第二章
随机变量与分布

第五节

常用连续分布

Overview

常用连续分布

常用连续分布都有哪些？

常用连续分布

常用连续分布都有哪些?

正态分布、均匀分布、指数分布、伽玛分布、贝塔分布

正态分布

正态分布的密度函数

正态分布

正态分布的密度函数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty,$$

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布,

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布，称 X 为正态变量，

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布，称 X 为正态变量，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布，称 X 为正态变量，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布，称 X 为正态变量，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$

正态分布的分布函数

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\} dt$

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布，称 X 为正态变量，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$

正态分布的分布函数

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\} dt$

注意

正态分布

正态分布的密度函数

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad -\infty < x < \infty$, 称 X 服从正态分布，称 X 为正态变量，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$

正态分布的分布函数

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\} dt$

注意

- μ 是位置参数
- σ 是尺度参数

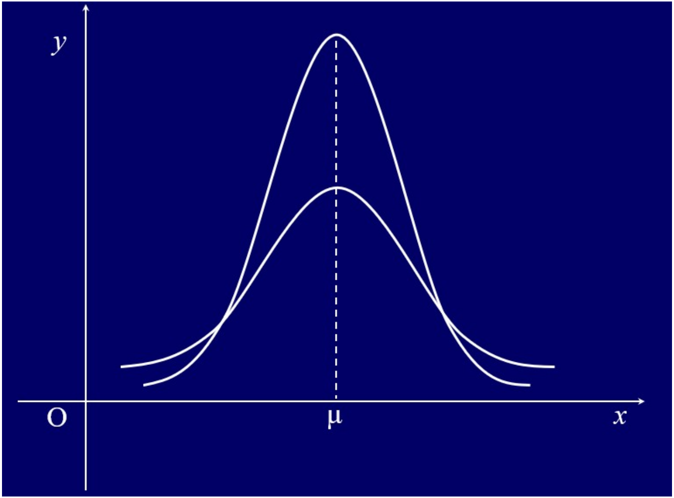

Figure: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

正态分布

正态分布的性质

正态分布

正态分布的性质

正态分布

正态分布的性质

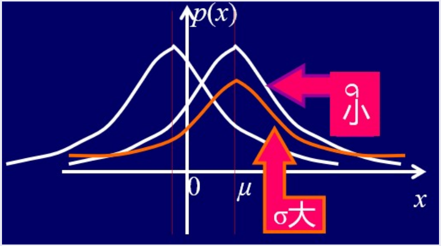

Figure: 正态分布的性质

正态分布的性质

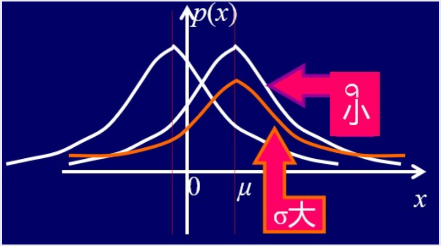

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.

正态分布

正态分布的性质

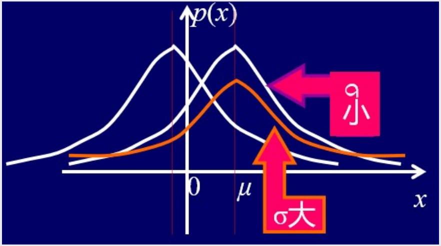

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.在 μ 点 $p(x)$ 取得最大值.

正态分布的性质

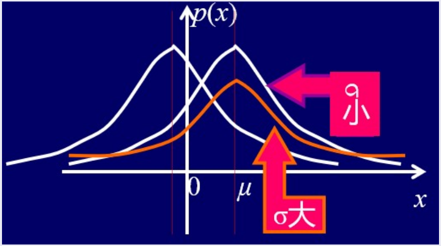

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.在 μ 点 $p(x)$ 取得最大值.
2. 若 σ 固定, μ 改变,

正态分布

正态分布的性质

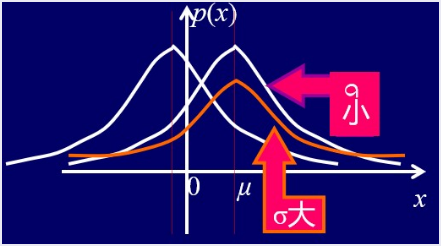

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.在 μ 点 $p(x)$ 取得最大值.
2. 若 σ 固定, μ 改变, 则 $p(x)$ 左右移动, 形状保持不变.

正态分布

正态分布的性质

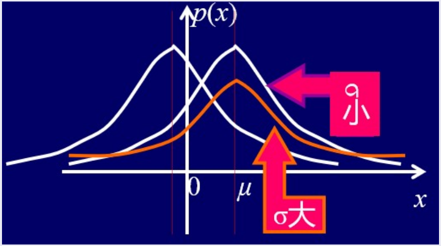

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.在 μ 点 $p(x)$ 取得最大值.
2. 若 σ 固定, μ 改变, 则 $p(x)$ 左右移动, 形状保持不变.
3. 若 μ 固定, σ 改变,

正态分布

正态分布的性质

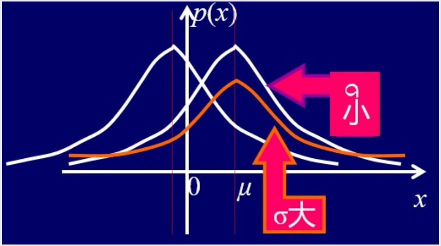

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.在 μ 点 $p(x)$ 取得最大值.
2. 若 σ 固定, μ 改变, 则 $p(x)$ 左右移动, 形状保持不变.
3. 若 μ 固定, σ 改变, 则 σ 越大曲线越平坦（矮胖）,

正态分布的性质

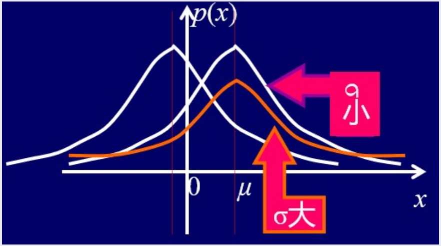

Figure: 正态分布的性质

1. $p(x)$ 关于 μ 是对称的.在 μ 点 $p(x)$ 取得最大值.
2. 若 σ 固定, μ 改变, 则 $p(x)$ 左右移动, 形状保持不变.
3. 若 μ 固定, σ 改变, 则 σ 越大曲线越平坦（矮胖）, σ 越小曲线越陡峭（高瘦）

正态分布

特例：

正态分布

特例：标准正态分布 $N(0,1)$

正态分布

特例：标准正态分布 $N(0,1)$

密度函数记为 $\varphi(x)$, 分布函数记为 $\Phi(x)$.

正态分布

特例：标准正态分布 $N(0,1)$

密度函数记为 $\varphi(x)$, 分布函数记为 $\Phi(x)$.

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

特例：标准正态分布 $N(0,1)$

密度函数记为 $\varphi(x)$, 分布函数记为 $\Phi(x)$.

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

特例：标准正态分布 $N(0,1)$

密度函数记为 $\varphi(x)$, 分布函数记为 $\Phi(x)$.

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

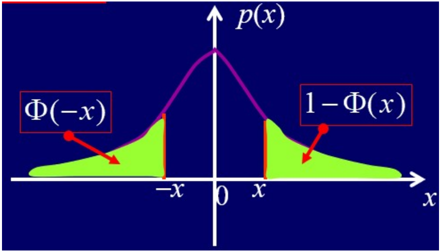

Figure: 标准正态分布

$\Phi(x)$ 的计算

正态分布

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值 ($0 \leq x$))
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0, 1)$, 则

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值 ($0 \leq x$))
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) =$

正态分布

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时，查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)
2. $x < 0$ 时，查标准正态分布函数表，用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$，则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时，查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值 ($0 \leq x$))
2. $x < 0$ 时，查标准正态分布函数表，用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$，则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) =$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值 ($0 \leq x$))
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(a < X < b) =$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$））
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

正态分布

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0, 1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
4. 若 $a \geq 0$, 则

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值 ($0 \leq x$))
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
4. 若 $a \geq 0$, 则
   $P(|X| < a)$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
4. 若 $a \geq 0$, 则
   $P(|X| < a) \quad = 2\Phi(a) - 1$

$\Phi(x)$ 的计算

1. $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表 (附表 2 给出了 $\Phi(x)$ 的值（$0 \leq x$）)
2. $x < 0$ 时, 查标准正态分布函数表, 用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$, 则

1. $P(X \leq a) = \Phi(a)$
2. $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
4. 若 $a \geq 0$, 则

$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\begin{aligned} P(|X| < a) &= P(-a < X < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) \\ &= \Phi(a) - [1 - \Phi(a)] = 2\Phi(a) - 1 \end{aligned}$$

例 2.5.1

设 $X \sim N(0,1)$, 求 $P(X > -1.96), P(|X| < 1.96)$

例 2.5.2

设 $X \sim N(0,1), P(X \leq b) = 0.9515$
$P(X \leq a) = 0.04947$, 求 a, b

正态分布

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

正态分布

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$.

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$.

推论:

1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$.

推论:

1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$.

推论:

1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
2. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0,1)$.

推论:

1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
2. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(x < a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$,

定理 2.5.1 一般正态分布的标准化

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$.

推论:

1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
2. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(x < a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}), P(x > a) = 1 - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

例 2.5.3

设 $X \sim N(10,4)$, 求 $P(10 < X < 13), P(|X-10| < 2)$.

例 2.5.4

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), P(X \le -5) = 0.045, P(X \le 3) = 0.618$
求 μ 及 σ.

正态分布的 3σ 原则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

正态分布的 3σ 原则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则
$P(|X-\mu| < \sigma) = 0.6826$

正态分布

正态分布的 3σ 原则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则
$P(|X-\mu| < \sigma) = 0.6826$
$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 0.9545$

正态分布的 3σ 原则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则
$P(|X-\mu| < \sigma) = 0.6826$
$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 0.9545$
$P(|X-\mu| < 3\sigma) = 0.9973$
$P(|X-\mu| < k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$

均匀分布

均匀分布

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & Others \end{cases}$$

均匀分布

均匀分布

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & Others \end{cases}$$

称 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布，

均匀分布

均匀分布

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & Others \end{cases}$$

称 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布，记作 $X \sim U(a, b)$,

均匀分布

均匀分布

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & Others \end{cases}$$

称 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布，记作 $X \sim U(a, b)$，其分布函数为：

均匀分布

均匀分布

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & Others \end{cases}$$

称 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布，记作 $X \sim U(a, b)$, 其分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

均匀分布

均匀分布

$$p(X)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & Others\end{cases}$$

称 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，记作 $X\sim U(a,b)$, 其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & b\leq x\end{cases}$$

例 2.5.5

$X \sim U(2,5)$. 现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

指数分布

指数分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从指数分布，

指数分布

指数分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从指数分布，记为 $X \sim Exp(\lambda)$,

指数分布

指数分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从指数分布，记为 $X \sim Exp(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$.

指数分布

指数分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从指数分布，记为 $X \sim Exp(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$.

分布函数如下：

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$

指数分布

指数分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从指数分布，记为 $X \sim Exp(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$.

分布函数如下：

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$

特别：指数分布具有无忆性，即

指数分布

指数分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从指数分布，记为 $X \sim Exp(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$.

分布函数如下：

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$

特别：指数分布具有无忆性，即

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$ 称 X 服从伽玛分布，

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$,

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$, 其中 $\alpha>0,\lambda>0.$

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 其中 $\alpha > 0, \lambda > 0$.

注意：$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 为伽玛函数

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$, 其中 $\alpha>0,\lambda>0.$

注意：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 为伽玛函数

注意点

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 其中 $\alpha > 0, \lambda > 0.$

注意：$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 为伽玛函数

注意点

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n!$

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$, 其中 $\alpha>0,\lambda>0.$

注意：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 为伽玛函数

注意点

1. $\Gamma(1)=1,\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\Gamma(n+1)=n!$
2. 两个特例：

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$, 其中 $\alpha>0,\lambda>0.$

注意：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 为伽玛函数

注意点

1. $\Gamma(1)=1,\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\Gamma(n+1)=n!$
2. 两个特例：$Ga(1,\lambda)=Exp(\lambda)$,

伽玛分布

伽玛分布密度函数和分布函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$ 称 X 服从伽玛分布，记为 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 其中 $\alpha > 0, \lambda > 0.$

注意：$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 为伽玛函数

注意点

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n!$
2. 两个特例：$Ga(1, \lambda) = Exp(\lambda), Ga(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$

贝塔分布

贝塔分布

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ,0<x<1\\ 0 & ,others\end{cases}$$

称 X 服从贝塔分布，记为 $X \sim Be(a,b)$, 其中 $a>0, b>0$.

贝塔分布

贝塔分布

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ,0<x<1\\ 0 & ,others\end{cases}$$

称 X 服从贝塔分布，记为 $X\sim Be(a,b)$, 其中 $a>0,b>0$.

称 $B(a,b)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx$ 为贝塔函数

贝塔分布

贝塔分布

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ,0<x<1\\ 0 & ,others\end{cases}$$

称 X 服从贝塔分布，记为 $X\sim Be(a,b)$, 其中 $a>0,b>0.$

称 $B(a,b)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx$ 为贝塔函数

注意点

1. $B(a,b)=B(b,a)$

贝塔分布

贝塔分布

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , others \end{cases}$$

称 X 服从贝塔分布，记为 $X \sim Be(a,b)$，其中 $a > 0, b > 0$.

称 $B(a,b) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx$ 为贝塔函数

注意点

1. $B(a,b) = B(b,a)$
2. $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$

贝塔分布

贝塔分布

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,others \end{cases}$$

称 X 服从贝塔分布，记为 $X \sim Be(a,b)$, 其中 $a > 0, b > 0$.

称 $B(a,b) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx$ 为贝塔函数

注意点

1. $B(a,b) = B(b,a)$
2. $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$
3. $Be(1,1) = U(0,1)$

常用连续分布的数学期望

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$

常用连续分布的数学期望

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$
- 均匀分布 $U(a, b), E(X) = (a + b)/2$

常用连续分布的数学期望

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$
- 均匀分布 $U(a, b), E(X) = (a + b)/2$
- 指数分布 $Exp(\lambda), E(X) = 1/\lambda$

常用连续分布的数学期望

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$
- 均匀分布 $U(a, b), E(X) = (a + b)/2$
- 指数分布 $Exp(\lambda), E(X) = 1/\lambda$
- 伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda), E(X) = \alpha/\lambda$

常用连续分布的数学期望

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$
- 均匀分布 $U(a, b), E(X) = (a + b)/2$
- 指数分布 $Exp(\lambda), E(X) = 1/\lambda$
- 伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda), E(X) = \alpha/\lambda$
- 贝塔分布 $Be(a, b), E(X) = a/(a + b)$

常用连续分布的方差

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差 $= \sigma^2$

常用连续分布的方差

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差 $= \sigma^2$
- 均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 $= (b-a)^2/12$

常用连续分布的方差

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差 $= \sigma^2$
- 均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 $= (b-a)^2/12$
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差 $= 1/\lambda^2$
- 伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ 的方差 $= \alpha/\lambda^2$

常用连续分布的方差

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差 $= \sigma^2$
- 均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 $= (b-a)^2/12$
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差 $= 1/\lambda^2$
- 伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ 的方差 $= \alpha/\lambda^2$
- 贝塔分布 $Be(a, b)$ 的方差 $= ab/(a+b)^2(a+b+1)$

常用连续分布的方差

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差 $= \sigma^2$
- 均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 $= (b-a)^2/12$
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差 $= 1/\lambda^2$
- 伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ 的方差 $= \alpha/\lambda^2$
- 贝塔分布 $Be(a, b)$ 的方差 $= ab/(a+b)^2(a+b+1)$

P119, 表 2.5.1 常用概率分布及其数学期望和方差。

例 2.5.6

已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X) = 2.4, Var(X) = 1.44$, 则参数 n, p 的值为多少?

例 2.5.7

设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 0.4, 则 $E(X^2)$ 的值为多少?

作业

书 P120：1, 2, 5, 10, 13, 15, 17, 23