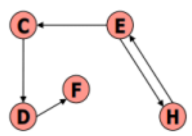
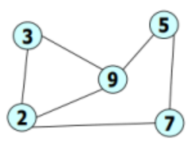
Clase 11 - Grafos

martes, 16 de mayo de 2023 15:24

- Grafos → modelo p. representar relaciones e/ elem en un conjunto.
- Grafo (V, E) V es un conj. de vértice o nodos con una rel. e/ ellos.
  E es un conj. de pares (u, v), u, v ∈ V llamados aristas o arcos
- Aristas → conectores, vértices → datos.
- Grafo dirigido: Relación asimétrica (par ordenado)
- Grafo no dirigido: Relación simétrica (par no ordenado)

Ejemplos





Grafo dirigido G(V,E).
V = {C,D,E,F,H}
E={(C,D),(D,F),(E,C),(E,H),
(H,E)}

pares ordenados

CD ≠ DC

Grafo no dirigido G(V,E).
V = {2,3,5,7,9}
E= {{2,3},{2,7},{2,9},{3,9},
{5,7},{5,9}}

→ 2,3 = 3,2, por eso llaves (conjuntos)

- *v es **adyacente** a u si existe una arista (u,v) ∈ E.*
  - *en un grafo no dirigido, (u,v) ∈ E **incide** en los nodos u, v.*
  - *en un grafo dirigido, (u,v) ∈ E **incide** en v, y **parte** de u.*

F ady a D
D no ady a F

→ Arista incide en ambos

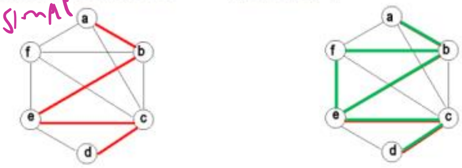
2 ady, 7 a 2

u → v

- *En grafos no dirigidos:*
  - *El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él.*
- *En grafos dirigidos:*
  - *existen el grado de salida (**grado_out**) y el grado de entrada (**grado_in**).*
    - *el **grado_out** es el número de arcos que parten de él y*
    - *el **grado_in** es el número de arcos que inciden en él.*
  - *El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.*
- ***Grado de un grafo**: máximo grado de sus vértices.*

- **Camino** desde $u \in V$ a $v \in V$: secuencia $v_1, v_2, \dots, v_k$ tal que $u=v_1$, $v=v_k$, y $(v_{i-1},v_i) \in E$, para $i = 2, \dots ,k$.
  Ej: camino desde **a** a **d** → <a,b,e,c, d>.

simple



→ repite nodos

simple? no

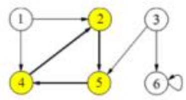
- **Longitud de un camino**: número de arcos del camino.
  Ejs: long. del camino desde **a** a **d** → <a,b,e,c,d> es 4. (a)
  long. del camino desde **a** a **d** → <a,b,e,f,b,e,c,d> es 7. (b)

•Camino simple: si todos los v_i intermedios no se repiten

1ro y ult. se pueden repetir

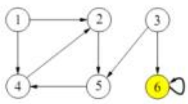
- **Ciclo**: camino desde $v_1, v_2, \dots, v_k$ tal que $v_1=v_k$
  Ej: <2,5,4,2> es un ciclo de longitud 3.

salgo y vuelvo al =

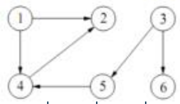


El ciclo es simple si el camino es simple.

- **Bucle**: ciclo de longitud 1.

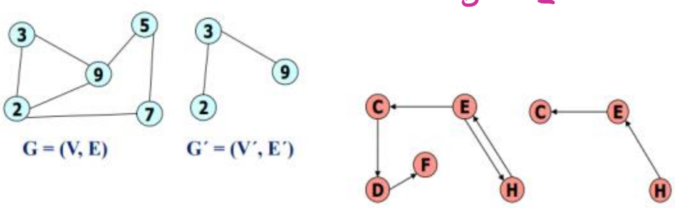


- **Grafo acíclico**: grafo sin ciclos.



- Dado un grafo $G=(V, E)$, se dice que $G'=(V', E')$ es un **subgrafo** de G, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

→ está incluido o es =

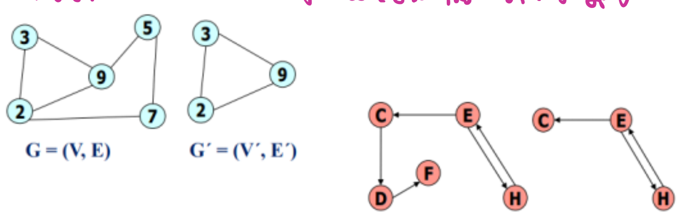


G = (V, E) G′ = (V′, E′)

G = (V, E) G′ = (V′, E′)

- Un **subgrafo inducido** por $V' \subseteq V$: $G' = (V',E')$ tal que $E' = \{(u,v) \in E \mid u,v \in V'\}$.

todas las aristas de E q' conectan los vértices de V

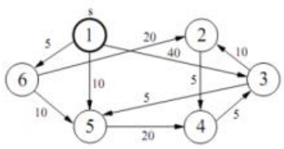


G = (V, E) G′ = (V′, E′)

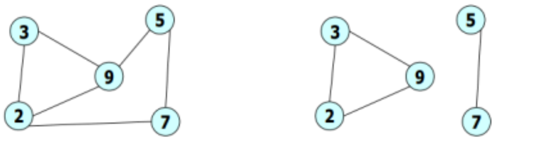
G = (V, E) G′ = (V′, E′)

lo = q' en el ant. pero sí o sí con todas las aristas.

- Un grafo **ponderado, pesado o con costos**: cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta. (Ejemplos 2 y 4)

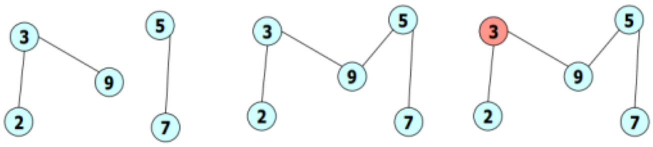


- Un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices.



Conexo   No Conexo

- Un **bosque** es un grafo sin ciclos.
- Un **árbol libre** es un bosque conexo.
- Un **árbol** es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.



Bosque   Árbol libre   Árbol

- Sea G un grafo no dirigido con **n** vértices y **m** arcos, entonces

$$\sum_{v \in G} deg(v) = 2*m$$

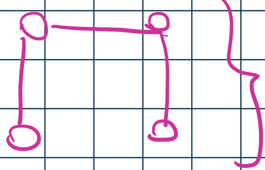
✓ Siempre: siempre q' no haya loops. $m \leq (n*(n-1))/2$ → todos los vértices conectados con todos

✓ Si G conexo: $m \geq n-1$

✓ Si G árbol: $m = n-1$

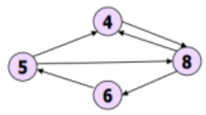
✓ Si G bosque: $m \leq n-1$ → si es =, 1 árbol, si es <, varios á.

si grafo dirigido: $m \leq \frac{n*n}{2}$

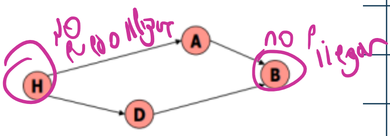


si es conexo, $(m \geq n-1)$

- *v es **alcanzable desde** u, si existe un camino de u a v.*
- *Un grafo dirigido se denomina **fuertemente conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice*



Fuertemente Conexo

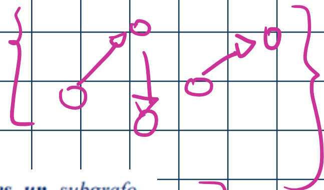


No Fuertemente Conexo
Débilmente Conexo

- *Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.*

solo dirigidos

grafo dirigido → fuertemente conexo
→ débilmente " [si al sacarle flechas es conexo]
→ nada

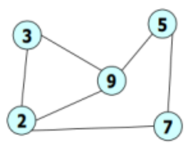


*En un grafo no dirigido, una **componente conexa es un** subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

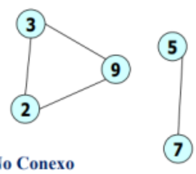
*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*

NO DIRIGIDO



Conexo

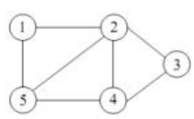


No Conexo

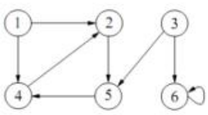
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *G =(V ,E): matriz A de dimensión |V |×|V |.*
- *Valor a_{ij} de la matriz:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

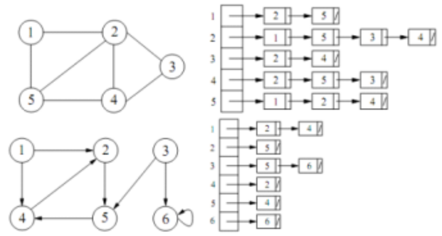


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

- *Costo espacial: O (|V|²)*
- *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos (|E|≈|V|×|V|)*
- *Comprobar si una arista (u,v) pertenece a E → consultar posición A(u,v)*
  - *Costo de tiempo T(|V|,|E|) = O(1)*

Representaciones: Lista de Adyacencias

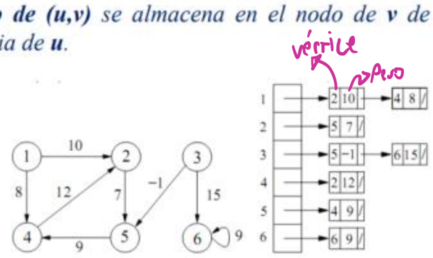
- *G =(V ,E): vector de tamaño |V|.*
- *Posición **i** → puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).*
  *Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a **i***

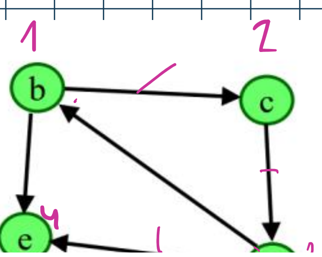


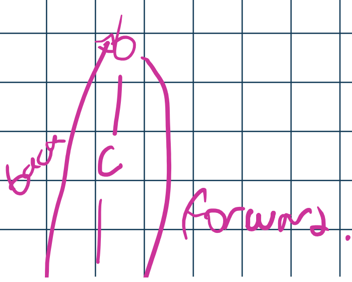
- *Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será |E|.* → Cant. de elem de E
- *Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será 2|E|.*
- *Costo espacial, sea dirigido o no: O (|V|+|E|) .*
- *Representación apropiada para grafos con |E| menor que |V|².*
- ***Desventaja**: si se quiere comprobar si una arista (u,v) pertenece a E ⇒ buscar **v** en la lista de adyacencia de u.*
  - *Costo temporal T (|V|,|E|) será O (Grado G) ⊆ O (|V|).*

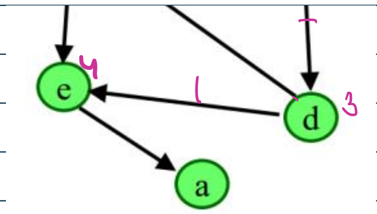
Representaciones: Lista de Adyacencias

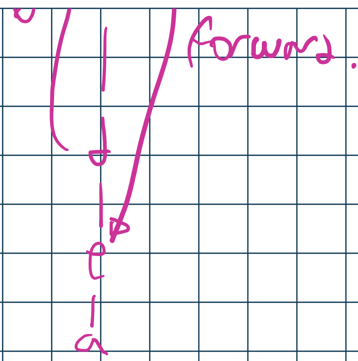
- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El **peso de (u,v)** se almacena en el nodo de **v** de la lista de adyacencia de **u**.*





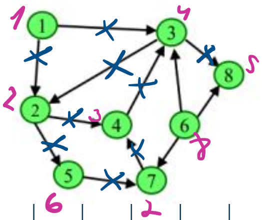






Ejercicio 1:

Dado el siguiente grafo dirigido, en el bosque abarcador del DFS realizado a partir del vértice 1: 1, 2, 4, 3, 8, 5, 7, 6, habrá ....

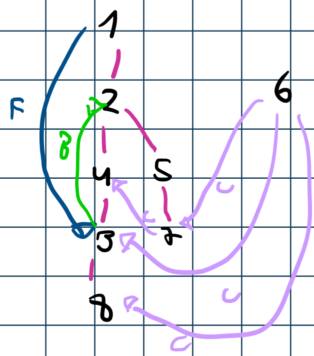


a) 1 arco de avance

b) 2 arcos de avance

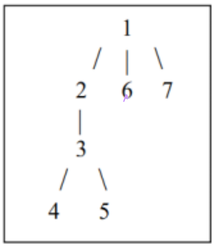
c) más de 2 arcos de avance

d) Ninguna de las opciones



Ejercicio 2:

El recorrido en profundidad de un grafo G no dirigido ha producido el árbol que se muestra en la figura, en el que cada nodo está numerado siguiendo el orden de visita del recorrido en profundidad.



Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) El nodo 6 es adyacente al nodo 4.

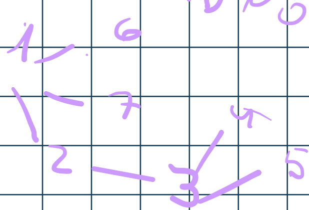
(b) El nodo 2 puede ser adyacente al nodo 5, y el nodo 4 puede ser adyacente al nodo 1.

(c) El nodo 6 y 7 no son adyacentes, y el nodo 5 y el nodo 7 si lo son.

(d) El nodo 1 sólo puede ser adyacente a los nodos 2, 6 y 7.

(e) Se trata de un grafo fuertemente conexo.

A) NO



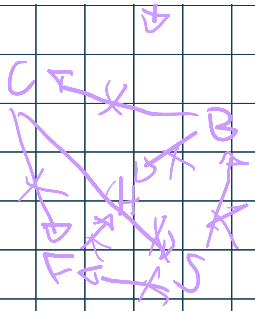
B) NO

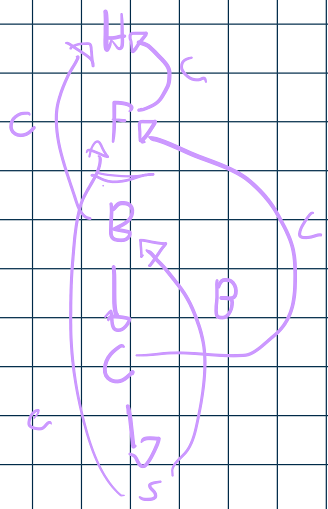
c) ninguno es ady.

d) Si

e) NO pq no dirigido.

H
F
B
S
C





H F

B C S

00