Calcolo integrale

Leonardo Ganzaroli

Indice

Introduzione

Questi appunti del corso *Calcolo integrale* sono stati creati durante la laurea Triennale di informatica all'università "La Sapienza".

N.B. Questo corso è il naturale proseguimento di *Calcolo differenziale*, quindi molte cose saranno date per scontate.

1 Serie numeriche

Definizione Una successione di elementi è un elenco ordinato dei valori assunti dalla funzione $a : S \subseteq \mathbf{N} \to A : k \to a_k$, essa associa dei valori ad un sottoinsieme dei numeri naturali presenti in A che solitamente $\subset \mathbf{R} \vee \subset \mathbf{C}$.

Alcune successioni:

- $3k = 3, 6, 9, 12, \ldots$
- $k^2 = 1, 4, 9, 16, \ldots$
- $k + 1 = 2, 3, 4, \ldots$

Definizione Si definisce S_n come la sommatoria dei primi n numeri di una successione.

Definizione Si definisce serie numerica il limite per $n \to +\infty$ di S_n:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Da qui in poi si assuma che $k \in \mathbf{N}^+$.

Definizione Se una serie numerica equivale ad un valore finito l allora è convergente ad l.

Definizione Se una serie numerica equivale a $\pm\infty$ allora è divergente.

Teorema 1 (Serie a termini di segno costante)

- $\forall k \in \mathbf{N}^+ \ a_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge ad un valore positivo o diverge a* $+\infty$
- $\forall k \in \mathbf{N}^+ \ a_k \leq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge ad un valore negativo o diverge a* $-\infty$

Teorema 2 (Condizione necessaria per la convergenza)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{converge} \ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

1.1 Criteri

Teorema 3 (Criterio del confronto diretto)
Date 2 successioni $a_n, b_n \mid \exists N \in \mathbf{N} \mid \forall n \geq N \quad 0 \leq a_n \leq b_n$ *si ha:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ \textit{converge} \ \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{converge}$$

Teorema 4 (Criterio del confronto asintotico)
Date 2 successioni $a_n, b_n \mid \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \delta$ *con* $0 < \delta < +\infty$ *si ha:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{converge} \ \iff \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ \textit{converge}$$

Teorema 5 (Criterio del rapporto)
Data la successione a termini positivi $a_n \mid \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \delta$ *con* $0 \leq \delta < +\infty$ *si ha:*

- $\delta < 1$ *converge*
- $\delta > 1$ *diverge*

Teorema 6 (Criterio della radice)
Data la successione a termini positivi $a_n \mid \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \delta$ *con* $0 \leq \delta < +\infty$ *si ha:*

- $\delta < 1$ *converge*
- $\delta > 1$ *diverge*

Teorema 7 (Criterio di Leibniz)
Data la successione a segno alterno $a_n = (-1)^k * b_k$, *se:*

- b_k *ha termini di segno non negativo*
- $\forall k \in \mathbf{N}^+ \quad b_{k+1} \leq b_k$
- $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge.*

Teorema 8 (Criterio di convergenza assoluta)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \ \textit{converge} \ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ \textit{converge}$$

1.2 Serie di potenze

Definizione Una serie di potenze di centro x_0 associata ad una successione è:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$$

Definizione Un insieme di convergenza è l'intervallo $X \subseteq \mathbf{R}$ per cui:

$$\forall\ x \in X \ \ \exists l \in \mathbf{R} \mid l = \sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$$

Definizione Il raggio di convergenza di una serie di potenze è:

$$p = sup\{x \geq 0 \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k * (p - x_0)^k \text{ converge}\}$$

Teorema 9 (Calcolo del raggio di convergenza)

$$p = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

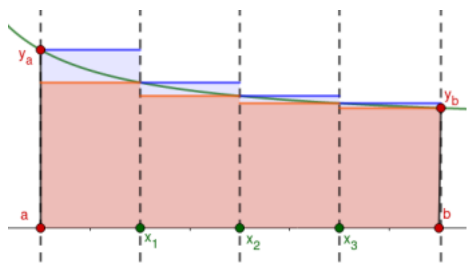
Definizione La serie di Taylor di f di centro x_0 è il polinomio di Taylor di ordine $+\infty$.

2 Integrali

Per poter trovare l'area sottostante ad una funzione in un certo intervallo è possibile scomporre quell'area in una serie di rettangoli e sommarne le aree, per evitare approssimazioni il metodo migliore è usare la più grande quantità di rettangoli possibile con la stessa larghezza.

Ci sono 2 possibilità per ricoprire l'area:

1. Rettangoli maggiori, la somma delle loro aree si indica con $\bar{S_n}$
2. Rettangoli minori, la somma delle loro aree si indica con $\underline{S_n}$



Considerando un numero di rettangoli infiniti si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{S_n} = \bar{S} = \text{Area} = \underline{S} = \lim_{n\to+\infty} \underline{S_n}$$

Definizione Data una funzione $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. f è integrabile secondo Riemann se è vera l'equazione vista sopra, si definisce integrale di f nell'intervallo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Inoltre per risultare integrabile la funzione deve essere continua e limitata.

In particolare risulta:

- limite di $\bar{S_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} * \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

- limite di $\underline{S_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} * \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

2.1 Proprietà

Teorema 10 (Linearità) *Date f, g integrabili nell'intervallo $[a, b]$. La funzione $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile in $[a, b]$ ed il suo integrale equivale alla somma dei 2 integrali:*

$$\alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$$

Teorema 11 (Additività) *Se f è integrabile in $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$ allora l'integrale di $[a, c]$ è la somma degli integrali dei sottointervalli.*

Teorema 12 (Differenza) *Se f è integrabile in $[a, b]$ allora l'integrale in $[c, b]$ con $c \in [a, b]$ è la differenza tra l'integrale di $[a, b]$ e quello di $[a, c]$.*

Teorema 13 (Inversione dell'intervallo) *Se f è integrabile in $[a, b]$ e $a < b$ vale:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

2.2 Teorema fondamentale del Calcolo integrale

Teorema 14 (Teorema fondamentale del Calcolo integrale)
Data $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua, limitata e integrabile:

$$\left(F(t) = \int_a^t f(x)\ dx \ \ con\ a \leq t \leq b \right) \Rightarrow \forall t \in [a, b] \quad F'(t) = f(t)$$

In breve F è l'antiderivata di f.

Definizione Una funzione $G(x) \mid G'(x) = f(x)$ è detta primitiva di $f(x)$, inoltre tutte le sue primitive hanno forma $F(x) + c \ \ \forall c \in \mathbf{R}$.

Definizione Si definiscono 2 tipi di integrali:

- **Definito**

$$\int_a^b f(x) = F(x) \mid_a^b = F(b) - F(a)$$

- **Indefinito**

$$\int f(x) = F(x) + c$$

Calcolo $\int_2^8 x^2 + 5x\ dx$:

- L'antiderivata è $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$
- L'integrale sarà quindi $\frac{8^3}{3} + \frac{5*8^2}{2} - \frac{2^3}{3} + \frac{5*2^2}{2} = 318$

Teorema 15 (Pari e dispari)
Dato un integrale su $[0, t]$*:*

$$f(x) \text{ è pari } \Rightarrow F(t) \text{ è dispari} \quad \text{(o viceversa)}$$

Teorema 16 (Pari e dispari 2)
Dato un integrale su $[-t, t]$*:*

- $f(x)$ *dispari*

$$\int_{-t}^t f(x) = 0$$

- $f(x)$ *pari*

$$\int_{-t}^t f(x) = 2\int_0^t f(x)$$

2.3 Integrali impropri

Definizione Un integrale improprio è il limite di un integrale definito al tendere di almeno un estremo di integrazione ad un numero reale oppure all'infinito, quel numero reale può rappresentare un punto di discontinuità.

Possono avere 4 possibili forme (il limite si omette solitamente):

1. $\int_a^\infty f(x)\ dx$
2. $\int_{-\infty}^b f(x)\ dx$
3. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$
4. $\int_a^b f(x)\ dx$ con $f(x)$ indefinita o discontinua da qualche parte in $[a, b]$

Definizione Data f divergente in un certo punto in $[a, b]$.

f si dice integrabile in senso improprio su $[a, b]$ se:

- Il punto in cui diverge è a e $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\ dx = l$
- Il punto in cui diverge è b e $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\ dx = l$
- Diverge sia in a che in b e $\lim_{\epsilon \to 0^+, \delta \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b-\delta} f(x)\ dx = l$

Similmente se l'intervallo presenta almeno un infinito:

- $[a, +\infty)$ e $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\ dx = l$
- $(-\infty, b]$ e $\lim_{z \to -\infty} \int_z^b f(x)\ dx = l$
- $(-\infty, +\infty)$ e $\int_{-\infty}^c f(x)\ dx + \int_c^{+\infty} f(x)\ dx = l$ per qualche c

2.3.1 Convergenza

Si considerino tutte le funzioni prese in considerazione in questa sezione aventi x_0 come punto di discontinuità.

Teorema 17 (Criterio del confronto asintotico)

$$\textit{Se}\ \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l \Rightarrow \int_a^{x_0} f(x)\ dx \approx \int_a^{x_0} g(x)\ dx\right)$$
$$\textit{allora (l'integrale di } g(x) \textit{ converge} \iff \textit{l'integrale di } f(x) \textit{ converge)}$$

Teorema 18 (Criterio del confronto diretto)

$$\textit{Se}\ \left(0 \le \int_a^{x_0} f(x)\ dx \le \int_a^{x_0} g(x)\ dx\right)$$

$$\textit{allora (l'integrale di } g(x) \textit{ converge} \Rightarrow \textit{l'integrale di } f(x) \textit{ converge)}$$

Teorema 19 (Criterio di convergenza assoluta)

$$\int_a^{x_0} |f(x)|\ dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{x_0} f(x)\ dx < +\infty$$

3 Equazioni differenziali

Definizione Un'equazione differenziale è un'equazione che lega una funzione incognita alle sue derivate.

3.1 EDO

Definizione Un'equazione differenziale ordinaria coinvolge una funzione di una variabile e le sue derivate di ordine qualsiasi.

Definizione L'ordine di una EDO è il più alto ordine tra le derivate che contiene.

Per esempio l'accelerazione istantanea di un corpo è data dalla derivata della velocità istantanea che a sua volta è la derivata della funzione dello spostamento del corpo:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Ipotizzando che l'accelerazione abbia valore $a\frac{m}{s^2}$ riscrivo:

$$a(t) = s''(t) = a\frac{m}{s^2}$$

Posso ricavare la funzione integrando 2 volte $s''(t)$:

$$\begin{aligned}\int\int s''(t)\ dt\ dt &= \int\int a\ dt\ dt \\ &= \int (at + c_1)\ dt \\ &= \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2\end{aligned}$$

Definizione Il problema di Cauchy consiste nel trovare la soluzione di un'equazione differenziale di ordine $n : f(x, y(x), y''(x), \ldots, y^n(x)) = 0$ tale che soddisfi le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ y''(a) &= y_2 \\ &\ldots \\ y^{n-1}(a) &= y_{n-1}\end{aligned}$$

3.1.1 EDO lineari

Definizione Una EDO è definita lineare se:

1. è lineare ($y(t)$ e $y'(t)$ hanno grado 0 o 1)
2. è omogenea (non ci sono termini costanti aggiuntivi indipendenti da $y(t)$)

In questo caso se ho un'equazione della forma:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

posso riscrivere il problema di Cauchy come:

$$y(t) = \mathbf{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)\mathbf{e}^{-A(t)} \ dt \right]$$