Clase 3- cálculo de enunciados

domingo, 14 de septiembre de 2025 16:26

Sistema deductivo → Colección de reglas que pueden aplicarse sobre info inicial para derivar en info adicional de forma sintáctica.

Tiene:

- Conjunto de axiomas:
  Fórmulas que se toman como puntos de partida para las demostraciones.
- Conjunto de reglas de inferencia

Los axiomas son fórmulas bien formadas. Las reglas determinan qué fórmulas pueden inferirse a partir de qué fórmulas.

$L_1 : (A \to (B \to A))$

$L_2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$L_3 : ((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A)$

Reglas de inferencia de L

El sistema L tiene una única regla de inferencia, el modus ponens:

MP: a partir de A y de $(A \to B)$ se infiere B

Una regla de inferencia es una función que asigna una fórmula (conclusión) a un conjunto de fórmulas (premisas).

El esquema general es este: $\Gamma \vdash_L A_n$

Nuestro ejemplo es: $\{ ((p \to q) \to r), q \} \vdash_L (p \to r)$

Vamos a construir la demostración:

1.	q->(p->q)	instancia de L1
2.	q	hipótesis
3.	(p->q)	aplicación de MP entre 1 y 2
4.	((p→q)→r)	hipótesis
5.	r	aplicación de MP entre 3 y 4
6.	r->(p->r)	instancia de L1
7.	(p->r)	aplicación de MP entre 5 y 6

Se observa que construimos una cadena de 7 pasos, A_1, A_2, A_3, A_4 A_5, A_6, A_7 donde el último paso es la fbf que queríamos derivar.

En cada uno de los pasos usamos:

- una premisa (paso 2 y paso 4)
- un axioma (paso 1 y 6),
- la aplicación de la regla de inferencia MP (paso 3, 5 y 7)

Esta cadena **DEMUESTRA que efectivamente a partir de esas 2 premisas , sean** A_2, y A_4 **se deriva la conclusión** A_7 $(p \to r)$

- Γ es un conjunto de premisas (o hipótesis)
- A_n es la conclusión a la que se quiere llegar.

Tanto las premisas como la conclusión son fórmulas bien formadas (fbf), es decir, son sentencias escritas en el lenguaje de la lógica.

➢ Una **demostración** es una sucesión finita de fórmulas bien formadas

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

tal que para todo i, con $1 \leq i \leq n$, A_i es una premisa o es un axioma, o bien se infiere de miembros anteriores de la sucesión como consecuencia directa de la aplicación de una regla de inferencia (MP).

O aparecen premisas o hipótesis o algo a lo que llegué con modus ponens.

- El esquema general es este: $\Gamma \mid\!-_L A_n$
- Nuestro ejemplo es: $\{ ((p \to q) \to r), q \} \mid\!-_L (p\text{->}r)$

- Para demostrar que la conclusión realmente se deduce de esas premisas hay que armar una demostración.

Recordar:
Una **demostración** es una sucesión finita de fórmulas bien formadas

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

tal que para todo i, con $1 \leq i \leq n$,

- A_i es una premisa o es un axioma, o bien
- A_i se infiere de miembros anteriores por Modus Ponens.

Notemos las diferencias entre $\mid\!-_L A$ y $\models A$

$\mid\!-_L A$

A es teorema, lo demuestro construyendo su demostración (una secuencia $A_1, A_2, \ldots, A$, tal que para todo i, con $1 \leq i \leq n$, A_i es un axioma, o bien se infiere de miembros anteriores de la sucesión por MP)

Es un procedimiento sintáctico, hago «cuentas» en el cálculo.

$\models A$

A es tautología, lo demuestro construyendo su tabla de verdad y comprobando que da Verdadero en todas las filas.

Es un procedimiento «semántico», aplico las funciones de verdad.

|--A es a es un teorema de L

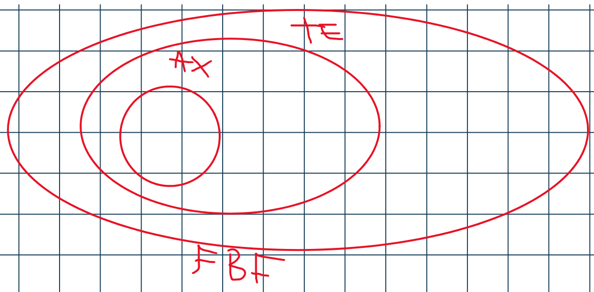
En la semántica tengo tautologías como verdades absolutas, se hace la tabla de verdad y si bajo cualquier aasignación es v entonces es.
En la sintaxis, verdad absoluta es teorema. Tengo que armar un camino hasta llegar a a (demostración) donde cada elemento o es un axioma o se construye haciendo modus poinens con dos fórmulas de más arriba.

Si hay algo que puedo demostrar sin ninguna hipótesis a la izquierda {vacio}|--A es una verdad absoluta.

Derivación o deducción a partir de hipótesis o premisas si es que tengo algo a la izquieda.

{p}|--(q->p)

1. Instancio L1. p-> (q->p)
2. Instancio p por hipótesis
3. Modus ponens entre 1 y 2.



Correcto porque lo que calcula es tautología
Completo porque puede calcular todo

Grabación de audio iniciada: 16:19 martes, 16 de septiembre de 2025

Si saco axiomas, me van a quedar teoremas que no puedo demostrar.
Si agrego axiomas, voy a poder agregar eventualmente nuevos teoremas. Si agrego una formula que ya era teorema, no voy a tener nuevos teoremas. El tema es si el axioma que agrego NO era antes teorema(cualquier cosa, p, !q, p->q) ahí si me va a agregar el conjunto de teoremas.
Si lo que agrego es iuna contradicción de lo que yua tenía, todo el universo de fórmulas va a ser teorema, todo es demostrable.