第三章
多维随机变量及其分布

第二节

边际分布与随机变量的独立性

Overview

问题：已知二维随机变量 (X, Y) 的分布，如何求出 X 和 Y 各自的分布?

边际分布函数

边际分布函数与边际分布列

边际分布函数

已知 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

边际分布函数

已知 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

$X \sim F_X(x) = F(x, +\infty)$

边际分布函数

已知 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

$X \sim F_X(x) = F(x, +\infty)$

$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty, y)$

边际分布函数与边际分布列

边际分布函数

已知 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

$X \sim F_X(x) = F(x, +\infty)$

$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty, y)$

边际分布列

边际分布函数

已知 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

$X \sim F_X(x) = F(x, +\infty)$

$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty, y)$

边际分布列

已知 (X, Y) 的联合分布列为 p_{ij}, 则

边际分布函数与边际分布列

边际分布函数

已知 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

$X \sim F_X(x) = F(x,+\infty)$

$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty,y)$

边际分布列

已知 (X,Y) 的联合分布列为 p_{ij}, 则

X 的分布列为:$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i\cdot}$

边际分布函数与边际分布列

边际分布函数

已知 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 和 Y 的分布为:

$X \sim F_X(x) = F(x, +\infty)$

$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty, y)$

边际分布列

已知 (X, Y) 的联合分布列为 p_{ij}, 则

X 的分布列为:$p_i = P(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i\cdot}$

Y 的分布列为:$p_j = P(X = y_j) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_{\cdot j}$

边际分布函数与边际分布列

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	$P_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	$p_{2\cdot}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	$p_{i\cdot}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$P_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$
- Y 的密度函数为:$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$
- Y 的密度函数为:$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$

注意点

- 由联合分布可以求出边际分布

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy$
- Y 的密度函数为:$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx$

注意点

- 由联合分布可以求出边际分布
- 但由边际分布一般无法求出联合分布

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$
- Y 的密度函数为:$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$

注意点

- 由联合分布可以求出边际分布
- 但由边际分布一般无法求出联合分布
- 所以联合分布包含更多的信息

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$
- Y 的密度函数为:$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$

注意点

- 由联合分布可以求出边际分布
- 但由边际分布一般无法求出联合分布
- 所以联合分布包含更多的信息
- 二维正态分布的边际分布是一维正态

边际密度函数

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$
- Y 的密度函数为:$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$

注意点

- 由联合分布可以求出边际分布
- 但由边际分布一般无法求出联合分布
- 所以联合分布包含更多的信息
- 二维正态分布的边际分布是一维正态
  若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2.\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$
  则 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

边际密度函数

已知 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$, 则

- X 的密度函数为:$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$
- Y 的密度函数为:$p(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$

注意点

- 由联合分布可以求出边际分布
- 但由边际分布一般无法求出联合分布
- 所以联合分布包含更多的信息
- 二维正态分布的边际分布是一维正态
  若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2.\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$
  则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
- 二维均匀分布的边际分布不一定是一维均匀分布

例 3.2.1

设 (X, Y) 服从区域 $D=\{(x,y), x^2+y^2<1\}$ 上的均匀分布，求 X 的边际密度 $p(x)$

例 3.2.1

设 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y),x^2+y^2<1\}$ 上的均匀分布，求 X 的边际密度 $p(x)$

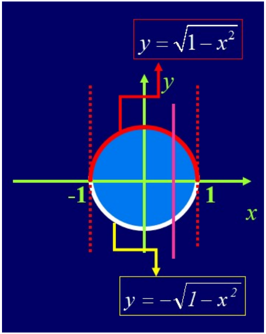

Figure: 例 3.2.1

解:

例 3.2.2

设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为 $p(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & Others \end{cases}$ 求概率 $P\{X + Y \leq 1\}$

边际密度函数

例 3.2.2

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & Others \end{cases}$ 求概率 $P\{X+Y\leq 1\}$

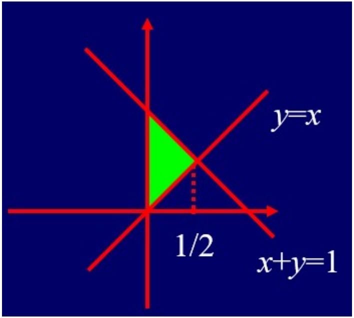

Figure: 例 3.2.2

随机变量间的独立性

若满足以下之一:

随机变量间的独立性

若满足以下之一:

1. $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$
2. $p_{ij}=p_i p_j$
3. $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

随机变量间的独立性

若满足以下之一:

1. $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
2. $p_{ij} = p_i p_j$
3. $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$

则称 X 与 Y 是独立的

若满足以下之一:

1. $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$
2. $p_{ij}=p_i p_j$
3. $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

则称 X 与 Y 是独立的

注意点

- X 与 Y 是独立的，其本质是, 任对实数 a,b,c,d, 有 $P(a<x<b,c<Y<d)=P(a<x<b)P(c<Y<d)$

随机变量间的独立性

若满足以下之一:

1. $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
2. $p_{ij} = p_i p_j$
3. $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$

则称 X 与 Y 是独立的

注意点

- X 与 Y 是独立的，其本质是, 任对实数 a, b, c, d, 有 $P(a < x < b, c < Y < d) = P(a < x < b)P(c < Y < d)$
- X 与 Y 是独立的，则 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也是独立的

边际密度函数

例 3.2.3

(X, Y) 的联合分布列为: 问 X 与 Y 是否独立?

$X\backslash Y$	0	1
0	0.3	0.4
1	0.2	0.1

例 3.2.3

(X, Y) 的联合分布列为: 问 X 与 Y 是否独立?

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.4
1	0.2	0.1

例 3.2.4

已知 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & x > 0.y > 0 \\ 0 & Others \end{cases}$$ 问 X 与 Y 是否独立?

例 3.2.4

已知 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y} & x>0.y>0 \\ 0 & Others \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立?

注意:$p(x,y)$ 可分离变量

注意点

1. (X, Y) 服从矩形上的均匀分布，则 X 与 Y 独立

边际密度函数

注意点

1. (X, Y) 服从矩形上的均匀分布，则 X 与 Y 独立
2. (X, Y) 服从单位圆上的均匀分布，则 X 与 Y 不独立. 见前面例子

边际密度函数

注意点

1. (X, Y) 服从矩形上的均匀分布，则 X 与 Y 独立
2. (X, Y) 服从单位圆上的均匀分布，则 X 与 Y 不独立. 见前面例子
3. 联合密度 $p(x, y)$ 的表达式中，若 x 的取值与 y 的取值有关系，则 X 与 Y 不独立

注意点

1. (X, Y) 服从矩形上的均匀分布，则 X 与 Y 独立
2. (X, Y) 服从单位圆上的均匀分布，则 X 与 Y 不独立. 见前面例子
3. 联合密度 $p(x, y)$ 的表达式中，若 x 的取值与 y 的取值有关系，则 X 与 Y 不独立
4. 若联合密度 $p(x, y)$ 可分离变量，即 $p(x, y) = g(x)h(y)$ 则 X 与 Y 独立

注意点

1. (X,Y) 服从矩形上的均匀分布，则 X 与 Y 独立
2. (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布，则 X 与 Y 不独立. 见前面例子
3. 联合密度 $p(x,y)$ 的表达式中，若 x 的取值与 y 的取值有关系，则 X 与 Y 不独立
4. 若联合密度 $p(x,y)$ 可分离变量，即 $p(x,y)=g(x)h(y)$ 则 X 与 Y 独立
5. 若 (X,Y) 服从二元正态 $N(\mu_1,\mu_2.\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则 X 与 Y 独立的充要条件是 $\rho=0$.

作业

课本 P159: 1, 4, 6, 14, 15