Fondamenti di Comunicazioni Elettriche / Telecomunicazioni
Modello circuitale del collegamento

Luca De Nardis luca.denardis@uniroma1.it

Sapienza Università di Roma — 22 Ottobre 2024

Esercizio 1

Un collegamento radio presenta a lato ricezione un'antenna ricevente seguita da un blocco ricevitore. La situazione risulta schematizzabile tramite una connessione generatore carico. La potenza assorbita dal carico risulta pari a $W_{Z_c} = -90\,dBm$, l'impedenza interna del generatore di tensione Z_g è rappresentata dalla serie di un resistore $R_g = 20\,\Omega$ e di un induttore $L_g = 2\,\mu H$. Il segnale captato dall'antenna ricevente è modulato intorno a $f_p = 5\,MHz$. Si considerino tutte le impedenze di valore costante, e pari a quello ottenuto per $f = f_p$.
Supponendo che le impedenze Z_g e Z_c assumano valori tali da soddisfare le condizioni di adattamento, calcolare il valore efficace di tensione caratterizzante il segnale percepito dall'antenna ricevente.

Soluzione

Se le impedenze soddisfano la condizione di adattamento, significa che risulta verificata la seguente uguaglianza:

$$Z_c = Z_g = R_g + i\,2\,\pi\,f_p\,L_g.$$

L'espressione della potenza assorbita dal carico diviene dunque:

$$W_{Z_c} = P_{v_g} \cdot \frac{R_c}{\mid Z_c + Z_g \mid^2} = P_{v_g} \cdot \frac{R_c}{\mid 2\,Z_c \mid^2},$$

da cui, esplicitando l'espressione di Z_c, si ottiene:

$$W_{Z_c} = P_{v_g} \cdot \frac{R_c}{(2\,R_c)^2 + (4\,\pi\,f_p\,L_g)^2}.$$

Per ricavare il valore efficace di tensione richiesto, è necessario conoscere quanto vale P_{v_g} che, a partire dalla precedente relazione, assume l'espressione:

$$P_{v_g} = W_{Z_c} \cdot \frac{(2\,R_c)^2 + (4\,\pi\,f_p\,L_g)^2}{R_c}.$$

Prima di sostituire nell'espressione ora ricavata i valori numerici messi a disposizione dal testo, è necessario convertire opportunamente il valore della potenza assorbita dal carico, che il testo fornisce in dBm, ovvero nell'equivalente logaritmico del $milliWatt(mW)$. Per ottenere il valore della potenza in $Watt(W)$, devono dunque essere eseguiti due distinti passaggi: il primo converte i dBm in mW:

$$W_{Z_c} = 10^{\frac{-90}{10}}\,mW = 10^{-9}\,mW,$$

il secondo converte i mW in W:

$$W_{Z_c} = 10^{-9} \cdot 10^{-3}\,W = 10^{-12}\,W.$$

Ricordando che $L_g = 2 \cdot 10^{-6}\,H$ si ottiene:

$$P_{v_g} = 10^{-12} \cdot \frac{40^2 + (40\,\pi)^2}{20} = 8,7 \cdot 10^{-10}\,V^2.$$

Per ottenere il valore efficace di tensione è sufficiente calcolare la radice quadrata della potenza in V^2 appena ricavata:

$$v_{eff} = \sqrt{P_{v_g}} = \sqrt{8,7 \cdot 10^{-10}} \cong 2,94 \cdot 10^{-5}\, V.$$

Esercizio 2

Un trasmettitore per un sistema di comunicazione radio è schematizzato circuitalmente da un generatore di tensione $v_g(t)$, provvisto della propria impedenza interna Z_g direttamente connesso a un carico Z_c che rappresenta l'antenna trasmittente. Nel caso in esame le due impedenze Z_g e Z_c assumono i seguenti valori:

$$Z_g = 10 + i\, 2\,\pi\, f_p\, L_g\ (\Omega)$$
$$Z_c = 10 - i\, 2\,\pi\, f_p\, L_g\ (\Omega),$$

in cui f_p rappresenta la frequenza portante caratterizzante il sistema di comunicazione considerato, mentre il valore dell'induttanza presente nella parte immaginaria delle due impedenze è $L_g = 3\,\mu H$. Si considerino, come supposto anche in precedenza, tutte le impedenze di valore costante, e pari a quello ottenuto per $f = f_p$.
Calcolare il valore della potenza disponibile e il valore della potenza assorbita dal carico, sapendo che la potenza del generatore ha valore $P_{v_g} = 10^{-3}\, V^2$.

Soluzione

Pur non conoscendo il valore della frequenza portante f_p a cui lavora il sistema, è immediato, dopo un rapido esame dei valori forniti per le impedenze Z_g e Z_c, stabilire che la condizione di Massimo Trasferimento di Potenza risulta verificata. Si ha infatti:

$$Z_g^* = Z_c.$$

Nell'ambito di validità di tale condizione la potenza disponibile del generatore coincide con la potenza effettivamente trasferita al carico Z_c. In particolare:

$$W_{Z_c} = W_{d_g} = \frac{P_{v_g}}{4\, R_g}.$$

La resistenza R_g coincide con la parte reale di entrambe le impedenze del circuito di riferimento e vale quindi $R_g = 10\,\Omega$. Sostituendo tale valore nell'espressione relativa alle due potenze cercate, si ottiene il valore numerico seguente:

$$W_{Z_c} = W_{d_g} = -46\, dBW = -16\, dBm.$$

Si noti che il valore fornito per l'induttanza L_g non risulta rilevante per la risoluzione del quesito.

Esercizio 3

Un'antenna ricevente è rappresentata da un generatore di tensione $v_g(t)$ con la relativa impedenza interna Z_g. La potenza disponibile del generatore di segnale così costituito risulta:

$$W_{d_g} = -80\, dBm,$$

mentre l'impedenza interna del generatore assume l'espressione:

$$Z_g = R_g + i\, 2\,\pi\, f_p\, L_g\ (\Omega),$$

in cui $R_g = 12\,\Omega$, mentre $f_p = 8\, MHz$ rappresenta il valore della frequenza portante utilizzata dallo schema di trasmissione considerato. Si considerino, come supposto anche in precedenza, tutte le impedenze di valore costante, e pari a quello ottenuto per $f = f_p$.
Calcolare il valore efficace della tensione generata da $v_g(t)$.

Soluzione

La potenza disponibile del generatore è un parametro prestazionale che caratterizza il generatore di segnale a prescindere dal valore del carico cui risulta connesso. Essa dipende infatti solo da grandezze relative al generatore stesso:

$$W_{d_g} = \frac{P_{v_g}}{4\,R_g}.$$

Da questa relazione è possibile ricavare l'espressione della potenza del generatore di tensione:

$$P_{v_g} = W_{d_g} \cdot 4\,R_g,$$

la cui radice quadrata risulta coincidere con il valore efficace di tensione richiesto dall'esercizio. Prima di sostituire i valori numerici è necessario convertire opportunamente il valore di W_{d_g} fornito dal testo:

$$W_{d_g} = 10^{\frac{-80}{10}}\,mW = 10^{-8}\,mW = 10^{-11}\,W.$$

Sostituendo nell'espressione in precedenza ricavata per P_{v_g} si ottiene:

$$P_{v_g} = 10^{-11} \cdot 48\,V^2 = 4,8 \cdot 10^{-10}\,V^2.$$

Il valore efficace di tensione è pari alla radice quadrata del valore di potenza appena valutato:

$$v_{eff} = \sqrt{P_{v_g}} = \sqrt{4,8 \cdot 10^{-10}} = 2,2 \cdot 10^{-5}\,V.$$

Esercizio 4

Si consideri la connessione tra un'antenna ricevente e il relativo ricevitore:l'antenna viene rappresentata circuitalmente per mezzo di un generatore $v_g(t)$ provvisto della sua impedenza interna $Z_g(f) = R_g + i\,2\pi\,f\,L_g$, mentre il ricevitore è rappresentato tramite un'impedenza di carico $Z_c(f)$. Il sistema lavora a una portante f_p e la banda B del segnale modulante è tale che $2B \ll f_p$. Si supponga che il valore efficace del segnale ricevuto sia $v_{eff} = 2\,\mu V$, e che la frequenza portante a cui lavora il sistema sia pari a $f_p = 10\,MHz$. Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Nell'ipotesi che $R_g = 30\,\Omega$, e che $L_g = 1\,\mu H$, calcolare la potenza assorbita dal carico in condizioni di MTP.
2. Nell'ipotesi che $R_g = 30\,\Omega$, e che $L_g = 1\,\mu H$, calcolare la potenza assorbita dal carico in condizioni di adattamento.
3. Sotto l'ipotesi che la potenza assorbita dal carico in condizioni di adattamento sia $W_{ad} = -152.1\,dBW$, e che la parte reale dell'impedenza del generatore sia $R_g = 100\,\Omega$, calcolare il valore di L_g.
4. Nell'ipotesi che $R_g = 30\,\Omega$, e che $L_g = 1\,\mu H$, determinare l'espressione del carico in condizioni di MTP, e specificare quali componenti circuitali lo rappresentano, calcolandone il valore numerico.
5. Nell'ipotesi che $R_g = 30\,\Omega$, e che $L_g = 1\,\mu H$, determinare la potenza dissipata su un'impedenza di carico $Z_c = R_g$, e il margine introdotto in caso si decida di operare in condizioni di MTP.

Soluzione

1. La potenza associata al generatore di segnale $v_g(t)$ è data dal quadrato del valore efficace di tensione fornito dal testo. Si ha quindi:

   $$P_{v_g} = (2 \cdot 10^{-6})^2\,V^2 = 4 \cdot 10^{-12}\,V^2.$$

   Essendo valida la condizione di MTP, dovrà risultare:

   $$Z_c = Z_g^*,$$

ed essendo $Z_g = R_g + i\,2\pi\,f_p\,L_g$, dovrà risultare $Z_c = R_g - i\,2\pi\,f_p\,L_g$. Infatti valendo l'ipotesi di banda stretta tutte le impedenze sono considerate costanti e pari al valore assunto in $f = f_p$. Si ottiene quindi:

$$Z_g = 30 + i\,2\pi \cdot 10^7 \cdot 10^{-6} = 30 + i\,62,8\;(\Omega),$$

e, applicando la condizione di MTP, si perviene alla seguente espressione per l'impedenza di carico:

$$Z_c(f) = Z_c = 30 - i\,62,8\;(\Omega).$$

Tutta la potenza disponibile del generatore di tensione viene trasferita al carico, per cui:

$$W_{Z_c} = W_{d_g} = \frac{P_{V_g}}{4R_g} = \frac{4 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 30} \cong -134,8\,dBW = -104,8\,dBm.$$

Si noti che sotto l'ipotesi di banda stretta non si verificano distorsioni nell'applicazione della condizione di MTP, pur non essendo verificata la condizione di adattamento.

2. Essendo verificata, per le impedenze, la condizione di adattamento, deve risultare:

$$Z_c = Z_g.$$

L'espressione della potenza trasferita al carico risulta dunque:

$$W_{Z_c} = P_{v_g} \cdot \frac{R_c}{|\,Z_c + Z_g\,|^2} = P_{v_g} \cdot \frac{R_c}{|\,2\,Z_c\,|^2}.$$

Essendo i valori forniti per R_g e L_g gli stessi del primo quesito, sostituendoli nell'espressione precedente si ottiene:

$$W_{Z_c} = \frac{4 \cdot 10^{-12} \cdot 30}{(2 \cdot 30)^2 + (2 \cdot 62.8)^2} \cong 6.19 \cdot 10^{-15}\,W,$$

da cui

$$W_{Z_c}|_{dBW} \cong -142 dBW \Rightarrow W_{Z_c}|_{dBm} = -112\,dBm.$$

Come si nota la potenza trasferita utilizzando la condizione di adattamento è consistentemente inferiore a quella ottenibile con l'MTP considerata nel caso precedente. La condizione di adattamento è utile per eliminare le distorsioni introdotte dalla dipendenza dalla frequenza nella funzione di trasferimento generatore-carico. In realtà, sotto l'ipotesi di banda stretta, che continua a essere valida, è sempre conveniente, quando possibile, utilizzare la condizione di MTP, in quanto anch'essa non introduce distorsioni nell'ambito dell'ipotesi fatta e permette di trasferire al carico un quantitativo di potenza maggiore.

3. Nel caso in cui ci si trovi in condizioni di adattamento la potenza trasferita al carico dipende dal valore dell'induttanza. Tenendo conto che $Z_c = Z_g$ si ottiene:

$$W_{ad} = \frac{P_{v_g} \cdot R_c}{|\,2\,Z_c\,|^2} = \frac{P_{v_g} \cdot R_c}{|\,2\,R_c + 2\,i\,2\pi\,f_p\,L_g\,|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot 10^{-12} \cdot 100}{(200^2 + (4\pi \cdot 10^7 \cdot L_g)^2)} = 10^{-15,21}\,W,$$

da cui si ricava

$$(4 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot L_g)^2 = 400 \cdot 10^{3,21} - 40000,$$

e si ottiene

$$16 \cdot \pi^2 \cdot 10^{14} \cdot L_g^2 \cong 608724,$$

per cui

$$L_g = \sqrt{3,85 \cdot 10^{-11}} \cong 6,20\,\mu H.$$

4. In condizioni di MTP si ottiene (Quesito 1) che:

$$Z_c = Z_g^* = 30 - i\,62.8.$$

Circuitalmente questo equivale a una serie tra un resistore e un condensatore, di cui è possibile calcolare il valore della capacità C ponendo:

$$\frac{1}{i\,2\pi f C} = \frac{-i}{2\pi f C} = -i\,62,8,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi f C} = 62,8 \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi \cdot 10^7 \cdot 62,8} \cong 253\,pF.$$

5. La potenza trasferita all'impedenza di carico per $Z_c = R_g$ è data dall'espressione:

$$W_{Z_c} = P_{v_g} \cdot \frac{R_g}{\mid 2R_g + i\,X_g \mid^2},$$

in cui $X_g = 2\pi\, f_p\, L_g$. Introducendo i valori forniti dal testo, si ottiene:

$$W_{Z_c} \cong -138\,dBW.$$

Ricordando che nel caso di MTP si otteneva:

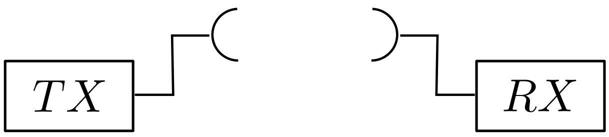
$$W_{Z_c max} = -134.8\,dBW,$$

risulta disponibile un margine

$$M \cong 3\,dB.$$

Esercizio 5

Si consideri il sistema di comunicazione rappresentato in figura e utilizzato per trasferire un segnale a frequenza portante f_p e con banda B tale che $2B \ll f_p$. Si possono assumere tutte le impedenze reali, e



quindi puramente resistive. La rete due porte che modella l'effetto del canale wireless è caratterizzata da un'attenuazione disponibile A_{dB}.
Il processo associato al segnale generato al trasmettitore $v_g\,(t)$ è caratterizzato da una potenza $P_{V_g} = 1$ V^2, mentre per le impedenze relative alle due antenne si ha:

$$\begin{cases} Z_{AT} = R_{AT} = 50\;\Omega \\ Z_{AR} = R_{AR}\,(T) = R_{REF}\,[1 + \alpha\,(T - T_{REF})] \end{cases} \tag{1}$$

con

$$\begin{cases} R_{REF} = 50\;\Omega \\ T_{REF} = 10\;C \\ \alpha = 0.0059 \end{cases} \tag{2}$$

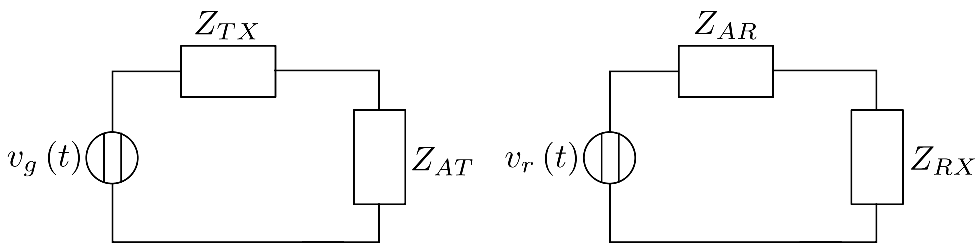
Trasmettitore e ricevitore sono configurati in modo tale da soddisfare le condizoni MTP, e in tali condizioni si ha $A_{dB} = 50\;dB$ quando la temperatura dell'antenna ricevente è $T = T_{REF}$.
Si chiede di valutare la potenza disponibile al ricevitore in due casi:

1. In condizioni nominali ($T = T_{REF}$), calcolando in questo caso anche la tensione efficace del segnale $v_{r,eff}$;

2. In presenza di un surriscaldamento dell'antenna ricevente, con $T = 70\;C$.

Soluzione

Il collegamento considerato in questo esercizio può essere rappresentato dal modello circuitale in figura, composto da due connessioni generatore-carico che rappresentano rispettivamente la connessione trasmettitore-antenna trasmittente e antenna ricevente- ricevitore. La potenza associata al generatore che modella



l'antenna ricevente dipenderà però dall'attenuazione disponibile introdotta dal canale wireless.

1. In queste condizioni si ha che la potenza disponibile del generatore che modella il trasmettitore è interamente trasferita alla rete due porte che rappresenta la cascata di antenna trasmittente, canale e antenna ricevente. Si ha quindi:

$$W_{TX} = W_{d_T} = \frac{P_{V_g}}{4R_g} = \frac{1}{4 \cdot 50} = \frac{1}{200} = 0.005\ W \xrightarrow{dB} W_{T,dBm} = 7\ dBm. \tag{3}$$

La potenza trasferita al ricevitore è quindi pari a:

$$W_{RX} = W_{d_R} = \frac{W_{d_T}}{A} \xrightarrow{dB} W_{RX,dBm} = W_{d_R,dBm} - A_{dB} = 7 - 50 = -43\ dBm. \tag{4}$$

Questa potenza è quella disponibile del generatore che modella l'antenna di ricezione, e quindi si ha:

$$W_{RX} = W_{d_R} = \frac{P_{V_r}}{4R_{AR}} \Rightarrow v_{r,eff} = \sqrt{4R_{AR}W_{d_R}} = \sqrt{4 \cdot 50 \cdot 10^{-7.3}} = 1.58\ \text{mW}. \tag{5}$$

2. La variazione di temperatura porta a una differente R_{AR}. Si ha infatti:

$$R_{AR}(70) = 50\,[1 + 0.0059\,(70 - 10)] = 50\,[1 + 0.0059 \cdot 60] = 50 \cdot 0.354 = 67.7\ \Omega. \tag{6}$$

Poiché varia R_{AR}, varierà anche A della rete due porte che rappresenta il canale e le antenne. Si ha infatti:

$$G = \frac{1}{A} = \frac{|Z_{AT}|^2}{|Z_{AT} + Z_{TX}|^2}\,|H_c|^2\,\frac{R_{TX}}{R_{AR}}. \tag{7}$$

Poiché l'unico elemento che varia è R_{AR}, detto G il guadagno in condizioni nominali e G' quello nelle condizioni considerate, si può scrivere:

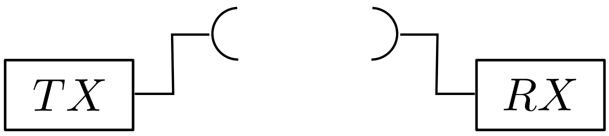
$$\frac{G'}{G} = \frac{K}{R'_{AR}}\frac{R_{AR}}{K}\ \text{con}\ K = \frac{|Z_{AT}|^2}{|Z_{AT} + Z_{TX}|^2}\,|H_c|^2\,R_{TX}, \tag{8}$$

e quindi

$$G' = G\frac{R_{AR}}{R'_{AR}} = G\frac{50}{67.7} = \frac{1}{A}\frac{50}{67.7} \rightarrow A' = A\frac{67.7}{50} = 10^5 \cdot 1.354. \tag{9}$$

Si ha quindi $A'_{dB} = 51.316\ dB$, e si ottiene infine:

$$W'_{R,dBm} = W_{T,dBm} - A'_{dB} = 7 - 51.316 = -44.316\ dBm. \tag{10}$$



Esercizio 6

Si consideri il sistema di comunicazione rappresentato in figura e utilizzato per trasferire un segnale a frequenza portante f_p e con banda B tale che $2B \ll f_p$. Si possono assumere tutte le impedenze reali, e quindi puramente resistive. Il processo associato al segnale generato al trasmettitore $v_g(t)$ ha potenza $P_{V_g} = 1$ V^2 ed è caratterizzato dall'emissione di simboli estratti da un alfabeto a $L = 2$ simboli $\{-V,\ V\}$. In condizioni di adattamento per il MTP nell'intero sistema, la potenza trafserita al ricevitore ha il valore richiesto per rispettare la specifica su SNR e P_e. In queste condizioni si ha $R_{AR} = R_{RX} = 50\ \Omega$.
Si assuma ora di non scegliere correttamente R_{RX}, e di adottare $R_{RX} = 350\ \Omega$, non riuscendo più quindi a rispettare le condizioni MTP in uscita dalla rete. In queste condizioni si calcoli il valore di V che permette di rispettare la specifica sull'SNR data.

Soluzione

La perdita delle condizioni MTP in uscita porterà a una riduzione di W_{Z_c} rispetto al caso di MTP. Dovremo quindi determinare quantitativamente tale riduzione e compensarla incrementando P_{V_g} attraverso l'adozione di una valore più elevato di V.
In condizioni di MTP si ha:

$$W_{Z_c}^{MTP} = \frac{P_{V_r}}{4R_{AR}} = \frac{P_{V_g}}{4R_{AR}} \frac{|Z_{AT}|^2}{|Z_{AT} + Z_{TX}|^2} |H_c|^2 = \frac{P_{V_g}}{4R_{AR}} |H_i|^2 |H_c|^2 . \tag{11}$$

Se si ha $R_{RX} \neq R_{AR}$ si ottiene:

$$W_{Z_c} = P_{V_r} \frac{|Z_{RX}|^2}{|Z_{RX} + Z_{AR}|^2} \frac{R_{RX}}{|Z_{RX}|^2} = P_{V_r} \frac{R_{RX}}{(R_{RX} + R_{AR})^2} = P_{V_g} |H_i|^2 |H_c|^2 \frac{R_{RX}}{(R_{RX} + R_{AR})^2}. \tag{12}$$

Il rapporto tra le due potenze è:

$$\alpha = \frac{W_{Z_c}}{W_{Z_c}^{MTP}} = P_{V_g} |H_i|^2 |H_c|^2 \frac{R_{RX}}{(R_{RX} + R_{AR})^2} \frac{4R_{AR}}{P_{V_g} |H_i|^2 |H_c|^2} = \frac{4R_{AR}}{(R_{RX} + R_{AR})^2}. \tag{13}$$

α misura il peggioramento dovuto al mancato rispetto delle condizioni MTP in uscita. Nel caso in esame si ottiene:

$$\alpha = \frac{4 \cdot 50 \cdot 350}{(50 + 350)^2} = 0.4375. \tag{14}$$

A parità di altre condizioni per compensare il peggioramento si dovrà adottare una nuova potenza P'_{V_g} pari a:

$$P'_{V_g} = \frac{P_{V_g}}{\alpha} = \frac{1}{0.4375} = 2.286. \tag{15}$$

poiché si ha per l'alfabeto considerato $P'_{V_g} = V'^2$, si ottiene:

$$V' = \sqrt{P'_{V_g}} = \sqrt{2.286} = 1.5186 \text{ V}. \tag{16}$$