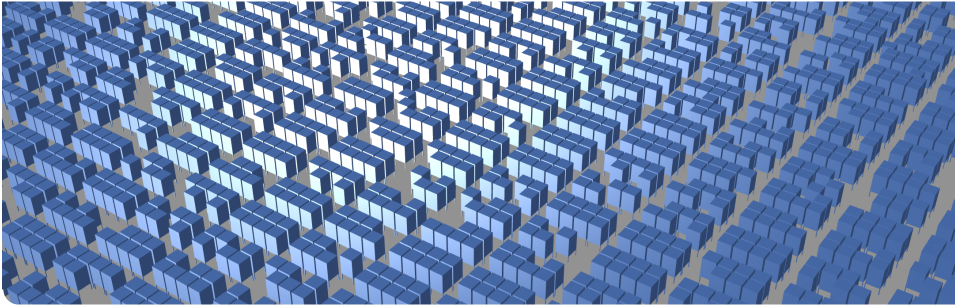
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Grundlagen des Operations Research

Teil 7 – Logische Abhängigkeiten

Lin Xie | 23.11.2021

PROF. DR. LIN XIE - WIRTSCHAFTSINFORMATIK, INSBESONDERE OPERATIONS RESEARCH



Wiederholung

Branch-and-Bound-Algorithmus – Abschneiden von Teilbäumen

Wiederholung

Zusammenfassung: Es gibt drei Fälle, bei denen ein Teilbaum abgeschnitten werden kann.

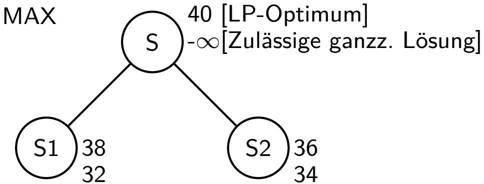
1. Abschneiden aufgrund von Unzulässigkeit (Fall 1)
   Das LP-Modell hat keine zulässige Lösungen. Also gibt es in dem Teilbaum keine zulässigen Lösungen für das IP bzw. MIP.

2. Abschneiden aufgrund einer Schranke (Fall 2)
   Der bestmögliche Zielfunktionswert in diesem Teilbaum kann nicht besser sein als eine bisher gefundene Lösung.

3. Abschneiden aufgrund von Optimalität (Fall 3)
   Die LP-Lösung, also die Belegung der Variablen, ist ganzzahlig. [Anmerkung: Der Zielfunktionswert muss nicht unbedingt ganzzahlig sein!]

Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme

Branch-and-Bound-Algorithmus – Wiederholung



Für Knoten S können die folgenden neuen Werte abgeleitet werden:

a) 36
-∞

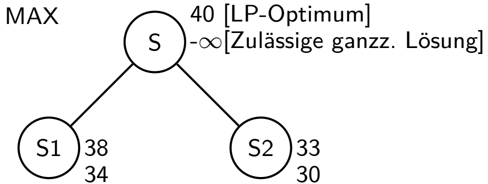
b) 36
34

c) 36
32

d) 38
34

Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme

Branch-and-Bound-Algorithmus – Wiederholung



Für Knoten S können die folgenden neuen Werte abgeleitet werden:

a) 38
-∞

b) 38
34

c) 33
34

d) 38
30

Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme

Branch-and-Bound-Algorithmus – Wiederholung

max $z = 17x_1 + 12x_2$

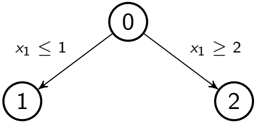
$10x_1 + 7x_2 \leq 40$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ und ganzzahlig

z(LP)=68,33

$x_1 = 1,66,\ \ x_2 = 3,33$



max $17x_1 + 12x_2$	max $17x_1 + 12x_2$
$10x_1 + 7x_2 \leq 40$	$10x_1 + 7x_2 \leq 40$
$x_1 + x_2 \leq 5$	$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \leq 1$	$x_1 \geq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$ Lösung:	$x_1, x_2 \geq 0$ Lösung:
z(LP)=65	z(LP)=68,29
$x_1 = 1$	$x_1 = 2,00$
$x_2 = 4$	$x_2 = 2,86$

Bei der Lösung des links angegebenen IP gilt:

a) Der optimale ZF-Wert ist mindestens 69

b) Der optimale ZF-Wert ist höchstens 68

c) Der optimale ZF-Wert ist mindestens 65

d) Es gibt (mindestens) eine optimale Lösung

Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme

Branch-and-Bound-Algorithmus – Wiederholung

Frage

Was passiert es wenn wir ein Minimierungsproblem in B&B-Algorithmus betrachten?

Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme

Branch-and-Bound-Algorithmus – Wiederholung

Frage

Was passiert es wenn wir ein Minimierungsproblem in B&B-Algorithmus betrachten?

- Was ist der Wert von *zip* in der Initialisierung?

Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme

Branch-and-Bound-Algorithmus – Wiederholung

Frage

Was passiert es wenn wir ein Minimierungsproblem in B&B-Algorithmus betrachten?

- Was ist der Wert von *zip* in der Initialisierung?
- Wie ändert sich die Überprüfung bei dem Abschneiden aufgrund einer Schranke?

Aussagenlogik

Aussagenlogik in der Umgangssprache

Beispiel: In einer Planungsaufgabe werden drei Projekte P1, P2 und P3 in Betracht gezogen. Aus irgendwelchen Gründen, z. B. betrieblich oder firmenpolitisch, könnten Anforderungen an die Planung gestellt werden, z. B. der Form:

- P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden
- P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
- Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden
- P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden
- ...

Aussagenlogik in der Umgangssprache

- ...
- P2 kann nur durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wurde.
- P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
- Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden.
- Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden.
- P3 muss dann und nur dann durchgeführt werden, wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden.

Bei realen Problemen kommen solche Aussagen immer wieder vor!

Exkurs: Syntax und Semantik logischer Formeln

Syntax logischer Formeln

- **Definition:** Eine logische Aussage oder logische Formel besteht entweder aus einer atomaren Aussage (Formel) p_1 oder sie ist nicht-atomar, also zusammengesetzt nach der Vorschrift:
- Sind F1 und F2 logische Formeln, so sind folgende Ausdrücke auch logische Formeln
  - Negation $\neg$ F1 („nicht F1“)
  - Konjunktion F1 $\wedge$ F2 („ F1 und F2“)
  - Disjunktion F1 $\vee$ F2 („ F1 oder F2 (oder beides)“, nicht-exklusives Oder)
  - logische Implikation F1 $\rightarrow$ F2 („aus F1 folgt F2“)
  - logische Äquivalenz F1 $\leftrightarrow$ F2 („F1 genau dann, wenn F2“)
- Beispiel:
  F=a $\rightarrow$ $\neg(b \vee \neg c)$, mit a, b und c atomare Formeln, ist eine logische Formel.

Syntax logischer Formeln

- **Definition:** Eine logische Aussage oder logische Formel besteht entweder aus einer atomaren Aussage (Formel) p_1 oder sie ist nicht-atomar, also zusammengesetzt nach der Vorschrift:
- Sind F1 und F2 logische Formeln, so sind folgende Ausdrücke auch logische Formeln
  - Negation $\neg$ F1 („nicht F1“)
  - Konjunktion F1 $\wedge$ F2 („ F1 und F2“)
  - Disjunktion F1 $\vee$ F2 („ F1 oder F2 (oder beides)“, nicht-exklusives Oder)
  - logische Implikation F1 $\rightarrow$ F2 („aus F1 folgt F2“)
  - logische Äquivalenz F1 $\leftrightarrow$ F2 („F1 genau dann, wenn F2“)
- Beispiel:
  F=a $\rightarrow$ $\neg(b \vee \neg c)$, mit a, b und c atomare Formeln, ist eine logische Formel.

  Wenn gelb, dann nicht (rot oder nicht schwarz)

Semantik logischer Formeln

- Formeln können *wahr* oder *falsch* sein. Alle Belegungen atomarer Formeln, die diese Formel erfüllen bzw. nicht erfüllen heißen Interpretation
- Eine Formel, die bei jeder Belegung erfüllt ist, heißt Tautologie
- Eine Formel, die immer falsch ist, heißt widerspruchsvoll
- Einfacher Beweis durch Wahrheitstafel:

Semantik logischer Formeln

- Formeln können *wahr* oder *falsch* sein. Alle Belegungen atomarer Formeln, die diese Formel erfüllen bzw. nicht erfüllen heißen Interpretation
- Eine Formel, die bei jeder Belegung erfüllt ist, heißt Tautologie
- Eine Formel, die immer falsch ist, heißt widerspruchsvoll
- Einfacher Beweis durch Wahrheitstafel:

F1	F2	$F1 \wedge F2$	$F1 \vee F2$	$\neg$ F1	$F1 \rightarrow F2$	$F1 \leftrightarrow F2$

Semantik logischer Formeln

- Formeln können *wahr* oder *falsch* sein. Alle Belegungen atomarer Formeln, die diese Formel erfüllen bzw. nicht erfüllen heißen Interpretation
- Eine Formel, die bei jeder Belegung erfüllt ist, heißt Tautologie
- Eine Formel, die immer falsch ist, heißt widerspruchsvoll
- Einfacher Beweis durch Wahrheitstafel:

F1	F2	F1 $\wedge$ F2	F1 $\vee$ F2	$\neg$ F1	F1 $\rightarrow$ F2	F1 $\leftrightarrow$ F2
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Algebraische Darstellung

Regeln zur Umformung einfacher Formeln

Logische Formel	**Algebraische Darstellung**
p_1	$y_1 = 1$
$p_1 \vee p_2$	$y_1 + y_2 \geq 1$
$p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_k$	$y_1 + y_2 + ... + y_k \geq 1$
$p_1 \wedge p_2$	$y_1 + y_2 \geq 2$ besser ($y_1 = 1$ *und* $y_2 = 1$)
$p_1 \rightarrow p_2$	$y_2 \geq y_1$ d. h. $y_1 - y_2 \leq 0$
$(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$	$y_1 + y_2 \leq 2y_3$ besser ($y_1 \leq y_3$ *und* $y_2 \leq y_3$)
$\neg p_1$	$y_1 = 0$ d. h. $(1 - y_1) = 1$
$\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4$	$(1 - y_1) + y_2 + y_3 + (1 - y_4) \geq 1$ d. h. $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \geq -1$

Regeln zur Umformung einfacher Formeln

Logische Formel	**Algebraische Darstellung**
p_1	$y_1 = 1$
$p_1 \vee p_2$	$y_1 + y_2 \geq 1$
$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k$	$y_1 + y_2 + \ldots + y_k \geq 1$
$p_1 \wedge p_2$	$y_1 + y_2 \geq 2$ besser $(y_1 = 1 \text{ und } y_2 = 1)$
$p_1 \rightarrow p_2$	$y_2 \geq y_1$ d. h. $y_1 - y_2 \leq 0$
$(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$	$y_1 + y_2 \leq 2y_3$ besser $(y_1 \leq y_3 \text{ und } y_2 \leq y_3)$
$\neg p_1$	$y_1 = 0$ d. h. $(1 - y_1) = 1$
$\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4$	$(1 - y_1) + y_2 + y_3 + (1 - y_4) \geq 1$ d. h. $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \geq -1$

Regeln zur Umformung einfacher Formeln

Logische Formel	Algebraische Darstellung
p_1	$y_1 = 1$
$p_1 \vee p_2$	$y_1 + y_2 \geq 1$
$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k$	$y_1 + y_2 + \ldots + y_k \geq 1$
$p_1 \wedge p_2$	$y_1 + y_2 \geq 2$ besser $(y_1 = 1 \textit{ und } y_2 = 1)$
$p_1 \rightarrow p_2$	$y_2 \geq y_1$ d. h. $y_1 - y_2 \leq 0$
$(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$	$y_1 + y_2 \leq 2y_3$ besser $(y_1 \leq y_3 \textit{ und } y_2 \leq y_3)$
$\neg p_1$	$y_1 = 0$ d. h. $(1 - y_1) = 1$
$\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4$	$(1 - y_1) + y_2 + y_3 + (1 - y_4) \geq 1$ d. h. $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \geq -1$

„Disaggregierte" Darstellung ist besser
für die Lösbarkeit der Optimierungsmodelle

Konjunktive Normalform

Disaggregierte algebraische Darstellung durch KNF

- Bei verschachtelten Formeln ist es schwieriger, eine algebraische Darstellung zu finden.
- Außerdem gibt es manchmal verschiedene Möglichkeiten der Darstellung,
  - $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3 \Rightarrow y_1 + y_2 \leq 2y_3$ und die disaggregierte Form $(y_1 \leq y_3 \textit{ und } y_2 \leq y_3)$
  - Beide Darstellungsmöglichkeiten ergeben den gleichen Lösungsraum für das MIP (Mixed Integer Program). Aber: die zweite Darstellung lässt weniger Lösungen als die erste bei einer LP-Relaxation zu

  $\rightarrow$ Beim Lösen des gemischt-ganzzahligen Modells wird zuerst das LP-Relaxation gelöst $\Rightarrow$ Steigerung der Effizienz der Lösung durch disaggregierte Darstellungen
- Nachfolgende Methode, die für eine beliebige Formel direkt eine disaggregierte algebraische Darstellung generiert

Definition

- **Literal:** Ein Literal ist eine atomare Formel (z. B. „a“) oder eine negierte atomare Formel (z. B.$\neg a$). Man nennt a ein **positives** bzw.$\neg a$ ein **negatives** Literal.
- **Klausel:** Eine Klausel ist eine Disjunktion von (auch mehr als zwei) Literalen. Eine Klausel kann auch aus einem einzelnen Literal bestehen.
  - Disjunktion: durch ODER verknüpft
- **KNF:** Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), falls sie eine Konjunktion einer oder mehrerer Klauseln ist
  - Konjunktion: Klauseln sind durch UND verknüpft
- **Äquivalenz:** Zwei Formeln F1 und F2 heißen genau dann (semantisch) äquivalent (F1$\approx$F2), wenn F1 und F2 denselben Wahrheitswert für jede beliebige Interpretation haben.

Algebraische Darstellung einer Formel in KNF

Ohne Beweis: Jede aussagenlogische Formel lässt sich in eine semantisch äquivalente Formel (d. h. mit „gleicher Bedeutung") transformieren, die in KNF ist, d. h. eine „und-verknüpfte" Sammlung von Klauseln ist.

Umwandlung von Formeln in KNF zu MIP-Ungleichungen:

- Für jede auftretende atomare Formel p definiere eine 0/1-Variable, z. B. y.
- Wandle jede Klausel der KNF getrennt in eine Ungleichung um. Dabei werden die Umwandlungsregeln in der obigen Tabelle (verallgemeinert) benutzt:
- Summe ≥ 1.
- Bei dieser Summe wird jedes positive Literal p in der Klausel durch die entsprechende 0/1-Variable y **und** jedes negative Literal $\neg$p in der Klausel durch (1 - y) ersetzt.

Transformation

Die Transformation läuft in drei Schritten.
In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt.
(Die Gültigkeit der benutzten Regeln kann anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.)

1. Logische Äquivalenzen und Implikationen

- Es werden 2 Regeln benutzt:
  $F1 \leftrightarrow F2 \approx (F1 \rightarrow F2) \wedge (F2 \rightarrow F1)$
  $F1 \rightarrow F2 \approx \neg F1 \vee F2$

Transformation

Die Transformation läuft in drei Schritten.
In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt.
(Die Gültigkeit der benutzten Regeln kann anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.)

1. Logische Äquivalenzen und Implikationen

- Es werden 2 Regeln benutzt:
  $F1 \leftrightarrow F2 \approx (F1 \rightarrow F2) \wedge (F2 \rightarrow F1)$
  $F1 \rightarrow F2 \approx \neg F1 \vee F2$
- **Beispiel:** $F = a \rightarrow \neg(b \vee \neg c) \approx \neg a \vee \neg(b \vee \neg c)$

Transformation 2

Die Transformation läuft in drei Schritten.
In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt.
(Die Gültigkeit der benutzten Regeln kann anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.)

2. Negationen nach innen bewegen

- Dies geschieht mittels der De Morgan-Regeln. Es wird solange durchgeführt, bis alle Negationen nur vor atomaren Formeln stehen:

  $\neg(F1 \wedge F2) \approx \neg F1 \vee \neg F2$

  $\neg(F1 \vee F2) \approx \neg F1 \wedge \neg F2$

  $\neg\neg F1 \approx F1$

Transformation 2

Die Transformation läuft in drei Schritten.
In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt.
(Die Gültigkeit der benutzten Regeln kann anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.)

2. Negationen nach innen bewegen

- Dies geschieht mittels der De Morgan-Regeln. Es wird solange durchgeführt, bis alle Negationen nur vor atomaren Formeln stehen:

$$\neg(F1 \wedge F2) \approx \neg F1 \vee \neg F2$$
$$\neg(F1 \vee F2) \approx \neg F1 \wedge \neg F2$$
$$\neg\neg F1 \approx F1$$

- **Beispiel:**

$$F \approx \neg a \vee \neg(b \vee \neg c) \approx \neg a \vee (\neg b \wedge \neg\neg c)$$
$$\approx \neg a \vee (\neg b \wedge c)$$

Transformation 3

Die Transformation läuft in drei Schritten.
In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt.
(Die Gültigkeit der benutzten Regeln kann anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.)

3. Disjunktionen nach innen bzw. Konjunktionen nach außen bewegen

- Zu diesem Zweck wird eine der sog. Distributionsregeln eingesetzt. Sie wird solange durchgeführt bis die Formel in KNF umgewandelt ist:

  $$F1 \lor (F2 \land F3) \approx (F1 \lor F2) \land (F1 \lor F3)$$

Transformation 3

Die Transformation läuft in drei Schritten.
In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt.
(Die Gültigkeit der benutzten Regeln kann anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.)

3. Disjunktionen nach innen bzw. Konjunktionen nach außen bewegen

- Zu diesem Zweck wird eine der sog. Distributionsregeln eingesetzt. Sie wird solange durchgeführt bis die Formel in KNF umgewandelt ist:
  $F1 \vee (F2 \wedge F3) \approx (F1 \vee F2) \wedge (F1 \vee F3)$
- **Beispiel:**
  $F \approx \neg a \vee (\neg b \wedge c) \approx (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)$

Umwandlung in KNF – Zusammenfassung

1. **Logische Äquivalenzen und Implikationen entfernen**

$$F1 \leftrightarrow F2 \quad \approx \quad (F1 \rightarrow F2) \land (F2 \rightarrow F1)$$
$$F1 \rightarrow F2 \quad \approx \quad \neg F1 \lor F2$$

2. **Negationen nach innen bewegen**

$$\neg(F1 \land F2) \quad \approx \quad \neg F1 \lor \neg F2$$
$$\neg(F1 \lor F2) \quad \approx \quad \neg F1 \land \neg F2$$
$$\neg\neg F1 \quad \approx \quad F1$$

3. **Disjunktionen nach innen bzw. Konjunktionen nach außen bewegen**

$$F1 \lor (F2 \land F3) \quad \approx \quad (F1 \lor F2) \land (F1 \lor F3)$$

Algebraische Darstellung

Führe 0/1-Variablen ein: y_1 für a, y_2 für b und y_3 für c.

1. Die Klausel $(\neg a \vee \neg b)$ wird in die Ungleichung
   $(1 - y_1) + (1 - y_2) \geq 1$ und
2. Klausel $(\neg a \vee c)$ wird in die Ungleichung
   $(1 - y_1) + (y_3) \geq 1$
   umgewandelt.

Beispiel:

Die Formel $a \to \neg(b \vee \neg c)$ als $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)$
kann in die zwei vereinfachten Ungleichungen
$y_1 + y_2 \leq 1$ und $y_3 \geq y_1$
überführt werden.

Beispiele

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

Beispiel: In einer Planungsaufgabe werden drei Projekte P1, P2 und P3 in Betracht gezogen. Aus irgendwelchen, z. B. betrieblichen oder firmenpolitischen Gründen könnten Anforderungen an die Planung gestellt werden, z. B. der Form:

- P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden
- P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
- Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden
- P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden
- ...

Beispiele: Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

- ...
- P2 kann nur durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wurde.
- P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
- Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden.
- Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden.
- P3 muss dann und nur dann durchgeführt werden, wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden.

Bei realen Problemen kommen solche Aussagen immer wieder vor!

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2} \quad \boldsymbol{y_1 + y_2 \geq 1}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2} \quad \boldsymbol{y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \lor p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad \textit{bzw.}\ y_1 - y_2 \leq 0}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad bzw.\, y_1 - y_2 \leq 0}$
3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad bzw.\, y_1 - y_2 \leq 0}$
3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden. $\boldsymbol{(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \quad y_1 + y_2 = 1}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad bzw.\, y_1 - y_2 \leq 0}$
3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden. $\boldsymbol{(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \quad y_1 + y_2 = 1}$
4. P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad bzw.\, y_1 - y_2 \leq 0}$
3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden. $\boldsymbol{(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \quad y_1 + y_2 = 1}$
4. P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden.
   $\boldsymbol{\neg(p_1 \wedge p_2) \quad y_1 + y_2 \leq 1}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \vee p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad bzw.\, y_1 - y_2 \leq 0}$
3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden. $\boldsymbol{(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \quad y_1 + y_2 = 1}$
4. P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden.
   $\boldsymbol{\neg(p_1 \wedge p_2) \quad y_1 + y_2 \leq 1}$
5. P2 kann nur durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wurde.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d. h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden. $\boldsymbol{p_1 \vee p_2 \quad y_1 + y_2 \geq 1}$
2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird. $\boldsymbol{p_1 \rightarrow p_2 \quad y_1 \leq y_2 \quad bzw.\, y_1 - y_2 \leq 0}$
3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d. h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden. $\boldsymbol{(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \quad y_1 + y_2 = 1}$
4. P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden. $\boldsymbol{\neg(p_1 \wedge p_2) \quad y_1 + y_2 \leq 1}$
5. P2 kann nur durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wurde. $\boldsymbol{p_2 \rightarrow p_1 \quad y_2 - y_1 \leq 0}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
   $p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0}$
7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden. $\boldsymbol{p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0}$
7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden. $\boldsymbol{(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3 \quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
   $\boldsymbol{p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0}$
7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden. $\boldsymbol{(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3 \quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1}$
8. Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden. $\boldsymbol{p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0}$
7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden. $\boldsymbol{(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3 \quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1}$
8. Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden. $\boldsymbol{p_3 \rightarrow (p_1 \wedge p_2) \quad y_1 - y_3 \geq 0}$ und $\boldsymbol{y_2 - y_3 \geq 0}$

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden. $\boldsymbol{p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3)} \quad \boldsymbol{-y_1 + y_2 + y_3 \geq 0}$
7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden. $\boldsymbol{(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3} \quad \boldsymbol{y_1 + y_2 - y_3 \leq 1}$
8. Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden. $\boldsymbol{p_3 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)} \quad \boldsymbol{y_1 - y_3 \geq 0}$ und $\boldsymbol{y_2 - y_3 \geq 0}$
9. P3 muss dann und nur dann durchgeführt werden, wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden.

Beschreibe als logische Formel und wandle in algebraische Darstellung

6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
   $p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0$
7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden. $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3 \quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$
8. Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden. $p_3 \rightarrow (p_1 \wedge p_2) \quad y_1 - y_3 \geq 0$ und $y_2 - y_3 \geq 0$
9. P3 muss dann und nur dann durchgeführt werden, wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden.
   $p_3 \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2) \quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$ und $y_1 - y_3 \geq 0$ und
   $y_2 - y_3 \geq 0$

Fazit und Ausblick

Fazit und Ausblick

- Lernziele
  - Syntax und Semantik von logischen Aussagen
  - Umformungsregeln
  - Algebraische Darstellung

  $\rightarrow$ Suhl/Mellouli: Optimierungssysteme S. 110-115

- Nächste Vorlesung
  - Soft Constraints
  - Mehrfache Zielsetzungen: MCDA

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Leuphana Universität Lüneburg
Wirtschaftsinformatik, insbesondere Operations Research
Prof. Dr. Lin Xie
Universitätsallee 1
Gebäude 4, Raum 314
21335 Lüneburg
Fon +49 4131 677 2305
Fax +49 4131 677 1749
xie@leuphana.de