Ejercicio 4
Determinar si las siguientes sentencias son verdaderas o falsas, justificando la respuesta utilizando notación Big-Oh.

a. 3^n es de $O(2^n)$
b. n+ $\log_2$ (n) es de O(n)
c. $n^{1/2} + 10^{20}$ es de $O(n^{1/2})$
d. $\begin{cases} 3n+17, n<100 \\ 317, n \geq 100 \end{cases}$ tiene orden lineal
e. Mostrar que $p(n)=3n^5 + 8n^4 + 2n + 1$ es $O(n^5)$
f. Si p(n) es un polinomio de grado k, entonces p(n) es $O(n^k)$.

a. 3^n es de $O(2^n)$

$3^n \leq c2^n$

$\frac{3^n}{2^n} \leq c$

$\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq c$

Las funciones exponenciales no son menores a las constantes.

b. $n + \log_2(n)$ es de $O(n)$

$c_0 n_0 \geq n_0$

$1.0 \geq 0$

$0 \geq 0$

$c_0 \geq 1$

$n_0 \geq 0$

$n + \log_2(n) \leq (c_0 + c_1) \cdot n_1$

$c_1 n_1 \geq \log_2(n_1)$

$T(n) \leq O(n)$, con $c = (1+0)$ y $n \geq n_1$, $n_1 = 1$

$c_1 \geq \frac{\log_2(n_1)}{n_1}$

$n_1 > 0$

$c_1 \geq 0$

$0 \geq \frac{\log_2(n_1)}{1}$

$0 \geq 0$

c. $n^{\frac{1}{2}} + 10^{20}$ es de $O(n^{\frac{1}{2}})$

$c \cdot n^{\frac{1}{2}} \geq n^{\frac{1}{2}}$

$c_0 > 0$

$n^{\frac{1}{2}} + 10^{20} \leq (c_0 + c_1) \cdot n_1$

$1 \cdot 0^{\frac{1}{2}} \geq 0^{\frac{1}{2}}$

$n_1 \geq 0$

$n^{\frac{1}{2}} + 10^{20} \leq (10^{20}+1) \cdot 2$

$0 \geq 0$

$T(n) \leq O(n^{\frac{1}{2}})$, con $c = 1 + 10^{20}$ y $n \geq n_1$, $n_1 = 2$

$c\, n^{\frac{1}{2}} \geq 10^{20}$

$c_1 \geq 10^{20}$

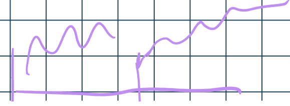
$10^{20} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \geq 10^{20}$

$n_1 > 1$

$10^{20} \geq 10^{20}$

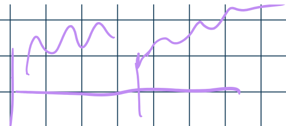
d. $3n+17$ $n < 100$

$O(n)$



d. $3n+17 \quad n<100$

$317 \quad n \geq 100$ $\quad O(n)$



$cn \geq 317 \quad n \geq 100 \qquad cn \geq 3n+17 \quad n<100$

$c.100 \geq 317 \quad c \geq 4 \qquad c.99 \geq 3.99+17 \quad c \geq 4$

$400 \geq 317 \qquad 396 \geq 297+17$

$396 \geq 314$

$T(n) \leq O(n)$, con $c=4+4$ y $n \geq n_0$, $n_0=100$

e. $3n^5+8n^4+2n+1$ es $O(n^5)$

$cn^5 \geq 3n^5 \qquad c_0 \geq 3$

$3.0^5 \geq 3.0^5 \qquad n_0 \geq 0$

$0 \geq 0$

$cn^5 \geq 8n^4 \qquad c_1 \geq 8$

$8.0^5 \geq 8.0^4 \qquad n_1 \geq 0$

$0 \geq 0$

$c.n^5 \geq 2n \qquad c_2 \geq 2$

$2.0^5 \geq 2.0 \qquad n_2 \geq 0$

$0 \geq 0$

$cn^5 \geq 1 \qquad c_3 \geq 1$

$1 \geq 1 \qquad n_3 \geq 1$

$3n^5+8n^4+2n+1 \leq (c_0+c_1+c_2+c_3).n_3$

$T(n) \leq O(n^5)$, con $c=14$ y $n \geq n_3$, $n_3=1$

f. Si p(n) es un polinomio de grado k, entonces p(n) es $O(n^k)$.

polinomio grado k es n^k+n (x ejemplo) $(k \geq 1)$:

$c.n^k \geq n^k \qquad n_0 \geq 0 \quad c_0 \geq 1$

$1.0^k \geq 0^k$

$0 \geq 0$

$cn^k \geq n \qquad c_1 \geq 1$

$1 \geq 1 \qquad n_1 \geq 1$

$n^k+n \leq (c_0+c_1).n_1$

$T(n) \leq O(n^k)$, $c>2$, $n \geq n_1$, $n_1=1$