Лабораторная работа 1.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Е.В. Козис, Е.В. Жданова

Цель работы: изучение методики проведения простейших физических измерений, а также основных методов оценки погрешностей прямых и косвенных измерений.

Задание: определить плотность твердого тела и вычислить погрешность проведённых измерений.

Подготовка к выполнению лабораторной работы: изучить основные положения теории погрешностей и ознакомиться с измерительной аппаратурой. Ответить на контрольные вопросы.

Библиографический список

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. - 2-е изд., стер. - СПб.: Изд-во «Лань», 2005.
2. Евтихиев Н.Н., Черкашина А.Г. Основы статистической теории измерений. –М.: МИРЭА, 1978.

Контрольные вопросы

1. В чем причины возникновения ошибок при измерениях? Что называется погрешностью измерения?
2. Какие погрешности называют случайными и какие систематическими?
3. Что такое погрешность прибора и как ее определить?
4. Какими способами можно уменьшить погрешность измерения?
5. Для чего проводятся многократные измерения одной и той же физической величины?
6. Как рассчитать случайную погрешность при многократных измерениях?
7. Что такое прямое и что такое косвенное измерение?
8. Как определяется абсолютная погрешность при прямых измерениях?
9. Как рассчитать относительную погрешность косвенного изме-

рения?
10. Как определяется абсолютная погрешность при косвенных измерениях?
11. Как определить погрешность величин, не измеряемых в ходе данного эксперимента?
12. Каким образом округляются погрешности и окончательные результаты измерений?
13. Как рассчитать относительную погрешность физической величины Y, вычисляемой по формуле $Y = \dfrac{4m^3}{k(a-b)^2}$, если погрешности Δm, Δk, Δa и Δb известны.

Теоретическое введение

Физические измерения. Распределение массы в пределах тела характеризуют величиной, называемой плотностью. Если тело однородно, то его плотность определяется по формуле

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad (1)$$

где m – масса тела, а V - объем тела.

Массу твердого тела можно определить взвешиванием его на рычажных весах. Объем тела правильной геометрической формы вычисляют, измеряя его линейные размеры.

Таким образом, для того, чтобы узнать плотность тела, необходимо произвести ряд **физических измерений.** Под измерением понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения. Измерения делятся на прямые и косвенные. **При прямых измерениях** определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно с помощью измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах. Например, измерения промежутков времени секундомером, измерения размеров предметов масштабной линейкой или штангенциркулем и т.д.

При косвенных измерениях искомая величина не измеряется непосредственно, а находится по известной зависимости между нею и параметрами, полученными при прямых измерениях. К косвенным измерениям относятся, например, измерения объема или плотности твердых тел, определение скорости тел по измерениям отрезков пути и промежутков времени и т.п.

Погрешности. Очевидно, что никакая физическая величина не может быть определена с абсолютной точностью. Другими словами, любое измерение всегда производится с некоторой ошибкой – погрешностью. Как правило, полученное в результате измерений значение какой-либо величины, записывают в виде $x \pm \Delta x$, где Δx - **абсолютная погрешность** измерения, характеризующая возможное отклонение измеренного значения данной величины от ее «истинного» значения.

Обычно погрешности, определяющие точность измерений, подразделяются на систематические погрешности, погрешности приборов и случайные погрешности.

Систематические погрешности могут быть связаны, например, с неправильной установкой измерительного прибора или с неточной его регулировкой. Они появляются также, если пренебречь влиянием каких-либо внешних факторов (например, температуры). Такие погрешности в принципе могут быть исключены введением соответствующих поправок, что, впрочем, имеет смысл только в том случае, когда их величина соизмерима с величиной других ошибок, сопровождающих данные измерения.

Приборные погрешности связаны с несовершенством любого измерительного инструмента. Если значение измеряемой величины определяется непосредственно по шкале (масштабная линейка, транспортир), погрешность считается равной половине цены деления шкалы. Для приборов снабженных нониусом (штангенциркуль, микрометр) погрешность можно считать равной цене деления шкалы нониуса. Погрешности стрелочных электроизмерительных приборов определяются их **классом точности**, указываемым на лицевой стороне прибора.

Случайные погрешности могут быть обусловлены целым рядом случайных причин. Они зависят от условий, в которых производятся измерения, специфики измеряемых объектов и т.п.

Эти погрешности принципиально неустранимы, поскольку все причины, их вызывающие, не могут быть, разумеется, учтены.

Определение погрешностей при прямых измерениях. При однократных измерениях, то есть измерениях, проводящихся только один раз, случайные погрешности игнорируются, и в качестве абсолютной погрешности берется погрешность прибора. В этом случае следует, однако, избегать слишком формального подхода и учитывать условия использования измерительных приборов. Так, если секундомер с ценой деления 0,01 с запускается и останавливается вручную, погрешность в определении времени будет определяться главным образом не точностью самого прибора, а временем реакции экспериментатора, имеющим величину порядка 0,1 с.

Для повышения точности результата применяют **многократные измерения** одной и той же величины. Пусть величина x измерена n раз. Тогда в соответствии с теорией вероятности «истинным» значением измеряемой величины будет её среднее значение при бесконечно большом n, то есть

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{2}$$

где x_i – результат i -го измерения (i = 1, 2,…, n)

Если количество n измерений ограничено, то наиболее близким к этому значению является среднее арифметическое значение данной величины

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{3}$$

При этом можно оценить случайную погрешность, которая будет зависеть как от погрешности каждого измерения

$$\Delta x_i = \left| x_{\text{ср}} - x_i \right| , \tag{4}$$

так и от количества измерений.

Как правило, в качестве меры случайной погрешности при многократных измерениях берут так называемую **среднюю квадратичную погрешность**, которая для n измерений вычисляется по формуле

$$\Delta x_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (5)$$

При малом количестве измерений $\Delta x_{\text{кв}}$ может оказаться существенно меньше реальной случайной погрешности. Анализ показывает, к тому же, что даже при $n \sim 100$ вероятность того, что истинное значение попадет в интервал, определяемый этой погрешностью, не превышает 0,7. Поэтому случайную погрешность принято рассчитывать по формуле

$$\Delta x_{\text{сл}} = \alpha_{n,p}\,\Delta x_{\text{кв}}\ , \qquad (6)$$

где коэффициент $\alpha_{n,p}$ зависит как от количества измерений n , так и от выбранного значения **доверительной вероятности *p*** (доверительной вероятностью или коэффициентом доверия называют вероятность того, что «истинное» значение измеряемой величины попадет в заданный интервал).

Значение коэффициента $\alpha_{n,p}$ для различного числа измерений и при различных коэффициентах доверия приведены в таблице 1.

Таблица 1

p \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
0,5	1,00	0,82	0,77	0,74	0,73	0,72	0,71	0,71	0,70	0,68
0,7	1,96	1,39	1,25	1,19	1,16	1,13	1,12	1,11	1,10	1,00
0,9	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83	

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что путем многократных измерений нельзя определить физическую величину точнее, чем это позволяет используемый прибор. Целью таких измерений является уменьшение случайных погрешностей до величин порядка погрешностей приборов. Поэтому оценив случайную погрешность, необходимо сравнить ее с погрешностями других видов. Если, к примеру, она оказалась существенно меньше приборной, в качестве абсолютной погрешности данного измерения следует взять погрешность использовавшегося прибора.

В принципе, теория рекомендует рассчитывать окончательное значение погрешности по формуле

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}\,. \tag{7}$$

В большинстве случаев, однако, просто берут в качестве Δx большую из величин $\Delta x_{\text{сл}}$ и $\Delta x_{\text{пр}}$.

Для сравнительной оценки точности измерений различных физических величин используют также **относительную погрешность** измерения E, равную отношению абсолютной погрешности к среднему значению измеренной величины

$$E = \frac{\Delta x}{x_{\text{ср}}}\,. \tag{8}$$

Относительная погрешность часто выражается в процентах.

Определение погрешностей при косвенных измерениях. При таких измерениях, как уже отмечалось, некоторая физическая величина A является известной функцией величин x, y, z,... , которые могут быть определены с помощью прямых измерений. При этом, точность определения величины A зависит, конечно, от погрешностей Δx, Δy, Δz, и т.д. В расчетную формулу могут входить также и параметры, значения которых заранее известны (табличные величины, константы, параметры, указанные на установке и т.п.). В этом случае абсолютная погрешность измерения ΔA будет, конечно, зависеть и от погрешностей, характеризующих каждый из этих параметров.

В простейших случаях оценить абсолютную погрешность косвенного измерения нетрудно. Если, например, измеряемая величина рассчитывается по формуле $A = x \pm y$, то

$$\Delta A = \Delta x + \Delta y. \tag{9}$$

Следует обратить внимание на то, что мы оцениваем максимально возможную погрешность вычисляемой величины. Поэтому погрешности отдельных измерений всегда складываются (они не могут компенсировать друг друга).

В более сложных случаях сначала определяют относительную погрешность косвенного измерения. Пусть $A = f(x, y, z\ldots)$. Тогда эту погрешность $E = \Delta A/A$ можно записать в виде $E = dA/A$. С другой стороны $dA/A = d(\ln A)$ и, поэтому, E можно вычислить по формуле

$$E = d\left[\ln f(x, y, z, \ldots)\right]. \tag{10}$$

Найдем, для примера, относительную погрешность величины, имеющей следующий вид

$$A = \frac{C \cdot x^3 (y - z)}{y^2}, \tag{11}$$

где C – некоторый известный параметр. Прологарифмировав это выражение, получим

$$\ln A = \ln C + 3 \ln x + \ln(y - z) - 2 \ln y.$$

Теперь продифференцируем это уравнение

$$\frac{dA}{A} = \frac{dC}{C} + 3\frac{dx}{x} + \frac{d(y - z)}{y - z} - 2\frac{dy}{y}.$$

Взяв вместо дифференциалов погрешности и, заменив знак “минус” на “плюс”, получим

$$E = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta C}{C} + 3\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{(\Delta y + \Delta z)}{y - z} + 2\frac{\Delta y}{y}$$

Таким образом, относительная погрешность рассчитываемой величины в большинстве случаев является фактически суммой относительных погрешностей параметров, входящих в расчетную формулу. Абсолютную погрешность косвенного измерения находим теперь по формуле

$$\Delta A = E \cdot A. \tag{12}$$

Ошибки констант. Для оценки погрешностей величин, не измеряемых в данном эксперименте (назовем их для краткости константами) рекомендуется следующее правило: абсолютная погрешность такой величины (в разобранном выше примере ΔC) берется равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе. Например, если в расчетной формуле присутствует ускорение свободного падения g, и мы используем для него значение 9,8 м/с^2, то Δg будет равно 0,05 м/с^2.

Округление погрешности и окончательного результата. При записи результата любых измерений необходимо округлить как значение абсолютной погрешности, так и сам результат. При этом начинать надо с округления погрешности, поскольку именно она определяет точность измерений, а значит и количество значащих цифр в конечном результате. Поскольку точность оценки погрешности обычно очень небольшая, принято округлять её до одной значащей цифры. Если, однако, эта цифра оказалась единицей, следует оставить две значащие цифры.

Округление результата измерений производится в соответствии с полученной погрешностью. При этом последняя значащая цифра должна быть такого же порядка величины (находиться в том же десятичном разряде), что и погрешность. Все более мелкие разряды не несут никакой информации и должны быть отброшены (или заменены нулями). Если, например, в результате расчетов плотности твердого тела получено, что ρ =2713,282 кг/м^3, а $\Delta\rho$ = 26,318 кг/м^3, то правильная запись конечного результата должна выглядеть так

$$\rho = (2710 \pm 30)\ \text{кг/м}^3.$$

Описание аппаратуры и методики измерений.

В данной работе определяется, плотность различных твердых тел. Как правило, это тела цилиндрической формы, для которых объем вычисляется по формуле

$$V = H \times \frac{\pi D^2}{4}, \tag{13}$$

где H – высота, а D - диаметр цилиндра (или диска). Плотность тела в этом случае согласно (1) равна

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H}\ . \tag{14}$$

Используя теперь разобранную выше методику оценки погрешностей при косвенных измерениях, получим

$$\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2\ln D - \ln H,$$

далее, после дифференцирования имеем

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dm}{m}+\frac{d\pi}{\pi}+2\frac{dD}{D}+\frac{dH}{H},$$

и, наконец, для относительной погрешности получаем выражение

$$E=\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta\pi}{\pi}+2\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta H}{H}. \tag{15}$$

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методикой измерений линейных параметров штангенциркулем.
2. Определить размеры исследуемого тела, необходимые для вычисления его объема. Каждый параметр измеряется не менее пяти раз.
3. С помощью весов и разновесов определить массу исследуемого тела. Взвешивание провести не менее трех раз.
4. Все полученные экспериментальные результаты занести в таблицу 2.

Таблица 2

<table>
<tr><th>Измеряемая величина</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>Среднее значение.</th><th>Случайная погрешность</th><th>Погрешность прибора</th><th>Абсолютная погрешность измерения</th></tr>
<tr><td>D_i, мм</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">$\Delta D=$</td></tr>
<tr><td>ΔD_i, мм</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$(\Delta D_i)^2$, мм^2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H_i, мм</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">$\Delta H=$</td></tr>
<tr><td>ΔH_i, мм</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$(\Delta H_i)^2$,мм^2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>m_i, г</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">$\Delta m=$</td></tr>
<tr><td>Δm_i, г</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$(\Delta m_i)^2$, г^2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Обработка результатов измерений

1. Вычислить средние значения измеренных параметров.

2. По формуле (4) определить погрешности отдельных измерений.
3. Рассчитать значения квадратов этих погрешностей.
4. По формулам (5) и (6) рассчитать для каждого параметра случайную погрешность (значение коэффициента $\alpha_{n,p}$ взять из таблицы 1, выбрав доверительную вероятность 0,7).
5. Оценить погрешности приборов.
6. Определить окончательные значения абсолютных погрешностей всех измеренных величин.
7. Результаты всех расчётов занести в таблицу 2.
8. Используя средние значения измеренных параметров, по формуле (14) рассчитать плотность данного тела.
9. Определить по формуле (15) относительную погрешность измерения.
10. По формуле (12) вычислить значение абсолютной погрешности $\Delta\rho$.
11. Произвести округления и записать окончательный результат в виде

$$\rho \pm \Delta\rho.$$