Clase 2- Frecuencia relativa, espacio muestral finito

lunes, 18 de marzo de 2024 14:43

Frecuencia relativa.

- f_A es proporción de veces q' pasa A en n repeticiones nro e/ 0 y 1
- 1 si siempre, 0 si nunca.
- si A y B son excluyentes, $f_{A \cup B} = f_a + f_b$
- Cuando N tiende a ∞, entonces la frecuencia tiende a estabilizarse en un nro.

Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado con ε. Con cada evento A asociamos un número real llamado probabilidad de A, que anotamos $P(A)$, el cual satisface las siguientes propiedades básicas o *axiomas*

1- $0 \le P(A) \le 1$
2- $P(S) = 1$
3- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ es una secuencia de eventos tales que

$A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \ne j$, entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Propiedades de la probabilidad.

- $P(\emptyset) = 0$
- Siendo A^c el evento complementario de A, $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \le P(B)$
- " " " " $P(B-A) = P(B) - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\boxed{\text{Espacio muestral finito.}}$

Suma de probabilidades de los eventos elementales $= 1$

$P(A_1) + P(A_2) + \ldots = 1$

k veces

Es decir ***si B es un evento de un espacio muestral equiprobable entonces*** $P(B) = \dfrac{\#B}{\#S}$

Casos no equiprobable.

ej:

1- Supongamos que se tira una moneda normal tres veces, y se cuenta el número de caras obtenido luego de los tres tiros. Tomemos como espacio muestral a $S = \{0,1,2,3\}$
¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos dos caras?

0 y 3 solo pasan 1 vez $\{(C,C,C);(S,S,S)\}$

1 y 2 pasan 3 veces $\{(C,S,S);(S,C,S);(S,S,C)\}$

$$\{(C,C,S);\{C,S,C\};(S,C,C)\}$$

entonces, $P(\{0\}) = P(\{3\}) = p$ $\qquad P(\{1\}) = P(\{2\}) = q$

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} q = 3p \\ p + q + p + q = 1 \end{array}\right\} \quad p + 3p + p + 3p = 1$$

$$8p = 1$$

$$q = \frac{3}{8} \qquad p = \frac{1}{8}$$

$$p = \frac{1}{8} \qquad P(B) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = p + q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

B = Al menos salen 2 caras

Casos equiprobables

sin orden

2- En el caso de espacios muestrales equiprobables es necesario recordar las ***técnicas de conteo*** para calcular el número de elementos de un conjunto sin enumerar sus elementos.
Por ejemplo:

Se tiene una urna con 15 bolillas distinguibles (pueden estar numeradas), de las cuales 10 son blancas y 5 son rojas. Se extraen ***al azar*** dos bolillas de la urna,

a) ¿cuál es la probabilidad de extraer todas blancas?
b) ¿cuál es la probabilidad de extraer exactamente una bolilla blanca?
c) ¿cuál es la probabilidad de extraer al menos una bolilla blanca?

Supongamos que se extraen las dos bolillas ***sin reemplazo*** y ***no importa el orden*** en que son extraídas.

S = todas las combinaciones de 2 bolillas q puedo hacer con 15 cosas

$$S = \binom{15}{2} = 105$$

a- A = "Las dos bolillas son blancas" $\qquad$ #A → casos en q' pasa A $= \binom{10}{2}$

$$P(a) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}}$$

b - B = "Se saca 1 bolilla blanca" $\qquad$ #A → $\binom{10}{1} \cdot \binom{5}{1}$ (saco una blanca; saco 1 roja)

$$P(b) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{\ldots}}$$

$$P(b) = \frac{\binom{\cdot}{1} \cdot \binom{\cdot}{1}}{\binom{1\cdot}{2}}$$

c - C = "sab al menos 1 blanca"

C_1 = sab 1 blanca $\qquad$ C_2 = sab 2 blancas

$$C_1 \cup C_2 = C$$

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \rightarrow P(C) = P(C_1) + P(C_2)$$

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{15}{2}}$$

- Con orden

Son ahora todos los pares distintos, $(1;14) \neq (14;1)$

a - A = "Las dos bollas son blancas"

$$P(A) = \frac{10 \times 9}{14 \times 15}$$

b - B = "Se saca 1 bolla blanca"

1 = sab primero blanca y después roja . 2 = al reves. → son mutuamente excluyentes.

$$P(B) = \frac{10 \times 5 + 5 \times 10}{14 \times 15}$$

→ 10 formas de elegir bolla blanca

→ 5 formas de elegir una roja.

$$P(1) + P(2) = P(B)$$

c - C = "sab al menos 1 blanca"

1 = sab 1 blanca $\qquad$ 2 = sab 2 blancas

$$P(C) = P(1) + P(2) \qquad P(1) = \frac{10 \times 5 + 5 \times 10}{10 \times 15}$$

$$P(2) = \frac{10 \times 9}{10 \times 15}$$

$$P(2) = \frac{10 \times 9}{10 \times 15}$$

C^c = "No sea ninguna blanca"

$$C^c = \frac{5 \times 4}{10 \times 15} \qquad 1 - C^c = P(C)$$

4- Si ahora ***importa el orden*** en que son extraídas las bolillas y además la extracción se hace ***con re emplazo*** (se extrae una bolilla y se la devuelve a la urna antes de extraer la siguiente), entonces *S* es el conjunto de pares *(a,b)* donde ahora puede ocurrir que $a = b$.
En este caso $\#S = 15 \times 15$, y calculamos

$$P(A) = \frac{10\times 10}{15\times 15} \quad ; \quad P(B) = \frac{10\times 5 + 5\times 10}{15\times 15} = \frac{2(10\times 5)}{15\times 15} \quad ; \quad P(C) = 1 - P(C^C) = 1 - \frac{5\times 5}{15\times 15}$$