Práctica 2

lunes, 25 de marzo de 2024 18:14

1) Se lanza un par de dados normales. Hallar la probabilidad de que la suma de sus números sea 10 o mayor si
   a) aparece un 5 en el primer dado
   b) aparece un 5 en uno de los dos dados por lo menos.

a - A = Aparece un 5 en el 1er dado

B = La suma de los números es ≥ 10

$P(a) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)$

$P(A) = \frac{6}{36}$

$(5,5),(5,6),(6,5),(6,6),(4,6),(6,4)$

$P(B) = \frac{6}{36}$

$\frac{1}{3}$

b - A = Hay un 5 en cualquiera de los lados.

$P(A) = \frac{11}{36}$

$P(b) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}} = \boxed{\frac{6}{11}}$

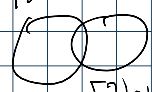
2) Se lanzan 3 monedas normales. Hallar la probabilidad de que sean todas caras si
   a) la primera de las monedas es cara
   b) una de las monedas es cara

a. A = La primera es cara $\longrightarrow (C,S,S),(C,S,C),(C,C,C),(C,C,S) \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

B = "Son todas caras" $\longrightarrow \frac{1}{8}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

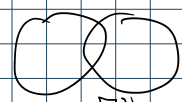
$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$



b. A = una es cara. $\longrightarrow P(A) = \frac{7}{8}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \boxed{\frac{1}{7}}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$



A = exactamente 1 es cara $\longrightarrow P(A) = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B) = 0$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{3}{8}} = \boxed{0}$

3) Se escogen dos dígitos al azar del 1 al 9. si la suma es par, hallar la probabilidad de que ambos números sean impares.

$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9)$

A = la suma es par $\longrightarrow (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9) = 5$ pares $\times 5 = 25$

B = Ambos números son impares $\frac{41}{81}$

$(2,2),(2,4),(2,6),(2,8) = 4 \times 4 = 16$

$\frac{41}{81}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{25}{81}}{\frac{41}{81}} = \boxed{\frac{25}{41}}$

$P(A \cap B) = \frac{25}{81}$

$1,3,5,7,9 \times 5$

4) Sean los eventos A y B con P(A) = ½ , P(B) = 1/3 y P(A ∩ B) = ¼. Hallar:
a) P(A/B) ; b) P(B/A) ; c) P(A ∪ B) ; d) $P(A^C / B^C)$; e) $P(B^C / A^C)$

$P(A)=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{1}{3}$ $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

a) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{4}}$

b) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6+4-3}{12}=\boxed{\frac{7}{12}}$

d) $P(A^c|B^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)}$

$P(A^c)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(B^c)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(A^c\cap B^c)=(A\cup B)^c=\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{3}{4}$

$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\boxed{\frac{5}{8}}$

e) $P(B^c|A^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(A^c)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{10}{12}=\boxed{\frac{5}{6}}$

5) Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si se escogen 3 estudiantes de la clase al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean todos niños?

$\frac{12\cdot 11\cdot 10}{16\cdot 15\cdot 14}=\boxed{\frac{11}{28}}$

A_i: el estudiante de la selección i es niño. $i=1,2,3$

$P(A_1)=\frac{12}{16}$ $P(A_2|A_1)=\frac{11}{15}$ $P(A_3|A_1\cap A_2)=\frac{10}{14}$

$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)=\frac{11}{28}$

teorema de multip.

6) Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 blancas. Se saca una bola de la urna y se reemplaza por una del otro color. Se saca de la urna una segunda bola.
a) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea roja
b) Si ambas bolas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

a. A = la primera es roja, A^c = la primera es blanca.

B = la segunda es roja

$A \cup A^c = S$

$A \cap A^c = \emptyset$

$P(A) > 0$; $P(A^c) > 0$

$A^c \cap B$ y $A \cap B$ son mutuamente excluyentes.

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) + P(A^c)$$

Prob. total.

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{7}{10}$$

$P(A) = \frac{3}{10}$ $P(A^c) = \frac{7}{10}$

$P(B|A) = \frac{2}{10}$ $P(B|A^c) = \frac{4}{10}$

b.

$$P(A^c \cap B^c) \,|\, (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) = \frac{P\big(((A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)) \cap (A^c \cap B^c)\big)}{P((A^c \cap B^c) \cup (A \cap B))}$$

→ Prob condicional.

7) Una ciudad tiene dos carros de bomberos que operan en forma independiente. La probabilidad de que un carro específico esté disponible cuando se lo necesite es 0.96.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté disponible cuando se les necesite?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un carro de bomberos esté disponible cuando se le necesite?

A = "está disponible A" B = "está disponible B".

A y B son independientes

$P(A^c \cap B^c) \xrightarrow{\text{Teorem. multip.}} = P(A^c) \cdot P(B^c)$

$1 - P(A) \cdot 1 - P(B)$

$0{,}04 \cdot 0{,}04 = \boxed{\frac{1}{625}}$

$P(A \cup B) \xrightarrow{\text{Regla de unión}} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

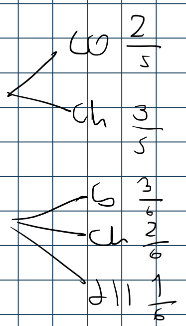
$0,96 + 0,96 - (P(a) \cdot P(b)) = \boxed{\frac{624}{625}}$

8) Una caja contiene 2 caramelos de coco y 3 de chocolate. Una segunda caja contiene 3 caramelos de coco, 2 caramelos de chocolate y 1 de dulce de leche. Si se saca un caramelo al azar de cada caja, encuentre la probabilidad de que
a) ambos caramelos sean de coco.
b) ningún caramelo sea de coco.
c) los dos caramelos sean diferentes.

a. A: "el primer c. es de coco"

B: "el segundo es de coco"

A y B son independientes



$$(A \cap B) \xrightarrow{\text{x regla de multip.}} P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

b. $(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$

$1 - P(A) \cdot 1 - P(A)$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{6}{15}}$

c. A = se saca de choco de la caja i   B = si saca de coco de la caja i

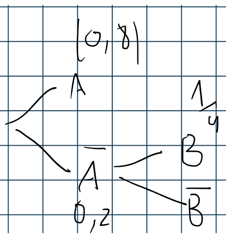
C = si saca de ddl

$P(C) = P(A_1 \cap B_2) \cup P(A_1 \cap C) \cup P(B_1 \cap C) \cup P(B_1 \cap A_2)$ ← son mutuam. excluyentes prop. unión + prop multip.

$P(A_1) \cdot P(B_2) + P(A_1) \cdot P(C) + P(B_1) \cdot P(C) + P(B_1) \cdot P(A_2)$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6}$

9) En una prueba de opción múltiple, un estudiante contesta una pregunta que ofrece cuatro posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que la probabilidad de que el estudiante sepa la respuesta a la pregunta es 0.8 y que conteste al azar es 0.2
a) Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente la pregunta?
b) Si contesta correctamente la pregunta. Cuál es la probabilidad de que realmente sepa la respuesta correcta?



A = "el estudiante sabe la respuesta"

B = "el estudiante elige la respuesta correcta al azar"

$\bar{A}$ — B, $\bar{B}$

$0{,}2$ $\quad \frac{3}{4}$

$P(a) = P(A) \cup P(A^c \cap B)$ $\quad$ $P(A)$ y $P(A^c \cap B)$ son mutuam. excluyentes.

$0{,}8 + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$ → teorema multip.

$0{,}8 + \frac{1}{4} \cdot (1 - 0{,}8)$

$0{,}8 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = \boxed{\frac{17}{20}}$

→ Bayes

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

C = "Contesta bien la pregunta"

$P(C) = \frac{17}{20}$

$$\frac{1 \cdot 0{,}8}{\frac{17}{20}} = \boxed{\frac{16}{17}}$$

10) Se lanza cinco veces un dado normal. Hallar la probabilidad de que:

a) en ninguna tirada salga el 1
b) salga el 1 una sola vez.
c) salga el 1 al menos una vez.

a. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = \#S$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \#A$

A = NO sale el 1 en ninguna tirada.

$\frac{3125}{7776} \approx \boxed{0{,}4}$

b. B = "sale 1 vez el 1"

$\#B = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ → pq puede salir en cualquier momento.

$\frac{\#B}{\#S} = \frac{3125}{7776} \approx \boxed{0{,}4}$

c. C = "sale el 1 al menos 1 vez"

$\#C = 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$

$\frac{\#C}{\#S} = \frac{6480}{7776} = \boxed{\frac{5}{6}}$

11) a) Si $P(A / B) = 0.4$, $P(B) = 0.8$ y $P(A) = 0.6$, ¿puede decirse que los eventos A y B son independientes?

b) Si, $P(A / B) = 0.3$, $P(B) = 0.8$ y $P(A) = 0.3$, ¿puede decirse que los eventos A^C y B son independientes?

a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ → si son independientes.

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ → si son independientes.

$P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$ → hipótesis.

$\frac{3}{25} \neq \frac{12}{25}$

NO, son dependientes. A su vez, por definición $P(A|B) = P(A)$ para que sean independientes.

b. SI, son independientes por definición.

12) En una cierta estación de servicio, el 40% de los clientes utilizan nafta normal sin plomo, 35% utilizan nafta extra sin plomo, y el 25% utilizan nafta premium sin plomo. De los clientes que consumen nafta normal, solo 30% llenan sus tanques, de los que consumen nafta extra, 60% llenan sus tanques, en tanto que de los que usan premium, 50% llenan sus tanques.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida nafta extra sin plomo y llene su tanque?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque?

c) Si el siguiente cliente llena el tanque, ¿cuál es la probabilidad de que pida nafta normal?.

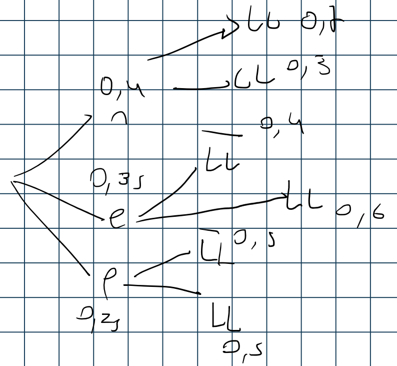
d) ¿Qué propiedades utiliza para resolver los incisos a), b) y c)?

A = 40% → normal → 30% llenan

B = 35% → extra → 60% llenan

LL = LLENO

C = 25% → premium → 50% llenan.



a – $P(B \cap LL) =$

$P(LL|B) \cdot P(B)$ → prop. multip.

$0,6 \cdot 0,35 = \boxed{\frac{21}{100}}$

b – $P(LL) =$

$P(LL|A) \cdot P(A) + P(LL|B) \cdot P(B) + P(LL|C) + P(C)$

teorem. prob. total. $0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,35 + 0,5 \cdot 0,25$

$A \cup B \cup C = S$ $\frac{3}{25} + \frac{21}{100} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{91}{200}}$

c – $P(A|LL) =$

condicional $\frac{P(A \cap LL)}{P(LL)}$ = teorema multiplicación

$P(A \cap LL) = P(LL|A) \cdot P(A)$

$P(A \cap LL) = 0,3 \cdot 0,4$

$P(A \cap LL) = \frac{3}{25}$

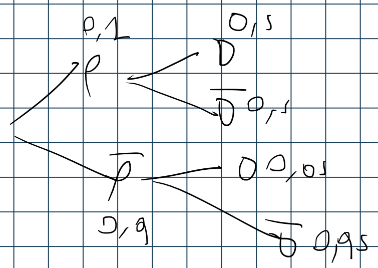
→ BAYES

$P(A|LL) = \frac{P(LL|A) \cdot P(A)}{P(LL)}$

$\frac{0,3 \cdot 0,4}{\frac{91}{200}} = \boxed{\frac{24}{91}}$

$$P(A|LL) = \frac{P(A \cap LL)}{P(LL)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{91}{200}} = \frac{24}{91}$$

13) El 10% de los chips informáticos vendidos en el mercado son producidos por una empresa "pirata".
Para un chip "pirata" la probabilidad de que sea defectuosos es del 50% mientras que si el chip no es "pirata" la probabilidad de que sea defectuoso desciende al 5%.
a) Definir los sucesos convenientes, junto con sus probabilidades.
b) Determinar el porcentaje total de chips defectuosos que salen al mercado.
c) Se compra un chip y resulta ser defectuoso. Calcular la probabilidad de que proceda de la empresa "pirata".



P = "El chip es pirata" $P(P) = 0,1$

$P(\overline{P}) = 0,9$

D = "El chip es defectuoso"

b. $P(D) = P(D|P) \cdot P(P) + P(D|\overline{P}) \cdot P(\overline{P})$

prob. total

$0,5 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,9$

$\boxed{\frac{19}{200}}$

BAYES

c. $P(P|D) = \dfrac{P(D|P) \cdot P(P)}{P(D)}$

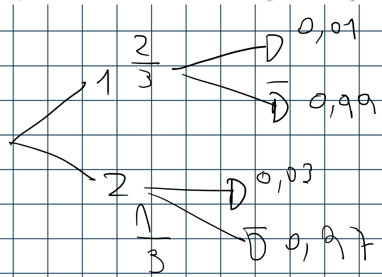
$$\frac{0,5 \cdot 0,1}{\frac{19}{200}} = \frac{10}{19}$$

14) Se utilizan dos líneas de producción para empaquetar azúcar en bolsas de 5 kg. La línea 1 produce el doble de bolsas que la línea 2. Uno por ciento de las bolsas de la línea 1 están defectuosas ya que no cumplen con una especificación de calidad, mientras que 3% de las bolsas de la línea 2 están defectuosas. Se elige aleatoriamente una bolsa para inspeccionarla.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la línea 1?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?
c) Si la bolsa está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de la línea 1?

d) Si la bolsa no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de la línea 1?

1 – "Sale de línea 1" D = "es defectuosa"

2 – " " " 2 "



a – $P(1) = \frac{2}{3}$

b – $P(D) = P(D|1) \cdot P(1) + P(D|2) \cdot P(2)$

prob. total

$0,01 \cdot \frac{2}{3} + 0,03 \cdot \frac{1}{3}$

$\boxed{\frac{1}{60}}$

Bayes

c – $P(1|D) = \dfrac{P(D|1) \cdot P(1)}{P(D)}$

$$\frac{0,01 \cdot \frac{2}{3}}{} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{0{,}01 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{60}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$B \cap 1$

ד - $P(1 \mid \overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \mid 1) \cdot P(1)}{P(\overline{D})}$

$$\frac{0{,}99 \cdot \frac{2}{3}}{}$$

[illegible] $\leftarrow P(\overline{D} \mid 1) \cdot P(1) + P(\overline{D} \mid 2) \cdot P(2)$

$$\frac{0{,}99 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}99 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}97 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$\frac{\frac{33}{50}}{\frac{59}{60}} = \boxed{\frac{198}{291}}$$