Práctica 6

jueves, 23 de mayo de 2024 10:39

$\hat{\theta}$ es sesgado, θ parámetro.

$\boxed{E(\hat{\theta}) = \theta}$ → parámetro

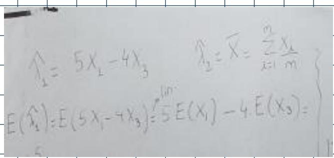
↓ estimador

sesgo $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

Prop linealidad de la esperanza

$E(aX + bY + c) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$

Sea x1 xn una muestra aleatoria con dist cuasoooooooo de parámetro l.
Sean ls siguientes estimadores



$\hat{\lambda}_1 = 5X_1 - 4X_3 \qquad \hat{\lambda}_2 = \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$

$E(\hat{\lambda}_1) = E(5X_1 - 4X_3) \overset{\text{lin}}{=} 5E(X_1) - 4E(X_3) =$

$= 5\lambda - 4\lambda = \lambda$

$X_1 \sim P(\lambda) \rightarrow \hat{\lambda}_1$ es ins. para λ.

$E(\hat{\lambda}_2) = E(\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) \overset{\text{x/linealidad}}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \lambda = \lambda$

$\hat{\lambda}_2$ es ins. para λ

para saber si es insesgado cambiar param. y por linealidad de esperanza?

cómo calculo sesgo? → lo anterior y después

$b(\hat{\lambda}_2) = E(\hat{\lambda}_2) - \lambda = \lambda - \lambda = 0$

Criterio para saber cuál es el mejor estimador?

↳ el del error cuadrático medio más chico.

$\boxed{ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + [b(\hat{\theta})]^2}$ → si es insesgado, $ECM = V(\hat{\theta})$

↓ de un estimador

siempre +

$ECM(\hat{\lambda}_1) = V(\hat{\lambda}_1) + 0^2 = V(5X_1 - 4X_3) = 5^2 \cdot V(X_1) + (-4)^2 \cdot V(X_3) = 25 \cdot \lambda + 16\lambda = 41\lambda$

↓ Prop de varianza.
X_1 y X_3 independientes.

$ECM(\hat{\lambda}_2) = V(\hat{\lambda}_2) + 0^2 = V(\bar{X}) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$

es mejor $(\hat{\lambda}_2)$ porque tiene menor ECM.

Eficiencia relativa = relación e/ ECM.

Consistencia de un estimador. → <u>EJ de parcial.</u>

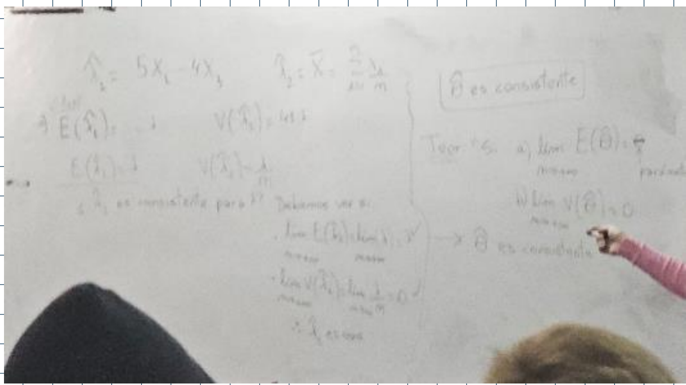
P. ver si es consistente o no.

a) $\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ (teorema.)

p/ ver si es consistente o no.

a) $\lim_{n\to\infty} E(\hat\theta) = \theta$
b) $\lim_{n\to\infty} V(\hat\theta) = 0$
} θ es consistente (teorema)

Conviene primero sacar varianza y esperanza y después ver el teo.



Solo sí que no se nada.

$\hat\lambda_1$ es consistente? por teorema. OJO
$\lim_{n\to\infty} E(\hat\lambda_1) = \lim_{n\to\infty} \lambda = \lambda$
$\lim_{n\to\infty} V(\hat\lambda_1) = \lim (41\lambda) = 41\lambda \neq 0$

NO puedo afirmar que no es consistente.
No puedo saber si es consistente o no.
→ teorema para saber

OJO no confundir $\hat\lambda$ y λ
$\hat\lambda$ → estimador
λ → parámetro.

$$\boxed{E(Y^2) = V(Y^2) + E(Y)^2} \rightarrow \text{EJ 3 (teorema).}$$

EJ 6 de la práctica.

Método de los momentos → sistema de ecuaciones, igualar momentos poblacionales de orden k. (= orden)

$$f(x) = \begin{cases} (2\theta + 1)\, x^{2\theta} & \text{si } 0 \le x \le 1,\ \theta > -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$
→ yo busco estimador para θ

$$\underbrace{E(X_k)}_{\text{momento poblacional de orden k.}} = \overbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k}^{\text{momento muestral de orden k.}}$$

si X es continua o discreta cambia.
d
para el continua

$k = 1 \rightarrow E(X) = \bar{x}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot (2\theta + 1) \cdot x^{2\theta}\, dx = \longrightarrow$$ integro respecto a X, no a θ.

de orden k.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot (2\theta+1) \cdot x^{2\theta}\, dx =$$ → integro respecto a X, no a θ.

$$2\theta+1 \cdot \int_0^1 x \cdot x^{2\theta} = 2\theta+1 \cdot \int_0^1 x^{2\theta+1} = (2\theta+1) \cdot \frac{x^{2\theta+2}}{2\theta+2}\Big|_0^1 = \frac{2\theta+1}{2\theta+2}$$

$$\frac{2\theta+1}{2\theta+2} = \bar{X}$$

$$2\theta+1 = \bar{x} \cdot (2\theta+2)$$

$$2\theta+1 = \bar{x} \cdot 2\theta + 2\bar{x}$$

$$2\theta - \bar{x}2\theta = 2\bar{x} - 1$$

$$\theta(2-\bar{x}2) = 2\bar{x} - 1$$

Momento muestral.

ojo ←

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{x}-1}{2-2\bar{x}}$$

ponerle el $\hat{\theta}$ (solo al final)

Pq estamos calculando el estimador. no pdo decir q θ (q' es un nro) vale algo q' depende de la muestra.

Estimador $\neq$ estimación

fórmula

número q' resulta de evaluar en la fórmula.

número

$\bar{x} = 0{,}8$ (o algo así).

$\boxed{\text{método de máxima verosimilitud}}$ → 1ro encontrar función de verosimilitud y encontrar el max.

Verosimilitud es multiplicar marginal de todas

$\boxed{\text{paso 1}}$

sacar conjunta.

$$L(x_1, \dots x_n, \theta) =$$

θ es el mismo p. todas pq tienen = distribución.

$\prod$ → una sumatoria pero con productos.

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta)$$

$$= \left[(2\theta+1) \cdot x_1^{2\theta}\right] \cdot \left[(2\theta+1) \cdot x_2^{2\theta}\right] \left[(2\theta+1) \cdot x_n^{2\theta}\right]$$ → producto de = base.

$$0 \leq x \leq 1 = \left[(2\theta+1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}\right]$$ no los puedo agrupar porque tienen $\neq x_n$.

$\boxed{\text{paso 2}}$

$$\ln(L(x_1 \dots x_n, \theta)) = \ln(2\theta+1)^n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}\right)$$

$$= n \cdot \ln(2\theta+1) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^{2\theta})$$ → (por prop. del L puedo sacar el 2θ multi y como es sumatoria lo saco tmb.

$$= n \cdot \ln(2\theta+1) + 2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$\boxed{\text{paso 3}}$

derivar respecto a θ.

$$\frac{d}{d\theta} L(x_1 \dots x_n, \theta)$$