

# Métodos Numéricos

## Estabilidad en Sistemas Lineales

Daniel Barragán <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación  
Universidad del Valle

November 6, 2014

# Agenda

- 1 Estabilidad en Sistemas Lineales
  - Número de Condición

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- En los problemas de Ingeniería se presenta la siguiente relación

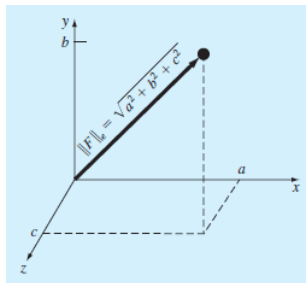
$$\textit{Entrada} + \textit{Sistema} = \textit{Salida}$$

- Cuando se conoce entrada-salida ó sistema-salida y se desea encontrar el sistema ó entrada respectivamente el problema se conoce como problema inverso

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- Una norma es un valor real que proporciona una medida de la longitud de un vector o matriz



# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- Las p-normas para *vectores* se puede calcular a partir de la siguiente ecuación

$$||X||_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- El vector de norma uniforme o de máxima magnitud se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$||X||_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- La norma de suma de columna para las matrices se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- La norma de suma de fila para las matrices se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- La norma 2 para las matrices se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$\|A\|_2 = (\mu_{\max})^{1/2}$$

Donde  $\mu$  es el eigenvalor mas grande de  $[A]^T[A]$

- La norma de *Frobenius* es otro estimador

$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- **Problema:** Encuentre la norma 2 de la resta entre los vectores  $a$  y  $b$

$$a = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$



# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- Solución:**

$$a - b = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.03 \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

$$\|a - b\|_2 = \sqrt{(-0.01)^2 + (0.03)^2 + (-0.02)^2} = 0.0374$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- **Problema:** Encuentre la solución para  $[x_1, x_2]$ , calcule la norma 2 de la diferencia entre las soluciones

Sin Ruido

$$\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix}$$

Con Ruido

$$\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- **Solución:**

$$x(\text{sinruido}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(\text{conruido}) = \begin{bmatrix} 7.0089 \\ -8.3957 \end{bmatrix}$$

$$\|b - b_{\text{exacta}}\|_2 = 0.0374$$

$$\|x - x_{\text{exacta}}\|_2 = 11.1528$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- En el problema anterior una pequeña variación en la medición del vector de salida ( $b$ ), produjo un cambio considerable en la estimación de  $[x_1, x_2]$
- Cuando se obtienen resultados de este tipo, se dice que la matriz  $A$  es inestable, la inestabilidad de un sistema se mide con el número de condición

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- El número de condición permite medir la sensibilidad de la solución ante las perturbaciones o ruido

Si la matriz es cuadrada:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Si la matriz no es cuadrada:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2$$

# Número de Condición.

## Análisis de Error y Condición.

- **Problema:** Encuentre el número de condición de la matriz  $A$ , y comente sobre su estabilidad.

$$A = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix}$$

**Nota:** La matriz  $A$  es inestable si el número de condición es mucho mayor a 1

# Bibliografía I



S. Chapra.

*Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.*

Mac Graw Hill, 2010.