Métodos Numéricos

Ajuste de Curvas

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

May 12, 2015

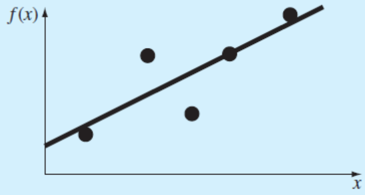
Agenda

Ajuste de Curvas.
Introducción.

- En esta sección se trata el problema de ajustar un modelo matemático (curva) a un conjunto de datos discretos
- Cuando el conjunto de datos presenta error, el modelo matemático (curva) representa la tendencia de los datos (Regresión)
- Cuando el conjunto de datos no presenta error, el modelo matemático (curva o curvas) contiene todo el conjunto de datos (Interpolación)

Ajuste de Curvas.
Introducción.

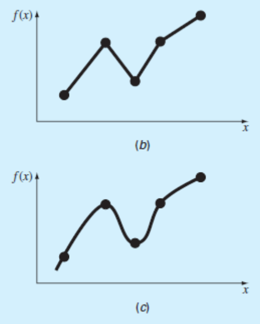
- Regresión



(a)

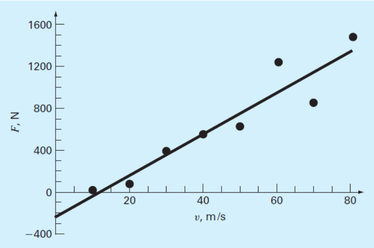
Ajuste de Curvas.
Introducción.

- Interpolación



Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- Dado un conjunto de observaciones $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, se busca obtener la línea recta que siga la tendencia de los puntos



Regresión Lineal

Mínimos Cuadrados

- Dado un conjunto de observaciones $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, la expresión matemática para una línea recta que aproxima la tendencia de las observaciones es

$$y = a_0 + a_1 x + e$$

Donde:
a_0 es el intercepto
a_1 es la pendiente
e es el error entre las observaciones y el modelo

Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

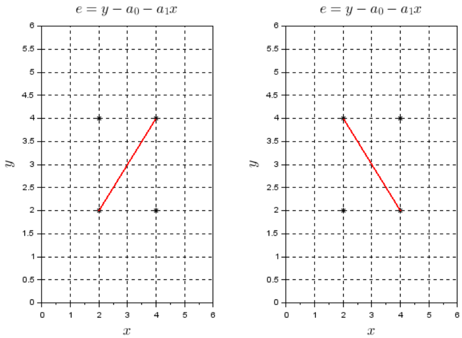
- Los parámetros a_0 y a_1 definen una recta. El objetivo es encontrar los parámetros a_0 y a_1 que minimicen el error respecto a las observaciones

$$e = y - a_0 - a_1 x$$

Donde:
y es el valor de la observación
$a_0 + a_1 x$ es el valor aproximado por la ecuación lineal

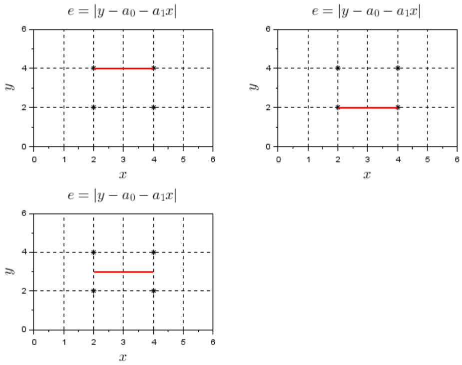
Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- Tomando $e = y - a_0 - a_1 x$
- En la gráfica de la izquierda $e = 2 + 0 + 0 - 2 = 0$



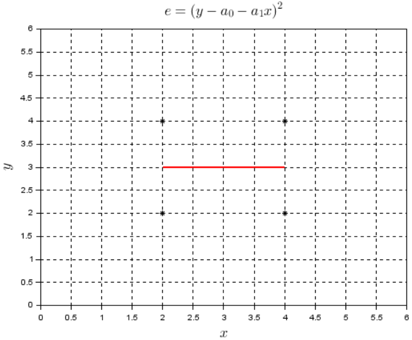
Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- Tomando $e = |y - a_0 - a_1 x|$
- En la gráfica superior-izquierda $e = 0 + 0 + 2 + 2 = 4$
- En la gráfica inferior-izquierda $e = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$



Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- Tomando $e = (y - a_0 - a_1 x)^2$
- En la gráfica $e = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$
- ¿Que sucede en otros casos?



Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- La estrategia en el método de mínimos cuadrados es minimizar la sumatoria de los cuadrados del error.
- Los cuadrados del error son tambien conocidos como residuos (residuals)

$$min(S_r) = min(\sum_{i=1}^{n} e_i^2) = min(\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2)$$

Regresión Lineal

Mínimos Cuadrados

- Las fórmulas para encontrar a_0 y a_1 se obtienen de la siguiente manera

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum(y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum[(y_i - a_0 - a_1 x_i)x_i]$$

Igualando a cero

$$0 = \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i$$

$$0 = \sum x_i y_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2$$

Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

Reordenando, se obtiene un sistema de ecuaciones lineal de dos incognitas a_0 y a_1

$$na_0 + (\sum x_i)a_1 = \sum y_i$$
$$(\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 = \sum x_i y_i$$

Solucionando el sistema de ecuaciones se tiene

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$
$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- **Problema** Ajuste una línea a los valores de la tabla empleando la técnica de mínimos cuadrados. *x* es la variable independiente (m/s), *y* es la variable dependiente (N)

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	10	25	100	250
2	20	70	400	1,400
3	30	380	900	11,400
4	40	550	1,600	22,000
5	50	610	2,500	30,500
6	60	1,220	3,600	73,200
7	70	830	4,900	58,100
8	80	1,450	6,400	116,000
$\sum$	360	5,135	20,400	312,850

Regresión Lineal
Mínimos Cuadrados

- **Solución**

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{8(312850) - 360(5135)}{8(20400) - (360)^2} = 19.47024$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

$$\overline{y} = \frac{5135}{8} = 641.875,\ \overline{x} = \frac{360}{8} = 45$$

$$a_0 = 641.875 - 19.47024(45) = -234.2857$$

$$F = -234.2857 + 19.47024v$$

Regresión Lineal
Cuantificación del error

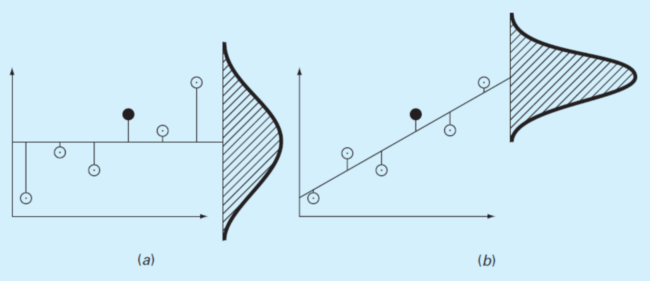
- El error estandar de la estimación se calcula por medio de

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$$

Donde
$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$

Regresión Lineal
Cuantificación del error

- El error de regresión se calcula como la diferencia entre una aproximación por medio de la línea que resulta de la media de los puntos y la línea que resulta de la regresión



Regresión Lineal
Cuantificación del error

- El coeficiente de determinación r^2 y el coeficiente de correlación r se calculan de la siguiente manera

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

$$r = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}}$$

Donde
$S_t = \sum (y_i - \overline{y})^2$
$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$

Regresión Lineal
Cuantificación del error

- El mejor resultado se obtiene con $r^2 = 1$. $r^2 = 1$ implica que $S_r = 0$. Este resultado indica que la recta se ajusta a los datos perfectamente.
- Un resultado de $r^2 = 0$ implica $S_r = S_t$. Este resultado indica que no hay mejora con la regresión.

Regresión Lineal
Cuantificación del error

- **Problema** Encuentre el error estandar de la estimación, el coeficiente de determinación y el coeficiente de correlación para los datos de la tabla

i	x_i	y_i	$a_0 + a_1 x_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$
1	10	25	−39.58	380,535	4,171
2	20	70	155.12	327,041	7,245
3	30	380	349.82	68,579	911
4	40	550	544.52	8,441	30
5	50	610	739.23	1,016	16,699
6	60	1,220	933.93	334,229	81,837
7	70	830	1,128.63	35,391	89,180
8	80	1,450	1,323.33	653,066	16,044
Σ	360	5,135		1,808,297	216,118

Regresión Lineal
Cuantificación del error

- **Solución**

$$s_{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{216118}{8-2}}$$

$$r^2 = \frac{1808297 - 216118}{1808297} = 0.8805$$

$$r = 0.9383$$

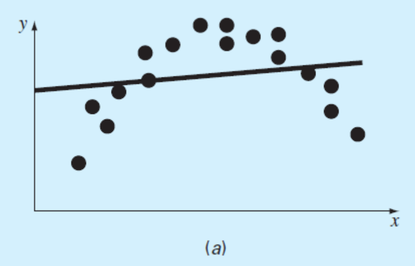
Regresión Lineal
Comentarios generales

Para emplear el método de mínimos cuadrados se debe tener en cuenta:

- Los valores de x se conocen sin error
- Los valores de y tienen la misma varianza
- Los valores de y tienen un comportamiento de distribución normal

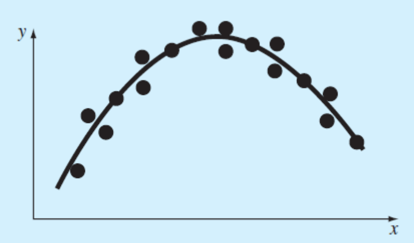
Regresión Polinomial.
Introducción.

- Un conjunto de datos que exhibe un patrón podría no ser bien representado por una línea recta



Regresión Polinomial.
Introducción.

- Para estos casos una alternativa es usar transformaciones, la otra alternativa es ajustar los datos a un polinomio



(b)

Regresión Polinomial.
Mínimos Cuadrados.

- La técnica de mínimos cuadrados se puede extender a polinomios de mayor orden (orden ≥ 2)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e$$

Regresión Polinomial.
Mínimos Cuadrados.

- Encontrando las derivadas parciales del error

$$S_r = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum x_i(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum x_i^2(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$

Regresión Polinomial.
Mínimos Cuadrados.

- Igualando a cero y reordenando las ecuaciones se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned}(n)a_0 + (\sum x_i)a_1 + (\sum x_i^2)a_2 &= \sum y_i \\ (\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 + (\sum x_i^3)a_2 &= \sum x_i y_i \\ (\sum x_i^2)a_0 + (\sum x_i^3)a_1 + (\sum x_i^4)a_2 &= \sum x_i^2 y_i\end{aligned}$$

Regresión Polinomial.

Mínimos Cuadrados.

- Determinar los coeficientes de un polinomio de orden m corresponde a solucionar un sistema de $m+1$ ecuaciones

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m + e$$

Regresión Polinomial.
Cuantificación del error.

- El error estándar al ajustar una curva por medio de un polinomio de orden m a partir de un conjunto de n observaciones es

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}}$$

- El coeficiente de determinación se calcula de la siguiente manera

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Regresión Polinomial.
Cuantificación del error.

- **Problema:** Ajustar un polinomio de segundo orden a los datos de las dos primeras columnas de la tabla y encontrar el error estándar y el coeficiente de correlación

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$
0	2.1	544.44	0.14332
1	7.7	314.47	1.00286
2	13.6	140.03	1.08160
3	27.2	3.12	0.80487
4	40.9	239.22	0.61959
5	61.1	1272.11	0.09434
$\sum$	152.6	2513.39	3.74657

Regresión Polinomial.
Cuantificación del error.

- **Solución:**

$$
\begin{array}{ccc}
m = 2 & \sum x_i = 15 & \sum x_i^4 = 979 \\
n = 6 & \sum y_i = 152.6 & \sum x_i y_i = 585.6 \\
\overline{x} = 2.5 & \sum x_i^2 = 55 & \sum x_i^2 yi = 2488.8 \\
\overline{y} = 25.433 & \sum x_i^3 = 225 &
\end{array}
$$

Regresión Polinomial.
Cuantificación del error.

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{bmatrix}$$

$$a = [2.4786, 2.3593, 1.8607]'$$

$$y = 2.4786 + 2.3593x + 1.8607x^2$$

$$s_{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{3.74657}{6 - (2+1)}} = 1.1175$$

$$r^2 = \frac{2513.39 - 3.74657}{2513.39} = 0.99851$$

$$r = 0.99925$$

Regresión Multivariable.
Introducción.

- La técnica de regresión puede aplicarse al caso donde y es una función lineal de dos o más variables
- Para el caso de dos dimensiones la regresión esta determinada por un plano
- Por ejemplo y puede ser una función lineal de x_1 y x_2

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + e$$

Regresión Multivariable.

Mínimos Cuadrados.

- Encontrando las derivadas parciales del error

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_{1,i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_{2,i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})$$

Regresión Multivariable.
Mínimos Cuadrados.

- Igualando a cero y reordenando las ecuaciones se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i}x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i}y_i \\ \sum x_{2,i}y_i \end{bmatrix}$$

Regresión Multivariable.
Mínimos Cuadrados.

- **Problema** Emplear la técnica de regresión lineal múltiple para ajustar los datos de la tabla a una curva.

y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
5	0	0	0	0	0	0	0
10	2	1	4	1	2	20	10
9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
0	1	3	1	9	3	0	0
3	4	6	16	36	24	12	18
27	7	2	49	4	14	189	54
54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

Regresión Multivariable.
Mínimos Cuadrados.

- **Solución**

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Regresión Multivariable.

Mínimos Cuadrados.

- El caso anterior se puede extender a m dimensiones

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m + e$$

Interpolación.
Introducción.

- La siguiente tabla muestra la densidad y viscosidad del aire en función de la temperatura

T, °C	ρ, kg/m³	μ, N · s/m²	υ, m²/s
−40	1.52	1.51×10^{-5}	0.99×10^{-5}
0	1.29	1.71×10^{-5}	1.33×10^{-5}
20	1.20	1.80×10^{-5}	1.50×10^{-5}
50	1.09	1.95×10^{-5}	1.79×10^{-5}
100	0.946	2.17×10^{-5}	2.30×10^{-5}
150	0.835	2.38×10^{-5}	2.85×10^{-5}
200	0.746	2.57×10^{-5}	3.45×10^{-5}
250	0.675	2.75×10^{-5}	4.08×10^{-5}
300	0.616	2.93×10^{-5}	4.75×10^{-5}
400	0.525	3.25×10^{-5}	6.20×10^{-5}
500	0.457	3.55×10^{-5}	7.77×10^{-5}

Interpolación.

Introducción.

- Al necesitar un dato que no esta en la tabla se debe interpolar, es decir, encontrar el valor deseado con base en los valores adyacentes
- La forma más fácil de interpolar sería conectar los valores adyacentes por medio de una línea
- Cuando los datos presentan algún grado de curvatura lo más conveniente es encontrar un polinomio con base en los datos

Interpolación.
Introducción.

- La fórmula general para un polinomio de orden m es la siguiente

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

- Para un conjunto de n puntos, existe únicamente un polinomio de orden $m = (n - 1)$ que pasa a través de los puntos
- *Ejemplo:* una línea (orden 1) está determinada por dos puntos, una parábola (orden 2) está determinada por tres puntos

Interpolación.
Introducción.

- **Problema:** Determine los coeficientes de la parábola $f(x) = p_0 x^2 + p_1 x + p_2$, que pasa a través de los siguientes valores

$$x_1 = 300, f(x_1) = 0.616$$
$$x_2 = 400, f(x_2) = 0.525$$
$$x_3 = 500, f(x_3) = 0.457$$

Nota: Para solucionar el problema construya un sistema de ecuaciones, resuelvalo y encuentre el número de condición de la matriz de coeficientes

Interpolación.

Introducción.

- **Solución:**

$$0.616 = p_0(300)^2 + p_1(300) + p_2$$
$$0.525 = p_0(400)^2 + p_1(400) + p_2$$
$$0.457 = p_0(500)^2 + p_1(500) + p_2$$

$$\begin{bmatrix} 90000 & 300 & 1 \\ 160000 & 400 & 1 \\ 250000 & 500 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.616 \\ 0.525 \\ 0.457 \end{bmatrix}$$

$$p = [0.00000115, -0.001715, 1.027]'$$

$$f(x) = 0.00000115x^2 - 0.001715x + 1.027$$

Interpolación.
Introducción.

- Las matrices que siguen la forma de *Vandermonde* son altamente mal condicionadas

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f(x_1) \\ \sum f(x_2) \\ \sum f(x_3) \end{bmatrix}$$

- A causa de esto se emplean otras formas para encontrar los coeficientes que no presenten esta condición

Interpolación.

Introducción.

- **Problema:** Obtenga el número de condición para la matriz A, comente sobre la estabilidad de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 90000 & 300 & 1 \\ 160000 & 400 & 1 \\ 250000 & 500 & 1 \end{bmatrix}$$

Interpolación de Newton.
Introducción.

- Existen otras formas de expresar un polinomio de interpolación distintas a la forma general
- El polinomio de interpolación de Newton es una de aquellas formas
- A continuación se presenta la derivación lineal, cuadrática y finalmente la forma general para polinomios de interpolación de Newton

Interpolación de Newton.
Lineal.

- La forma más simple de interpolación es conectar dos puntos con una línea recta

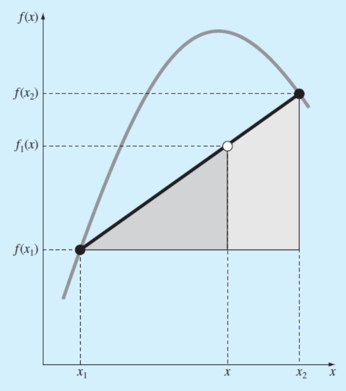
Interpolación de Newton.
Lineal.

Por ley de triángulos:

$$\frac{f_1(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reordenando:

$$f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



Interpolación de Newton.

Lineal.

- **Problema:** Estimar el logaritmo natural de 2 empleando interpolación lineal. Realice los cálculos entre $ln(1) = 0$ y $ln(6) = 1.791759$. Repita el procedimiento desde $ln(1)$ hasta $ln(4) = 1.386294$. Note que el valor verdadero de $ln(2) = 0.6931472$

Interpolación de Newton.
Lineal.

- **Solución:**

Desde 1 hasta 6

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.3583519$$
$$\varepsilon_t = \frac{0.6931472 - 0.3583519}{0.6931472}(100) = 48,3\%$$

Desde 1 hasta 4

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.4620981$$
$$\varepsilon_t = \frac{0.6931472 - 0.4620981}{0.6931472}(100) = 33,3\%$$

Interpolación de Newton.
Cuadrática.

- Una forma de mejorar los resultados de la interpolación, es introducir un grado de curvatura a la línea que atraviesa el conjunto de puntos
- Con tres puntos se puede interpolar por medio de un polinomio de segundo orden (forma cuádratica o parábola)
- La forma de un polinomio de interpolación de Newton de segundo orden es la siguiente

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Interpolación de Newton.
Cuadrática.

Para determinar el valor del coeficiente b_0, se hace $x = x_1$

$$b_0 = f(x_1)$$

Para determinar el valor del coeficiente b_1, se hace $x = x_2$

$$b_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Para determinar el valor del coeficiente b_2, se hace $x = x_3$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3 - x_1}$$

Interpolación de Newton.
Cuadrática.

- **Problema:** Estimar el logaritmo natural de 2 empleando interpolación cuadrática (polinomio de segundo orden) a partir de los siguientes puntos

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, f(x_1) = 0 \\ x_2 &= 4, f(x_2) = 1.386294 \\ x_3 &= 6, f(x_3) = 1.791759 \end{aligned}$$

Interpolación de Newton.
Cuadrática.

- **Solución:**

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 0 \\
b_1 &= \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.4620981 \\
b_2 &= \frac{\frac{1.791759 - 1.386294}{6 - 4} - 0.4620981}{6 - 1} = -0.0518731 \\
f_2(x) &= 0 + 0.4620981(x - 1) - 0.0518731(x - 1)(x - 4) \\
f_2(2) &= 0.5658444 \\
\varepsilon_t &= \frac{0.6931472 - 0.5658444}{0.6931472}(100) = 18.4\%
\end{aligned}
$$

Interpolación de Newton.
General.

- El análisis para el caso lineal y el caso cuadrático, permiten generalizar para un polinomio de Newton de orden m

$$f_m(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + ... + b_m(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)$$

- Los coeficientes se encuentran de la siguiente manera

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_1) \\ b_1 &= f[x_2, x_1] \\ b_2 &= f[x_3, x_2, x_1] \\ b_m &= f[x_{m+1}, x_m, ..., x_2, x_1] \end{aligned}$$

Interpolación de Newton.

General.

- Las funciones con corchetes corresponden al cálculo de diferencias finitas

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_{m+1}, x_m, ..., x_2, x_1] = \frac{f[x_{m+1}, x_m, ..., x_2] - f[x_m, x_{m-1}, ..., x_1]}{x_{m+1} - x_1}$$

Interpolación de Newton.
General.

- Gráficamente el cálculo de las diferencias finitas muestra un comportamiento recursivo.

x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	$f[x_4, x_3, x_2, x_1]$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$	$f[x_4, x_3, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_4, x_3]$		
x_4	$f(x_4)$			

Interpolación de Newton.
General.

- La forma general del polinomio de interpolación de Newton, teniendo en cuenta lo expresado anteriormente es la siguiente

$$
\begin{aligned}
f_m(x) = f(x_1) + f[x_2, x_1](x - x_1) + \\
f[x_3, x_2, x_1](x - x_1)(x - x_2) + \\
f[x_{m+1}, x_m, ..., x_2, x_1](x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)
\end{aligned}
$$

Interpolación de Newton.

General.

- **Problema:** Estimar el logaritmo natural de 2 empleando un polinomio de interpolación de Newton de orden tres a partir de los siguientes puntos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1, f(x_1) = 0 \\
x_2 &= 4, f(x_2) = 1.386294 \\
x_3 &= 6, f(x_3) = 1.791759 \\
x_4 &= 5, f(x_4) = 1.609438
\end{aligned}
$$

Nota: Encuentre la solución construyendo la tabla de las diferencias

Interpolación de Newton.
General.

- **Solución:**

Primeras Diferencias

$$f[x_2, x_1] = \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.4620981$$
$$f[x_3, x_2] = \frac{1.791759 - 1.386294}{6 - 4} = 0.2027326$$
$$f[x_4, x_3] = \frac{1,609438 - 1.791759}{5 - 6} = 0.1823216$$

Interpolación de Newton.
General.

Segundas Diferencias

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0.2027326 - 0.4620981}{6 - 1} = -0.05187311$$
$$f[x_4, x_3, x_2] = \frac{0.1823216 - 0.2027326}{5 - 4} = -0.02041100$$

Interpolación de Newton.
General.

Terceras Diferencias

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{-0.02041100 - (-0.05187311)}{5 - 1} = 0.007865529$$

Interpolación de Newton.
General.

x_i	$f(x_i)$	**First**	**Second**	**Third**
1	0	0.4620981	−0.05187311	0.007865529
4	1.386294	0.2027326	−0.02041100	
6	1.791759	0.1823216		
5	1.609438			

$$f_3(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2) + b_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$f_3(x) = 0 + 0.4620981(x - 1) - 0.05187311(x - 1)(x - 4) + 0.007865529(x - 1)(x - 4)(x - 6)$$

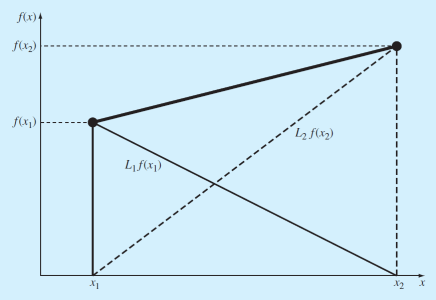
Interpolación de Lagrange.
Introducción.

Un polinomio de interpolación lineal se puede expresar de la forma

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

L_1 y L_2 son coeficientes de ponderación

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$
$$L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Interpolación de Lagrange.
Lineal.

- A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene el polinomio de interpolación de Lagrange de primer orden

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Interpolación de Lagrange.

Cuadrática.

- A partir de tres puntos se puede encontrar un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo orden (parábola)
- Para este caso la suma de tres parábolas resulta en la parábola única que une los tres puntos.

$$f_2(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

Interpolación de Lagrange.
General.

- La forma general del polinomio de interpolación de Lagrange, es la siguiente

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} L_i(x) f(x_i)$$

- Los coeficientes se encuentran de la siguiente manera

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{m+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolación de Lagrange.
General.

- **Problema:** Use un polinomio de interpolación de Lagrange de primer y segundo orden para evaluar un valor de densidad cuando $x = 15$ grados centígrados

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0, f(x_1) = 3.85 \\
x_2 &= 20, f(x_2) = 0.800 \\
x_3 &= 40, f(x_3) = 0.212
\end{aligned}
$$

Interpolación de Lagrange.
General.

- **Solución:**

Polinomio de Lagrange de primer orden

$$f_1(x) = \frac{15-20}{0-20}3.85 + \frac{15-0}{20-0}0.800 = 1.5625$$

Interpolación de Lagrange.
General.

Polinomio de Lagrange de segundo orden

$$f_2(x) = \frac{(15-20)(15-40)}{(0-20)(0-40)}3.85 + \frac{(15-0)(15-40)}{(20-0)(20-40)}0.800 + \frac{(15-0)(15-20)}{(40-0)(40-20)}0.212 = 1.3316875$$

Problemas I

- **Problema:** Realizar una función en scilab que permita aplicar el método de regresión lineal por mínimos cuadrados. La función debe recibir los valores de x, y y debe retornar en un vector el valor de la pendiente y el intercepto $[a_1, a_0]$ y en otra variable el valor del coeficiente de determinación r^2

Problemas I

- **Problema:** Realizar una función en scilab que permita aplicar el método de interpolación de Newton. La función debe recibir los valores de x, y y un valor en el cual el polinomio de interpolación es evaluado. Se debe retornar el valor interpolado

Problemas I

- **Problema:** Realizar una función en scilab que permita aplicar el método de interpolación de Lagrange. La función debe recibir los valores de x, y y un valor en el cual el polinomio de interpolación es evaluado. Se debe retornar el valor interpolado

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.