第 1 章 线性规划与单纯形法

第一节　线性规划问题及其数学模型

1.1 问题的提出

1.2 线性规划问题的图解法

1.3 线性规划的标准形式

1.4 线性规划问题的解

1.1 问题的提出

例 1， 某工厂要安排生产两种产品

	产品 I	产品 II	资源总量
机床加工 铝 铜	1 台时/件 4 kg/件 0 kg/件	2 台时/件 0 kg/件 4 kg/件	8 台时 16 kg 12 kg
利润	2 元/件	3 元/件	

问题： 应如何安排生产计划使该厂获利最多？

以x_1，x_2分别表示产品 **I**、**II** 的产量，则需要求解：

目标函数　$\max z = 2x_1 + 3x_2$　（利润）

满足/服从约束条件（subject to，s.t.）

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \le 8 & \text{（设备台时约束）} \\
4x_1 \qquad\quad \le 16 & \text{（铝锭用量约束）} \\
\qquad 4x_2 \le 12 & \text{（黄铜用量约束）} \\
\quad x_1, x_2 \ge 0 & \text{（决策变量非负约束）}
\end{cases}
$$

上述优化模型，就是线性规划（**Linear Programming，LP**）问题。

线性规划（LP）模型的一般形式：

$$\max(\min)\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (1)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \end{aligned}\right\} & (2) \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 & (3) \end{cases}$$

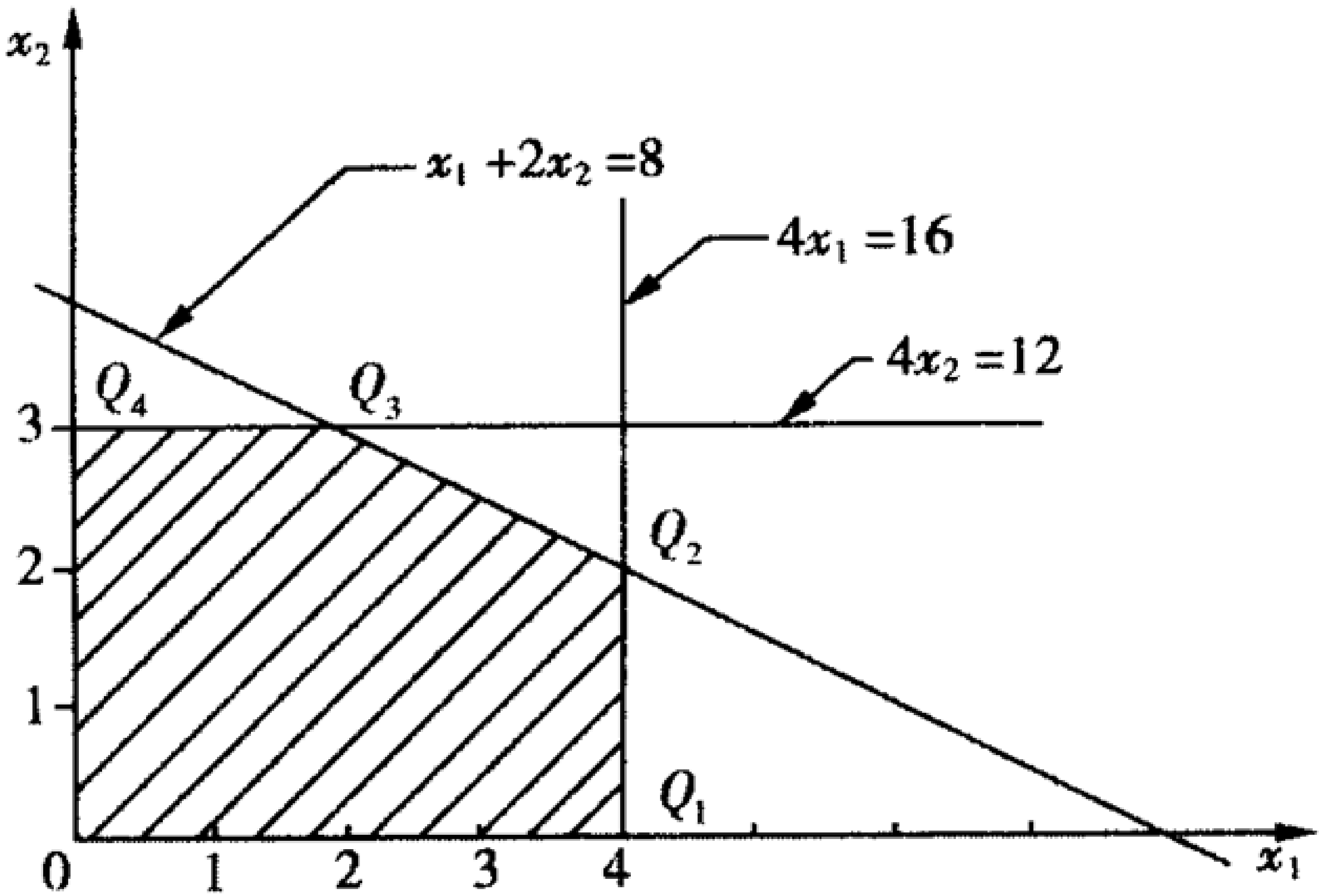
$c_1, c_2, \ldots, c_n$：价值系数

$a_{11}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mn}$：技术系数

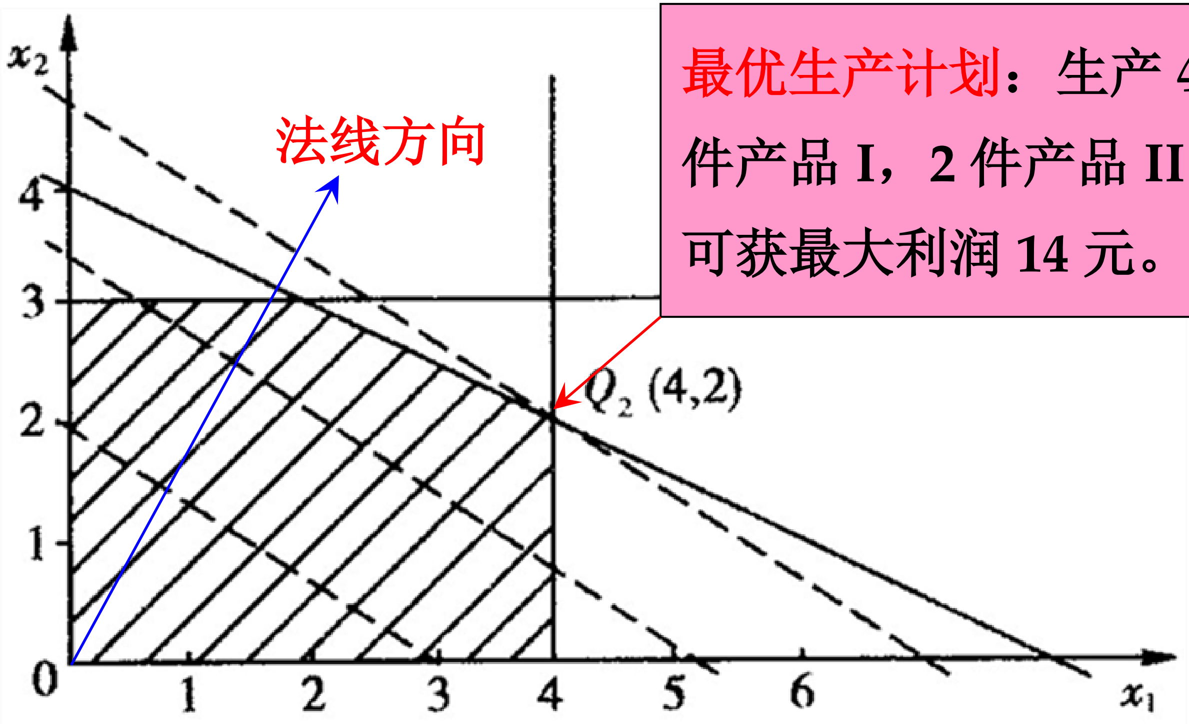
$b_1, b_2, \ldots, b_m$：右端项或限额系数

1.2 线性规划问题的图解法

对例 1 的 LP 问题，先根据约束条件画出其可行域。



再画出目标函数等值线。目标函数：$z=2x_1+3x_2$，等值线是以 z 为参数，$-2/3$为斜率的平行线：$x_2=-(2/3)x_1+z/3$。位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值。



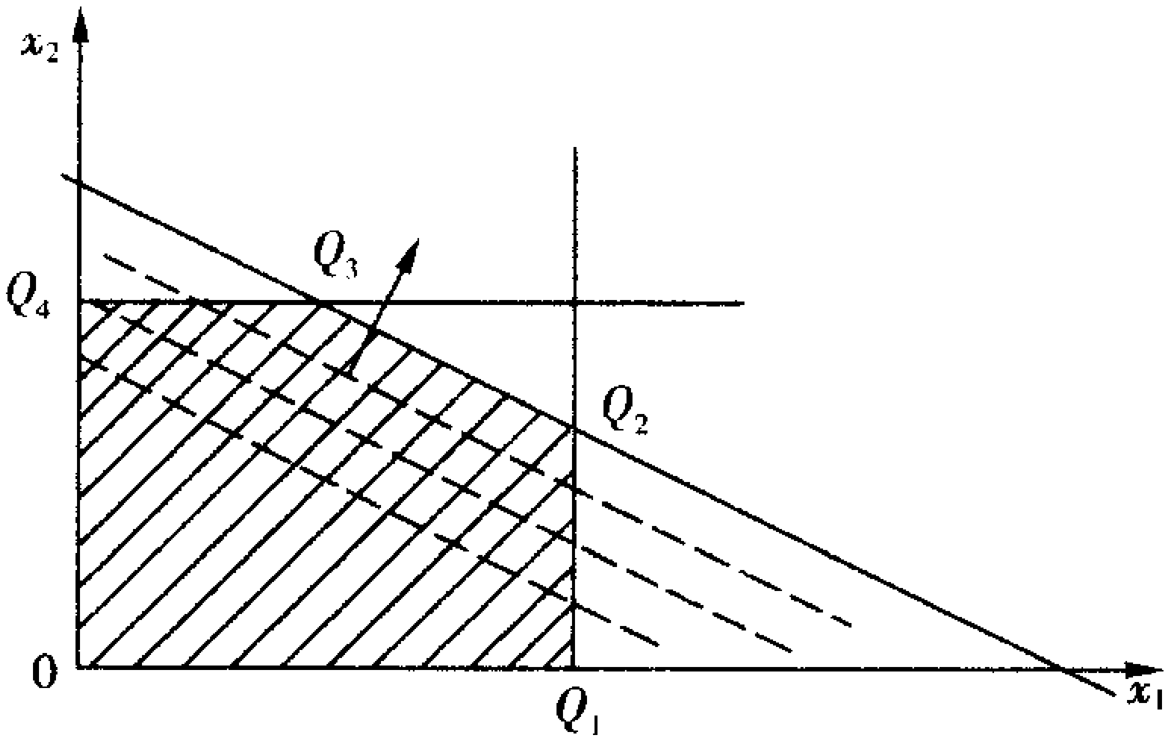
最优生产计划：生产 4 件产品 I，2 件产品 II，可获最大利润 14 元。

目标函数等值线沿其法线方向移动，z 值由小变大。

当移动到点 Q_2，z 值达到最大。

上例最优解是唯一的。对一般 LP 问题，还可能出现以下 3 种情况：

1、无穷多最优解（多重最优解）



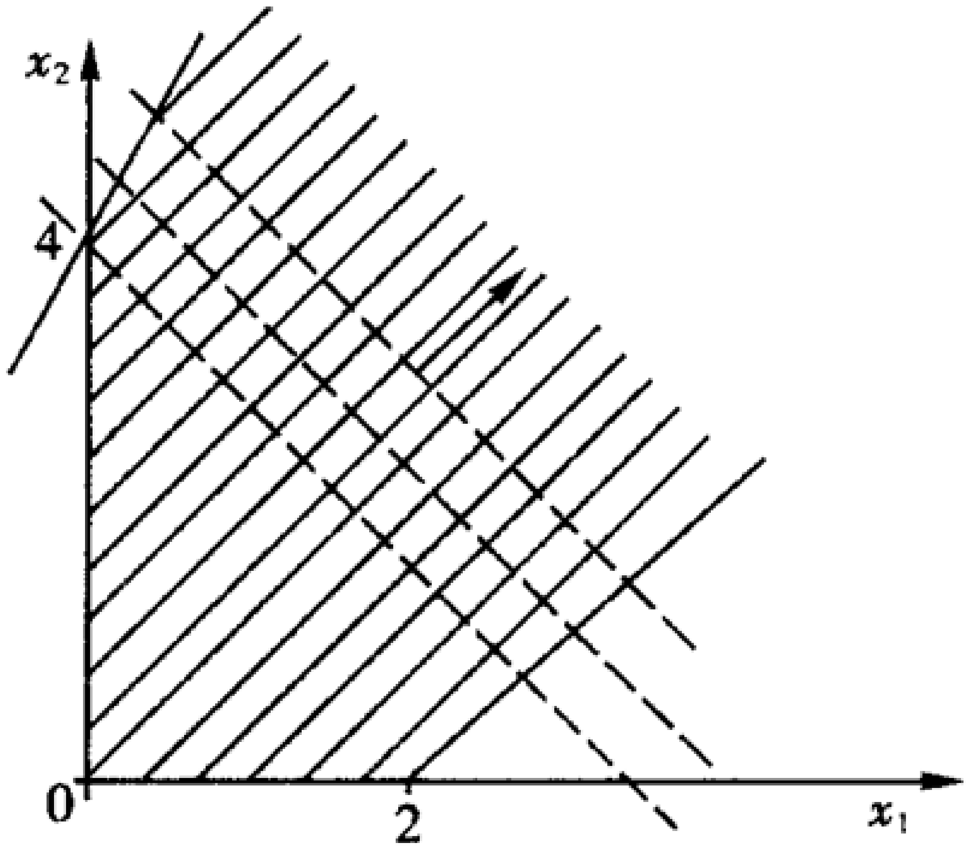
将目标函数修改为 $z=2x_1+4x_2$，则线段Q_2Q_3上的任意一点都是最优解，即有无穷多最优解。

2、无界解

考虑 LP 问题：

$$
\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 \le 4 \\
&\qquad\qquad x_1 - x_2 \le 2 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \quad \ge 0
\end{aligned}
$$

可行域无界，目标函数值可以增大到无穷大，称这种情况为无界解。



3、无可行解

增加一个约束条件$-2x_1 + x_2 \geq 5$，则可行域为空集，即无可行解，也就不存在最优解。

对于实际遇到的工业、管理等问题，若出现无界解或无可行解的情况，则很可能表明所建模型有错误：前者缺乏必要的约束条件，后者可能存在相互矛盾的约束。

从图解法可以猜测如下结论：

（1）当 **LP** 问题可行域非空，则它是有界或无界凸多边形。

（2）若 **LP** 问题存在最优解，则一定在有界可行域的某个顶点得到。

（3）若有两个顶点同时达到最优解，则它们连线上任意一点都是最优解，此时 **LP** 问题有无穷多最优解。

图解法是一种几何方法，简便直观；但当变量在 **3** 个以上时就无能为力，此时需要用代数方法，如单纯形法（**G. B. Dantzig，1947**）。

1.3 线性规划的标准形式

代数运算求解 **LP** 问题，一般需要将非标准形式的 **LP** 转换为标准形式：

$$
(M_1) \qquad \max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$

$$
\text{s.t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0;\ b_1, b_2, \dots, b_m > 0 \end{cases}
$$

简记为

$$
(M_1')\qquad
\begin{aligned}
&\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\
&\text{s.t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\dots,m\\
x_j\ge 0, & j=1,2,\dots,n\\
b_i>0, & i=1,2,\dots,m
\end{cases}
\end{aligned}
$$

标准形式中规定右端项$b_i > 0$，否则等式两端乘以-1；若某个$b_i = 0$，表示出现退化，在求解时需做专门处理。

向量形式：

(M_1'') $\max z = \mathbf{c}\mathbf{x}$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j x_j = \mathbf{b}$

$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$

行向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$称为价值系数向量；

列向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$为决策变量向量；

$\mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$为约束矩阵的系数列向量；$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$为右端项/资源向量。

矩阵形式：

$$\max z = \mathbf{cx}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

其中，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$，为约束系数矩阵，一般有$m < n$。

◆ 非标准形式 LP $\Longrightarrow$ 标准型 LP

（1）若目标函数 $\min z=\mathbf{cx}$，则令 $z'=-z$，转化为标准形式：$\max z'=-\mathbf{cx}$。

（2）对于“$\leq$”约束条件，左端增加非负松弛变量变成等式约束。

（3）对于“$\geq$”约束条件，左端减去非负剩余变量，变成等式约束。

（4）若存在取值可正可负无限制的变量 x_k，则令 $x_k=x_k'-x_k''$，其中，其中 $x_k'\geq 0, x_k''\geq 0$。

举例，① 将例 1 转化为标准型。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \quad && +x_3 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 && +x_4 \\ 4x_2 &\le 12 && +x_5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

② 将下例转化为标准型。

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad + x_3 &\le 7 \\ x_1 - x_2 \quad + x_3 &\ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3 &\text{无约束} \end{aligned}$$

$\to z' = -z$

$\to x_3 = x_4 - x_5$

$+x_6$

$-x_7$

$x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0$

$\downarrow$

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5)$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad + (x_4 - x_5) + x_6 \qquad &= 7 \\ x_1 - x_2 \quad + (x_4 - x_5) \qquad - x_7 &= 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) \qquad &= 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.4 线性规划问题的解

1、可行解

满足约束条件（5）和（6）的点 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，称为 LP 问题的可行解。

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\dots,m \tag{5}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n \tag{6}$$

2、基矩阵/基（Base）与基解

设约束系数矩阵A的秩为m，B是A中$m \times m$阶非奇异子矩阵（$|\mathbf{B}| \neq 0$），则称B为 LP 的一个基矩阵，简称基。基矩阵B由m个线性独立的列向量组成。不失一般性，设

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_m)$$

称$\mathbf{p}_j$为基向量，与基向量$\mathbf{p}_j$相对应的变量x_j为基变量；其余变量称为非基变量。

◆ 基解

设矩阵**A**的秩为$m,(m<n)$，其前m个变量的系数列向量线性独立。则约束方程组恒等变形为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{bmatrix} x_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{bmatrix} x_{m+1} - \cdots - \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n \qquad (7)$$

或 $$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}_j x_j = \mathbf{b} - \sum_{j=m+1}^{n} \mathbf{p}_j x_j$$

且$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\dots,\mathbf{p}_m)$为矩阵**A**的一个基，

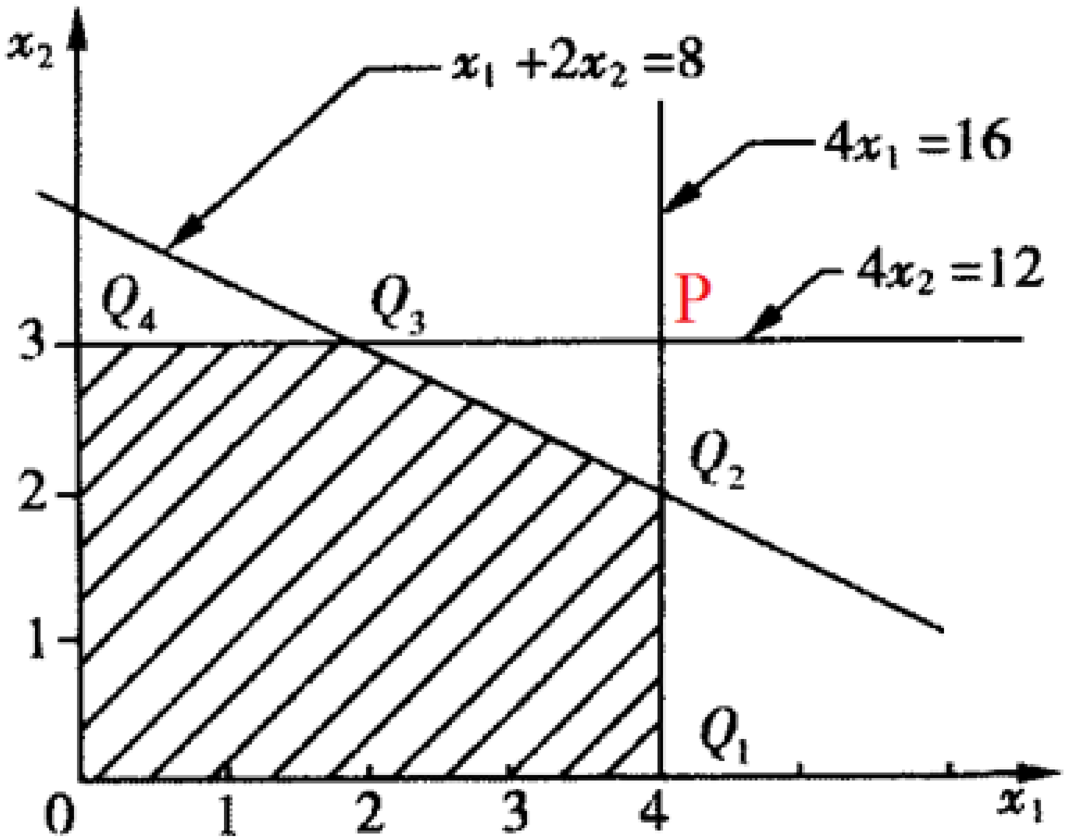
设其对应基变量为：$\mathbf{x}_\mathbf{B}=(x_1,\dots,x_m)^\mathrm{T}$。

在（7）中令非基变量：$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，则基变量的个数等于线性方程的个数，可用高斯消元法求出一个解：

$$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)^\mathrm{T}$$

x的非零分量的数目不大于方程个数m，称为基解/基本解。一个基矩阵，就对应一个基解。

例 1 中，点 0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4以及各约束函数彼此的交点（如点 P ）都代表一个基解。



思考：验证其他点，比如点(4,1)，是否是基解?

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 \quad\quad &= 8 \\ 4x_1 \quad\quad + x_4 &= 16 \\ 4x_2 \quad\quad + x_5 &= 12 \end{aligned}$$

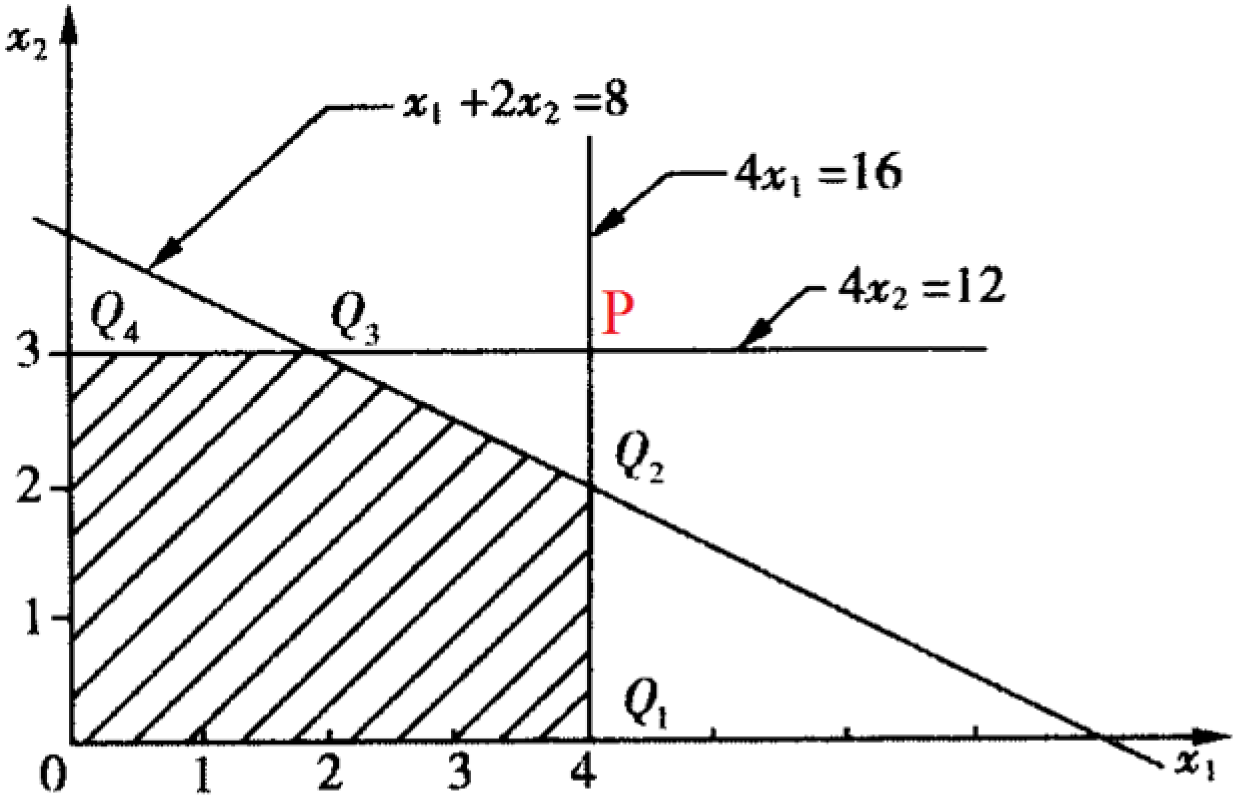
3、基可行解

满足非负约束（6）的基解，称为基可行解。

例 1 的点 0、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4代表基可行解。

点 P 虽然是基解，但它并不是可行的。

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 16 \\ 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 12 \end{aligned}$$



原因：看起来，在 P 点，x_1和x_2非负，但在标准型中，还要考察其他变量的取值情况。标准模型为：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 16 \\ 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 12 \end{aligned}$$

在 P 点，$x_1 = 4$，$x_2 = 3$；由此可知$x_4 = 0$，$x_5 = 0$，但是 $x_3 = -2 < 0$，故它虽是基解，但不是基可行解（可行解必须是非负的），在图上也就不是可行域的顶点。

只要是基可行解，则其非零分量的数目就不会大于m，且都是非负数，这有两种情况：

（1）基可行解的非零分量都是正数且其非零分量的数目恰好等于m；

（2）非零正分量的数目小于m。

基解中非零分量的个数小于m时，称该基解是退化解。

为方便，我们先假设不出现退化解的情况来构造一般的单纯形法；然后再讨论如何对退化的情况做特殊处理。

4、可行基

对应于基可行解的基（矩阵），称为可行基。

约束方程组（5）最多有C_n^m个基解。一般基可行解的数目要小于基解的数目。