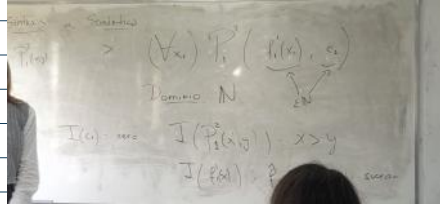


Clase 6- lógica de predicados semántica

domingo, 21 de septiembre de 2025 15:42

En la sintaxis tengo símbolos, en semántica tengo significados. Es algo real que existe.



Para todo natural se cumple que el sucesor del número es mayor a 0 es la forma de entender esa sintaxis. En este caso es verdadero

Los lenguajes tienen sujetos y predicados.

Sujetos son variables, x, c, f : elementos del dominio

Predicados: cosas que pueden evaluarse y ser o no verdad.

Dominio de interpretación: si o si no vacío.

- Universo si puede ser infinito
- Conjunto finito del mundo semántico. Función real: La función tiene que estar definida en nuestro dominio. El sombrerito es que evaluamos la función.
- Conjunto finito P de relaciones: Es una tupla, conjunto de objetos que cumplen con la relación. La cantidad de info es finita.

Nota: Las definiciones de las funciones y relaciones pueden ser extensionales, cuando se efectúan enumerando las tuplas que las componen, o intensionales, si se establecen a partir de otras funciones o relaciones.

➤ $U = \{\text{Alex, Tomás, Catty, Florencia}\} \cup \mathbb{N}$. U es un conjunto de niños y números.

➤ $F = \{\text{edad, altura}\}$

siendo:

edad = $\{(\text{Alex}, 13), (\text{Tomás}, 15), (\text{Catty}, 14), (\text{Flor}, 15)\}$

altura = $\{(\text{Alex}, 174), (\text{Tomás}, 176), (\text{Catty}, 168), (\text{Flor}, 164)\}$

➤ $F = \{\text{juega-básquet, toca-piano, más-alto, más-joven, amigos}\}$

siendo:

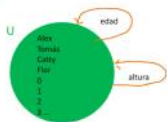
juega-básquet = $\{\text{Tomás}\}$

toca-piano = $\{\text{Alex, Catty}\}$

más-alto = $\{(x, y) \mid \text{altura}(x) > \text{altura}(y)\}$

más-joven = $\{(x, y) \mid \text{edad}(y) > \text{edad}(x)\}$

amigos = $\{(\text{Alex, Catty}), (\text{Alex, Flor}), (\text{Catty, Alex}), (\text{Flor, Tomás})\}$



Que algo sea o no verdad es si pertenece al dominio: ej. tomás juega al basquet porque está en el conjunto ese

➤ Si c es un símbolo de constante, entonces $I(c) \in U$ (los símbolos de constantes representan objetos del universo del discurso).

➤ Si f^n es un símbolo de función de grado n , entonces $I(f^n) = U^n \rightarrow U$ (los símbolos de función representan funciones del dominio).

➤ Si P^n es un símbolo de predicado de grado n , entonces $I(P^n) \subseteq U^n$ (los símbolos de predicado representan relaciones del dominio).

U_2 es el conjunto de tuplas que tiene 2 elementos: 1,1, 1,2 1,3, 2,1, etc.

Ejemplo:

Dado un lenguaje con los símbolos c_x, f_1^2, f_2^2, f_3^2 y P_1^2

Lo interpretamos en un Dominio con:

Universo: \mathbb{N}

$F = \{+, \cdot, <, =\}$

$P = \{=\}$

$I(c_x)$ es el cero de los naturales.

$I(f_1^2)$ es la función sucesor en los naturales.

$I(f_2^2)$ es la función suma en los naturales.

$I(f_3^2)$ es la función multiplicación.

$I(P_1^2)$ es la relación de igualdad.



+ para f_1 , suc para f_2 ,

F_1 es un símbolo de función en la sintaxis (lenguaje). En el mundo semántico es donde spawnear predicados y funciones.

Bajo esta interpretación sobre el dominio de los naturales:

$I(c_x)$ es el cero de los naturales.

$I(f_1^2)$ es la función suma en los naturales.

$I(P_1^2)$ es la relación de igualdad.



Formulamos algunas propiedades:

$(\forall x) P_1^2(f_1^2(x, c_x), x)$. El cero es el neutro de la suma, es decir: $(\forall x)(x + 0 = x)$.

$(\forall x)(\forall y) P_1^2(f_1^2(x, y), f_1^2(y, x))$. La suma es conmutativa, es decir: $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$.

Función suma, predicado igual.

Si bien esta es la interpretación "estándar", nada, salvo el sentido común, nos impide plantear otras interpretaciones de los símbolos. Por ejemplo, podríamos establecer:

$I(f_1^2)$ es la función potencia en los naturales, con potencia $(x, y) = x^y$.

Bajo esta nueva interpretación, entonces, quedaría formulado lo siguiente:

$(\forall x) P_1^2(f_1^2(x, c_x), x)$. El cero es el neutro de la potencia, es decir: $(\forall x)(x^0 = x)$.

$(\forall x)(\forall y) P_1^2(f_1^2(x, y), f_1^2(y, x))$. La potencia es conmutativa, es decir: $(\forall x)(\forall y)(x^y = y^x)$.

Ninguna se cumple en el dominio considerado.

Observemos que:

- Los símbolos son solo símbolos, carentes de «significado».
- Los símbolos obtienen un significado al ser interpretados sobre un Dominio Semántico.
- El mismo símbolo puede interpretarse de distintas formas (no simultáneamente).

El primer ejemplo es verdadero, el segundo no.

Si me pregunto por el valor de verdad de una fórmula si no tengo que darle valores a esas variables.

➤ Analicemos el siguiente caso:

$(\forall x) P_1^2(x, x) \rightarrow (\forall x) P_2^2(x, x)$

¿Podemos afirmar cual es su «valor de verdad» aun antes de interpretar el lenguaje?

➤ Analicemos el siguiente caso:

$(\forall x) P_1^2(y, x)$

Bajo la interpretación sobre el dominio de los naturales con la relación \leq ,

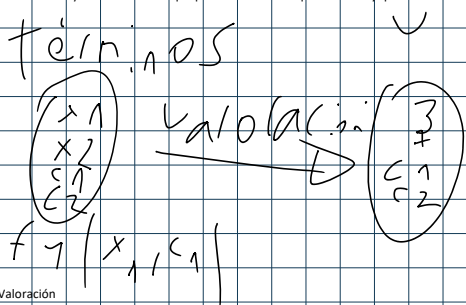
(Para todo número natural x) $y \leq x$

La primera es tautología, siempre verdadera, la segunda no.

Cuando hay variables libres que pueden tomar cualquier valor hay que darle valores a esas variables.

bajo la interpretación sobre el dominio de los naturales con la relación \leq ,
(Para todo número natural x) $y \leq x$

La primera es tautología, siempre verdadera, la segunda no.
Cuando hay variables libres que pueden tomar cualquier valor hay que darle valores a esas variables.



Valoración

Esto se logra por medio de una función denominada **valoración** (en una interpretación).

Una valoración v , queda completamente especificada indicando cómo se valoran los símbolos de variables, es decir $v(x_1), v(x_2), \dots$ dado que se define:

- Si c es un símbolo de constante, $v(c) = I(c)$.
- Si f^n es un símbolo de función, $v(f^n(t_1, \dots, t_n)) = I(f^n)(v(t_1), \dots, v(t_n))$.

Satisfacción:

Fórmula atómica se satisface si y sólo si la tupla pertenece al conjunto de interpretación del predicado

Para denotar que una fórmula A se satisface con una interpretación I y una valoración v , escribiremos

$$I \models_v A$$

La definición inductiva de la satisfacción de una fórmula es la siguiente:

- $I \models_v P(t_1, \dots, t_n)$ si y sólo si $(v(t_1), \dots, v(t_n)) \in I(P)$

La verdad del predicado es que la tupla pertenece a la interpretación del predicado.

Sean A y B fbf's del lenguaje:

- $I \models_v (\neg A)$ si y sólo si no es el caso que $I \models_v A$
- $I \models_v (A \wedge B)$ si y sólo si $I \models_v A$ y $I \models_v B$
- $I \models_v (A \rightarrow B)$ si y sólo si no es el caso que $I \models_v A$ y no $I \models_v B$
- $I \models_v (\forall x) A$ si y sólo si para toda valoración w , i-equivalente, se cumple $I \models_w A$
Es decir que A es verdadera cualquiera sea la valoración de x .
Tengo que probar todas las valoraciones de x y que se satisfaga (sin el para todo)
- $I \models_v (\exists x) A$ si y sólo si para alguna valoración w , i-equivalente, se cumple $I \models_w A$
En este caso alcanza con que A sea verdadera en alguna valoración particular de x .

$$I, v \models (x_1 \leq x_2) \text{ para } v(x_1) = 1, v(x_2) = 2$$

$$I, v \models (x_1 \leq x_2) \text{ para } v(x_1) = 1, v(x_2) = 2$$

$$v(x_1) = 2$$

Por más que en este caso x_1 es 2 y es par, la fórmula no se satisface porque el para todo abarca a todos los N . Las valoraciones no se dan bola cuando tenés un para todo.

Ej la misma fórmula sin el cuantificador si sería verdadera para esa valoración????????// en diase dijeron que ahí sería verdad para la mitad de las valoraciones

Si hay un cuantificador, la valoración individual no me importa

Anexo: i-equivalencias

Una valoración w es i-equivalente a otra valoración v , cuando $w(x_j) = v(x_j)$, para todo j tal que $j \neq i$

	x_1	x_2	x_3
v_1	1	2	1
v_2	3	2	1
v_3	2	2	1

v_1, v_2, v_3 son i-equivalentes entre ellas

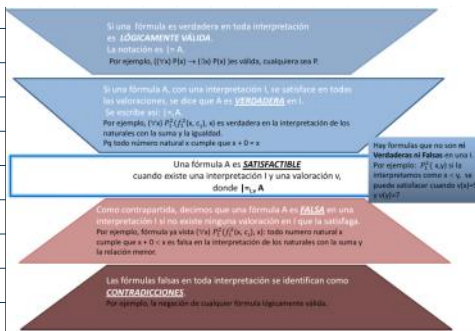
Dominio = $\{1, 2, 3\}$

¿Cuáles son 2-equivalentes a v_1 ?

	x_1	x_2	x_3
v_1	1	2	1
v_2			
v_3			

2-equivalente es ser iguales salvo en el índice i
Es decir: son iguales en todos los valores de las variables, excepto quizás en la variable x_i .
La diferencia puede estar en la coordenada i , pero en las demás deben coincidir.

Cuando tienen variables libres ej x_1 pasa esto de que en algunos casos sí y otros no.



Tipo tautología. Es verdadera SIEMPRE. Sin importar el dominio o la interpretación. El ejemplo es loco y nos diferencia de tautologías porque lo que está ahí es un $p \rightarrow q$ que no sería tautología pero en el contexto en el que estamos si lo es, la semántica nos suma a eso.

Tiene que ser satisficible siempre.

No es verdadera en todos ni falsa en todos pero en algún momento y contexto bien definido se satisface.

Tiene que no haber ninguna valoración que la satisfaga.

Dijo algo de lo que pasa con las variables libres pero no escuché.

Para demostrar que es lógicamente válida tengo que demostrar que es verdadera en toda valoración y todo algo más xd.

\models No significa tiene interpretación, lógicamente válida.

\models Verdadera si se satisface p. todos, no se existe la valoración.

interpretación, valoración $\models \exists x_1 P_1^1(x_1)$ se satisface, no depende de la valoración.

$v(x_1) = 3$

interpretación de P_1^1 : ser primo.

En fórmula, sin el \exists , no sería verdadera.

Creo q' es un mal br el dominio.

para llegar a que una fórmula es lógicamente válida.

\Rightarrow (b) $((\forall x_i) \mathcal{A} \rightarrow (\exists x_i) \mathcal{A})$ es lógicamente válida, cualquiera que sea la fbf \mathcal{A} de \mathcal{L} . Esto se demuestra por un método standard como sigue:

Sea I una interpretación de dominio D_I y sea v una valoración en I . Si v no satisface $(\forall x_i) \mathcal{A}$ entonces v satisface $((\forall x_i) \mathcal{A} \rightarrow (\exists x_i) \mathcal{A})$. Si v satisface $(\forall x_i) \mathcal{A}$, entonces toda valoración v' que sea i -equivalente a v satisface \mathcal{A} . Está claro, entonces, que existe una valoración i -equivalente a v que satisface \mathcal{A} . Así pues, v satisface $(\exists x_i) \mathcal{A}$, por la Proposición 3.29. Así pues, también en este caso v satisface $((\forall x_i) \mathcal{A} \rightarrow (\exists x_i) \mathcal{A})$. Hemos demostrado, pues, que una valoración arbitraria en una interpretación arbitraria satisface la fbf dada, con lo que ésta es lógicamente válida.

• si lo primero fueran falso entonces mi fórmula es v por razón de verdad de $p \rightarrow q$.

• si lo primero se satisface

o bien definición

(iv) v satisface $(\forall x_i) \mathcal{B}$ si toda valoración v' que sea i -equivalente a v satisface \mathcal{B} .

- (i) v satisface la fórmula atómica $A_j^n(t_1, \dots, t_n)$ si $\bar{A}_j^n(v(t_1), \dots, v(t_n))$ se verifica en D_I .
- (ii) v satisface $(\sim \mathcal{B})$ si v no satisface \mathcal{B} .
- (iii) v satisface $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ si v satisface $(\sim \mathcal{B})$ o v satisface \mathcal{C} .
- (iv) v satisface $(\forall x_i) \mathcal{B}$ si toda valoración v' que sea i -equivalente a v satisface \mathcal{B} .

fórmula bien

Cuando tengo $A \rightarrow B$ como valoración = cualquiera y una valoración.

En la lógica de predicados, no podría hacer tablas de verdad de verdad p.g.

En la lujis de predilecto, no podría hacer tablas de veritas Pg.
tengo q probar infinitas cosas,