Práctica 5

miércoles, 8 de mayo de 2024 16:46

1) Se analizaron las longitudes y los anchos de la bandeja de plástico rectangular para un CD que está instalada en una computadora personal. Las mediciones se redondearon al milímetro mas cercano.
Sean X: "la longitud medida" e Y: " el ancho medido".
La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por
a) Determine la probabilidad de que la cubierta del CD tenga una longitud de 129 mm.
b) Determine la probabilidad de que una cubierta de CD tenga ancho de 16 mm.
c) Hallar las distribuciones marginales de X e Y.
d) Hallar E(X), E(Y), V(X), V(Y).

Y \ X	129	130	131
15	0.12	0.42	0.06
16	0.08	0.28	0.04

X = "longitud medida" Y = "ancho medido"

a. $f_X(129) = P(X = 129) = 0,12 + 0,08 = 0,2$ mm

b. $f_Y(16) = P(Y = 16) = 0,08 + 0,28 + 0,04 = 0,4$ mm

c.

Y \ X	129	130	131	
15	0.12	0.42	0.06	0,6
16	0.08	0.28	0.04	0,4
	0,2	0,7	0,1	

d. $E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot f_X(x) = 129 \cdot 0,2 + 130 \cdot 0,7 + 131 \cdot 0,1 = \underline{129,9}$

$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot f_Y(y) = 15 \cdot 0,6 + 16 \cdot 0,04 = 9,64$

$V(X) =$

$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot f_X(x) = 129^2 \cdot 0,2 + 130^2 \cdot 0,7 + 131^2 \cdot 0,1 = 16874,3$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$16874,3 - 129,9^2 = 0,29.$

$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot f_Y(y) = 15^2 \cdot 0,6 + 16^2 \cdot 0,4 = 232,4$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 232,4 - 9,64^2 = 144,4704.$

2) En el ejercicio anterior, calcule la f.d.p. condicional $p_{Y/X}(y/x = 130)$ ¿Son X e Y independientes?. Explique.

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ Son independientes.

$f(129, 15) = f_X(129) \cdot f_Y(15)$ ✓

$0,12 = 0,2 \cdot 0,6$

Y \ X	129	130	131
15	0.12	0.42	0.06
16	0.08	0.28	0.04

$P(Y | X) = 130$

$$\frac{P(Y = 15 ; X = 130)}{P(X = 130)} = \frac{P(130, 15)}{f_X(130)} = \frac{0,42}{0,2} = 0,6$$

$$\frac{P(Y=16;\ X=130)}{P(X=130)} = \frac{P(130,16)}{f_X(130)} = \frac{0,28}{0,7} = 0,4.$$

3) Un software puede hacer llamadas a dos subrutinas A y B. En una ejecución elegida al azar, sean
X: "número de llamadas hechas a la subrutina A"
Y: "número de llamadas hechas a la subrutina B"
La f.d.p. conjunta de (X , Y) esta dada por
a) Determine las f.d.p. marginales de X e Y
b) Determine E(X), E(Y), V(X), V(Y)
c) Determine cov(X , Y)
d) ¿Son X e Y independientes?. Explique.

X \ Y	1	2	3	
1	0.15	0.10	0.10	0,35
2	0.10	0.20	0.15	0,45
3	0.05	0.05	0.10	0,2
	0,3	0,35	0,35	

b. $E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot f_X(x) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,35$

$0,3 + 0,7 + \frac{21}{20} = \frac{41}{20} = 2,05$

• $E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot f_Y(y) = 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,2$

$0,35 + 0,9 + 0,6 = 1,85.$

$V(X) =$

$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot f_X(x) = 1^2 \cdot 0,35 + 2^2 \cdot 0,35 + 3^2 \cdot 0,35$

$0,35 + 1,4 + 3 \cdot 0,35 = 4,9.$

• $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$4,9 - 1,85^2 = \underline{1,4775}$

$V(Y) =$

$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot f_Y(y) = 1^2 \cdot 0,35 + 2^2 \cdot 0,45 + 3^2 \cdot 0,2$

$0,35 + 1,8 + 1,8 = 3,95$

• $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$3,95 - 1,85^2 = \underline{0,5275.}$

c. $cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(X,Y) = 1 \cdot 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 1 \cdot 0,1 + 1 \cdot 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 2 \cdot 0,15$

$+ 1 \cdot 3 \cdot 0,05 + 2 \cdot 3 \cdot 0,05 + 3 \cdot 3 \cdot 0,10 = \underline{4,25}$

$cov(X,Y) = 4,25 - 2,05 \cdot 1,85 = \underline{0,4575}$

d. Para que sean independientes, todas las celdas tienen q' dar el producto de las marginales

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$?

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$
$$f(1,1) = 0,3 \cdot 0,35$$
$$0,15 \neq 0,105$$
No son independientes.

4) Con referencia al ejercicio anterior
   a) Determine E(X+Y)
   b) Determine V(X+Y) y σ_{X+Y}
   c) Determine P(X+Y = 4)
   d) Suponga que cada ejecución de la subrutina A tarda 100 ms y que cada ejecución de la subrutina B tarda 200 ms.
   d1) Determine el número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.
   d2) Encuentre la desviación estándar del número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.

a. $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2,05 + 1,85 = 3,9$

b $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot Cov(X,Y)$
$1,4475 + 0,5275 + 2 \cdot 0,4475 = 2,84$

$\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)}$
$\sigma(X+Y) = 1,68$

c. $P(X+Y=4) = P(1,3) + P(2,2) + P(3,1)$
$0,1 + 0,2 + 0,05 = 0,35$

d. $E(100X + 200Y) = 100 \cdot E(X) + 200 \cdot E(Y)$
linealidad $2,05 + 1,85$
$205 + 370 = 575$.

$\sigma_Z = \sqrt{V(Z)}$
desvío

$V(Z) = V(100X) + V(100Y) + 2 \cdot Cov(100X, 200Y)$
$Cov(100X, 200Y) = E(100X, 200Y) - E(100X) \cdot E(200Y)$

Tengo q' hacer con la misma?

5) Dos computadoras trabajan en forma independiente.
   Sean X: "número de fallas semanales de la computadora 1" e
   Y: "número de fallas semanales de la computadora 2".
   Las distribuciones están dadas por

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.25	0.25	0.30	0.20

y	0	1	2	3
$p(y)$	0.15	0.20	0.40	0.25

   a) Determine P(X = Y) , es decir ambas computadoras tienen el mismo número de fallas
   b) Determine P(X > Y), es decir el número de fallas de la computadora 1 es mayor que el de la computadora 2.

Sean X: "número de fallas semanales de la computadora 1" e
Y: "número de fallas semanales de la computadora 2".

$P(X=Y) = P(0,0) + P(1,1) + P(2,2) + P(3,3)$

$P(X=Y) = P(0,0) + P(1,1) + P(2,2) + P(3,3)$

indep. $0,2 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,25$

$P(X>Y) = P(1,0) + P(2,0) + P(3,0) + P(2,1) + P(3,1) + P(3,2)$

indep.

6) El tiempo de vida de cierto componente, en años, tiene una función de densidad $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, 0 si $x \le 0$. Están disponibles dos de dichos componentes, cuyos tiempos de vida son independientes. Tan pronto como falle el primer componente, éste se reemplaza por el segundo. Sean las variables aleatorias:
X: "tiempo de vida del primer componente" e Y: "tiempo de vida del segundo componente"
a) Determine $P(X \le 1 , Y \le 1)$
b) Determine $E(X)$, $E(Y)$
c) Determine $E(X+Y)$

a. $f(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\quad P(X \le 1, Y \le 1) \to P(X \le 1) \cdot P(Y \le 1)$

por indep.

$X \sim E(1)$

$Y \sim E(1)$

$0,632112^2 = 0,3995$

b. $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1 \quad E(Y) = 1$

c. $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2$

x linealidad

7) Una instalación de luz tiene dos focos A y B. La duración del foco A se puede considerar una v.a. X con distribución normal con media 800 hs. y desviación estándar de 100 hs. La duración del foco B se puede considerar una v.a. Y con distribución normal con media 900 hs. y desviación estándar de 150 hs. Suponga que las duraciones de los focos son independientes.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A?.
(Sugerencia: piense cómo interpreta el evento $\{Y - X > 0\}$ y qué distribución tiene Y - X)
b) Otra instalación de luz tiene solo un foco. Se pone uno del tipo A y cuando se funde se instala otro de tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que el la duración total de ambos sea mayor que 2000 hs?.
(Sugerencia: piense cómo interpreta el evento $\{Y+X > 2000\}$ y qué distribución tiene Y + X)

X = "duración del foco en hs" $\quad$ Y = "duración del foco en hs"

$\sigma = 100$

$X \sim N(800, 100^2)$

$\sigma^2 = 10000$

$Y \sim N(900, 150^2)$

$\sigma = 150$

$\sigma^2 = 22500$

$E(Y-X) = E(Y) - E(X) \qquad V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

$E(X-Y) = 900 - 800 \qquad V(X-Y) = 100^2 + 150^2$

$E(X-Y) = 100 \qquad 32500$

$(Y-X) \to N(100, \sqrt{32500})$

$P(Y-X > 0) = 1 - P(Z \le 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-100}{\sqrt{32500}}\right)$

$$P(Y - X > 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-100}{\sqrt{32500}}\right)$$

$$1 - \Phi\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$$

$$\left[1 - \Phi(-0,5547)\right] ?$$

$$1 - (1 - \Phi(0,5547))$$

$$1 - 0,29 = 0,71.$$

$$P(Y + X > 2000)$$

$$E(Y+X) = E(Y) + E(X) \qquad V(Y+X) = V(Y) + V(X)$$

$$900 + 800 = 1700 \qquad 100^2 + 150^2$$

$$32500$$

$$(Y+X) \sim N(1700, \sqrt{32500})$$

$$P(Y+X > 2000) = 1 - P(Y+X < 2000)$$

$$1 - \Phi\left(\frac{2000-1700}{\sqrt{32500}}\right)$$

$$1 - \Phi\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$$

$$\boxed{1 - 0,95194}$$

8) El peso de un caramelo pequeño tiene una distribución normal con media 2.835 gramos y desviación estándar de 0.2835 gramos. Suponga que se colocan 16 caramelos en un paquete y que los pesos de éstos son independientes.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza del peso neto del paquete?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45.5 gramos?

X_i = "peso del caramelo i en gramos"

$$X_i \sim N(2.835, 0.2835^2) \qquad i = 1 \ldots 16.$$

$X_1 \ldots X_{16}$ son indep.

a. $$Z = \sum_{i=1}^{16} X_i$$

$$Z \sim N(16 \cdot 2,835 \,,\, 16 \cdot 0,2835^2)$$

• Media $= 16 \cdot 2{,}835 = 45{,}36$

• Varianza $= 16 \cdot 0{,}2835^2 = 1{,}2859$

b. $P(Z < 45{,}5) = \Phi\left(\dfrac{45{,}5 - 45{,}36}{\sqrt{1{,}2859}}\right) = 0{,}54913$

9) El tiempo para que un sistema automatizado localice una pieza en un almacén, tiene una distribución normal con media de 45 segundos y desviación estándar de 30 segundos. Suponga que se hacen pedidos independientes por 10 piezas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos?

b) Enuncie la propiedad teórica que utiliza para resolver el inciso anterior.

X_i = "tiempo p/ que un sistema automatizado en localizar la pieza i en 1 almacén".

$X_i \sim (45, 30^2)$ $\qquad \bar{X} \sim N\left(45, \dfrac{30^2}{10}\right)$

$P(\bar{X} > 60) = 1 - P(\bar{X} \leq 60) = 1 - P\left(\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \dfrac{60 - 45}{30/\sqrt{10}}\right)$

$1 - P\left(Z \leq \dfrac{\sqrt{10}}{20}\right)$

$1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{10}}{20}\right)$

$1 - 0{,}94308$

$Z = \sum_{i=1}^{10} X_i$

$P(Z > 600) = 1 - P(Z \leq 600) = 1 - P\left(\dfrac{\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \dfrac{600 - 4 \cdot 10}{30 \cdot \sqrt{10}}\right)$

$1 - \Phi(4{,}58) \simeq 0$

$1 - 0{,}94$.

10) El centro de cálculo de una universidad dispone de un servidor para gestionar las páginas web personales de profesores y alumnos. Supongamos que la cantidad de memoria ocupada por una de estas páginas puede considerarse como una variable aleatoria con una media de 1.3 MB y una desviación estándar de 0.3. Si el servidor va a gestionar un total de 500 páginas, calcular aproximadamente la probabilidad de que la cantidad total de memoria necesaria supere los 660 MB.
(Sugerencia: considerar las v.a. X_i: "cantidad de memoria ocupada por la página i", i=1,2,…,500)

X_i = cantidad de mem. ocupada por la página i, i = 1..500

$\mu = 1{,}3 \qquad \sigma = 0{,}3^2$

$Z = \sum_{i=1}^{500} X_i$

$E(T) = \mu \cdot n = 1{,}3 \cdot 100 = 650$

$V(T) = \sigma^2 \cdot n = 0{,}3^2 \cdot 100 = 45$

$T \simeq N(650, 45)$

$P(T > 660) = 1 - P(T \leq 660)$

$1 - \Phi\left(\frac{660 - 650}{\sqrt{45}}\right)$

$1 - \Phi(1{,}49)$

11) El tiempo de vida (en horas) de un componente electrónico viene determinado por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2ke^{-\frac{x}{5}} & x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

a) Calcular k y la función de distribución acumulada asociada.

b) ¿Qué porcentaje de componentes de este tipo duran entre 2 y 10 horas?. ¿Y más de un día?. Determinar la esperanza y la varianza.

c) Si se consideran 40 componentes del tipo anterior, obtener aproximadamente la probabilidad de que la vida media de los 40 componentes esté comprendida entre 2 y 10 horas.
(Sugerencia: considere las v.a. X_i :" duración en horas del componente electrónico i" , i = 1, 2, ..,40)

$f(x) = \begin{cases} 2ke^{-\frac{1}{5}x} & x > 0 \\ 0 & CC \end{cases}$ $\quad X$ = "tiempo de vida de un comp. en hs."

$2 \cdot k = \frac{1}{5}$

$k = \frac{1}{5} / 2$

$k = \frac{1}{10}$

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \\ 0 & CC \end{cases}$

$P(2 < x < 10) = P(x < 10) - P(x < 2)$

$0{,}864 - 0{,}329 = \underline{\underline{0{,}535}}$

$P(x > 24) = 0{,}00823$

$E(x) = \frac{1}{0{,}2}$

$V(x) = \frac{1}{0{,}04} = 25$

C - x_i = duración en hs. del componente i

$T = \sum^{40} x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{40} x_i \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\overline{X} \approx N\left(5, \frac{25}{40}\right)$$

$$P(2<\overline{X}<10) \approx P(\overline{X}<10) - P(\overline{X}<2)$$

$$\Phi\left(\frac{10-5}{\sqrt{\frac{25}{40}}}\right) - \left(\frac{2-5}{\sqrt{\frac{25}{40}}}\right)$$

$$\Phi(6,32) - \Phi(-3,79)$$

$$\Phi(6,32) - 1 - \Phi(3,79)$$

$$1 - 1 - 0,00008$$

12) La resistencia a la ruptura de un remache tiene un valor medio de 10000 lb/pulg^2 y una desviación estándar de 500 lb/pulg^2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200?

b) Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, ¿podría calcularse la probabilidad pedida en la parte a) a partir de la información dada? → NO

$\mu = 10000$ lb/p^2

$\sigma = 500^2$

X_i = resistencia a la ruptura del remache.

$$Z = \sum_{i=1}^{40} x_i \qquad Z \approx N\left(10000, \frac{500^2}{40}\right)$$

TCL

$$P(9900 < Z < 10200) = P(Z < 10200) - P(Z < 9900) \approx$$

$$\Phi\left(\frac{10200-10000}{\sqrt{\frac{500^2}{40}}}\right) - \Phi\left(\frac{9900-10000}{\sqrt{\frac{500^2}{40}}}\right) \approx$$

$$\Phi(2,529) - \Phi(-1,26) \approx$$

$$\Phi\left(2{,}527\right)-\Phi\left(1{,}26\right)\approx$$

$$\Phi\left(2{,}527\right)-1-\Phi\left(1{,}26\right)\approx$$

$$0{,}994-\left(1-0{,}796\right)\approx$$

$$0{,}994-0{,}704=\underline{0{,}29}$$