二. 系统的性能测度及其估计

- 有时人们把主要精力用于建模和仿真运行而忽略了仿真数据的统计分析
- 在现实的随机系统中，包含许多随机因素，仿真模型的系统变量几乎都是随机变量
- 对仿真模型进行多少次仿真运行能获得较高置信度的系统性能测度的估计
- 不同的初始条件对仿真结果将产生的影响

仿真类型
- 终态仿真(Terminating Simulation)
- 稳态仿真(Steady-State Simulation)

终态仿真: 在 $[0, T_E]$内运行仿真。

E —仿真终止事件(可能是随机事件)

T_E—E发生的时刻(可能是随机变量)

注：(1) 仿真的目的是研究在规定时间内的系统行为

(2) 仿真结果与初始状态有关

例. 对某银行从上午9:00到下午5:00之间的营业情况进行仿真，终止事件E＝{银行停止营业}，而T_E 为8小时。系统的初始状态可定义为空。

稳态仿真: 在 $[0, \infty)$上运行仿真。当仿真输出分布趋于稳定时，可停止仿真。

注：(1) 主要研究系统长期运行的稳态行为

(2) 没有终止事件E，运行时间取决于能否取得系统性能测度的优良估计

(3) 从理论上来说，仿真结果不受初始状态的影响

例. 对连续性生产的化工生产过程进行模拟，目的是研究该生产过程进入稳定状态时能够达到的生产水平和生产效率，这显然取决于工人掌握操作技术的过程，控制和管理生产过程的经验等。

如何确定仿真类型?

- 系统的性质
- 仿真研究的目的

系统的性能测度

系统性能通常由一个或多个参数值(性能测度)来概括。

系统的性能测度：
- 平均等待时间
- 平均逗留时间
- 平均生产周期
- 设备的平均利用率

系统的性能测度的估计
- 点估计
- 区间估计

总体：X　　分布函数：$F(x)$

样本：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ (i.i.d)　　$X_1 \cdot X_2, \mu + X_n$

统计量：不含未知参数的样本函数$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

点估计：用适当的统计量$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$作为总体分布的某个未知参数μ的估计(量)，称$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为μ的点估计。

点估计的无偏性：

若$E(g(X_1, X_2,\ldots, X_n))=\mu$，则称$g(X_1, X_2,\ldots, X_n)$是$\mu$的无偏估计。

常用的点估计：

未知参数	估计量
$\mu = E(X)$	$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
$\sigma^2 = Var(X)$	$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

7

注：① 样本均值$\bar{X}_n$是总体期望$\mu = E(X)$的无偏估计。

② $Var(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$，易见 n 增大，$\bar{X}_n$与μ的偏离程度减小。

③ 由大数定律知

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\bar{X}_n - E(X)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

这表明n充分大时，$\bar{X}_n$任意接近$E(X)$的概率趋于1，因此 $\bar{X}_n \approx E(X)$。

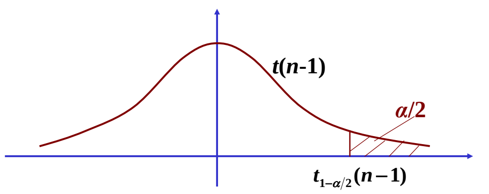
④ 对总体X，若$\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$, S_n^2是σ^2的无偏估计。

8

区间估计

经典的统计方法对正态分布$N(\mu, \sigma^2)$的样本X_1, $X_2, \ldots, X_n$给出的总体均值$\mu = E(X)$的$100(1-\alpha)\%$置信区间为

$$\left(\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot S_n/\sqrt{n}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot S_n/\sqrt{n}\right)$$



9

三. 终态仿真的置信区间

在$[0,T_E]$中运行仿真，仿真输出$\{Y_1, Y_2,\ldots, Y_n\}$为独立同分布的随机变量Y，仿真目的是估计总体均值$E(Y)$.

独立重复运行
- ① 相同的输入分布
- ② 相同的初始条件
- ③ 不同的随机数流

10

例. M/M/1排队系统，要求对前m个顾客的平均等待时间作出估计，初始状态为空。

第m个顾客服务结束时，一次仿真运行结束。

用不同的随机数流作R次重复仿真运行

重复次数	输出等待时间	平均等待时间
1	y_{11} y_{12} . . . . y_{1m}	$\bar{Y}_1$
2	y_{21} y_{22} . . . . y_{2m}	$\bar{Y}_2$
	. . . .	
r	y_{r1} y_{r2} . . . . y_{rm}	$\bar{Y}_r$
	. . . .	
R	y_{R1} y_{R2} . . . . y_{Rm}	$\bar{Y}_R$

仿真实验　　独立样本

$$\bar{Y}_r = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ri}$$

11

1. 固定样本量法

设作R次重复仿真运行。

y_{ri}— 第 r 次仿真运行，第 i 个顾客的等待时间

$\bar{Y}_r$— 第 r 次仿真运行，前 m 个顾客的平均等待时间

把$\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \ldots, \bar{Y}_R$看成$N(\mu, \sigma^2)$的容量为R的样本，可得点估计和区间估计为

$$\bar{Y} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\bar{Y}_r = \frac{1}{Rm}\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{m} Y_{ri} \qquad S^2 = \frac{1}{R-1}\sum_{r=1}^{R}(\bar{Y}_r - \bar{Y})^2$$

$$\left(\bar{Y} - t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S/\sqrt{R}, \bar{Y} + t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S/\sqrt{R}\right)$$

12

例. M/M/1排队系统，要求对前m个顾客的平均等待时间作出估计，初始状态为空。R_0=10，*m*=25，样本观察值为：

3.50	1.28	4.29	1.62	0.85
1.02	1.15	2.01	3.07	1.03

计算可得

$$\bar{Y}_0=\frac{1}{10}\sum_{r=1}^{10}Y_r=1.982$$

$$S_0^2=\frac{1}{9}\sum_{r=1}^{10}(Y_r-\bar{Y}_0)^2=1.472$$

若α=0.1，用固定样本量法求置信区间，注意到

$$\left(\bar{Y}-t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R},\bar{Y}+t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R}\right)$$

而R_0=10，α=0.1，S_0 = 1.213，$\bar{Y}_0$=1.982，

$t_{1-\alpha/2}(R_0-1)=t_{0.95}(9)$ =1.833，计算可得

总体均值$\mu=E(Y)$的90%置信区间为

(1.2788，2.6852)

2. 取得规定精度的置信区间

仿真精度
- 绝对精度：$\theta=t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R}$
- 相对精度：$\phi=\dfrac{t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R}}{\bar{Y}}$

问题：如何确定仿真重复次数R，才能满足实际系统对仿真精度的要求？

若R不够大，则精度不能满足要求；

若R过量，则造成浪费。

(1) 试算法

设实际问题要求的绝对精度为β，即

$$P\left\{\left|\bar{Y}-E(Y)\right|\le t_{1-\alpha/2}\cdot S\big/\sqrt{R}<\beta\right\}\ge 1-\alpha$$

步骤：① 先作R_0(>2)次独立重复仿真运行，得到S_0

和 $\beta_0=t_{1-\alpha/2}(R_0-1)\cdot S_0\big/\sqrt{R_0}$

② 若$\beta_0<\beta$，则所得区间估已满足精度要求；否则令

$$R^*(\beta)=\min\{i\ge R_0;\ t_{1-\alpha/2}(i-1)\cdot S_0\big/\sqrt{i}<\beta\}$$

③ $R^*(\beta)$- R_0次补充运行，得置信区间

$$\left(\bar{Y}-t_{1-\alpha/2}(R^*(\beta)-1)\cdot S\big/\sqrt{R^*(\beta)},\bar{Y}+t_{1-\alpha/2}(R^*(\beta)-1)\cdot S\big/\sqrt{R^*(\beta)}\right)$$

类似地

设实际问题要求的相对精度为γ，则应有

$$\phi=\frac{t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R}}{\bar{Y}}<\gamma$$

步骤：① 先作R_0(>2)次独立重复仿真运行，

得到S_0, $\bar{Y}_0$和 φ_0

② 若$\varphi_0<\gamma$，则所得区间估已满足精度要求；

否则，令

$$R^*(\gamma)=\min\{i\ge R_0;\ \frac{t_{1-\alpha/2}(i-1)\cdot S_0\big/\sqrt{i}}{|\bar{Y}_0|}<\gamma\}$$

③ R^*-R_0次补充运行即可。

(a) 绝对精度

设α= 0.1,β= 0.3, S_0=1.213, R_0=10, $t_{0.95}(9)$=1.833,

β_0=0.7032>0.3=β，令

$$R^*(\beta)=\min\{i\ge 10;\ t_{0.95}(i-1)\cdot S_0\big/\sqrt{i}<0.3\}$$

当$i=46$时，$t_{0.95}(45)=1.6794$，$S_0\big/\sqrt{46}=0.1789$ → 积= 0.3004 > 0.3

当$i=47$时，$t_{0.95}(46)=1.6787$，$S_0\big/\sqrt{47}=0.1770$ → 积= 0.297 < 0.3

R^*＝47，需补充运行仿真R^*-R_0=37次。

(b) 相对精度

设α= 0.1,γ= 0.2, S_0=1.213, R_0=10, $t_{0.95}(9)$=1.833, $\bar{Y}_0$=1.982,γ_0=0.35 > 0.2 =γ，令

$$R^*(\gamma)=\min\{i\ge 10;\ \frac{t_{0.95}(i-1)\cdot S_0/\sqrt{i}}{|\bar{Y}_0|}<0.2\}$$

$$当i=27时,\ \begin{matrix} t_{0.95}(26)=1.7056 \\ S_0/(\sqrt{27}\cdot|\bar{Y}_0|)=0.1178 \end{matrix} \to 积=0.2009>0.2$$

$$当i=28时,\ \begin{matrix} t_{0.95}(27)=1.7032 \\ S_0/(\sqrt{28}\cdot|\bar{Y}_0|)=0.1157 \end{matrix} \to 积=0.197<0.2$$

R*＝28，需补充运行仿真R*-R_0=18次。

精度需求的灵敏度

若要求β=0.2，R* = ?

$$R^*(\beta)=\min\{i\ge 10;\ t_{0.95}(i-1)\cdot S_0/\sqrt{i}<0.2\}$$

$$当i=101时,\ \begin{matrix} t_{0.95}(100)=1.6602 \\ S_0/\sqrt{101}=0.1207 \end{matrix} \to 积=0.2004>0.2$$

$$当i=102时,\ \begin{matrix} t_{0.95}(101)=1.6601 \\ S_0/\sqrt{102}=0.1201 \end{matrix} \to 积=0.1994<0.2$$

R*＝102，需补充运行仿真R*-R_0=92次。

(2) 序贯法

设实际问题要求的相对精度为γ

步骤：① 先作R_0(>2)次独立重复仿真运行，R=R_0

② 计算$\bar{Y}$(R), S^2=S^2(R)和

$$\delta(R,\alpha)=t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S/\sqrt{R}$$

③ 判断：若$\delta(R,\alpha)/\bar{Y}(R)<\gamma$, 则满足精度要求的区间估计为

$[\bar{Y}(R)-\delta(R,\alpha),\ \bar{Y}(R)+\delta(R,\alpha)]$;

否则，作第R+1次仿真运行，令R=R+1，返回②。

练习

1. 对某系统进行9次终态仿真运行，得到均值的95%的置信区间为[0.694,0.922]。 问 (1) 样本均值是多少？(2) 绝对精度和相对精度是多少？(3) 样本标准差(样本方差的平方根)是多少？

t分布的临界值$t_{1-\alpha/2}(n)$

n \ $1-\alpha/2$	0.90	0.95	0.975
8	1.397	1.86	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228

四. 稳态仿真的置信区间

为了估计系统的稳态性能，可进行长时间的仿真运行，使系统达到平稳状态。

设$Y_1,Y_2,\ldots$，Y_n为单次仿真运行中某个随机变量Y的输出结果，系统的稳态性能测度可定义为

$$E(Y)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

可以从两个角度理解稳态均值。例如

① 设$W_1,W_2,\ldots,W_n$稳态仿真运行中所观察的n个顾客的等待时间，平均等待时间应为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W_i$

② 在稳态状态下，任一进入系统的顾客的等待时间是某个分布的随机变量W，故平均等待时间是 $E(W)$ 从而有

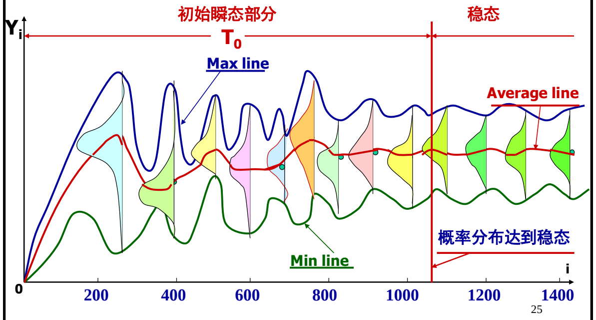
$$E(W)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W_i$$

问题：

① 初始瞬态部分的存在(启动问题)；

② 观察值的自相关性。

Concept of steady-state



1. 重复-删除法

将仿真运行分为初始阶段$(0,T_0)$和数据采集阶段(T_0,T_E)。对每次运行，删除初始瞬态阶段，计算稳态观察值的样本均值。

初始条件　　稳态　　终止仿真

0　　T_0　　T_E　　t

初始阶段　　数据采集阶段

仿真输出数据如下：

r	1 . . . . . . d	d+1 . . . . *n*	均值
1	Y_{11} . . . . . . Y_{1d}	$Y_{1\,d+1}$ . . . . Y_{1n}	$\overline{Y}_1(n,d)$
2	Y_{21} . . . . . . Y_{2d}	$Y_{2\,d+1}$ . . . . Y_{2n}	$\overline{Y}_2(n,d)$
.	. .	. .	.
r	Y_{r1} . . . . . . Y_{rd}	$Y_{r\,d+1}$ . . . . Y_{rn}	$\overline{Y}_r(n,d)$
.	. .	. .	.
.	. .	. .	.
R	Y_{R1} . . . . . Y_{Rd}	$Y_{R\,d+1}$ . . . . . Y_{Rn}	$\overline{Y}_R(n,d)$
均值	$\overline{Y}_1$ . . . . . $\overline{Y}_d$	$\overline{Y}_{d+1}$ . . . . $\overline{Y}_n$	$\overline{Y}(n,d)$

其中 $$\overline{Y}_r(n,d)=\frac{1}{n-d}\sum_{j=d+1}^{n}Y_{rj}\ (r=1,2,\cdots R)$$

$$\overline{Y}(n,d)=\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\overline{Y}_r$$

且有 $E[\overline{Y}(n,d)]=E(Y)$

注：① 每次运行删除前d个观察值—消除初始条件的影响
② 每次重复运行使用独立的随机数流

可以把 $\overline{Y}_1(n,d),\overline{Y}_2(n,d),\cdots,\overline{Y}_R(n,d)$ 近似地看成独立同分布的随机变量，当d和n足够大（n-d也足够大）时，用经典方法建立均值的置信区间如下：

$$\left(\overline{Y}(n,d)-t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R},\ \overline{Y}(n,d)+t_{1-\alpha/2}(R-1)\cdot S\big/\sqrt{R}\right)$$

其中
$$S^2=\frac{1}{R-1}\sum_{r=1}^{R}[\overline{Y}_r(n,d)-\overline{Y}(n,d)]^2$$

问题：① d 的选择
② 使用数据的效率低
③ 必须人为干涉中断仿真运行来收集数据，而且每次运行重新初始化系统

应用：能较快进入稳态的系统。

2. 批平均值法

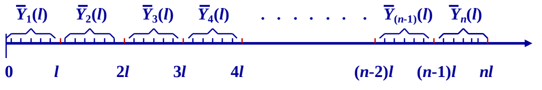
批平均值法假定仿真输出Y_1，Y_2,…是协方差平稳过程，即Y_1, Y_2,…满足下述条件：

① $\mu=E(Y_i)$，$i=1,2,\ldots$；

② $\sigma^2=\mathrm{Var}(Y_i)$，$i=1,2,\ldots$；

③ $C_j=\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+j})$，与 i 无关，$j=1,2,\ldots$。

做单次长时间仿真运行，取足够长的 m 个观察值$\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$。将这些观察值分成 n 批($m>n$)，每批 l 个观察值，即$m = n \cdot l$。



$m = n\,l$

批数	$m = n\cdot l$				批平均值
1	Y_1	Y_2	. . . . . .	Y_l	$\overline{Y}_1(l)$
2	Y_{l+1}	Y_{l+2}	. . . . . .	Y_{2l}	$\overline{Y}_2(l)$
.	.	.		.	.
j	$Y_{(j-1)l+1}$	$Y_{(j-1)l+2}$	. . . . .	Y_{jl}	$\overline{Y}_j(l)$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
n	$Y_{(n-1)l+1}$	$Y_{(n-1)l+2}$	. . . .	Y_{nl}	$\overline{Y}_n(l)$
					$\overline{\overline{Y}}(n,l)$

近似独立

$$\overline{Y}_j(l) = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} Y_{(j-1)l+k},\quad j = 1,2,\cdots,\ n$$

$$\overline{\overline{Y}}(n,l) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{Y}_j(l) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

由于$\{Y_i, i\ge 1\}$是协方差平稳过程，批平均值

$\overline{Y}_j(l),\ j = 1,2,\cdots,\ n$

具有相同的均值和方差，且当批容量l足够大时，批平均值近似不相关。可以把批平均值近似看作一个独立同服从正态分布的随机变量序列，并获得μ的近似100(1-α)%置信区间：

$$\left(\overline{\overline{Y}}(n,l) - t_{1-\alpha/2}(n-1)\sqrt{S^2_{\overline{Y}}(n)/n},\ \overline{\overline{Y}}(n,l) + t_{1-\alpha/2}(n-1)\sqrt{S^2_{\overline{Y}}(n)/n}\right)$$

其中 $$S^2_{\overline{Y}}(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}[\overline{Y}_j(l) - \overline{\overline{Y}}(n,l)]^2$$

多重指标分析

一个模型有k个输出变量$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$，如果要求每一个变量的置信水平均为90%，那么所考察问题的总体置信水平为0.9^k，当k很大的时候，$0.9^k \to 0$。

限定总体的置信水平为$1-\alpha$。

限定总体的置信水平为$1-\alpha$，那么Bonferroni不等式

$$P\{\mu_s \in I_s, s = 1,2,\ldots k\} \ge 1 - \sum_{s=1}^{k}\alpha_s$$

其中，I_s为总体置信水平 $1-\alpha$下随机变量Y_s的均值μ_s的置信区间

α_s可以均等，但不一定均等，越重要的指标α_s越小。