第二章
随机变量及其分布

第三节

随机变量的方差与标准差

Overview

前言

- 回忆一下：什么是数学期望？

前言

- 回忆一下：什么是数学期望？
- 数学期望反映了 X

前言

- 回忆一下：什么是数学期望？
- 数学期望反映了 X取值的中心

前言

- 回忆一下：什么是数学期望？
- 数学期望反映了 X 取值的中心
- X 取值的离散程度：

前言

- 回忆一下：什么是数学期望？
- 数学期望反映了 X取值的中心
- X 取值的离散程度：方差

方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

若 $E(X^2)$ 存在，则称偏差平方 $(X-E(X))^2$ 的数学期望 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$Var(X)=E(X-E(X))^2$$

方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

若 $E(X^2)$ 存在，则称偏差平方 $(X-E(X))^2$ 的数学期望 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$Var(X)=E(X-E(X))^2$$

称方差的正平方根 $\sigma_x=\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$ 为 X 的标准差.

方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

若 $E(X^2)$ 存在，则称偏差平方 $(X-E(X))^2$ 的数学期望 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$Var(X)=E(X-E(X))^2$$

称方差的正平方根 $\sigma_x=\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$ 为 X 的标准差.

注意点

方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

若 $E(X^2)$ 存在，则称偏差平方 $(X-E(X))^2$ 的数学期望 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$Var(X)=E(X-E(X))^2$$

称方差的正平方根 $\sigma_x=\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$ 为 X 的标准差.

注意点

1. 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度. 方差越大, 则随机变量的取值越分散.

方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

若 $E(X^2)$ 存在，则称偏差平方 $(X-E(X))^2$ 的数学期望 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$Var(X) = E(X-E(X))^2$$

称方差的正平方根 $\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ 为 X 的标准差.

注意点

1. 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度. 方差越大, 则随机变量的取值越分散.
2. 标准差的量纲与随机变量的量纲相同.

方差与标准差的定义

定义 2.3.1 方差与标准差的定义

若 $E(X^2)$ 存在，则称偏差平方 $(X-E(X))^2$ 的数学期望 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$Var(X) = E(X-E(X))^2$$

称方差的正平方根 $\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ 为 X 的标准差.

注意点

1. 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度. 方差越大, 则随机变量的取值越分散.
2. 标准差的量纲与随机变量的量纲相同.
3. 随机变量 X 数学期望存在，则方差不一定存在.

方差的性质

方差的性质

1. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. 性质 2.3.1

方差的性质

方差的性质

1. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. 性质 2.3.1
2. $Var(c) = 0$. 性质 2.3.2

方差的性质

方差的性质

1. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. 性质 2.3.1
2. $Var(c) = 0$. 性质 2.3.2
3. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$. 性质 2.3.3

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & \quad\quad Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解:

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X),Var(X)$.

解:

1. $E(X)$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解：

1. $$E(X) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

方差的性质

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解：

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \end{aligned}$$

方差的性质

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & \quad\quad Others \end{cases}$ 求 $E(X),Var(X)$.

解：

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & \quad Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解：

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$
2. $Var(X)$

方差的性质

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \leq x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解:

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2]$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解：

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2]$

   $E(X^2)$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解：

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2]$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解:

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2]$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx \\ &= 7/6 \end{aligned}$$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X), Var(X)$.

解：

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2]$

   $$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx \\ &= 7/6 \end{aligned}$$

所以,$Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2] =$

例 2.3.1

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 < x < 2 \\ 0 & Others \end{cases}$ 求 $E(X),Var(X)$.

解:

1. $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2]$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx \\ &= 7/6 \end{aligned}$$

所以,$Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2] = 7/6 - 1 = 1/6$

课堂练习

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} 1+x & ,-1 \le x \le 0 \\ 1-x & ,0 < x \le 1 \\ 0 & Others \end{cases}$ 则方差 $Var(X)$

课堂练习

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} 1+x & ,-1 \le x \le 0 \\ 1-x & ,0 < x \le 1 \\ 0 & Others \end{cases}$ 则方差 $Var(X) = (1/6)$

切比雪夫不等式

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的方差存在 (这时均值也存在), 则对任意正数 ϵ，有下面不等式成立

$$P\{|X-E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的方差存在 (这时均值也存在), 则对任意正数 ϵ, 有下面不等式成立

$$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$
$$P\{|X - E(X)| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \ge \frac{n}{n+1}$

证明:

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

切比雪夫不等式

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) =$

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$
2. $E(X^2) =$

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{x^n}{n!} e^{(-x)} dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$
2. $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x^n}{n!} e^{(-x)} dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+3) = (n+1)(n+2)$

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \ge \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$
2. $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+3) = (n+1)(n+2)$
3. 所以,$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n+1$ 由此得

切比雪夫不等式

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$
2. $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+3) = (n+1)(n+2)$
3. 所以,$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n+1$ 由此得
4. $P(0 < X < 2(n+1)) = P(|X - EX| < n+1)$

切比雪夫不等式

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$
2. $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+3) = (n+1)(n+2)$
3. 所以,$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n+1$ 由此得
4. $P(0 < X < 2(n+1)) = P(|X - EX| < n+1)$
   $\geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$

例 2.3.2

设 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

证明 $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

证明:

提示：求 $Var(X)$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = n+1$
2. $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\frac{x^n}{n!}e^{(-x)}dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+3) = (n+1)(n+2)$
3. 所以,$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n+1$ 由此得
4. $P(0 < X < 2(n+1)) = P(|X - EX| < n+1)$
   $\geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$
   (这里,$\epsilon = n+1$)

切比雪夫不等式

定理 2.3.2

$Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = a) = 1$

作业

书 P91: 2, 4, 5, 7, 8, 12