ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.В. Жданова, Е.В. Козис В.В. Костин

Физические исследования ставят своей целью определение физических величин и выявление закономерностей их взаимодействия. На практике это осуществляют измерениями. Измерение заключается в определении величины мерою (эталоном), другими словами, в сравнении измеряемой величины с величиной, принятой за меру (эталон).

При многократном измерении какой-либо величины легко убедиться, что результат измерения всё время изменяется, то есть в каждом случае наблюдается отклонение результата измерения от среднего значения измеренной величины. Эти отклонения могут быть связаны с влиянием внешних факторов (изменением температуры окружающей среды, атмосферного давления и т.п.), с несовершенством измерительных приборов, с ошибками экспериментатора и так далее.

Таким образом "точное" определение измеряемой величины невозможно при любых, даже самых тщательных, измерениях.

Отклонения от среднего результата измерений мы называем ошибками или погрешностями измерений, и в итоге измерений указываем не только среднюю величину, но и возможное отклонение от этой величины. Например, длина тела равна $(1{,}2 \pm 0{,}3)$ м.

На практике при постановке измерительной задачи требуется не просто определить значение измеряемой величины, но и определить её с максимально допустимой погрешностью. Максимально допустимая погрешность определяется технологией дальнейших практических действий с материальным объектом. Например, целесообразно измерять длину рабочего стола с ошибкой, не превышающей нескольких сантиметров, тогда как длину волны оптического излучения – с погрешностью, меньшей 10^{-11} м. Такие предельные ошибки измерений позволят в дальнейшем разместить на рабочем столе требуемые предметы известных размеров и изготовить интерференционные зеркала для лазерных резонаторов. Таким образом, определение погрешности результата измерения является не самоцелью, а требованием практики.

Если не известны внешние факторы, приводящие к ошибкам, или известна их природа, но не известна система их влияния на величину ошибки, мы называем такие ошибки “случайными”. Если же известна и природа внешнего фактора, и система его влияния на отклонение измеряемой величины от прежнего значения этой величины, то мы называем эти отклонения систематическими, то есть происходящими по известному закону.

В принципе, систематические погрешности можно исключить, вводя соответствующие поправки. Следует, однако, учесть, что делать это имеет смысл только в том случае, когда их величина соизмерима с величиной других ошибок, сопровождающих данные измерения.

Основным способом уменьшения случайных погрешностей являются многократное измерение одной и той же величины. Заметим, однако, что максимально возможная точность измерения определяется теми приборами, которые используются в экспериментах. Поэтому уменьшение случайной погрешности путем увеличения числа опытов имеет смысл только до тех пор, пока ее величина не станет меньше погрешности прибора. Приборные погрешности связаны с несовершенством любого измерительного инструмента. Если значение измеряемой величины определяется непосредственно по шкале (масштабная линейка, транспортир), погрешность считается равной половине цены деления шкалы. Для приборов снабженных нониусом (штангенциркуль, микрометр) погрешность можно считать равной цене деления нониусной шкалы. Погрешности электроизмерительных приборов определяются “классом точности”, устанавливаемым метрологической службой завода-изготовителя. Следует заметить, что погрешности приборов могут носить как случайный, так и систематический характер.

Определение физической величины считается законченным, если известно среднее значение этой величины и общая случайная погрешность измерения.

Терминология измерений

Мера (эталон) – средство измерений, обеспечивающее хранение и воспроизводство единицы измерений.

Рабочий эталон – эталон, используемый в измерениях.

Измерительный прибор – техническое средство, как правило, не являющееся мерой, и служащее для сравнения известной и определяемой величины.

Абсолютная погрешность – погрешность, выраженная в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность – погрешность, выраженная в долях (процентах) измеряемой величины.

Случайная погрешность – погрешность измерения, вызванная неизвестными причинами или известными причинами случайного проявления.

Систематическая погрешность – погрешность измерения, вызванная известными причинами по известной системе (по известному закону).

Точность – величина, обратная относительной погрешности.

Приведённая погрешность – отношение абсолютной погрешности к наибольшему значению величины, указанному на шкале измерительного прибора.

Класс точности – наибольшее значение приведённой погрешности измерительного прибора.

Системы единиц измерений

Построение систем единиц измерения физических величин, включающих основные и производные от них единицы, обусловлено практическими потребностями науки и техники.

Действующая в настоящее время и обязательная к применению во всех странах Международная система единиц СИ в качестве основных единиц измерения использует единицы длины – метр (м), массы – килограмм (кг), времени – секунда (с) и силы тока – ампер (А). К основным единицам в системе отнесены так-же кандела (кд) – единица силы света, моль (моль) – единица количества вещества и кельвин (К) – единица измерения температуры, имеющие специфическое назначение.

Прочие единицы измерения являются производными от основных, например:

Физическая величина	Единица измерения
частота	герц (Гц, $с^{-1}$)
сила	ньютон (Н, $кг{\cdot}м/с^2$)
давление	паскаль (Па, $Н/м^2$, $кг/(м{\cdot}с^2)$)
энергия, работа, количество теплоты	джоуль (Дж, $Н{\cdot}м$, $кг{\cdot}м^2/с^2$)
мощность, поток энергии	ватт (Вт, Дж/с, $кг{\cdot}м^2/с^3$)
электрический заряд	кулон (Кл, $А{\cdot}с$)
электрическое напряжение, потенциал	вольт (В, Вт/А, $кг{\cdot}м^2/(с^3{\cdot}А)$)
электрическая ёмкость	фарада (Ф, Кл/В, $кг^{-1}{\cdot}м^{-2}{\cdot}с^4{\cdot}А^2$)
электрическое сопротивление	ом (Ом, В/А, $кг{\cdot}м^2{\cdot}с^{-3}{\cdot}А^{-2}$)
электрическая проводимость	сименс (См, А/В, $м^{-2}{\cdot}кг^{-1}{\cdot}с^3{\cdot}А^2$)
поток магнитной индукции	вебер (Вб, $В{\cdot}с$, $м^2{\cdot}кг{\cdot}с^{-2}{\cdot}А^{-1}$)
магнитная индукция	тесла (Тл, Вб/м, $кг{\cdot}с^{-2}{\cdot}А^{-1}$)
индуктивность	генри (Гн, Вб/А, $м^2{\cdot}кг{\cdot}с^{-2}{\cdot}А^{-2}$)

Сведения из теории ошибок

Теория ошибок – раздел математики, посвященный уточнению выводов о численных значениях приближенно измеренных величин и об ошибках измерений.

Пусть величина x измерена n раз. Тогда в соответствии с теорией вероятности наиболее вероятное значение измеряемой величины равно её среднему измеренному значению при бесконечно большом n, то есть:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{1}$$

где x_i – результат i - го измерения (i=1, 2,…, n)

Если количество n измерений ограничено, то наиболее близким к этому значению является среднее арифметическое значение:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (2)$$

Абсолютная погрешность i-го измерения:

$$\Delta x_i = \left| x_{\text{ср}} - x_i \right| \qquad (3)$$

В теории ошибок мерой случайной погрешности при многократных измерениях принято считать среднюю квадратичную погрешность, которая для n измерений вычисляется по формуле:

$$\Delta x_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x_i\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (4)$$

С увеличением количества измерений n среднеквадратичная погрешность уменьшается. Из-за ограничения количества измерений $\Delta x_{\text{кв}}$ совпадает со случайной погрешностью только с некоторой вероятностью, называемой доверительной вероятностью p, поэтому результат измерений величины x представляют в виде:

$$x = x_{\text{ср}} \pm \alpha_{n,p} \times \Delta x_{\text{кв}}, \qquad (5)$$

где коэффициент $\alpha_{n,p}$, называемой коэффициентом Стьюдента, зависит как от количества измерений n , так и от заданной испытателем доверительной вероятности p (доверительной вероятностью или коэффициентом доверия называют вероятность того, что “истинное” значение измеряемой величины попадет в заданный интервал).

Значение коэффициента $\alpha_{n,p}$ для различного числа измерений и при различных коэффициентах доверия приведены в таблице 1.

Таблица 1

Распределение Стьюдента

n \ p	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31
3	0,82	1,06	1,39	1,89	2,92
4	0,76	0,98	1,25	1,64	2,35
5	0,74	0,94	1,19	1,53	2,13
6	0,73	0,92	1,16	1,48	2,02

7	0,72	0,91	1,13	1,44	1,94
8	0,71	0,90	1,12	1,41	1,89
9	0,71	0,89	1,11	1,40	1,86
10	0,70	0,88	1,10	1,38	1,83

Если в задаче измерения задана максимально допустимая погрешность измерения, то уменьшить погрешность до заданной величины можно, или увеличивая количество измерений n при неизменной доверительной вероятности, или уменьшая доверительную вероятность при том же количестве измерений. На практике принято полагать p равной 0,7 для всех видов измерений. Класс точности средства измерения определяют на заводе-изготовителе при условии, что p=0,7.

Так как приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ может носить случайный характер и не зависит от случайной погрешности многократных измерений, то при одном и том же p=0,7 общая случайная погрешность многократных измерений равна

$$\Delta x_{\text{сл}} = \alpha_{n,p} \times \Delta x_{кв} + \Delta x_{\text{приб}} \qquad (6)$$

Как правило в приборную погрешность включают и так называемую ошибку отсчета. Например, при измерении массы возможной ошибкой отсчёта считают минимальную меру массы, использованную при измерении. Например, если использован при взвешивании на весах кроме прочих, больших по массе, эталон массы в 200 мг, то и погрешность отсчёта (а, значит и приборная погрешность) при измерении была равна 200 мг. При этом указанная на весах погрешность может быть существенно меньше. Аналогичным образом приборная погрешность секундомера, запускаемого вручную. будет определяться не ценой деления шкалы, а средним временем реакции человека, не превышающим, как правило, 0,1 с.

Окончательный результат измерений записывают в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \Delta x_{\text{сл}} \,. \qquad (7)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что величина абсолютной погрешности дает недостаточно информации о точности измерения, если не сопоставить её со значением измеряемой величины. Поэтому часто используется так называемая относительная погрешность измерения:

$$E = \frac{\Delta x_{\text{сл}}}{x_{\text{ср}}}, \qquad (8)$$

которая может выражаться и в процентах.

Особенно удобно использовать относительную погрешность в тех случаях, когда измеряемая величина определяется не прямым измерением, а вычисляется по известной формуле (такие измерения обычно называют косвенными). В расчетную формулу могут входить как физические величины, измеренные экспериментально, так и параметры, величина, которых известна заранее. Это могут быть, например, различные константы, параметры, указанные на измерительной установке и т.п. В этом случае абсолютная погрешность измерения будет зависеть от погрешностей всех входящих в расчетную формулу величин.

В простейших случаях оценить абсолютную погрешность косвенного измерения нетрудно. Если, например, измеряемая величина рассчитывается по формуле:

$$A = x \pm y, \quad \text{то} \quad \Delta A = \Delta x + \Delta y, \qquad (9)$$

где Δx и Δy - абсолютные погрешности величин x и y. измеренных в ходе эксперимента. Следует обратить внимание на то, что мы оцениваем максимально возможную погрешность вычисляемой величины. Поэтому погрешности отдельных измерений могут только складываться друг с другом.

В более сложных случаях сначала определяют относительную погрешность косвенного измерения. Пусть $A = f(x, y, z\ldots)$. Тогда эту погрешность $E = \Delta A/A$ можно записать в виде $E = dA/A$. С другой стороны $dA/A = d(\ln A)$ и, поэтому, E можно вычислить по формуле:

$$E = d\left[\ln f(x, y, z, \ldots)\right]. \qquad (10)$$

Найдем для примера относительную погрешность величины, вычисляемой по формуле:

$$A = \frac{C \cdot x^3 (y - z)}{y^2}.$$

Прологарифмировав это выражение, получим:

$$\ln A = \ln C + 3\ln x + \ln(y - z) - 2\ln y.$$

Теперь продифференцируем это уравнение:

$$\frac{dA}{A}=3\frac{dx}{x}+\frac{d(y-z)}{y-z}-2\frac{dy}{y}.$$

Заменив дифференциалы погрешностями и заменив знак “минус” на “плюс”, получим:

$$E=\frac{\Delta A}{A}=3\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{(\Delta y+\Delta z)}{y-z}+2\frac{\Delta y}{y}.$$

Таким образом относительная погрешность рассчитываемой величины в большинстве случаев является фактически суммой относительных погрешностей параметров, входящих в расчетную формулу. Если среди этих параметров присутствуют величины не измеряемые в данном эксперименте, то для оценки их погрешностей рекомендуется следующее общее правило: абсолютная погрешность берется равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе. Например, если в расчетной формуле присутствует ускорение свободного падения g, и мы используем для него значение 9,8 м/с^2, то Δg будет равно 0,05 м/с^2.

Абсолютную погрешность косвенного измерения находим теперь по формуле:

$$\Delta A=E\cdot A \tag{11}$$

Для правильной записи результата любых измерений необходимо округлить как значение абсолютной погрешности, так и сам результат. При этом начинать надо с округления погрешности, поскольку именно она определяет точность измерений, а значит и количество значащих цифр в конечном результате. Поскольку точность оценки погрешности обычно очень небольшая, принято округлять её до одной значащей цифры. Если, однако, эта цифра оказалась единицей, следует оставить две значащие цифры.

Округление результата измерений производится в соответствии с полученной погрешностью. При этом последняя значащая цифра в приводимом результате должна быть такого же порядка величины (находится в том же десятичном разряде), что и погрешность. Все более мелкие разряды не несут никакой информации и должны быть отброшены (или заменены нулями). Если, например, в результате расчетов плотности твердого тела получено, что ρ =2713,282 кг/м^3, а $\Delta\rho$ = 27,318 кг/м^3, то правильная запись конечного результата должна выглядеть так:

$$\rho = (2710 \pm 30)\ \text{кг/м}^3.$$