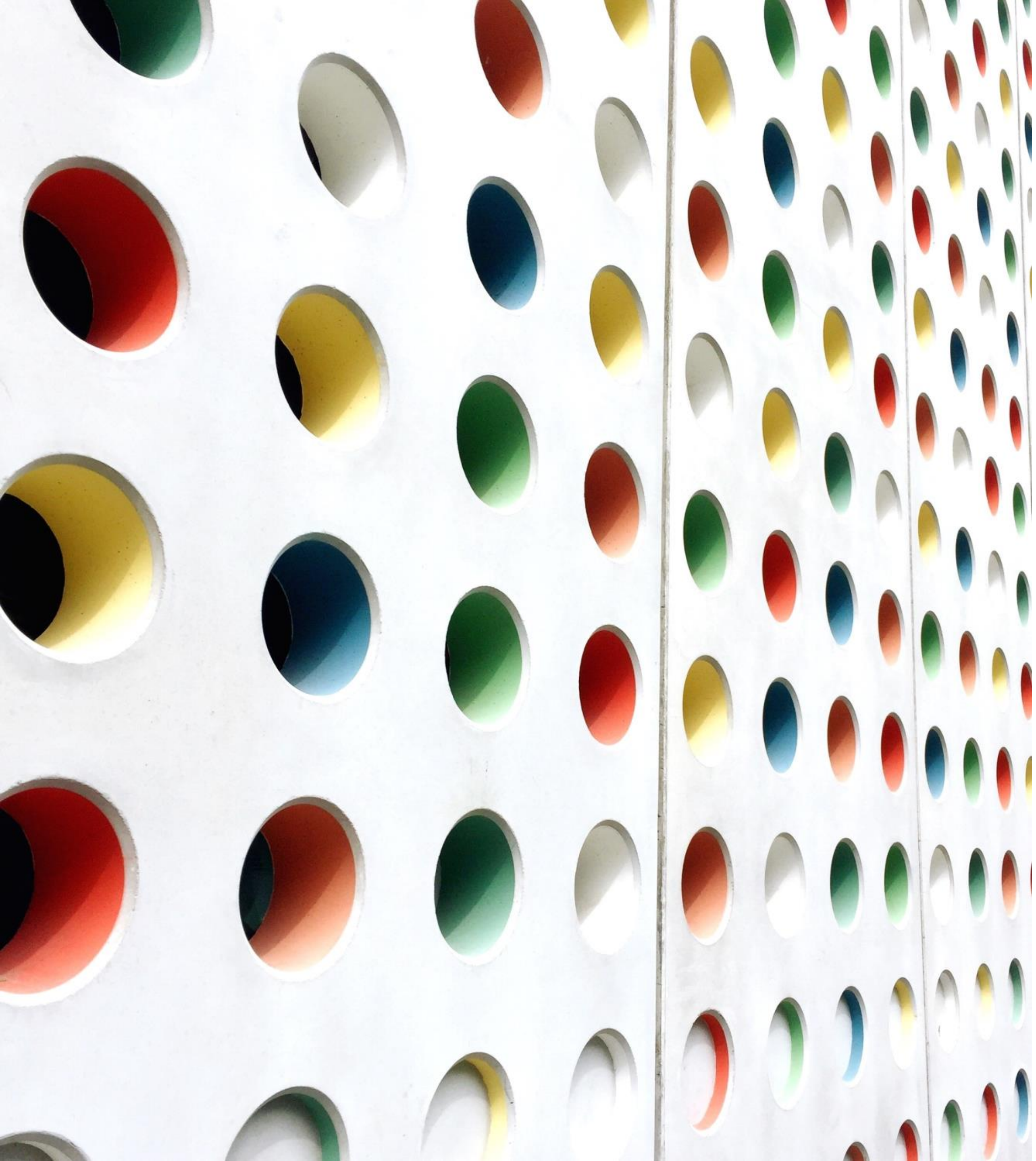

Indução Matemática

PROFA. DRA. VIVIANE REZI

Indução matemática:

É uma ferramenta importante para provar relações matemática em um conjunto discreto.

- COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

- CORRETUDE DE ALGUNS TIPOS DE PROGRAMAS DE COMPUTADOR

– TEOREMAS SOBRE GRAFOS E ÁRVORES

– E UMA GRANDE QUANTIDADE DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

Princípio da Indução Matemática

Seja P(n) um predicado definido para os inteiros n, e seja n_0 um inteiro fixo·

Suponha que as duas afirmações seguintes sejam verdadeiras:

1. $P(n_0)$ é Verdadeira (V).

2. Para todos inteiros $n \geq n_0$, se P(n) é V então P(n +1) é V.

Logo, a afirmação para todos inteiros $n \geq n_0$, P(n) é V.

A prova por indução matemática

A prova por indução matemática de que P(n) é verdadeira para todo inteiro n consiste de dois passos:

Passo base: A proposição $P(n_0)$ é verdadeira

Passo indutivo: A implicação $P(n) \rightarrow P(n+1)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Exemplo 1:

Prove que para todos os inteiros n $\in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Resolução:

PASSO BASE: Faça n = 1 e verifique se a igualdade acima é verdadeira.

$$(2.1 - 1) = 1^2$$

$$1 = 1$$

(V)

PASSO INDUTIVO: Se a fórmula é verdadeira para n então será também para n +1, ou seja, n $\rightarrow$ n+1

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2.(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2.(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

$$n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

(V)

Exemplo 2:

Prove que para todos os inteiros n≥1,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Resolução:

PASSO BASE: Faça n = 1:

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

(V)

PASSO INDUTIVO: n → n+1

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+2n+n+2}{2}$$

$$\frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

(V)

Exemplo 3

Prove que para todos os inteiros n ≥ 0

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+2)}{2}$$

Resolução:

PASSO BASE: Faça n = 0 e verifique se a igualdade acima é verdadeira.

$$0 = \frac{0(0+2)}{2}$$

$$0 = 0 \quad \text{(V)}$$

PASSO INDUTIVO: n → n+1

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+2)}{2}$$

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{2}$$

$$\frac{n(n+2)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{2}$$

$$\frac{n^2 + 2n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 1n + 3}{2}$$

$$\frac{n^2 + 4n + 2}{2} = \frac{n^2 + 4n + 3}{2}$$

(F)

Exemplo 4

Prove que para todos os inteiros n≥ 1,

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$