Fondamenti di Comunicazioni Elettriche / Telecomunicazioni
Probabilità di errore in un collegamento multilivello

Luca De Nardis `luca.denardis@uniroma1.it`

Sapienza Università di Roma — 15 Ottobre 2024

Esercizio 1

Si consideri un collegamento numerico multilivello in cui una sorgente che genera un flusso binario a velocità f_b è connessa a un codificatore di trasmissione a L livelli con $\rho = 0$ e $N = 1$, seguito da un filtro di trasmissione a coseno rialzato con fattore di roll-off γ. Determinare la perdita di prestazioni in funzione di γ e L, misurata dalla diminuzione di SNR, nel caso si decida di utilizzare un filtro di ricezione $H_R(f)$ realizzato originariamente per permettere il passaggio di un segnale $s(t)$ a banda massima, e se ne calcoli il valore nei seguenti casi:

1. $L = 2$, $\gamma = 0$;
2. $L = 4$, $\gamma = 1$;
3. $L = 8$, $\gamma = 0.5$.

Soluzione

La banda massima si ottiene nel caso $L = 2$, $\gamma = 1$, ed è data da:

$$B_{MAX} = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2(2)}(1+1) = f_b. \tag{1}$$

Poiché la potenza di rumore W_N sarà pari a una costante k moltiplicata per la banda di $H_R(f)$, l'SNR_{MIN} sarà dato da:

$$SNR_{MIN} = \frac{W_R}{kB_{MAX}} = \frac{W_R}{kf_b}. \tag{2}$$

Se $H_R(f)$ fosse invece configurato per tagliare sempre esattamente in $f = B$, l'SNR sarebbe:

$$SNR = \frac{W_R}{kB} = \frac{W_R}{k\frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma)} = \frac{W_R}{kf_b}\frac{2log_2 L}{(1+\gamma)}. \tag{3}$$

La perdita di prestazioni può quindi essere espressa come:

$$\frac{SNR}{SNR_{MIN}} = \frac{W_R}{kf_b}\frac{2log_2 L}{(1+\gamma)}\frac{kf_b}{W_R} = \frac{2log_2 L}{(1+\gamma)}. \tag{4}$$

Il suo valore nei tre casi indicati è quindi pari a:

1. $L = 2$, $\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2log_2(2)}{(1+0)} = 2 \rightarrow 3\,dB$;
2. $L = 4$, $\gamma = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2log_2(4)}{(1+1)} = 2 \rightarrow 3\,dB$;
3. $L = 8$, $\gamma = 0.5 \quad \rightarrow \quad \frac{2log_2(8)}{(1+0.5)} = 4 \rightarrow 6\,dB$;

Esercizio 2

Si consideri un sistema di comunicazione multilivello binario in cui i simboli V_0 e V_1 associati ai bit 0 e 1 sono pari rispettivamente a $V_0 = -2$ V e $V_1 = 2$ V.

1. Si determini il valore della varianza del processo di generazione dei simboli $\sigma_{v_k}^2$;
2. sapendo che la varianza del processo di rumore a valle del filtro di ricezione è pari a $\sigma_0^2 = 10^{-10}$ V ^{2} si calcoli l'SNR assumendo la presenza di un canale perfetto, esprimendolo in dB.
3. supponendo invece che il canale introduca un'attenuazione di potenza pari ad A, si calcoli il valore di A_{dB} che porta ad ottenere $SNR_{dB} = 10$ dB.

Soluzione

1. Si ha:
$$\begin{aligned}\sigma_{v_k}^2 &= E\left[v_k^2\right] - E\left[v_k\right]^2 = \frac{1}{2}V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 - \left[\frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}V_1\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}(-2)^2 + \frac{1}{2}2^2 - \left[\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}2\right]^2 = 4\text{ V}^2.\end{aligned} \tag{5}$$
2. Per definizione:
$$SNR = \frac{\sigma_{v_k}^2}{\sigma_0^2} = \frac{4}{10^{-10}} = 4 \cdot 10^{10} \rightarrow SNR_{dB} = 10log_{10}\left(4 \cdot 10^{10}\right) = 106\text{ dB}. \tag{6}$$
3. detto $SNR_{dB}^P = W_{R,dBm} - W_{N,dBm}$ l'SNR ottenuto nel caso di canale perfetto, sappiamo che l'attenuazione A andrà a modificare la potenza ricevuta che passerà da $W_{R,dBm}$ a $W'_{R,dBm} = W_{R,dBm} - A_{dB}$, portando a un nuovo SNR pari a:
$$SNR'_{dB} = W'_{R,dBm} - W_{N,dBm} = W_{R,dBm} - A_{dB} - W_{N,dBm} = SNR_{dB}^P - A_{dB}. \tag{7}$$
Volendo garantire $SNR'_{dB} = 10$ dB si ha:
$$A_{dB} = SNR_{dB}^P - SNR'_{dB} = 106 - 10 = 96\text{ dB}. \tag{8}$$

Esercizio 3

Si consideri un sistema di trasmissione che utilizza la banda base avente in ingresso una sorgente caratterizzata da una velocità di trasmissione binaria $f_b = 360$ Mbit/s. Il numero di livelli utilizzati è $L = 8$, e il fattore di roll-off utilizzato dal filtro a coseno rialzato in trasmissione è unitario. Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti:

1. Calcolare la banda B del segnale trasmesso.
2. Quanto vale l'efficienza spettrale η misurata in bit/s/Hz?
3. Se viene introdotta una ridondanza $\rho = 1/3$ qual è il nuovo valore della banda B'?
4. Il collegamento in esame presenta un rapporto segnale rumore $SNR_{dB} = 24.5$ dB. Qual è la probabilità d'errore P_e (si faccia riferimento alla Figura 1)?
5. Per avere una probabilità d'errore $P_e = 10^{-8}$ di quanto deve aumentare l'SNR?
6. Volendo mantenere la probabilità d'errore $P_e = 10^{-8}$, e sapendo che la potenza di rumore è $W_N = -93.2$ dBm, qual è la potenza minima W_R che si deve avere in ricezione?
7. Se la potenza trasmessa è $W_T = 0.01$ W, quanto vale la massima attenuazione che può essere introdotta dal canale?
8. Si supponga che all'attenuazione calcolata nel punto precedente si aggiunga un'attenuazione supplementare di 6 dB. Quanto vale il nuovo SNR?
9. Che probabilità d'errore avrà a questo punto il collegamento?

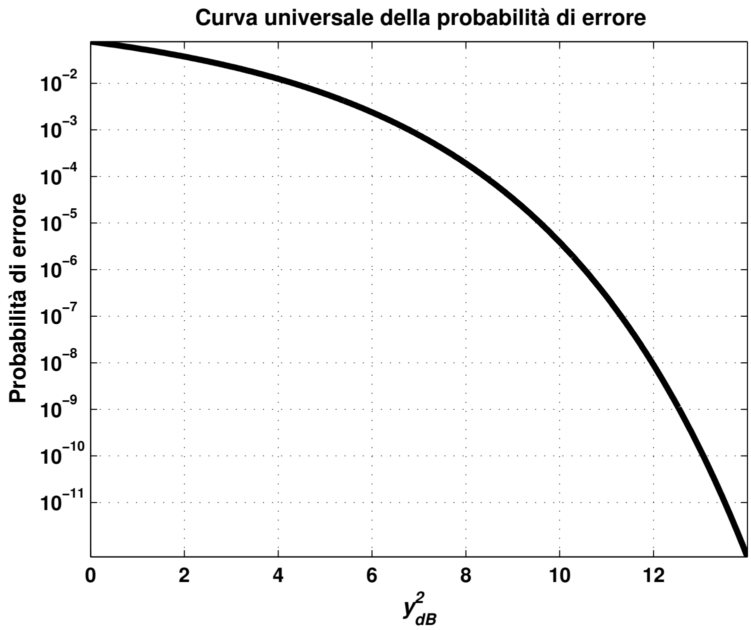

Figure 1: Probabilità d'errore in funzione di y^2_{dB}

Soluzione

1. Si ha:
$$B = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma) = \frac{360 \cdot 10^6}{2log_2(8)}(1+1) = 120 \text{ MHz} \tag{9}$$

2. Si ha:
$$\eta = \frac{f_b}{B} = \frac{360 \cdot 10^6}{120 \cdot 10^6} = 3. \tag{10}$$

3. In presenza di un parametro di ridondanza $\rho > 0$ il nuovo valore della banda B' è:
$$B' = \frac{f_b}{2log_2 L(1-\rho)}(1+\gamma) = \frac{B}{1-\rho} = \frac{120 \cdot 10^6}{2/3} = 180 \text{ MHz}. \tag{11}$$

4. Il valore di y^2_{dB} corrispondente all'SNR_{dB} dato è:
$$y^2_{dB} = SNR_{dB} + 1.76 - 10log_{10}\left(L^2 - 1\right) = 24.5 + 1.76 - 10log_{10}(63) = 26.26 - 18 = 8.26 \text{ dB}. \tag{12}$$
Dalla curva di probabilità d'errore della Figura 1 si ricava che in corrispondenza a tale valore si ha $P_e = 10^{-4}$.

5. Ancora dalla curva di probabilità d'errore della Figura 1 si ricava che $P_e = 10^{-8}$ corrisponde a $y'^2_{dB} = 12$ dB. Si ha quindi:
$$y'^2_{dB} = SNR'_{dB} + 1.76 - 10log_{10}\left(L^2 - 1\right), \tag{13}$$
da cui:
$$SNR'_{dB} = y'^2_{dB} - 1.76 + 10log_{10}\left(L^2 - 1\right) = 12 - 1.76 + 18 = 28.24 \text{ dB}. \tag{14}$$
La variazione necessaria è quindi di $SNR'_{dB} - SNR_{dB} = 28.24 - 24.5 = 3.74$ dB.

6. La relazione tra SNR e potenze W_R e W_N è:
$$SNR = \frac{W_R}{W_N} \rightarrow SNR_{dB} = W_{R,dBm} - W_{N,dBm}. \tag{15}$$
Si ha quindi:
$$W_{R,dBm} = SNR_{dB} + W_{N,dBm} = 28.24 + (-93.2) = -64.96 \text{ dBm}. \tag{16}$$

7. Il legame tra potenza trasmessa W_T e potenza ricevuta W_R è

$$W_R = \frac{W_T}{A} \to W_{T,dBm} = W_{R,dBm} + A_{dB}, \tag{17}$$

da cui si ricava:

$$A_{dB} = W_{T,dBm} - W_{R,dBm} = 10log_{10}\left(0.01 \cdot 10^3\right) - (-64.96) = 74.96 \text{ dB}. \tag{18}$$

8. La nuova attenuazione complessiva è $A'_{dB} = A_{dB} + 6 = 74.96 + 6 = 80.96$ dB. Il nuovo SNR'_{dB} sarà quindi:

$$SNR'_{dB} = W'_{R,dBm} - W_{N,dBm} = W_{T,dBm} - A'_{dB} - W_{N,dBm} = 10 - 80.96 - (-93.2) = 22.24 \text{ dB}. \tag{19}$$

9. Il nuovo valore y'^2_{dB} corrispondente a SNR'_{dB} è:

$$y'^2_{dB} = SNR'_{dB} + 1.76 - 10log_{10}\left(L^2 - 1\right) = 22.24 + 1.76 - 18 = 6 \text{ dB}. \tag{20}$$

Dalla Figura 1 si vede che la nuova probabilità d'errore è quindi $P'_e \approx 5 \cdot 10^{-3}$.

Esercizio 4

Si consideri un collegamento numerico multilivello in cui la sorgente emette bit a velocità $f_b = 560$ Mb/s. Il filtro di trasmissione è di tipo a coseno rialzato con roll-off $\gamma = 0.5$. Si supponga che il codificatore di trasmissione sia progettato in modo che la sua ridondanza sia nulla e che l'efficienza spettrale sia pari a $\eta = 4$ bit/s/Hz. si chiede di rispondere ai seguenti quesiti.

1. Calcolare la banda del segnale trasmesso;
2. Calcolare il numero di livelli L utilizzato dal codificatore;
3. Calcolare il valore di SNR in ricezione necessario a garantire una $P_e = 10^{-5}$, utilizzando la curva universale della probabilità d'errore in Figura 1.
4. Supponendo che il canale fisico sia caratterizzato da rumore termico con potenza (nella banda del segnale trasmesso calcolata al quesito 1.) pari a $W_N = -86.5$ dBm, calcolare la potenza trasmessa necessaria a garantire l'SNR calcolato al punto precedente se l'attenuazione di potenza introdotta dal canale è pari a $A_{dB} = 70$ dB;
5. A parità di SNR in ricezione, valutare il nuovo valore di P_e se si raddoppia il numero di livelli.

Soluzione

1. L'efficienza spettrale η è definita come:

$$\eta = \frac{f_b}{B}, \tag{21}$$

da cui si ottiene:

$$B = \frac{f_b}{\eta} = \frac{560 \cdot 10^6}{4} = 140 \text{ MHz}. \tag{22}$$

2. Si ha, avendo $\rho = 0$:

$$B = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma) \tag{23}$$

da cui:

$$log_2 L = \frac{f_b}{2B}(1+\gamma) = \frac{560 \cdot 10^6}{2 \cdot 140 \cdot 10^6}(1+0.5) = 2 \cdot 1.5 = 3 \to L = 2^3 = 8. \tag{24}$$

3. Dalla curva universale della probabilità d'errore si ricava che per ottenere una $P_e = 10^{-5}$ è necessario garantire un $y^2_{dB} = 9.54\ dB$. La relazione tra y^2 e SNR è data da:

$$y^2 = \frac{3}{2}\frac{SNR}{L^2 - 1}, \tag{25}$$

che in dB è pari a:

$$y^2_{dB} = SNR_{dB} + 1.76 - 10log_{10}\left(L^2 - 1\right). \tag{26}$$

Ricavando SNR_{dB} si ottiene:

$$SNR_{dB} = y^2_{dB} - 1.76 + 10log_{10}\left(L^2 - 1\right) = 9.54 - 1.76 + 10log_{10}\left(63\right) = 25.8\ dB. \tag{27}$$

4. In generale, si ha che la relazione tra potenza ricevuta W_R e potenza trasmessa W_T è data da:

$$W_R = \frac{W_T}{A} \rightarrow W_T = W_R \cdot A. \tag{28}$$

D'altronde, si ha:

$$SNR = \frac{W_R}{W_N} \rightarrow W_R = SNR \cdot W_N, \tag{29}$$

che in dB diventa:

$$W_{R,dBm} = SNR_{dB} + W_{N_dBm} = 25.8 - 86.5 = -60.7 \text{ dBm}. \tag{30}$$

Riscrivendo in dB anche l'eq.(28) si ha:

$$W_{T,dBm} = W_{R_dBm} + A_{dB} = -60.7 + 70 = 9.3 \text{ dBm}, \tag{31}$$

che corrisponde a $W_T = 8.5$ mW.

5. Mettiamo in evidenza il ruolo di L nel calcolo di y^2:

$$y^2_{dB} = SNR_{dB} + 1.76 - 10log_{10}\left(L^2 - 1\right). \tag{32}$$

la variazione può quindi essere determinata come:

$$\begin{aligned} y^2_{dB} - y'^2_{dB} &= -10log_{10}\left(L'^2 - 1\right) + 10log_{10}\left(L^2 - 1\right) = \\ &= -10log_{10}\left((2L)^2 - 1\right) + 10log_{10}\left(L^2 - 1\right) \approx -10log_{10}\left(4\right) = -6\ dB \end{aligned} \tag{33}$$

Il nuovo valore di y^2 è quindi:

$$y'^2_{dB} = 9.54 - 6 = 3.54\ dB \tag{34}$$

a cui corrisponde (sempre in base alla Figura 1) $P_e \approx 10^{-2}$.
Si noti che per mantenere invariato l'SNR sarà necessario ridurre la potenza, visto che a un aumento di L corrisponderà una riduzione di B e quindi della potenza di rumore W_N.