

# Fondamenti di comunicazioni elettriche

Leonardo Ganzaroli

## Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Modello circuitale</b>	<b>3</b>
1.1 Condizioni di banda stretta . . . . .	6
<b>2 Rumore termico</b>	<b>7</b>
2.1 Nel modello . . . . .	8
<b>3 Modulazioni</b>	<b>10</b>
3.1 Portante impulsiva . . . . .	10
3.1.1 Probabilità d'errore . . . . .	13
3.2 Portante sinusodiale . . . . .	15
3.2.1 AM . . . . .	16
3.2.2 Angolari . . . . .	19
3.2.3 Confronto delle prestazioni . . . . .	22
3.3 Numeriche . . . . .	23
<b>4 Mezzi trasmissivi</b>	<b>26</b>
4.1 Radio . . . . .	26
4.2 Cavo di rame . . . . .	28
4.2.1 Doppino telefonico . . . . .	28
4.2.2 Cavo coassiale . . . . .	29
4.3 Fibra ottica . . . . .	31
4.3.1 Propagazione . . . . .	32

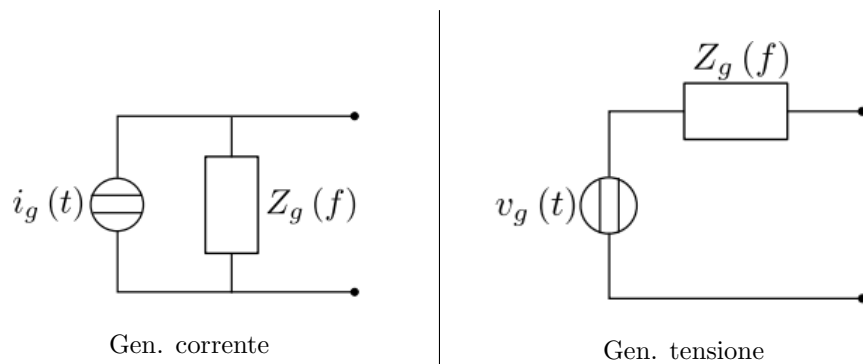
## Introduzione

Questi appunti sono derivanti principalmente dalle dispense del corso di *Fondamenti di comunicazioni elettriche* che ho seguito durante la laurea Triennale di informatica all'università "La Sapienza".

# 1 Modello circuitale

- **Bipolo attivo**

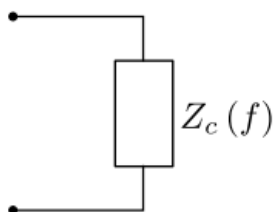
Usato per modellare il generatore di segnale.



- $v_g$  gen. di tensione ideale
- $i_g$  gen. di corrente ideale
- $Z_g$  impedenza interna del generatore

- **Bipolo passivo**

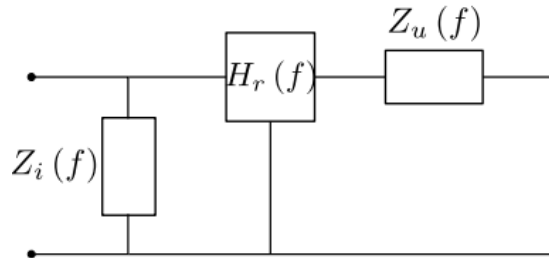
Usato per rappresentare il carico.



- $Z_c$  impedenza del carico

- **Rete 2 porte passiva**

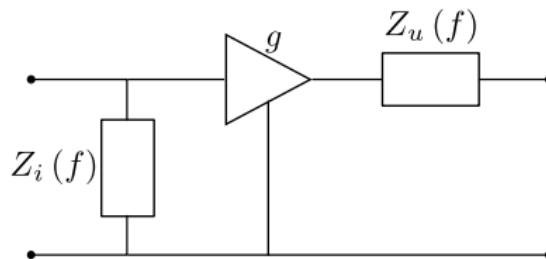
Usata per modellare un filtro o un mezzo trasmissivo.



- $Z_i$  impedenza di ingresso
- $H_r$  funzione di trasferimento
- $Z_u$  impedenza di uscita

- **Rete 2 porte attiva**

Generalmente usata per modellare un amplificatore.



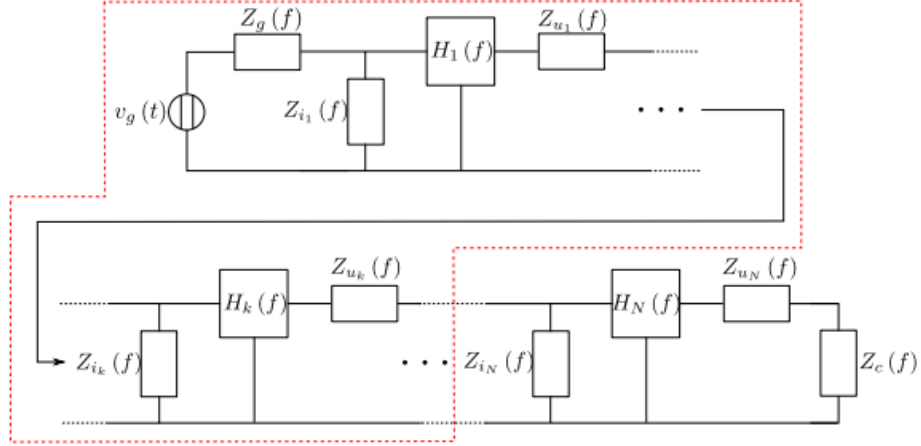
La differenza con il precedente sta nella trasformazione, in questo caso  $H_r$  ha guadagno  $g > 1$ .

Nel complesso si può rappresentare un intero collegamento con:

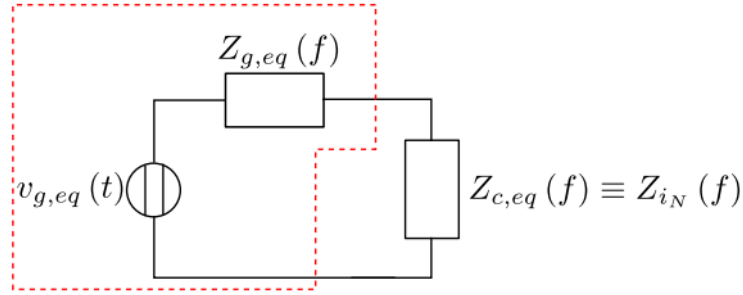
1. Bipolo attivo
2. Cascata di  $N$  reti 2 porte
3. Bipolo passivo

Per poter calcolare la potenza su  $Z_c$  o su una generica  $Z_{i_k}$  si sfrutta il teorema di Thevenin, esso permette di rappresentare gli elementi a monte come un generatore equivalente con la sua impedenza e quelli a valle come un carico equivalente pari all'impedenza di ingresso del primo elemento a valle del punto di interesse.

Dato:



Ottengo:



A questo punto considerando  $Z_c = R_c + iX_c$ ,  $v_c$  la tensione ai suoi capi e  $P_{v_c}$  lo spettro di densità di potenza del segnale ottengo la potenza assorbita dal carico con:

$$W_{Z_c} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{Z_c}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{v_c} \frac{R_c(f)}{|Z_c(f)|^2} df$$

La tensione  $v_c$  è ricavabile da  $v_g$  tramite il partitore di tensione:

$$\frac{Z_c(f)}{Z_g(f) + Z_c(f)}$$

Essendo dipendente dalla frequenza induce però una distorsione, per evitarla deve essere:

$$Z_c(f) = Z_g(f) \frac{K}{1 - K}$$

Se  $K$  è tale che  $Z_c(f) = Z_g(f)$  il carico è detto adattato al generatore.

Se invece  $Z_c(f) = Z_g^*(f)$  si è in condizioni di MTP,  $W_{Z_c}(f)$  diventa:

$$\frac{P_{v_g}(f)}{4R_g(f)} \equiv W_{d_g}$$

Il guadagno di una rete è dato da:

$$G = \frac{W_{Z_c}^r}{W_{Z_c}}$$

Con:

- $W_{Z_c}^r$  potenza trasferita in presenza della rete
- $W_{Z_c}$  potenza trasferita direttamente

In caso di MTP:

$$G = \frac{R_g}{R_u} |H_r|^2 |H_i|^2$$

## 1.1 Condizioni di banda stretta

Ci si trova in condizioni di banda stretta se dati  $B$  banda del segnale e  $f_p$  frequenza centrale intorno alla quale il segnale occupa  $2B$  Hz si verifica:

$$2B \ll f_p$$

In questo caso si possono assumere le grandezze dipendenti dalla frequenza come costanti nell'intervallo  $2B$  centrato su  $f_p$ .

Quindi:

$$W_{Z_c} = P_{v_c} \frac{R_c}{(R_c)^2 + (X_c)^2}$$

Nel caso MTP  $W_{Z_c} = \frac{P_{v_g}}{4R_g}$ .

## 2 Rumore termico

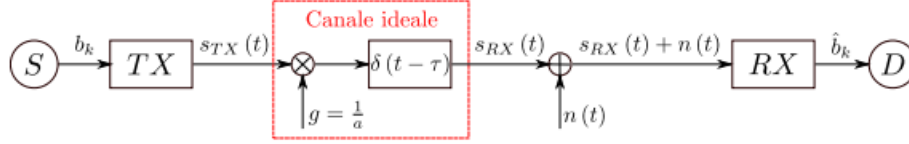


Figura 1: Modello generale di collegamento

Per valutare le prestazioni di un sistema si prende in considerazione il rapporto segnale/rumore:

$$SNR = \frac{W_R}{W_N}$$

Per calcolare  $W_N$  bisogna partire dal segnale del rumore  $n(t)$ , nella meccanica quantistica si tratta come un processo stocastico con spettro:

$$P_N(f) = 2R \frac{h|f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1} \quad [V^2/Hz]$$

Dove:

- $h = 6.62 * 10^{-34}$  J/Hz (Boltzmann)
- $k = 1.38 * 10^{-23}$  J/K (Planck)
- $T$ , temperatura in Kelvin
- $R$ , impedenza puramente resistiva

Così facendo si ottiene la tensione a vuoto su una resistenza  $R$ , si può quindi rappresentare la stessa come un generatore di tensione con in serie una resistenza ideale a  $0K$ .

Si può quindi calcolare la densità di potenza:

$$W_{d_n}(f) = \frac{P_N(f)}{4R} \quad [W/Hz]$$

Se  $h|f| \ll kT$  si può approssimare  $e^x \approx x + 1$  per  $x \ll 1$  che porta a  $\frac{1}{2}kT$ .

Ovviamente  $W_{d_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{d_n}(f) df$ , la presenza di un filtro in ricezione permette di "tagliare" il rumore facendo passare solo quello nell'intervallo  $[-B, B]$  che porta a  $kTB$ .

Dando per buono quello visto fin'ora il rumore ha le seguenti caratteristiche:

- È **bianco**, i campioni presi in istanti diversi non sono correlati
- È **gaussiano**, il suo valore in ogni momento è la somma di molti fattori ( $\sigma_0^2 = N_0 B = kT_0 B$ )

Avendo una potenza estremamente piccola si considera solo se il segnale utile è molto piccolo, tipicamente all'uscita del canale:

$$y(t) = r(t) + n(t) = \frac{s(t - \tau)}{a} + n(t)$$

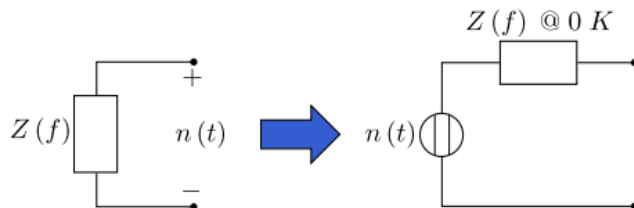
Con potenza:

$$P_Y = \frac{P_S}{A} + P_N$$

**Definizione** Si definisce così il modello AWGN.

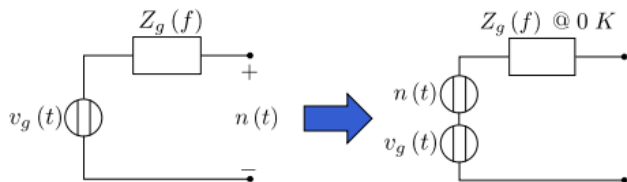
## 2.1 Nel modello

- Bipolo passivo



$$\begin{cases} P_N(f) = 2R(f)kT \\ W_{d_n}(f) = \frac{kT}{2} \end{cases}$$

- Bipolo attivo



Con  $Z_g(f) = R_g(f) + iX_g(f)$ :



$$\begin{cases} P_N(f) = 2R_g(f)kT_g \\ W_{d_n}(f) = \frac{1}{2kT_g} \end{cases}$$

- Rete 2 porte

$$\begin{cases} P_{N,i}(f) = 2R_g kT_{si} \\ P_{N,u}(f) = 2R_u kT_{su} \\ W_{d_n,i}(f) = \frac{k(T_g + T_i)}{2} \\ W_{d_n,u}(f) = \frac{k(T_g + T_u)}{2} \end{cases}$$

Con:

- $T_{si}$  temperatura di sistema all'ingresso della rete
- $T_{su}$  temperatura di sistema all'uscita della rete
- $T_g$  temperatura associata al contributo di rumore del generatore
- $T_u$  temperatura associata al contributo di rumore della rete
- $T_i$  temperatura associata al contributo di rumore della rete riportato in ingresso alla stessa

Il rumore introdotto da una rete si può quantificare tramite il fattore di rumore:

$$F = 1 + \frac{T_i}{T_0}$$

Se la rete è passiva coincide con l'attenuazione.

In caso di più reti in cascata si calcola il fattore totale come:

$$F_{TOT} = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{G_1} + \frac{(F_3 - 1)}{G_1 G_2} + \dots$$

La temperatura in ingresso al ricevitore sarà quindi:

$$\text{temp. mezzo} + (F_{TOT-1})T_0$$

Integrando su  $[-B, B]$  nel caso  $T_m = T_0$  si ottiene:

$$W_N = kF_{TOT}T_0B$$

### 3 Modulazioni

**Definizione** La modulazione è un'operazione di adattamento del segnale al canale.

#### 3.1 Portante impulsiva

La modulazione su portante impulsiva associa i simboli generati dalla sorgente ad un segnale tempo-continuo formato da una sequenza di impulsi spaziatosi dal tempo di simbolo  $T_L$ :

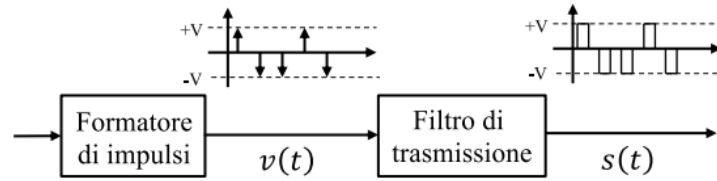
$$s(t) = \sum_k v_k g(t - kT_L)$$

Con:

- $v_k$  valore di tensione associato al simbolo generico
- $g(t)$  impulso usato

(Da qui in poi si assuma una modulazione a 2 livelli e bit singoli come simboli)

Il procedimento di associazione si può dividere in 2 fasi:



In cui:

- Il formatore di impulsi associa alla sequenza di bit un segnale analogico formato da una sequenza di impulsi di Dirac di ampiezza  $\pm V$  e spaziatosi di  $T_b = T_L$ :

$$v(t) = \sum_k v_k \delta(t - kT_L)$$

- Il filtro effettua la convoluzione di  $v(t)$  con la sua risposta impulsiva  $g(t)$ :

$$s(t) = v(t) * g(t) = \sum_k v_k g(t - kT_L)$$

Resta da scegliere  $g(t)$ , il metodo più intuitivo è scegliere un impulso di durata  $\leq T_L$ :

1. *NRZ*, l'impulso occupa tutto il periodo di bit
2. *RZ*, l'impulso ha durata minore e torna a 0 tra gli impulsi

Il problema di entrambi sta nel fatto che avendo impulsi di durata limitata presentano banda infinita, per ovviare al problema si sceglie un impulso con le caratteristiche opposte ma in questo caso si può verificare interferenza tra i simboli.

Per non introdurre interferenza intersimbolica  $g(t)$  deve rispettare le condizioni di Nyquist:

- Nel tempo

$$g(jT_L) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases}$$

- Nella frequenza

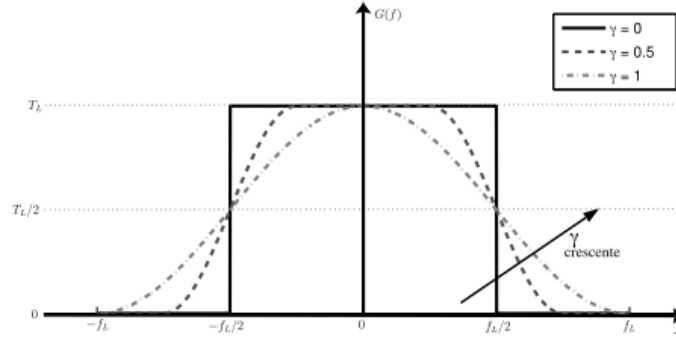
$$\sum_k G(f - \frac{k}{T_L}) = T_L$$

Una famiglia di funzioni che rispetta queste condizioni sono quelle a coseno rialzato:

$$G(f) = \begin{cases} T_L & 0 \leq |f| \leq \frac{f_L}{2}(1 - \gamma) \\ \frac{T_L}{2} (1 + \cos(\frac{\pi T_L}{\gamma} (|f| - \frac{f_L}{2}(1 - \gamma)))) & \frac{f_L}{2}(1 - \gamma) < |f| \leq \frac{f_L}{2}(1 + \gamma) \\ 0 & |f| > \frac{f_L}{2}(1 + \gamma) \end{cases}$$

Con risposta impulsiva:

$$g(t) = g_{min}(t) \left[ \frac{\cos(\frac{\pi \gamma t}{T_L})}{1 - (\frac{\gamma 2t}{T_L})^2} \right]$$



Si nota facilmente che al variare di  $\gamma$  l'area resta identica, quindi la banda occupata risulta  $\frac{f_L}{2}(1 + \gamma)$ .

Avendo una correlazione tra banda e tempo di simbolo si può adesso generalizzare per più di 2 livelli:

Bit	Simbolo
00	$V_1$
01	$V_2$
10	$V_3$
11	$V_4$

$T_L = 2T_b$ ,  $f_L = \frac{f_b}{2}$ , la banda sarà la metà rispetto a quella a 2 livelli.

A livello generale si possono associare sequenze di  $k$  bit a sequenze di  $N$  simboli su alfabeto di  $L$  elementi, quindi  $2^k \rightarrow L^N$ , dovendo esserci una corrispondenza univoca deve essere  $2^k \leq L^N$ . Nel caso sia strettamente minore si introduce un parametro di ridondanza che fornisce "l'abbondanza" di sequenze di simboli rispetto alle sequenze di bit da codificare:

$$\rho = \frac{N \log_2(L - k)}{N \log_2 L}$$

Si può introdurre questo valore nella relazione tra banda e bit-rate:

$$\frac{f_L}{f_b} = \frac{N}{k} = \frac{1}{(1 - \rho) \log_2 L} \rightarrow B = \frac{f_b(1 + \gamma)}{2(1 - \rho) \log_2 L}$$

### 3.1.1 Probabilità d'errore

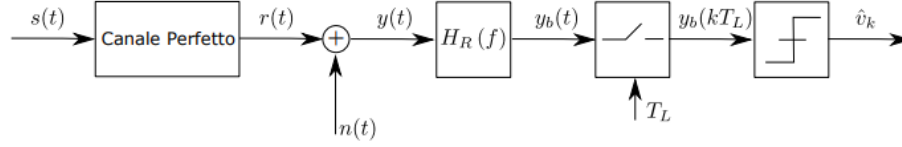


Figura 2: Schema considerato

Transito del segnale:

1.  $s(t) \rightarrow r(t)$

Il canale introduce:

- Attenuazione
- Ritardo di propagazione
- Distorsione

2.  $r(t) \rightarrow y(t)$

$y$  dato da  $r(t) + n(t)$ .

3.  $y(t) \rightarrow y_b(t)$

Il filtro lascia passare il segnale utile e riduce l'effetto dei disturbi.

4.  $y_b(t) \rightarrow y_b(kT_L)$

Il campionatore fornisce un campione ogni  $kT_L$  secondi.

5.  $y_b(kT_L) \rightarrow \hat{v}_k$

Il decisore a soglia sceglie la soglia più adatta tra quelle presenti.

Nel caso  $L = 2$  sarà presente una sola soglia  $V_d$  e due possibili valori  $V_0, V_1$  associati a  $b_k = 0, b_k = 1$ . La probabilità d'errore si può scrivere come:

$$P_e = P\{y_b(kT_L) \leq V_d | b_k = 1\}P\{b_k = 1\} + P\{y_b(kT_L) > V_d | b_k = 0\}P\{b_k = 0\}$$

$y_b(kT_L)$  è dato dalla somma  $r_b(kT_L) + n_b(kT_L)$  dove:

$$r_b(kT_L) = \begin{cases} r_1 & b_k = 1 \\ r_0 & b_k = 0 \end{cases}$$

$$n_b(kT_L) \text{ è una v.a. gaussiana } \begin{cases} E[n_b] = 0 \\ \sigma_{n_b}^2 = \sigma_0^2 \end{cases}$$

Fissato  $b_k$   $r_b$  diventa una costante e  $y_b$  diventa una v.a gaussiana:

$$\begin{cases} E[y_b] = r_b \\ \sigma_{y_b}^2 = \sigma_0^2 \end{cases}$$

**Definizione** La funzione di errore complementare ( $erfc(y)$ ) è definita come:

$$\frac{2}{\pi} \int_y^{+\infty} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon$$

Assumendo che ci sia equiprobabilità la formula risulta:

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} erfc\left(-\frac{V_d - r_1}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} erfc\left(-\frac{V_d - r_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) \right]$$

$\frac{r_1 + r_0}{2}$  fornisce la soglia ideale, in questo caso la probabilità d'errore diventa:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{r_1 - r_0}{2\sqrt{2}\sigma_0}\right)$$

Generalmente  $y^2 = \frac{SNR}{2}$ .

Nel caso multilivello si hanno  $L - 1$  soglie distinte in interne ed esterne, il posizionamento migliore è quello con soglie equidistanti tra livelli adiacenti.

Vale:

- $V_{d_i} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2}$  per  $i \in [0, L - 2]$
- $\Delta = \frac{r_{L-1} - r_0}{L - 1}$
- $V_{d_i} - r_i = r_{i+1} - V_{d_i} = \frac{\Delta}{2}$  per  $i \in [0, L - 2]$
- $P_e = \left(1 - \frac{1}{L}\right) erfc\left(\frac{r_{L-1} - r_0}{(L - 1)2\sigma_0\sqrt{2}}\right)$
- $y^2 = \frac{3SNR}{2(L^2 - 1)}$

### 3.2 Portante sinusodiale

Queste modulazioni si usano per segnali analogici tipicamente in banda base le cui caratteristiche spettrali sono note o caratterizzabili, tipicamente si considerano segnali limitati in banda reali o complessi.

Lo scopo principale è trasportare lo spettro del segnale modulante  $m(t)$  intorno ad una frequenza adatta al mezzo trasmissivo usato, ciò avviene associando ad  $m(t)$  uno dei parametri del segnale portante oscillante a  $f_p$ :

- **Ampiezza**
- **Frequenza**
- **Fase**

Il generico segnale  $m(t) = m_1(t) + im_2(t)$  verrà trasformato con il seguente procedimento:

1. **Modulazione**,  $f_1\{m_1(t)\} + if_2\{m_2(t)\}$
2. **Traslazione**,  $s^+(t) = (f_1\{m_1(t)\} + if_2\{m_2(t)\})e^{i(2\pi f_p t + \varphi_0)}$

Se l'intervallo di banda occupato è minore della frequenza portante il segnale avrà solo contributi a frequenze positive.

Il segnale modulato è dato dalla parte reale di  $s^+(t)$  (dopo i calcoli):

$$f_1\{m_1(t)\} \cos(2\pi f_p t + \varphi_0) - f_2\{m_2(t)\} \sin(2\pi f_p t + \varphi_0)$$

Se  $m(t)$  è reale non è presente la seconda parte.

La portante si può scegliere in 2 modi:

$$\begin{cases} A \cos(2\pi f_p t + \varphi_0) & \text{In fase} \\ A \sin(2\pi f_p t + \varphi_0) & \text{In quadratura} \end{cases}$$

Avendo solo lo spettro di fase diverso la potenza è per entrambe  $\frac{A^2}{2} V^2$ .

**Definizione** Il segnale  $\underline{s}(t) = f_1\{m_1(t)\} + if_2\{m_2(t)\} = s_f(t) + is_q(t)$  è detto inviluppo complesso,  $s_f, s_q$  sono dette componenti analogiche di bassa frequenza rispettivamente in fase e in quadratura.

### 3.2.1 AM

Nella modulazione AM l'ampiezza della portante sarà proporzionale al segnale  $m(t)$ , usando la portante in fase si ottiene:

$$s(t) = k_a m(t) \cos(2\pi f_p t + \varphi_0)$$

Risulta però comodo in ricezione avere l'involuppo sempre positivo, quindi si somma a  $k_a$  un valore  $a_p$ , in base al valore di quest'ultimo si distinguono:

- Portante soppressa ( $a_p = 0$ )
- Portante ridotta ( $0 < a_p \leq \max\{k_a|m(t)|\}$ )
- Portante intera ( $a_p > \max\{k_a|m(t)|\}$ )

In ogni caso l'involuppo è  $\underline{s}(t) = a_p + k_a m(t)$ .

Lo spettro del segnale modulato dipende da  $m(t)$ , 3 possibili casi:

1. Sinusoide

- $m(t) = A \cos(2\pi W t)$
- $s(t) = k_a A \cos(2\pi W t) \cos(2\pi f_p t + \varphi_0) + a_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_0)$
- $P_M = \frac{A^2}{2}$

$$P_{AM-PI} = \frac{k_a^2 \frac{A^2}{2}}{2} + \frac{a_p^2}{2} \quad \text{con} \quad \frac{k_a^2 \frac{A^2}{2}}{2} < \frac{a_p^2}{2}$$

$$P_{AM-PR} \quad \text{come il precedente ma} \quad 0 < \frac{a_p^2}{2} \leq \frac{k_a^2 \frac{A^2}{2}}{2}$$

$$P_{AM-PS} \quad \text{come} \quad PI \quad \text{ma con solo la prima parte}$$

Con portante intera e ridotta una parte della potenza viene "sprecata", la frazione di potenza utile è pari a:

$$\eta = \frac{\frac{k_a^2 P_M}{2}}{\frac{k_a^2 P_M}{2} + \frac{a_p^2}{2}}$$

$$\begin{cases} \eta < 0.5 & \text{Intera} \\ 0.5 \leq \eta < 1 & \text{Ridotta} \\ \eta = 1 & \text{Soppressa} \end{cases}$$



2. Segnale deterministico di banda  $B$

Ipotizzando:

- $m(t)$  reale
- $m(t)$  a valor medio nullo

$$P_{AM-PI-PR}(f) = \frac{k_a^2}{4}(e^{i\varphi_0}M(f-f_p)+e^{-i\varphi_0}M(f+f_p))+\frac{a_p}{2}(e^{i\varphi_0}M(f-f_p)+e^{-i\varphi_0}M(f+f_p))$$

$P_{AM-PS}(f)$  come il precedente ma con solo la prima parte

3. Realizzazione di un processo di banda  $B$

- Processo WSS
- Media nulla

$$P_S(f) = \frac{k_a^2}{4}(P_M(f-f_p) + P_M(f+f_p)) + \frac{a_p^2}{4}(\delta(f-f_p) + \delta(f+f_p))$$

Dall'ultima formula risulta che è presente una replica a  $-f_p$ , un segnale di questo tipo è detto a banda laterale doppia.

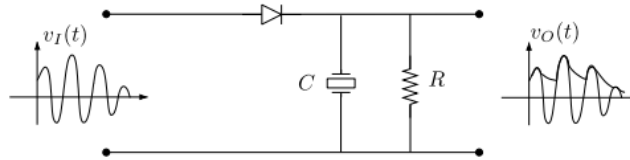
Il filtro di Hilbert causa uno sfasamento di  $\frac{\pi}{2}$  al segnale, sommando/sottraendo il risultato al segnale originale si elimina una delle bande:

$$s(t) = k_a m(t) \cos(2\pi f_p t) \pm k_a m_h(t) \sin(2\pi f_p t)$$

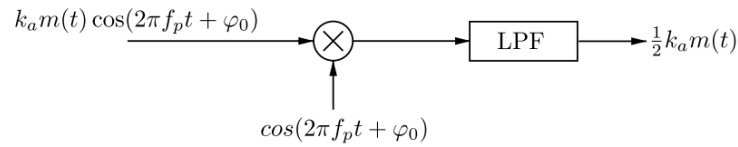
Il filtro di Hilbert non è fisicamente realizzabile, esistono però dei filtri che lo approssimano riducendo molto una delle bande, così facendo si ottiene un segnale a banda ridotta.

Esistono 3 tipi di demodulatori:

- **Involuppo** (solo PI)



- **Omodina** (meglio PR)

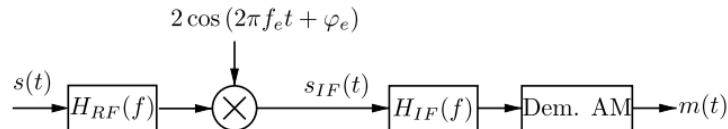


- Richiede una stima di frequenza e fase della portante
- Il segnale uscente dal mixer è:

$$k_a m(t) \left[ \frac{1 + \cos(2(2\pi f_p t + \varphi_0))}{2} \right]$$

- Il filtro passa basso con  $f_c \ll 2f_p$  toglierà la componente sinusoidale

- **Eterodina**



- $H_{RF}$  deve attenuare fortemente la frequenza  $f_p - 2f_e$
- $f_e$  è scelta in modo che  $f_p + f_e$  e  $f_p - f_e$  siano distanti
- Il filtro  $H_{IF}$  rimuove  $f_p + f_e$
- $m(t)$  è uguale ma centrato su  $f_p - f_e$
- Si può ora demodulare con uno degli altri demodulatori

### 3.2.2 Angolari

Nelle modulazioni angolari il modulante determina la fase istantanea della portante, si ha:

$$s(t) = a \cos(2\pi f_p t + \varphi_0 + \alpha(t))$$

Con potenza  $\frac{a^2}{2}$ .

Per associare  $\alpha(t)$  a  $m(t)$  ci sono 2 modi:

1. Mod. di fase (PM)

$$\alpha(t) = k_\phi m(t)$$

2. Mod. di frequenza (FM)

$$\alpha(t) = 2\pi k_F \int m(\tau) d\tau$$

Per capire le proprietà spettrali si riscrive  $s(t)$ :

$$\frac{a}{2} \left[ e^{i(2\pi f_p t + \varphi_0)} e^{i\alpha(t)} + e^{-i(2\pi f_p t + \varphi_0)} e^{-i\alpha(t)} \right]$$

Nel caso (banda di  $e^{i\alpha(t)} \ll f_p$ :

$$s^+(t) = \frac{a}{2} e^{i\alpha(t)} [e^{i(2\pi f_p t + \varphi_0)}] \text{ (uguale per l'altro termine)}$$

Si può quindi rappresentare  $e^{i\alpha(t)}$  come la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (i\alpha(t))^k$$

Che tipicamente si arresta dopo un certo numero di termini.

maggiore è  $\alpha(t) \rightarrow$  più grande è la banda di  $e^{i\alpha(t)}$

Come per l'AM:

- **Sinusoide**

$$m(t) = A \cos(2\pi Wt)$$

$$\begin{cases} \alpha(t) = K_\phi A \cos(2\pi Wt) & PM \\ \alpha(t) = \frac{k_F}{W} A \sin(2\pi Wt) & FM \end{cases}$$

$$\text{Indici di modulazione} \begin{cases} I_P = K_\phi A & PM \\ I_F = \frac{k_F}{W} A & FM \end{cases}$$

In generale  $\underline{s}(t) = a e^{i\alpha(t)}$ , nel caso FM:

$$\underline{s}(t) = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_K\left(\frac{k_F}{W} A\right) e^{i2\pi k W t}$$

Con  $J_K()$  funzione di Bessel del primo tipo di ordine  $k$ .

Lo spettro sarà:

$$a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_K\left(\frac{k_F}{W} A\right) \delta(f - kW)$$

La densità di energia invece:

$$a^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |J_K\left(\frac{k_F}{W} A\right)|^2 \delta(f - kW)$$

La banda dell'involuppo si approssima con la banda di Carson:

$$B_C \approx W(I_F + 1)$$

Guardando lo spettro di densità di potenza sul piano si vede che c'è un'occupazione di banda di larghezza  $2B_C$  intorno a  $f_p$  e  $-f_p$ , quindi la banda totale occupata è  $4B_C$ .

- **Segnale generico**

- $m(t)$
- Banda  $B$
- Media nulla

2 casi:

1. Basso indice di modulazione

$$\text{Spettro} \begin{cases} k_\varphi M(f) & PM \\ \frac{2\pi k_F}{i2\pi f} M(f) & FM \end{cases}$$

2. Alto indice di modulazione

$$\uparrow k_F \rightarrow \uparrow B_{TOT}$$

La demodulazione di un segnale FM si svolge nel seguente modo:

Dato  $s(t)$  modulato d'angolo, si ha:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -a[2\pi f_p + \frac{d\alpha(t)}{dt}] \sin(2\pi f_p t + \alpha(t))$$

Nel caso FM diventa:

$$\sin(2\pi f_p t + \alpha(t))(-a2\pi f_p - a2\pi k_F m(t))$$

Ponendo:

- $a_p = -a2\pi f_p$
- $k_a = -a2\pi k_F$

Ed essendo  $k_F \max\{|m(t)|\} \ll f_p$  risulta  $a_p > k_a$ , quindi è un segnale AM-PI.



Figura 3: Schema demodulatore FM

$S_{BB}(t) = a2\pi f_p + a2\pi k_F m(t)$  da cui si può estrarre  $m(t)$ .

### 3.2.3 Confronto delle prestazioni

- $SNR_{dem}$  è l'SNR a valle del demodulatore
- $SNR_{mod}$  è l'SNR prima della demodulazione
- $SNR_{rif}$  è l'SNR che si avrebbe senza modulazione

Casi:

- **AM-BLD-PI/PR**

$$SNR_{dem} = \eta SNR_{rif}$$

$$SNR_{mod} = \frac{\eta SNR_{rif}}{2}$$

- **AM-BLD-PS**

$$SNR_{dem} = SNR_{rif}$$

$$SNR_{mod} = \frac{SNR_{rif}}{2}$$

- **AM-BLU**

$$SNR_{dem} = SNR_{rif} = SNR_{mod}$$

- **FM/PM**

$$SNR_{dem} = 3I_F^2 SNR_{rif}$$

Le valutazioni sono fatte a parità di potenza ricevuta, usando la stessa formula per il rumore ed usando un filtro  $H_{RX}(f)$  che lascia passare solo la banda usata dal segnale di interesse.

### 3.3 Numeriche

Un approccio più generale consiste nel generare un segnale che costituisce l'involuppo complesso del segnale modulato  $s(t) = s_f(t) + is_q(t)$  (BLD-PS), esso definirà una traiettoria nel piano complesso su cui si definiscono i simboli.

Il valore dell'involuppo deve essere imposto solo in  $t = kT_L$  con  $k \in (-\infty, +\infty)$  e  $T_L$  periodo di simbolo, negli altri istanti può assumere qualsiasi valore.

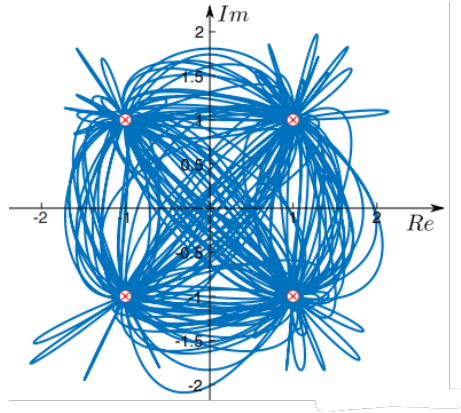


Figura 4: Esempio di andamento

**Definizione** L'insieme  $L$  dei punti sul piano complesso assunti da  $\underline{s}(t)$  in  $kT_L$  è detto costellazione della modulazione.

Alcune modulazioni:

- **BPSK**, equivalente della modulazione antipodale,  $L = 2$

$$s(kT_L) \equiv s(kT_b) = \begin{cases} A & b_k = 1 \\ -A & b_k = 0 \end{cases}$$

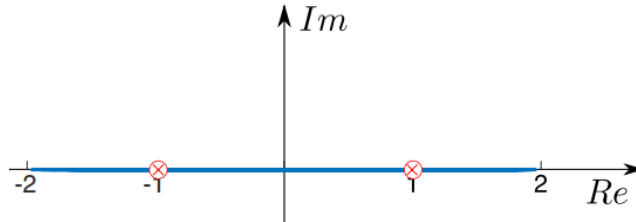


Figura 5: Andamento con  $A = 1$  V

Risulta  $P_s = \frac{A^2}{2}$ .

- **OOK**

Come la precedente ma  $b_k = 0 \Rightarrow 0$ ,  $P_S = \frac{A^2}{4}$ .

- **QAM**, estensione della multilivello

La costellazione è una griglia regolare di lato  $\sqrt{L}$ , la Figura 4 è una QAM-4.

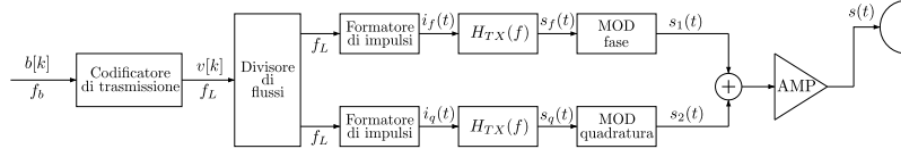


Figura 6: Schema di trasmissione QAM

$$- f_L = \frac{f_b}{\log_2 L} \text{ su ogni ramo}$$

$$- B = (1 + \gamma) \frac{f_b}{2 \log_2 L}$$

- **PSK**

Ogni simbolo viene associato ad un valore di fase dato da:

$$\varphi_I = (2I + 1) \frac{\pi}{L} \text{ con } I \in [0, L - 1]$$

Quindi  $\underline{s}(kT_L) = A \cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)$

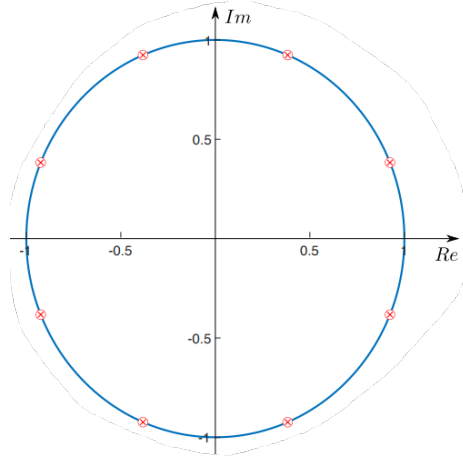


Figura 7:  $A = 1$ ,  $L = 8$



Ci sono 3 varianti:

1. **PSK**, impulsi rettangolari per l'andamento della fase
2. **MSK**, archi di sinusoidi per l'andamento della fase
3. **CPM**, variazione di fase continua e inviluppo costante

Le probabilità di errore sono:

- **BSPK**

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{SNR_{rif}}{2}} \right)$$

- **OOK**

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{SNR_{rif}}{4}} \right)$$

- **QAM**

$$\approx \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{4} \frac{SNR_{rif}}{(L-1)}} \right)$$

- **PSK**

$$\approx \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{1}{2} SNR_{rif} \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)} \right)$$

## 4 Mezzi trasmissivi

### 4.1 Radio

Le comunicazioni radio utilizzano onde elettromagnetiche che si propagano:

- Nell'atmosfera (terrestri)
- Nel vuoto (spaziali)
- In entrambi (satellitari)

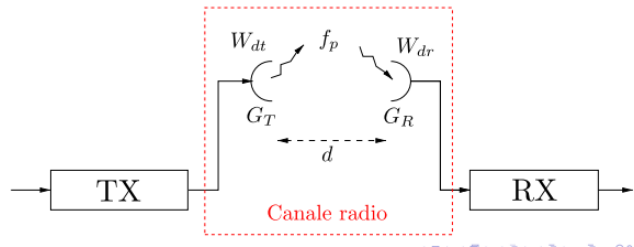


Figura 8: Schema generale

Il canale è composto da:

- Antenna trasmittente
- Mezzo
- Antenna ricevente

Le antenne fungono da trasduttori, ognuna ha un suo guadagno:

$$F(\theta, \phi) = \frac{W_{dt}(\theta, \phi)}{W_{dt}^i(\theta, \phi)}$$

Dove:

- $W_{dt}(\theta, \phi)$  è la potenza irradiata dall'antenna nella direzione  $(\theta, \phi)$
- $W_{dt}^i(\theta, \phi)$  è la potenza irradiata da un'antenna isotropa

Si identificano 3 modi principali per propagare le onde:

#### 1. Riflessione e diffusione

- Riflessione  $\rightarrow$  rimbalzo sulla ionosfera
  - Sotto i 30  $MHz$
  - Fino a 4000 Km

- Diffusione
  - Frequenze tra 30 e 300  $MHz$
  - Distanze minori del precedente

## 2. Onda superficiale

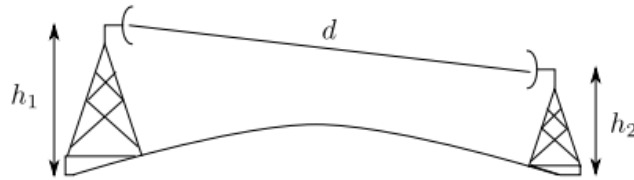
Si usa la superficie terrestre come se fosse una guida d'onda:

- Sotto i 3  $MHz$
- Fino a 10000 Km
- Usata in particolare sull'acqua

## 3. Diretta

Serve visibilità diretta tra le antenne, la distanza massima in Km è:

$$3.6(\sqrt{h_{1,m}} + \sqrt{h_{2,m}})$$



Standard	Max. potenza
WiFi	36 dBm (US), 20 dBm (EU)
UWB	0.55 W
GSM	39 dBm
UMTS	33 dBm

Tabella 1: Regolazioni

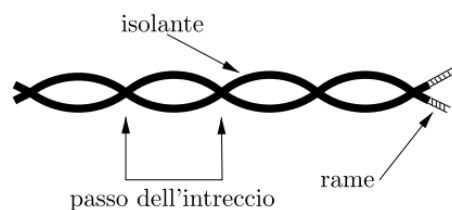
Assumendo che il canale sia ideale si può caratterizzare l'attenuazione dello spazio libero come:

$$A_{d,dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{1600\pi}{9} \right) + 20 \log_{10}(f_{p,MHz}) + 20 \log_{10}(d_{Km}) - G_{TX,dB} - G_{RX,dB}$$

Nella realtà però non è così, tipicamente il canale è selettivo in frequenza a causa dei fenomeni atmosferici ed esiste la possibilità che ci siano cammini multipli tra le antenne, ciò porta a problemi durante la ricezione.

## 4.2 Cavo di rame

### 4.2.1 Doppino telefonico



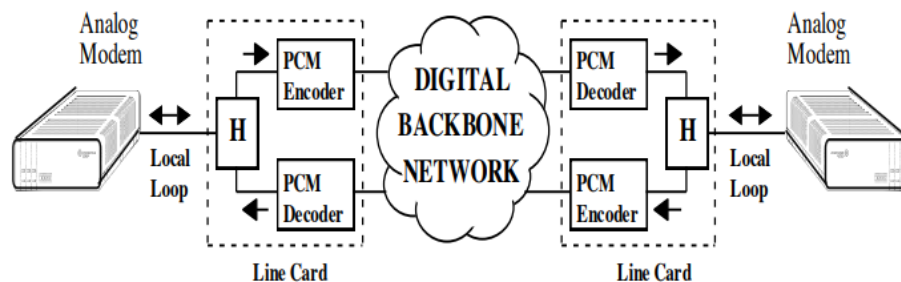
Analogici/misti				
Sigla	Occ. banda positiva (KHz)	Bit rate (Kb/s)	Anno	Modulazioni
V.34	3.429	33.6	1994	QAM
V.90	4	56/33.6	1998	PCM+QAM
V.92	4	56/48	2001	PCM
Numerici				
-	- (MHz)	- (Mb/s)	-	-
G.961	0.12	0.144	1993	ISDN
G.992	0.9	8	1999	ADSL (OFDM)
G.993.1	8	55	2004	VDSL1 (ODFM)
G.993.2	12	68	2006	VDSL2
G.993.3	35	300	2015	VDSL2 35b

Tabella 2: Standard

Alcuni nel dettaglio:

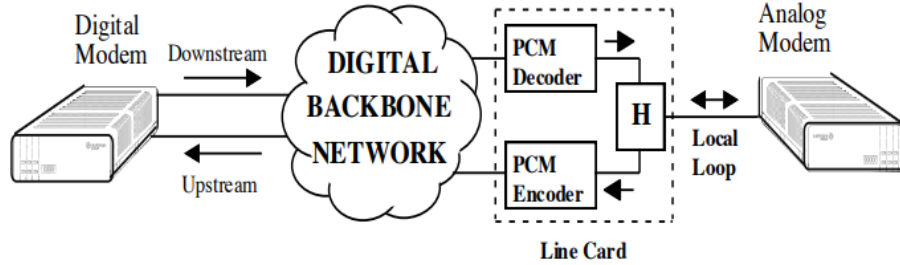
- **V.34**

Definito considerando uno schema in cui agli estremi è presente una tratta analogica:



- **V.90**

Introdotta per sfruttare la connessione numerica tra operatore telefonico e ISP, nella tratta analogica usa la modulazione PAM i cui livelli sono dati dal codificatore PCM. Presenta una quantizzazione non lineare per tenere in conto la dinamica della voce umana, questo limita il rate ottenibile.



#### 4.2.2 Cavo coassiale

Attualmente viene usato per:

- **DVB-T2**

Portante tra 400 e 700  $MHz$ , occupazione di banda positiva 8  $MHz$

- **DVB-S2**

Portante tra 950 e 2150  $MHz$ , occupazione di banda positiva 33  $MHz$

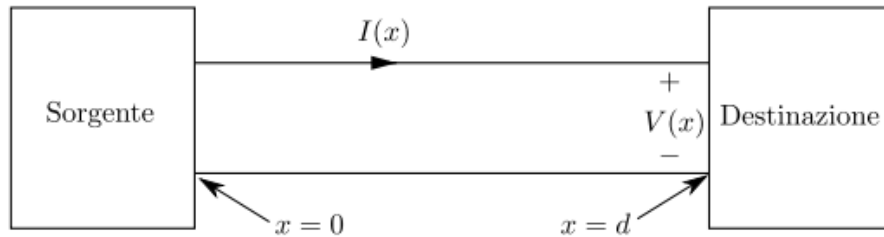


Figura 9: Modello generale

Indicando  $V_d$  come onda diretta e  $V_r$  come inversa si ha:

$$V(x) = V_d e^{-\gamma(f)x} + V_r e^{\gamma(f)x}$$

$$V(x) = \frac{V_d e^{-\gamma(f)x} + V_r e^{\gamma(f)x}}{Z_0(f)}$$

Con le costanti secondarie:

- $Z_0(f)$  impedenza caratteristica
  - $\gamma(f)$  costante di propagazione
- Si ha  $\gamma(f) = \alpha(f) + i\beta(f)$  in cui:
- $\alpha(f)$  determina l'attenuazione (*Neper/m*)
  - $\beta(f)$  determina il ritardo (*rad/m*)

Le costanti primarie sono:

- $R$ , resistenza per unità di lunghezza ( *$\Omega/m$* )
- $H$ , induttanza per unità di lunghezza ( *$Henry/m$* )
- $G$ , conduttanza per unità di lunghezza ( *$Siemens/m$* )
- $C$ , capacità per unità di lunghezza ( *$Farad/m$* )

Si possono esprimere le costanti secondarie basandosi su quelle primarie:

$$Z_0(f) = \sqrt{\frac{R + i2\pi fH}{G + i2\pi fC}}$$

$$\gamma(f) = \sqrt{(RG - (2\pi f)^2 CH) + (i2\pi f(RC + GH))}$$

Per  $f \gg 0$  l'attenuazione ed il ritardo risultano indipendenti da  $f$ , la linea si comporta quindi da canale ideale.

La condizione di Heaviside si verifica quando  $GH = RC$ , si ha:

$$\gamma(f) = \sqrt{CH} \left( \frac{R}{H} + i2\pi f \right)$$

$$Z_0(f) = \sqrt{\frac{H}{C}}$$

Il coefficiente di riflessione si ottiene con:

$$r_c(f) = \frac{Z_c(f) - Z_0(f)}{Z_c(f) + Z_0(f)}$$

Se è pari a 0 non c'è onda riflessa, se vale anche la condizione di Heaviside si è in MTP.

La formula dell'attenuazione è:

$$A_{d,dB} \approx 8.68\alpha(f)d$$

Prendendo come riferimento il valore di  $\alpha$  ad una certa frequenza  $\mathcal{L}(\alpha_0)$  si può calcolare:

$$\alpha(f) = \alpha_0 \sqrt{f_{MHz}} = \alpha(\mathcal{L}) \sqrt{f_{MHz}}$$

### 4.3 Fibra ottica

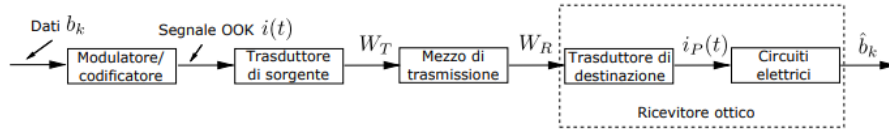


Figura 10: Schema generale

Gli elementi caratterizzanti sono:

- Trasduttore di sorgente (Emettitore ottico)

Ha il compito di generare un'onda elettromagnetica a frequenze ottiche partendo da una corrente d'ingresso, questo avviene in 2 modalità:

1. Emissione spontanea (LED)
2. Emissione stimolata (LASER)

La potenza ottica trasmessa con corrente  $i$  è:

$$G\eta_i\eta_e\frac{i}{q}E_f$$

In cui:

- $G$ , guadagno d'amplificazione
- $\eta_i$ , efficienza interna di generazione
- $\eta_e$ , efficienza esterna di generazione
- $q$ , carica dell'elettrone,  $1.6 * 10^{-19} C$
- $E_f$ , energia del fotone:

$$h\frac{c}{\lambda} \text{ con } h = 6.626 * 10^{-34} [J * s]$$

- Mezzo di trasmissione
  - Fibra ottica
  - Mezzo wireless (Non approfondito qui)
- Trasduttore di destinazione (Ricevitore ottico)
  - Fotodiodo PIN
  - Fotomoltiplicatore APD

Dato un tempo di bit  $T_b$  in cui l'energia totale ricevuta è  $E_b$ :

$$N_{f/b} = \frac{E_b}{E_f} \quad \text{Num. medio fotoni per bit}$$

A cui corrisponde:

$$N_{f/s} = \frac{N_{f/b}}{T_b} \quad \text{Num. medio fotoni al secondo}$$

Data  $\eta$  probabilità che un fotone colpisca la giunzione, la corrente prodotta in uscita nei 2 casi sarà:

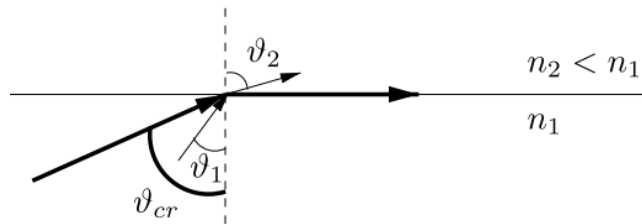
$$i_{out}^{PIN} = \eta N_{f/s} q$$

$$i_{out}^{APD} = G \eta N_{f/s} q$$

Affinché il ricevitore operi correttamente deve essere  $N_{f/b} \geq \text{sensibilità ricevitore}$ .

#### 4.3.1 Propagazione

La propagazione nella fibra ottica si basa sulla riflessione totale:



Gli angoli e gli indici di rifrazione sono legati dalla legge di Snell:

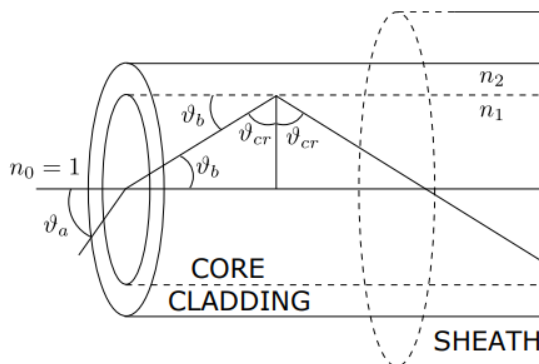
$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



L'angolo oltre il quale non c'è onda rifratta è dato da:

$$\arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

La fibra stessa è costruita in modo da innescare la riflessione totale:



Per garantire il tutto deve essere  $\vartheta_a < \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$ .

**Definizione** Il modo di propagazione è il percorso seguito dall'onda all'interno della fibra, il numero di modi si può approssimare con:

$$\frac{4}{\pi^2} \left( 2\pi \frac{d_1}{2\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)^2$$

In cui:

- $d_1$ , diametro del core
- $\lambda_0$ , lunghezza d'onda utilizzata

I fenomeni che limitano la distanza massima sono:

- **Attenuazione**

Legata a:

- Scattering di Rayleigh
- Ass. intrinseco

Ci sono 3 finestre di utilizzo della fibra:

Finestra	$\lambda$ ( $\mu m$ )	$A_0$ (dB/Km)	$E_f$ (J)	Note
I	0.85	2	$2.34 * 10^{-19}$	Usata per motivi storici
II	1.33	0.3	$1.49 * 10^{-19}$	Min. dispersione
III	1.55	0.2	$1.28 * 10^{-19}$	Min. attenuazione

L'attenuazione introdotta in una fibra lunga  $d_{Km}$  è calcolabile come:

$$A_{dB} = A_0 d_{Km}$$

### • Dispersione

Gli impulsi immessi si allargano temporalmente in base alla distanza, ci sono 2 cause:

#### 1. Modale

Causata dalla presenza di diversi modi, i fotoni seguono percorsi diversi ed arrivano in istanti diversi, si misura con il coefficiente:

$$\delta_m \approx \frac{1}{\frac{c}{n_1}} \left( \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{2n_1} \right)^2 [s/Km]$$

Che dopo  $d_{Km}$  comporta un allargamento  $\tau_m$  di  $(d_{Km}\delta_m)$  metri.

#### 2. Cromatica

Causata dalla presenza di diverse lunghezze d'onda nel segnale immesso, il coefficiente è:

$$D = -\frac{\lambda d^2 n}{cd\lambda^2} [ps/(nm * km)]$$

Che dopo  $d_{Km}$  comporta un allargamento  $\tau_c$  di  $(|D|d_{Km}\Delta\lambda)$  metri,  $\Delta\lambda$  è la riga spettrale dell'emettitore.

Entrambe limitano il bitrate sostenibile ad una certa distanza:

$$f_b < \frac{1}{\tau}, \quad f_b \leq \frac{W_T}{AShf}$$