תרגיל בית מספר 1

יעקוב וקסמן ת.ז 316153261

16/12/2021

שאלה 1

לא קיים פתרון לבעיית המבוך אשר מיוצגת ע"י $M_{example}$, עקב משבצת הקיר ב־$(2,2)$.

האופרטורים היחידים שניתן להפעיל הם התקדמות וסיבוב ימינה. סיבוב שמאלה אינו חוקי בגלל הקיר (הראש לא יכול להשלים את הסיבוב).

1. התקדמות קדימה תוביל אותנו לבור־ כל 3 הפעולות אינן חוקיות.
2. סיבוב ימינה אפשרי. לאחר סיבוב ימינה האופרטור היחיד שאפשרי הינו סיבוב שמאלה (סיבוב ימינה נוסף לא מתאפשר בגלל הקיר)
   (א) ביצוע סיבוב שמאלה יחזיר אותנו למצב (state) המקורי

שאלה 2

כן, רצף פעולות ממצב s כלשהו שמביא אותנו לאותו מצב s.

המצב תואר בשאלה הקודמת. נסתכל שוב פעם על $M_{example}$:

1. **נבצע סיבוב ימינה** (פעולה שהינה חוקית)
2. המצב החוקי היחיד שניתן לעשות הינו סיבוב שמאלה (סיבוב ימינה נוסף לא מתאפשר עקב פגיעה עם הזנב בקיר $(2,2)$ ותנועה קדימה אינה אפשרית עקב יציאה מגבולות הבעיה)־ **נבצע סיבוב שמאלה**
3. **חזרנו למצב (state) המקורי ממנו התחלנו.**

שאלה 3

בור הוא מצב שלא ניתן להפעיל עליו אף אופרטור (הפעלת כל אופרטור עליו תחזיר $\emptyset$).

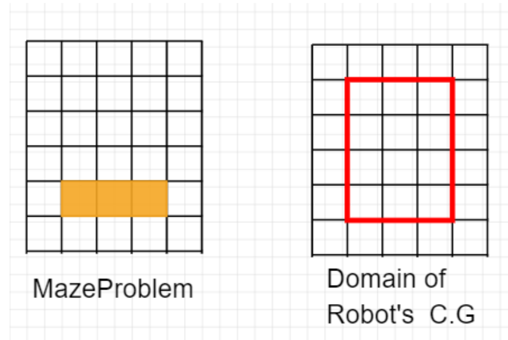
<u>לא בכל מרחב חיפוש ניתן להגיע לבור.</u>

דוגמא מהתרגול: המשחק 9 Tiles .

נגדיר 4 אופרטורים: "הזזת" המשבצת הריקה לאחד מארבעת כיווני אוויר. ("הזזה" חוקית הינה הזזה כזאת שהמשבצת הריקה נשארת בלוח).

טריוויאלי שבכל מצב אפשרי של הלוח תמיד אפשר להזיז את המשבצת הירקה־ כלומר בכל מצב אפשר להפעיל אופרטור אחד לפחות.

<u>בבעיה שלנו:</u> קיימים מרחבי חיפוש בהם לא ניתן להגיע לבור. להלן דוגמא:



משמאל- מרחב החיפוש

מימין- התחום שבו יכול להימצא מרכז הכובד של הרובוט (יציאה מתחום זה אינה אפשרית- גורר יציאה מגבולות המבוך) בכל מקום שהרובוט נמצא הוא יכול לבצע תנועה בלפחות 2 כיוונים, על כן לא ניתן להגיע לבור.

שאלה 6

<u>סעיפים 1+2 :</u>

מחיר האלגוריתם שהתקבל מהרצת UCS על מבוכים 1-3 קטן מזה המתקבל עם BFS.

ראינו בהרצאה כי אלגוריתם UCS הינו אלגוריתם שלם- כלומר אלגוריתם המחזיר את המסלול האופטימלי הקצר ביותר (בהנחה ומחיר כל פעולה הוא חסום כמו במקרה שלנו- הפעולה הכי "זולה" היא להתקדם קדימה ומחירה הוא 1).

אלגוריתם BFS מחזיר את המסלול הקצר ביותר רק אם מחירי כל הקשתות בגרף הינם אחידים. כיוון ש-BFS מחפש ל"רוחב" ובוחר לפתח צמתים לפי FIFO האלגוריתם מחזיר את המסלול הקצר ביותר (בהיבט כמות הפעולות, ולא בהיבט העלות של המסלול)

באיור שלהלן ניתן לראות את אורך המסלול (מהיבטי כמות הפעולות) שמצע כל אלגוריתם ל-6 המבוכים שלנו:

```
This is the length of pathes by using UCS [21, 36, 189, 61, 108, 325]
This is the length of pathes by using BFS [21, 32, 189, 57, 108, 325]
```

ניתן לראות שאורך המסלולים שנמצאו ע"י BFS קטנים מאורך המסלולים שנמצאו ע"י UCS. בנוסף אנו רואים כי במבוכים 1 ו-3 האלגוריתם מצא מסלולים עם פחות כמות פעולות אך זה דרש לבצע יותר סיבובים שעלותם היא גבוהה. בשאר המבוכים התקבל כי המסלול הזול ביותר הוא גם המסלול הקצר ביותר (כמות הפעולות מינימלית) ועל כן המחירים שהתקבלו בשאר המבוכים זהים בין שני האלגוריתמים.

<u>לפיכך תנאי פשוט על הבעיה כדי שהמחיר המסלול המוחזר משני האלגוריתמים יהיה זהה הינו שהמסלול בעל המחיר הנמוך ביותר צריך להיות גם המסלול בעל כמות הפעולות המינימלית.</u> בפשטות: **הפתרון הקצר ביותר הוא גם הפתרון האופטימלי.**

שאלה 8

נראה כי יוריסטיקת tail manhattan distance אינה קבילה:

יהי רובוט בעל אורך l באוריאונטציה כלשהי. נניח כי מצב המטרה מתקבל ע"י ביצוע סיבוב באחד הכיוון (נניח שמאלה, בלי הגבלת הכלליות..)

העלות של ביצוע הסיבוב הינו Turn Cost ובמקרה שלנו שווה ל-5. כלומר, $h^{\star} = TurnCost = 5$

היוריסטיקה של המצב ההתחלתי תראה כי המרחק ליעד הינו: $h_{MD} = \frac{l-1}{2} + \frac{l-1}{2} = l-1$

על מנת להראות קבילות נדרוש: $h_{MD} \leq h^{\star}$ כלומר: $l-1 \leq TurnCost$.

(**משמע עבור** $l > TurnCost + 1$ **או לחילופין** $TurnCost < l-1$ **היוריסטיקה אינה קבילה**)

עד כאן ביצענו הנחה נסתרת והסתכלנו על מצב בו עלות התקדמות קדימה הוא 1. בסוף בדוגמא שבחנו (מצב מטרה מתקבל ע"י ביצוע סיבוב בכיוון כלשהו) אנחנו רוצים

שהרובוט יעדיף לבצע סיבוב ולא התקדמות קדימה- לכן ברור כי נצטרך לקשור את התוצאה בפרמטר ההתקדמות (FwdCost) ולכן:

תנאי הכרחי ומספיק על המחיר של אופרטורי הסיבוב כך שהיוריסטיקה תהיה קבילה הינו: $\boldsymbol{TurnCost \geq FwdCost \cdot (l-1)}$

שאלה 9

נראה כי יוריסטיקה center manhattan heuristic קבילה:

ראשית קל לראות שהבעיה שראינו עם היוריסטיקה בשאלה הקודמת אינה קיימת ביוריסטיקה החדשה־ כיוון שמרכז הרובוט הוא בדיוק מרכז הסיבוב אזי מצב כלשהו וסיבוב לאחד הכיוונים מניבים את אותו הערך היוריסטי.

כלומר אם יש לנו רובוט באוריאונטציה כלשהי, והיעד ניתן להשגה ע"י סיבוב באחד הכיוונים, אזי היוריסטיקה של המצב ההתחלתי תחזיר 0 ומתקיים $h = 0 < h^{\star} = TurnCost$ (קבילה).

נסביר מדוע מתקיים $0 \leq h(s) \leq h^{\star}(s)$ לכל s:

כיוון שמדובר במרחק אזי $h(s) \geq 0$.

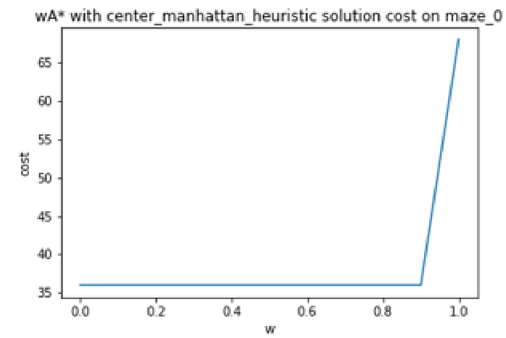
היוריסטיקה הזאת היא בעצם פתרון לבעית מבוך מפושטת שבה נסתכל על הרובוט שלנו כאל גוף בגודל משבצת אחת שהוא בדיוק מרכז הרובוט (מרכז המסה).

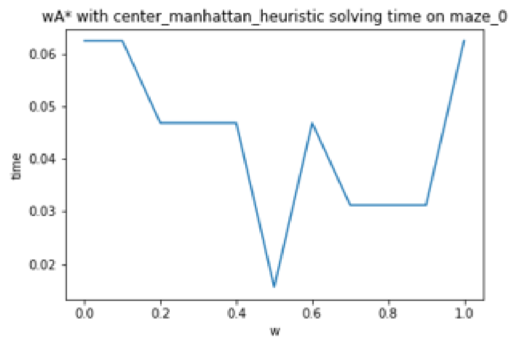
ניווט כזה במבוך ללא מכשולים כאשר מותר לנוע $\{N, S, E, W\}$ בסצנריו כזה המסלול הקצר ביותר הוא בדיוק מרחק מנהטן המוצעת .

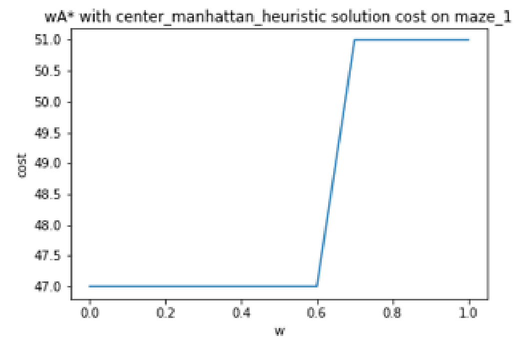
כיוון שהבעיה המתוארת קלה יותר מהבעיה שלנו אזי בהכרח מחיר הפתרון שלה קטן יותר (אופטימלי) לבעיה המקורית, על כן מתקיים $\forall s \in S : 0 \leq h(s) \leq h^{\star}(s)$

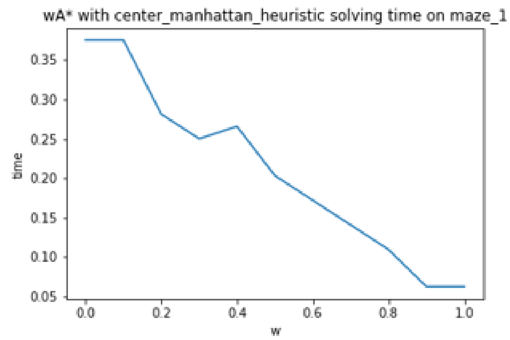
שאלה 10

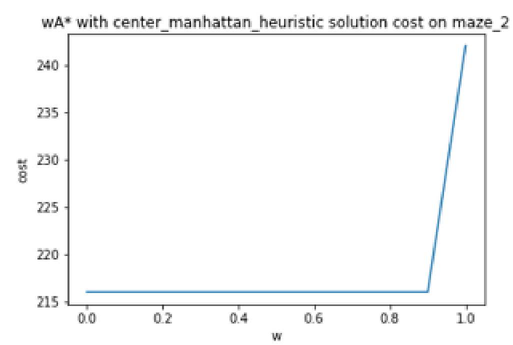
להלן תוצאות ההרצות עם מפות 0 עד 2 :

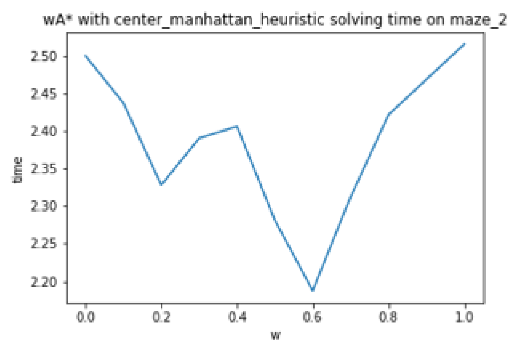








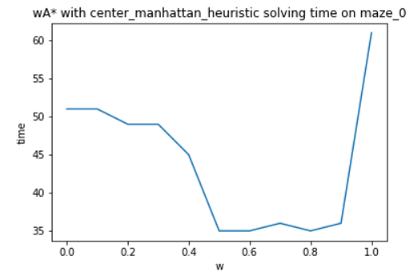




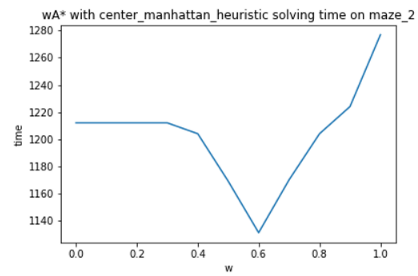
<u>הבחנות מהגרפים:</u>

- עד $w = 0.5$ וכולל המחיר של המסלול המתקבל הינו אופטימלי־ לא מפתיע שכן לכל $w < 0.5$ האלגוריתם "הולך" לכיוון ה־UCS .
- במבוכים $[0, 2]$ המחיר האופטימלי נשמר עד $w = 0.9$ ואילו במבוך מס' 1 המחיר האופטימלי נשמר עד $w = 0.6$.
- במבוך 2 זמן הריצה כמעט יורד מונוטונית עם העליה של w (למעט "גליץ'" קטן ב־$w = 0.4$)
- במבוך 1 זמן הריצה המינימלי מתקבל ב־$w = 0.5$ ובמבוך 3 זמן הריצה המינילי מתקבל ב־$w = 0.6$. בשני המקרים לאחר המינימום יש עליה של זמני הריצה.
- נשים לב שהערכי זמן הריצה של מבוך 0 הינם קטנים מאוד וקשה לגזור מידע מדוייק מהגרפים של מבוך זה, שכן להפרעות/רעש בתהליך יש השפעה רבה מאוד.

כיוון שזמן החישוב הוא פרמטר טריקי־ פעולות מחשב ברקע וכו' עלולות להשפיע, נסתכל על כמות הצמתים שפותחו לחלק מהבעיות:



עבור מבוך 0 אנחנו רואים כי בטווח $w \in [0.5, 0.9]$ כמות הצמתים המפותחת היא כמעט זהה - הבדלים זניחים. כך שגם עבור גרף זה אין בעיה להשתמש בערכי w כמו $0.6, 0.7$



גם עבור גרף 2 אנחנו רואים מגמות ברורות יותר כשמסתכלים על כמות הצמתים שפותחה. סך הכל עד $w = 0.6$ יש ירידה בכמות הצמתים שמפותחת ולאחר מכן עליה- נראה שהיוריסטיקה מטעה אותנו מעט.

בסך הכל:

- לא הייתי משתמש בערכי w רחוקים מידי מערך 0.5 שכן כשמתרחקים מידי מערך זה מחיר הפתרון אינו אופטימלי, וזמני החישוב של הפתרון גדלים.
- נראה כי עד $w = 0.7$ האלגוריתם מניב תוצאות טובות שהערך המיטבי שנראה בבעיות אלה הינו $w = 0.6$.

שאלה 11

סימונים:

- $d(s,s')$ - מחיר המסלול הקצר ביותר בין המצבים. אם לא קיים מסלול בין המצבים נגדיר $d(s,s')=\infty$.
- מצב התחלתי ומצב סופי יסומנו ב- s^i, s^*
- s_k - מצב זהה ל-s מלבד שהרובוט התקצר ב- k משבצות (הראש והזנב מתקרבים למרכז הרובוט ב- $k/2$ משבצות)
- $h_k(s)$ - מחיר המסלול הקצר ביותר ממצב s עבור רובוט קטן ב-k מהרובוט המקורי. $h_k(s)=d(s_k,s_k^*)$
- $\bar{s}$- מצב s בו מיקומי הראש והזנב של הרובוט התחלפו.
- $\mathcal{F}$- אוסף כל המצבים החוקיים לבעיה (הרובוט בגבולות הבעיה וכל המשבצות בין הראש לזנב ,כולל, ריקות ממכשולים)
- a- אופרטור/פעולה. הפעלת הפעולה על מצב i תביא למצב j : $s_j=a(s_i)$
- P בעיית מבוך כלשהי. $\bar{P}$ - בעיית מבוך הופכית (היפוך נקודת התחלה-סוף והיפוך ראש-זנב).

נדרש להראות: $\forall s,s' : d(s,s')=d(\bar{s'},\bar{s})$

הבחנה 1: אם $s\in\mathcal{F}$ אז $\bar{s}\in\mathcal{F}$ (טריוויאלי -המשבצות הנתפסות ע"י רובוט במצב s זהות לשמבצות הנתפסות ע"י רובוט במצב $\bar{s}$)

הבחנה 2: אם קיים a כך ש $s_j=a(s_i)\neq\emptyset$ אזי קיים a' כך ש- $\bar{s_i}=a'(\bar{s_j})$ (לא ניכנס להוכחה פורמאלית)

הבחנה 2.2: $cost(edge(s_i,s_j))=cost(edge((\bar{s}_j,\bar{s}_i))$

הסבר להבחנות:

המעבר בין $s_i\to s_j$והמעבר בין $\bar{s}_j\to\bar{s}_i$כולל הפעלה של אותו סוג אופרטור לכן המחיר של שתי הפעולות הינו זהה.

אם a הינו תנועה קדימה בבעיה המקורית ומביאה אותנו מ-s_i ל-s_j , אז בבעיה ההופכית $a'=a$ - התקדמות קדימה תביא אותנו מ-$\bar{s_j}$ל-$\bar{s_i}$.

אם a הינו תנועת סיבוב בבעיה המקורית אז a' הינה תנועת סיבוב לכיוון ההפוך (אם האופרטור בבעיה המקורית היה סיבוב לימין, בבעיה ההופכית נצטרך להפעיל סיבוב לכיוון ההפוך)

הבחנה 3: לכל מסלול $< s_1,s_2,\ldots s_{n-1},s_n >$ בבעיה המקורית ניתן לבנות מסלול חוקי הפוך, כלומר: $< \bar{s_n},\bar{s_{n-1}},\ldots\bar{s_2},\bar{s_1} >$, בעל אותו מחיר.

הסבר:נניח בבעיה המקורית כי קיים מסלול $< s_1,s_2,...,s_{n-1},s_n >$

לפי הבחנה 2 עבור כל קשת (s_i,s_{i+1}) אנו יודעים לייצר קשת בבעיה ההופכית: $(\bar{s}_{i+1},\bar{s}_i)$ באותו מחיר (הבחנה 2.2).

אזי נוכל לבנות את המסלול ההפוכי- נתחיל ב-$\bar{s}_n$נוכל לבנות קשת ל-$\bar{s}_{n-1}$ואז מ-$\bar{s}_{n-1}$נוכל לבנות קשת ל-$\bar{s}_{n-2}$וכך הלאה עד שנגיע ל-$\bar{s}_1$

כיוון שכל קשת היא במחיר זהה לקשת המקבילה בבעיה המקורית המחיר של המסלול כולו הינו זהה.

הבחנה 4: לכל מסלול חוקי $< \bar{s_n},\bar{s_{n-1}},\ldots\bar{s_2},\bar{s_1} >$ בבעיה ההופכית קיים מסלול הפוך בבעיה המקורית $< s_1,s_2,\ldots s_{n-1},s_n >$ במחיר זהה,הכולל את אותם הצמתים בהיפוך (ראש-זנב) והיפוך סדר.

(טריוויאלי, מתקיים $\bar{\bar{s}}=s$, ואז ניתן להראות בדיוק כמו בהבחנה 3)

כעת נוכיח את הבעיה המקורית:$\forall s,s' : d(s,s')=d(\bar{s'},\bar{s})$

ראינו כי לכל מסלול בבעיה P קיים מסלול הופכי ב-$\bar{P}$(בבעיה ההופכית) באותו מחיר, וההפך (הבחנה 4,3)

- בבעיה המקורית מצאנו את המסלול הקצר ביותר $s\to s'$ ומחירו $d(s,s')$.
- נרכיב את המסלול המתאים לו בבעיה ההופכית $\bar{s}'\to\bar{s}$, מחירו יהיה זהה ל-$d(s,s')$ כפי שראינו בהבחנות 2.2,2.
- נראה כי לא קיים מסלול טוב יותר-נוכיח בשלילה:
  - נניח וקיים מסלול טוב יותר $\bar{s}'\to\bar{s}$ומחירו $\tilde{d}<d(s,s')$. אזי לפי הבחנה 4 נוכל לבנות מסלול הפוך בבעיה המקורית עם עלות זהה.
  - המסלול שבנינו בבעיה המקורית הינו בעל מחיר $\tilde{d}<d(s,s')$. סתירה, הרי המסול המקורי היה עם המחיר הנמוך ביותר
  - ניתן להראות גם הפוך.

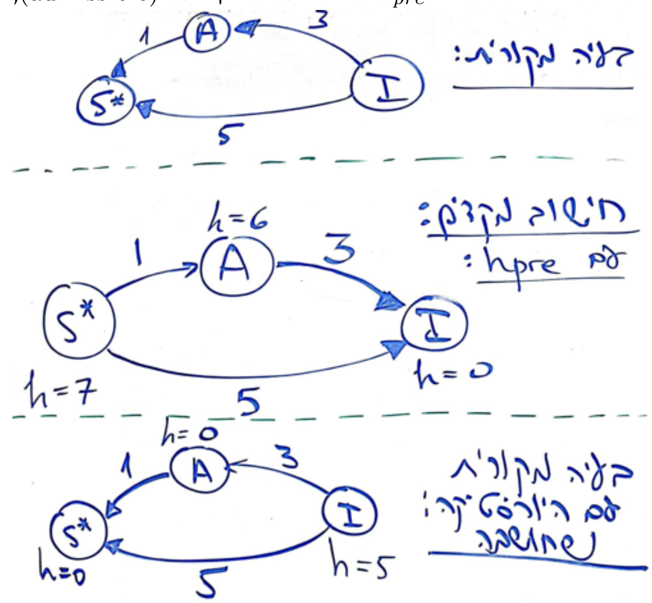
שאלה 12

סעיף א'

האם היוריסטיקה $h(s) = g_{\bar{s_k^*}}(\bar{s_k})$ קבילה בהכרח? **לא!**

נדרוש על h_{pre} להיות עקבית (וזה גורר גם קבילות)

שלב 1: ראשית נראה כי h_{pre} חייבת להיות קבילה (admissible), נראה זאת ע"י דוגמא נגדית הבאה:



באיור שלהלן אנחנו רואים את הבעיה המקורית, את הבעיה בשלב החישוב המקדים (הכיוונים מתהפכים ונוספת יוריסטיקה h_{pre}) והבעיה המקורית לאחר החישוב המקדים (מתווספת היוריסטיקה שחושבה)

בדוגמא להלן השתמשנו ביוריסטיקה לא קבילה.

תוצאות החישוב מקדים (איור 2):

כיוון שהבעיה פשוטה לא נראה את השלבים במלואם:

- בהתחלה s^* נסגרה ופותחו הצמתים A, I כאשר: $f_A = 7, f_I = 5$
- מוציאים את צומת I מה־$open$ מעבירים ל־$close$. הבעיה הסתיימה מבלי שפיתחנו את צומת A, ואז היינו מגלים שהמסלול דרך Aהוא האופטימלי.

כעת נפתור את הבעיה המקורית עם היוריסטיקה שחושבה:

בחישוב המקדים נסגרו שני צמתים s^*, I כאשר מחירם הינו: $g_{s^*} = 0, g_I = 5$, כלומר היוריסטיקה בצומת I הינה $h(I) = g_{\bar{s_k^*}}(I) = 5$ בעוד שהמסלול הקצר ביותר מ־I מחירו 4

כלומר, $h(I) > h^\star(I)$.

<u>ראינו שבעקבות יוריסטיקה לא קבילה בחישוב המקדים קיבלנו יוריסטיקה לא קבילה עבור הבעיה המקורית.</u>

שלב 2: היוריסטיקה h_{pre} צריכה להיות עקבית:

ראינו בהרצאה כי ביוריסטיקה עקבית, כל צומת שנסגר הוא בעל המחיר הנמוך ביותר:

$$\forall n \in Close : g(n) = g^\star$$

נראה ששימוש ביוריסטיקה קבילה בחישוב המקדים תביא ליוריסטיקה קבילה בפתרון הבעיה המקורית:

נניח צומת n כלשהי בבעיה המקורית שנכנסה ל־$open$. בחישוב המקדים של היוריסטיקה צומת זאת (ההופכית שלה $\bar{n}$) יכולה להיות מפותחת או לא.

אם צומת $\bar{n}$ נפתחה, המחיר שלה הינו המחיר האמיתי שלה בבעיה המפושטת מצומת ה-G. כיוון שזאת בעיה מפושטת אנחנו יודעים שהמחיר של המסלול $G \to n$ בבעיה המקורית הוא לכל הפחות היוריסטיקה (יוריסטיקה קבילה).

אם צומת $\bar{n}$לא נפתחה בחישוב המקדים, אזי בפתרון הבעיה המקורית צומת זאת תהיה עם יוריסטיקה $h(n) = 0$ שזה גם קביל.

כלומר, המסקנה שהיורסיטיקה שתתקבל אחרי החישוב המקדים תהיה קבילה ולכן יוחזר הפתרון האופטימלי בבעיה המקורית.

סעיף ב'

האם שימוש ביוריסטיקה לא קבילה מבטיח קבלת פתרון לא אופטימלי?

תשובה: לא. שימוש ביוריסטיקה לא קבילה אינו מבטיח קבלה של פתרון לא אופטימלי .

יכול להיות מצב בו שימוש ביוריסטיקה לא קבילה עדיין יניב את הפתרון האופטימלי של הבעיה.

דוגמא לכך ראינו ע"י שימוש ביוריסטיקה tail_manhattan_heuristic שאף על פי שזאת אינה יוריסטיקה קבילה עדיין כל הפתרונות אופטימליים.

(מחיר הפתרונות של 6 המבוכים שקיבלנו באלגוריתם A^*עם tail_manhattan זהה למחיר הפתרון שמתקבלים עם חישוב UCS)

שאלה 15

הנחה: קיים מסלול יחיד בין $\bar{s_k^*} \to \bar{s_k^i}$

סעיף 1- הוכיחו כי אם קיים פתרון לבעיה המקורית, אז הוא יחיד.

הבחנה 1: עבור כל מסלול חוקי $< s_1, s_2 \dots s_{n-1}, s_n >$ בבעיה המקורית, קיים מסלול חוקי מתאים בבעיה ההופכית המקלה: $< \bar{s}_{kn}, \bar{s}_{kn-1} \dots \bar{s}_{k2}, \bar{s}_{k1} >$ (ראינו בשאלה 11)

הוכחה:

אם קיים פתרון לבעיה המקורית נניח בשלילה שלבעיה המקורית קיימים לפחות שתי מסלולים p_1, p_2 מ-s_i ל-s^*. אזי לפי הבחנה 1, קיימים לפחות 2 מסלולים $\bar{s_k^*} \to \bar{s_k^i}$ בבעיה ההופכית המקלה, וזה סותר את ההנחה הראשונית כי קיים מסלול יחיד ב-$\bar{P}_k$.

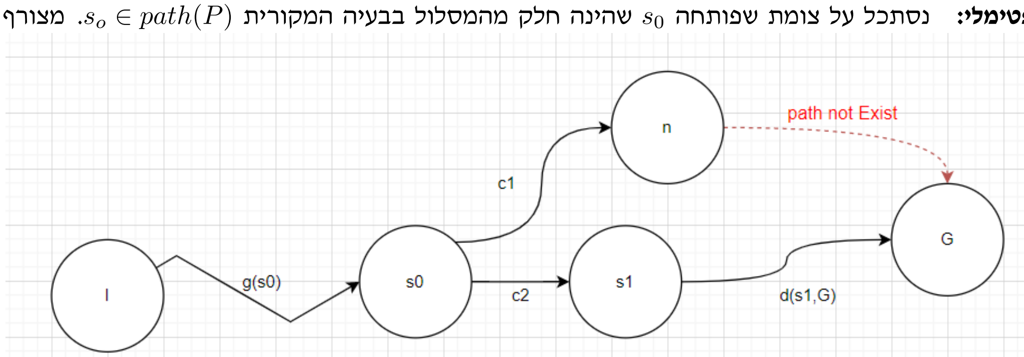
סעיף 2- הוכיחו או הפריכו: $h_k = h^*$ נפריך את הטענה ע"י דוגמא נגדית:

נפתור את הבעיה ההופכית המקלה (לרובוט קצר יוצר ב-k) ונמצא מסלול $path(\bar{s}^*, \bar{s}^i)$ בעלות c .

אם בבעיה המקורית המסלול ההופכי שמצאנו אינו חוקי (הרובוט באורך המקורי לא יכול לבצע תנועה כלשהי עקב אורכו) אזי $d(s^i, s^*) = \infty$ ואילו היוריסטיקה שחישבנו מראה כי $h(s^i) = c$.

כלומר לא מתקיים $h_k = h^*$.

סעיף 3 - בהנחה שקיים פתרון לבעיה המקורית, הוכיחו כי בזמן פתרון הבעיה המקורית עם h_k מפותחים אך ורק צמתים על המסלול האופטימלי: נסתכל על צומת שפותחה s_0 שהינה חלק מהמסלול בבעיה המקורית $s_o \in path(P)$. מצורף איור להמחשת הבעיה:



מתואר איור סכמטי של הבעיה.

s_0, s_1 - חלק מהמסלול בין I ל- G

c_1, c_2 - עלות הפעלת אופרטורים כמתואר באיור.

n - צומת שאינה במסלול האופטימלי . קיים אופרטור שעלות c_1 שמאפשר להגיע אליה דרך s_0.

הבחנה 1: לא קיים מסלול בין n ל- G (כי אחרת יש יותר ממסלול אחד).

הבחנה 2: כאשר צומת s_0 יסגר הצמתים s_1, n יכנסו לחזית החיפוש.

כיוון שבחישוב המקדים השתמשנו ב-UCS וידוע לנו שהמסלול הוא יחיד וקיים אזי ערכי היוריסטיקה יתאימו למרחקי המסלולים האמיתיים

$$f(s_1) = \underbrace{g(s_0) + c_2}_{g(s_1)} + \underbrace{d(s_0, G) - c_2}_{h(s_1)} = g(s_0) + d(s_0, G)$$

$$f(n) = \underbrace{g(s_0) + c_1}_{g(s_1)} + \underbrace{d(s_0, G) + c_1}_{h(s_1)} = g(s_0) + d(s_0, G) + 2c_1$$

מתקיים $f(s_1) < f(n)$ כלומר צומת s_1 שהוא חלק מהמסלול יפותח לפני צומת שרירותי שאינו על המסלול.

כיוון שהגדרת הבעיה הייתה כללית- s_0 היא צומת כלשהי של המסלול (יכולה להיות גם I) אזי שימוש ב- h_k ותחת הנחות של קיום ואחידות הפתרון, A^* מפתחת רק צמתים שהינם חלק מהמסלול.

הערה:

דרך נוספת לפתור את הסעיף הזה הינו שימוש בהוכחה מההרצאה־

להראות שבהינתן יוריסטיקה קבילה, A^*מפתח צמתים שמובילים לפתרון האופטימלי (ולא צמתים שמובילים לפתרון תת־אופטימלי).

ניתן להקביל זאת למקרה שלנו בכך שניתן לומר כי מחיר פתרון תת אופטימלי (צומת B) הינו אינסופי $g(B) = \infty$ (כי לא קיים פתרון כזה)

קל להראות את מה שהראינו להעיל, שעבור קבוצת צמתים בחזית החיפוש יפותחו קודם הצמתים אשר שייכים למסלול האופטימלי:

$$f(s \in Opt.path) < f(n \in SubOpt.path)$$

סעיף 4 - תיאור הבעיה:

$n_{manhattan}$־ מס' הצמתים שפותחו בזמן ריצת A^*עם יוריסטיקת מנהטן קבילה (מרכז)

m_k־ מספר הצמתים שפותחו בזמן ריצת החישוב המקדים עם אלגוריתם UCS

n_k־ מספר הצמתים שפותחו בזמן ריצת A^*עם יוריסטיקה h_k

נניח כי זמן חישוב כל אלגוריתם הינו פרופורציונלי לכמות הצמתים שנפתחו באלגוריתם, עם אותו קבוע פרופורציה c

קל לראות כי כדאי להשתמש ביוריסטיקה החדשה כאשר מתקיים $n_k + m_k < n_{manhattan}$

a ־ מספר המצבים הנגישים מ־ $\bar{s_k^*}$(הנחה כי קיים מסלול יחיד בין $\bar{s_k^*}$ ל־ $\bar{s_k^i}$

r ־ כמות הפעולות במסלול שידוע שקיים בבעיה המקורית־כיוון שקיים פתרון יחיד, r הינו כמות הפעולות בפתרון האופטימלי.

פתרון:

כיוון ש־a הינו מס' המצבים הנגישים מ־$\bar{s_k}^*$, ניתן לאמר כי $m_k < a$ שכן לכל היותר יפותחו a מצבים.

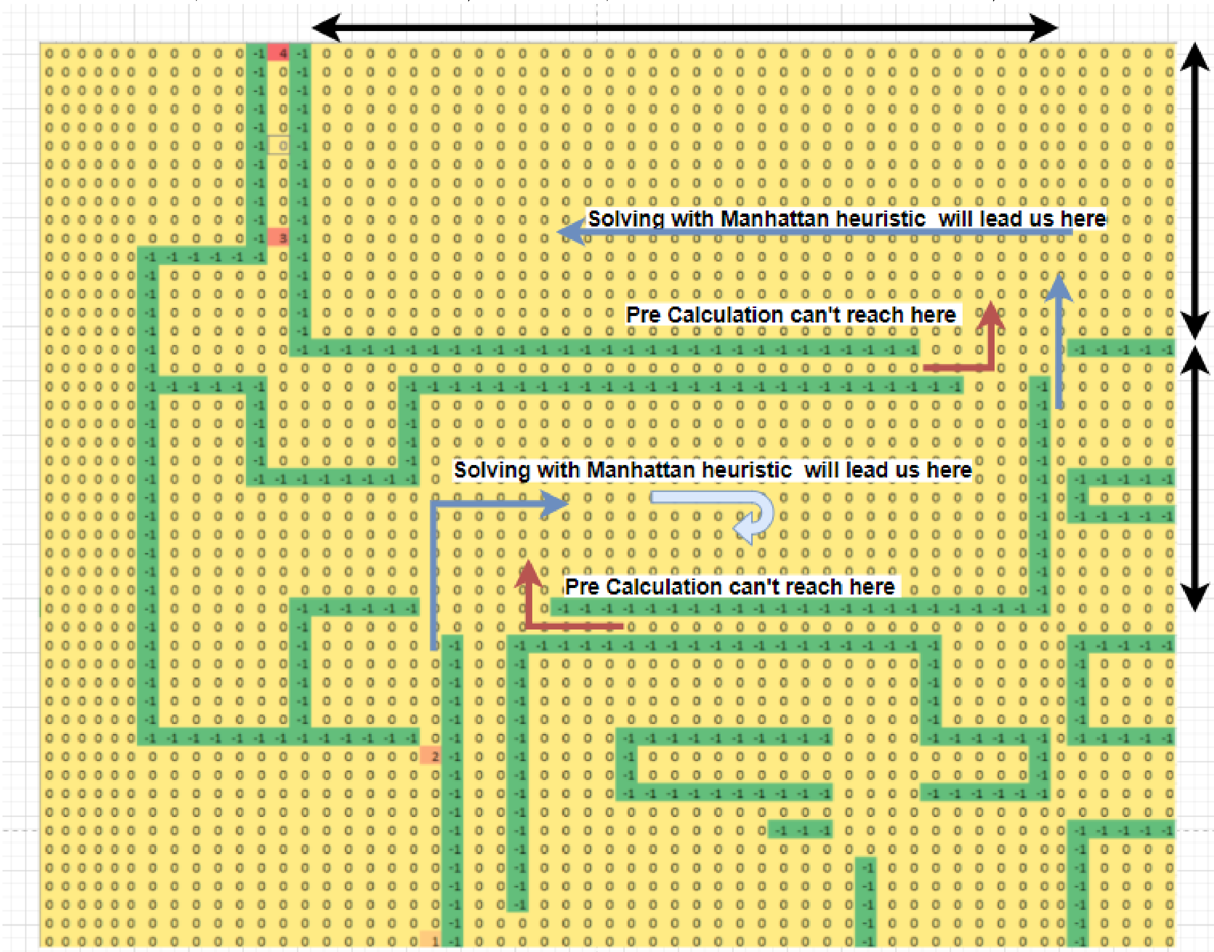
ראינו בסעיף הקודם, כי A^*עם היוריסטיקה h_kמפתח רק את הצמתים שהינם חלק מהמסלול, כלומר $n_k = r + 1$ (כמות הפעולות במסלול קטנה ב־1 מאורך המסלול).

מתקיים: $n_k + m_k < (r+1) + a$

על כן שווה להשתמש ביוריסטיקת h_kכולל ביצוע החישוב המקדים אם מתקיים:

$$r + a + 1 < n_{manhattan}$$

סעיף 5 מוטיבציה לפתרון־ נראה בשאלות הבאות כי עבור מבוך מספר 4 אכן שווה להשתמש ביוריסטיקת shorterRobot



ראשית האיור מסביר מדוע שימוש ביוריסטיקה ShorterRobot (ע"י ביצוע חישוב מקדים) עדיפה על פתרון של A^*עם יוריסטיקת מנהטן קבילה:

הבעיה בנויה כך שקיימים אזורים רבים בהם הרובוט יכול להיכנס אם הוא מתחיל מ־ I ל־G (אזורים אלו מסומנים בכחול)

אך אם מבצעים חישוב מקדים עם רובוט קטן יותר (אך לא יותר מידי קטן־נגיד 2 יחידות) הרבה מהאזורים שתוארו להעיל אינם נגישים לרובוט כשפותרים

את הבעיה ההופכית $\bar{s}_k^* \to \bar{s}_k^i$ ־ כל אותם אזורים סומנו בחץ אדום.

כיוון שהרובוט ארוך והבעיה מאוד מורכבת עם הרבה קירות־ קיים פתרון אחד בלבד.

בסך הכל זמן החישוב של הבעיה בשימוש ביוריסטיקה עם הרובוט המקוצר הוא קטן יותר־ החישוב המקדים הוא יחסית קל כי כמות המצבים האפשריים לפתרון

בכיוון ההפוך היא קטנה. החישוב המקדים מוצא את המסלול ולאחר מכן, כפי שהראנו בסעיפים הקודמים, A^* מפתח רק צמתים על המסלול האופטימלי.

מפה כללית שבה זמן הריצה של A^*(בשיטת ShorterRobot) גדול כרצונינו מחיפוש A^*עם יוריסטיקת מנהטן הינה המפה שתוארה להעיל

כאשר ניתן להאריך את החלקים שסומנו ע"י החצים השחורים על מנת להגדיל את היחס הזמנים (בעצם נגדיל את כל אותם אזורים בהם יוריסטיקת מנהטן יכולה להוביל אותנו לכאורה קרוב יותר למטרה

ואם זאת לא בכיוון הנכון שכן יש פתרון אחד בלבד).

שאלה 16

סעיף 1

באיור שלהלן ניתן לראות השוואה בשימוש ביוריסטיקה ShorterRobot לעומת center_manhattan עבור 5 המבוכים:

maze	heuristic	k	Time	cost
0	**center_manhattan**		**0.05**	36
0	ShorterRobotHeuristic	2	0.36	36
1	center_manhattan		0.22	47
1	ShorterRobotHeuristic	2	0.81	47
2	**center_manhattan**		**2.56**	216
2	ShorterRobotHeuristic	2	5.86	216
2	ShorterRobotHeuristic	4	7.19	216
2	ShorterRobotHeuristic	6	9.25	216
3	**center_manhattan**		**7.27**	84
3	ShorterRobotHeuristic	2	9.34	84
3	ShorterRobotHeuristic	4	11.44	84
3	ShorterRobotHeuristic	6	11.8	84
3	ShorterRobotHeuristic	8	12.33	84
4	**center_manhattan**		2.16	123
4	ShorterRobotHeuristic	2	**0.27**	123
4	ShorterRobotHeuristic	4	**0.31**	123
4	ShorterRobotHeuristic	6	5.39	123
4	ShorterRobotHeuristic	8	5.12	123
5	**center_manhattan**		**12.64**	376
5	ShorterRobotHeuristic	2	25.45	376
5	ShorterRobotHeuristic	4	32.41	376
5	ShorterRobotHeuristic	6	38.56	376
5	ShorterRobotHeuristic	8	44.3	376

ראשית השימוש ביוריסטיקה מביא לפתרון אופטימלי- עלות המסלולים המתקבלים זהה לתוצאות שקיבלנו עבור יוירסטיקת מנהטן.

באיור להעיל הודגשו זמני הריצה המינימליים שהתקבלו עבור כל ריצה.

ככלל השימוש ב-shorter_Robot מביא לזמני ריצה גבוהים יותר במרבית המקרים, מלבד לתוצאות שהתקבלו במבוך 4.

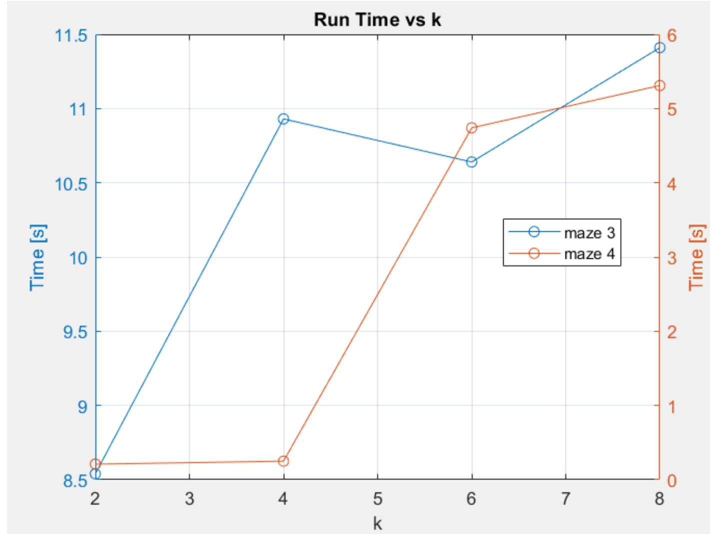
הסבר לשוני בסעיף 4 ולייחודיות של הגרף, ניתן לראות בשאלה הקודמת סעיף 5. זה דוגמא למקרה בו שימוש ביוריסטיקת shorter_Robot הינה משתלמת מאוד.

כלומר למעט מקרים ספציפיים מורכבים , שימוש ביוריסטיקת-Shorter_Rotob מביא לזמני ריצה גבוהים יותר מאשר מתקבלים ביוריסטיקת מנהטן.

סעיף 2

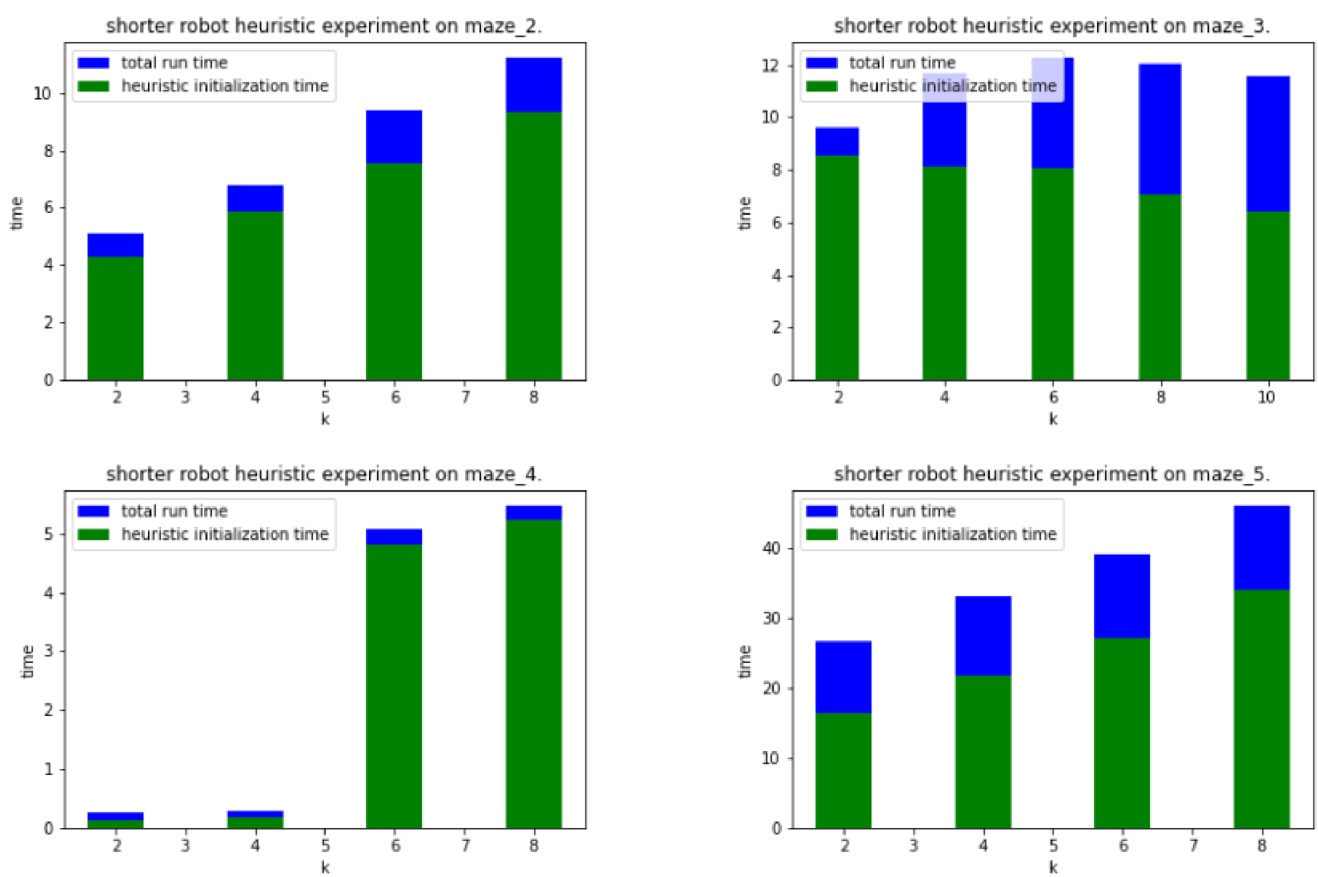
נשתמש בהרצות מסעיף 1 בשביל לתאר את השפעת k על ערכי הריצה.

באיור להלן ניתן לראות את זמן הריצה כפונקציה של k למובכים 3-4 :



מהאיור אפשר להסיק שלרוב ככל ש־k גדול יותר זמן הריצה גדול יותר.
בגרף מספר 3 יש לכאורה סתירה לאמירה הזאת־ ניתן לראות שמתקבל מינימום מקומי ב־ $k = 6$ כלומר $T(k = 4), T(k = 8) > T(k = 6)$. אך נראה בהבדל קטן ולא מהותית

סעיף 4



הבחנות מהגרפים להעיל:

- כפי שראינו בסעיף הקודם, ככלל ככל שעולים בערך ה־k כך זמן הריצה גדל. (לא בדיוק מתקיים עבור מבוך 3 החל מ־$k = 6$ ־ תופעה מעט מוזרה)

- ניתן לראות כי בגרף 4 היחס זמני ריצה בין $k=8$ ל־$k=2$ הוא הכי משמעותי כאשר בשאר הגרפים זה נראה כמו יחס בסדר גודל עד 2: $2 \sim \frac{T(k=8)}{T(k=2)}$לעומת זאת
- במבוך 4 היחס הזה הוא $O(10)$.
- מרבית זמן החישוב הולך לחישוב היוריסטיקה ואתחול הבעיה המקורית עם היוריסטיקה שחושבה.
- אחרי חישוב היוריסטיקה הפתרון מתקבל די מהר. היוריסטיקה די אינפורמטיבית (אנחנו יודעים שככל שהיוריסטיקה יותר אינפורמטיבית/קרובה לאמת־ כך נגיע מהר יותר לפתרון).

שאלה 17

סעיף א

מובטח שנקבל פתרון אופטימלי עבור הרובוט הגדול אם נשתמש בערך new-limit שהתקבל באיטרציה האחרונה.(בהנחה שבסיום האיטרציה הבעיה לא נפתרה עדיין)

רקע על האלגוריתם:

אלגוריתם IDA^* מבצע חיפוש לעומק בצורה איטרטיבית כאשר העומק במקרה זה הינו ערך f מוגדר בכל איטרציה להיות העומק **הכי נמוך** של בן שפותח שהיה עמוק יותר מהעומק המותר באיטרציה הקודמת.

כיוון שכל פעם העומק החדש הינו העומק **הכי נמוך** (ויותר גבוה מ־$f-limit$ באיטרציה הקודמת), אלגוריתם זה מחזיר את הפתרון האופטימלי לבעיה ("אין סכנה של קפיצות f ולפספס f נמוך יותר").

במהלך ריצת IDA^* באיטרציה כלשהי, הוחלט להגדיל את אורך הרובוט ב־2 יחידות.

<u>נניח שבסיום האיטרציה הבעיה לא נפתרה עדיין:</u>

הגדלת הרובוט מבטיחה שהפתרון עבור הרובוט המוגדל יהיה **לכל הפחות** המחיר של הרובוט המקורי (קונצפט שכבר ראינו בשאלות הקודמות־

רובוט קצר יותר יכול לבצע פניות במקומות רבים יותר וכך יש לו יותר אפשרויות תנועה ויכולות להיות לו דרכים זולות יותר להגיע ליעד שלא אפשריות לרובוט הארוך).

אם הבעיה לא נפתרה, $new-limit$ החזיר את ערך f שנצפה "הכי נמוך מבין כל הגבוהים יותר שעוד לא ראינו" **וזה אומר שעוד לא פתרנו את הבעיה המקורית**.

לפיכך אם נשתמש בערך $new-limit$ עבור הבעיה החדשה בטוח שלא פספסנו פתרון טוב יותר עד כה וכיוון שאלגוריתם IDA^* מחזיר פתרון אופטימלי, **<u>מובטח שנקבל פתרון אופטימלי.</u>**

<u>אם בסיום האיטרציה של הבעיה המקורית הבעיה נפתרה:</u>

יכול להיות מצב ש $new-limit=\infty$: נניח שאיטרציה לפני בבעיה המקורית $new-limit^{last}$ היה שווה למחיר המסלול בדיוק כך שבאיטרציה האחרונה בבעיה המקורית לא הופעל התנאי $new-f > f-limit$

ולא קרה עדכון של $new-limit$ ולכן $new-limit$ ישאר אינסוף כפי שהוא הותחל.

אם $new-limit=\infty$ אז באתחול של הבעיה החדשה (הרובוט המורחב) $f-limit \leftarrow new-limit=\infty$ ואז לא מובטח שנקבל פתרון אופטימלי־ ברגע שהאלגוריתם ימצא פתרון כלשהו הוא יחזיר אותו

(בדיוק בגלל מה שהוסבר ברקע־ שנדרש שהעומק החיפוש בכל איטרציה יתקדם הדרגתית לפי העומק הכי נמוך של בן שפותח שהיה עמוק יותר מהעומק המותר־ אחרת קפיצות ב־f עלולים להביא לפספוס של הפתרון האופטימלי).

<u>הערה לסעיף</u> : נניח כי לבעיה המורחבת יש פתרון, ולא ניכנס למעגלים.

סעיף ב

בעיה: רוצים לפתור מס' בעיות מבוך זהות למעט אורכי רובוט משתנים והוחלט להשתמש באלגוריתם IDA^*. נרצה לקצר את זמן הריצה הכולל של פתרון כל הבעיות:

נשתמש בקונצפט החוזר־ לכל 2 רובוטים בגדלים שונים־ מחיר הפתרון האופטימלי לרובוט הארוך יותר הוא **לכל הפחות** מחיר המסלול האופטימלי לרובוט הקצר יותר (ראינו גם בשאלה הקודמת).

נפתור את הבעיות בשלבים ־ מהרובוט הקצר ביותר ונתקדם באורכים עד לרובוט הארוך ביותר (אורך הרובוטים עולה כל פעם).

בסיום פתרון עבור רובוט כלשהו נאתחל את $f-limit$ של הבעיה הבאה (רובוט ארוך יותר) להיות $f-limit$ של הבעיה הקודמת (שכן מחיר פתרון הבעיה החדשה יהיה לכל הפחות מחיר פתרון הבעיה הקודמת)