第四节　矩阵求逆与单纯形表

一、高斯消元法求逆矩阵

（1）基本方法

设矩阵$\mathbf{B}$和单位矩阵$\mathbf{I}$组成一个增广矩阵：$(\mathbf{B},\mathbf{I})$，则对增广矩阵左乘$\mathbf{B}^{-1}$，有

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B},\mathbf{I})=(\mathbf{I},\mathbf{B}^{-1})$$

矩阵左乘等价于运用高斯消元将增广矩阵$(\mathbf{B},\mathbf{I})$变换为$(\mathbf{I},\mathbf{B}^{-1})$，则原来单位矩阵$\mathbf{I}$所在的位置，就相应变成了矩阵$\mathbf{B}$的逆矩阵$\mathbf{B}^{-1}$。

例，求矩阵$\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$的逆。

通过高斯消元将原矩阵变为单位矩阵，伴随高斯消元的单位矩阵就变成了原矩阵的逆矩阵：

$$\left[\begin{matrix}2 & 4 & 1 & 0\\6 & 8 & 0 & 1\end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix}1 & 0 & -1 & 1/2\\0 & 1 & 3/4 & -1/4\end{matrix}\right]$$

所以
$$\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1/2\\3/4 & -1/4\end{bmatrix}$$

（2）关于单位伴随矩阵各列的摆放位置

伴随矩阵的单位列向量的元素“1”可能并非正好位于单位阵对角线、单位矩阵的列也不一定正好相邻：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & a & 1 \\ 6 & 8 & 1 & b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & c & -1 \\ 0 & 1 & -1/4 & d & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$所在位置对应逆矩阵第一列，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$对应第二列……

（3）关于原矩阵各列的摆放位置

假设有一个单纯形增广矩阵：

$\mathbf{c}_\mathrm{B}$	$\mathbf{x}_\mathrm{B}$	$\mathbf{b}$	$x_1(\mathbf{p}_1)$	$x_2(\mathbf{p}_2)$	$x_3(\mathbf{p}_3)$	$x_4(\mathbf{p}_4)$
$\cdots$	x_3	$\cdots$	2	1	2	1
$\cdots$	x_2	$\cdots$	6	2	1	0

在单纯形迭代过程中，表中基变量是(x_3, x_2)，那么对应的基矩阵就是$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$。

现在需要用高斯消元法求$[\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2]^{-1} = ?$

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{I}_2$
x_3	1	2	1	0
x_2	2	1	0	1

$\Longrightarrow$

$\mathbf{x}_B$				
x_3	1	0	$-1/3$	$2/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$

↑

哪个才是$[\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2]^{-1}$？

↓

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{I}_2$
x_3	1	2	1	0
x_2	2	1	0	1

$\Longrightarrow$

$\mathbf{x}_B$				
x_3	0	1	$2/3$	$-1/3$
x_2	1	0	$-1/3$	$2/3$

✧ 答案：若以(x_3, x_2)为基变量——对应基矩阵$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]$，为求基矩阵$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]$的逆矩阵，则应将$\mathbf{p}_3$的第一个元素变成1，其余为0，而将$\mathbf{p}_2$的第二个元素变成1，其余为0。

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{I}_2$				$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]^{-1}$	
x_3	1	2	1	0	$\Longrightarrow$	0	1	2/3	−1/3
x_2	2	1	0	1		1	0	−1/3	2/3

$$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]^{-1}\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]^{-1}\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

✧ 若以(x_2, x_3)为基变量——对应基矩阵$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$，为求基变量基矩阵$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$的逆矩阵，则应将$\mathbf{p}_2$的第一个元素变成1，其余为0，而将$\mathbf{p}_3$的第二个元素变成1，其余为0。

$\mathbf{x}_\mathbf{B}$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{I}_2$				$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]^{-1}$	
x_2	1	2	1	0	$\Rightarrow$	1	0	$-1/3$	$2/3$
x_3	2	1	0	1		0	1	$2/3$	$-1/3$

$$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]^{-1}\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]^{-1}\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✧ 单位向量的位置

以(x_3, x_2)为基变量，若右边单位矩阵的位置为：

$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{I}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{p}$	$\mathbf{I}_1$
x_3	1	0	2	a	1
x_2	2	1	1	b	0

经过变换：

$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{I}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{p}$	$\mathbf{I}_1$
x_3	1	0	2	a	1
x_2	2	1	1	b	0

$\Longrightarrow$

	↓蕴涵$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]^{-1}$↓			
0	$\boxed{-1/3}$	1	c	$\boxed{2/3}$
1	$\boxed{2/3}$	0	d	$\boxed{-1/3}$

有：

$$[\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

练习，求矩阵的逆矩阵：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

首先摆放单位矩阵——可以利用原来的两个单位列向量，

增加单位列向量$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，得到（列的位置可以打乱）：

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{p}_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

高斯消元的任务：

原矩阵的第一列$\mathbf{p}_1$应该变为$(1,0,0)^T$；

原矩阵的第二列$\mathbf{p}_2$应该变为$(0,1,0)^T$；

原矩阵的第三列$\mathbf{p}_3$应该变为$(0,0,1)^T$。

经高斯消元变换为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

原矩阵中单位列向量：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$所在的位置，分别对应

逆矩阵的第 1、2、3 列，因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

二、单纯形表中的逆矩阵

对于单纯形表，若初始基矩阵是单位矩阵，则新的基矩阵的逆矩阵就能在单纯形表中找到。

$c_j \to$			10	15	12	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	9	5	3	1	1	0	0
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0
0	x_6	5	2	1	1	0	0	1

$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_6]^{-1}$

$c_j \to$			10	15	12	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
10	x_1	1/5	1	0	-13/15	2/15	-1/15	0
15	x_2	8/3	0	1	16/9	1/9	1/9	0
0	x_6	29/15	0	0	43/45	-17/45	1/45	1

i. 如果当前基变量的顺序不同

$c_j \rightarrow$			10	15	12	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	9	5	3	1	1	0	0
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0
0	x_6	5	2	1	1	0	0	1

$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_6]^{-1}$

$c_j \rightarrow$			10	15	12	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
10	x_2	8/3	0	1	16/9	1/9	1/9	0
15	x_1	1/5	1	0	-13/15	2/15	-1/15	0
0	x_6	29/15	0	0	43/45	-17/45	1/45	1

ii. 如果初始基变量的顺序不同

	$c_j \rightarrow$		10	15	12	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	9	-5	6	15	0	1	0
0	x_4	15	5	3	1	1	0	0
0	x_6	5	2	1	1	0	0	1

$[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_6]^{-1}$		
1/9	1/9	0
-1/15	2/15	0
1/45	-17/45	1

	$c_j \rightarrow$		10	15	12	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
10	x_2	8/3	0	1	16/9	1/9	1/9	0
15	x_1	1/5	1	0	-13/15	2/15	-1/15	0
0	x_6	29/15	0	0	43/45	-17/45	1/45	1