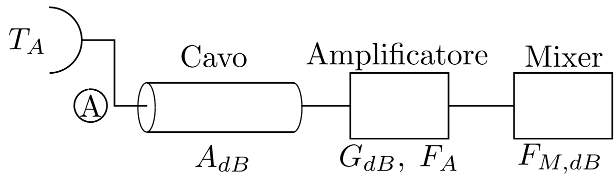
Fondamenti di Comunicazioni Elettriche / Telecomunicazioni
Rumore termico

Luca De Nardis `luca.denardis@uniroma1.it`

Sapienza Università di Roma —29 Ottobre 2024

Esercizio 1

Si consideri il collegamento rappresentato in figura, in cui un'antenna ricevente è collegata tramite una tratta in cavo coassiale a un ricevitore composto dalla cascata di un amplificatore e di un mixer, con $T_A = 20\ K$, $A_{dB} = 1\ dB$, $G_{dB} = 25\ dB$, $F_{M,dB} = 10\ dB$.



Per questo collegamento:

1. Valutare il massimo valore ammissibile per il fattore di rumore dell'amplificatore F_A affinchè la temperatura di rumore di sistema nel punto A sia al massimo pari a $T_s = 155\ K$;
2. Calcolare la temperatura di rumore di sistema T_s' nello stesso punto A se si escludesse l'amplificatore.

Soluzione

1. Si definiscano:
   - $T_{i,C}$ la temperatura di rumore di ingresso del cavo coassiale;
   - $T_{i,A}|_A$ la temperatura di rumore di ingresso dell'amplificatore riportata nel punto A;
   - $T_{i,M}|_A$ la temperatura di rumore di ingresso del mixer riportata nel punto A.

   Si ha allora:
   $$T_s = T_A + T_{i,C} + T_{i,A}|_A + T_{i,M}|_A\,. \tag{1}$$
   Si può quindi scrivere:
   $$T_s = T_A + T_0\,(F_C - 1) + \frac{T_0\,(F_A - 1)}{G_C} + \frac{T_0\,(F_M - 1)}{G_C G}, \tag{2}$$
   dove F_C e G_C indicano rispettivamente figura di rumore e guadagno della tratta in cavo coassiale. Poiché tale tratta può essere modellata come una rete due porte passiva, si ha $F_C = A = 1/G_C$, e

quindi:

$$
\begin{aligned}
T_s &= T_A + T_0\,(A-1) + T_0\,(F_A-1)\,A + \frac{T_0\,(F_M-1)}{G}A = \\
&= 20 + 290\left(10^{\frac{1}{10}}-1\right) + 290\,(F_A-1)\,10^{\frac{1}{10}} + \frac{290\left(10^{\frac{10}{10}}-1\right)}{10^{\frac{25}{10}}}10^{\frac{1}{10}} = \\
&= 20 + 290\,(1.259-1) + 290\,(F_A-1)\,1.259 + \frac{290\,(10-1)}{316.23}1.259 = \\
&= 20 + 75.1 + 365.1\,(F_A-1) + 10.39 = \\
&= 105.5 + 365.1\,(F_A-1)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Imponendo che la temperatura T_s sia pari al valore massimo permesso, si ottiene:

$$
155 = 105.5 + 365.1\,(F_A-1) \;\Rightarrow\; F_A = 1 + \frac{(155-105.5)}{365.1} = 1.136 \;\xrightarrow{dB}\; F_{A,dB} = 0.55\;dB. \tag{4}
$$

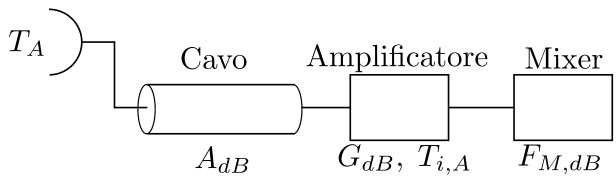
2. In questo caso si ha:

$$
\begin{aligned}
T_s' &= T_A + T_{i,C} + T_{i,M}\big|_A = T_A + T_0\,(F_C-1) + \frac{T_0\,(F_M-1)}{G_C} = \\
&= T_A + T_0\,(A-1) + T_0\,(F_M-1)\,A = 20 + 75.1 + 290\,(10-1)\,1.259 = 3381.1\;K.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

L'elevato guadagno dell'amplificatore è quindi fondamentale per ridurre il contributo di rumore del mixer.

Esercizio 2

Si consideri il collegamento rappresentato in figura, in cui un'antenna ricevente è collegata tramite una tratta in cavo coassiale a un ricevitore composto dalla cascata di un amplificatore e di un mixer, con $T_A = 20\;K$, $A_{dB} = 1\;dB$, $G_{dB} = 25\;dB$, $T_{i,A} = 40\;K$, $F_{M,dB} = 10\;dB$.



Valutare il fattore di rumore complessivo dell'impianto ricevente considerato, supponendo che la tratta in cavo coassiale si trovi a temperatura $T_0 = 290\;K$.

Soluzione

Si ha:

$$
T_s = T_A + (F_{TOT}-1)\,T_0. \tag{6}
$$

Dobbiamo quindi calcolare il fattore di rumore complessivo della rete due porte equivalente alla cascata di cavo, amplificatore e mixer. Si definiscano:

- $T_{i,C}$ la temperatura di rumore di ingresso del cavo coassiale;
- F_A il fattore di rumore dell'amplificatore;
- $T_{i,M}$ la temperatura di rumore di ingresso del mixer.

Volendo calcolare T_s all'ingresso dell'impianto, si ha:

$$T_s = T_A + T_0 \left(F_C - 1\right) + \frac{T_0 \left(F_A - 1\right)}{G_C} + \frac{T_0 \left(F_M - 1\right)}{G_C G} = T_A + T_0 \left(A - 1\right) + T_0 \left(F_A - 1\right) A + \frac{T_0 \left(F_M - 1\right)}{G} A = \\ = T_A + T_0 \left[\left(A - 1\right) + \left(F_A - 1\right) A + \frac{\left(F_M - 1\right)}{G} A\right]. \tag{7}$$

Il fattore di rumore dell'amplificatore F_A è pari a:

$$F_A = 1 + \frac{T_{i,A}}{T_0} = 1 + \frac{40}{290} = 1.138. \tag{8}$$

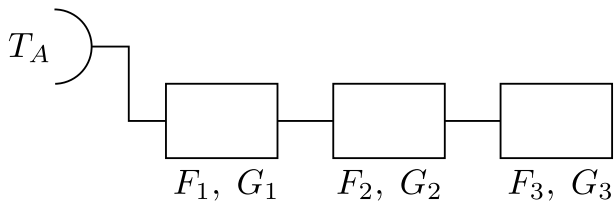
Sostituendo questo valore e gli altri già noti in (7) si ottiene:

$$\begin{aligned} T_s &= T_A + T_0 \left[\left(10^{\frac{1}{10}} - 1\right) + (1.138 - 1)\, 10^{\frac{1}{10}} + \frac{\left(10^{\frac{10}{10}} - 1\right)}{10^{\frac{25}{10}}} 10^{\frac{1}{10}}\right] = \\ &= T_A + T_0 \left[(1.259 - 1) + (1.138 - 1)\, 1.259 + \frac{(10 - 1)}{316.23} 1.259\right] = \\ &= T_A + T_0 \left(0.259 + 0.1737 + 0.0358\right) = T_A + T_0 \left(0.468\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Per confronto con la (6) si può quindi scrivere:

$$F_{TOT} - 1 = 0.468 \ \rightarrow \ F_{TOT} = 1.468 \ \xrightarrow{dB} \ F_{TOT,dB} = 1.66 \ dB. \tag{10}$$

Si noti che in generale per il sistema in figura seguente:



si ha:

$$T_s = T_A + \left(F_{TOT} - 1\right) T_0 = T_A + T_0 \left(F_1 - 1\right) + \frac{T_0 \left(F_2 - 1\right)}{G_1} + \frac{T_0 \left(F_3 - 1\right)}{G_1 G_2} \tag{11}$$

e quindi:

$$F_{TOT} - 1 = \left(F_1 - 1\right) + \frac{\left(F_2 - 1\right)}{G_1} + \frac{\left(F_3 - 1\right)}{G_1 G_2} \tag{12}$$

da cui

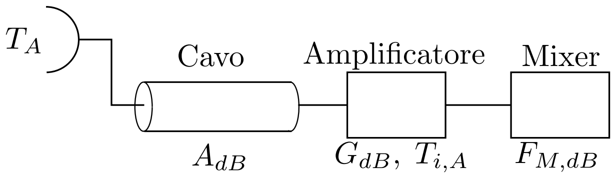
$$F_{TOT} = F_1 + \frac{\left(F_2 - 1\right)}{G_1} + \frac{\left(F_3 - 1\right)}{G_1 G_2}, \tag{13}$$

e in generale per il caso di N reti due porte in cascata:

$$F_{TOT} = F_1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{\left(F_i - 1\right)}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j}. \tag{14}$$

Esercizio 3

Si consideri il collegamento rappresentato in figura, in cui un'antenna ricevente è collegata tramite una tratta in cavo coassiale a un ricevitore composto dalla cascata di un amplificatore e di un mixer, con $T_A = 20\ K$, $A_{dB} = 1\ dB$, $G_{dB} = 25\ dB$, $T_{i,A} = 40\ K$, $F_{M,dB} = 10\ dB$.
Valutare la temperatura di sistema all'ingresso dell'impianto ricevente considerato, supponendo che la tratta in cavo coassiale si trovi a temperatura $T_0 = 290\ K$.



Soluzione

Si ha:

$$T_s = T_A + (F_{TOT} - 1)\, T_0. \tag{15}$$

In questo caso si ha per F_{TOT}:

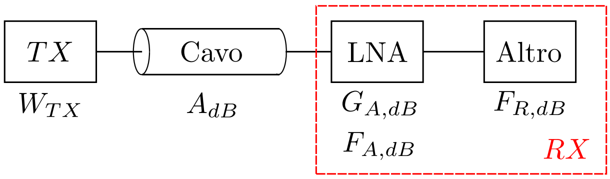
$$\begin{aligned} F_{TOT} &= F_C + \frac{(F_A - 1)}{G_C} + \frac{(F_M - 1)}{G_C G_A} = A + \frac{T_{i,A}}{T_0} A + \frac{(F_M - 1)}{G_A} A = \\ &= A \left[1 + \frac{T_{i,A}}{T_0} + \frac{(F_M - 1)}{G_A} \right] = 1.259 \left[1 + \frac{40}{290} + \frac{(9)}{316.23} \right] = 1.468. \end{aligned} \tag{16}$$

Si ha quindi:

$$T_s = 20 + (1.468 - 1)\, 290 = 155.86\ K. \tag{17}$$

Esercizio 4

Si consideri un collegamento in cui al trasmettitore la sequenza di bit emessa da una sorgente a velocità $f_b = 8\ Mb/s$ è posta in ingresso a un modulatore multilivello a L livelli seguito da un filtro di trasmissione a coseno rialzato con roll-off γ. Il segnale così ottenuto è posto in ingresso a un cavo coassiale. Si assuma che l'intero impianto di trasmissione possa essere modellato come un generatore di segnale con potenza disponibile pari a $W_{TX,dBm} = 0\ dBm$. Il cavo tra trasmettitore e ricevitore è modellabile come una rete due porte che introduce un'attenuazione disponibile pari a $A_{dB} = 85\ dB$.
L'impianto di ricezione può essere modellato come la cascata di un amplificatore a basso rumore (Low Noise Amplifier) e di un blocco che racchiude tutti i componenti a valle di tale amplificatore, come mostrato nella seguente figura:



dove si ha $F_{A,dB} = 1\ dB$, $G_{A,dB} = 10\ dB$ e $F_{R,dB} = 10\ dB$. Il sistema deve essere dimensionato per operare con una probabilità d'errore $P_e \leq 10^{-5}$, corrispondente a un valore di $y^2_{dB} \geq 10\ dB$. Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti.

1. Si calcoli il valore del fattore di rumore totale del ricevitore F_{TOT}.
2. Si indichi quali delle seguenti configurazioni sono ammissibili: a) $L = 2,\ \gamma = 1$ e b) $L = 8,\ \gamma = 0$.

Soluzione

1. Si ha:

$$F_{TOT} = F_A + \frac{(F_R - 1)}{G_A} = 10^{\frac{1}{10}} + \frac{10^{\frac{10}{10}} - 1}{10^{\frac{10}{10}}} = 1.259 + 0.9 = 2.159 \ \rightarrow F_{TOT,dB} = 3.34\ dB. \tag{18}$$

2. Per la configurazione a) si ottiene:

$$B^{a)} = \frac{f_b}{2log_2(L)}(1+\gamma) = \frac{8 \cdot 10^6}{2log_2(2)}(1+1) = 8\ MHz. \tag{19}$$

La potenza di rumore è quindi pari a:

$$W_N^{a)} = \frac{1}{2}kT_s 2B = \frac{1}{2}kF_{TOT}T_0 2B = kF_{TOT}T_0 B, \tag{20}$$

avendo assunto $T_M = T_0$ in assenza di altre indicazioni. Passando ai dB si ha:

$$W_{N,dBm}^{a)} = (kT_0)|_{dBm/MHz} + F_{TOT,dB} + 10log_{10}B_{MHz}^{a)} = -114 + 3.34 + 10log_{10}(8) = -101.66\ dBm. \tag{21}$$

La potenza ricevuta W_{RX} può essere invece ricavata da quella trasmessa e dall'attenuazione disponibile del cavo, ottenendo:

$$W_{RX,dBm} = W_{TX,dBm} - A_{dB} = 0 - 85 = -85\ dBm. \tag{22}$$

Il rapporto segnale a rumore in queste condizioni è quindi pari a:

$$SNR_{dB}^{a)} = W_{RX,dBm} - W_{N,dBm}^{a)} = -85 - (-101.66) = 16.66\ dB. \tag{23}$$

Questo SNR va confrontato con quello minimo necessario per soddisfare la specifica sulla P_e. Si ha:

$$y^2 = \frac{3}{2}\frac{SNR}{L^2-1} \geq 10^{\frac{10}{10}} \ \rightarrow\ SNR \geq \frac{2}{3}\left(L^2-1\right)10 = 20 \ \xrightarrow{dB}\ SNR_{dB} \geq 13\ dB \equiv SNR_{MIN,dB}^{a)}. \tag{24}$$

Poiché $SNR_{dB}^{a)} \geq SNR_{MIN,dB}^{a)}$ la configurazione a) risulta ammissibile.
Passando alla configurazione b), si ha:

$$B^{b)} = \frac{f_b}{2log_2(L)}(1+\gamma) = \frac{8 \cdot 10^6}{2log_2(8)}(1+0) = 1.33\ MHz. \tag{25}$$

Corrispondentemente, la potenza di rumore in questo caso è

$$W_{N,dBm}^{n)} = (kT_0)|_{dBm/MHz} + F_{TOT,dB} + 10log_{10}B_{MHz}b) = -114 + 3.34 + 10log_{10}(1.33) = -109.42\ dBm, \tag{26}$$

più bassa della precedente per via della riduzione della banda del segnale. Di conseguenza il nuovo valore del rapporto segnale a rumore è:

$$SNR_{dB}^{b)} = W_{RX,dBm} - W_{N,dBm}^{b)} = -85 - (-109.42) = 24.42\ dB. \tag{27}$$

Tenendo conto del nuovo valore di L, si ha però:

$$SNR \geq \frac{2}{3}\left(L^2-1\right)10 = \frac{2}{3} \cdot 63 \cdot 10 = 420 \ \xrightarrow{dB}\ SNR_{dB} \geq SNR_{MIN,dB}^{b)} = 26.16\ dB. \tag{28}$$

Poiché $SNR_{dB}^{b)} < SNR_{MIN,dB}^{b)}$ la configurazione b) non risulta ammissibile.

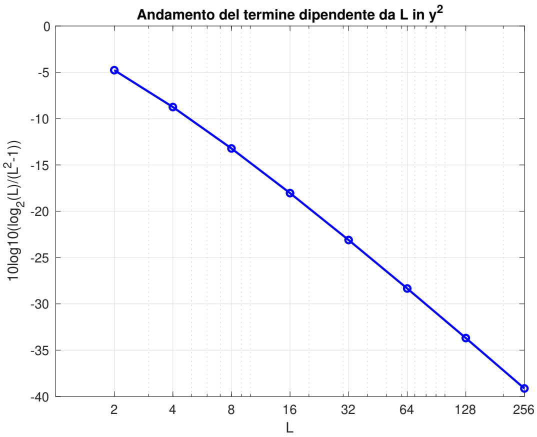
In generale si può osservare che vale la relazione:

$$SNR = \frac{W_{RX}}{W_N} = \frac{W_{RX}}{\frac{1}{2}kT_s 2\frac{f_b}{2log_2(L)}(1+\gamma)} = \frac{W_{RX}}{\frac{1}{2}kT_s\frac{f_b}{log_2(L)}(1+\gamma)}. \tag{29}$$

Sostituendo questa espressione nella relazione che lega y^2 e SNR si ottiene:

$$y^2 = \frac{3}{2}\frac{SNR}{L^2-1} = \frac{3}{2}\frac{W_{RX}}{\frac{1}{2}kT_s\frac{f_b}{log_2(L)}(1+\gamma)}\frac{1}{L^2-1} = \frac{3}{2}\frac{W_{RX}}{kT_s\frac{f_b}{2}(1+\gamma)}\frac{log_2(L)}{L^2-1}, \tag{30}$$

dove l'ultima frazione racchiude il termine di y^2 dipendente da L. Tale termine ha complessivamente l'effetto di ridurre y^2 all'aumento di L a parità di potenza ricevuta W_{RX}, come mostrato in figura (in dB):



Esercizio 5

Un sistema di trasmissione presenta a lato ricezione un'antenna a temperatura T_0, un blocco amplificatore caratterizzato da un guadagno $G_A = 6\,dB$ e da un fattore di rumore $F_A = 4\,dB$, seguito da un filtro con fattore di rumore $F = 6\,dB$. Calcolare il fattore di rumore totale F_{TOT} nel caso descritto e nel caso in cui amplificatore e filtro vengano invertiti di posizione.

Soluzione

Per ricavare il fattore di rumore complessivo è necessario esplicitare la relazione seguente:

$$F_{TOT} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1\,G_2} + \cdots + \frac{F_N - 1}{G_1\,\cdot\cdot G_{N-1}}.$$

Se si applica questa relazione alla configurazione in cui l'amplificatore precede il filtro si ottiene quanto segue:

$$F_{TOT} = 10^{\frac{4}{10}} + \frac{10^{\frac{6}{10}} - 1}{10^{\frac{6}{10}}} \cong 2.5 + \frac{4-1}{4} = 2.5 + \frac{3}{4} = 3.25.$$

Quindi esprimendo F_{TOT} in dB si ha:

$$F_{TOT_{dB}} = 10\,log_{10}\,(3.25) \cong 5.12\,dB.$$

Nel secondo caso l'amplificatore e il filtro vengono invertiti di posizione; la formula da adottare è ovviamente la stessa. Utilizzando i valori in lineare precedentementi ricavati si ottiene:

$$F'_{TOT} = 4 + (2.5 - 1)\,4 = 10,$$

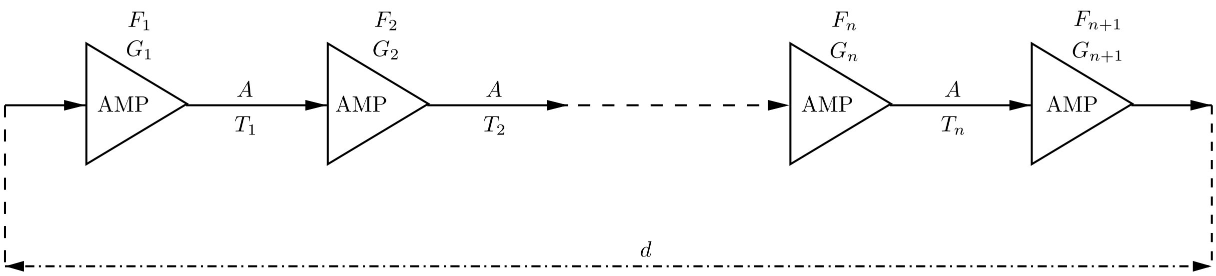
ovvero

$$F'_{TOT,dB} = 10\,log_{10}\,(10) = 10\,dB.$$

Si noti come questo secondo caso porti a un valore del fattore di rumore complessivo più elevato e quindi alla conclusione che questa seconda struttura in ricezione sia meno vantaggiosa, almeno in termini di rumore termico, rispetto alla prima. Questo risultato poteva essere facilmente intuito notando che la prima configurazione presenta un amplificatore come primo blocco della catena di ricezione: il guadagno proprio di tale componente ha l'effetto di rendere molto limitato il contributo di rumore fornito dai blocchi successivi. Quest'ultima considerazione ha un impatto di estrema importanza per una sensata realizzazione pratica dell'architettura di ricezione.

Esercizio 6

Sia data una linea di trasmissione di lunghezza $d = 2500\,km$ composta da n tratte T_i ($T_i = T_1 \ldots, T_2 \ldots, T_n$) ciascuna di lunghezza $d_T = \frac{d}{n}$ e attenuazione disponibile A. La linea è schematizzata nella seguente figura.



Ai capi di ogni tratta è inserito un amplificatore unidirezionale di guadagno G_i e fattore di rumore F_i. Si supponga che il guadagno di ogni amplificatore intermedio sia uguale, per ogni frequenza di interesse, all'attenuazione della linea precedente. La linea è supposta a temperatura standard e la condizione di MTP è verificata per ogni tratta. Si chiede di:

1. Determinare la condizione necessaria affinché la linea completa abbia guadagno unitario.
2. Fornire l'espressione del fattore di rumore totale F_{TOT}, supponendo che tutti gli amplificatori successivi al primo abbiano lo stesso fattore di rumore F.

Il segnale che verrà trasmesso sulla linea ha banda $B = 4\,kHz$, e si vuole che la potenza di rumore termico valutata su tale banda all'ingresso della linea non superi il valore $W_{N_{max}} = 10^{-6}\,mW$.
Si supponga inoltre di poter semplificare l'espressione di F_{TOT} prima trovata in $F'_{TOT} = \frac{nAF}{G_1}$ e che siano $F_{dB} = 10\,dB$, $G_{1,dB} = 2\,dB$ e

$$A_{TOT,dB} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,dB} = nA_{dB} = 11500\;dB. \tag{31}$$

In queste condizioni si chiede di:

3. Determinare il minimo numero di amplificatori necessari per soddisfare l'esigenza suddetta e la lunghezza d_T di ogni tratta in questo caso.
4. Determinare il numero di amplificatori che renderebbe minima la potenza di rumore, e la lunghezza di ogni tratta in questo caso, assumendo che l'attenuazione introdotta da ciascuna tratta in dB, A_dB, sia lineare con la sua lunghezza d_T.

Soluzione

1. Gli amplificatori intermedi hanno tutti guadagno pari all'attenuazione disponibile della tratta che li precede. Il numero complessivo degli amplificatori eccede di uno quelle delle tratte della linea, e non è noto il valore del guadagno di potenza degli amplificatori posti agli estremi. La condizione da soddisfare affinché il guadagno complessivo risulti unitario è dunque la seguente:
$$G_1 \cdot G_{n+1} = A.$$

2. Ogni tratta in cui è suddivisa la linea di trasmissione è caratterizzata da un guadagno disponibile pari a
$$G = \frac{1}{A}.$$
Ricordando l'espressione generale per il calcolo del fattore di rumore del ricevitore, ovvero:
$$F_{TOT} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1\,G_2} + \cdots + \frac{F_N - 1}{G_1\,\cdots\,G_{N-1}}, \tag{32}$$

e osservando che nel caso in esame si ha $G_2 = G_3 = \cdots G_n = A$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
F_{TOT} &= F_1 + \frac{A-1}{G_1} + \frac{F_2-1}{G_1\frac{1}{A}} + \frac{A-1}{G_1\frac{1}{A}G_2} + \frac{F_3-1}{G_1\frac{1}{A}G_2\frac{1}{A}}\cdots + \frac{F_{n+1}-1}{G_1\frac{1}{A}\cdots G_n\frac{1}{A}} = \\
&= F_1 + \frac{A-1}{G_1} + \frac{F_2-1}{G_1\frac{1}{A}} + \frac{A-1}{G_1} + \frac{F_3-1}{G_1\frac{1}{A}}\cdots + \frac{F_{n+1}-1}{G_1\frac{1}{A}} = \\
&= F_1 + \frac{A-1}{G_1} + A\frac{F_2-1}{G_1} + \frac{A-1}{G_1} + \cdots + A\frac{F_{n+1}-1}{G_1} = F_1 + \frac{1}{G_1}\left[n\left(A-1\right) + n\left(AF-A\right)\right] = \\
&= F_1 + \frac{1}{G_1}\left[nAF + nA - n - nA\right] = F_1 + \frac{n}{G_1}\left[AF + A - 1 - A\right] = F_1 + \frac{n}{G_1}\left[AF-1\right].
\end{aligned} \tag{33}$$

3. La massima potenza di rumore termico sostenibile nella banda di interesse vale, espressa in dBm, $W_N = -60\,dBm$. Deve dunque essere soddisfatta la relazione seguente:

$$W_N = -174 + F_{TOT_{dB}} + 10log_{10}(4000) = -60\,dBm.$$

Tenendo conto che l'espressione di F_{TOT} è in questo caso approssimabile come

$$F'_{TOT} = \frac{nAF}{G_1},$$

si arriva alla seguente condizione:

$$-174 + 10log_{10}\left(\frac{nAF}{G_1}\right) + 36 = -60 \;\rightarrow\; 10log_{10}\left(n\right) + \frac{A_{TOT,dB}}{n} + F_{dB} - G_{1,dB} = 78, \tag{34}$$

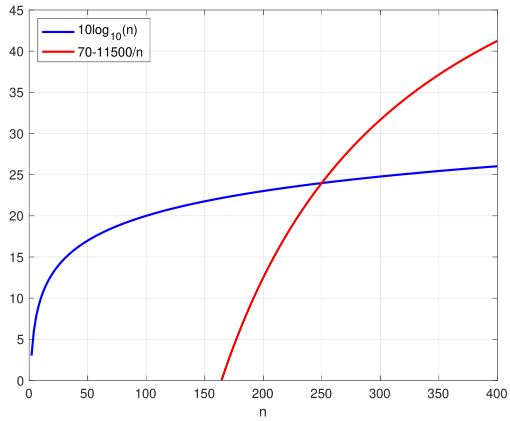
e quindi:

$$10log_{10}\left(n\right) + \frac{11500}{n} = 70, \tag{35}$$

da cui si ricava:

$$n = 250,$$

come mostrato in figura.



Di conseguenza la lunghezza di ogni tratta è:

$$d_T = \frac{2500}{250} = 10\,km.$$

4. Dato che in generale si ha:

$$W_{N,dBm} = -174 + 10log_{10}(n) + \frac{11500}{n} + F_{dB} - G_{1,dB} + 10log_{10}(B), \tag{36}$$

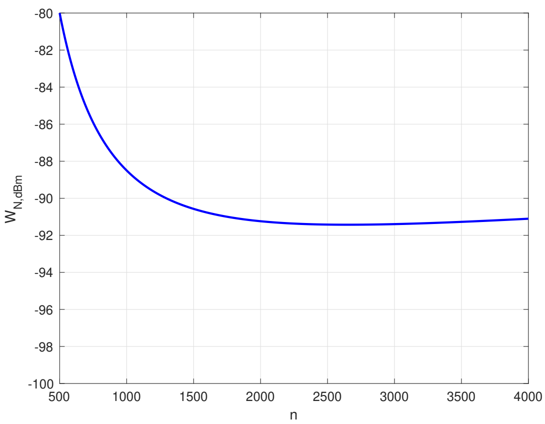
per minimizzare W_N si deve minimizzare, rispetto al valore di n, l'espressione

$$10\,log_{10}(n) + \frac{11500}{n} = 10\frac{log_e(n)}{log_e(10)} + \frac{11500}{n}. \tag{37}$$

Derivando rispetto ad n e eguagliando a zero si ha:

$$\frac{10}{n}\frac{1}{log_e(10)} - \frac{11500}{n^2} = 0 \;\rightarrow\; n = log_e(10)\cdot 1150 = 2.3\cdot 1150 = 2648, \tag{38}$$

come confermato dalla seguente figura che mostra l'andamento di $W_{N,dBm}$ in funzione di n.



Di conseguenza si ottiene:

$$d_T = \frac{2500}{2648} = 0.94\,km.$$

L'andamento di W_N, che diminuisce con n fino a raggiungere un minimo per poi iniziare a crescere di nuovo, è spiegabile osservando che l'inserimento di un nuovo amplificatore contribuirà a ridurre l'effetto del rumore introdotto da tutte le linee successive, ma a sua volta introdurrà un contributo di rumore aggiuntivo causato dall'amplificatore stesso. Sarà quindi vantaggioso introdurre un amplificatore in più solo fino a quando l'abbattimento del rumore ottenuto a valle dell'amplificatore sarà superiore all'aumento del rumore causato dall'amplificatore stesso.