Práctica 6- Clase

jueves, 23 de mayo de 2024 10:39

1) Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población X, que $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. Sean

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i \qquad \text{y} \qquad \bar{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ?. Explique su elección.

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \qquad \hat{\mu}_2 = \bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot E\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) =$$

$$\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} E(x_i) = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\mu$$

$$\frac{1}{\cancel{n-1}}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot\mu = \mu$$

$\hat{\mu}_1$ es insesgado.

$$\hat{\mu}_2 = \bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot\mu = \mu \rightarrow \text{insesg.}$$

Como ambos son insesgados, busco el de menor

Como ambos son insesgados, busco el de menor varianza.

$$V(\mu_1) = V\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \Rightarrow \text{linealidad.}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2} \cdot V\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i)$$

$$V(\mu_1) \; \frac{1}{(n-1)^2} \cdot (n-1) \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}$$

$$V(\mu_2) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$$

$$V(\mu_2) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \; + \text{chico.}$$

2) Sea $X_1, X_2, ..., X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_7}{7} \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2} \qquad \hat{\Theta}_3 = \frac{2X_1 - X_7 + X_3}{3}$$

a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?
b) Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.
c) ¿Cuál estimador es el "mejor"?. ¿En qué sentido es mejor?

A

$$E(\hat{\Theta}_1) = E(x_1 + x_2 + \ldots + x_7)$$

$$E(\hat\theta_1) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_7}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{7} \cdot E(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots)$$

$$= \frac{1}{7} \cdot E(x_1) + E(x_2) + \dots$$

$$= \frac{1}{7} \cdot 7\mu = \mu \qquad \hat\theta_1 \text{ es insesgado para } \mu$$

$$E(\hat\theta_2) = E\left(\frac{2x_1 - x_6 + x_4}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot E(2x_1 - x_6 + x_4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (E(2x_1) - E(x_6) + E(x_4))$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2\mu - \mu + \mu)$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\mu = \mu \qquad \hat\theta_2 \text{ es insesgado para } \mu.$$

$$E(\hat\theta_3) = E\left(\frac{2x_1 - x_7 + x_3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot E(2x_1 - x_7 + x_3)$$

$$\frac{1}{3} (E(2x_1) - E(x_7) + E(x_3))$$

$$\frac{1}{3} \cdot (2\mu - \mu + \mu)$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2\mu \Rightarrow \hat\theta_3 \text{ } \underline{\text{NO}} \text{ es insesgado para } \mu.$$

$\frac{1}{3} \cdot 2\mu \rightarrow \hat{\theta}_3$ no es insesgado para μ.

(B) $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + b(\hat{\theta})^2$

$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

$b(\hat{\theta}_1) = 0$, $b(\hat{\theta}_2) = 0$

$b(\hat{\theta}_3) = \frac{2}{3}\mu - \theta$

$= \frac{2}{3}\mu - \mu = \boxed{-\frac{1}{3}\mu}$

$V(\hat{\theta}_1) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right)$

$V(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{7^2} \cdot V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \ldots$

$V(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{7^2} \cdot 7 \cdot \sigma^2$

$V(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$

$V(\hat{\theta}_2) = V\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right)$

$= \frac{1}{2^2} \cdot V(2X_1 - X_6 + X_4)$

$\frac{1}{\ } \cdot (V(2X_1) + (-1)^2 \cdot V(X_6) + \sigma^2$

$$\frac{1}{2^2} \cdot \left(V(2x_1) + (-1)^2 \cdot V(x_0) + \sigma^2 \right)$$

$$\frac{1}{2^2} \cdot \left(2^2 \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 \right)$$

$$\frac{1}{2^2} \cdot 6\sigma^2 = \frac{3}{2}\sigma^2$$

$$V(\hat{\theta}_3) = V\left(\frac{2x_1 - x_2 + \cancel{x}_3}{3} \right)$$

$$V(\hat{\theta}_3) = \frac{1}{3^2} \left(V(2x_1) + (-1)^2 V(x_2) + V(x_3) \right)$$

$$= \frac{1}{3^2} \cdot \left(2^2 \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3^2} \cdot \left(6\sigma^2 \right)$$

$$V(\hat{\theta}_3) = \frac{2}{3}\sigma^2$$

$$ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + b(\hat{\theta})^2$$

$$ECM(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$ECM(\hat{\theta}_2) = \frac{3}{2}\sigma^2$$

$$ECM(\hat{\theta}_3) = \frac{2}{3}\sigma^2 + \left(-\frac{1}{3} \mu \right)^2$$

$$\frac{2}{3}\sigma^2 + \frac{\mu^2}{9}$$

$$\frac{5}{3}\theta + \frac{\mu^2}{9}$$

El mejor es $\hat{\theta}_1$ porque tiene mejor ECM.

4) El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan: 2 , 5 , 3 , 3 , 7 desconexiones accidentales.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ. ¿El estimador es insesgado?, ¿es consistente?

b) Obtenga la estimación de λ a partir de la muestra dada.

c) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encuentre la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.