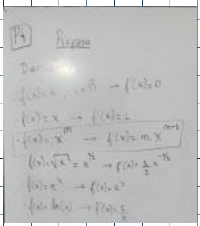
Práctica 4- Clase

jueves, 25 de abril de 2024 10:04



$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \longrightarrow (3x^4+e^x)' \to 3.4x^3+e^x$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$(f(x):g(x))' = \frac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\int 1\,dx = x+c$$

$$\int x^n = x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \qquad n\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)+c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a f(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int f(x) \mp g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$$

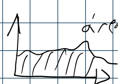
v.a. continuas $\to$ R_x no numerable

$f(x) \to$ f. de densidad $\qquad F(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \to$ auxiliar.

fdp

• req $= f(x)\geq 0 \qquad$ • Req F: $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad f(x)\neq P(X=x) \qquad$ si x es continua, F(x) es continua.



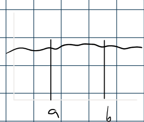
f(x) no es una probabilidad.

$F'(x) = f(x)$

$\boxed{P(X=x)=0} \to$ pq es el área de una línea.

P. verificar si está bien la acumulada hacer esto + revisar límites.

$$P(a\leq x\leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$



$\to$ si me dan fdp la integro y evaluo, si me dan Fda solo evaluo.

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

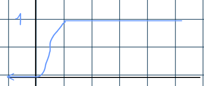
$P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = F(a)$

$P(X > b) = \int_{b}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 - P(X \le b) = 1 - F(b)$

- $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ → da un nro → tiene q' estar en rango de x → puede dar negativo si mido temperatura en lugar frío y va de $-20°$ a $-10°$ va dar neg.
- $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$ → $V \ge 0$ $E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$
- $dt(x) = \sqrt{V(x)}$
- $E(ax + b) = a \cdot E(x) + b$
- $V(ax + b) = a^2 \cdot V(x)$

ejercicio ejemplo:

$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ x^3 & si\ 0 \le x \le 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$



$\lim_{x \to -\infty} = 0$

$\lim_{x \to \infty} = 1$

es continua.

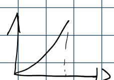
p. verla luego ver q' la f. evaluada en los puntos de corte me de =

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 3x^2 & si\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$

- reg $= f(x) \ge 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

$\int_0^1 3x^2 = 1$



p. ver si tiene sentido me fijo que el área bajo curva sea 1

b - $E(x) = \int_0^1 x \cdot \underbrace{3x^2}\, dx$

OJO no poner F(x) grande.

c. $P(X \le \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

$P(X \le \frac{1}{3}) = \int_{-\infty}^{1/3} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^{1/3} 3x^2\, dx$ } ambas válidas

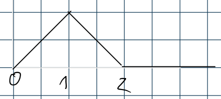
4) Para las variables aleatorias de los ejercicios anteriores hallar su esperanza y desviación estándar.

E → nro es rango de x V → n ≥ 0

1- X = tiempo q' ...

1- X = tiempo ... años ...

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



a. $P(X < 1{,}2) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1{,}2} (2-x)\,dx$

$$0 + \frac{1}{2} + \frac{9}{50} = 0{,}68$$

3) Considere la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

a) Evalúe k
b) Encuentre $F(x)$
c) Evalúe $P(0.3 < X < 0.6)$ utilizando $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\sqrt{x}\,dx = 1$$

$F(x)$ mayor = func. de regresión de $f(x)$

b. $F(x)$ = trabajo en el examen.

(1) def. $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} & \text{si } x < 0 \\ & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cálculos aux.

si $x < 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

si $0 \leq x \leq 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt +$

$$0 + x^{3/2}$$

posteriormente no cabe hacerlo.

si $x > 1$ $\quad F(x) =$

6) Una barra de 12 pulgadas, que está sujeta por ambos extremos, debe someterse a un creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa.
Sea X: "distancia desde el extremo izquierdo en el que ocu rre la rotura" y suponga que la f.d.p. de X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x\left(1 - \frac{x}{12}\right) & 0 < x < 12 \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular:
a) la F.d.a de X
b) $P(X \leq 4)$; $P(X > 6)$; $P(4 < X < 6)$
c) E(X)
d) la probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas del punto esperado de ruptura.

$\to F(6) - F(4)$

$\to E = 6.$

$$\boxed{P(X < 4 \cup X > 8)}$$

$$F(4) + 1 - F(8)$$

5) Para la v.a. del ejercicio 1), sea la v.a. Y el número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año; se tiene que $Y = 60X^2 + 39X$. Calcule la esperanza de Y. Explique qué propiedad utiliza.

Esperanza de una suma = suma de esp.

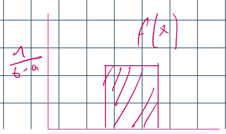
esp. de const. variable

$$E(Y) = 60\,E(X^2) + 39\,E(X)$$

Uniforme

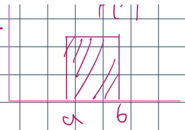
$X \sim U(a, b)$

$\text{fdp} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \end{cases}$



$X \sim U(a,b)$

$$fdp = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & c.c \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

• $E(x) = \frac{a+b}{2}$

• $V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Teorem prob. total + Bayes.

Ejemplo = X = tiempo de demora del tren min.

$X \sim U(a,b)$ dice. $a = 15$ $b = 30$

no están en la app.

a. tiempo de demora esperado.

$E(x) = \frac{15+30}{2} = 22,5$.

b. prob. de q' se demore < 20 min.

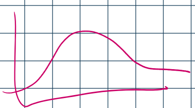
$P(X<20) = F(20)$

$\boxed{\frac{20-15}{30-15}}$ → reemplazo en la formulita.

Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu = E(x)$ $\sigma^2 = V(x)$ $\sigma = ds(x)$

Normal estándar (típica) $Z \sim N(0,1)$

Proceso de estandarización: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$



X = diam. de un tornillo medido en cm.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ media = 5cm, desvío = 1cm

μ = esperanza, media → 5

σ = desvío estándar → $1^2 = 1$

a- calcular prob de diam < 7 cm.

$P(X<7) \underset{estandarizo}{=} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{7-5}{1}\right) = P(Z<2) = 0,9772$.

$Z \sim N(0,1)$

sí o sí esto, p. poder chequear antes de estandarizar.

si me dan varianza, desvío es $\sqrt{x}$

$V = 36$, σ es 6

típico de examen

$P(6<X<7) = P\left(\frac{6-5}{1} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{7-5}{1}\right) = P(1<Z<2) = \Phi(2) - \Phi(1)$

$\Phi(2) \to P(Z<2)$, $\Phi(1) \to P(Z<1)$

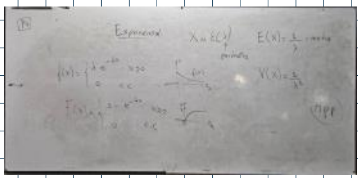
[No típico de examen]

$Z \sim N(0,1)$

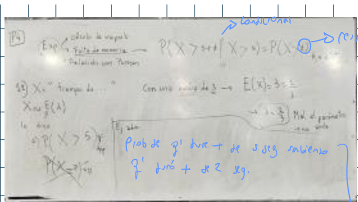
Φ $P(Z-2)$ Φ $P(Z-1)$

[10 típico de examen]

Exponencial

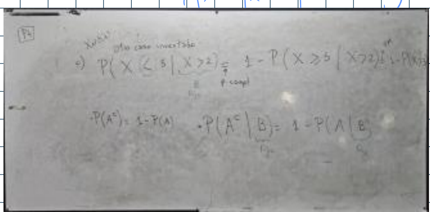


11) Un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de 3 segundos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?



Falta de memoria.

$P(X>5 \mid X>2)$



12) El número de visitas a un sitio web sigue un proceso de Poisson con una razón de 3 por minuto.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita?
b) Si transcurren dos minutos sin una visita, ¿cuál es la probabilidad que se dé una visita en el siguiente minuto?

$\Phi(-x) = P(X \le -x) = P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - \Phi(x)$

X_T = nro de muertes q' ocurren un día en 1 hora.

$X_T \sim P(4)$

T = tiempo e/ 2 eventos de Poisson.

$T \sim E(4)$

Poisson cuenta nro de algo, pregunta habla sobre el tiempo → es exponencial y el λ es el de Poisson.