OPERAÇÕES COM MATRIZES

I. Adição de Matrizes

II. Multiplicação de uma matriz por um escalar

III. Multiplicação de matrizes

IV. Matriz Transposta

ADIÇÃO DE MATRIZES

$$\mathbf{A + B = [}a_{ij} \mathbf{+} b_{ij}\mathbf{]}_{\mathbf{mXn}}$$

Propriedades:

A + B = B + A

A + (B + C) = (A + B) + C

A + 0 = A, onde 0 representa a matriz nula mXn

Ex 1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ efetue:

a) A + B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$$

b) A - B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM ESCALAR

$$\mathbf{k \,.\, A = [k \,.\, \mathit{a_{ij}}]_{mXn}}$$

Propriedades:

$k\,(A + B) = kA + kB$

$(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$

$0\,.\,A = 0$

$1\,.\,A = A$

$k_1\,(k_2\,A) = (k_1\,k_2)A$

Ex 2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ efetue:

a) 2A

$= 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

b) -3 B

$= -3 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 15 & -6 & 12 \\ -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- $A_{mXn}\ B_{nXp} = [c_{uv}]_{mXp}$

PROPRIEDADES:

Em geral, $AB \neq BA$.

$A_{mXn} \cdot I_n = I_m \cdot A_{mXn} = A$, em que I é a matriz identidade.

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$(AB)C = A(BC)$

$(kA)B = A\,k\,B = k\,(AB)$

$0\,A = 0$ e $A\,0 = 0$, em que 0 é a matriz nula.

Ex 3) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, efetue:

a) A . B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\,.(-1) + 2\,.7 & 1\,.0 + 2\,.8 & 1\,.1 + 2\,.9 \\ 3.(-1) + 4\,.7 & 3\,.0 + 4\,.8 & 3\,.1 + 4\,.9 \\ 5.(-1) + 6\,.7 & 5\,.0 + 6\,.8 & 5\,.1 + 6\,.9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 25 & 32 & 39 \\ 37 & 48 & 59 \end{bmatrix}$$

b) B .A

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1).1 + 0\,.3 + 1\,.5 & (-1).2 + 0\,.4 + 1\,.6 \\ 7\,.1 + 8\,.3 + 9\,.5 & 7\,.2 + 8\,.4 + 9\,.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 76 & 100 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPOSTA A^T

$A^t = [b_{ij}]_{nXm}$, matriz transposta de A, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$.

Propriedades:

Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se $A = A^t$.

$(A^t)^t = A$.

$(A + B)^t = A^t + B^t$.

$(k\,A)^t = k\,A^t$.

$(AB)^t = B^t A^t$ (note a mudança de ordem)

Ex. 4) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ efetue:

a) A^T

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A^T + B$

Impossível.

c) $A^T + B^T$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$