# Práctica 5

martes, 7 de octubre de 2025 09:33

**Ejercicio 1.** Señalar las ocurrencias libres o ligadas de $x_1$, $x_2$, $x_3$ en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde $C = \{c\}$, $F = \{f, g\}$, y $P = \{A\}$, con $f$ de aridad 2; $g$ de aridad 1, $A$ de aridad 2. Determinar cual es una fbf abierta y cual es cerrada.

Una **ocurrencia de variable** está **ligada** si aparece dentro del alcance de un cuantificador que la nombra (∃x o ∀x).
Si no está dentro de ningún cuantificador que la ligue, su ocurrencia es **libre**.
Una **fórmula cerrada** no tiene variables libres.
Una **fórmula abierta** tiene al menos una variable libre.

I. $(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2 x_3)) \rightarrow (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3))$ → ABIERTA

$(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3))) \rightarrow (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3)$ → ABIERTA.

**Ejercicio 2-** Determinar si las siguientes fbfs escritas en algún LO1 son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.

i- (∃x)(¬P(x)) v (∀x)(P(x) v Q(x))

ii- (∃y)(∃x) A(x,y) → (∃x)(∃y) P(x,y)

iii- (P(c) v ((∀x) P(x) → Q(x)) → Q(c)

i. ¿$\models_{I,V} A$? (para ver si es satisfacible)

**(∃x)(¬P(x)) v (∀x)(P(x) v Q(x))**

$P^I(x)$: x es 5  v(x) = 5

$Q^I(x)$: x es 4

Dom: naturales

se cumple → es satisfacible.

¿$\models_I A$? verdadera

Si porque como tenemos v de ¬P(x) y P(x) siempre va a cumplirse.

en el ejemplo de interpretación de antes, aunque v(x) = 6 se cumple

**(∃x)(¬P(x)) v (∀x)(P(x) v Q(x))** ¿Puede ser falso?

si P(x) es falso, entonces se cumple ¬P(x).

si " es verdadero, entonces se cumple P(x) v Q(x)

es lógicamente válida.

**ii- (∃y)(∃x) A(x,y) → (∃x)(∃y) P(x,y)**

¿$\models_{I,V} A$?

Si, si tomo algo q' hace A(x,y) falso, es todo verdadero.

Ej: $A(x,y)$: el resultado de $x+y$ es 10. $x=5$, $y=7$.

¿F; A? No. es fácil encontrar un caso en q' antecedente V y conclusión falsa.

Ej: $A(x,y)$: el resultado de $x+y$ es 10. $p(x,y)$: el resultado de $x+y$ es 12.

$x=5$, $y=5$.

$\boxed{\text{Satisfactible.}}$

iii- (P(c) v ((∀x) P(x) → Q(x))) → Q(c)

¿F, V, A?

Sí, con solo hacer $p(c)$ verdadero y $q(c)$ verdadero.

$p(c)$: c es par $Q(c)$: c no impar.

$c=100$.

¿F; A?

No. $p(c)$: c es par $Q(c)$: c es 9s

$c=100$.

**Ejercicio 3-** Una fbf p(x1, …, xn) escrita en algún LO1 se dice que **caracteriza** a un conjunto C ∈ $D^n$ (con D dominio de alguna interpretación), si y sólo si para toda valuación v se cumple que v(p(x1, …., xn)) = V si y sólo si (x1, …, xn) ∈ C.

Sea N una interpretación clásica sobre los números Naturales.

i- Escribir una fbf en algún LO1 que caracterice a los números pares.

$P(x)$ : $(\exists y)$ $y+y=x$

ii- Escribir una fbf en algún LO1 que caracterice a los números primos.

$p(x)$ : $x>1 \wedge (\forall a,b)(x=a\times b \rightarrow (a=1 \vee b=1))$

$\boxed{\text{mn.}}$

iv- Escribir una fbf que caracterice al máximo común divisor entre dos números a y b.

**Ejercicio 4-** Si la fbf: A(x) es satisfactible en alguna interpretación I, entonces la fbf: (∀x) A(x) es lógicamente válida?. Fundamentar.

No porque para que sea lógicamente valida tiene que ser satisfactible en todas sus interpretaciones

**Ejercicio 5-** La fbf: (∀x) P(x,y) es lógicamente válida?. Fundamentar.

No. Contraejemplo: p(x,y): x-y=0

**Ejercicio 6.** Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

- Conjunto de constantes: $C = \{c\}$
- Sin símbolos de función: $F = \{f\}$
- Conjunto de símbolos de predicado: $P = \{A\}$.

con f y A de aridad 2. Sea $I$ la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los ***números Naturales*** incluyendo el cero; la constante c se interpreta como el cero, f como la suma, y A como menor o igual.

- $I(c) = 0$
- $I(A(x, y)) = "x \leq y"$

Escribir, en los casos en los que sea posible (fundamentar la imposibilidad):

i- una fbf falsa en N, pero no contradictoria.

$\forall(x,y)\ A(x,y)$

ii- una fbf satisfactible en N, pero no verdadera en N.

$A(x,y)$

iii- una fbf verdadera en N, pero no satisfactible en N.

No se puede porque para que sea verdadera debe ser satisfactible en todos los casos.

iv- una fbf verdadera en N, pero no lógicamente válida.

$\exists(x,y)\ A(x,x)$

**Ejercicio 7**- Sea un LO1 con el símbolo de constante c, la letra de función binaria f y la letra de predicado binaria P. Sean Z y N las interpretaciones clásicas de los Enteros y los Naturales respectivamente. En ambos contextos, c se interpreta como el cero, f como la suma y P como menor-estricto. Ofrecer, de ser posible (fundamentar inexistencia en caso contrario) tres fbfs en el lenguaje, que sean:

i- Satisfactible en N y verdadera en Z.
ii- Verdadera en Z y falsa en N.
iii- Verdadera en Z y en N , pero no lógicamente válida.

$I(c) = 0$

$I(f(x,y)) = "x + y"$

$I(P(x,y)) = "x < y"$

i. $\exists x\ P(c < x)$

ii. $\exists x\ P(x, c)$

iii. $\exists x,y\ P(x,y)$

**Ejercicio 8-** Es posible escribir en algún LO1 una fbf lógicamente válida y abierta?. Ofrecerla por la afirmativa, fundamentar la negativa.