Fondamenti di Comunicazioni Elettriche / Telecomunicazioni
Modulazione su portante sinusoidale - Parte 1

Luca De Nardis `luca.denardis@uniroma1.it`

Sapienza Università di Roma — 05 Novembre 2024

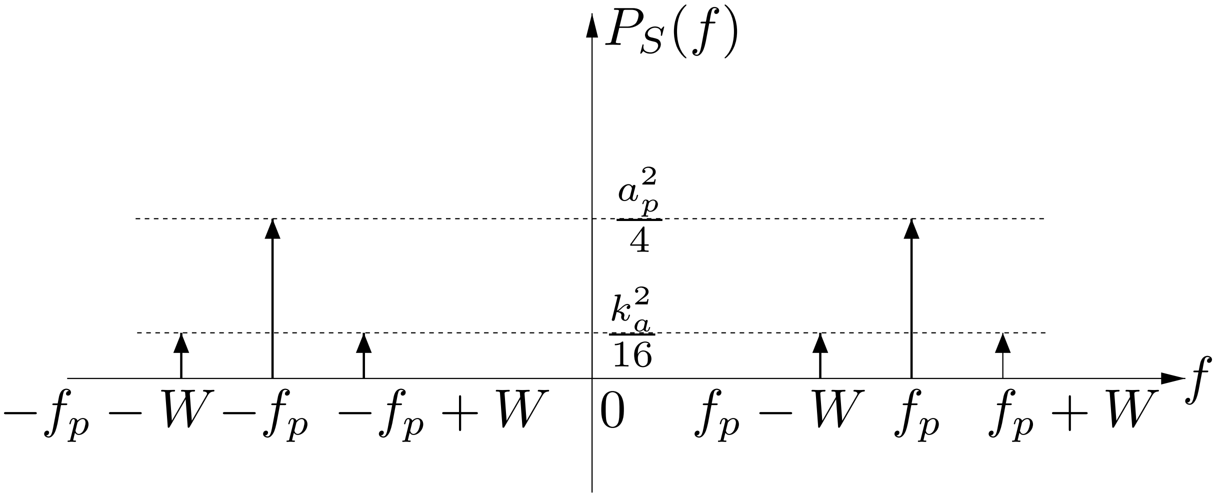
Esercizio 1

Un trasmettitore AM viene testato applicando il segnale a radio frequenze in uscita dal trasmettitore ai capi di un carico passivo reale con impedenza $Z_c = R_c = 50\ \Omega$. Il test viene effettuato scegliendo come segnale modulante un tono sinusoidale di ampiezza unitaria e frequenza $W = 1000\ Hz$. Si vuole testare il trasmettitore a frequenze intorno a una portante $f_p = 850\ kHz$. Sapendo che la potenza sulla portante assorbita dal carico è pari a $W_p = 5000\ W$ e che il segnale trasmesso è di tipo AM-BLD-PI con $k_a = 0.9a_p$ e fase nulla, si chiede di rispondere ai seguenti quesiti:

1. esprimere la potenza sulla portante assorbita dal carico W_p in dBk ($kW \xrightarrow{dB} dBk$);
2. scrivere l'espressione per la tensione che compare ai capi del carico, fornendo il valore numerico per tutte le costanti che compaiono nella relazione, in modo che W_p assuma il valore indicato;
3. rappresentare graficamente lo spettro di densità di potenza del segnale modulato;
4. calcolare la potenza media assorbita dal carico e il valore del parametro di efficienza di modulazione η;
5. calcolare la tensione di picco ai capi del carico.

Soluzione

1. Si ha:
$$W_p = 5\ kW \xrightarrow{W}_{p,dBk} = 7\ dBk. \tag{1}$$
2. Si ha:
$$s(t) = (a_p + k_a m(t)) \cos(2\pi f_p t) \tag{2}$$
con
$$m(t) = \cos(2\pi W t). \tag{3}$$
Per la potenza si ha:
$$W_p = \frac{P_p}{R_c} \text{, dove } P_p = \frac{a_p^2}{2}. \tag{4}$$
Per a_p si ottiene quindi:
$$a_p = \sqrt{2P_p} = \sqrt{2R_c W_p} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 5000} = \sqrt{5 \cdot 10^5} = 707\ V. \tag{5}$$
E di conseguenza:
$$k_a = 0.9a_p = 0.9 \cdot 707 = 636\ V. \tag{6}$$
L'espressione della tensione ai capi del carico è quindi:
$$s(t) = (707 + 636 \cos(2\pi 1000t)) \cos(2\pi 850 \cdot 10^3 t). \tag{7}$$
3. Lo spettro di densità di potenza è il seguente:



4. Nel calcolo bisogna tenere conto della presenza dei coseni. Si ha:

$$W_S = W_p + W_u = \frac{1}{R}\left(\frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{50}\left(\frac{707^2}{2} + \frac{636^2}{4}\right) = 7021\ W. \tag{8}$$

Si può arrivare allo stesso risultato osservando che:

$$s(t) = [a_p + k_a\cos(2\pi Wt)]\cos(2\pi f_p t) = a_p\cos(2\pi f_p t) + \frac{k_a}{2}\cos[2\pi(f_p + W)t] + \frac{k_a}{2}\cos[2\pi(f_p - W)t]\,, \tag{9}$$

avendo sfruttato la relazione trigonometrica:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\,. \tag{10}$$

Si ottiene quindi:

$$P_S = \frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{4}\frac{1}{2} + \frac{k_a^2}{4}\frac{1}{2} = \frac{a_p^2}{2} + 2\frac{k_a^2}{8} = \frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{4}, \tag{11}$$

che porta al risultato riportato all'eq. (8).
Il valore di η è in questo caso:

$$\eta = \frac{P_u}{P_S} = \frac{W_u}{W_S} = \frac{2021}{7021} = 0.288. \tag{12}$$

5. La tensione di picco si ottiene quando l'ampiezza di entrambi i coseni è pari a 1, ed è quindi pari a: $V_p = 707 + 636 = 1343\ V$.

Esercizio 2

Sia dato il segnale modulato

$$s(t) = 500\cos(2\pi f_p t) + 100\sin[2\pi(f_p + f_e)t] - 100\sin[2\pi(f_p - f_e)t]\,. \tag{13}$$

1. Esprimere l'inviluppo complesso del segnale modulato;
2. indicare di che tipo di modulazione si tratta, e fornire l'espressione del segnale modulante;
3. determinare le componenti analogiche di bassa frequenza $s_f(t)$ e $s_q(t)$;
4. calcolare la potenza media totale nel caso in cui $s(t)$ rappresenti una tensione applicata a un carico $R_c = 50\ \Omega$.

Soluzione

1. Sfruttando la relazione trigonometrica

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\alpha) \tag{14}$$

si ottiene:

$$s(t) = 500\cos(2\pi f_p t) + 2\cdot 100\sin(2\pi f_e t)\cos(2\pi f_p t) = [500 + 200\sin(2\pi f_e t)]\cos(2\pi f_p t). \tag{15}$$

L'inviluppo complesso cercato è quindi:

$$\underline{s}(t) = 500 + 200\sin(2\pi f_e t)\,. \tag{16}$$

2. Il segnale ha inviluppo complesso reale, quindi è necessariamente di tipo BLD; inoltre include una componente associata alla portante non modulata, quindi non può essere di tipo PS. Per determinare se è PI o PR dobbiamo determinare il valore di η. Si ha:

$$\eta = \frac{\frac{k_a^2 P_M}{2}}{\frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2 P_M}{2}} = \frac{\frac{(200)^2}{2}\frac{1}{2}}{\frac{500^2}{2} + \frac{(200)^2}{2}\frac{1}{2}} = \frac{10^4}{12.5\cdot 10^4 + 10^4} = 0.074. \tag{17}$$

Il segnale è quindi di tipo PI.
Il segnale modulante avrà la forma:

$$m(t) = A\sin(2\pi f_e t), \tag{18}$$

dove il valore di A va determinato imponendo $k_a A = 200$. Scegliendo ad esempio $k_a = 200$ si ottiene $A = 1\ V$.

3. Dalla definizione

$$\underline{s}(t) = s_f(t) + i s_q(t) \tag{19}$$

si ottiene immediatamente:

$$\begin{cases} s_f(t) = 500 + 200\sin(2\pi f_e t) \\ s_q(t) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

4. Si ha:

$$P_S = \frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2 P_M}{2} = \frac{500^2}{2} + \frac{(200)^2}{2}\frac{1}{2} = \frac{25\cdot 10^4}{2} + \frac{4\cdot 10^4}{2}\frac{1}{2} = 13.5\cdot 10^4; V^2. \tag{21}$$

Di conseguenza si ottiene:

$$W_c = \frac{P_S}{R_c} = \frac{13.5\cdot 10^4}{50} = 2700\ W. \tag{22}$$

Esercizio 3

Si consideri un segnale modulato AM in Banda Laterale Unica (AM-BLU) a frequenza portante $f_p = 1\ kHz$. Il segnale modulante $m(t)$ è una cosinuoside di ampiezza $A = 5\ V$ a frequenza $f_e = 500\ Hz$. Si ha inoltre $k_a = 0.5$.
Si chiede di:

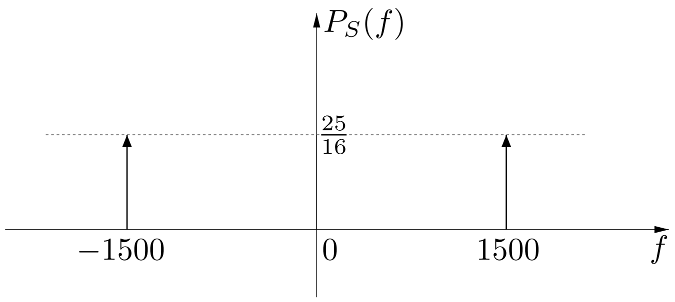
1. calcolare la trasformata di Hilbert di $m(t)$;
2. determinare l'espressione del segnale modulato, sapendo che si decide di preservare la Banda Laterale Superiore;
3. rappresentare graficamente lo spettro di densità di potenza di $s(t)$.

Soluzione

1. Si ha
$$m(t) = A\cos(2\pi f_e t)\,. \tag{23}$$
Poiché il filtro di Hilbert sfasa il segnale di $\pi/2$ senza alterarne il modulo, si ha immediatamente:
$$m_h(t) = A\sin(2\pi f_e t)\,. \tag{24}$$

2. L'espressione del segnale modulato è:
$$\begin{aligned} s(t) &= k_a m(t)\cos(2\pi f_p t) - k_a m_h(t)\sin(2\pi f_p t) = \\ &= k_a A\cos(2\pi f_e t)\cos(2\pi f_p t) - k_a A\sin(2\pi f_e t)\sin(2\pi f_p t). \end{aligned} \tag{25}$$
Ricordando la relazione trigonometrica:
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\,, \tag{26}$$
si ottiene:
$$s(t) = k_a A\cos[2\pi(f_p+f_e)t] = \frac{5}{2}\cos[2\pi(1000+500)t] = \frac{5}{2}\cos(2\pi 1500 t)\,. \tag{27}$$

3. Lo spettro di densità di potenza è:



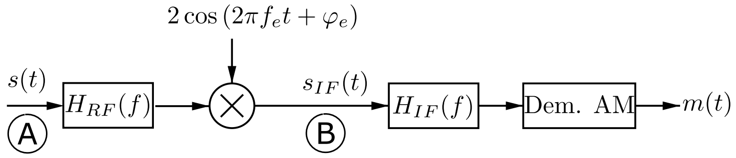
Esercizio 4

Un ricevitore AM-BLU è sintonizzato per ricevere un segnale a $f_p = 7.225\ MHz$ (Banda Laterale Inferiore). Il segnale AM è modulato da un segnale audio di banda $B = 3\ kHz$. Si supponga che il ricevitore sia un circuito supereterodina con un filtro BLU a IF. Il filtro a IF è centrato alla frequenza $f_{c,IF} = 3.395\ MHz$. La frequenza dell'oscillatore locale f_e è maggiore di f_p. Si chiede di:

1. tracciare il diagramma a blocchi del ricevitore supereterodina, indicare il valore di tutte le frequenze rilevanti e disegnare lo spettro dei segnali nei vari punti del ricevitore
2. determinare le specifiche dei filtri a RF e IF, indicando in particolare frequenza centrale e banda passante.

Soluzione

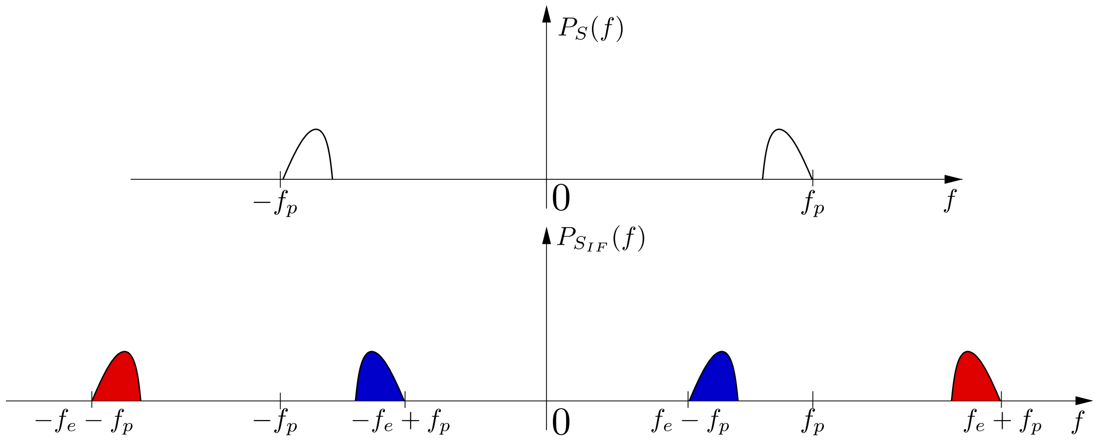
Lo schema a blocchi del demodulatore supereterodina è rappresentato in figura:
Il segnale nel punto A è:
$$s(t) = k_a m(t)\cos(2\pi f_p t) + k_a m_h(t)\sin(2\pi f_p t), \tag{28}$$



mentre nel punto B si ha:

$$\begin{aligned}
s_{IF}(t) &= 2s(t)\cos(2\pi f_e t) = [k_a m(t)\cos(2\pi f_p t) + k_a m_h(t)\sin(2\pi f_p t)]\, 2\cos(2\pi f_e t) = \\
&= 2k_a m(t)\cos(2\pi f_p t)\cos(2\pi f_e t) + 2k_a m_h(t)\sin(2\pi f_p t)\cos(2\pi f_e t) = \\
&= k_a m(t)\{\cos[2\pi(f_e+f_p)t] + \cos[2\pi(f_e-f_p)t]\} + \\
&+ k_a m_h(t)\{\sin[2\pi(f_e+f_p)t] + \sin[2\pi(f_p-f_e)t]\} = \\
&= k_a m(t)\{\cos[2\pi(f_e+f_p)t] + \cos[2\pi(f_e-f_p)t]\} + \\
&+ k_a m_h(t)\{\sin[2\pi(f_e+f_p)t] - \sin[2\pi(f_e-f_p)t]\} = \\
&= \{k_a m(t)\cos[2\pi(f_e+f_p)t] + k_a m_h(t)\sin[2\pi(f_e+f_p)t]\} + \\
&+ \{k_a m(t)\cos[2\pi(f_e-f_p)t] - k_a m_h(t)\sin[2\pi(f_e-f_p)t]\}\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

$s_{IF}(t)$ è quindi interpretabile come la somma di due segnali BLU: uno in Banda Laterale Inferiore e portante $f_e + f_p$ e un altro in Banda Laterale Superiore e portante $f_e - f_p \equiv f_{IF}$. Gli spettri corrispondenti sono presentati nella seguente figura:



I filtri saranno centrati a metà della banda laterale di interesse, e avranno ampiezza di banda pari a B. Si avrà quindi:

- $H_{RF}(f)$ centrato a frequenza $f_p - B/2 = 7225 - 1.5 = 7223.5\ kHz$;
- $H_{IF}(f)$ centrato a frequenza $f_{c,IF} = f_e - f_p + B/2 = 3395\ kHz$.

Da cui si ricava:

$$\begin{aligned}
f_e &= f_p - \frac{B}{2} + 3395 = 7225 + 3395 - 1.5 = 10618.5\ kHz \\
f_{IF} &= f_e - f_p = 10618.5 - 7225 = 3393.5\ kHz.
\end{aligned} \tag{30}$$

La frequenza immagine da attenuare per garantire l'assenza di interferenza a valle del filtro IF è pari a:

$$f_{IM} = 2f_e - f_p = 2 \cdot 10618.5 - 7225 = 14012\ kHz. \tag{31}$$

Esercizio 5

Si consideri un segnale modulato AM in Banda Laterale Doppia con Portante Soppressa (AM-BLD-PS) con potenza trasmessa pari a $W_T = 1.5\ W$. Il segnale garantisce al ricevitore il valore di SNR_{MIN} richiesto

con un margine $M_{dB} = 6\ dB$.
Si decide, a parità di W_T, di voler trasmettere anche la portante non modulata, passando a uno schema AM-BLD-PI. Si calcoli:

1. il massimo valore della potenza utilizzabile per la portante volendo garantire SNR_{MIN};
2. il valore di a_p se il carico su cui è chiuso il trasmettitore è $R_c = 50\ \Omega$.

Soluzione

1. Se in origine si aveva un margine $M_{dB} = 6\ dB$, corrispondente a $M = 4$, la potenza trasmessa era M volte superiore a quella necessaria per garantire il rispetto della condizione $SNR \geq SNR_{MIN}$. Sarà quindi possibile rispettare la specifica utilizzando una potenza $W_u = W_T/4$, e utilizzando la potenza rimanente sulla portante. Si ha quindi:
$$W_p = W_T - W_u = \frac{3}{4}W_T = \frac{3}{4}1.5 = 1.125\ W. \tag{32}$$
2. Si ha:
$$W_p = \frac{a_p^2}{2}\frac{1}{R_c} = 1.125\ \rightarrow\ a_p = \sqrt{2R_cW_p} = \sqrt{2\cdot 50\cdot 1.125} = \sqrt{112.5} = 10.6\ V. \tag{33}$$

Esercizio 6

Un sistema di trasmissione utilizza una modulazione di frequenza intorno alla frequenza portante $f_p = 10\,MHz$. La costante di proporzionalità tra la deviazione istantanea di frequenza $f_d(t)$ e il segnale modulante $m(t)$ vale $k_F = 5000\,Hz/V$. Si consideri inizialmente $m(t)$ membro di un processo Gaussiano stazionario ergodico a media nulla, con banda $B = 2\,kHz$ e potenza $P_M = 1\,V^2$. Si chiede di:

1. calcolare l'indice di modulazione di frequenza I_F;
2. nell'ipotesi in cui $m(t)$ sia scelto invece cosinusoidale con potenza sempre pari a $P_M = 1\,V^2$ e frequenza $f_0 = 2\,kHz$, calcolare la massima deviazione di frequenza $f_{d_{max}}$;
3. calcolare, nelle condizioni descritte dal Quesito 2, il nuovo indice di modulazione $I_F^{'}$;
4. calcolare, sempre sotto le ipotesi introdotte dal Quesito 2, la Banda di Carson B_c.

Soluzione

1. Nell'ipotesi in cui $m(t)$ sia membro di un processo Gaussiano stazionario a media nulla, si ottiene per la varianza della deviazione istantanea di frequenza:
$$\sigma_{fd}^2 = k_F^2\,P_M,$$
da cui si ricava
$$\sigma_{fd} = k_F\sqrt{P_M}.$$
Inserendo i valori numerici di k_F e P_M, si ottiene
$$\sigma_{fd} = 5000\cdot\sqrt{1} = 5000\,Hz.$$
L'indice di modulazione di frequenza cercato è dato da
$$I_F = \frac{\sigma_{fd}}{B},$$
in cui $B = 2000\,Hz$ rappresenta la banda del segnale modulante. Si ottiene pertanto:
$$I_F = \frac{5000}{2000} = 2.5.$$

2. Il segnale modulante assume l'espressione seguente:

$$m(t) = a\,cos(2\pi\,f_0\,t),$$

con potenza $P_M = a^2/2$. Essendo la potenza del segnale pari a $1\,V^2$, deve essere:

$$a = \sqrt{2\,P_M} = \sqrt{2}\,V.$$

Si ha inoltre:

$$f_d(t) = k_F\,a\,cos(2\pi\,f_0\,t).$$

Il valore massimo cercato per la deviazione di frequenza $f_d(t)$ si ottiene quando $cos(2\pi\,f_0\,t)$ assume valore unitario. Se ciò si verifica si ottiene:

$$f_{d_{max}} = k_F\,a = 5000\,\sqrt{2}\,Hz = 7071\,Hz$$

3. In questo caso $I_F^{'} = \frac{f_{d_{max}}}{f_0}$, dove $f_{d_{max}} = k_F\,a = k_F\,\sqrt{2}$, quindi:

$$I_F^{'} = \frac{7071}{2000} = 3.54.$$

4. Il valore della Banda di Carson può essere calcolato tramite la relazione seguente:

$$B_c = B(I_F^{'} + 1) = 9080\,Hz.$$

Esercizio 7

Si consideri un segnale FM ad alto indice di modulazione di frequenza emesso da un trasmettitore di potenza $W_S = 100\ W$. Si calcoli il valore massimo dell'indice di modulazione I_F considerando che:

- La banda del segnale modulante $m(t)$ è $B = 6\ kHz$, con $m(t)$ membro di un processo Gaussiano ergodico;
- La potenza W_{OUT} al di fuori di un intervallo $[-f_x, f_x]$ intorno a f_p, con $f_x = 50\ kHz$, deve essere $\leq 10\ mW$.

Soluzione

Nel caso di alto indice di modulazione si ha uno spettro di densità di potenza:

$$P_{S_{FM}}(f) = \frac{a^2}{4k_F}\left[p_m(\frac{1}{k_F}(f - f_p)) + p_m(\frac{1}{k_F}(-f - f_p))\right], \tag{34}$$

dove $p_m(m)$ è la densità di probabilità che caratterizza le ampiezze del segnale modulante $m(t)$. Ragionando per semplicità sull'inviluppo complesso dei segnali di interesse, si ha corrispondentemente:

$$P_{\underline{s}}(f) = \frac{a^2}{k_F}p_m\left(\frac{f}{k_F}\right) \tag{35}$$

Nel caso in questione, per un segnale modulante membro di un processo Gaussiano ergodico con potenza P_M, si ha:

$$p_m(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_M}}e^{\left(-\frac{f^2}{2P_M}\right)} \tag{36}$$

e quindi:

$$P_{\underline{s}}(f) = \frac{a^2}{k_F}\frac{1}{\sqrt{2\pi P_M}}e^{\left(-\frac{f^2}{2k_F^2 P_M}\right)} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{f_d}}e^{\left(-\frac{f^2}{2\sigma_{f_d}^2}\right)} \tag{37}$$

Avendo definito $\sigma_{f_d} = k_F\sqrt{P_M}$.
La potenza al di fuori dell'intervallo di interesse è quindi calcolabile come:

$$P_{OUT} = \int_{-\infty}^{-f_x} P_{\underline{s}}(f)df + \int_{f_x}^{+\infty} P_{\underline{s}}(f)df = 2a^2 \int_{f_x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{f_d}} e^{\left(-\frac{f^2}{2\sigma_{f_d}^2}\right)} df \tag{38}$$

Ricordando la definizione della funzione di errore complementare:

$$erfc\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \tag{39}$$

ed effettuando la sostituzione $\xi = \frac{f}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}}$ si ottiene:

$$P_{OUT} = a^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{f_x}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}}}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = a^2 erfc\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}}\right) \tag{40}$$

Il valore di a può essere calcolato, assumendo che il segnale sia applicato a una impedenza reale $R = 1\ \Omega$, come segue:

$$P_S = \frac{a^2}{2} = W_S R = 100 \cdot 1 \ \rightarrow \ a = \sqrt{200}. \tag{41}$$

Ricordando che la potenza dell'inviluppo complesso di un segnale è doppia rispetto a quella del segnale modulato corrispondente, anche il valore limite per la potenza fuori banda da imporre sarà doppio rispetto a quello desiderato per il segnale modulato. Bisognerà quindi imporre:

$$a^2 erfc\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}}\right) = 2W_{OUT}R = 2 \cdot 0.01 \cdot 1 \tag{42}$$

da cui si ottiene:

$$erfc\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}}\right) = \frac{0.02}{200} = 10^{-4} \ \rightarrow \ \frac{f_x}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}} = 2.7 \tag{43}$$

e infine

$$\sigma_{f_d} = \frac{f_x}{\sqrt{2} \cdot 2.7} = \frac{50000}{3.818} = 13096Hz \ \rightarrow \ I_F = \frac{\sigma_{f_d}}{B} = \frac{13096}{6000} = 2.18. \tag{44}$$

Esercizio 8

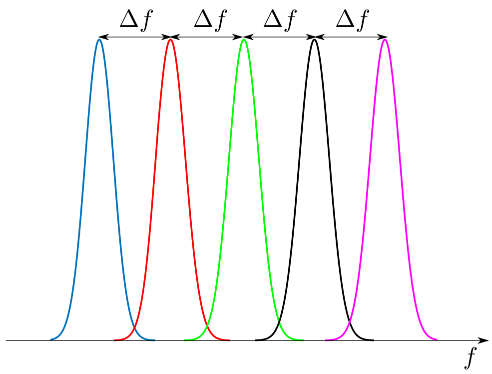


Figure 1: Segnali considerati nell'esercizio 7.

Si supponga che all'antenna ricevente di un ricevitore FM pervenga un elevato numero di segnali ad alto indice di modulazione di frequenza, di uguale potenza e portanti equispaziate di una quantità Δf, come mostrato in Figura 1. Si valuti l'indice di modulazione di frequenza I_F di ciascun segnale, supponendo che i relativi segnali modulanti siano membri di processi Gaussiani indipendenti di banda $B = 6\ kHz$, che $\Delta f = 100\ kHz$ e che il filtro front-end del ricevitore si un passa-banda ideale nell'intervallo $[f_p - \Delta f/2, f_p + \Delta f/2]$, affinché il Signal-to-Interference Ratio (SIR) per il generico segnale rispetto all'interferenza generata dagli altri segnali sia pari a $SIR = 30\ dB$.

Soluzione

Si possono fare preliminarmente le seguenti osservazioni:

1. I processi sono indipendenti, e si sommano quindi i rispettivi spettri di densità di potenza;
2. Si possono in prima approssimazione considerare rilevanti ai fini del calcolo della potenza dell'interferenza solo i due segnali trasmessi sulle due portanti più prossime rispetto a quella del segnale di interesse.

Nel calcolo del SIR vanno inoltre tenuti in conto due effetti:

1. La potenza del segnale utile non sarà tutta quella trasmessa, ma solo quella che passa il taglio introdotto dal filtro di front-end;
2. La potenza complessiva del segnale interferente, in base all'osservazione 2. fatta in precedenza, sarà data dalla somma delle "code" degli spettri dei segnali trasmessi sulle due portanti più prossime a quella di interesse, per simmetria uguale a quella persa sul segnale utile per effetto del filtraggio; tali potenze sono indicate nel seguito con P_{CODE}.

Ragionando per semplicità sull'inviluppo complesso dei segnali di interesse, si vorrà quindi imporre la seguente condizione per rispettare il vincolo imposto dal problema:

$$SIR = \frac{P_{\underline{S}} - P_{CODE}}{P_{CODE}} = 10^{\frac{30}{10}} = 10^3 = 1000. \tag{45}$$

Ricordando che per un segnale modulato di ampiezza a e potenza $P_S = \frac{a^2}{2}$ l'inviluppo complesso ha potenza $P_{\underline{S}} = a^2$, il valore di P_{CODE} che è necessario ottenere è:

$$P_{CODE}(1000+1) = P_{\underline{S}} = a^2 \ \rightarrow\ P_{CODE} = \frac{a^2}{(1000+1)} \tag{46}$$

L'espressione di P_{CODE} è calcolabile a partire dall'espressione dello spettro di densità di potenza dell'inviluppo complesso $\underline{s}(t)$, che può essere scritto in funzione della densità di probabilità Gaussiana $p_m(m)$ che caratterizza le ampiezze del segnale modulante $m(t)$ come segue:

$$P_{\underline{S}}(f) = \frac{a^2}{k_F} p_m\left(\frac{f}{k_F}\right) \tag{47}$$

dove:

$$p_m(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_M}} e^{\left(-\frac{f^2}{2P_M}\right)} \tag{48}$$

e quindi:

$$P_{\underline{S}}(f) = \frac{a^2}{k_F}\frac{1}{\sqrt{2\pi P_M}} e^{\left(-\frac{f^2}{2k_F^2 P_M}\right)} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{f_d}} e^{\left(-\frac{f^2}{2\sigma_{f_d}^2}\right)} \tag{49}$$

Avendo definito $\sigma_{f_d} = k_F\sqrt{P_M}$.
Si ha quindi:

$$P_{CODE} = \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta f}{2}} P_{\underline{S}}(f)df + \int_{\frac{\Delta f}{2}}^{+\infty} P_{\underline{S}}(f)df = 2a^2\int_{\frac{\Delta f}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{f_d}} e^{\left(-\frac{f^2}{2\sigma_{f_d}^2}\right)} df \tag{50}$$

Ricordando la definizione della funzione di errore complementare:

$$erfc\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \tag{51}$$

ed effettuando la sostituzione $\xi = \frac{f}{\sqrt{2}\sigma_{f_d}}$ si ottiene:

$$P_{CODE} = a^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\Delta f}{2\sqrt{2}\sigma_{f_d}}}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = a^2 erfc\left(\frac{\Delta f}{2\sqrt{2}\sigma_{f_d}}\right) \tag{52}$$

Si deve quindi imporre:

$$a^2 erfc\left(\frac{\Delta f}{2\sqrt{2}\sigma_{f_d}}\right) = \frac{a^2}{(1000+1)} \tag{53}$$

da cui si ottiene:

$$erfc\left(\frac{\Delta f}{2\sqrt{2}\sigma_{f_d}}\right) = \frac{1}{(1000+1)}; \rightarrow \; \frac{\Delta f}{2\sqrt{2}\sigma_{f_d}} = 2.32 \tag{54}$$

e infine

$$\sigma_{f_d} = \frac{\Delta f}{2\sqrt{2}\cdot 2.32} = \frac{100000}{6.56} = 15239.4 Hz \;\rightarrow\; I_F = \frac{\sigma_{f_d}}{B} = \frac{15239.4}{6000} = 2.54. \tag{55}$$