Le Derivate

Significato Geometrico e Calcolo

Simone Capodivento

14 giugno 2025

Indice

1 Introduzione

La derivata è uno dei concetti fondamentali del calcolo differenziale e rappresenta la velocità di variazione istantanea di una funzione. Questo documento esplora il significato geometrico della derivata e i metodi per il suo calcolo.

2 Significato Geometrico della Derivata

2.1 Definizione Geometrica

La derivata di una funzione $f(x)$ in un punto $x = a$ rappresenta la **pendenza della retta tangente** alla curva $y = f(x)$ nel punto $(a, f(a))$.

[Derivata come limite] La derivata di una funzione $f(x)$ nel punto $x = a$ è definita come:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

purché il limite esista e sia finito.

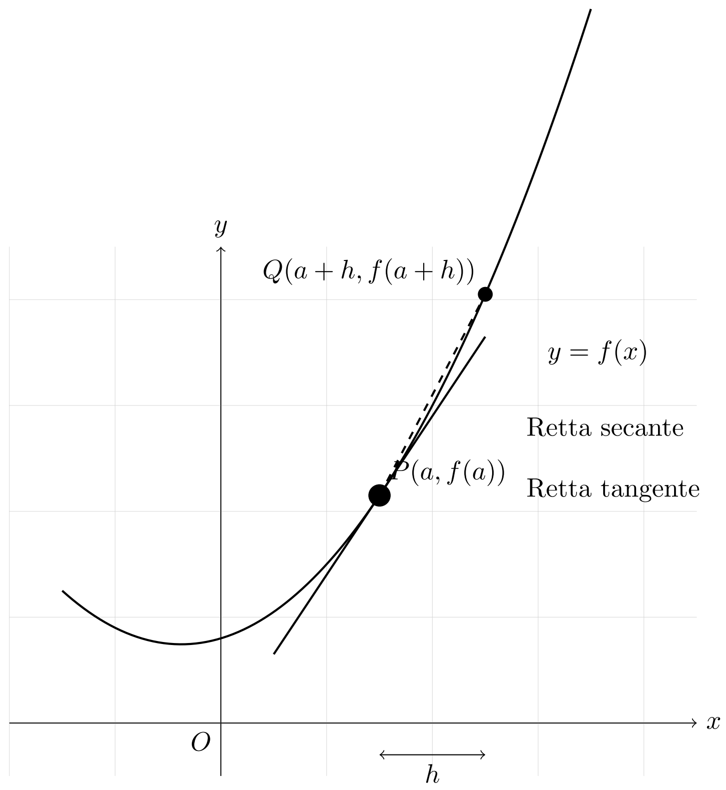

Figura 1: Interpretazione geometrica della derivata: passaggio dalla retta secante alla retta tangente

2.2 Dal Rapporto Incrementale alla Derivata

Il processo di calcolo della derivata può essere visualizzato come il passaggio dal **rapporto incrementale** al **coefficiente angolare della tangente**:

1. Il rapporto incrementale: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ rappresenta la pendenza della retta secante
2. Quando $h \to 0$, la retta secante si avvicina alla retta tangente
3. Il limite del rapporto incrementale è la derivata: $f'(a)$

3 Limiti e Continuità

3.1 Definizione di Limite

[Limite di una funzione] Si dice che la funzione $f(x)$ ha limite L per x che tende ad a, e si scrive:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x con $0 < |x - a| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$.

3.2 Esempi di Limiti

Calcoliamo alcuni limiti fondamentali:

$$\lim_{x \to \infty} (2x + 1) = +\infty \tag{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

3.3 Continuità e Derivabilità

[Condizione necessaria per la derivabilità] Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto $x = a$, allora $f(x)$ è continua in $x = a$.

Nota: Il viceversa non è sempre vero. Una funzione può essere continua ma non derivabile (esempio: $f(x) = |x|$ in $x = 0$).

4 Regole di Derivazione

4.1 Derivate Fondamentali

Funzione	Derivata
c (costante)	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Tabella 1: Derivate delle funzioni elementari

4.2 Regole di Calcolo

- **Linearità:** $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$
- **Prodotto:** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Quoziente:** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
- **Composizione:** $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

5 Applicazioni della Derivata

5.1 Studio di Funzioni

La derivata permette di:

- Trovare i punti di massimo e minimo
- Determinare la monotonia della funzione
- Studiare la concavità e i punti di flesso

5.2 Ottimizzazione

La derivata è uno strumento fondamentale per i problemi di ottimizzazione in fisica, economia e ingegneria.

6 Conclusioni

La derivata rappresenta uno degli strumenti matematici più potenti per l'analisi del comportamento delle funzioni. La sua interpretazione geometrica come pendenza della retta tangente fornisce un'intuizione fondamentale per comprendere il concetto di velocità di variazione istantanea.

Riferimenti bibliografici

[1] R.A. Adams, C. Essex. *Calculus: A Complete Course*. Pearson, 2018.

[2] M. Spivak. *Calculus*. Cambridge University Press, 2008.

[3] R. Courant, F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Springer, 1999.