

机场的出租车问题

摘要

本文首先站在出租车司机的角度，基于 0-1 规划、蒙特卡洛方法及排队论建立了数学模型，给出了以利润最大化为目标的决策的同时，也为出租车司机提供了不同时间段下的最佳决策方案；然后我们站在“机场管理者”的角度，同样利用 Erlang 等待公式、大数据模拟、元胞自动机、正态分布知识，给出了“最佳乘车点”的安排方案与一种基于“短程票”的出租车安排方案。

针对问题一，我们首先基于“空载返回市区载客”以及“留在机场载客”这两种决策提出了影响司机决策的**直接影响因素**：载人返程油耗、等待时间、载人利润、空载油耗以及市区载客利润。然后，我们以司机的利润最大化为目标，使用 0-1 变量 Q 来表征对这两种方案的选择，从而建立了**0-1 整数规划模型**。通过模型求解，若 $Q = 1$ ，则选择“留在机场载客”；若 $Q = 0$ ，则选择“空载返回市区载客”。

针对问题二，我们选择上海浦东国际机场作为研究对象，收集到了机场内出租车以及到港人数数据。基于这些收集到的数据我们采用**蒙特卡洛方法和排队论模型**进行分析，结合**正态分布相关知识**，给出了三个时间段的司机决策方案：0 时 - 7 时，等待载客；7 时 - 16 时，空载返回；16 时 - 24 时，等待载客。为了保证模型的稳健性和可信性，我们采用**灵敏度分析**的方法对模型合理性进行了探究，同时计算数据之间的 **Spearman 相关系数**发现：在 99% 的置信区间上，我们可以信任该模型。

针对问题三，参考国内机场 4 种出租车上客系统，我们最终选择了矩阵式（二车道）上客系统。然后我们基于队列模拟模型对出租车和乘客进行抽象，并创新使用了 **Erlang 等待公式**建立模型。通过调查得到的数据在 **Matlab** 中编程求解，得出在车辆到达可以立即载客的的概率较高并且车辆逗留时间不会太久的前提下，最佳上车点的个数为 5 个，共设置 10 个车位，每辆车逗留时间为 2.60 分钟。

针对问题四，以“短程载客”和“长程载客”的司机收益相对均衡，参考国内有关机场的做法，我们提出了对载客距离较短的司机“**短途票**”的方案。我们以距离上海浦东国际机场 17 km 的宣桥镇为上界，寻找短程和长程的临界点，使“短程载客”和“长程载客”的司机收益相对均衡。通过模型求解，得出距离 $d = 11.7\text{km}$ 时，“短程载客”和“长程载客”的司机收入差值最小。解决方案：司机在接到出行距离小于 11.7 km 的游客时，可凭借发票及“短程票”回到机场，无需排队，优先载客。

关键词：0-1 整数规划 蒙特卡罗方法 排队论 Erlang 等待公式 元胞自动机

一、 问题重述

多数机场都建设在距离市中心较远的地方，因此许多乘客在下飞机后都需要乘坐交通工具到达市区（或周边）的目的地。作为城市的主要交通工具之一的出租车自然也是许多乘客的选择。为了方便快捷地进行送客（出发）与接客（到达），国内许多机场都将这两个过程所用的通道分开。所以，送客到机场的出租车司机可能会面临以下两个选择：

(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。出租车前往“蓄车池”进行排队等候，并根据已有出租车数量和乘客数量付出相应的时间成本。

(B) 空载返回市区拉客。出租车司机会因为空载而付出空载费用和可能损失潜在的载客效益。

同时，“蓄车池”中的出租车数量以及一定时间段内的航班数量可以通过司机的观测得知。季节和时间段因素对于出租车的需求量也是可以通过司机的经验判断。

若乘客在下飞机后想要“打车”，则需要走到指定的“乘车区”，按照顺序上车，机场出租车管理人员也会妥善安排出租车的放行工作。

基于上述背景，请结合实际情况，建立数学模型研究以下问题：

(1) 分析与出租车司机决策相关因素的影响机理，在考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益的基础之上，建立出租车司机选择决策模型同时给出司机的选择策略。

(2) 根据国内某一机场的基本情况，结合其所在城市出租车的相关数据，给出出租车司机的选择方案，同时分析建立的模型的合理性以及对相关因素的依赖性。

(3) 在某些情况下，常常会出现出租车供不应求或者供大于求的情况。现有两条并行车道，在保证车辆和乘客安全的前提下，设置“上车点”并合理安排出租车和乘客，使得总的乘车效率最高。

(4) 在出租车司机不能选择乘客和拒载，但允许出租车多次往返载客的前提下，试向管理部门提出一个可行的短途载客“优先”安排方案，使得这些出租车的收益尽量均衡。

二、 问题分析

2.1 针对问题一的分析

为了探究与司机决策相关因素的影响机理，并给出司机针对等待载客返回还是放空返回市中心载客这两种决策的模型，我们需要站在司机的角度分析研究这两个问题：

(1) 若司机送完客后留在机场等候载客，那么等待车数以及打车人数将产生相应的时间成本。结合着载人返回市区的收益以及油耗成本，最终可以得到该决策下的预期收

益。

(2) 若司机送完客后直接放空返回市区拉客，那么我们可以通过估计得到司机在市区拉客所能获得的收益。结合着相应的油耗成本，最终也可以得到在该决策下的预期收益。

比较两种状态下的预期收益，可以帮助司机作出决策。由上述分析可得，与司机决策相关的直接影响因素有：载人返程油耗，等待时间，载人利润，空载油耗以及市区载客利润。同样，直接影响因素也受下面几个因素的制约：等待车数，打车人数，到达市中心的距离，收费标准，市区载客公里数以及市区载客时间。

针对此类决策性问题，我们在建立模型时使用了 0 - 1 变量来表示对不同方式的选择，目标函数即为不同决策下的最大利润。结合着各影响因素带来的约束条件，最终建立了针对利润最大化的决策模型。

2.2 针对问题二的分析

问题二要求我们根据所收集的数据，结合问题一中的模型，给出合理的选择方案。首先是对于机场的选择，为了减小数据量不足带来的误差，不宜选择小型机场。因此需要选择国内较大型机场作为研究对象，同时通过查阅相关出租车数据，最终选择上海浦东国际机场作为研究对象。

此后通过对收集到的飞机入港量、到港人数以及出租车数量数据进行蒙特卡洛方法与排队论模型分析，得到出租车司机的决策结果。

最终对模型的合理性进行检验以及利用 *Spearman* 相关系数对相关因素的依赖性进行分析。

2.3 针对问题三的分析

为了了解国内各机场出租车的上客系统，我们首先对国内各机场的出租车上客系统布局进行了采集并进行分析，发现在矩阵式上客系统、斜列式上客系统、单车道上客系统以及混合式上客系统这四种上客系统中，矩阵式（二车道式）上客系统最符合“安全、高效、两条并行车道”的要求，而后建立乘车模型确定最佳上车点。

对于乘车模型的建立，我们将出租车和乘客分别抽象为“顾客”以及“服务台”，由 *Erlang* 等待公式建立了队列模拟模型。最后基于该模型进行模拟计算，得到上车点的推荐值。

2.4 针对问题四的分析

乘客的目的地有远有近，并且司机不能选择乘客或者拒载，那么必然会造成“短距离”载客的司机的收益亏损。因此可以以“均衡司机收入”为目标来进行讨论。

根据收集的资料数据，我们提出“短途票”的解决方案。首先需要确定短程距离的范围，然后可以使用蒙特卡洛方法模拟司机的收益，结合正态分布模拟旅客出行距离，

最终在两种方式司机收入的比较之下，得出解决方案。

三、 模型假设

1. 假设出租车和乘客分别遵循“有客即载”，“有车即乘”的原则，不受主观因素影响。
2. 假设不同车速下的耗油量相同。
3. 假设乘客的上车时间均相同且非常短暂。
4. 假设收集的数据真实、可靠，具有实用意义。

四、 符号说明

符号	符号说明	单位
W_1	留下载客的预期利润	元
W_2	防空返回市区载客的预期利润	元
V_1	载客返回的成本	元
V_2	空载返回的成本	元
P_1	载客返回市中心的收益	元
P_2	在市区载客的收益	元
t_1	载客返回市中心所需时间	时 (h)
t_2	在市区载客的时间 \approx 等待载客的时间	时 (h)
T	总时间	时 (h)
c_1	单位时间内在市区载客收益	元
L	机场到市中心的距离	千米 (km)
L_{short}	短程距离	千米 (km)
W_{long}	长途收入总和的平均值	元
W_{short}	短途收入总和的平均值	元

五、 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

本问要求分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，从**选项 (A) “留在机场接客”**和**选项 (B) “空载返回市区”**两个备择选项中选出对司机最有利的选项。可以看出这是一个 0 - 1 整数规划有关的问题。只要确定两个备择选项预期利润的大小关系，问题 1 就迎刃而解了。

首先我们需要确定计算利润的有效时间区间，不妨设为从司机进入“蓄车池”开始，到司机载人回到市中心结束。那么两种方案的有效时间区间分配可以表示为：

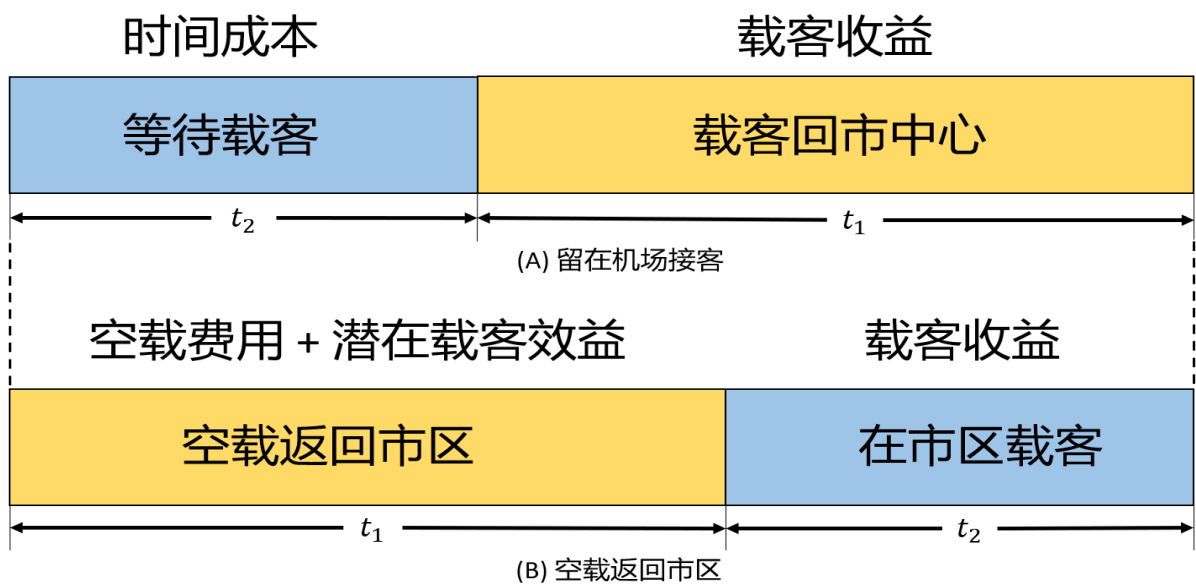


图 1: 两种决策下有效时间区间分配

由图 1 可知，载客返回市中心和空载返回市中心的时间是相等的 (t_1)。那么在相同时间段中，等待载客和在市区载客的时间也应该相同 (t_2)。并且，在方案 (A) 中，等待载客会产生相应的时间成本，而后载客回市中心将获得相应的载客收益；在方案 (B) 中，空载状态下会付出空载费用和潜在载客效益，而后在市区载客则会赚取收益。

5.1.1 对于与出租车司机决策相关因素的影响机理的探究

本小问要求我们确定影响与出租车司机决策相关的因素，不难发现，司机“空载回去”的利润等于他在市区载客的利润与空载回去的油耗成本之差；司机“留在机场接客”的利润等于载客的利润与载人回市中心的油耗成本之差。继续分析，计费规则与行驶里程对两个备择选项都起了影响。综上所述，对影响因素绘图如下。

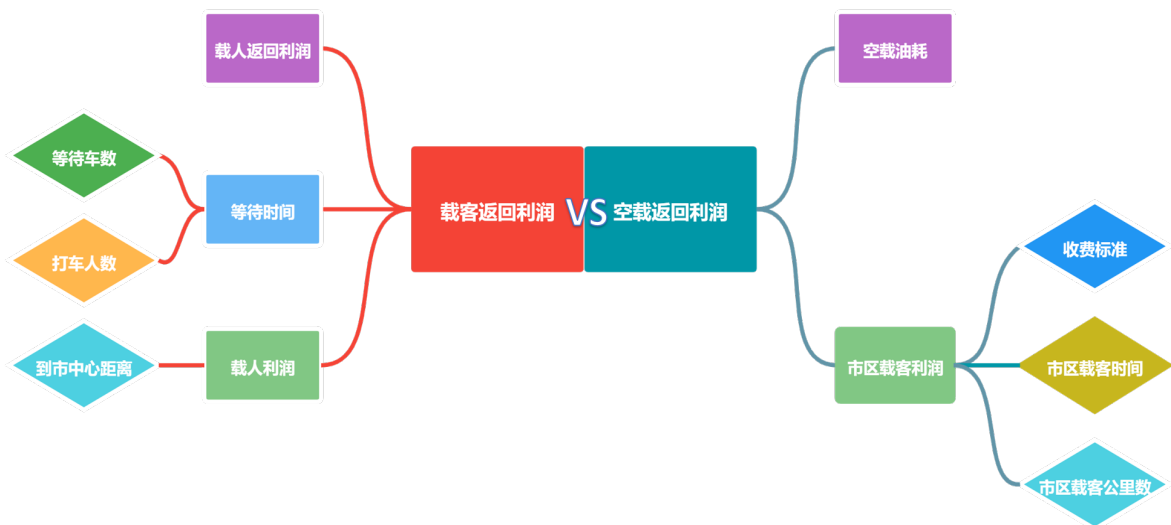


图 2: 决策状态和各影响因素的结构关系

由图 2 可知，司机决策状态的各影响因素有：载人返程油耗，等待时间，载人利润，空载油耗以及市区载客利润。这几个影响因素同样受到以下几个因素约束：等待车数，打车人数，到达市中心的距离，收费标准，市区载客公里数以及市区载客时间。

5.1.2 决策模型的建立

本小问为典型的选择决策问题，可以使用 0 - 1 规划 [1] 解决，我们可以列出限定方程对本问题继续讨论。

※ 目标函数的确定

由于最终决策方案只有两种类型，因此我们可以使用 0 - 1 变量（决策变量） Q 来表示司机对于这两种方案的选择。其中， $Q \in \{0, 1\}$ 。

若 $Q = 1$ ，代表司机将留在机场等待接客；

若 $Q = 0$ ，代表司机将放空返回市区接客。

与此同时，若我们使用 P_1, P_2 分别代表 (A), (B) 两种方案的收益，那么决策利润 Z 便可以表示成：

$$Z = Q \cdot P_1 + (1 - Q) \cdot P_2 \quad (1)$$

有了利润变量表达式，我们只需要对式 1 中的决策利润 Z 求最大值即可：

$$\max Z = Q \cdot P_1 + (1 - Q) \cdot P_2 \quad (2)$$

※ 方程约束条件的确定

上面的讨论中，我们只是交代了决策利润 Z 与两种决策的收益 P_1, P_2 的关系。为了确定相应的约束条件，结合着利润的计算公式

$$\text{利润} = \text{收益} - \text{成本}$$

下面对收益和成本进行探究

• 对于收益的探究

若司机选择前往“蓄车池”等候载客，其载客回市区时会获得相应的收益，且该收益会根据机场到市中心的距离不同而不同，因此可用函数表示为：

$$P_1 = g(L) \quad (3)$$

其中， P_1 表示载客所获收益， L 表示机场到市中心的距离。

若司机选择放空返回市中心载客，我们不妨假设司机在市区平均每小时可以获得的利润为 c_1 ，那么其收益可以表示为：

$$P_2 = c_1 \cdot t_2 \quad (4)$$

其中， t_2 表示司机在市区载客的时间。

• 对于成本的探究

若司机选择前往“蓄车池”等候载客，那么在返程过程中会产生相应的油耗成本。同样，我们不妨假设此过程中油耗成本为 V_1 ，那么该决策下的成本可以表示为：

$$V_1 = k_1 \cdot L \quad (5)$$

其中， k_1 表示司机载客从机场到市中心平均每千米的油耗成本， L 表示从机场到市中心的距离。

若司机选择放空返回市中心载客，空载时由于未运载乘客，因此油耗成本相对较低。但因为这种差距过小以致可以忽略，所以可以认为可近似认为其与载客时的油耗成本相等。若用 V_2 表示放空返程的油耗成本，那么 V_2 可以表示为：

$$V_2 = k_2 \cdot L \quad (6)$$

其中， k_2 表示司机空载从机场到市中心平均每千米的油耗成本。由于载客与空载的油耗差距过小以致可以忽略，所以可近似认为二者相等，故有：

$$V_2 \approx V_1 \quad (7)$$

综合分析，可以得到 W_1, W_2 的最终表达式为：

$$W_1 = -V_1 + P_1 \quad (8)$$

$$W_2 = -V_2 + P_2 \quad (9)$$

其中， W_1, W_2 分别表示 (A), (B) 两种方案的预期利润， V_1, V_2 分别表示载客和空载时的油耗， P_1, P_2 分别表示 (A), (B) 决策下的收益。

综上所述，约束条件可以表示为：

$$\begin{cases} W_1 = -V_1 + P_1 \\ W_2 = -V_2 + P_2 \\ P_1 = g(L) \\ P_2 = c_1 \cdot t_2 \\ V_1 = k_1 \cdot L \\ V_2 = k_2 \cdot L \\ V_1 \approx V_2 \end{cases} \quad (10)$$

※ 决策模型的建立

结合上面的分析，可以得出决策模型如下：

$$\max Z = Q \cdot P_1 + (1 - Q) \cdot P_2 \quad (Q \in \{0, 1\}),$$

$$\text{约束条件为: } \begin{cases} W_1 = -V_1 + P_1 \\ W_2 = -V_2 + P_2 \\ P_1 = g(L) \\ P_2 = c_1 \cdot t_2 \\ V_1 = k_1 \cdot L \\ V_2 = k_2 \cdot L \\ V_1 \approx V_2 \end{cases} \quad (11)$$

分析求解上面给出的的决策模型得到相应的 Q 的值。根据决策变量 Q 的意义，司机的选择策略为：若 $Q = 1$ ，则应该前往“蓄车池”等待接客；若 $Q = 0$ ，则应该放空返回市区接客。

5.2 问题二模型的建立与求解

本问要求我们根据收集的国内机场的数据，并结合问题一中的模型，给出合理的司机的选择方案，同时分析模型的合理性和对相关因素的依赖性。

5.2.1 机场的选取以及出租车信息的收集

※ 机场的选取

为了减小偶然因素带来的误差，我们选择的机场不能太小；同时，避免了由于交通出行方式的单一而导致的个别出行方式所占比例的上升的问题。因此，机场的选取需要满足以下几个条件：

- (1) 机场是大型机场，客流量充足；
- (2) 所在市区有足够量的出租车。

综合上述分析，我们选择的是上海浦东国际机场。它距离上海市中心约 30 公里，为 4F 级民用机场，同时也是国内三大门户复合枢纽之一。2020 年旅客吞吐量高达 8000 万人次，是国内客流量前三的机场。

上海浦东国际机场旅客下港后出行方式丰富，可以通过搭乘机场巴士、出租车、长途客运、轨道交通（地铁）等多种交通工具出行，有利于我们后续的研究。

※ 出租车数据的收集

通过数据查询可知，上海市出租车司机的月工资为 9000 元，每天工作 8 h，平均每小时的利润约为 36 元。我们不妨上海市的市中心在徐家汇，距离浦东国际机场约 48.7 公里。具体数据如下：



图 3: 机场到市中心行程信息

通过图 3 可知, 从浦东机场到徐家汇总共需要 59 分钟, 打车约 173 元。
 查询《上海市出租车收费标准》[2] 可知, 上海市出租车计价共分为两种, 如下表:

表 1: 上海市出租车收费标准

时段 公里数	时段	
	日间 Day (5:00 - 23:00)	夜间 Night (23:00 - 5:00)
0 - 3 公里	起步价 14 元	起步价 18 元
3 - 15 公里	2.5 元/公里	3.1 元/公里
15 公里以上	3.6 元/公里	4.7 元/公里

上海市出租车收费函数 $g(L)$ 表示为:

$$\text{日间: } g(L) = \begin{cases} 14, 0 < L < 3, \\ 2.5L + 6.5, 3 \leq L \leq 15, \\ 3.6L - 10, L > 15. \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{夜间: } g(L) = \begin{cases} 18, 0 < L < 3, \\ 3.1L + 8.7, 3 \leq L \leq 15, \\ 4.7L - 33.3, L > 15. \end{cases} \quad (13)$$

上海市出租车的车型途安车的百公里油耗为 8.09L/100km, 则根据公式

$$T_{total} = T_{one} \times L \div 100 \quad (14)$$

其中, T_{total} 表示从徐家汇到浦东机场的百公里油耗, T_{one} 表示途安车的百公里油耗, L

表示从浦东国际机场的距离到徐家汇的距离。代入数据：

$$8.09 \times 48.7 \div 100 = 3.93983L$$

可得油耗为 3.93983 L，又根据油价格为 6.82 元/L，计算油耗成本：

$$V_1 \approx V_2 = T_{total} \times Price \quad (15)$$

V_1, V_2 分别表示载客返回和空载返回的油耗成本， $Price$ 表示油价格。代入数据得百公里的油耗成本为 26.87 元。同时考虑到是否载人对车辆的油耗成本影响较小，故我们认为两种备择方案的成本近似相同。

5.2.2 机场实时人数的确定

通过携程旅行 app 的查询，统计了 2021 年 7 月 1 日 - 7 月 30 日的数据，取各个时间段的加权平均值作为样本，得到了该机场的各个时间段的飞机入港量如下：

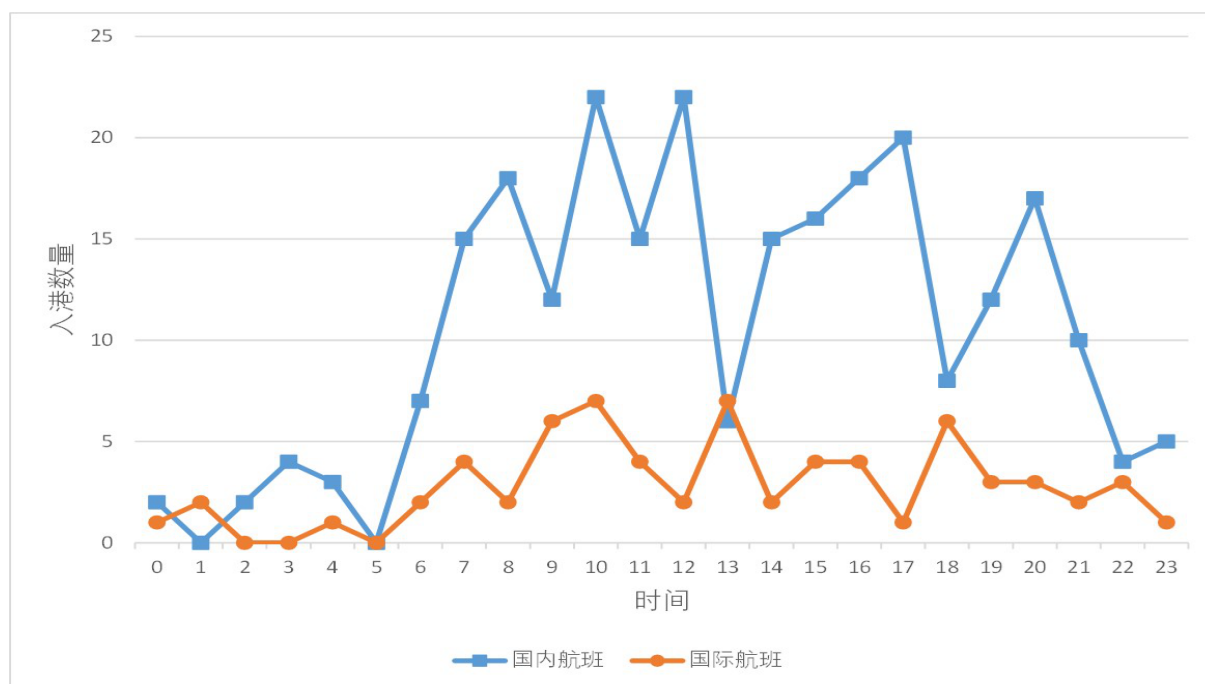


图 4: 各个时间段的飞机入港量

参考中国民航图鉴，国内航班上机平均人数 150 人，国际航班平均人数 300 人，得到各个时间的到港人数如下。

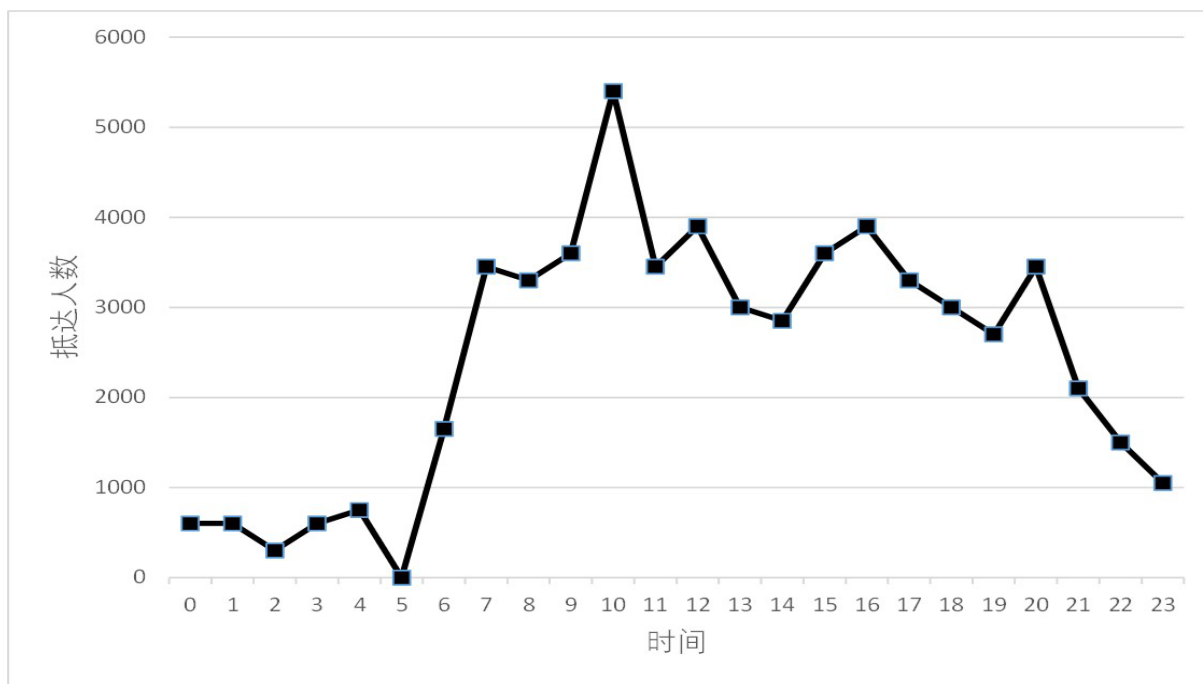


图 5: 各个时间的到港人数

对收集到的实时机场出租车的数量进行绘图如下：

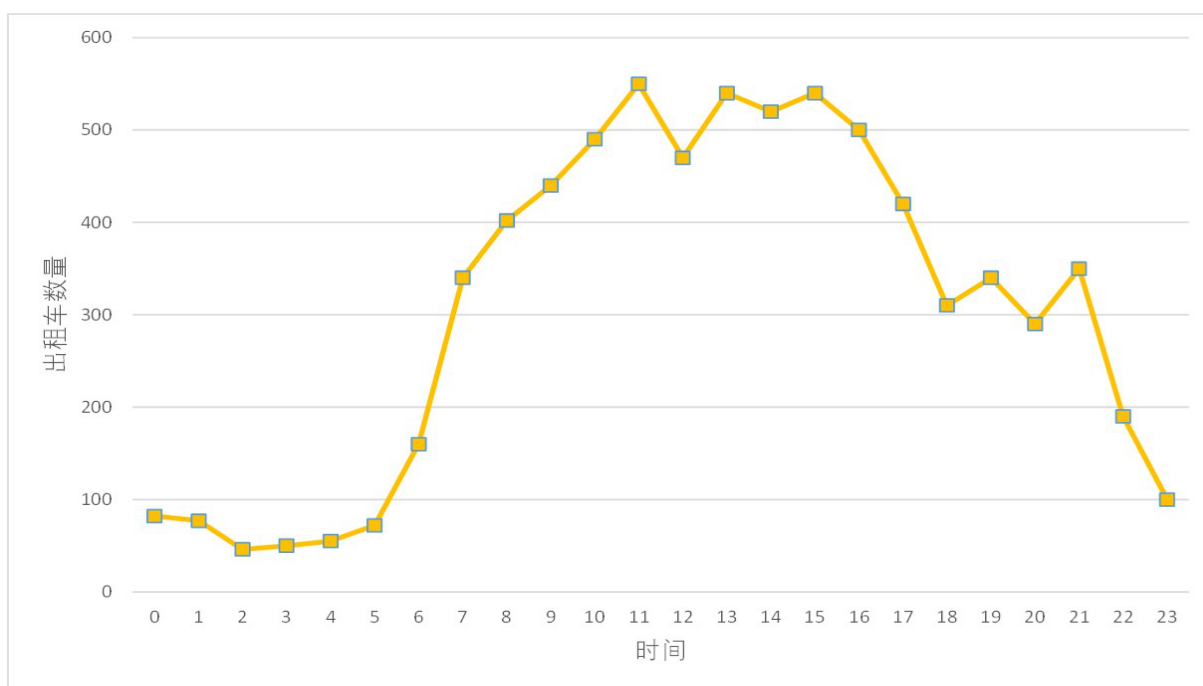


图 6: 实时机场出租车的数量

我们可以看出机场的出租车数量在 11 时和 21 时达到了极大值，且 11 时的机场出租车数量是一天中机场出租车数量的最大值。这是符合生活常识的，机场的飞机入港数在 10 时达到了最大值，但由于机场防疫、旅客们取行李等一系列的行为，最终搭乘出租车的时间集中在 11 时。从图中我们也能看出另外一个趋势，在机场出租车数量在 21 时达到了极大值之后，出租车的数量便开始不断减少，最终在凌晨 2 时达到了一个极小

值。

接下来我们运用蒙特卡洛方法与排队论模型进行分析，结合正态分布的相关知识，以司机的收入最大化为目标，给出解决方案。

游客们出行距离各不相同，但在统计学上符合正态分布，因此我们可以用 **Matlab** 内置函数 **normrnd** 帮助我们模拟游客出行距离。再通过模拟实际的机场出租车排队情况，通过机场出租车的每分钟的数目变化量，用循环模拟时间的变化，得到机场出租车接到游客的时间。最终带入函数计算获得利润，通过比较“空载回去”与“等待载客”的利润大小，给出解决方案。最终得到的结果如下：

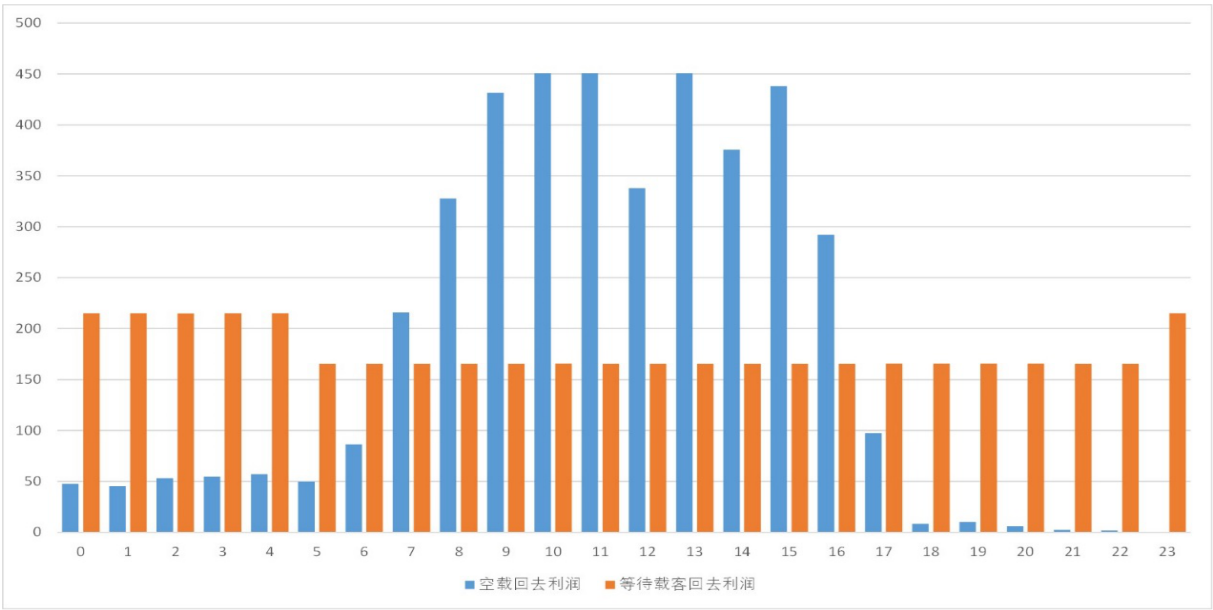


图 7: 最终结果

由图 7 可以看出，7 时 - 16 时的空载回去的利润高于等待载客利润。

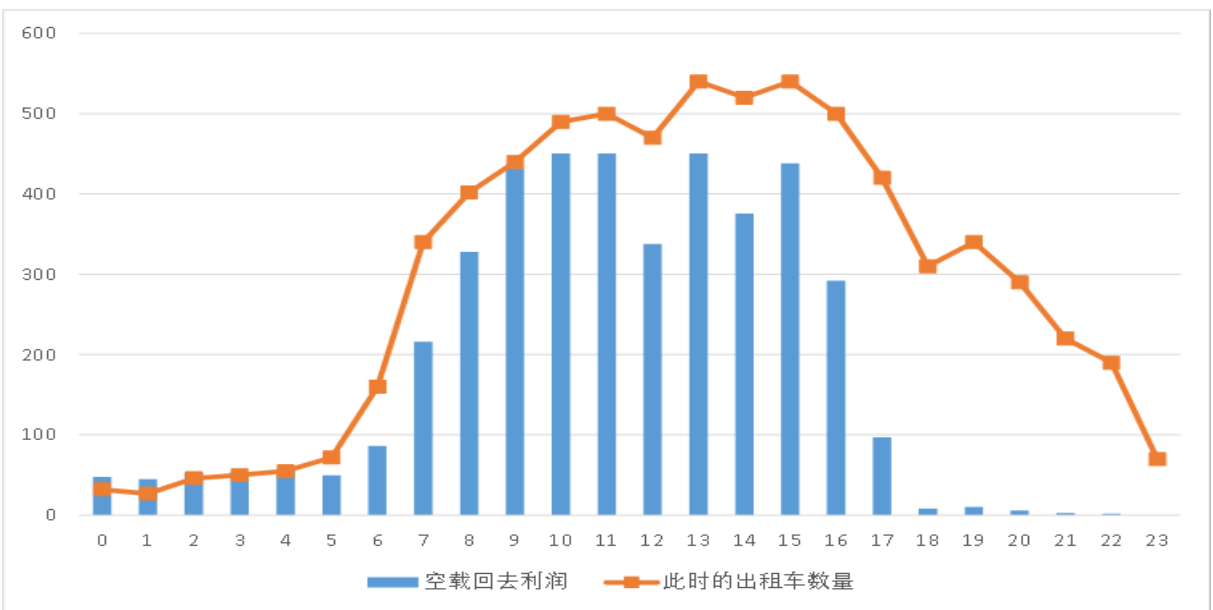


图 8: 空载回去利润与出租车数量的吻合程度

由图 8 可以看出，在 7 时 - 16 时，空载回去利润与此时的出租车数量吻合程度较高，这也符合生活常识 — 7 时 - 16 时，是出租车司机载人去机场的高峰期。从图中还可以看出 7 时 - 16 时的出租车数量维持在较高的水平，均大于 300。此时出租车司机想要拉到乘客需要等待较长的时间，时间成本高。16 时 - 24 时，0 时 - 7 时，此时的机场出租车数量较少，等待较短时间就可以接到游客，司机的时间成本低，，故选择“等待载客”的利润高。

5.2.3 出租车司机的决策结果

表 2: 出租车司机决策结果		
时间段	司机决策	
	空载返回	等待载客
0 时 - 7 时		✓
7 时 - 16 时	✓	
16 时 - 24 时		✓

5.2.4 对模型合理性的分析

在对于司机决策结果的探究中，考虑到影响司机做出决策的相关因素：① 当前队列长度, ② 计费标准, ③ 旅客人数, ④ 油耗成本, ⑤ 出租车离港速度。

结合实际情况，我们选择 ① ② ⑤ 来进行灵敏度分析得到的结果如下：

表 3: 当前队列长度变化比例	
当前队列长度变化比例（体现正负号）	
-10%	0
-20%	4.17%
10%	0
20%	0

表 4: 计费标准变化比例	
计费标准变化比例（体现正负号）	
-10%	0
-20%	0
10%	0
20%	0

表 5: 出租车离港速度变化比例	
出租车离港速度变化比例（体现正负号）	
-10%	0
-20%	0
10%	0
20%	4.17%

5.2.5 依赖程度检验

对模型的合理性进行分析之后，我们采用了 *Spearman* 相关系数来研究司机决策对相关因素的依赖性。

表 6: 依赖程度检验 1

相关性			
		决策	本时间段的涌入出租车的数量
斯皮尔曼 Rho	相关系数	1.000	-.825**
	显著性（双尾）	.	0
	个案数	24	24
	相关系数	-.825**	1
	显著性（双尾）	0	.
	个案数	24	24

** . 在 0.01 级别（双尾），相关性显著。

具体计算步骤如下：

Step 1 将这两组数据分别从小到大进行排序，将其排序后的位置作为数据的等级。

Step 2 定义 d_i 为两组数据 k_1 和 k_2 之间的等级差。那么根据公式：

$$Spearman \text{ 相关系数 } r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (16)$$

带入数据计算可得， $r_s = -0.825$ 。

同理可以计算出另两组数据变量之间的 *Speraman* 相关系数如下：

表 7: 依赖程度检验 2

相关性			
		决策	想要坐出租车的人数
斯皮尔曼 Rho	相关系数	1.000	-.391
	显著性（双尾）	.	.059
	个案数	24	24
	相关系数	-.391	1.000
	显著性（双尾）	.059	.
	个案数	24	24

通过上述斯皮尔曼相关分析：在 99% 的置信区间上，司机做出的决策与本时间段的涌入出租车的数量双管系数为 82.5%，其中显著性水平 < 0.05 ，可信。

5.3 问题三模型的建立与求解

本问要求我们在两条并行车道的条件下，给出合理的“上车点”设置方案，同时合理安排出租车和乘客，在保证车辆和乘客安全的情况下，使总的乘车效率最高。

5.3.1 合理的“上车点”设置方案的确定

为了确定合理高效的“上车点”，我们收集了国内各机场出租车上客系统布局情况，发现目前大多数出租车上客系统囊括以下四种：矩阵式上客系统、斜列式上客系统、单车道上客系统以及混合式上客系统。通过分析比较，将它们作图如下：

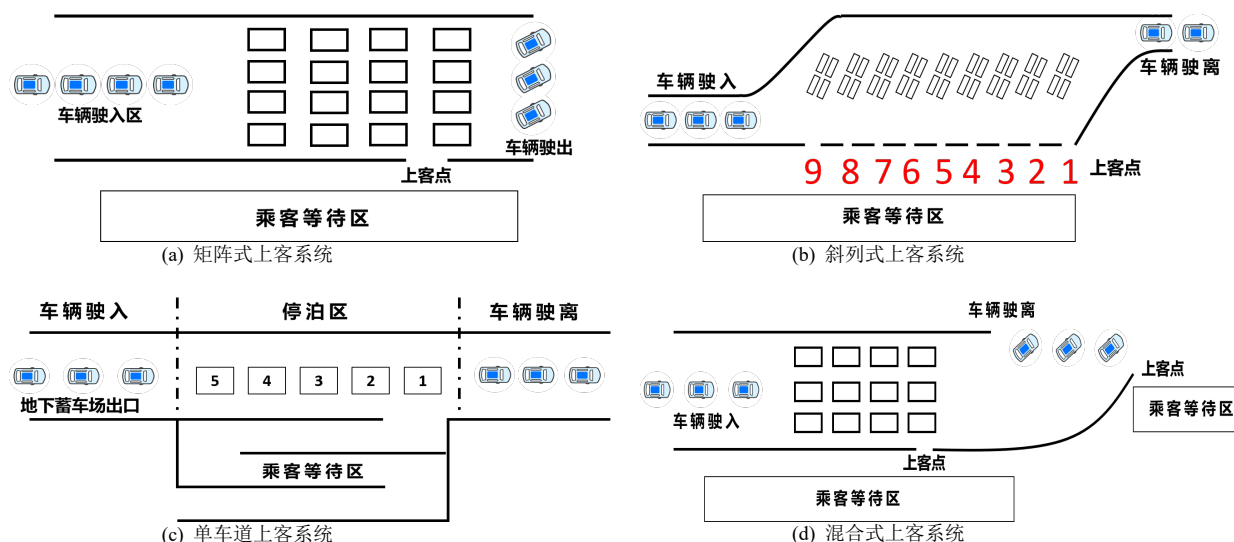


图 9: 国内四大主要上客系统

由图 9 分析可知，矩阵式上客系统可以一次停靠多辆出租车，同时其车位的规范性布局在一定程度上保证了车辆和乘客的安全，且有利于乘客行走及搬运行李；斜列式上客系统可以降低车辆之间的影响，但是由于上客点太多，不利于离出口较远的车辆的行驶；单车道上客系统车道较少，无法提高上客效率；混合式上客系统采用矩阵式和斜列式相结合的方式，虽然可以提高上客效率，然而车辆之间的影响太大。

因此，综合考虑上述上客系统的优缺点，同时又由题中条件“两条并行车道”，因此研究矩阵式（二车道）上客系统最为合理。然后建立模型确定最佳上车点。

5.3.2 乘车模型的建立

本小问要求我们根据所确定的上客系统，在保证车辆和乘客安全以及乘车效率最高的前提下，合理安排出租车和乘客，设置相应的“上车点”。

※ 乘车模型的确定

首先，我们假设“人多车少”，即出租车供不应求。由于出租车从蓄车池到上车点的时长大于乘客从队列头走到上车点的时长，因此模型假设是合理的。

因此，我们可以将乘客视为“服务台”，将出租车视为“顾客”，车辆相继到达的时间服从 λ 的负指数分布，乘客上车时间服从 μ 的负指数分布。当车辆到达时，若有空闲的上车点则马上载客；否则则在蓄车池中等待。

下面讨论此排队系统的平稳分布。记 $p_n = P\{N = n\} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 为系统达到

平稳状态后的队长 N 的概率分布，注意到对个数为 s 的多服务台系统，有

$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, 2, \dots$$

以及

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, n = 1, 2, \dots, s, \\ s\mu, n = s, s+1, \dots \end{cases} \quad (17)$$

记 $\rho_s = \frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu}$ ，则当 $\rho_s < 1$ 时，有

$$C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, n = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}, n \geq s. \end{cases} \quad (18)$$

故

$$\rho_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, n = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{\rho^n}{s!s^{n-s}} p_0, n \geq s. \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!(1-\rho_s)} \right]^{-1} \quad (20)$$

公式 19 和式 20 给出了在平衡条件下系统中顾客数为 n 的概率，当 $n \geq s$ 时，即系统中顾客数大于或等于服务台个数，这时再来的顾客必须等待，因此记

$$c(s, \rho) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n = \frac{\rho^s}{s!(1-\rho_s)} p_0 \quad (21)$$

为 Erlang 等待公式。其中， s 为上车点数，

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \rho_s = \frac{\lambda}{\mu \cdot s}, \quad (22)$$

p_i 为等待车辆为 i 辆的概率，特别的

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!(1-\rho_s)} \right]^{-1} \quad (23)$$

$$\text{平均队长 } L_q = \frac{c(s, \rho) \cdot \rho_s}{1 - \rho_s} = \frac{p_0 \cdot \rho^s \cdot \rho_s}{s!(1-\rho_s)^2}, \quad (24)$$

则

$$\text{平均逗留时间 } \bar{w} = \frac{L_q + s}{\mu}. \quad (25)$$

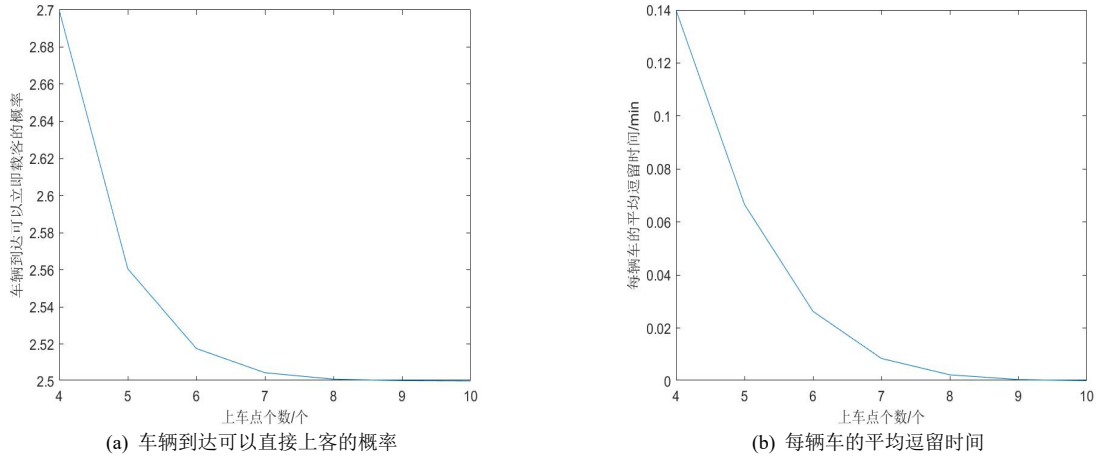
※ 乘车模型的求解

下面是通过调查得到的关于 λ, μ 的数据

$$\lambda = 4 \text{ 辆 / 分钟}$$

$$\mu = 2 \text{ 辆 / 分钟}$$

分别令 $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，绘表观察 \bar{t} 与 $c(s, \rho)$ 的变化趋势，定出最佳上车点数，结果如下：



由图可知，当上车点个数为 5 个时，车辆到达可以立即载客的概率较高同时每辆车也不会逗留太久，因此最佳上车点个数为 5 个。综上所述，结合现有“两条并行车道”的要求，可以设置上车点个数 N 为 5 个，出租车车位 M 共 $5 \times 2 = 10$ 个。

同时，考虑出租车以及乘客的安全同时保证乘客数量，乘客等候区可以参考单车道上客系统的迂回式乘客等待区设置。最终车位、车道以及各区域设置如下：

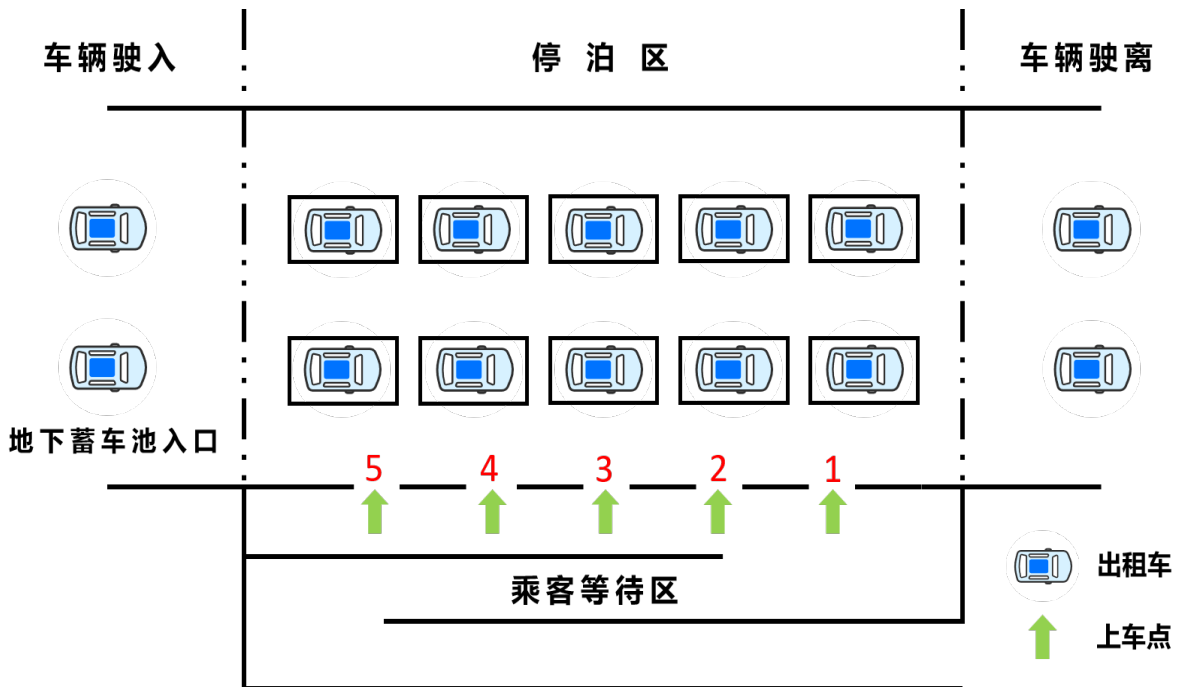


图 10: 最终车位、车道以及各区域设置

5.4 问题四模型的建立与求解

本问要求提出方案，使得无论出租车司机接到的是短途乘客还是长途乘客，收入都接近均衡。参考国内机场的有关做法，我们提出“短途票”的解决方案[3]，司机在机场接客之后，满足一定条件，可通过“短途票”和出租车发票重新返回机场接客，无需排队。我们收集、统计、计算机场出租车司机的排队等待时间和收益，运用蒙特卡洛方法模拟大数据，结合正态分布相关知识模拟游客的出行距离，通过搜索、比较各个距离下司机运载短途乘客与长途乘客的收益的差值的大小，最终提出解决方案。

5.4.1 短程距离的确定

上海浦东国际机场地处郊区，距离徐家汇市中心约 48 km，我们通过高德地图 app 绘图，以上海浦东国际机场为圆心 O ，17km 为半径 r 画圆，可以看到在圆内没有大型人群活动区，距离较近的人群活动区是位于圆周上的宣桥镇。游客如果出行的距离落在了圆内，司机在承担了较高时间成本的同时，收益较小，且需要自行承担空载回去的油费，故我们将短程距离 L_{short} 的选择限定在 0 到 17 km 内。综合上面的分析，将这些量表示为： O ：上海浦东国际机场， $r = 17km$ ， $L_{short} \in \{0, 17\}km$ 。

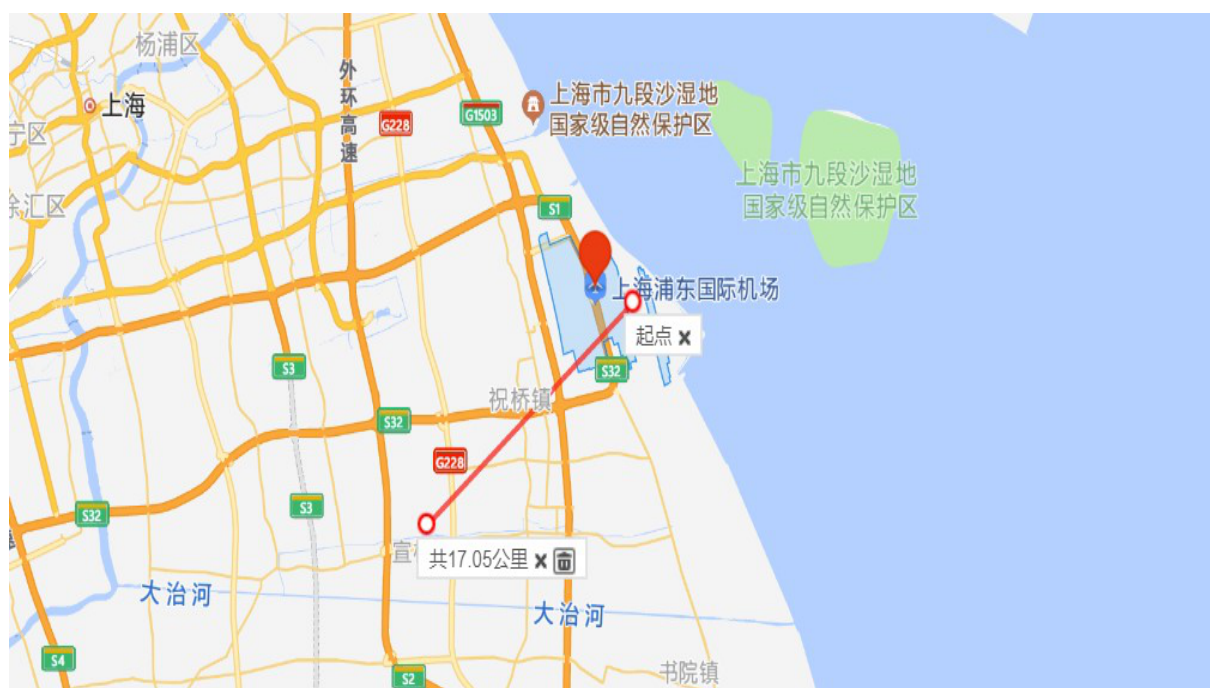


图 11: 对于短途距离的确定

5.4.2 大数据模拟司机的收益并进行比较

运用蒙特卡洛方法进行大数据的采集与运用，得到了司机的收益情况如下。（横坐标为不同的距离）

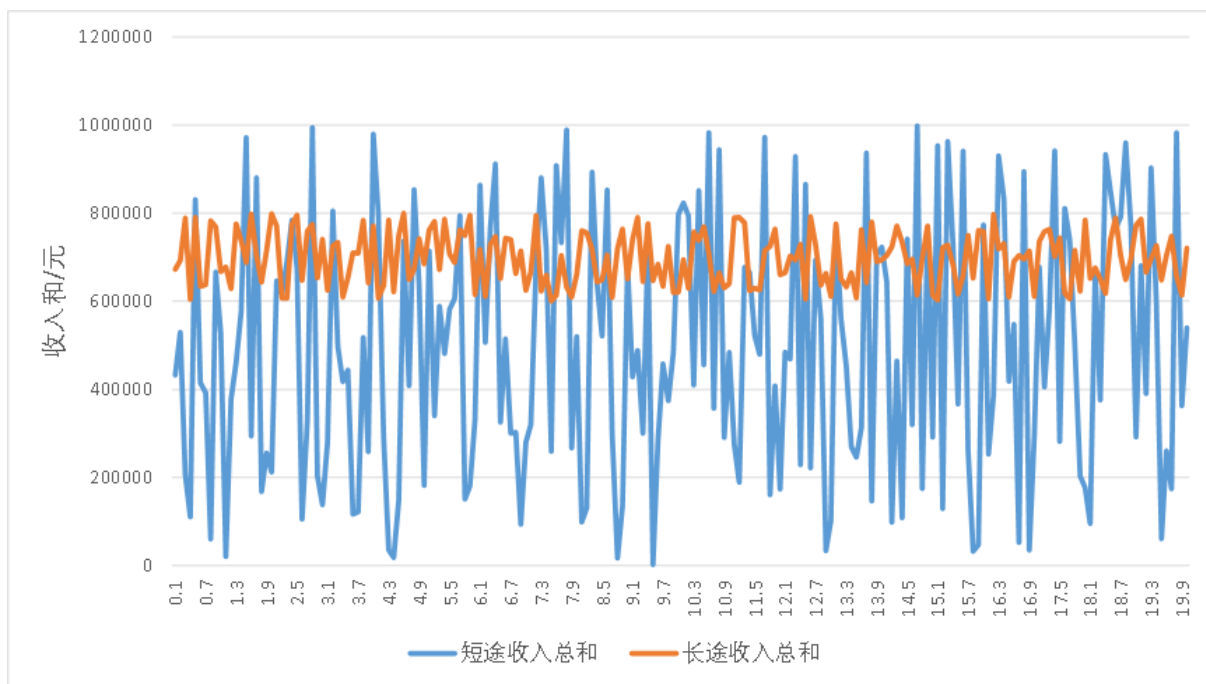


图 12: 大数据模拟司机的收益情况

可以看出，长途收入总和稳定分布在 700000 左右。经计算，长途收入总和的平均值 W_{long} 为 700237 元，标准差 σ_{long} 为 288041.1016。短途收入总和的平均值 W_{short} 为 502797.8067 元，标准差 σ_{short} 为 57729.75808。长途收入总和的变异系数 η_{long} 为 0.082194383，短途收入的变异系数 η_{short} 为 0.578315178，其中

$$\frac{\text{短途收入总和的变异系数 } \eta_{short}}{\text{长途收入总和的变异系数 } \eta_{long}} = 7.04$$

说明了长途收入的稳定程度要显著的高于短途收入。不难理解，在接完一个长途客人之后，出租车司机便一直在市区进行载客，在样本量较大的情况下，可以认为收入恒定，为 36.5 元/h。短途出租车司机在接送到一位出行距离较短的游客后，需要重新返回飞机场，下一位游客的出行距离不确定，导致了波动程度较大。

5.4.3 收益均衡模型的确定

本问要求尽可能均衡司机的收入，即为要求提出的方案中短途游客与长途游客的收益差值尽可能的小。绘制不同的距离对应的收益差如下。

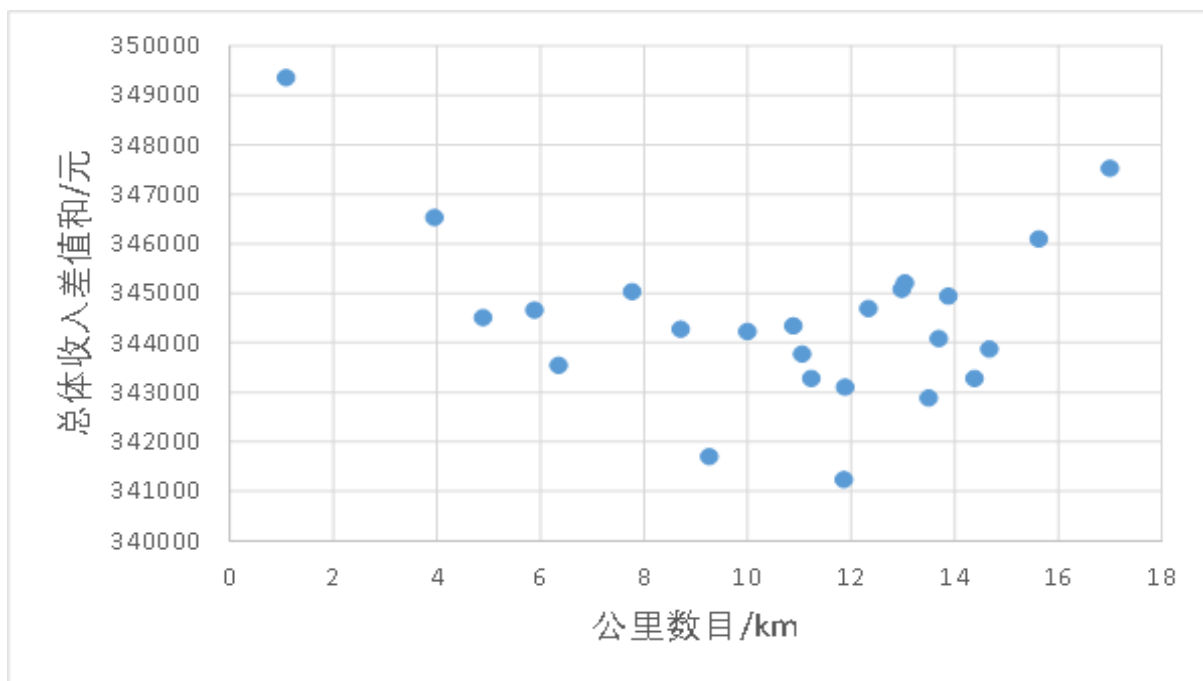


图 13: 不同距离对应的收益差

由图 13 分析，比该距离短的，则出租车司机排队消耗的时间成本较大，车费较少，净利润较少；比该距离长的，则出租车司机消耗的返程时间成本较大，净利润较少。

5.4.4 具体操作方案展示

※ 方案的实施

司机排队接到了客人，工作人员向其发放“短程票”，司机送客人到达目的地，判断是否回到机场，若符合“短程”标准，回到机场，凭借“短程票”与发票无需排队，接下一位客人，送到目的地，循环往复。

※ 方案的实际意义

结合新闻报道，不少游客反映深夜下飞机“打的难”的现象，同时也有不少出租车司机反映“短程客”使得收入的降低。实施“短程票”方案，可以使出租车司机在接到“短程客”的情况下，返回飞机场重新接客，循环往复直到接到“长程客”，解决了“收入难”的问题，具有很强的现实意义。

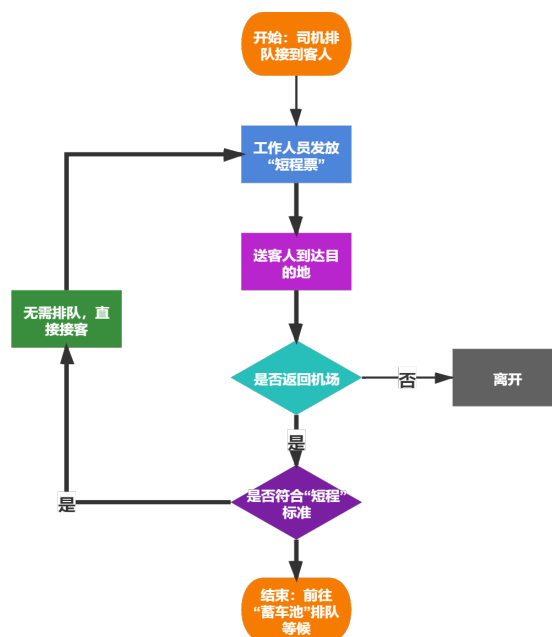


图 14: ”短程票” 方案流程图

六、 模型的评价、改进与推广

6.1 模型的优点

1. 第一问中直接针对两种决策下的收益建立利润最大化模型，直观清晰，符合实际情况。
2. 第二问中对模型进行了灵敏度分析并探究数据之间的相关性，验证了模型的可靠性与合理性。
3. 第三问中对于 *Erlang* 等待公式的使用具有创新性与启发性。
4. 第四问中蒙特卡洛方法的使用增强了数据的整体性，使结果贴合实际。

6.2 模型的缺点

1. 在考虑情况时忽略了一些小的因素，如：乘客上下车时间……处理好了这些因素可以提高模型准确性。
2. 在建模时估计了司机平均每公里的收益，会对结果产生一定的误差。

6.3 模型的改进

1. 可以考虑更多因素对于收益的影响（如天气等），能够提高决策模型的准确性。
2. 可以根据不同时段交通情况对司机收益进行一定的调整，使之精确化。

6.4 模型的推广

在实际情况下，不会仅有两种决策方案以供选择，在多种类型存在的情况下可以就其随机性进行讨论，使之更加符合实际情况。

参考文献

- [1] 司守奎，孙兆亮. 数学建模算法与应用（第2版）[M]. 北京: 国防工业出版社. 2021: 12 - 14
- [2] 豆瓣网. 上海市出租车收费标准.
<https://www.douban.com/group/topic/197189166/?type=collect>. 2021-8-27
- [3] 李硕. 短途载客优先安排模型的研究 [D]. 山东: 山东师范大学信息科学与工程学院. 2020

附录

附录清单：

1. 附录 1：问题中的相关数据
2. 附录 2：问题一求解的 Matlab 代码
3. 附录 3：问题三求解的 Matlab 代码
4. 附录 4：问题四求解的 Matlab 代码

A 附录 1 问题中的相关数据

每小时的出租车数量											
228	228	114	228	285	0	412.5	862.5	825	900	1350	862.5
975	750	712.5	900	975	1254	1140	1026	1311	798	570	399

最少的花费时间											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

飞机场的人数											
600	600	300	600	750	0	1650	3450	3300	3600	5400	3450
3900	3000	2850	3600	3900	3300	3000	2700	3450	2100	1500	1050

想要乘车的人数											
228	228	114	228	285	0	412.5	862.5	825	900	1350	862.5
975	750	712.5	900	975	1254	1140	1026	1311	798	570	399

B 附录 2 问题一求解代码

问题一：决策模型求解的 Matlab 代码
<pre>clear; clc; load data; load original_res; circle_num=1e3; minute_cost=zeros(circle_num,24); income_s=zeros(circle_num,24); income_l=zeros(circle_num,24);</pre>

```

dis=normrnd(48.7,48.7/3,circle_num,24);
for k=1:circle_num
disp(k);
now_car=120;
v_car_l=2*1.2;

for i=0:23
if i==23
v_car=(car_every_hour(1)-car_every_hour(23))/60;
else
v_car=(car_every_hour(i+2)-car_every_hour(i+1))/60;
end

id=(now_car+1);% 当前所处位置
minu_cost=0;

while id>=0
now_car=now_car+v_car;
if now_car>1500
now_car=1500;
end
minu_cost=minu_cost+1;
id=id-v_car_l;
end

minute_cost(k,i+1)=minu_cost;

% 考虑了夜间和白天的收费情况 income_s(k,i+1)=Caculate_income(dis(k,i+1),i);
income_l(k,i+1)=36*minu_cost/60;
if (i>=5&& i<23)
income_l(k,i+1)=income_l(k,i+1)*1.3;
end
end
end
cnt=0;

for k=1:circle_num

```

```

for i=0:23
if income_s(k,i+1)>income_l(k,i+1)
cnt=cnt+1;
end
end
end
disp(cnt/(24*circle_num));
ave_income_l=sum(income_l)/circle_num;
ave_income_s=sum(income_s)/circle_num;

after_res=zeros(1,24);
for i=1:24
after_res(i)=ave_income_s(i)>ave_income_l(i);
end
% disp(sum(after_res ==original_res)/24);

```

问题一： Calculate_income 函数

```

function income=Caculate_income(dis,time)
if time>=5&&time<23
coef=1;
else
coef=1.3;
end
if dis<=3
income=coef*14;
elseif dis<15
income=coef*(14+(dis-3)*2.5);
else
income=coef*(14+(15-3)*2.5+(dis-15)*3.6);
end
end

```


C 附录 2: 问题三求解代码

问题三：最终车位、车道以及各区域设置的 Matlab 代码

```
lam=0.9;
mu=0.4;
rou=lam/mu;
syms n;
t_tot=[];
c=[]; for s=4:10 rou_s=rou/s;
f=(rou^n/factorial(n))+rou.^(n+1)/(factorial(s).*(1-rou_s));
k=symsum(f,n,0,s-1);
p0=k^-1;
Lq=p0*rou^n*rou_s/(factorial(s).*(1-rou_s)^2);
t_tot=[t_tot (Lq+rou)/lam];
c=[c rou^n*p0/(factorial(s).*(1-rou_s))];
end
s=4:10;
figure(1);
plot(s,t_tot);
xlabel('上车点个数/个');
ylabel('车辆到达可以立即载客的概率');
figure(2);
plot(s,c);
xlabel('上车点个数/个');
ylabel('每辆车的平均逗留时间/min');
```

D 附录 3: 问题四求解代码

问题三：最终车位、车道以及各区域设置的 Matlab 代码

```
clear;
clc;
load data;
load original_res;
circle_num=1e4;

interval=0.01;% 判断距离
page_num=floor(1+(17-0.1)/interval);% 数组的页数
avenue_short=zeros(circle_num,24,page_num);% 短途司机的收入
avenue_long=zeros(circle_num,24,page_num);% 长途司机的收入
avenue_rate_in_city=36.5;% 市区每小时的利润
time_cost_short=zeros(circle_num,24,page_num);% 短途司机花费的时间
```

```

gap=zeros(page_num,24);% 计算短途司机和长途司机收入的差值

v_car_h=46/49*60;% 汽车的时速

for j=1:page_num% 短途距离的确定

for k=1:circle_num
now_car=120;
v_car_l=2;

for i=0:23
if i==23
v_car=(car_every_hour(1)-car_every_hour(23))/60;
else
v_car=(car_every_hour(i+2)-car_every_hour(i+1))/60;
end

id=now_car+1;% 当前所处位置
minu_cost=0;% 排队时间

while id>=0% 模拟排队过程
now_car=now_car+v_car;
if now_car>1500
now_car=1500;
end

id=id-v_car_l;
end

while 1 %do while 循环
% 计算总的收益和花费的时间
dis=max(normrnd(48.6,48.6/3),0); % 游客出行的距离是正态分布
avenue_short(k,i+1,j)=avenue_short(k,i+1,j)+Caculate_income(dis,i);
time_cost_short(k,i+1,j)=time_cost_short(k,i+1,j)+dis/v_car_h*2;
if dis<j
time_cost_short(k,i+1,j)=time_cost_short(k,i+1,j)-dis/v_car_h;% 长途只跑一次
break;

```

```

end
end

avenue_long(k,i+1,j)=time_cost_short(k,i+1,j)*avenue_rate_in_city;
end
end
end

for i=1:page_num
for j=1:circle_num
for k=1:24
gap(i,k)=gap(i,k)+abs(avenue_long(j,k,i)-avenue_short(j,k,i)); % 计算收入差值
end
end
end

row_sum=zeros(page_num,1);
for i=1:page_num
for j=1:24
row_sum(i)=row_sum(i)+gap(i,j);
end
end

min_dis_sum=max(row_sum);
min_dis_id=0;

for i=1:page_num
if row_sum(i)<min_dis_sum % 找到使得收入插值最小的距离的 id
min_dis_sum=row_sum(i);
min_dis_id=i;
end
end

disp(min_dis_id);
min_dis=0.1+(min_dis_id-1)*interval;
disp(min_dis);

```

```
sum_avenue_long=zeros(page_num,1);
sum_avenue_short=zeros(page_num,1);
for i=1:page_num
for j=1:100
for k=1:24
sum_avenue_long(i)=sum_avenue_long(i)+avenue_long(j,k,i);% 计算总体的利润，计算方差
sum_avenue_short(i)=sum_avenue_short(i)+avenue_short(j,k,i);
end
end
end
```