Matrizes

Profa. Dra. Viviane Rezi

Em uma tabela:

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Definição

Matrizes são *conjuntos ordenados* de números e estão associadas a duas dimensões: a dimensão das *linhas* e a das *colunas*. Em outras palavras, são números dispostos em uma tabela.

Notação: $A = (a_{ij})_{mXn}$

$$A_{mXn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Construção de matrizes: exemplos

1. Construa a matriz A = $(a_{ij})_{3X2}$ tal que $a_{ij} = 2i + j^2$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.1 + 1^2 & 2.1 + 2^2 \\ 2.2 + 1^2 & 2.2 + 2^2 \\ 2.3 + 1^2 & 2.3 + 2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

2) Construa a matriz $B = (b_{ij})_{3X3}$ de modo que $b_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de

MATRIZES

Matriz Quadrada

É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas (m = n).

Uma matriz quadrada possui uma diagonal principal (a_{ii}) e uma diagonal secundária.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 12 & \pi & 1{,}5 \\ 100 & 14 & 71 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Matriz Nula

É aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Linha e Matriz Coluna

Matriz Linha é aquela que possui uma única linha (m = 1).

Matriz Coluna é aquela que possui uma única coluna (n = 1).

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

É uma matriz <u>quadrada</u> onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

É uma matriz diagonal em que $a_{ii} = 1$, representada por I_n.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular

Superior

É uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$, para i > j.

$$\begin{bmatrix} 15 & -6 & 12 & 5 \\ 0 & 9 & 17 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Inferior

É aquela em que todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$, para i < j.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 12 & \pi & 0 \\ 100 & 14 & 71 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

- É uma matriz quadrada em que $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, utilizando a diagonal como referência, os elementos em posições equivalentes acima e abaixo da diagonal são iguais.
- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 10 \\ -3 & -1 & 7 & 1/2 \\ -4 & 7 & 6 & 3 \\ 10 & 1/2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Correlations

		VEGETAIS	MORTM	MORTF
VEGETAIS	Pearson Correlation	1.000	-.814**	-.743**
	Sig. (2-tailed)	.	.000	.000
	N	18	18	18
MORTM	Pearson Correlation	-.814**	1.000	.880**
	Sig. (2-tailed)	.000	.	.000
	N	18	18	18
MORTF	Pearson Correlation	-.743**	.880**	1.000
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.
	N	18	18	18

**. Correlation is significant at the 0.01 level

SPSS é um software aplicativo do tipo científico. Originalmente o nome era acrónimo de Statistical Package for the Social Sciences - pacote estatístico para as ciências sociais, mas na atualidade a parte SPSS do nome completo do software não tem significado.

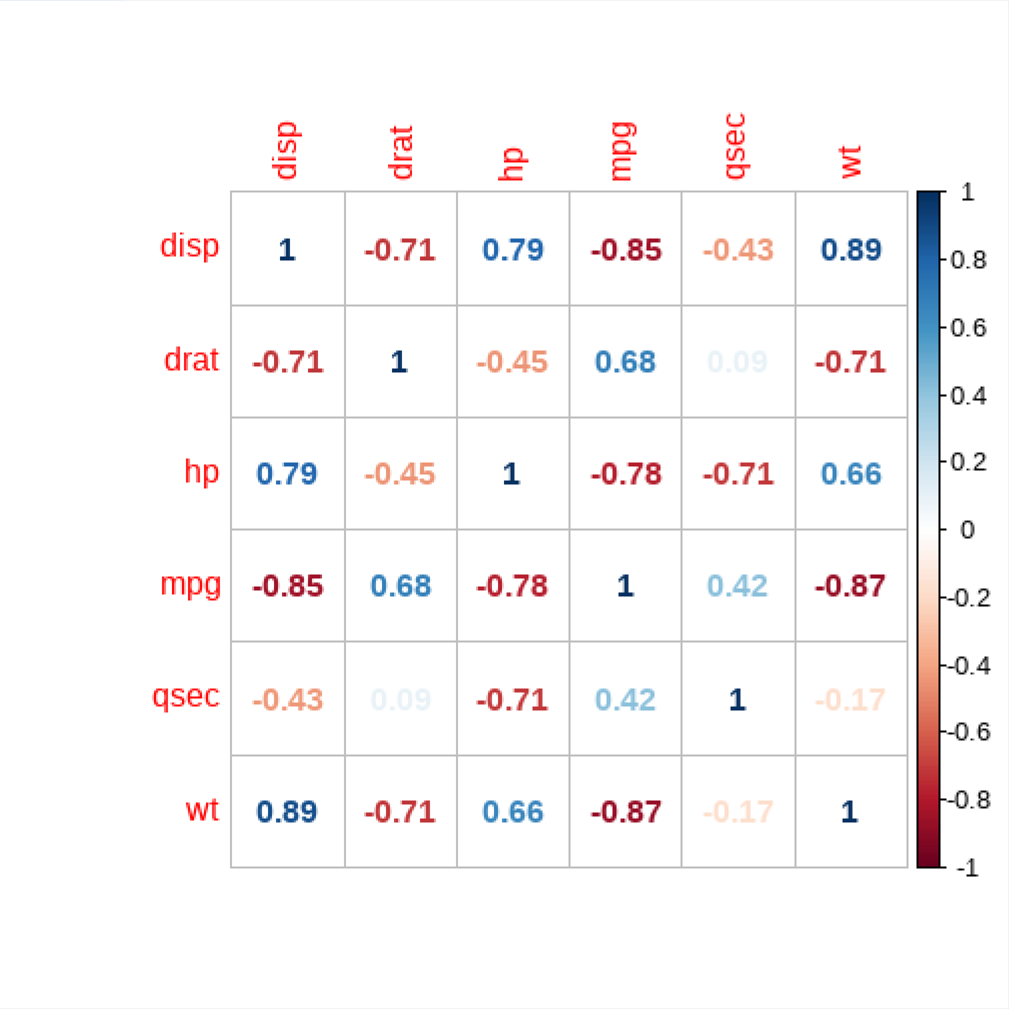

Tabela 5. Matriz de correlação relativa ao grupo de variáveis representativas da avaliação do trabalho docente pelo discente ocorrida na FAMES.

	V	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13
V1	1,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
V2	0,56	1,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
V3	**0,86**	0,58	1,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
V4	0,54	**0,63**	0,51	1,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
V5	0,06	0,14	0,07	0,20	1,00	-	-	-	-	-	-	-	-
V6	0,06	0,13	0,08	0,18	**0,94**	1,00	-	-	-	-	-	-	-
V7	0,05	0,13	0,08	0,13	**0,94**	**0,92**	1,00	-	-	-	-	-	-
V8	0,06	0,16	0,10	0,10	**0,85**	**0,84**	**0,90**	1,00	-	-	-	-	-
V9	0,09	0,15	0,08	0,16	0,46	0,45	0,44	0,50	1,00	-	-	-	-
V10	0,02	0,02	0,05	0,07	0,53	0,57	0,53	0,50	**0,83**	1,00	-	-	-
V11	0,08	0,14	0,10	0,07	0,58	0,59	0,58	0,52	**0,77**	**0,86**	1,00	-	-
V12	0,09	0,20	0,12	0,16	0,55	0,55	0,55	0,51	**0,73**	**0,78**	**0,83**	1,00	-
V13	0,13	0,18	0,16	0,13	0,57	0,58	0,59	0,61	**0,76**	**0,84**	**0,83**	**0,82**	1,00

OPERAÇÕES COM MATRIZES

I. Adição de Matrizes

II. Multiplicação de uma matriz por um escalar

III. Multiplicação de matrizes

IV. Matriz Transposta

Adição de Matrizes

$$\mathbf{A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mXn}}$$

Propriedades:

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + 0 = A$, onde 0 representa a matriz nula mXn

Ex. 1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ***e*** $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ ***efetue:***

a) A + B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$$

b) A - B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar

$$k \,.\, A = [k \,.\, a_{ij}]_{mXn}$$

Propriedades:

$k\,(A + B) = kA + kB$

$(k_1 + k_2\,)\,A = k_1\,A + k_2\,A$

$0\,.\,A = 0$

$1.\,A = A$

$k_1\,(k_2\,A) = (k_1\,k_2)A$

Ex. 2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ***e*** $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ***efetue:***

a) 2A

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

b) -3 B

$$= -3 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -6 & 12 \\ -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

$$A_{mXn}\ B_{nXp} = [c_{uv}]_{mXp}$$

Propriedades:

Em geral, $AB \neq BA$.

$A_{mXn} \cdot I_n = I_m \cdot A_{mXn} = A$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$(AB)C = A(BC)$

$(kA)B = A\,k\,B = k\,(AB)$

$0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$, em que 0 é a matriz nula.

Ex 3) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ***e*** $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$***, efetue:***

a) A . B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2 . 7 & 1 . 0 + 2 . 8 & 1 . 1 + 2 . 9 \\ 3 . (-1) + 4 . 7 & 3 . 0 + 4 . 8 & 3 . 1 + 4 . 9 \\ 5 . (-1) + 6 . 7 & 5 . 0 + 6 . 8 & 5 . 1 + 6 . 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 25 & 32 & 39 \\ 37 & 48 & 59 \end{bmatrix}$$

b) B . A

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1) . 1 + 0 . 3 + 1 . 5 & (-1) . 2 + 0 . 4 + 1 . 6 \\ 7 . 1 + 8 . 3 + 9 . 5 & 7 . 2 + 8 . 4 + 9 . 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 76 & 100 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta A^t

$A^t = [b_{ij}]_{nXm}$, matriz transposta de A, cujas linhas são as colunas de A

Propriedades:

Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se $A = A^t$.

$(A^t)^t = A$.

$(A + B)^t = A^t + B^t$.

$(k\,A)^t = k\,A^t$.

$(AB)^t = B^t\,A^t$ (note a mudança de ordem)

Ex. 4) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ***e*** $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ***efetue:***

a) A^T

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) $A^T + B$

Impossível.

c) $A^T + B^T$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Vídeos de apoio:

Matrizes: definição e conceitos iniciais

https://www.youtube.com/watch?v=lZ9onrdpusA

Operações com matrizes:

https://www.youtube.com/watch?v=pNWx2LE9meQ

Multiplicações de matrizes:

https://www.youtube.com/watch?v=8FwQM4H04kY