RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NXN

MÉTODO DE ESCALONAMENTO

SISTEMA LINEAR

- Uma equação linear é uma expressão na forma

$$a_1x_1+a_2x_2+ \ldots +a_nx_n = b$$

onde a_i e $b \in$ IR e os x_i são incógnitas.

- Um sistema de equações lineares é um conjunto de m equações lineares nas n incógnitas x_i:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \ldots +a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \ldots +a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \ldots +a_{mn}x_n = b_m$$

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = b_m$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz dos coeficientes

Matriz coluna das incógnitas

Matriz coluna dos termos independentes

MATRIZ AUMENTADA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ESCALONAMENTO

Uma matriz é dita MATRIZ ESCALONADA se satisfaz as seguintes condições:

1) Todas as linhas zero, se houver, estão na base da matriz;

2) Cada elemento principal não-nulo está à direita do elemento principal não-nulo da linha precedente.

Uma matriz escalonada é obtida por meio de uma ***eliminação gaussiana***.

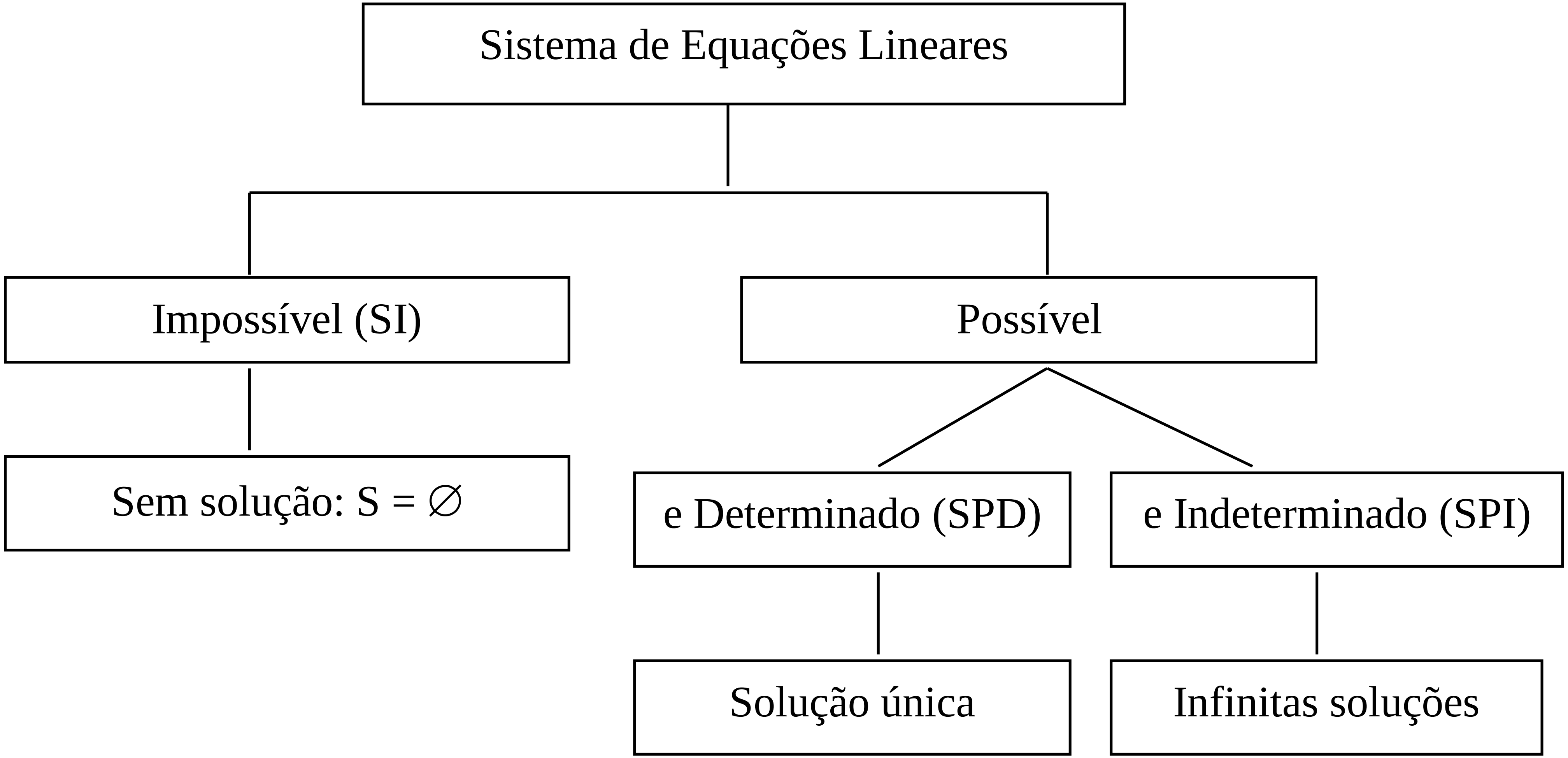
OPERAÇÕES PERMITIDAS SOBRE A MATRIZ AUMENTADA

São permitidas as seguintes operações entre as **linhas** de uma matriz a fim de se obter uma matriz na forma escalonada:

1) Permuta de linhas: $\mathbf{L_i \leftrightarrow L_j}$

2) Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo: $\mathbf{L_i \rightarrow k.\ L_i}$

3) Substituição de uma linha pela soma desta linha com a proporcional de outra linha: $\mathbf{L_i \rightarrow L_i + k.\ L_j}$.


Sistema de Equações Lineares
Impossível (SI)
Possível
Sem solução: S = ∅
e Determinado (SPD)
e Indeterminado (SPI)
Solução única
Infinitas soluções

EXEMPLOS: OBTENHA O CONJUNTO SOLUÇÃO DOS SEGUINTES SISTEMAS LINEARES

1) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} .(-2)\ .(-3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -8 \end{bmatrix} .(-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ .(-1) \text{ (opcional)} \\ .(-1) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7y + 3z = 2 \\ 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{matrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ou $S = \{(2, -1, 3)\}$

2) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

1	4	3	1	-2	-1
2	5	4	4		
1	-3	-2	5		

1	4	3	1	
0	-3	-2	2	**- 7/3**
0	-7	-5	4	

1	4	3	1
0	-3	-2	2
0	0	- 1/3	- 2/3

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 3y + 2z = -2 \\ \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2$$

$$3y + 2 \,.\, 2 = -2 \;\rightarrow y = -2$$

$$x + 4.(-2) + 3 \,.\, 2 = 1 \;\rightarrow x = 3$$

S = {(3, -2, 2)}

3) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$

1	-2	1	3	-2	-3
2	1	1	1		
3	-1	2	2		
1	-2	1	3		
0	5	-1	-5	-1	
0	5	-1	-7		
1	-2	1	3		
0	5	-1	-5		
0	0	0	-2		

$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - z = -5 \\ 0z = -2 \end{cases}$

$0z = -2 \quad \Rightarrow$ impossível !!!

Sistema sem solução

S = $\varnothing$

$$4)\ \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x - 2y + 7z = 9 \end{cases}$$

1	1	3	4	-2	-3
2	-3	4	5		
3	-2	7	9		

1	1	3	4	
0	-5	-2	-3	-1
0	-5	-2	-3	

1	1	3	4
0	-5	-2	-3
0	0	0	0

$$\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 5y + 2z = 3 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

$0z = 0 \Rightarrow$ possível $\forall z \in IR$

Sistema com infinitas soluções

$$z = a$$

$$5y + 2a = 3 \ \rightarrow y = \frac{3-2a}{5}$$

$$x + \left(\frac{3-2a}{5}\right) + 3a = 4 \ \rightarrow x = \frac{17-13a}{5}$$

$$S = \left\{\left(\frac{17-13a}{5}, \frac{3-2a}{5}, a\right)\right\}$$

VÍDEOS DE APOIO

https://www.youtube.com/watch?v=rmUhORR7Vss

https://www.youtube.com/watch?v=D3CoZyutQZE