第三节　对偶单纯形法

单纯形表**b**列中得到的是原问题基可行解,在检验数行得到的是对偶问题的基解（取相反数）；当检验数行的取值能保证对偶问题的解也是基可行解时，根据对偶的性质，原问题与对偶问题都得到最优解。

具体到max问题：根据对偶的对称性，若始终保持对偶问题的解是基可行解，即检验数$c_j - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_j \le 0 \text{ for all } j$，而原问题在非可行解基础上通过迭代达到可行，如此也可得到最优解。

引例，考虑最大化问题

$$\max -x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + \quad x_2 \geq 1.0 \\ \quad x_1 - 8x_2 \geq 0.5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

其等价形式为：

$$\max -x_1 - x_2 \qquad\qquad \max -x_1 - x_2 + 0x_3 + 0\,x_4$$
$$\begin{cases} -3x_1 - \quad x_2 \leq -1.0 \\ - \quad x_1 + 8x_2 \leq -0.5 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 - \quad x_2 + x_3 \qquad = -1.0 \\ - \quad x_1 + 8x_2 \qquad + x_4 = -0.5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

若不顾基的可行性（非负约束），强行启动单纯形法，则初始单纯形表为：

$c_j \to$			-1	-1	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-1.0	-3	-1	1	0
0	x_4	-0.5	-1	8	0	1
$\sigma_j \to$			-1	-1	0	0

表中**b**列得到一个基解，但不是基可行解，因此无法做单纯形迭代。

新的求解思路：设原问题$\{\max z = \mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$的一个基是$\mathbf{B} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m)$，对应基解为：$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^{\mathrm{T}}$（不一定是基可行解）。

若在$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$中至少有一个负分量，设$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_l < 0$，并且在单纯形表中检验数都$\le 0$，即[1]：

（1）基变量检验数：$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{B} = \mathbf{c_B} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{0}$。

（2）非基变量检验数：

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j \le 0, j = m+1, \dots, n$$

[1] 注，只有检验数行$\mathbf{c} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \le \mathbf{0}$，对偶问题的基解$\mathbf{y} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$满足$\mathbf{yA} \ge \mathbf{c}$，因而才是基可行解（见强对偶定理的证明过程和对偶问题的性质 7）。

将基变量中的负分量x_l取出，替换非基变量中的某x_k，要求经基变换，所有检验数仍保持非正。

那么，从原问题看，经过每次迭代，由非可行解往可行解靠近；从对偶问题看，由于检验数行一直维持非正，因此检验数行一直保证对应着对偶问题的基可行解。

当原问题迭代到可行解时，在单纯形表中，原问题和对偶问题都得到了可行解，且目标函数值都是$\mathbf{c_B B^{-1} b}$。根据强对偶定理，二者就都得到了最优解。

✧ 出基变量

出基变量可取$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$所在列的负分量中最小者，设为$x_l$。

✧ 入基变量

入基变量x_k应满足两个条件：原问题x_l所在行对应的新的解要非负，且保持对偶问题可行（检验数保持非正）。

考虑第一个条件，x_k进基后，对应约束方程可简化形如$a_{lk}x_k = b_l$；而已知$b_l < 0$，故要使新的解非负，只能考虑$a_{lk} < 0$的非基变量x_k入基。

第二个条件，新的检验数非正。为此，假设x_k入基，考察换基前、后单纯形表中其他变量的检验数。

	$c_j \rightarrow$			$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_j	$\cdots$
	$\mathbf{c}_\mathrm{B}$	$\mathbf{x}_\mathrm{B}$	$\mathbf{b}$	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$\cdots$
当前单纯形表	c_1 c_l c_m	x_1 x_l x_m	b_1 b_l b_m	$\cdots$	a_{1k} $[a_{lk}]$ a_{mk}	$\cdots$	a_{1j} a_{lj} a_{mj}	$\cdots$
	$\boldsymbol{\sigma}$			$\cdots$	$c_k - \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{y}_k$	$\cdots$	$c_j - \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{y}_j$	$\cdots$

换基后，首先对$\mathbf{y}_k$列做高斯消元，相当于给增广矩阵左乘关于主元$[a_{lk}]$的初等矩阵，记为$\mathbf{E}_{lk}$。

	$c_j \to$			…	c_k	…	c_j	…
	$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}'$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}'$	$\mathbf{b}'$	…	x_k	…	x_j	…
换基并高	c_1	x_1	b_1'		0			
斯消元后	c_k	x_k	b_k'	…	1	…	$\mathbf{E}_{lk}\mathbf{y}_j$	…
	c_m	x_m	b_m'		0			
	$\boldsymbol{\sigma}'$			…	0	…	$\sigma_j' = c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}'\mathbf{E}_{lk}\mathbf{y}_j$	…

对偶问题要求可行，则新的检验数必须满足：$\sigma_j' \leq 0$。为计算检验数，先化简$\mathbf{E}_{lk}\mathbf{y}_j$：

$$
\mathbf{E}_{lk}\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & -a_{1k}/a_{lk} & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1/a_{lk} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & -a_{mk}/a_{lk} & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{1j} - a_{1k} \cdot \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \\ \vdots \\ \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \\ \vdots \\ a_{mj} - a_{mk} \cdot \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

于是新的检验数为：

$$\sigma_j' = c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}'\mathbf{E}_{lk}\mathbf{y}_j = c_j - (c_1, \dots, c_k, \dots, c_m)\left[\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= c_j - \sum_{i \neq k, i=1,\dots,m} c_i a_{ij} - c_k a_{lj} + \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \sum_{i \neq k, i=1,\dots,m} c_i a_{ik} + c_k \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{lk} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} c_k$$

$$= c_j - \sum_{i \neq k, i=1,\dots,m} c_i a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}\left(c_k - \sum_{i \neq k, i=1,\dots,m} c_i a_{ik}\right)$$

$$= \left(c_j - \sum_{i=1,\dots,l,\dots,m} c_i a_{ij} + c_l a_{lj}\right) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}\left(c_k - \sum_{i=1,\dots,l,\dots,m} c_i a_{ik} + c_l a_{lk}\right)$$

$$= \sigma_j + c_l a_{lj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}(\sigma_k + c_l a_{lk})$$

$$= \sigma_j - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \sigma_k$$

考虑对偶可行性条件：$\sigma_j' \leq 0$，有

$$\sigma_j' = \sigma_j - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}\sigma_k \leq 0$$

若$a_{lj} \geq 0$，考虑到$\sigma_j \leq 0, \sigma_k \leq 0, a_{lk} < 0$，上式显然成立。

若$a_{lj} < 0$，则要求下式成立：

$$\frac{\sigma_k}{a_{lk}} \leq \frac{\sigma_j}{a_{lj}} \text{ for all } a_{lj} < 0$$

也就是说，进基变量x_k决定于检验数与出基变量x_l所在行所有< 0的元素的比值。比值最小者入基：

$$\theta = \min_j \left\{ \frac{\sigma_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right\} = \frac{\sigma_k}{a_{lk}}$$

✧ 对偶单纯形法的计算步骤（原问题为 max 型）

（1）根据 LP 问题，列出初始单纯形表。检查b列，若都非负，检验数都非正，则已达最优，停止计算。

若b列至少有一个负分量，且所有检验数非正，则进行以下计算。

（2）确定换出变量：$\min\{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i \mid (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i < 0\} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_l$对应的基变量$x_l$为换出变量。

（3）确定换入变量：检查单纯形表中x_l所在行各系数$a_{lj}(j=1,2,\ldots,n)$。若所有$a_{lj}\geq 0$，则无可行解[2]**，停止计算。若存在$a_{lj}<0$，则计算θ比值：**

$$\theta=\min_{j}\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}}\middle|a_{lj}<0\right\}=\frac{\sigma_k}{a_{lk}}$$

对应列的非基变量x_k为换入变量。

（4）以a_{lk}为主元素，做高斯消元得到新的计算表。重复步骤（1）-（4）。

[2] 若x_j入基，则约束形如$a_{lj}x_j=b_l$；但$b_l<0$，若所有$a_{lj}\geq 0$，则任何基变换都不可能保证新解$x_j=b_l/a_{lj}\geq 0$，因而原问题无解。

例 7，用对偶单纯形法求解

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解，将此问题化成max型标准形式[3]：

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表：

---

[3] 对偶单纯形法，比较方便的形式是原问题为max型问题。

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
c_B	**x_B**	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
$\sigma_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0

检验数行对应的对偶问题的解是可行解。**b**列为负，需进行迭代运算。

确定换出变量：$\min\{-3,-4\}=-4$，x_5为换出变量。

确定换入变量：$\theta=\min_j\left\{\frac{-2}{-2},-\frac{-4}{-3}\right\}=1, x_1$为换入变量。

按单纯形法计算步骤进行迭代。

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
$\sigma_j \to$			0	-4	-1	0	-1

对偶问题是可行解，**b**列中仍有负分量，需要继续迭代：

<table>
<tr><td colspan="3">$c_j \rightarrow$</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{c_B}$</td><td>$\mathbf{x_B}$</td><td>$\mathbf{b}$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td></tr>
<tr><td>-3
-2</td><td>x_2
x_1</td><td>2/5
11/5</td><td>0
1</td><td>1
0</td><td>-1/5
7/5</td><td>-2/5
-1/5</td><td>1/5
-2/5</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sigma_j \rightarrow$</td><td>0</td><td>0</td><td>-9/5</td><td colspan="2">$\underbrace{-8/5 \qquad -1/5}_{-\mathbf{y}=-\mathbf{C_B B^{-1}}}$</td></tr>
</table>

b列全非负，检验数全非正，得原问题最优解：

$$\mathbf{x}^* = (11/5, 2/5, 0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$$w^* = \min w = -(\max z) = -(-2 \times \frac{11}{5} - 3 \times \frac{2}{5} = 28/5$$

对偶问题最优解：$\mathbf{y}^* = \mathbf{C_B B^{-1}} = (8/5,1/5)$。

✧ 对偶单纯形法的优点

（1）初始解可以是非可行解，当检验数都为负数，就可进行基变换，不需加入人工变量，可简化计算。

（2）对变量多于约束条件的 LP 问题，用对偶单纯形法可减少计算量。对变量较少而约束条件很多的 LP 问题，可先变换成对偶问题，再用对偶单纯形法求解。

（3）在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需用对偶单纯形法，这样可使问题的处理简化。

✧ 对偶单纯形法的局限性

对于问题$\max z = \mathbf{cx}$，若$\mathbf{c} \le \mathbf{0}$，则很容易构造检验数$\le \mathbf{0}$的初始单纯形表（保证对偶问题可行）。

但就大多数 **LP** 问题而言，很难为对偶问题直接找到一个初始可行基，因而这种方法在求解 **LP** 问题时很少单独使用。