Clase 3 - variables aleatorias

sábado, 13 de abril de 2024 21:29

$f(x)$ = fun. de probabilidad $\rightarrow f(x) = P(X \leq x)$

var aleatoria

$F(x)$ = distribución acumulativa $\rightarrow F(x) = P(X \leq x)$ → valor.

probabilidad de q' variable aleatoria discreta sea < o = q' un valor dado.

7 Sea X el número de gatitos vendidos en un día en una veterinaria. Encontrar la función de distribución acumulativa de X a partir de su función de probabilidad.

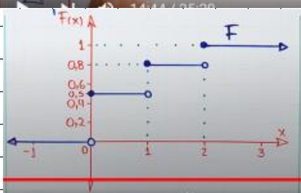
x	f(x)	F(x)
0	0,5	0,5
1	0,3	0,8
2	0,2	1

▶ $F(x) = P(X \leq x)$

▶ $F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = f(0) = 0{,}5$

▶ $F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0 \circ 1) = f(0) + f(1) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$

▶ $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0, 1 \circ 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$



$$F(x) = \begin{cases} 0 ; & x < 0 \\ 0{,}5 ; & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}8 ; & 1 \leq x < 2 \\ 1 ; & x \geq 2 \end{cases}$$

Función de probabilidad binomial

Para un experimento binomial, sea p la probabilidad de un "éxito" y 1-p la probabilidad de un "fracaso" en un solo ensayo; entonces la probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos, está dada por la función de probabilidad f(x):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} (p)^x (1-p)^{n-x}$$, para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots n$

éxito

fracaso

- El experimento consta de una secuencia de n ensayos idénticos.
- En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de ellos se le llama éxito y al otro, fracaso.
- La probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro, nunca cambia y se denota por p. Por ello, la probabilidad de fracaso será 1 − p
- Los ensayos son independientes, de modo que el resultado de cualquiera de ellos no influye en el resultado de cualquier otro ensayo.

1 La probabilidad de que a un cliente nuevo le guste la MH es de 0,8. Si llegan 5 clientes nuevos, ¿cuál es la probabilidad de que solo a 2 de ellos les guste la MH?

▶ X = número de clientes nuevos de 5 a los que les gusta la MH

$X \sim B(5 ; 0{,}8)$

$x = 0; 1; 2; 3, 4; 5$

▶ n : número de ensayos

$n = 5$

▶ p : probabilidad de éxito

$p = 0{,}8$

▶ $f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$f(2) = P(X = 2) = \binom{5}{2} 0{,}8^2 (1 - 0{,}8)^{5-2}$

$f(2) = P(X = 2) = 10 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3$

Sea $X \sim B(n, p)$, entonces $E(X) = np$ y $V(X) = np(1-p)$

b) la probabilidad de obtener ***al menos una cara*** es

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$

Pero más fácil es hacer

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-0} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1 - 0.421875 = 0.578125$$

Notar que $P(X \leq k)$ ***es la F.d.a. de X evaluada en k, es decir*** $F(k) = P(X \leq k)$

Binom

Distribución geométrica

Sea ε un experimento aleatorio. Sea A un evento asociado a ε y anotamos $P(A) = p$.

Supongamos un experimento aleatorio ε_0 que cumple los siguientes requisitos:

1- se realizan repeticiones independientes de ε, hasta que ocurre A por primera vez inclusive.
2- las repeticiones son idénticas, y en cada repetición de ε observamos ***si ocurre A*** o ***no ocurre A*** (cuando A ocurre se dice que se obtuvo un "éxito", caso contrario se obtuvo un "fracaso")
3- la probabilidad de éxito es constante de una repetición a otra de ε, y es igual a p

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Sea $X \sim G(p)$ entonces $E(X) = \frac{1}{p}$ y $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Notación: $X \sim G(p)$

Geom

1- La probabilidad de que una computadora que corre cierto sistema operativo se descomponga en

$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad k = 1,2,.....$

Sea $X \sim G(p)$ entonces $E(X) = \dfrac{1}{p}$ y $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Notación: $X \sim G(p)$

Geom

1- La probabilidad de que una computadora que corre cierto sistema operativo se descomponga en determinado día es de 0.1. Determinar la probabilidad de que la máquina se descomponga por primera vez en el duodécimo día, después de la instalación del sistema operativo

Solución:
Definimos la v.a. X: "número de días hasta que la computadora se descompone por primera vez"
Entonces $X \sim G(0.1)$
Se pide calcular la $P(X = 12)$

$P(X = 12) = (1-p)^{12-1}p = 0.9^{11} \times 0.1 = 0.031381$

Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa constituye una extensión de la distribución geométrica.
Sea r un entero positivo.
Sea ε un experimento aleatorio. Sea A un evento asociado a ε y anotamos $P(A) = p$.
Supongamos un experimento aleatorio ε_0 que cumple los siguientes requisitos:

1- se realizan repeticiones independientes de ε, hasta que ocurre A por r-ésima vez inclusive.
2- las repeticiones son idénticas, y en cada repetición de ε observamos ***si ocurre A*** o ***no ocurre A*** (cuando A ocurre se dice que se obtuvo un "éxito", caso contrario se obtuvo un "fracaso")
3- la probabilidad de éxito es constante de una repetición a otra de ε, y es igual a p

Binom neg.

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, r+2,.....$$

Notación: $X \sim BN(r,p)$

Para obtener una expresión genérica de la $P(X = k)$, notar que si en el k-ésimo ensayo ocurre éxito por r-ésima vez, entonces en los k-1 primeros ensayos ocurrieron r-1 éxitos. Si anotamos B: " en los primeros k-1 ensayos ocurran r-1 éxitos", entonces

Si $X \sim BN(r,p)$ entonces $E(X) = \dfrac{r}{p}$ y $V(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Distribución hipergeométrica

Supongamos que tenemos una población o conjunto de N objetos o individuos (es decir tenemos una población finita).

Clasificamos a los objetos de la población en dos categorías. Hay M objetos de una categoría y N-M de la otra categoría. Se suele decir que tenemos M "éxitos" y N-M "fracasos".

Se extraen al azar y sin reemplazo n objetos de dicha población. Es decir se extrae una muestra de n objetos de la población, de manera tal que es igualmente probable que se seleccione cada subconjunto de tamaño n.

Consideramos la v.a. X: "número de éxitos en la muestra extraída"

Se dice que X tiene una distribución hipergeométrica con parámetros n, M y N

Notación: $X \sim H(n,\ M,\ N)$

Distribució
Supongamos
población fi
Clasificamos
la otra categ
Se extraen a
objetos de la

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0, n-N+M) \le k \le \min(n, M)$$

Hipergeom

Si $X \sim H(n,\ M,\ N)$ entonces $E(X) = \dfrac{nM}{N}$ y $V(X) = n\dfrac{M}{N}\left(\dfrac{N-M}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

Distribución de Poisson

Una v.a. X con rango $R_X = \{0,1,2,....\}$ se dice tener ***distribución de Poisson con parámetro*** λ, si para algún $\lambda > 0$

Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,1,2,.....$$

$X \sim P(0.2)$