22 mai 2018
Proba-Stat L2 info
***Durée:* 2h -**

calculatrice autorisée - Aucun document
regardez le formulaire en dernière page

une pointe de colle ------------>

SOLUTION
PLUS
BAS

NOM (majuscules):
Prénom:

NOTES:
Exercice 1 : ___________/ 13

Exercice 2 : ___________/ 3

Exercice 3 : ___________/ 4

TOTAL: _______________

***N'oubliez pas d'indiquer votre nom.* Colle disponible quand vous rendez la copie.**
Donnez vos réponses à la suite de chaque question, *aux endroits prévus*.
Pas de point pour réponse sans explication des calculs

***RESULTATS AVEC DEUX chiffres significatifs: Le nombre 12.769434 s'arrondit à 12.77 et 0.0005634567 à 0.00056.* Barème approximatif entre parenthèses.**

Réponses en phrases complètes et grammaticalement correctes. Seules les réponses écrites aux endroits prévus seront prises en considération.
****

Exercice 1

Ci-dessous un échantillon des durées de vie X pour des ordinateurs.

Xv=c(0.5, 2.3, 3.4, 3.7, 4.2 , 6.4, 7.8, 0.1, 1.5, 0.6, 12.8, 14.3, 6.7, 5.9)

1. (3 pts) Compléter ci-dessous le programme R (avec sortie console) qui donne l'histogramme des densités sur 3 intervalles de mêmes longueur sur (0,15) - avec un axe des ordonnées allant de 0 à 0.20.

```
 s1=seq(______,_______,by=________)
> windows()
> yli=c(         ) ;  > xli=c(         )


> h1=hist(_____,breaks=_______,freq=_______,ylim=_______, xlim=_______)
> h1
$counts
[1] ________   _________    _________# 3 valeurs numériques
#  calculs ci-dessous
```

```
$density
[1] _________   __________  __________# 3 valeurs numériques
#  calculs ci-dessous
```

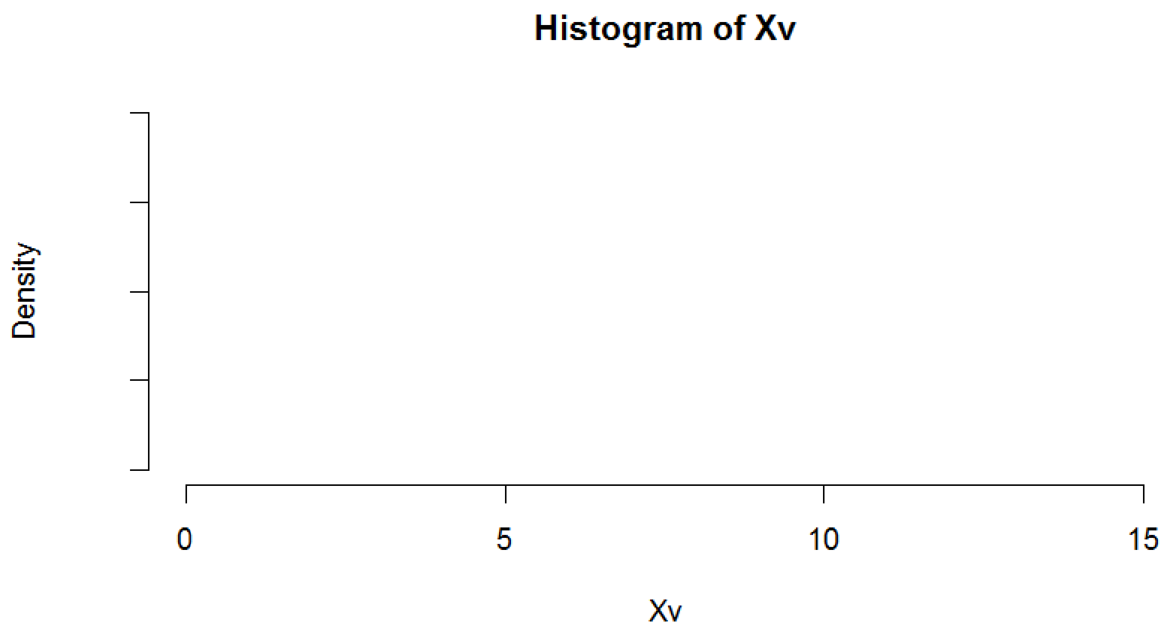
2. (2 pts) Calculer les éléments nécessaires pour tracer le boxplot.

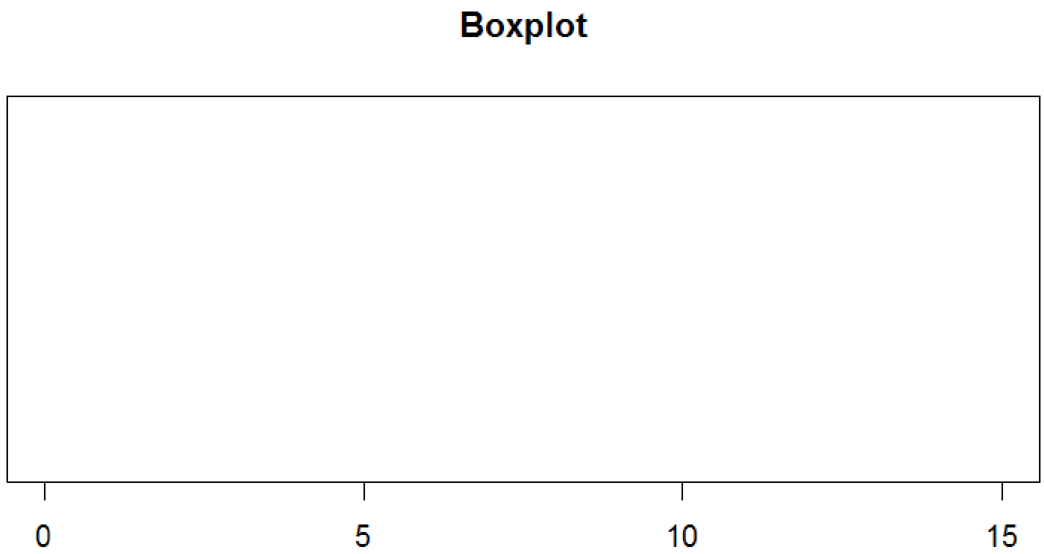
- compléter ci-dessous:

```
> BP(Xv)
h1    moust-bas    Q1     med     DIQ      Q3   moust-haut     h2

____   _____     ____     ____    ____    ____   _______      ____
```

3. (2 pts) Tracer l'histogramme et le boxplot ci-dessous.
Aucun point sans indication de l'échelle sur l'axe vertical de l'histogramme.





4. i. (2 pts) Sans détails ni calculs, dites à quoi sont égales les intégrales $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$ - ceci pour tout $\lambda > 0$.

$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$ = ______________qui exprime/représente________________________

$\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$ = ____________ qui exprime/représente________________________

ii. (1 pt) Sur la base de l'échantillon du début proposer une loi de probabilité qui approxime la distribution des durées de vie X.

Réposne: ____

iii. (1 pt) Utiliser l'échantillon pour obtenir la/les valeurs estimées du/des paramètres de la loi proposée en ii.

paramètre(s) estimé(s):____

SUPERPOSER la densité correspondant sur l'histogramme des densités.

iv. (2 pts) Calculer la probabilité que d'après le modèle la durée de vie soit

a. entre 2 et 4 années:

fonction R (avec bons arguments numériques): ______________________________

valeur numérique de la proba: ___________________________________

b. plus grande que 5:

fonction R (avec bons arguments numériques): ______________________________

valeur numérique de la proba: ___________________________________

Exercice 2

On mesure les profondeurs de 50 puits de pétrole - pour une somme de ces profondeurs égale à 51234 m et une somme des carrés égale à 75 456 256 m^2 .

1. (2 pts) Calculer la demi-longueur de l'intervalle de confiance à 95% pour l'espérance de la profondeur.

Résultat: ______________________

1. (1 pt) Donner l'intervalle de confiance à 95%.

Résultat: ____

****

Exercice 3

On teste des ordinateurs les uns après les autres - ils ont chacun une probabilité *p* d'avoir un défaut.

1. (1 pt) Comment s'appelle la loi de l'indice du premier ordinateur trouvé avec un défaut?

1. i. (1 pt) Si on teste 5 ordinateurs, comme s'appelle la loi du nombre d'ordinateurs défectueux?

ii. (2 pts) **Application numérique**: si p=0.4 calculer la probabilité de trouver 2 ordinateurs défectueux sur les 5.

Résultat: ______________________

Petit formulaire statistique: sans détails, à vous de savoir ce qui est quoi

Bon à savoir: les nombres $\mathbf{1.645, 1.96, 2.58}$

$$\sqrt{\frac{S2}{n-1} - \frac{So^2}{n(n-1)}}$$

Densité, espérance, écart-type	**Fonction de répartition F(a)**
Variables discrètes	
$(1\text{-}p)^{k-1}\, p$ = dgeom(k-1, p) espérance=1/p; écart-type=$\sqrt{1-p}/p$	
$\frac{n!\, p^k (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \text{dbinom}(k, n, p)$ espérance = np; écart-type = $\sqrt{np(1-p)}$	
$\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) = \text{dpois}(k, \lambda)$ espérance=λ; écart-type=$\sqrt{\lambda}$	
Variables continues	
$\frac{exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ = dnorm(x, μ, σ) espérance=μ, écart-type=σ	$\int_{-\infty}^{a} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$ = pnorm(a, μ, σ)
λ exp(-λx) = dexp(x, λ) espérance=écart-type= 1/λ	1 - exp(-λa) = pexp(a, λ)

SOLUTION

Exercice 1

Ci-dessous un échantillon des durées de vie X pour des ordinateurs.

Xv=c(0.5, 2.3, 3.4, 3.7, 4.2 , 6.4, 7.8, 0.1, 1.5, 0.6, 12.8, 14.3, 6.7, 5.9)

1. (3 pts) Compléter ci-dessous le programme R (avec sortie console) qui donne l'histogramme des densités sur 3 intervalles de mêmes longueur sur (0,15) - avec un axe des ordonnées allant de 0 à 0.20.

```
 s1=seq(___0___,____15___,by=5____)
> windows()
> yli=c( 0, 20 ) ;  xli=(  0,15 );

> h1=hist(_Xv ,breaks=__s1___,freq=__F_,ylim=_yli__, xlim=__xli__)
> h1
$counts

[1] 8 4 2   # 3 valeurs numériques
#  calculs ci-dessous
$density
[1] 0.1142857 0.0571429 0.02857143   ## valeurs numériques
#  calculs ci-dessous
```

8 , 4 et 2 divisés par 14 × 5 = 70

2. (2 pts) Calculer les éléments nécessaires pour tracer le boxplot.

```
> sort(Xv)
  0.1  0.5  0.6  1.5  2.3  3.4  3.7 (3.95) 4.2
 5.9  6.4  6.7  7.8 12.8 14.3
```

DIQ = Q3-Q1= 6.7 - 1.5 = 5.2

h1 = Q1 - 1.5 DIQ = 1.5 - 1.5 × 5.2 = -6.3

h2 = Q3 + 1.5 DIQ = 6.7 + 1.5 × 5.2 = 14.5

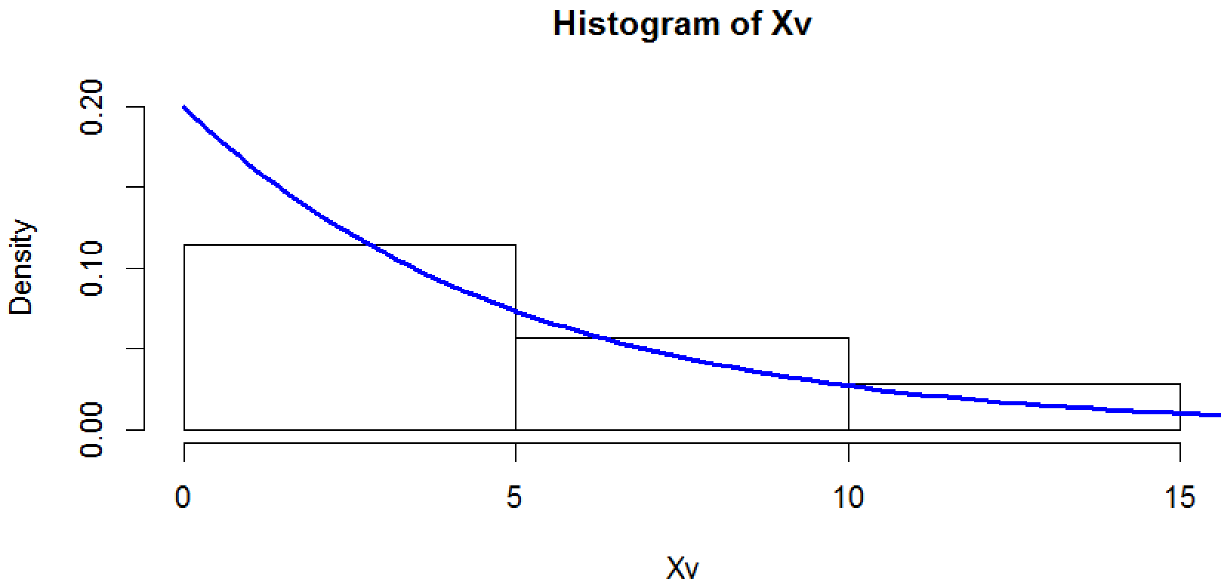
moust-bas = + petite obs >=h1: 0.1

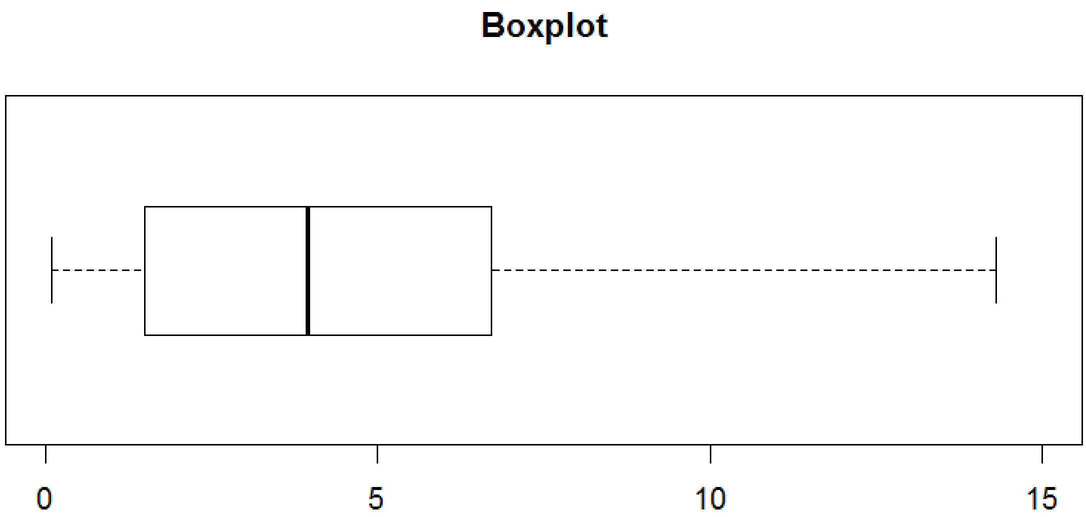
moust-haut = + grande obs <=h2: 14.3

compléter ci-dessous:

h1	moust-bas	Q1	med	DIQ	Q3	moust-haut	h2
-6.3	0.1	1.5	3.95	5.2	6.7	14.3	14.5

3. (2 pts) Tracer l'histogramme et le boxplot ci-dessous.
Aucun point sans indication de l'échelle sur l'axe vertical de l'histogramme.





4. i. (2 pts) Sans détails ni calculs, dites à quoi sont égales les intégrales $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx$ - ceci pour tout $\lambda>0$.

$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ qui exprime/représente: **aire totale 1** ________________________

$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx =$ **1/λ** qui exprime/représente: **espérance**

ii. (1 pt) Sur la base de l'échantillon du début proposer une loi de probabilité qui approxime la distribution des durées de vie X.

Réponse: ______exponentielle (paramètre λ)

iii. (1 pt) Utiliser l'échantillon pour obtenir la/les valeurs estimées du/des paramètres de la loi proposée en ii.

Espérance de loi exponentielle de densité $\boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}}$ est 1/λ ;
donc $\bar{X} \approx \frac{1}{\lambda}$ **et**

$$\boldsymbol{\lambda_{est} = \frac{1}{\bar{X}} = 0.199}$$

densité est $\lambda e^{-\lambda x}$

paramètre(s) estimé(s):____
SUPERPOSER la densité correspondant sur l'histogramme des densités.

iv. (2 pts) Calculer la probabilité que d'après le modèle la durée de vie soit

a. entre 2 et 4 années:

fonction R (avec bons arguments numériques):

pexp(4,0.199) - pexp(2,0.199) =

$1 - \exp(-lamest \cdot 4) - (1 - \exp(-lamest \cdot 2)) = 0.221$

valeur numérique de la proba: ____**0.221**_________________________________ *b. plus grande que 5:*

fonction R (avec bons arguments numériques):

P(X>5) = 1- fonction répartition en 5 =

1 - **pexp(5,0.199)**

$1-(1-\exp(-lamest\cdot 5)) = 0.37$

valeur numérique de la proba: ________________________________

Exercice 2

On mesure les profondeurs de 50 puits de pétrole - pour une somme de ces profondeurs égale à 51234 m et une somme des carrés égale à 75 456 256 m^2 .

1. (2 pts) Calculer la demi-longueur de l'intervalle de confiance à 95% pour l'espérance de la profondeur.

$$S := \sqrt{\frac{S2}{n-1} - \frac{So^2}{(n-1)\cdot n}} = 684.49$$

$$D := 1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} = 189.731$$

Résultat: ______________________

1. (1 pt) Donner l'intervalle de confiance à 95%.

$$\frac{So}{n} - D = 834.949 \qquad \frac{So}{n} + D = 1214.41095$$

Résultat: ____

****

Exercice 3

On teste des ordinateurs les uns après les autres - ils ont chacun une probabilité *p* d'avoir un défaut.

1. (1 pt) Comment s'appelle la loi de l'indice du premier ordinateur trouvé avec un défaut?

Loi géométrique

1. i. (1 pt) Si on teste 5 ordinateurs, comme s'appelle la loi du nombre d'ordinateurs défectueux?

Binomiale

ii. (2 pts) **Application numérique**: si *p*=0.4 calculer la probabilité de trouver 2 ordinateurs défectueux sur les 5.

Résultat: ______ $\mathrm{dbinom}(2, 5, 0.4) = 0.346$ $\frac{5!}{2!\,3!} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 = 0.346$