindo.com/index.php?option=com_content&view=article&id=120&Itemid=45`

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Leuphana Universität Lüneburg
Wirtschaftsinformatik, insbesondere Operations Research
Prof. Dr. Lin Xie
Universitätsallee 1
Gebäude 4, Raum 314
21335 Lüneburg
Fon +49 4131 677 2305
Fax +49 4131 677 1749
xie@leuphana.de