Fondamenti di Comunicazioni Elettriche / Telecomunicazioni Esercitazione su conversione A/D e teorema del campionamento

Luca De Nardis `luca.denardis@uniroma1.it`

Sapienza Università di Roma — 01 Ottobre 2024

Problema

Si consideri un sistema caratterizzato dallo schema a blocchi mostrato in Fig.1.

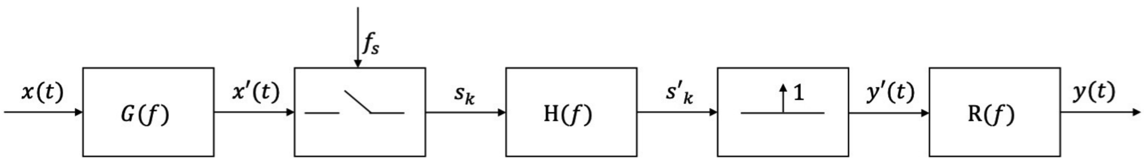

Figure 1: Sistema considerato

Il segnale $x(t)$ e i blocchi del sistema che attraversa sono caratterizzati come mostrato in Figura 2:

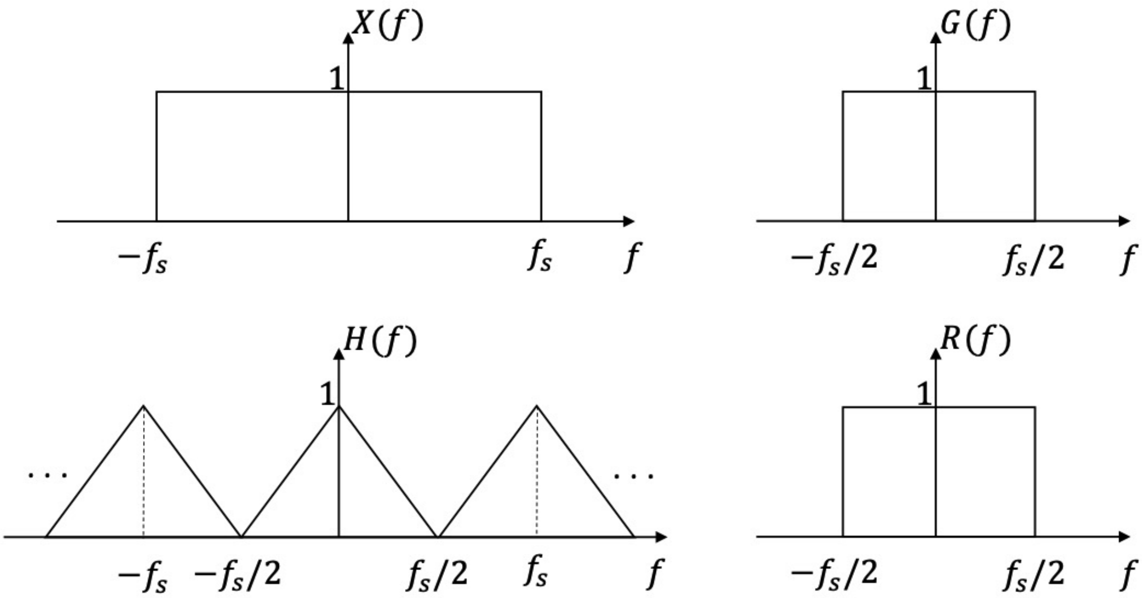

Figure 2: Definizione blocchi del sistema in Figura 1

Per tale sistema si chiede di:

1. calcolare e rappresentare graficamente s_k;
2. calcolare e rappresentare graficamente $Y(f)$.

Richiami sulle proprietà della trasformata di Fourier

Si riportano di seguito definizione e proprietà della trasformata di Fourier utili nella risoluzione del problema proposto.

Definizione

Segnali tempo-continui

La trasformata di Fourier $S(f)$ di un segnale $s(t)$, funzione continua del tempo t, è definita come segue:

$$S(f) = FT[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i2\pi ft} dt. \tag{1}$$

La relazione duale, che lega la rappresentazione in frequenza $S(f)$ di un segnale al suo andamento in tempo $s(t)$ è invece:

$$s(t) = FT^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{i2\pi ft} df. \tag{2}$$

Sequenze numeriche

Nel caso di una sequenza $\{x_n\}$ tipicamente, ma non necessariamente, ottenuta tramite il campionamento di un segnale analogico $x(t)$, con passo di campionamento T, con generico campione $x_n = x(nT)$, la trasformata di Fourier è definita come segue:

$$X(f) = FT[x_n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-i2\pi fnT}. \tag{3}$$

La trasformata inversa è invece definita come.

$$x_n = FT^{-1}[X(f)] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(f)\, e^{i2\pi fnT} df. \tag{4}$$

Trasformata di un $rect$

La trasformata di un segnale rettangolare di durata T centrato in t_0 è data da:

$$x(t) = rect\left(\frac{t - t_0}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = T sinc\,(fT)\, e^{-i2\pi ft_0} = T\frac{sin\,(\pi fT)}{\pi fT} e^{-i2\pi ft_0} \tag{5}$$

come rappresentato graficamente in Figura 3, nella quale è mostrato per semplicità il solo modulo della trasformata $|X(f)|$.

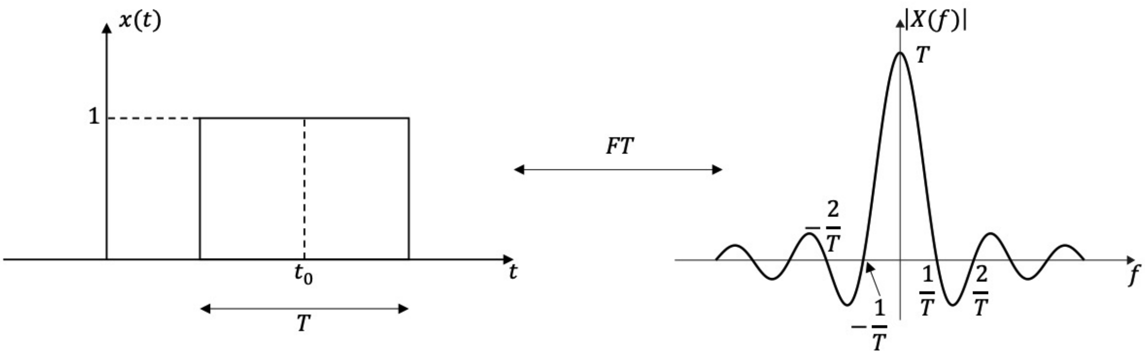

Figure 3: Trasformata di un segnale rettangolare di durata T centrato in t_0.

Trasformata di un treno di impulsi di Dirac

La trasformata di Fourier di un treno di impulsi di Dirac spaziati di T è ancora un treno di imuplsi di Dirac, spaziati di $F = 1/T$ e con ampiezza $1/T$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - kT\right) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right). \tag{6}$$

Convoluzione

Dati un segnale tempo continuo $x(t)$ posto in ingresso a un sistema lineare e tempo invariante caratterizzato da una risposta impulsiva $h(t)$, il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema è dato da:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \tag{7}$$

a cui corrisponde in frequenza una trasformata di Fourier di $y(t)$, $Y(f)$, data da:

$$Y(f) = X(f)H(f). \tag{8}$$

Per sequenze numeriche, detta x_n la sequenza di ingresso e h_n la sequenza che descrive la risposta impulsiva di un sistema lineare e tempo invariante, si ha:

$$y_n = x_n * h_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m h_{n-m}. \tag{9}$$

Simmetria

Dato un segnale $s(t)$ con trasformata di Fourier $S(f)$, il segnale $S(t)$ ha trasformata di Fourier $s(-f)$.

Soluzione

Calcolo e rappresentazione di s_k

Il segnale $x'(t)$ all'uscita del primo blocco è dato da $x'(t) = x(t) * g(t)$. Il suo calcolo può però essere svolto in modo più semplice passando nel dominio della frequenza. Si ha infattI:

$$X'(f) = X(f)G(f) = rect\left(\frac{f}{f_s}\right) \tag{10}$$

che porta al risultato mostrato graficamente in Figura 4.
$x'(t)$ può quindi essere ottenuto effettuando la trasformata inversa di Fourier, ricordando la relazione che lega un $rect$ in tempo e la sua trasformata di Fourier, e sfruttando la proprietà di simmetria. Si ottiene così:

$$X'(f) = rect\left(\frac{f}{f_s}\right) \longleftrightarrow x'(t) = f_s sinc\left(f_s t\right) = \frac{1}{T_s} sinc\left(\frac{t}{T_s}\right). \tag{11}$$

$x'(t)$ è rappresentato graficamente nella Figura 5.
A partire da $x'(t)$ è immediato ottenere la sequenza s_k richiesta, semplicemente estraendo i valori di $x'(t)$ negli istanti multipli di T_s. Si ottiene quindi la sequenza:

$$s_k = x'\left(kT_s\right) = \begin{cases} f_s & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

rappresentata graficamente in Figura 6.

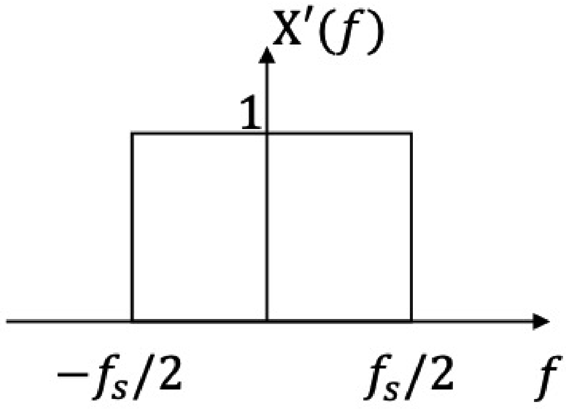

Figure 4: Trasformata $X'(f)$ del segnale $x'(t)$.

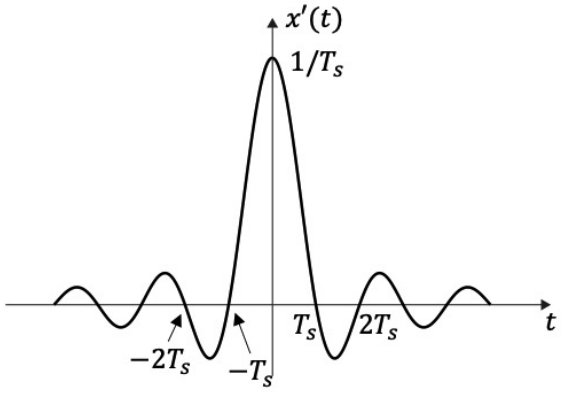

Figure 5: Segnale $x'(t)$.

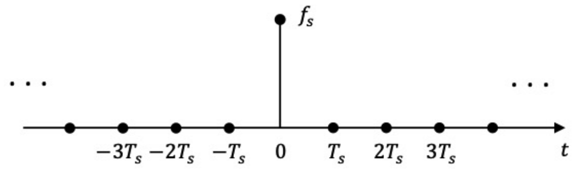

Figure 6: Sequenza $s_k = x'(kTs)$, $k \in (-\infty, +\infty)$.

Calcolo e rappresentazione di $Y(f)$

Per calcolare $Y(f)$ possiamo iniziare dal calcolo di $S(f)$, trasformata di Fourier della sequenza s_k. Applicando la definizione della trasformata di Fourier per sequenze numeriche si ottiene

$$S(f) = FT[s_k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{-i2\pi f k T_s} = f_s. \tag{13}$$

S_f è rappresentata graficamente in Figura 7.
Un modo alternativo per ottenere $S(f)$, senza utilizzare la definizione di trasformata di Fourier di una sequenza numerica, è quello di scriverla come il risultato della trasformata di Fourier del segnale tempo

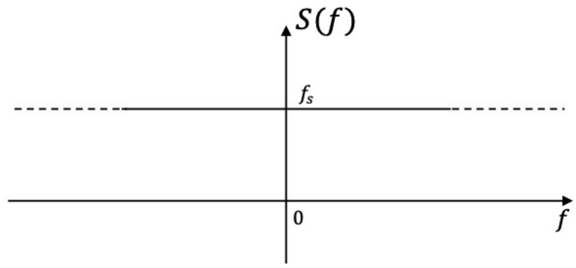

Figure 7: Trasformata di Fourier S della sequenza s_k.

continuo i cui valori costituiscono i valori di s_k, e cioè:

$$s_k = x'(kT_s) = x'(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s), \tag{14}$$

la cui trasformata di Fourier è:

$$S(f) = X'(f) * FT\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)\right] = X'(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X'(f - kf_s), \tag{15}$$

dove si è sfruttata la trasformata nota di un treno di impulsi di Dirac richiamata in precedenza. $S(f)$ è quindi rappresentabile come la somma di infinite repliche $X'(f)$ centrate nei multipli di $f_s = 1/T_s$. Poiché $X'(f) = rect\left(\frac{f}{f_s}\right)$, la somma delle sue infinite repliche moltiplicate per f_s porta a un valore costante e pari a f_s sull'intero asse delle frequenze, come mostrato in Figura 8, con un risultato finale del tutto equivalente alla Figura 7.

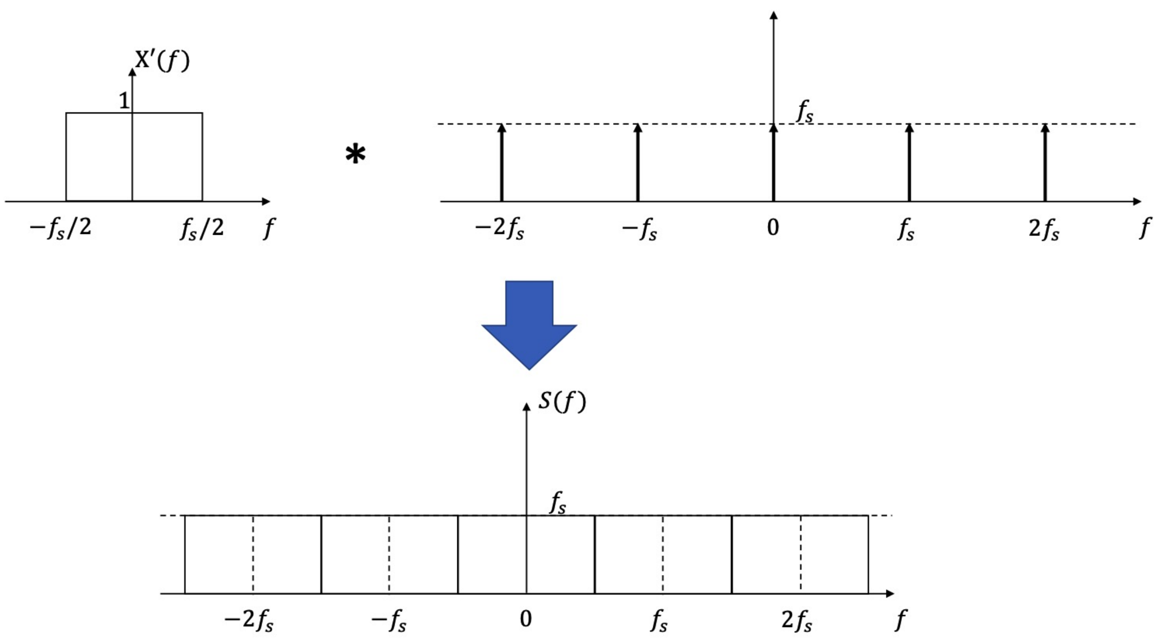

Figure 8: Trasformata di Fourier $S(f)$ della sequenza s_k calcolata come somma di repliche $X'(f)$ centrate nei multipli di $f_s = 1/T_s$.

Rimanendo nel dominio della frequenza possiamo calcolare $S'(f)$, trasformata di Fourier di s'_k, come $S'(f) = S(f)H(f)$; il risultato sarà uno spettro con la stessa forma di $H(f)$, ma scalato in ampiezza di un fattore f_s, come mostrato in Figura 9.

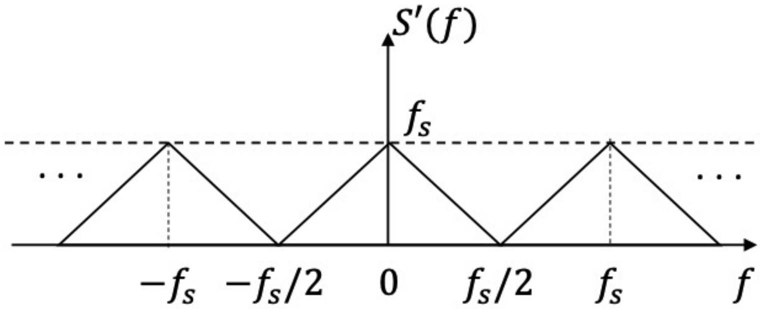

Figure 9: Trasformata di Fourier $S'(f)$ della sequenza s'_k.

Il passaggio da $S'(f)$ a $Y'(f)$ è immediato, in quanto la convoluzione con l'impulso di Dirac ha eventualmente il solo effetto di modificare l'ampiezza del segnale, e quindi dello spettro; avendo però i Dirac ampiezza 1, il segnale e lo spettro rimangono invariati. Si ha quindi $Y'(f) = S'(f)$. Questo blocco indica in effetti concettualmente la generazione di un segnale tempo-continuo a partire dai valori della sequenza s'_k costituito da un treno di impulsi di Dirac centrati in multipli di T_s con ampiezze date appunto dai valori di s'_k.
L'ultimo passo per il calcolo di $Y(f)$ è valutare quindi l'effetto del passaggio di $Y'(f)$ nel filtro $R(f)$, calcolandone l'uscita. Rimanendo ancora nel dominio della frequenza si ha $Y(f) = Y'(f)R(f)$. La moltiplicazione per $R(f)$ ha l'effetto di selezionare la replica centrata in $f = 0$, a tutti gli effetti rimuovendo l'effetto del campionamento effettuato su $x'(t)$: $R(f)$ ha quindi l'effetto di ricostruire il segnale continuo interpolando i campioni in ingresso; per questo motivo è detto filtro ricostruttore. Il suo effetto è illustrato in Figura 10. L'espressione analitica di $Y(f)$ è quindi:

$$Y(f) = f_s tri\left(\frac{f}{f_s/2}\right). \tag{16}$$

Osservazione

Si noti che se si considera un segnale campionato, ad es. quello dato da $s_k = x'(kT_s)\ k \in (-\infty, \infty) = x'(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$ e si effettua la sostituzione $\omega = 2\pi f T$ si ottengono per la sequenza s_k le relazioni:

$$S(i\omega) = FT[s_k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{-i\omega k}. \tag{17}$$

E per la trasformata inversa:

$$s_k = FT^{-1}[S(i\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(i\omega)\, e^{i\omega k} d\omega. \tag{18}$$

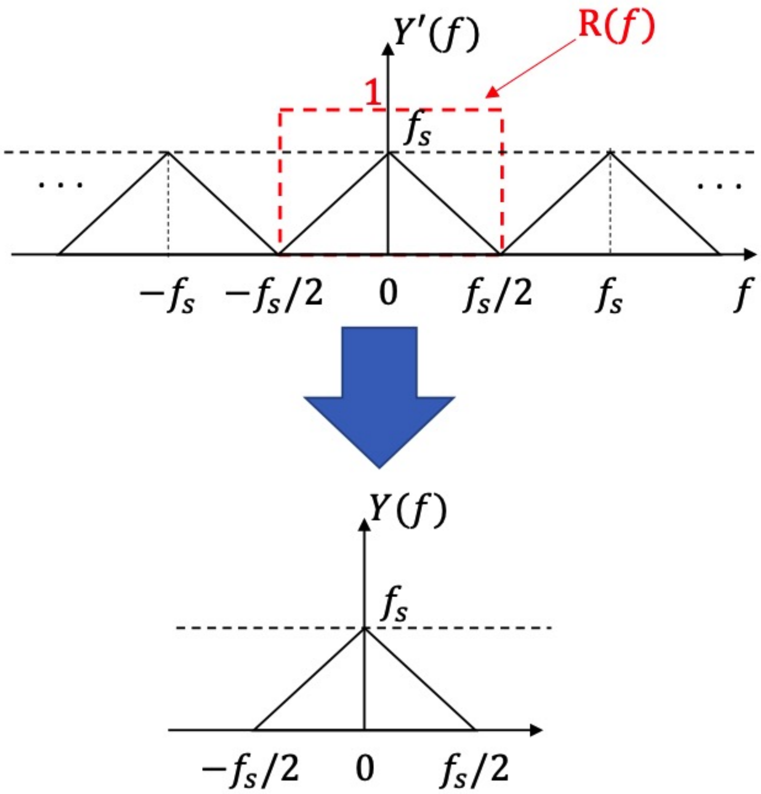

Figure 10: Trasformata di Fourier $Y(f)$ del segnale $y(t)$ ottenuta a valle del passaggio di $Y'(f)$ nel filtro ricostruttore con funzione di trasferimento $R(f)$.