CITM

Examen de Reevaluación, 5 de Febrero de 2016

MATVJII

Apellidos y Nombre: ______________________________

Ejercicio 1: 1 punto

Se conocen las componentes de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ and $\boldsymbol{v_3}$, en la base $\{A\}$

$$
\begin{aligned}
{}^{A}\boldsymbol{v}_1 &= (1,\, 0,\, 0)^\intercal \\
{}^{A}\boldsymbol{v}_2 &= (1,\, 1,\, 0)^\intercal \\
{}^{A}\boldsymbol{v}_3 &= (1,\, 1,\, 1)^\intercal
\end{aligned}
$$

Los mismos vectores vistos desde una base rotada (sin desplazamiento) $\{B\}$ toman los siguientes valores:

$$
\begin{aligned}
{}^{B}\boldsymbol{v}_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3},\, 0,\, 1\right)^\intercal \\
{}^{B}\boldsymbol{v}_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3},\, 2,\, 1\right)^\intercal \\
{}^{B}\boldsymbol{v}_3 &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1,\, 2,\, 1+\sqrt{3}\right)^\intercal
\end{aligned}
$$

Calcula las componentes del vector $\boldsymbol{p}$ en le marco de referencia $\{B\}$, si se sabe que en $\{A\}$

$$
{}^{A}\boldsymbol{p} = \left(3,\, -2,\, \frac{1}{2}\right)^\intercal
$$

Pista: Usa las propiedades de las transformaciones lineales.

$$
\boxed{{}^{B}\boldsymbol{p} = \qquad\qquad\qquad}
$$

Ejercicio 2: 1 punto

La matriz de rotación

$$
\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.9746 & -.01816 & 0.1309 \\ 0.1309 & 0.9366 & 0.3251 \\ -0.1816 & -0.2998 & 0.9366 \end{pmatrix}
$$

representa una rotación de un ángulo $\phi = 22.5\,\mathrm{deg}$ alrededor de un eje $\boldsymbol{u}$ paralelo al vector $(-2, 1, 1)^\intercal$.

Con estos datos:

 El examen continua en la siguiente página →

1. ¿Cuál es el valor de $\mathbf{R}_1$, la matriz que representa una rotación de $-\phi$ alrededor de $\boldsymbol{u}$.
2. ¿Cuál es el valor de$\mathbf{R}_2$, la matriz que representa una rotación de $-\phi$ alrededor de $-\boldsymbol{u}$.
3. ¿Cuál es el valor de $\mathbf{R}_3$, la matriz que representa una rotación de ϕ alrededor de $-\boldsymbol{u}$.
4. Si ${}^B\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{R}\,(1,\,0,\,0)^\intercal$, ${}^B\boldsymbol{e}_2 = \mathbf{R}\,(0,\,1,\,0)^\intercal$, ${}^B\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{R}\,(0,\,0,\,1)^\intercal$, donde ${}^B\boldsymbol{e}_1$, ${}^B\boldsymbol{e}_2$ y ${}^B\boldsymbol{e}_3$ representan el set de vectores unitarios ortogonales que definen una base $\{B\}$ con respecto a una base inicial $\{A\}$. ¿Cuál es el valor que toma la matriz $\mathbf{R}_4$ que permite expresar un vector conocido en $\{A\}$ en la base $\{B\}$?

$$\mathbf{R}_1 =$$

$$\mathbf{R}_2 =$$

$$\mathbf{R}_3 =$$

$$\mathbf{R}_4 =$$

Ejercicio 3: 1 punto

Se desea rotar el vector $\boldsymbol{p}$ alrededor del eje $\boldsymbol{u}$, $\frac{\pi}{2}$ deg. Se sabe que la proyección de $\boldsymbol{p}$ sobre $\boldsymbol{u}$ viene dada por

$$\boldsymbol{w} = (0,\,3,\,0)^\intercal$$

y que la proyección de $\boldsymbol{p}$ sobre el plano perpendicular a $\boldsymbol{u}$ es

$$\boldsymbol{t} = (-2,\,0,\,1)^\intercal\,.$$

¿Cuál es la imagen de $\boldsymbol{p}$ después de haber sido rotado?

$$\boldsymbol{p}' =$$

 El examen continua en la siguiente página →

Ejercicio 4: 1 punto

Conocido el vector de rotación ("rotation vector") $\boldsymbol{r}$.

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin(\|r\|)}{\|r\|} [\boldsymbol{r}]_\times + \frac{(1-\cos(\|r\|))}{\|r\|^2} [\boldsymbol{r}]_\times^2$$

define la matriz de rotación que permite rotar vectores alrededor de $\boldsymbol{r}$ $\|\boldsymbol{r}\|$ rad.

Escribe la expresión que define su transpuesta y por tanto su inversa, en función de $[\boldsymbol{r}]_\times$ y $\|r\|$.

$$\mathbf{R}^{-1} =$$

Ejercicio 5: 1 punto

Las coordenadas de un punto $\boldsymbol{p}$, expresadas en el marco de referencia de una cámara son ${}^c\boldsymbol{p} = (\beta,\ 3,\ 10)^\intercal$. Si las coordenadas de este mismo punto en el plano de la imagen son ${}^p\boldsymbol{p} = (0.0625,\ 0.0075)^\intercal$, encuentra el valor del parámetro β y de la distancia focal.

$$f =$$

$$\beta =$$

Ejercicio 6: 1 punto

La matriz

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_1 & -0.2655 & -0.2113 \\ a_2 & 0.9640 & -0.0726 \\ a_3 & a_4 & 0.9747 \end{pmatrix}$$

 El examen continua en la siguiente página →

representa una rotación. ¿Qué valor toman a_1, a_2, a_3 y a_4?

$a_1 =$	$a_2 =$
$a_3 =$	$a_4 =$

Ejercicio 7: 1 punto

Dada una matriz de rotación que se calcula en función de sus ángulos de Euler como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & c_\psi s_\theta s_\phi - c_\phi s_\psi & c_\psi c_\phi s_\theta + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\psi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\psi s_\theta - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix},$$

siendo $s_\alpha = \sin(\alpha)$ y $c_\alpha = \cos(\alpha)$, si se sabe que $\sin(\theta) = -1$, ¿Cómo calcularías el valor de ψ, θ y ϕ?

Ejercicio 8: 3puntos

El cuaternión $\mathring{q}_1$ dado por

$$\mathring{q}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\alpha) & \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(\alpha) & 0 \end{pmatrix}^{\intercal}. \tag{3}$$

con $\alpha = 20\,\mathrm{deg}$, representa la orientación de un marco de referencia $\{B\}$ en relación a $\{A\}$, cumpliendo la siguiente relación

$$^{A}\mathring{v} = \mathring{q}_1\, {}^{B}\mathring{v}\, \bar{\mathring{q}}_1 \tag{4}$$

 El examen continua en la siguiente página →

En la misma dirección

$$\mathring{q}_2 = \begin{pmatrix}\cos(\gamma) & -\frac{3}{\sqrt{13}}\sin(\gamma) & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(\gamma)\end{pmatrix}^\intercal . \tag{5}$$

con $\gamma = -35\,\mathrm{deg}$ permite pasar de la base $\{C\}$ a $\{A\}$, a través de

$$^{A}\mathring{v} = \mathring{q}_2\,{}^{C}\mathring{v}\,\bar{\mathring{q}}_2 \tag{6}$$

1. Encuentra el cuaternión $\mathring{q}_3$ que permite transformar un vector definido en $\{C\}$ al marco de referencia $\{B\}$.
2. Encuentra las componentes del vector $\boldsymbol{p}_1$, en el marco de referencia $\{B\}$ si ${}^{C}\boldsymbol{p}_1 = (-3,\, 2,\, 1)$.
3. Encuentra las componentes del vector $\boldsymbol{p}_2$, en el marco de referencia $\{C\}$ si ${}^{B}\boldsymbol{p}_2 = (1,\, 2,\, -3)$.

Pista: $\mathring{r}\mathring{s} = \begin{pmatrix} r_0 s_0 - \boldsymbol{r}^\intercal \boldsymbol{s} \\ r_0\boldsymbol{s} + s_0\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}\end{pmatrix}$

$$\mathring{q}_3 =$$

$${}^{B}\boldsymbol{p}_1 =$$

$${}^{C}\boldsymbol{p}_2 =$$