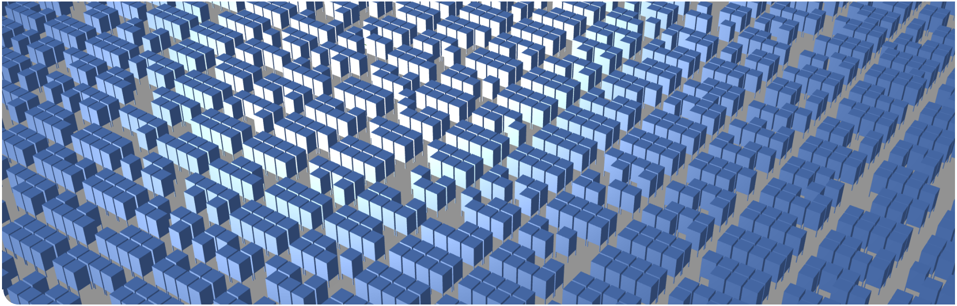
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

# Grundlagen des Operations Research

Teil 3 – LP Standardform, Simplex-Phase II

Lin Xie | 26.10.2021

PROF. DR. LIN XIE - WIRTSCHAFTSINFORMATIK, INSBESONDERE OPERATIONS RESEARCH

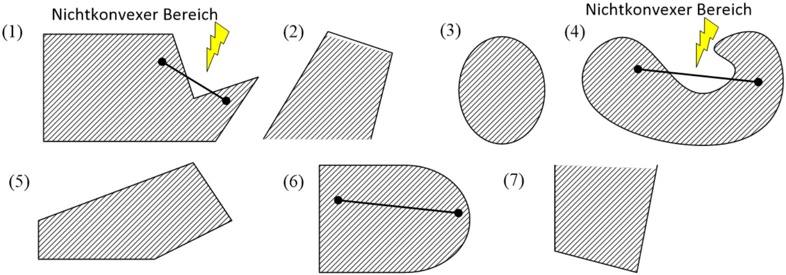


# Wiederholung

# Definition: Konvexe Bereiche

Wiederholung

- Ein Bereich $S \subseteq R^n$ heißt konvex, falls für je zwei Punkte $x, y \in S$ alle Punkte auf der geradlinigen Verbindung zwischen $x$ und $y$ auch in S liegen.
- *Welcher dieser Bereiche ist konvex? Welcher linear? Welcher begrenzt?*



# Definition: Hyperebene und Halbraum

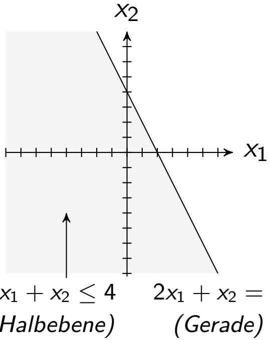
Wiederholung

- Die Menge $E = \{x \in R^n | ax = b\}$ wird als *Hyperebene* bezeichnet.
- Die Menge $H = \{x \in R^n | ax \leq b\}$ wird als *Halbraum* bezeichnet.

**Beispiel:**

Eine Hyperebene in $\mathbb{R}^2$ ist eine Gerade: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

Eine Halbraum in $\mathbb{R}^2$ ist eine Halbebene: $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$



# Definition: Hyperebene und Halbraum

**Wiederholung**

- Die Menge $E = \{x \in R^n | ax = b\}$ wird als *Hyperebene* bezeichnet.
- Die Menge $H = \{x \in R^n | ax \leq b\}$ wird als *Halbraum* bezeichnet.

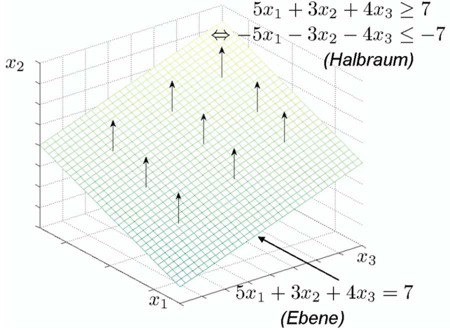
**Beispiel:**

Eine Hyperebene in $\mathbb{R}^3$ ist eine Ebene:

$a_1x_1 \ + \ a_2x_2 \ + \ a_3x_3 = b$

Eine Halbraum in $\mathbb{R}^3$ ist eine beschränkter Halbraum:

$a_1x_1 \ + \ a_2x_2 \ + \ a_3x_3 \leq b$



# Lineare Programmierungsproblem (LP)

Wiederholung

Definition: Lineares Programmierungsproblem (LP)

- ein Entscheidungsproblem, wobei
  - die Zielfunktion und
  - die Restriktionen

  lineare Funktionen der n Variablen sind.
- Lösungsraum eines LPs = Menge der zulässigen Lösungen eines LPs: ein konvexes Polyeder im n-dimensionalen Raum.

Definition: Polyeder (in 3D)

- Ein Polyeder ist ein Teil des dreidimensionalen Raumes, der ausschließlich von geraden Flächen begrenzt wird.

# Frage

Welche Aussage ist korrekt?

- A. Eine optimale Lösung eines LPs ist immer in einer Ecke des zulässigen Bereichs
- B. Die optimale Lösung liegt im inneren Bereich des zulässigen Gebiets
- C. Wenn es eine optimale Lösung gibt, gibt es immer eine optimale Lösung in einer Ecke des zulässigen Bereichs
- D. Die optimale Lösung ist immer eindeutig
- E. Weiß nicht

# Vorbereitung für die Simplex-Methode

# Standardform eines LPs

Die Standardform eines LPs ist (im Rahmen dieser Veranstaltung) definiert durch

- Max-Zielfunktion
- Gleichungen mit *Schlupfvariablen*
- Nichtnegativitätsbedingung für alle Variablen

**Beispiel:**

$$\begin{array}{llllll} \min & 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & +x_2 & & =7 \\ & x_1 & & -x_3 & \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \\ & x_3 \text{ frei} & & & \end{array}$$

Wie kann dieses LP in Standardform gebracht werden?

# Beispiel in Standardform

**Ursprungsmodell:**

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & +x_2 & & =7 & \\
 & x_1 & & -x3 & \leq 6 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \\
 & x_3 \text{ frei} & & & &
\end{array}
$$

# Beispiel in Standardform

**Ursprungsmodell:**

$$\begin{array}{lllll} \min & 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & +x_2 & & =7 \\ & x_1 & & -x3 & \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \\ & x_3 \text{ frei} & & & \end{array}$$

**Modell in Standardform:**

$$\begin{array}{llllll} \max & -3x_1 +4x_2 -5x_3^+ +5x_3^- & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & +x_2 & +x_4 & & =7 \\ & -2x_1 & -x_2 & +x_5 & & =\text{-}7 \\ & x_1 & -x_3^+ & +x_3^- & +x_6 & =6 \\ & x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & & \end{array}$$

$x_4, x_5,$ *und* $x_6$ sind die Schlupfvariablen

# Transformationsregeln für die Standardform

1. Freie Variablen durch $(x^+ - x^-)$ ersetzen. Dabei gilt $x^+, x^- \geq 0$.
   Für das Beispiel: $x_3 = x_3^+ - x_3^- \rightarrow$ $\min 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-$ und
   $x_1 - x_3^+ + x_3^- \leq 6$ und
   $x_3^+, x_3^- \geq 0$

# Transformationsregeln für die Standardform

1. Freie Variablen durch $(x^+ - x^-)$ ersetzen. Dabei gilt $x^+, x^- \geq 0$.
   Für das Beispiel: $x_3 = x_3^+ - x_3^- \rightarrow$ $\min 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-$ und
   $x_1 - x_3^+ + x_3^- \leq 6$ und
   $x_3^+, x_3^- \geq 0$
2. Gleichungen $\rightarrow$ zwei Ungleichungen
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 = 7 \rightarrow$ $2x_1 + x_2 \leq 7$ *und*
   $2x_1 + x_2 \geq 7$

# Transformationsregeln für die Standardform

1. Freie Variablen durch $(x^+ - x^-)$ ersetzen. Dabei gilt $x^+, x^- \geq 0$.
   Für das Beispiel: $x_3 = x_3^+ - x_3^- \rightarrow$ $\min 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-$ und
   $x_1 - x_3^+ + x_3^- \leq 6$ und
   $x_3^+, x_3^- \geq 0$
2. Gleichungen $\rightarrow$ zwei Ungleichungen
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 = 7 \rightarrow$ $2x_1 + x_2 \leq 7$ *und*
   $2x_1 + x_2 \geq 7$
3. $\geq$ *−Ungleichungen* $\rightarrow \leq$ *−Ungleichungen* (*optional*)
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 \geq 7 \rightarrow -2x_1 - x_2 \leq -7$

# Transformationsregeln für die Standardform

1. Freie Variablen durch $(x^+ - x^-)$ ersetzen. Dabei gilt $x^+, x^- \geq 0$.
   Für das Beispiel: $x_3 = x_3^+ - x_3^- \rightarrow$ $\min 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-$ und
   $x_1 - x_3^+ + x_3^- \leq 6$ und
   $x_3^+, x_3^- \geq 0$
2. Gleichungen $\rightarrow$ zwei Ungleichungen
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 = 7 \rightarrow$ $2x_1 + x_2 \leq 7$ *und*
   $2x_1 + x_2 \geq 7$
3. $\geq -$*Ungleichungen* $\rightarrow \leq -$*Ungleichungen* (*optional*)
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 \geq 7 \rightarrow -2x_1 - x_2 \leq -7$
4. Min-Zielfunktion $\rightarrow$ Max-Zielfunktion
   Für das Beispiel:
   $min\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- \rightarrow max - 3x_1 + 4x_2 - 5x_3^+ + 5x_3^-$

# Transformationsregeln für die Standardform

1. Freie Variablen durch $(x^+ - x^-)$ ersetzen. Dabei gilt $x^+, x^- \geq 0$.
   Für das Beispiel: $x_3 = x_3^+ - x_3^- \rightarrow$ $\min 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-$ und
   $x_1 - x_3^+ + x_3^- \leq 6$ und
   $x_3^+, x_3^- \geq 0$
2. Gleichungen $\rightarrow$ zwei Ungleichungen
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 = 7 \rightarrow$ $2x_1 + x_2 \leq 7$ *und*
   $2x_1 + x_2 \geq 7$
3. $\geq -$*Ungleichungen* $\rightarrow \leq -$*Ungleichungen* (*optional*)
   Für das Beispiel: $2x_1 + x_2 \geq 7 \rightarrow -2x_1 - x_2 \leq -7$
4. Min-Zielfunktion $\rightarrow$ Max-Zielfunktion
   Für das Beispiel:
   $min\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- \rightarrow max - 3x_1 + 4x_2 - 5x_3^+ + 5x_3^-$
5. Ungleichungen $\rightarrow$ Gleichungen mit Schlupfvariablen
   siehe nächste Folie

# Ungleichungen $\rightarrow$ Gleichungen mit Schlupvariablen

Was sind Schlupfvariablen?

- Eine nichtnegative *Schlupfvariable* (engl. *slack variable*) stellt die absolute Differenz zwischen der linken und rechten Seite einer Ungleichung dar.
- Somit füllen Schlupfvariablen „den Rest“ einer Ungleichung auf, sodass diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt wird.

**Beispiel:**

$x \leq 5$

# Ungleichungen → Gleichungen mit Schlupfvariablen

Was sind Schlupfvariablen?

- Eine nichtnegative *Schlupfvariable* (engl. *slack variable*) stellt die absolute Differenz zwischen der linken und rechten Seite einer Ungleichung dar.
- Somit füllen Schlupfvariablen „den Rest" einer Ungleichung auf, sodass diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt wird.

**Beispiel:**

$$x \leq 5 \qquad \rightarrow \quad x + y = 5, \qquad y \geq 0$$

# Ungleichungen $\rightarrow$ Gleichungen mit Schlupfvariablen

Was sind Schlupfvariablen?

- Eine nichtnegative *Schlupfvariable* (engl. *slack variable*) stellt die absolute Differenz zwischen der linken und rechten Seite einer Ungleichung dar.
- Somit füllen Schlupfvariablen „den Rest" einer Ungleichung auf, sodass diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt wird.

**Beispiel:**

$$x \leq 5 \qquad \rightarrow \quad x + y = 5, \qquad y \geq 0$$

Achtung: Jede Ungleichung muss mit einer eigenen Schlupfvariable versehen werden!

# Alternative Modellierung bei $\geq$ -Ungleichungen

- $\geq -$ Ungleichungen, wie $2x_1 + x_2 \geq 7$,müssen nicht in $\leq -$ Ungleichungen überführt werden.
- Stattdessen kann auch eine Schlupfvariable mit negativen Koeffizienten eingefügt werden.

**Beispiel:**

min...

s.t.

$2x_1 + x_2 \geq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

# Alternative Modellierung bei $\geq$ -Ungleichungen

- $\geq -$ Ungleichungen, wie $2x_1 + x_2 \geq 7$,müssen nicht in $\leq -$ Ungleichungen überführt werden.
- Stattdessen kann auch eine Schlupfvariable mit negativen Koeffizienten eingefügt werden.

**Beispiel:**

min...

s.t.

$$2x_1 + x_2 \geq 7 \quad \xrightarrow{\text{1.Möglichkeit}}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Alternative Modellierung bei $\geq$ -Ungleichungen

- $\geq -$ Ungleichungen, wie $2x_1 + x_2 \geq 7$,müssen nicht in $\leq -$ Ungleichungen überführt werden.
- Stattdessen kann auch eine Schlupfvariable mit negativen Koeffizienten eingefügt werden.

**Beispiel:**

min...

s.t.

$$-2x_1 - x_2 \leq -7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.Möglichkeit

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Alternative Modellierung bei $\geq$ -Ungleichungen

- $\geq -$ Ungleichungen, wie $2x_1 + x_2 \geq 7$,müssen nicht in $\leq -$ Ungleichungen überführt werden.
- Stattdessen kann auch eine Schlupfvariable mit negativen Koeffizienten eingefügt werden.

**Beispiel:**

min...

s.t.

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\xrightarrow{\text{1.Möglichkeit}}$

$$-2x_1 - x_2 \leq -7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$-2x_1 - x_2 + x_4 = -7$$
$$x_1, x_2, x_4 \geq 0$$

# Alternative Modellierung bei $\geq$ -Ungleichungen

- $\geq -$ Ungleichungen, wie $2x_1 + x_2 \geq 7$,müssen nicht in $\leq -$ Ungleichungen überführt werden.
- Stattdessen kann auch eine Schlupfvariable mit negativen Koeffizienten eingefügt werden.

**Beispiel:**

min...

s.t.

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.Möglichkeit

$$-2x_1 - x_2 \leq -7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$-2x_1 - x_2 + x_4 = -7$$
$$x_1, x_2, x_4 \geq 0$$

2.Möglichkeit

# Alternative Modellierung bei $\geq$ -Ungleichungen

- $\geq -$ Ungleichungen, wie $2x_1 + x_2 \geq 7$,müssen nicht in $\leq -$ Ungleichungen überführt werden.
- Stattdessen kann auch eine Schlupfvariable mit negativen Koeffizienten eingefügt werden.

**Beispiel:**

min...

s.t.

$2x_1 + x_2 \geq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

1.Möglichkeit

$-2x_1 - x_2 \leq -7$

$x_1, x_2 \geq 0$

$-2x_1 - x_2 + x_4 = -7$

$x_1, x_2, x_4 \geq 0$

2.Möglichkeit

$2x_1 + x_2 - x_4 = 7$

$x_1, x_2, x_4 \geq 0$

# Das Fahrrad-Beispiel in Standardform

**Ausgangsmodell:**

$$
\begin{array}{llll}
\max z = 120x_1 + 90x_2 & & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to (s.t.)} & & & \\
x_1 \quad + \quad x_2 & \leq 800 & & \text{(Produktionsmenge)} \\
12x_1 \quad + \quad 6x_2 & \leq 6000 & & \text{(Zeit)} \\
x_1 & \leq 400 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
x_2 & \leq 700 & & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
x_1, x_2 \geq 0 & & & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

Wie lautet das Modell in Standardform?

# Das Fahrrad-Beispiel in Standardform - Lösung

**Modell in Standardform:**

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max z = 120x_1 + 90x_2 & & & & & & & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to (s.t.)} & & & & & & & & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = 800 & & \text{(Produktionsmenge)} \\
12x_1 & +6x_2 & & +x_4 & & & = 6000 & & \text{(Zeit)} \\
x_1 & & & & +x_5 & & = 400 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
 & x_2 & & & & +x_6 & = 700 & & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & & & & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

# Definition: Basis

- **Definition:** Jede nichtsinguläre m x m-Teilmatrix B von A heißt *Basis* des Standardmodells. m ist hierbei die Anzahl der Restriktionen des LPs.
- B *nichtsingulär* heißt, dass die m-dimensionalen Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind.

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 800 \\
12x_1 & +6x_2 & & +x_4 & & = 6000 \\
x_1 & & & & +x_5 & = 400 \\
 & x_2 & & & & +x_6 = 700
\end{array}
$$

B ist hierbei immer eine *Einheitsmatrix*

- Wenn die Basis als Menge von Basisvariablen aufgeschrieben wird, so enthält diese Menge immer genau so viele Elemente wie es Restriktionen im Problem gibt (ohne die NNB): B=$\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

# Basislösung I

Zunächst werden die Gleichungen der Standardform so umgeformt, dass alle Schlupfvariablen auf der linken Seite stehen:

# Basislösung I

Zunächst werden die Gleichungen der Standardform so umgeformt, dass alle Schlupfvariablen auf der linken Seite stehen:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max} & z & = 120x_1 & +90x_2 & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to} & & & & & \\
 & x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
 & x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
 & x_5 & = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
 & x_6 & = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

# Basislösung I

Zunächst werden die Gleichungen der Standardform so umgeformt, dass alle Schlupfvariablen auf der linken Seite stehen:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = 120x_1 & +90x_2 & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\multicolumn{2}{l}{\text{subject to}} & & & & \\
 & x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
 & x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
 & x_5 & = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
 & x_6 & = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
 & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} & & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

m Basisvariablen (BV)
(Spalten der Matrix B)

n Nichtbasisvariablen (NBV)

m := Anzahl der Restriktionen eines Problems = Anzahl der Schlupfvariablen
n := Anzahl der Entscheidungsvariablen eines Problems

# Basislösung II

- Durch das Setzen der Nichtbasisvariablen (NBV) auf ihre Schranke (hier existiert nur eine untere Schranke von 0) ergibt sich eine eindeutige Lösung für die Basis B.
  $\longrightarrow$ Diese Lösung wird *Basislösung* genannt.

- Vorgehen: Nichtbasisvariablen auf ihre Schranke setzen:

$$x_1 = 0 \; und \; x_2 = 0.$$

# Basislösung III

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = 120x_1 & +90x_2 & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to} & & & & & \\
& x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
& x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
& x_5 & = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum \textit{deluxe})} \\
& x_6 & = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum \textit{normal})} \\
& \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

# Basislösung III

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & x_1 = 0 & x_2 = 0 & \\
\max & z & = 120x_1 & +90x_2 & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to} & & & & & \\
 & x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
 & x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
 & x_5 & = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
 & x_6 & = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

# Basislösung III

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = 120x_1 & +90x_2 & & \text{(Gewinnmax.)} \\
\text{subject to} & & & & & \\
& x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
& x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
& x_5 & = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
& x_6 & = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

Nun kann die Basislösung abgelesen werden:

$x_3 = 800$, $x_4 = 6000$, $x_5 = 400$, *und* $x_6 = 700$

# Anmerkung zur Basislösung

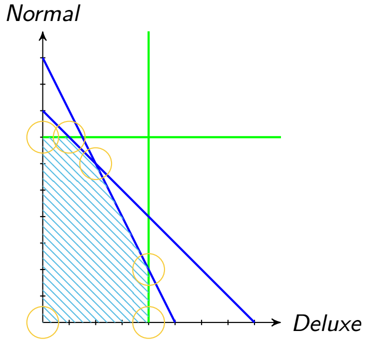
Eine Basislösung ist

- *zulässig*, falls alle Basisvariablen (BV) in der Basislösung nichtnegative Werte annehmen, sonst ist die Lösung *unzulässig*.
- *degeneriert*, falls mindestens eine der Basisvariablen in der Basislösung gleich Null ist.

Wie hängen die Ecke eines Lösungsraumes und die Basis miteinander zusammen?

# Definition: Ecke

**Definition:** Eine *Ecke* bezüglich eines LP-Modells mit n Entscheidungsvariablen ist ein Punkt des n-dimensionalen Raums, der als Durchschnitt von m Hyperebenen aus den n+m durch die LP-Restriktionen definierten Hyperebenen dargestellt werden kann.



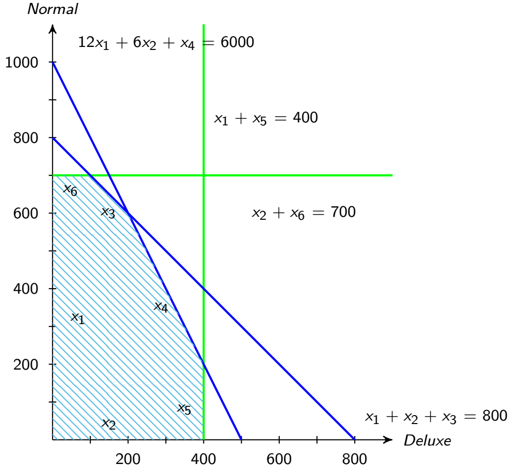

**Erinnerung:**

- Hyperebene in $R^2$: Gerade
- Hyperebene in $R^3$: Ebene

**Beispiel:** 2-dimensionaler Raum, insgesamt 2+4=6 Hyperebenen. Eine Ecke ist also der Schnitt von 2 Hyperebenen (=Geraden).

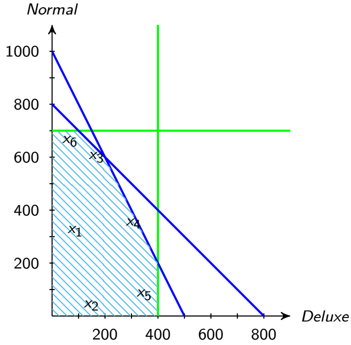
# Zusammenhang zwischen Ecke und Basis

Jeder Kante des Lösungsraumes kann statt der Restriktion auch die jeweilige Schlupfvariable zugeordnet werden.



# Zusammenhang zwischen Ecke und Basis

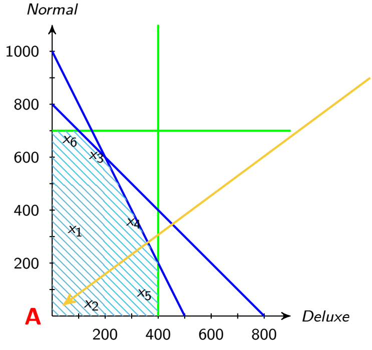
Eine Ecke ist die grafische Entsprechung im $R^n$ einer Basislösung, die als Durchschnitt von n Hyperebenen dargestellt wird. Jede dieser Hyperebenen ist einer Nichtbasisvariable $x_j$ zugeordnet.




| | Ecke | Basis |
|---|---|---|
| A | $x_1 = x_2 = 0$ | $x_3, x_4, x_5, x_6$ |
| B | $x_1 = x_6 = 0$ | $x_2, x_3, x_4, x_5$ |
| C | $x_3 = x_6 = 0$ | $x_1, x_2, x_4, x_5$ |
| D | $x_3 = x_4 = 0$ | $x_1, x_2, x_5, x_6$ |
| E | $x_4 = x_5 = 0$ | $x_1, x_2, x_3, x_6$ |
| F | $x_2 = x_5 = 0$ | $x_1, x_3, x_4, x_6$ |

# Zusammenhang zwischen Ecke und Basis

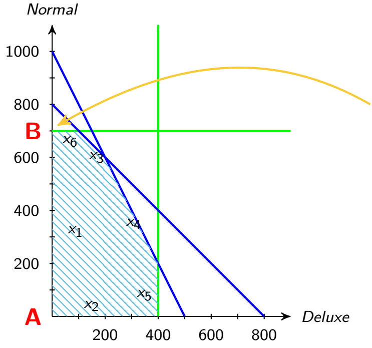
Eine Ecke ist die grafische Entsprechung im $R^n$ einer Basislösung, die als Durchschnitt von n Hyperebenen dargestellt wird. Jede dieser Hyperebenen ist einer Nichtbasisvariable $x_j$ zugeordnet.




| | Ecke | Basis |
|---|---|---|
| A | $x_1 = x_2 = 0$ | $x_3, x_4, x_5, x_6$ |
| B | $x_1 = x_6 = 0$ | $x_2, x_3, x_4, x_5$ |
| C | $x_3 = x_6 = 0$ | $x_1, x_2, x_4, x_5$ |
| D | $x_3 = x_4 = 0$ | $x_1, x_2, x_5, x_6$ |
| E | $x_4 = x_5 = 0$ | $x_1, x_2, x_3, x_6$ |
| F | $x_2 = x_5 = 0$ | $x_1, x_3, x_4, x_6$ |

# Zusammenhang zwischen Ecke und Basis

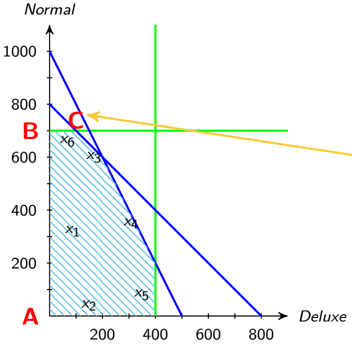
Eine Ecke ist die grafische Entsprechung im $R^n$ einer Basislösung, die als Durchschnitt von n Hyperebenen dargestellt wird. Jede dieser Hyperebenen ist einer Nichtbasisvariable $x_j$ zugeordnet.




| | Ecke | Basis |
|---|---|---|
| A | $x_1 = x_2 = 0$ | $x_3, x_4, x_5, x_6$ |
| B | $x_1 = x_6 = 0$ | $x_2, x_3, x_4, x_5$ |
| C | $x_3 = x_6 = 0$ | $x_1, x_2, x_4, x_5$ |
| D | $x_3 = x_4 = 0$ | $x_1, x_2, x_5, x_6$ |
| E | $x_4 = x_5 = 0$ | $x_1, x_2, x_3, x_6$ |
| F | $x_2 = x_5 = 0$ | $x_1, x_3, x_4, x_6$ |

# Zusammenhang zwischen Ecke und Basis

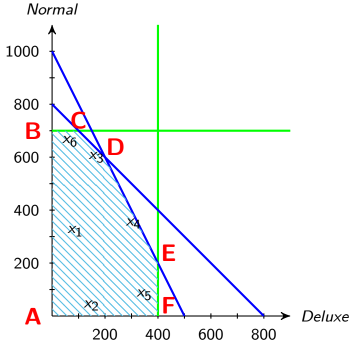
Eine Ecke ist die grafische Entsprechung im $R^n$ einer Basislösung, die als Durchschnitt von n Hyperebenen dargestellt wird. Jede dieser Hyperebenen ist einer Nichtbasisvariable $x_j$ zugeordnet.




| | Ecke | Basis |
|---|---|---|
| A | $x_1 = x_2 = 0$ | $x_3, x_4, x_5, x_6$ |
| B | $x_1 = x_6 = 0$ | $x_2, x_3, x_4, x_5$ |
| C | $x_3 = x_6 = 0$ | $x_1, x_2, x_4, x_5$ |
| D | $x_3 = x_4 = 0$ | $x_1, x_2, x_5, x_6$ |
| E | $x_4 = x_5 = 0$ | $x_1, x_2, x_3, x_6$ |
| F | $x_2 = x_5 = 0$ | $x_1, x_3, x_4, x_6$ |

# Zusammenhang zwischen Ecke und Basis

Eine Ecke ist die grafische Entsprechung im $R^n$ einer Basislösung, die als Durchschnitt von n Hyperebenen dargestellt wird. Jede dieser Hyperebenen ist einer Nichtbasisvariable $x_j$ zugeordnet.




| | Ecke | Basis |
|---|---|---|
| A | $x_1 = x_2 = 0$ | $x_3, x_4, x_5, x_6$ |
| B | $x_1 = x_6 = 0$ | $x_2, x_3, x_4, x_5$ |
| C | $x_3 = x_6 = 0$ | $x_1, x_2, x_4, x_5$ |
| D | $x_3 = x_4 = 0$ | $x_1, x_2, x_5, x_6$ |
| E | $x_4 = x_5 = 0$ | $x_1, x_2, x_3, x_6$ |
| F | $x_2 = x_5 = 0$ | $x_1, x_3, x_4, x_6$ |

# Spezialfälle von Lösungen

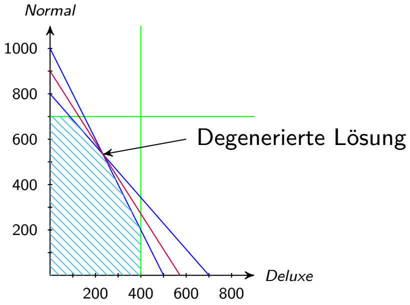
Degenerierte Lösung:

- Mehr Hyperebenen als nötig kreuzen sich in einer Ecke.
- Mindestens eine der Basisvariablen in der Basislösung ist gleich Null.

**Beispiel:**

Basis: $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$
Nichtbasisvariablen:
$x_3 = x_4 = 0$
Zusätzlich Basisvariable
$x_7 = 0$

Gleiche Ecke mit:
Basis: $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_4\}$
Nichtbasisvariablen:
$x_3 = x_7 = 0$

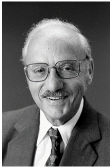


# Simplex-Algorithmus Phase II

# Entstehung der Simplex-Methode

George Dantzig

- Als Erfinder der Simplex-Methode gilt George Dantzig.
- Die Methode wurde von ihm 1947 zur Lösung von Planungsproblemen bei der U.S. Air Force eingesetzt.



Quelle: stanford.edu

- Nach dem 2.Weltkrieg wurde das Potenzial der Methode erst richtig erkannt, da sie in nahezu alle Anwendungsgebieten des OR eingesetzt werden kann.
- Mit der parallelen Entwicklung der Computertechnologien ist die Anwendbarkeit weiter gestiegen, sodass heutzutage sehr große Problemstellungen mit dieser Methode exakt gelöst werden können.
- Weitere Methoden wurden erst viel später entwickelt:
  - Interior-Point-Algorithmen: Ellipsoid (1979), Barrier (1980s)

# Entstehung der Simplex-Methode

Herkunft der Namens

- Der Name Simplex-Methode leitet sich von dem aus der Geometrie bekannten Simplexkörper ab.
- Dieser beschreibt einen durch n+1 Punkte des $\mathbb{R}^n$ aufgespanntes konvexes Polyeder.

Im 3-dimensionalen Raum:

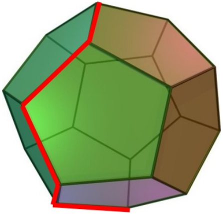
Simplex

Konvexes Polyeder

Bildquelle: wikipedia.de

# Grundidee der Simplex-Methode

- Die Simplex-Methode bewegt sich auf dem Rand eines konvexen Polyeders entlang benachbarter Ecken und sucht zielgerichtet eine optimale Ecke.
- Die Methode basiert auf folgender Erkenntnis:
  falls eine optimale Lösung existiert, dann gibt es auch eine optimale Lösung, die in einer Ecke des Lösungsraumes (des Polyeders) ist.
- Wie wird eine Ecke beschrieben? → m Basisvariablen und n Nichtbasisvariablen (die gleich 0 sind).



Quelle: wikipedia.de

- Wie springt der Algorithmus von einer Ecke zur nächsten?
  → *Basistausch:* wird auch als *Pivot-Schritt* bezeichnet. D. h. wähle eine NBV (Pivot-Variable) und tausche sie gegen eine BV.

# Idee

1. Bringe das LP in die Standardform.
2. Starte mit einer zulässigen Basislösung.
3. Finde eine Nichtbasisvariable, die den Zielfunktionswert verbessern kann.
   Falls es keine gibt, dann ist die aktuelle Basislösung optimal.
4. Diese Variable soll in die Basis eintreten. Dabei soll die Zielfunktion so viel wie möglich verbessert werden. Jedoch nur so viel, dass keine Basisvariable unzulässig wird. Finde also die Basisvariable, die die Nichtbasisvariable am meisten beschränkt.
   Falls es keine gibt, so ist das Problem unbeschränkt.
5. Tausche die Nichtbasisvariable gegen die Basisvariable.
   Gehe zu Schritt 3.

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem

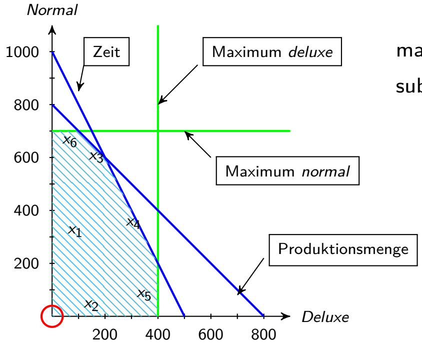
**Modell:**

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z & = & 120x_1 & +90x_2 & \text{(Gewinnmax.)} \\
\multicolumn{6}{l}{\text{subject to (s.t.)}} \\
 & x_3 & = 800 & -x_1 & -x_2 & \text{(Produktionsmenge)} \\
 & x_4 & = 6000 & -12x_1 & -6x_2 & \text{(Zeit)} \\
 & x_5 & = 400 & -x_1 & & \text{(Maximum } \textit{deluxe}\text{)} \\
 & x_6 & = 700 & & -x_2 & \text{(Maximum } \textit{normal}\text{)} \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}
$$

Die Lösung $x_1 = x_2 = 0$, also nichts zu produzieren, ist eine zulässige Lösung für dieses Problem.
Ist dies auch eine optimale Lösung für das Problem?
$\rightarrow$ Nein, aber wie kann die Lösung $x_1 = x_2 = 0$ verbessert werden?

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400$ *und* $x_6 = 700$

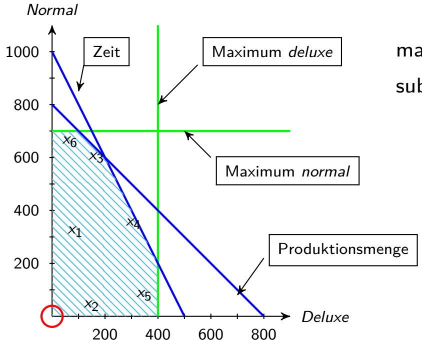



$x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= \quad 120x_1 + 90x_2 \\
\text{subject to} \\
x_3 &= 800 - x_1 - x_2 \\
x_4 &= 6000 - 12x_1 - 6x_2 \\
x_5 &= 400 - x_1 \\
x_6 &= 700 - x_2 \\
x_1, x_2, &x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400\ \textit{und}\ x_6 = 700$

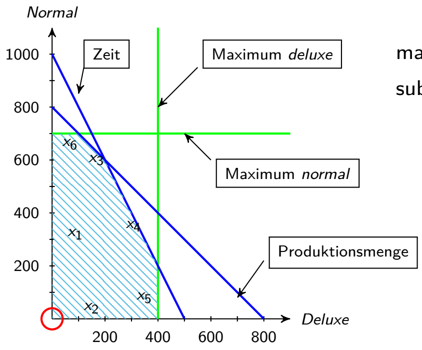



$x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
\max z & = & & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & & \\
 & x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
 & x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
 & x_5 & =400 & -x_1 & \\
 & x_6 & =700 & & -x_2 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400$ *und* $x_6 = 700$




$x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{array}{llll}
\max z & = & \boxed{120x_1} & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
x_5 & =400 & -x_1 & \\
x_6 & =700 & & -x_2 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}$$

Quotiententest:

$|x_1 \leq 800$

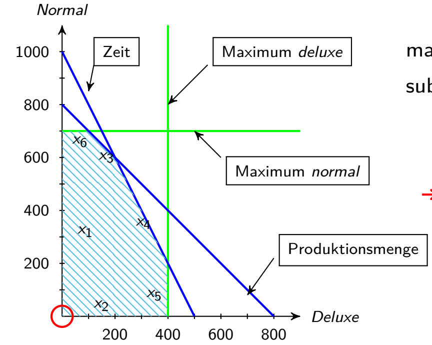
$|x_1 \leq 500$

$|x_1 \leq 400$ Min!

$|x_1 \leq \infty$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400$ *und* $x_6 = 700$




$x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{llll}
\max z & = & 120x_1 & +90x_2 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & =800 & -x_1 & -x_2 \\
x_4 & =6000 & -12x_1 & -6x_2 \\
x_5 & =400 & -x_1 & \\
x_6 & =700 & & -x_2 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_1 \leq 800$

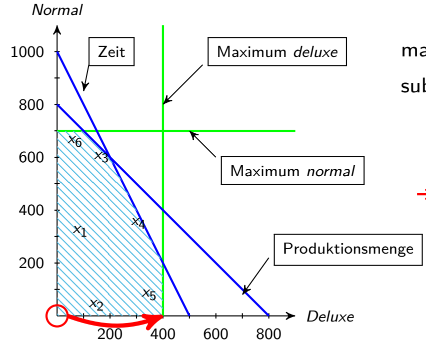
$|x_1 \leq 500$

$|x_1 \leq 400$ Min!

$|x_1 \leq \infty$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 1.Iteration

- Ausgangsbasislösung:
  NBV: $x_1 = x_2 = 0$
  BV: $x_3 = 800,\ x_4 = 6000,\ x_5 = 400$ *und* $x_6 = 700$




$x_1 = x_2 = 0$

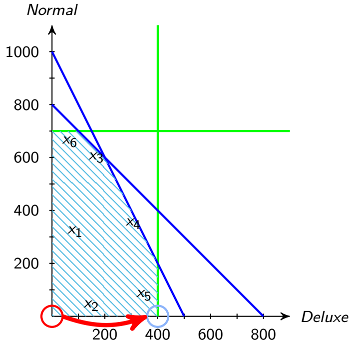
$$
\begin{array}{llllll}
\max z & = & & 120x_1 & +90x_2 & \\
\text{subject to} & & & & & \text{Quotiententest:} \\
x_3 & = 800 & & -x_1 & -x_2 & |x_1 \leq 800 \\
x_4 & = 6000 & & -12x_1 & -6x_2 & |x_1 \leq 500 \\
x_5 & = 400 & & -x_1 & & |x_1 \leq 400 \text{ Min!} \\
x_6 & = 700 & & & -x_2 & |x_1 \leq \infty \\
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

D. h. $x_1$ kommt in unsere Basis und $x_5$ verlässt die Basis.

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ \mathit{und}\ x_6 = 700$

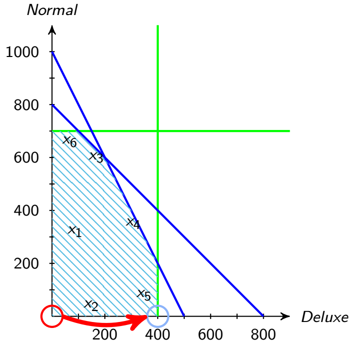



$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= 48000 + 90x_2 - 120x_5 \\
\text{subject to} & \\
x_3 &= 400 - x_2 + x_5 \\
x_4 &= 1200 - 6x_2 + 12x_5 \\
x_1 &= 400 - x_5 \\
x_6 &= 700 - x_2 \\
x_1, x_2, x_3, &x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ \mathit{und}\ x_6 = 700$

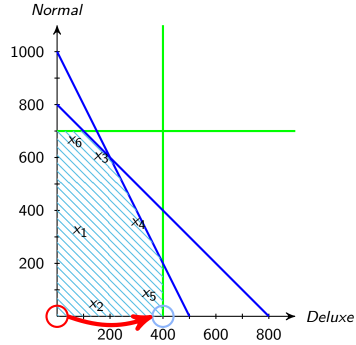



$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{llll}
\text{max z} & =48000 & \boxed{+90x_2} & -120x_5 \\
\text{subject to} & & & \\
x_3 & =400 & -x_2 & +x_5 \\
x_4 & =1200 & -6x_2 & +12x_5 \\
x_1 & =400 & & -x_5 \\
x_6 & =700 & -x_2 & \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ \textit{und}\ x_6 = 700$



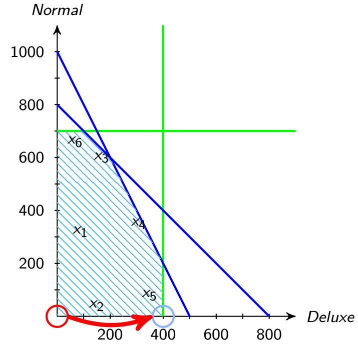

$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
\max z & = 48000 & + 90x_2 & - 120x_5 & \\
\text{subject to} & & & & \\
x_3 & = 400 & - x_2 & + x_5 & |x_2 \leq 400 \\
x_4 & = 1200 & - 6x_2 & + 12x_5 & |x_2 \leq 200 \text{ Min!} \\
x_1 & = 400 & & - x_5 & |x_2 \leq \infty \\
x_6 & = 700 & - x_2 & & |x_2 \leq 700 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} &
\end{array}
$$

Quotiententest:

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ und\ x_6 = 700$




$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
\max z & =48000 & +90x_2 & -120x_5 & \\
\text{subject to} & & & & \\
x_3 & =400 & -x_2 & +x_5 & \\
x_4 & =1200 & -6x_2 & +12x_5 & \\
x_1 & =400 & & -x_5 & \\
x_6 & =700 & -x_2 & & \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Quotiententest:

$|x_2 \leq 400$

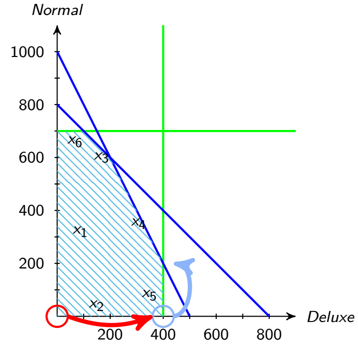
$|x_2 \leq 200$ Min!

$|x_2 \leq \infty$

$|x_2 \leq 700$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 2.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_2 = x_5 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1200\ \mathit{und}\ x_6 = 700$



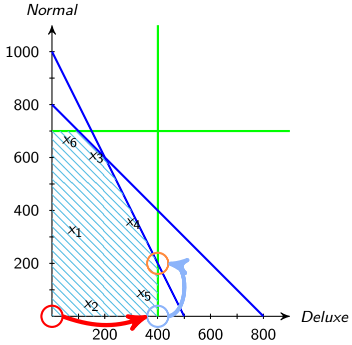

$x_5 = x_2 = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
\max z & = 48000 & +90x_2 & -120x_5 & \\
\text{subject to} & & & & \text{Quotiententest:} \\
\quad x_3 & = 400 & -x_2 & +x_5 & |x_2 \leq 400 \\
\quad x_4 & = 1200 & -6x_2 & +12x_5 & |x_2 \leq 200 \text{ Min!} \\
\quad x_1 & = 400 & & -x_5 & |x_2 \leq \infty \\
\quad x_6 & = 700 & -x_2 & & |x_2 \leq 700 \\
\multicolumn{5}{l}{\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

D. h. $x_2$ kommt in unsere Basis und $x_4$ verlässt die Basis.

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200$ *und* $x_6 = 500$

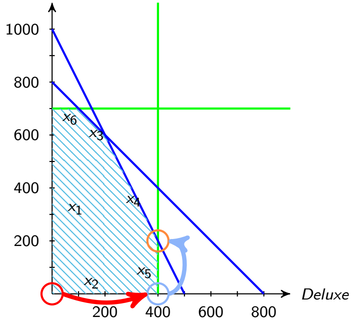



$x_5 = x_4 = 0$

$$\begin{aligned}
\max z &= 66000 - 15x_4 + 60x_5 \\
\text{subject to} & \\
x_3 &= 200 + \tfrac{1}{6}x_4 - x_5 \\
x_2 &= 200 - \tfrac{1}{6}x_4 + 2x_5 \\
x_1 &= 400 - x_5 \\
x_6 &= 500 + \tfrac{1}{6}x_4 - 2x_5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400, \; x_2 = 200, \; x_3 = 200 \; und \; x_6 = 500$

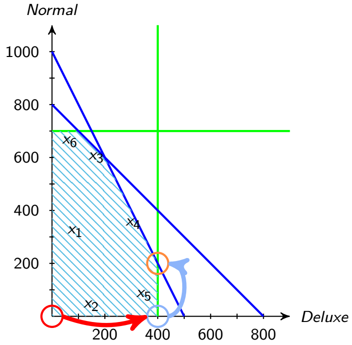



$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= 66000 - 15x_4 + 60x_5 \\
\text{subject to} & \\
x_3 &= 200 + \tfrac{1}{6}x_4 - x_5 \\
x_2 &= 200 - \tfrac{1}{6}x_4 + 2x_5 \\
x_1 &= 400 - x_5 \\
x_6 &= 500 + \tfrac{1}{6}x_4 - 2x_5 \\
x_1, x_2, &x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200$ *und* $x_6 = 500$




$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= 66000 - 15x_4 \boxed{+60x_5} \\
\text{subject to} \\
x_3 &= 200 + \tfrac{1}{6}x_4 - x_5 \\
x_2 &= 200 - \tfrac{1}{6}x_4 + 2x_5 \\
x_1 &= 400 \qquad\quad\ - x_5 \\
x_6 &= 500 + \tfrac{1}{6}x_4 - 2x_5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Quotiententest:

$|x_5 \leq 200$ Min!

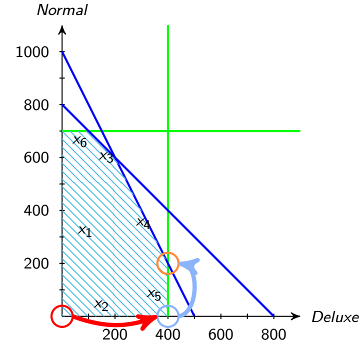
$|x_5 \leq \infty$

$|x_5 \leq 400$

$|x_5 \leq 250$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200$ *und* $x_6 = 500$




$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
&\max z && = 66000 - 15x_4 + 60x_5 \\
&\text{subject to} && \\
&x_3 && = 200 + \tfrac{1}{6}x_4 - x_5 \\
&x_2 && = 200 - \tfrac{1}{6}x_4 + 2x_5 \\
&x_1 && = 400 - x_5 \\
&x_6 && = 500 + \tfrac{1}{6}x_4 - 2x_5 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 &&
\end{aligned}
$$

Quotiententest:

$|x_5 \leq 200$ Min!

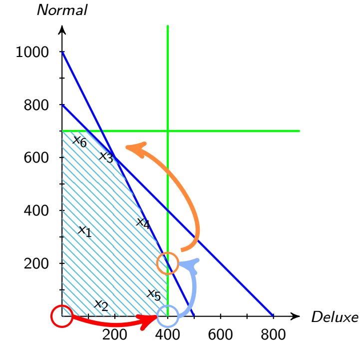
$|x_5 \leq \infty$

$|x_5 \leq 400$

$|x_5 \leq 250$

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 3.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_5 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 400,\ x_2 = 200,\ x_3 = 200$ *und* $x_6 = 500$



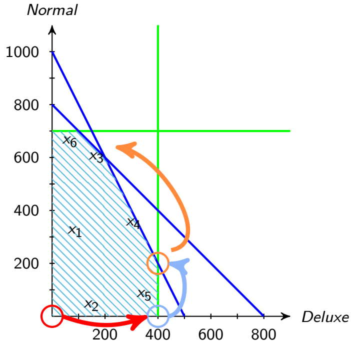

$x_5 = x_4 = 0$

$$
\begin{array}{lll}
\max z & = 66000 - 15x_4 + 60x_5 & \\
\text{subject to} & & \text{Quotiententest:} \\
x_3 & = 200 + \frac{1}{6}x_4 - x_5 & |x_5 \leq 200 \text{ Min!} \\
x_2 & = 200 - \frac{1}{6}x_4 + 2x_5 & |x_5 \leq \infty \\
x_1 & = 400 - x_5 & |x_5 \leq 400 \\
x_6 & = 500 + \frac{1}{6}x_4 - 2x_5 & |x_5 \leq 250 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 &
\end{array}
$$

D. h. $x_5$ kommt in unsere Basis und $x_3$ verlässt die Basis.

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 4.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_3 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 200,\ x_2 = 600,\ x_5 = 200$ *und* $x_6 = 100$



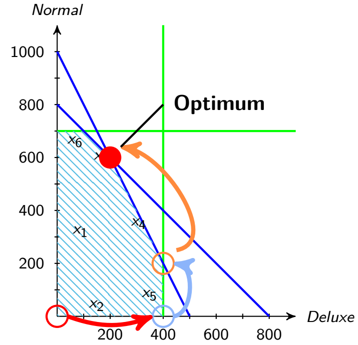

$x_3 = x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
\text{max } z \quad &= 78000 - 60x_3 - 5x_4 \\
\text{subject to} \\
x_5 &= 200 \quad -x_3 \quad +\tfrac{1}{6}x_4 \\
x_2 &= 600 \quad -2x_3 \quad +\tfrac{1}{6}x_4 \\
x_1 &= 200 \quad +x_3 \quad -\tfrac{1}{6}x_4 \\
x_6 &= 100 \quad +2x_4 \quad -\tfrac{1}{6}x_4 \\
x_1, x_2, &x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Sind weitere Verbesserungen möglich?

# Finden einer optimalen Lösung für das Fahrradproblem – 4.Iteration

- Basislösung:
  NBV: $x_3 = x_4 = 0$
  BV: $x_1 = 200,\ x_2 = 600,\ x_5 = 200$ *und* $x_6 = 100$




$x_3 = x_4 = 0$

$$\max z = 78000 - 60x_3 - 5x_4$$

subject to

$$\begin{aligned}
x_5 &= 200 - x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_2 &= 600 - 2x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_1 &= 200 + x_3 - \tfrac{1}{6}x_4 \\
x_6 &= 100 + 2x_4 - \tfrac{1}{6}x_4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Sind weitere Verbesserungen möglich?
$\Rightarrow$ Nein. Die optimale Lösung wurde gefunden.

# Zusammenfassung

1. Bringe das LP in die Standardform.
2. Starte mit einer zulässigen Basislösung (evtl. Phase I ausführen).
3. Finde eine Nichtbasisvariable $x_q$, die den Zielfunktionswert verbessern kann.
   (Bei Maximierung: Nichtbasisvariablen mit positiven Koeffizienten.)
   Falls es keine gibt, dann ist die aktuelle Basislösung optimal.
   (Bei Maximierung: alle Koeffizienten in der Zielfunktion negativ.)
4. Bestimme den Wert für $x_q$, der zur größtmöglichen Verbesserung der Zielfunktion führt, ohne dass eine Basisvariable unzulässig wird.
   Sei $x_p$ die erste Basisvariable, die den Wert von $x_q$ beschränkt.
   Falls es keine solche Beschränkung für $x_q$ gibt, dann ist das Problem unbeschränkt.
5. Führe einen Pivotschritt durch, bei dem $x_p$ die Basis verlässt und $x_q$ in die Basis eintritt. Gehe zu Schritt 3.

# Intepretation der Lösung

Ausgangspunkt ist immer ein Modell in Standardform.

- **Optimalität**:
  Die Koeffizienten aller Nichtbasisvariablen in der Zielfunktion sind negativ.
- **Unbeschränktheit**:
  In einer Iteration kann eine ausgewählte Nichtbasisvariable beliebig weit erhöht werden, ohne dass sie an eine Grenze stößt. D. h. die Variablen-Koeffizienten sind in allen Restriktionen positiv.
- **Degeneriertheit**:
  Mindestens eine der Basisvariablen besitzt einen Wert von Null.
- **Ausgangsbasislösung ist unzulässig**:
  Die Ausgangsbasislösung enthält negative Werte $\rightarrow$ Anwendung der Simplex-Phase I (siehe nächste Vorlesung).

# Fazit und Ausblick

# Fazit und Ausblick

- Lernziele
  - Standardform eines LP-Modells erklären können
  - Überführen von LP-Modellen in die Standardform
  - Lösen von LPs mit Hilfe des Simplex-Verfahrens

- Nächste Vorlesung
  - Simplex Phase I
  - Sensitivitätsanalyse

# Literatur


- L. Suhl, T. Mellouli. Optimierungssysteme – Modelle, Verfahren, Software, Anwendungen. 3. Auflage, Springer Gabler, Berlin/Heidelberg, 2013, Seite 44–51.

# Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Leuphana University of Lüneburg
Business information systems, in particular Operations Research
Prof. Dr. Lin Xie
Universitätsallee 1
Building 4, Room 314
21335 Lüneburg
Phone +49 4131 677 2305
Fax +49 4131 677 1749
xie@leuphana.de