TEORIA DOS CONJUNTOS

CONJUNTO

Qualquer lista ou coleção bem definida de objetos é chamada de um conjunto.

- Exemplos:
  a) Os números pares
  b) As soluções da equação $x^2 - 3x - 2 = 0$.
  c) As pessoas que habitam a Terra.

- Comumente usam-se três procedimentos para definir um conjunto:

1. **Descrever seus elementos** por uma sentença, por exemplo:
   - O conjunto dos números pares;
   - O conjunto dos números reais;
   - O conjunto dos planetas do sistema solar.
2. **Listar seus elementos** entre chaves, por exemplo:
   - {-2,4,-6,8,-10}
   - {0, 1, 2, 3, 4, ...}
3. Fornecer **uma propriedade** que identifica seus elementos, por exemplo;
   - $\{x / x \in Z \text{ e } x > 2\}$
   - $\{x / x \in IR \text{ e } 2 < x < 10\}$

EXEMPLOS:

1. Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:

a) $\{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 7\}$

$= \{4, 5, 6, 7\}$

b) {x/ x é um mês com exatamente 30 dias}

= {abril, junho, setembro, novembro}

c) {x/ x é a capital do Brasil}

= {Brasília}

2. Descreva cada um dos conjuntos a seguir por meio de uma propriedade que caracterize seus elementos:

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

$= \{x \in P / x \leq 17\}$

b) {fevereiro}

= {x/ x é um mês com menos de 30 dias}

c) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

$= \{x \in IN / 5 < x < 11\}$

Conjuntos Numéricos

$\mathbb{N}$ = o conjunto de todos os números naturais

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ = o conjuntos de todos os números inteiros

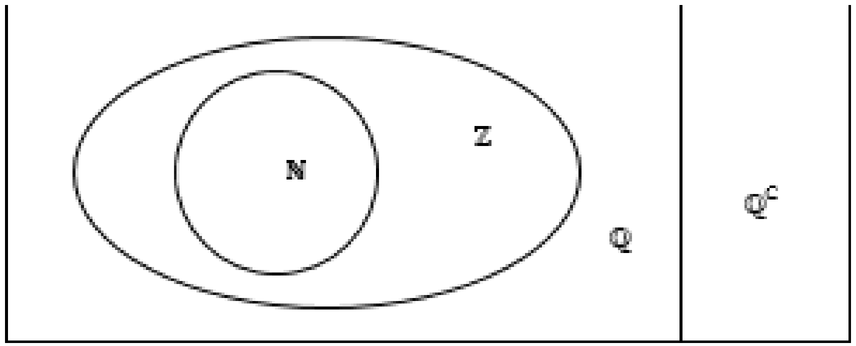
$$\mathbb{Z} = \{\ldots-2, -1,0, 1,2, \ldots\}$$

$\mathbb{Q}$ = o conjunto de todos os números racionais

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

$\mathbb{R}$ = o conjunto de todos os números reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^{C}$$



Relações:

Relação de Pertinência

Os objetos que compreendem um conjunto são chamados seus **elementos** ou membros. Escrevemos

$p \in A$ se p é um elemento no conjunto A.

Exemplos:

$6 \in B$

$9 \notin B.$

Relação de Continência

Se todo elemento de A também pertence a um conjunto B, isto é, se $x \in A$ implica $x \in B$ então A é chamado **subconjunto** de B ou diz-se que está contido em B, isso é anotado por:

$A \subset B$ (ou $B \supset A$)

- Observação: O conjunto vazio ($\varnothing$ ou **{ }**) é subconjunto de qualquer conjunto.

Exemplos:

$A \subset B$

$B \not\subset D$

Igualdade de conjuntos

Dois subconjuntos são iguais se ambos contêm os mesmos elementos, isto é

A = B se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$

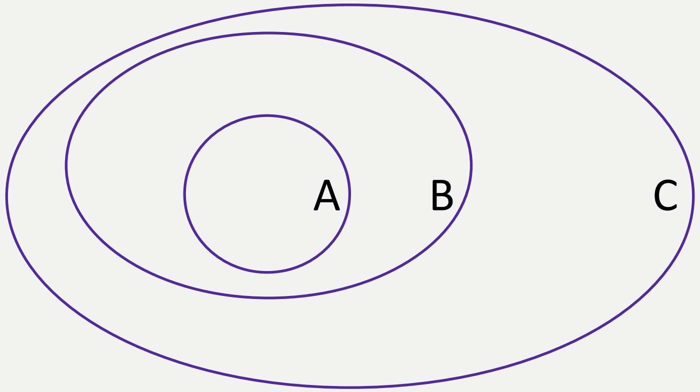
Exemplo:

Se $A = \{x \in Z / 1 < x < 5\}$ e $B = \{2,3,4\}$, então $A = B$.

- Teorema 1: Se A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de C, então A é um subconjunto de C. Isto é:

Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Exemplo:



Conjuntos das Partes

Exemplo:

Dado o conjunto $A = \{a, e, i\}$ é possível escrever todos os subconjuntos (ou partes) de A.

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a,e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$$

- P é chamado de **conjunto das partes** de A.
- Note que $\{e\} \in P(A)$, pois $\{e\}$ é um elemento de P(A).

Se o conjunto A possui n elementos, o conjunto P(A) possuirá 2^n elementos.

Exemplo: Quantos são os subconjuntos de um conjunto com cinco elementos?

$$n = 5 \text{ elementos} \Rightarrow 2^5 = 32 \text{ subconjuntos}$$

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

UNIÃO

A **união** dos conjuntos A e B é um conjunto de elementos de todos os elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos.

$$\mathbf{A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$

INTERSECÇÃO

A **intersecção** de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos comuns a A e B.

$$\mathbf{A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$

- A e B são **disjuntos** de não possuem elementos em comum, ou seja, $A \cap B = \varnothing$.

OPERAÇÕES

DIFERENÇA

A **diferença** de dois conjuntos A e B é o conjunto de elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.

$$\mathbf{A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

- $(A - B) \neq (B - A)$
- $(A - B) \subset A$, mas $(B - A) \subset B$

COMPLEMENTO

O **complemento** de um conjunto é o conjunto dos elementos que não pertencem a A. É denotado por A’ ou A^C.

$$\mathbf{A^C = \{x \,/\, x \in U \text{ e } x \notin A\}}$$

- $A \cup A^C = U$
- $A \cap A^C = \varnothing$
- $U^C = \varnothing$ e $\varnothing^C = U$
- $(A^C)^C = A$
- $A - B = A \cap B^C$

Outros símbolos:

$A^* = A - \{0\}$

$A_+ = \{x \in A / \ x \geq 0\}$

$A_- = \{x \in A / \ x \leq 0\}$

$A^*_+ = \{x \in A / \ x > 0\}$

$A^*_- = \{x \in A / \ x < 0\}$

Certos subconjuntos de $\mathbb{R}$, determinados por desigualdades (<, >, etc) são representados também na forma de intervalos:

$]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

$]a, +\infty [= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$

Álgebra de Conjuntos

Leis				
Idempotentes	$A \cup A = A$		$A \cap A = A$	
Associativas	$(A \cup B) \cup C =$ $A \cup (B \cup C)$		$(A \cap B) \cap C =$ $A \cap (B \cap C)$	
Comutativas	$A \cup B = B \cup A$		$A \cap B = B \cap A$	
Distributivas	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$		$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	
De Identidade	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
De Complementariedade	$A \cup A^C = U$	$A \cap A^C = \varnothing$	$(A^C)^C = A$	$U^C = \varnothing$ $\varnothing^C = U$
De Morgan	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$		$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	

Vídeos de apoio:

https://www.youtube.com/watch?v=0aUEDxYjZg8

https://www.youtube.com/watch?v=Wxm3ugnq9Sw

https://www.youtube.com/watch?v=c5a99sX-Sq8

https://www.youtube.com/watch?v=eZfFpnvudR0