FACULDADE DE TECNOLOGIA DE JUNDIAÍ - FATECJD
PROFA. DRA. VIVIANE REZI

Matrizes

- Dados em muitos tipos de problemas podem ser representados através de um arranjo retangular de valores. Tal arranjo é chamado **matriz**.
- Matrizes são *conjuntos ordenados* de números e estão associadas a duas dimensões: a dimensão das *linhas* e a das *colunas*. Em outras palavras, são números dispostos em uma tabela. Por exemplo, dados referentes à altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, representados em uma tabela ou em uma matriz:

	Altura (m)	**Peso (kg)**	**Idade (anos)**
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo, a matriz possui 4 linhas e três colunas.

- Notação: $A_{mXn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

  $A = [a_{ij}]_{mXn}$, uma matriz com *m* linhas e *n* colunas, em que *i* representa a posição do elemento segundo a linha e *j* representa a posição do elemento segundo a coluna.

- **Igualdade entre matrizes**: Duas matrizes $A_{mXn} = [a_{ij}]_{mXn}$ e $B_{rXs} = [b_{ij}]_{rXs}$ são iguais, A = B, se elas têm o mesmo número de linhas (m = r) e colunas (n = s) e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

- **Tipos especiais de matrizes:**
  • **Matriz Quadrada** é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas (m = n). Uma matriz quadrada possui uma diagonal principal (a_{ii}) e uma diagonal secundária.
  • **Matriz Nula** é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.
  • **Matriz Coluna** é aquela que possui uma única coluna (n = 1).
  • **Matriz Linha** é aquela que possui uma única linha (m = 1).
  • **Matriz Diagonal** é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal são nulos.
  • **Matriz Identidade** é uma matriz diagonal em que $a_{ii} = 1$, representada por I_n.
  • **Matriz Triangular Superior** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$, para i > j.

• **Matriz Triangular Inferior** é aquela em que todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$, para i < j.
• **Matriz Simétrica** é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, utilizando a diagonal como referência, os elementos em posições equivalentes acima e abaixo da diagonal são iguais. Qualquer matriz diagonal é, portanto, simétrica.

➢ **Operações com matrizes**

• **ADIÇÃO:** A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{mXn} = [a_{ij}]$ e $B_{mXn} = [b_{ij}]$ é uma matriz m X n, que denota-se A + B, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é:

$$\mathbf{A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mXn}}$$

• **Propriedades**: Dadas duas matrizes A, B e C de mesma ordem mXn, temos:
i. A + B = B + A
ii. A + (B + C) = (A + B) + C
iii. A + 0 = A, onde 0 representa a matriz nula mXn.

• **MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR:** Seja $A = [a_{ij}]_{mXn}$ e k um número, então definimos uma nova matriz

$$\mathbf{k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{mXn}}$$

• **Propriedades**: Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem mXn e números reais k, k_1 e k_2, temos:
i. k (A + B) = kA + kB
ii. $(k_1 + k_2)\,A = k_1 A + k_2 A$
iii. 0 . A = 0
iv. 1. A = A
v. $k_1 (k_2 A) = (k_1 k_2)A$

Observação: Combinando as duas operações anteriores, temos a definição da *subtração* entre duas matrizes: A + (-1 B) = A – B.

• **MATRIZ TRANSPOSTA**: Dada uma matriz $A_{mXn} = [a_{ij}]$, poderemos obter uma outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{nXm}$, matriz transposta de A, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$.

• **Propriedades**:
i. Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se $A = A^t$.
ii. $(A^t)^t = A$.
iii. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
iv. $(k\,A)^t = k\,A^t$.

• **MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES:** Sejam $A = [a_{ij}]_{mXn}$ e $B = [b_{rs}]_{nXp}$. Definimos $AB = [c_{uv}]_{mXp}$ onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} b_{uk}$$

ou seja, é a soma dos produtos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos elementos de uma coluna da segunda matriz.

• Observações:

1. Só é possível efetuar o produto de duas matrizes A e B se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.
2. A matriz resultado da multiplicação entre A_{mXn} e B_{nXp} será a matriz C de ordem mXp.

• **Propriedades**:

i. Em geral, $AB \neq BA$.
ii. $A_{mXn} \cdot I_n = I_m \cdot A_{mXn} = A$, em que I é a matriz identidade.
iii. A(B+C) = AB + AC
iv. (A+B)C = AC + BC
v. (AB)C = A(BC)
vi. (kA)B = A k B = k (AB)
vii. $(AB)^t = B^t A^t$ (note a mudança de ordem)
viii. 0 A = 0 e A 0 = 0, em que 0 é a matriz nula.

- **MATRIZ INVERSA** é uma matriz quadrada, denotada por A^{-1}, tal que,

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

EXERCÍCIOS

1) Determine a matriz A = $(a_{ij})_{3X3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

2) Determine a matriz B = $(b_{ij})_{2X3}$ tal que $b_{ij} = i^2 + j^2$.

3) Determine a matriz C = $(c_{ij})_{1X4}$ tal que $c_{ij} = 2ij$.

4) Construa as seguintes matrizes:

a) A = $(a_{ij})_{3X3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases}$

b) B = $(b_{ij})_{3X3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i + j = 4 \\ 0, & se \quad i + j \neq 4 \end{cases}$

5) A é uma matriz 3X2 definida pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ i^2, & se \quad i \neq j \end{cases}$. Escreva a matriz A.

6) Sejam dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinar

a) 5*A*-2*B*

b) 2*A*+3*B*

c) *AB*

d) (*AB*)*C*

7) Calcule:

a. $(\ 3 \quad 8 \quad -2 \quad 4\ ) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

b. $(\ 1 \quad 8 \quad 3 \quad 4\ ) \cdot (\ 6 \quad 1 \quad -3 \quad 5\ )$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

8) Determine AA^T e A^TA, onde A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

9) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Seja a matriz C tal que C = AB.

Determine os elementos c_{23}, c_{14} e c_{21} diretamente.

10) Determine as incógnitas na relação abaixo:

$$3.\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

11) Calcule os números reais *a*, *b* e *c* tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & b & 3 \\ c & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2b & 2 \\ 2a & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 10 & b \\ 5c & 0 \end{bmatrix}$$

12) Se A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{bmatrix}$, encontre x e y se A. B = B . A

13) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz X em cada uma das equações abaixo:

a) 2X + A = 3B + C

b) X + A = ½ (B-C)

c) 3X + A = B – X

d) ½ (X – A – B) = 1/3(X-C)