Fondamenti di Comunicazioni Elettriche / Telecomunicazioni
Esercitazione su legame tra banda e ritmo binario

Luca De Nardis luca.denardis@uniroma1.it

Sapienza Università di Roma — 02 Ottobre 2024

Esercizio 1

Si deve realizzare un sistema di trasmissione di voce su doppino telefonico, con un'occupazione di banda complessiva pari a $B_{TOT} = 32$ kHz (16 kHz a frequenze negative e 16 kHz a frequenze positive) in banda base. Per realizzare la connessione il segnale vocale viene fatto passare attraverso un codificatore PCM caratterizzato da una velocità binaria pari a $f_b = 64$ kbit/s. Il flusso di bit in uscita viene poi inviato a un modulatore numerico a L livelli che utilizza un impulso a coseno rialzato con fattore di roll-off $\gamma = 1$. Determinare il minimo numero di livelli L che è necessario utilizzare.

Soluzione

Si ha:

$$B = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma) \tag{1}$$

da cui:

$$log_2 L = \frac{f_b}{2B}(1+\gamma) = \frac{64000}{2 \cdot 16000}(1+1) = 4 \rightarrow L = 2^4 = 16. \tag{2}$$

Esercizio 2

Si consideri un sistema di trasmissione che utilizza la banda base e in cui la velocità di trasmissione binaria risulti $f_b = 150$ Mbit/s. Il fattore di roll-off utilizzato dal filtro a coseno rialzato in trasmissione è unitario. L'occupazione di banda complessiva pari è a $B_{TOT} = 50$ MHz (25 MHz a frequenze negative e 25 MHz a frequenze positive). Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti:

1. Qual è il minimo numero di livelli L che è necessario utilizzare?
2. Se si adotta $\gamma = 0$ con il valore di L determinato al quesito precedente, qual è la banda del segnale B?

Soluzione

1. Si ha, analogamente all'esercizio precedente:

$$B = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma) \tag{3}$$

da cui:

$$log_2 L = \frac{f_b}{2B}(1+\gamma) = \frac{150 \cdot 10^6}{2 \cdot 25 \cdot 10^6}(1+1) = 6 \rightarrow L = 2^6 = 64. \tag{4}$$

2. Il passaggio da $\gamma = 1$ a $\gamma = 0$ permette di dimezzare la banda occupata; in questo caso quindi la banda assume il valore $B' = B/2 = 12.5$ MHz, e l'occupazione totale diventa $B'_{TOT} = B_{TOT}/2 = 25$ MHz.

Esercizio 3

Si consideri un sistema di comunicazione utilizzato per trasferire le informazioni raccolte da un sensore di temperatura che acquisisce un campione ogni T_T secondi. Il sensore rappresenta il campione attraverso un'operazione di quantizzazione utilizzando N_T bit, generando quindi un flusso binario con bit rate $f_b = N_T/T_T$ bit/s. Il flusso binario così ottenuto viene posto in ingresso a un modulatore multilivello a L livelli che adotta un filtro di trasmissione a coseno rialzato con $\gamma = 0.5$. Sapendo che si ha a disposizione una banda $B = 5$ MHz:

1. si calcoli il valore di L che permette di sostenere un bit rate di sorgente $f_b = 20$ Mb/s;
2. assumendo $N_T = 4$ e ancora $f_b = 20$ Mb/s si determini la massima frequenza di raccolta dati $f_T = 1/T_T$;
3. si calcoli il nuovo valore di L, indicato con L', che permette di adottare $f'_T = 15$ MHz, volendo mantenere $N_T = 4$.

Soluzione

1. Si ha:
$$B = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma) \tag{5}$$
da cui:
$$log_2 L = \frac{f_b}{2B}(1+\gamma) = \frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 5 \cdot 10^6}(1+0.5) = \frac{20}{10}(1+0.5) = \frac{30}{10} = 3 \rightarrow L = 8. \tag{6}$$
2. Se si vuole garantire $f_b = 20$ Mb/s e $N_T = 4$ si ottiene:
$$f_T = \frac{1}{T_T} = \frac{f_b}{N_T} = \frac{20 \cdot 10^6}{4} = 5\,\text{MHz}. \tag{7}$$
3. Il nuovo flusso binario in corrispondenza del valore desiderato per f'_T è pari a
$$f'_b = N_T f'_T = 4 \cdot 15 \cdot 10^6 = 60\,\text{Mbit/s}. \tag{8}$$
Il valore corrispondente di L' è:
$$log_2 L' = \frac{f'_b}{2B}(1+\gamma) = \frac{60 \cdot 10^6}{2 \cdot 5 \cdot 10^6}(1+0.5) = 6 \cdot 1.5 = 9 \rightarrow L' = 2^9 = 512. \tag{9}$$

Esercizio 4

Si consideri un sistema di comunicazione numerico con un modulatore multilivello a L livelli e un filtro di trasmissione a coseno rialzato con roll-off γ. Sapendo che il flusso binario posto in ingresso al trasmettitore è pari a $f_b = 15$ Mb/s e che la banda a disposione per il segnale è pari a $B_{max} = 3$ MHz, si chiede di determinare quali delle seguenti configurazioni sono ammissibili:

1. $L = 2$, $\gamma = 1$;
2. $L = 8$, $\gamma = 0.2$;
3. $L = 16$, $\gamma = 0$.

Si indichi inoltre quale tra le configurazioni ammissibili può essere definita come la più efficiente, giustificando la risposta.

Soluzione

Una configurazione sarà ammissibile se la banda B corrispondente ai valori scelti per L e γ è inferiore o uguale a quella massima a disposizione B_{max}. La relazione che utilizzeremo è quindi:

$$B = \frac{f_L}{2}(1+\gamma) = \frac{f_b}{2log_2 L}(1+\gamma). \tag{10}$$

Per le tre configurazioni proposte si ha:

1. $B_1 = \frac{15\cdot 10^6}{2log_2(2)}(1+1) = 15\,\text{MHz} \to B_1 > B_{max} \to$ INAMMISSIBILE;
2. $B_2 = \frac{15\cdot 10^6}{2log_2(8)}(1+0.2) = 3\,\text{MHz} \to B_2 = B_{max} \to$ AMMISSIBILE;
3. $B_3 = \frac{15\cdot 10^6}{2log_2(16)}(1+0) = 1.875\,\text{MHz} \to B_3 < B_{max} \to$ AMMISSIBILE.

Tra le due configurazioni ammissibili la n. 3 può essere definita come la più efficiente in quanto occupa meno banda rispetto all n. 2. Un confronto più accurato richiederebbe però anche di valutare il bit error rate nei due casi, visto che la configurazione 3 è caratterizzata da un valore di L più elevato, che porterà tipicamente a un maggior numero di errori da parte del decisore a soglia.

Esercizio 5

Si consideri un sistema di comunicazioni in cui un modulatore multilivello a L livelli viene utilizzato per trasferire i bit generati da una sorgente binaria. Gruppi di K bit vengono codificati da sequenze di simboli di lunghezza N, con una ridondanza nella conversione pari a ρ. Per $\rho = [0, 0.25, 0.5]$ e $L = [2, 4, 6, 8]$ si chiede di:

1. Determinare l'espressione del rapporto N/K in funzione di L e ρ;
2. Valutare N per $K = 8$;
3. Identificare le combinazioni di ρ e L per cui si ha una riduzione di banda rispetto al caso $L = 2$, $\rho = 0$.

Soluzione

1. La relazione tra N e K può essere ricavata a partire dalla definizione del coefficiente di ridondanza ρ, data da:

$$\rho = \frac{Nlog_2(L) - K}{Nlog_2(L)} \to (\rho - 1)\,Nlog_2(L) = -K \to K = (1-\rho)\,Nlog_2(L) \tag{11}$$

   e infine

$$\frac{N}{K} = \frac{1}{(1-\rho)\,log_2(L)} \tag{12}$$

2. Il valore di N per $K = 8$ al variare di ρ e L è riportato in Tabella 1.

	2	4	6	8
0	8	4	3.095	2.667
0.25	10.667	5.33	4.126	3.556
0.5	16	8	6.186	5.333

Table 1: N per $K = 8$ al variare di ρ in $[0, 0.25, 0.5]$ e L in $[2, 4, 6, 8]$.

3. Per identificare i casi in cui si ottiene una riduzione della banda utilizzata è sufficiente valutare il rapporto $N/K = f_L/f_b$ ed evidenziare i casi in cui è minore di 1. La Tabella 2 che riporta il valore di tale rapporto al variare di ρ e L permette di determinare tali valori.

	2	4	6	8
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2.585}$	$\frac{1}{3}$
0.25	$\frac{1}{0.75}$	$\frac{1}{1.5}$	$\frac{1}{1.939}$	$\frac{1}{2.25}$
0.5	2	1	$\frac{1}{1.792}$	$\frac{1}{1.5}$

Table 2: N/K al variare di ρ in $[0, 0.25, 0.5]$ e L in $[2, 4, 6, 8]$.