Métodos Numéricos

Sistemas Lineales

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

April 18, 2015

Agenda

Sistemas Lineales.
Introducción.

- En este clase se analizan las distintas estrategias empleadas por los software de cálculo numérico para la solución de sistema lineales y no lineales

Sistemas Lineales.
Introducción.

- En esta sección se trata el problema de determinar los valores de $x_1, x_2, ..., x_n$ que satisfacen un conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Sistemas Lineales.

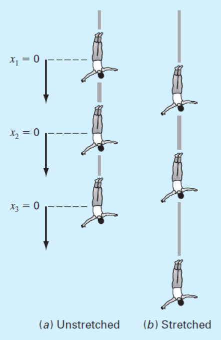
Introducción.

- Los sistemas multivariables pueden ser lineales o no lineales. En esta sección se tratan sistemas lineales de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

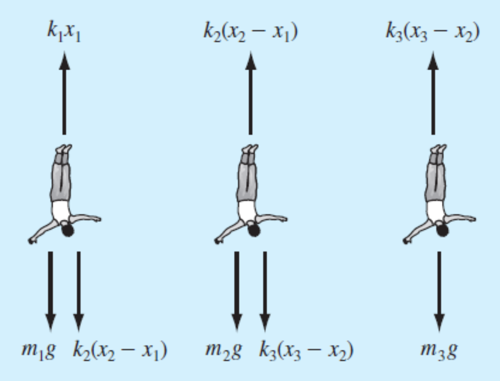
Sistemas Lineales.
Problema.

- **Problema:** Modelar el problema que se muestra en la figura como un sistema de ecuaciones lineales



Sistemas Lineales.
Problema.

- **Solución:**



Sistemas Lineales.
Problema.

- Expresando las relaciones de fuerzas para cada uno de los individuos se tiene:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g + k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g + k_3(x_3 - x_2) - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_3 g - k_3(x_3 - x_2)$$

Sistemas Lineales.
Problema.

- Analizando la solución en estado estable

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= m_1g \\ -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 &= m_2g \\ -k_3x_2 + k_3x_3 &= m_3g \end{aligned}$$

Sistemas Lineales.

Problema.

- El sistema se puede expresar matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineales.
Problema.

- **Problema:** Teniendo en cuenta los siguientes parámetros resuelva el sistema de ecuaciones lineales para el problema de caída libre con 3 individuos.

Individuo	m(Kg)	k(N/m)	longitud(m)
Arriba	60	50	20
Mitad	70	100	20
Abajo	80	50	20

Asuma un valor de la gravedad igual a $9.81 m/s^2$

Sistemas Lineales.
Problema.

- **Solución:** Reemplazando los valores proporcionados en las ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 150 & -100 & 0 \\ -100 & 150 & -50 \\ 0 & -50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 588.6 \\ 686.7 \\ 784.8 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineales.
Problema.

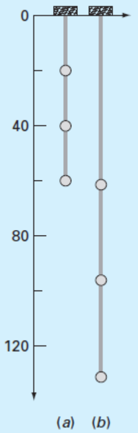
En Scilab el sistema puede ser solucionado introduciendo las siguientes líneas de código:

Código Scilab

```
A = [150 -100 0;-100 150 -50;0 -50 50]
b = [588.6; 686.7; 784.8]
x = A \ b
```

Sistemas Lineales.
Problema.

x	x_i	x_f
41.2020	20	61.2020
55.9170	40	95.9170
71.6130	60	131.6130



Sistemas Lineales.
Problema.

- En el problema anterior se empleo el operador "\" de Scilab para la solución del sistema de ecuaciones
- El operador "\" determina con base en la estructura de la matriz, el método mas eficiente para la solución del problema y retorna el resultado

Sistemas Lineales.
Problema.

- En las siguientes diapositivas se presentan las consideraciones y métodos empleados por los software de cálculo numérico para la solución de sistemas lineales y no lineales

Eliminación Gaussiana.

Introducción.

- La eliminación gaussiana consiste de dos etapas, una etapa de eliminación y una etapa de sustitución hacia atras.
- En la etapa de eliminación es posible que ocurra una división entre cero o entre un número muy pequeño.
- El pivoteo consiste en reordenar las ecuaciones de tal forma que la primera ecuación sea la que tenga el valor absoluto mas grande por columna

Eliminación Gaussiana.

Pivoteo.

- **Problema:** Use eliminación gaussiana para solucionar:

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 3.0000x_2 &= 2.0001 \\ 1.0000x_1 + 1.0000x_2 &= 1.0000 \end{aligned}$$

La respuesta es $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 2/3$

Eliminación Gaussiana.
Pivoteo.

- **Solución:**

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 1.0000 - 0.0003 * \frac{1}{0.0003} & 1.0000 - 3.0000 * \frac{1}{0.0003} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 - 2.0001 * \frac{1}{0.0003} \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Pivoteo.

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ -6666 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{6666}{9999} = \frac{2}{3}$$

Eliminación Gaussiana.

Pivoteo.

Despejando en la primera ecuación x_1 y sustituyendo con el valor encontrado de x_2

$$x_1 = \frac{2.0001 - 3(2/3)}{0.0003}$$

Cifras significativas	x_2	x_1	Error para x_1
3	0.667	-3.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.30000	10
6	0.666667	0.330000	1

Eliminación Gaussiana.

Pivoteo.

- **Problema:** Use eliminación gaussiana para solucionar:

$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$$
$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$$

La respuesta es $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 2/3$

Eliminación Gaussiana.
Pivoteo.

- **Solución:**

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 & 3.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 - 1.0000 * \frac{0.0003}{1.0000} & 3.0000 - 1.0000 * \frac{0.0003}{1.0000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.0001 - 1.0000 * \frac{0.0003}{1.0000} \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Pivoteo.

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 2.9997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.9998 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1.9998}{2.9997} = \frac{2}{3}$$

Eliminación Gaussiana.

Pivoteo.

Despejando en la primera ecuación x_1 y sustituyendo con el valor encontrado de x_2

$$x_1 = \frac{1 - (2/3)}{1}$$

Cifras significativas	x_2	x_1	Error para x_1
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0000

Eliminación Gaussiana.
Determinante.

- La eliminación gaussiana reduce el cálculo del determinante a la multiplicación de los elementos de la diagonal

$$D = a_{11} a'_{22} a''_{33} \ldots a_{nn}^{n-1}$$

Eliminación Gaussiana.
Determinante.

- Se produce una modificación en el cálculo del determinante cuando se realiza pivoteo.

$$D = a_{11} a'_{22} a''_{33} ... a^{n-1}_{nn} (-1)^p$$

Eliminación Gaussiana.
Determinante.

- **Problema:** Usando eliminación gaussiana con pivoteo, calcule el determinante del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + 100000x_2 &= 100000 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Eliminación Gaussiana.

Matriz Tridiagonal.

- Ciertas matrices tienen una estructura que puede ser empleada para obtener una solución con menos cálculos
- Tal es el caso de los sistemas tridiagonales

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & \\ & e_3 & f_3 & g_3 \\ & & e_4 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- Eliminación

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & \\ & e_3 & f_3 & g_3 \\ & & e_4 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2 - g_1 * (e_2/f_1) & g_2 & \\ & e_3 & f_3 & g_3 \\ & & e_4 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 * (e_2/f_1) \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- Eliminación

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & e_3 & f_3 & g_3 \\ & & e_4 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & & f_3 - g_2 * (e_3/f_2') & g_3 \\ & & e_4 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3 - r_2' * (e_3/f_2') \\ r_4 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- Eliminación

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & & f_3' & g_3 \\ & & e_4 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & & f_3' & g_3 \\ & & & f_4 - g_3 * (e_4/f_3') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4 - r_3' * (e_4/f_3') \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- Eliminación

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & & f_3' & g_3 \\ & & & f_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4' \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- Sustitución

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & & f_3' & g_3 \\ & & & f_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4' \end{bmatrix}$$

$$x_4 = \frac{r_4'}{f_4'}, \; x_3 = \frac{r_3' - g_3 x_4}{f_3'}, \ldots$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- La matriz original se transforma en una equivalente teniendo en cuenta las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2' & g_2 & \\ & & f_3' & g_3 \\ & & & f_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_2' &= f_2 - g_1 * (e_2/f_1) \\ f_3' &= f_3 - g_2 * (e_3/f_2') \\ f_4' &= f_4 - g_3 * (e_4/f_3') \end{aligned}$$

Eliminación Gaussiana.

Matriz Tridiagonal.

- **Problema:** Solucionar el siguiente sistema tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & & \\ -1 & 2.04 & -1 & \\ & -1 & 2.04 & -1 \\ & & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana.
Matriz Tridiagonal.

- **Solución:**

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & & \\ & 1.550 & -1 & \\ & & 1.395 & -1 \\ & & & 1.323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 20.8 \\ 14.221 \\ 210.996 \end{bmatrix}$$

x
159.480
124.538
93.778
65.970

Factorización LU.
Introducción.

- La factorización LU consiste en la descomposición de la matriz de coeficientes A en dos matrices triangulares L y U.
- Las matrices triangulares L y U permiten optimizar el proceso de encontrar solución a un sistema de ecuaciones lineales.

Factorización LU.
Derivación.

- La factorización LU se obtiene del siguiente análisis:

Dado el sistema:

$$[A]\{x\} = \{b\}$$
$$[A]\{x\} - \{b\} = 0$$

Dado otro sistema:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$
$$[U]\{x\} - \{d\} = 0$$

Factorización LU.
Derivación.

- Existe una matrix L que al ser multiplicada por la ecuación $[U]\{x\} - \{d\} = 0$ se obtiene el sistema $[A]\{x\} - \{b\} = 0$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L]\{[U]\{x\} - \{d\}\} = [A]\{x\} - \{b\}$$

$$[L][U]\{x\} - [L]\{d\} = [A]\{x\} - \{b\}$$

Factorización LU.
Derivación.

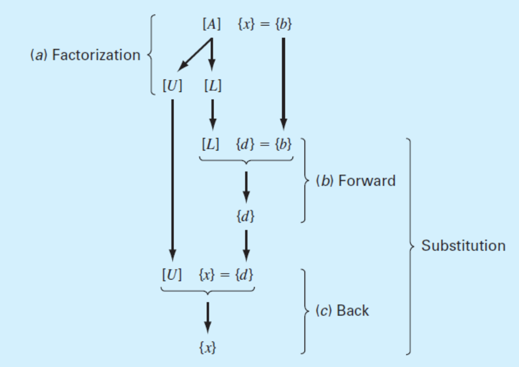
- A partir de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}[L][U]\{x\} - [L]\{d\} &= [A]\{x\} - \{b\} \\ [U]\{x\} - \{d\} &= 0\end{aligned}$$

- Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}[L][U] &= [A] \\ [L]\{d\} &= b \\ [U]\{x\} &= \{d\}\end{aligned}$$

Factorización LU.
Derivación.



Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- A través del proceso de eliminación gaussiana se obtiene la matriz U y la matriz L
- La matriz U es el resultado directo de la eliminación gaussiana
- La matriz L se obtiene a partir de los coeficientes empleados en la eliminación gaussiana

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}, [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ a_{31}/a_{11} & a'_{32}/a'_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

Donde $a'_{32} = a_{32} - a_{12} * (a_{31}/a_{11})$

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- **Problema:** Obtenga la descomposición de la matriz A en las matrices L y U

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.

Eliminación Gaussiana.

En Scilab se puede obtener la factorización LU de un sistema empleando las siguientes líneas de código:

Código Scilab

```
A = [3 -0.1 -0.2;0.1 7 -0.3;0.3 -0.2 10]
[L,U] = lu(A)
```

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- **Solución:**

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1/3 & 1 & 0 \\ 0.3/3 & -0.19/7.0033 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033 & 1 & 0 \\ 0.100 & -0.027130 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- **Problema:** Obtenga la solución final para el siguiente sistema de ecuaciones a partir de la factorización LU

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- **Solución:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033 & 1 & 0 \\ 0.100 & -0.027130 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.

Eliminación Gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 7.00003 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- La factorización con pivoteo puede ser representada en forma matricial de la siguiente forma:

$$[P][A] = [L][U]$$

- Donde P es una matriz de permutación que registra los cambio de fila cuando se realiza pivoteo

Factorización LU.

Eliminación Gaussiana.

- El proceso de encontrar la solución final de un sistema de ecuaciones por medio de las matrices L y U en caso de pivoteo se realiza de la siguiente forma:

$$[L]\{d\} = [P]\{b\}$$
$$[U]\{x\} = \{d\}$$

Factorización LU.

Eliminación Gaussiana.

- **Problema:** Realize la factorización LU y encuentre la solución para el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.00000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

- **Solución:**

$$[A] = \begin{bmatrix} 0.0003 & 3.00000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 & 3.00000 \end{bmatrix}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.

Eliminación Gaussiana.

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 \end{bmatrix}, [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0003 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P][b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

$$[L]\{d\} = [P]\{b\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0003 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9998 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Eliminación Gaussiana.

$$[U]\{x\} = \{d\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.99998 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.33333 \\ 0.66667 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Factorización Cholesky.

- La factorización de Cholesky expresa que una matriz simetrica y definida positiva se puede factorizar de la siguiente forma

$$[A] = [U]^T[U]$$

- La solución del sistema se obtiene por medio de:

$$[U]^T\{d\} = \{b\}$$
$$[U]\{x\} = \{d\}$$

Factorización LU.

Factorización Cholesky.

- Los elementos de la matriz U se pueden calcular a partir de las siguientes ecuaciones

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}}$$

Factorización LU.
Factorización Cholesky.

- **Problema:** Realize la factorización de Cholesky para la siguiente matriz simétrica

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.
Factorización Cholesky.

- **Solución:**

$$[U] = \begin{bmatrix} 2.44949 & 6.123724 & 22.45366 \\ 0 & 4.1833 & 20.9165 \\ 0 & 0 & 6.110101 \end{bmatrix}$$

Factorización LU.

Factorización Cholesky.

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.44949$$
$$u_{12} = a_{12}/u_{11} = 15/2.44949 = 6.123724$$
$$u_{13} = a_{13}/u_{11} = 55/2.44949 = 22.45366$$
$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{55 - (6.123724)^2} = 4.1833$$
$$u_{23} = (a_{23} - u_{12}u_{13})/u_{22} = \frac{225 - 6.123724(22.45366)}{4.1833} = 20.9165$$
$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2} = 6.110101$$

Matriz Inversa.
Introducción.

- Si una matriz $[A]$ es cuadrada, existe otra matriz $[A]^{-1}$, llamada la inversa de $[A]$ para la cual:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

Matriz Inversa.

Cálculo de la Inversa.

- La inversa puede calcularse columna por columna por medio de la factorización LU y vectores de constantes (b) unitarios.

$$[A][x] = [b]$$

- Solucionar el sistema por medio de la factorización LU para $b = [100]'$, $b = [010]'$, $b = [001]'$

Matriz Inversa.
Cálculo de la Inversa.

- **Problema:** Utilice la factorización LU para determinar la matriz inversa para el siguiente sistema

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.
Cálculo de la Inversa.

- **Solución:**

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033 & 1 & 0 \\ 0.100 & -0.027130 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.

Cálculo de la Inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033 & 1 & 0 \\ 0.100 & -0.027130 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.033 \\ -0.1009 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0 & 0 \\ -0.00518 & 0 & 0 \\ -0.01008 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.

Cálculo de la Inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033 & 1 & 0 \\ 0.100 & -0.027130 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.02713 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0 \\ -0.01008 & 0.002710 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.

Cálculo de la Inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033 & 1 & 0 \\ 0.100 & -0.027130 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.002710 & 0.99880 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.
Respuesta al estímulo.

- **Problema:** Encuentre la matriz inversa para el sistema de ecuaciones que corresponde al problema de caída libre con 3 individuos.

$$\begin{bmatrix} 150 & -100 & 0 \\ -100 & 150 & -50 \\ 0 & -50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 588.6 \\ 686.7 \\ 784.8 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.

Respuesta al estímulo.

En Scilab se puede obtener la inversa de la matriz introduciendo las siguientes líneas de código:

Código Scilab

```
A = [150 -100 0;-100 150 -50;0 -50 50]
invA = inv(A)
```

Matriz Inversa.
Respuesta al estímulo.

- **Solución:**

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0200 & 0.0200 & 0.0200 \\ 0.0200 & 0.0300 & 0.0300 \\ 0.0200 & 0.0300 & 0.0500 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.
Respuesta al estímulo.

- La matriz inversa proporciona información acerca de la respuesta al estímulo de un sistema.

$$[A]x = b$$
$$[Interacciones]\,\{Respuesta\} = \{Estimulo\}$$

x = Estado del sistema
b = Estímulos externos o funciones de fuerza
A = Parámetros que expresan como las partes del sistema interactuan

Matriz Inversa.

Respuesta al estímulo.

- Cada uno de los elementos de la inversa representa la respuesta de una parte del sistema a un estímulo en otra parte del sistema

$$x = [A]^{-1} b$$

$$x_1 = a_{11}^{-1} b_1 + a_{12}^{-1} b_2 + a_{13}^{-1} b_3$$
$$x_2 = a_{21}^{-1} b_1 + a_{22}^{-1} b_2 + a_{23}^{-1} b_3$$
$$x_3 = a_{31}^{-1} b_1 + a_{32}^{-1} b_2 + a_{33}^{-1} b_3$$

Matriz Inversa.

Respuesta al estímulo.

- **Problema:** Analice la respuesta del sistema cuando se aplica una fuerza adicional de 1 Newton en cada una de las cuerdas

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0200 & 0.0200 & 0.0200 \\ 0.0200 & 0.0300 & 0.0300 \\ 0.0200 & 0.0300 & 0.0500 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa.
Respuesta al estímulo.

- Al aplicar una fuerza adicional de 1 Newton a cada una de las cuerdas

$$
\begin{aligned}
\Delta x_1 &= a_{11}^{-1}\Delta F_1 + a_{12}^{-1}\Delta F_2 + a_{13}^{-1}\Delta F_3 \\
\Delta x_1 &= 0.02(1) + 0.02(1) + 0.02(1) = 0.06m \\
\Delta x_2 &= a_{21}^{-1}\Delta F_1 + a_{22}^{-1}\Delta F_2 + a_{23}^{-1}\Delta F_3 \\
\Delta x_2 &= 0.02(1) + 0.03(1) + 0.03(1) = 0.08m \\
\Delta x_3 &= a_{31}^{-1}\Delta F_1 + a_{32}^{-1}\Delta F_2 + a_{33}^{-1}\Delta F_3 \\
\Delta x_3 &= 0.02(1) + 0.03(1) + 0.05(1) = 0.1m
\end{aligned}
$$

Métodos Iterativos.
Introducción.

- Los métodos iterativos son una alternativa a los métodos de eliminación
- Estas técnicas son similares a las empleadas para encontrar las raíces de una ecuación

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel.

- El método de Gauss-Seidel es el método iterativo mas comunmente empleado para solucionar sistemas de ecuaciones lineales

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

- El método comienza asignando valores iniciales a las variables y sustituyendo en cada ecuación para encontrar nuevos valores de aproximación.

Métodos Iterativos.

Gauss-Seidel.

$$x_1^j = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{j-1} - a_{13}x_3^{j-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^j = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{j} - a_{23}x_3^{j-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^j = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{j} - a_{32}x_2^{j}}{a_{33}}$$

$$\varepsilon_{a,i} = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| \times 100\% \leq \varepsilon_s$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel.

- **Problema:** Use el método de Gauss-Seidel para solucionar el siguiente sistema. Emplee como valores iniciales $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

La solución es $x_1 = 3$, $x_2 = -2.5$ y $x_3 = 7$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel.

- **Solución:**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel.

- Primera iteración:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.616667$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0.3(0)}{7} = -2.794524$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel.

- Segunda iteración:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel.

- Error:

$$\varepsilon_{a,1} = \left|\frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557}\right| \times 100\% = 12.5\%$$
$$\varepsilon_{a,2} = \left|\frac{-2.499625 - (-2.794524)}{-2.499625}\right| \times 100\% = 11.8\%$$
$$\varepsilon_{a,3} = \left|\frac{7.000291 - 7.005610}{7.000291}\right| \times 100\% = 0.076\%$$

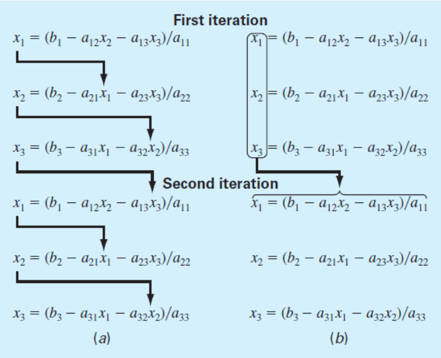
Métodos Iterativos.

Iteración de Jacobi.

- El método de iteración de Jacobi calcula todos los valores del conjunto de variables $x_1, x_2, ..., x_n$ a partir de los valores iniciales
- A diferencia del método de Gauss-Seidel no emplea el valor mas actual de x en cada iteración

Métodos Iterativos.

Iteración de Jacobi.



Métodos Iterativos.

Gauss-Seidel Convergencia.

- Existen casos donde el método de Gauss-Seidel es divergente
- La siguiente condición es suficiente pero no necesaria para la convergencia

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel Relajación.

- La relajación es una modificación del método de Gauss-Seidel para favorecer la convergencia
- Después de calcular un nuevo valor de x, este valor es actualizado por medio de la siguiente ecuación

$$x_i^{new} = \lambda x_i^{new} + (1 - \lambda) x_i^{old}$$

Métodos Iterativos.

Gauss-Seidel Relajación.

- La elección de λ se basa en la experiencia
- Si $\lambda = [1]$ el valor de x no es modificado
- Si $\lambda = [0, 1)$ un sistema no convergente puede hacerse convergente
- Si $\lambda = (1, 2]$, si el sistema es convergente, se acelera su convergencia

Métodos Iterativos.

Gauss-Seidel Relajación.

- **Problema:** Solucionar el siguiente sistema por medio del método de Gauss-Seidel empleando $\lambda = 1.2$ y un criterio de parada de $\varepsilon = 10\%$. Emplee como valores iniciales $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 12x_2 &= 9 \\ 10x_1 - 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

La solución es $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$

Métodos Iterativos.

Gauss-Seidel Relajación.

- **Solución:** Reordenando la ecuaciones para cumplir el criterio de convergencia de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 &= 8 \\ -3x_1 + 12x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel Relajación.

- Despejando x_1 y x_2

$$x_1 = \frac{8 + 2x_2}{10} = 0.8 + 0.2x_2$$
$$x_2 = \frac{9 + 3x_1}{12} = 0.75 + 0.25x_1$$

Métodos Iterativos.

Gauss-Seidel Relajación.

- Primera iteración:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.8 + 0.2(0) = 0.8 \\
x_{1,r} &= 1.2(0.8) - 0.2(0) = 0.96 \\
x_2 &= 0.75 + 0.25(0.96) = 0.99 \\
x_{2,r} &= 1.2(0.99) - 0.2(0) = 1.188
\end{aligned}
$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel Relajación.

- Segunda iteración:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.8 + 0.2(1.188) = 1.0376 \\
x_{1,r} &= 1.2(1.0376) - 0.2(0.96) = 1.05312 \\
\varepsilon_{a,1} &= |\frac{1.05312 - 0.96}{1.05312}| \times 100\% = 8.84\% \\
x_2 &= 0.75 + 0.25(1.05312) = 1.01328 \\
x_{2,r} &= 1.2(1.01328) - 0.2(1.188) = 0.978336 \\
\varepsilon_{a,2} &= |\frac{0.978336 - 1.188}{0.978336}| \times 100\% = 21.43\%
\end{aligned}
$$

Métodos Iterativos.
Gauss-Seidel Relajación.

- Tercera iteración:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.8 + 0.2(0.978336) = 0.995667 \\
x_{1,r} &= 1.2(0.995667) - 0.2(1.05312) = 0.984177 \\
\varepsilon_{a,1} &= \left|\frac{0.984177 - 1.05312}{0.984177}\right| \times 100\% = 7.01\% \\
x_2 &= 0.75 + 0.25(0.984177) = 0.996044 \\
x_{2,r} &= 1.2(0.996044) - 0.2(0.978336) = 0.999586 \\
\varepsilon_{a,2} &= \left|\frac{0.999586 - 0.978336}{0.999586}\right| \times 100\% = 2.13\%
\end{aligned}
$$

Métodos Iterativos.
Sustitución.

- El método de sustitución es empleado para solucionar sistemas de ecuaciones no lineales
- Se emplea la misma estrategia del método de Gauss-Seidel o iteración de punto fijo
- Tiene problemas de convergencia cuando los valores iniciales difieren en gran medida de los valores verdaderos
- La convergencia también depende de la manera en que las ecuaciones de sustitución son formuladas

Métodos Iterativos.
Sustitución.

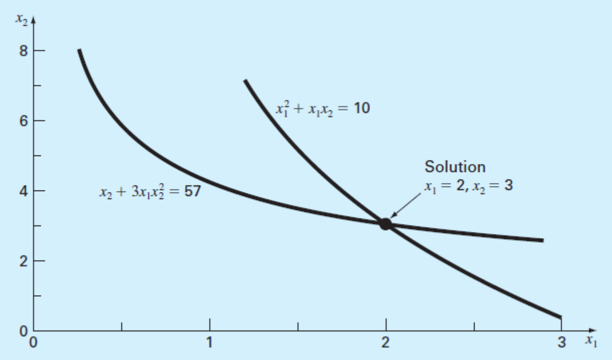
- **Problema:** Solucionar el siguiente sistema por medio del método de sustitución. Emplee como valores iniciales $x_1 = 1.5, x_2 = 3.5$

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_1 x_2 &= 10 \\
x_2 + 3x_1 x_2^2 &= 57
\end{aligned}
$$

La solución es $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$

Métodos Iterativos.
Sustitución.

- **Solución:**



Métodos Iterativos.
Sustitución.

- **Solución:**

$$x_1 = \sqrt{10 - x_1 x_2}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - x_2}{3x_1}}$$

Métodos Iterativos.
Sustitución.

- **Primera iteración:**

$$x_1 = \sqrt{10 - 1.5(3.5)} = 2.17945$$
$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - 3.5}{3(2.17945)}} = 2.86051$$

- **Segunda iteración:**

$$x_1 = \sqrt{10 - 2.17945(2.86051)} = 1.94053$$
$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - 2.86051}{3(1.94053)}} = 3.04955$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- El método de Newton-Raphson es empleado para solucionar sistemas de ecuaciones no lineales
- La ecuación del método de Newton-Raphson para sistemas multivariables se deriva de igual forma que para sistemas con una variable
- Se debe emplear una serie de Taylor multivariable por el hecho que mas de una variable independiente contribuye en la solución

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- **Serie de Taylor:** Representación de una función por medio de una suma infinita de términos, los cuales son calculados a partir de los valores de las derivadas de la función en un punto x_i

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n$$

Métodos Iterativos.

Newton-Raphson.

- Para un sistema de dos variables una serie de Taylor de primer orden para cada ecuación no lineal se presenta a continuación

$$f_{1,i+1} = f_{1,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i})\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i})\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}$$
$$f_{2,i+1} = f_{2,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i})\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i})\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2}$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- Reordenando términos

$$\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} x_{1,i+1} + \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} x_{2,i+1} = -f_{1,i} + x_{1,i} \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + x_{2,i} \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} x_{1,i+1} + \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} x_{2,i+1} = -f_{2,i} + x_{1,i} \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + x_{2,i} \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2}$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- Las anteriores ecuaciones corresponden a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incognitas. Despejando se obtiene

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} - \frac{f_{1,i}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - f_{2,i}\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}$$

$$x_{2,i+1} = x_{2,i} - \frac{f_{2,i}\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} - f_{1,i}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}$$

Métodos Iterativos.

Newton-Raphson.

- El denominador de las ecuaciones anteriores se denomina el determinante del Jacobiano del sistema

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos.

Newton-Raphson.

- **Problema:** Solucionar el siguiente sistema por medio del método de Newton-Raphson. Emplee como valores iniciales $x_1 = 1.5, x_2 = 3.5$

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_1 x_2 &= 10 \\
x_2 + 3x_1 x_2^2 &= 57
\end{aligned}
$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- **Solución:** Evaluando las funciones en los valores iniciales

$$f_{1,0} = (1.5)^2 + 1.5(3.5) - 10 = -2.5$$
$$f_{2,0} = 3.5 + 3(1.5)(3.5)^2 - 57 = 1.625$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- Calculando las derivadas parciales y evaluando en las condiciones iniciales se tiene

$$\frac{\partial f_{1,0}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 = 2(1.5) + 3.5 = 6.5$$

$$\frac{\partial f_{2,0}}{\partial x_1} = 3x_2^2 = 3(3.5)^2 = 36.75$$

$$\frac{\partial f_{1,0}}{\partial x_2} = x_1 = 1.5$$

$$\frac{\partial f_{2,0}}{\partial x_2} = 1 + 6x_1x_2 = 1 + 6(1.5)(3.5) = 32.5$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- Con los resultados de las derivadas parciales evaluadas en los valores iniciales se calcula el determinante del Jacobiano

$$det(J) = \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}$$

$$det(J) = 6.5(32,5) - 1.5(36.75) = 156.125$$

Métodos Iterativos.
Newton-Raphson.

- Con los valores calculados anteriormente se encuentra el valor de x_1 y x_2 para la siguiente iteración

$$x_1 = 1.5 - \frac{-2.5(32.5) - 1.625(1.5)}{156.125} = 2.03603$$
$$x_2 = 3.5 - \frac{1.625(6.5 - (-2.5)(36.75)}{156.125} = 2.84388$$

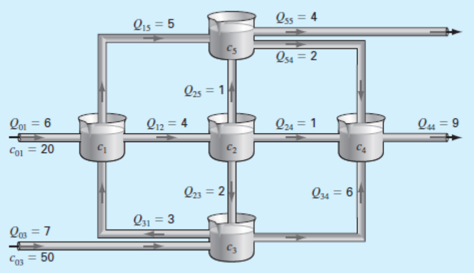
Métodos Iterativos.
Reformulación.

- El método de Newton-Raphson requiere de valores iniciales muy cercanos a la solución verdadera para su convergencia
- Otra técnica consiste en reformular el sistema no lineal como una sola función y obtener los valores de x que minimizan la función por medio de una técnica de optmización

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2, ..., x_n)]^2$$

Problemas I

- **Problema:** La razon de flujo a través de una tubería se calcula como el producto del flujo (Q) y la concentración (c). Encontrar el valor de todas las concentraciones en el siguiente sistema en estado estable



Problemas I

- **Problema:** Dadas las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\
-3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\
-8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20
\end{aligned}
$$

Solucione el sistema empleando eliminación gaussiana con pivoteo y calcule el determinante

Problemas I

- **Problema:** Dadas las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Solucione el sistema empleando factorización LU con pivoteo y calcule el determinante

Problemas I

- **Problema:** Dadas las ecuaciones (Sistema de tres individuos unidos por cuerdas)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Encuentre la inversa
Determine el cambio de posición del primer individuo si la masa del tercero se incrementa en 100 Kg
¿Que fuerza debe aplicarse al tercer individuo para que su posición final sea 140 m?

Problemas I

- **Problema:** Dadas las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\
-3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\
-8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20
\end{aligned}
$$

Empleando el método de Gauss-Seidel sin relajación y con relajación de $\lambda = 1.2$ encuentre la solución del sistema con $\varepsilon_s \leq 5\%$. Si es necesario reordene las ecuaciones para obtener la convergencia

Problemas I

- **Problema:** Dadas las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + x + 0.5 \\
y + 5xy &= x^2
\end{aligned}
$$

Use el método de Newton-Raphson para encontrar la solución del sistema de ecuaciones no lineal. Emplee como valores iniciales $x = 1.2$ y $y = 1.2$

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.