Práctica 3

domingo, 21 de septiembre de 2025 15:24

1. Sean A y B fbfs del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L (ver Def. 2.2) de los siguientes teoremas:
i- ⊢L ((¬ A → A) → A)
ii- ⊢L ((A → B) → (¬B → ¬ A))
Comentar cada paso, indicando cuáles son los esquemas de axioma instanciados y cuáles las reglas de inferencia utilizadas. Intentar resolver i- y ii- sin usar el (Meta)teorema de la Deducción (ver Prop. 2.8), y luego usándolo. Contemplar las definiciones 2.2 y 2.5 hasta identificar claramente sus diferencias.

$\vdash_L ((!A \to A) \to A)$ la cadena tiene q' terminar en eso.

1. $(!A \to !(!A \to A)) \to ((!A \to A) \to A)$ $L_3 \to B := (!A \to A)$ y $A := A$

Con el metateorema:

Si $\Gamma \cup \{!A \to A\} \vdash_L A$ entonces $\Gamma \vdash_L ((!A \to A) \to A)$

1. $(A \to !(!A \to A)) \to ((!A \to A) \to !A)$ L_3 con $A = !A$ $B = (!A \to A)$

?

ii- ⊢L ((A → B) → (¬B → ¬ A))

$\vdash_L ((A \to B) \to (!B \to !A))$

$A \to B \vdash_L (!B \to !A)$

L1 con $A \to A$ y $B \to B$

$(A \to B) \to (!B \to !A)$

$A \to B$ hip.

$!B \to !A$ $\boxed{MP.}$

2. Dada la siguiente secuencia de fbfs del sistema formal proposicional L:

((¬p) → (¬(q → r))) → ((q → r) → p) → L_3 : $A = p$, $B = q \to r$.
((¬p) → (¬(q → r))) → hipotesis
((q → r) → p) → MP. 1 y 2

Analizar si se trata de una <u>deducción</u> de una fbf A (ver Def. 2.5) a partir de algún Γ.
En ese caso:
i- Describir Γ y A, y explicar cada paso de la sucesión finita (según Def. 2.5).
ii- Determinar si A, es un teorema del sistema formal L (ver Def. 2.2).
iii- Determinar si A es una tautología.

Γ puede ser $(p \to ((q \to r) \to p))$ puede ser un teorema pq se construye a partir de premisas y axiomas y su MP.

q	r	p	q->r	(q->r)->p
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

No es tautología

Demostración en L (teorema):
Una sucesión finita de fbfs $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que, para cada i (1 ≤ i ≤ n):

1. φ_i es **instancia** de un axioma de L (L1–L3), **o**
2. Existen $j, k < i$ tales que $\varphi_k = (\varphi_j \to \varphi_i)$ y, por **MP** a partir de φ_j y φ_k, obtenés φ_i.

Si además no usaste hipótesis, escribimos $\vdash_L \varphi_n$ y decimos que φ_n es **teorema**.

3. Sean A , B y C tres fbfs del sistema formal L. Construir una <u>deducción</u> en L (ver Def. 2.5 y Prop. 2.8) para:

{((A → B) → C), B} $\vdash_L$ (A → C)

$(A \to B) \to C,\ B,\ A \vdash_L C$

$L1 = B = A,\ A = B$

1 $B \to (A \to B)$
2 B (hip)
3 $A \to B$ (mp 1, 2)
4 $(A \to B) \to C$ (hip)
5 C (mp 3, 4)

4. Sea Γ un conjunto cualquiera, dado, de fbfs. Se sabe que Γ $\vdash_L$ A . ¿Es cierto que para todo Γ_i, con Γ_i ⊂ Γ, sucede que $\Gamma_i \vdash_L$ A ?. Fundamentar.

Depende, habrían cosas que quedarían sin demostrar salvo teoremas porque no necesitan de ninguna premisa

5. Sean Γ y Γ_0 dos conjuntos cualesquiera de fbfs. ¿Es cierto que para todo Γ existe algún Γ_0 ⊆ Γ tal que si Γ $\vdash_L$ A entonces $\Gamma_0 \vdash_L$ A ?. Fundamentar.

Si, porque está incluido o es igualk y si fueran iguales obviamente funcionaria

6. Sean A , B y C tres fbfs del sistema formal L. Sea Γ un conjunto cualquiera dado de fbfs. Se sabe que Γ ∪ {A , B} $\vdash_L$ C , y también se sabe que Γ $\vdash_L$ A .

i. ¿Es cierto que Γ $\vdash_L$ (C → B) ?. Fundamentar.
ii. ¿Es cierto que Γ $\vdash_L$ (B → C) ?. Fundamentar.
iii. ¿Es cierto que Γ $\vdash_L$ C ?. Fundamentar.
iv. ¿Es cierto que Γ ∪ {B} $\vdash_L$ C ?. Fundamentar.
v. ¿Es cierto que Γ ∪ {B} $\vdash_L$ (C → A) ?. Fundamentar.

→ puedo usar A x MP
A, B
A es redundante.

i. $\Gamma \vdash_L (C \to B)$ no, falta B. No puedo asegurar que B es V.
Se muestra con contraejemplo.

ej: $A = (p \vee \neg p)$
$B = (q)$

$(A, B) \vdash_L C$? si.

$B = (q)$
$C = p \to q$
$\Gamma = \emptyset$

$\{A, B\} \vdash_L C$ i.s.

$B \to C$

$\vdash ((p \to q) \to q)$

No es tautología.

Tenés q' demostrar q' se cumple lo que plantea el enunciado pero no lo de ahora.

ii = si x Metateorema de deducción.

7. Se dice que un conjunto Γ de fbfs es **independiente** si, para toda $A \in \Gamma$, $\Gamma - \{A\} \nvdash A$.
Dados los siguientes conjuntos de fbfs, determinar si son o no independientes. Fundamentar.

$\Gamma_1 = \{p, q, \neg p\}$.
$\Gamma_2 = \{p, q\}$.

$\{p, !p\} \vdash q$

1. $!p \to (!q \to !p)$ $A = !p$ $B = !q$ L1
2. $!p$ → hip.
3. $!q \to !p$ (MP 1, 2)
4. $(!q \to !p) \to (p \to q)$ $A = q$, $B = p$ L3
5. $p \to q$ (MP 3, 4)
6. p → hip.
7. q (MP 5, 6)

$\{p\} \vdash q$

1. $p \to (q \to p)$ $A = p$ $B = q$ L1
2. $(q \to p) \to (!p \to !q)$ $A = !q$ $B = !p$. L3
3. p (hip)
4. $q \to p$ (mp 1, 3)
5. $!p \to !q$ (mp 2, 3)
6. $(!q \to p) \to (p \to q)$ $A = q$ $B = p$