第一章
随机事件与概率

第五节

独立性

Overview

事件的独立性

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.
举例：两个骰子，

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.
举例：两个骰子，其他？

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

举例：两个骰子，其他？

$\Leftrightarrow P(A|B) =$

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

举例：两个骰子，其他？

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

举例：两个骰子，其他？

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB)/P(B) =$

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

举例：两个骰子，其他？

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB)/P(B) = P(A)$

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

举例：两个骰子，其他？

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB)/P(B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB) =$

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

举例：两个骰子，其他？

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB)/P(B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

两个事件的独立性

定义 1.5.1 两个事件的独立性

两个事件的独立性

定义 1.5.1 两个事件的独立性

若事件 A 与 B 满足：$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

定义 1.5.1 两个事件的独立性

若事件 A 与 B 满足：$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立. 否则称 A 与 B 不独立或相依.

两个事件的独立性

定义 1.5.1 两个事件的独立性

若事件 A 与 B 满足：$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立. 否则称 A 与 B 不独立或相依.

结论

- A,B 为两个事件, 若 $P(A) > 0$, 则 A 与 B 独立等价于 $P(B|A) =$

两个事件的独立性

定义 1.5.1 两个事件的独立性

若事件 A 与 B 满足：$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立. 否则称 A 与 B 不独立或相依.

结论

- A,B 为两个事件, 若 $P(A) > 0$, 则 A 与 B 独立等价于 $P(B|A) = P(B)$.

两个事件的独立性

举例：书例 1.5.1（1）扑克

两个事件的独立性

举例：书例 1.5.1（1）扑克

性质 1.5.1

若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 $\overline{B}$ 独立,$\overline{A}$ 与 B 独立,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立

事件独立性的判断

事件独立性的判断

实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性：

事件独立性的判断

实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性：例如:

两个事件的独立性

事件独立性的判断

实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性：例如: 返回抽样、

事件独立性的判断

实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性：例如: 返回抽样、甲乙两人分别工作、

两个事件的独立性

事件独立性的判断

实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性：例如: 返回抽样、甲乙两人分别工作、重复试验等.

多个事件的相互独立性

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，称满足：
$P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，称满足：
  $P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$ 则称 A、B、C 两两独立.

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，称满足：$P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$ 则称 A、B、C 两两独立.
- 若还满足：$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，称满足：
  $P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$ 则称 A、B、C 两两独立.
- 若还满足：$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则称 A、B、C 相互独立.

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，称满足：$P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$ 则称 A、B、C 两两独立.
- 若还满足：$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则称 A、B、C 相互独立.

定义 1.5.3

若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 满足：两两独立. 三三独立,...,n n 独立,

多个事件的相互独立性

- 对于 A、B、C 三个事件，称满足：
  $P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$ 则称 A、B、C 两两独立.
- 若还满足：$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$，则称 A、B、C 相互独立.

定义 1.5.3

若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 满足：两两独立. 三三独立,...,n n 独立，则称 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立.

一些结论

一些结论

若 A、B、C 相互独立，则

- $A \cup B$ 与 C 独立？

多个事件的相互独立性

一些结论

若 A、B、C 相互独立，则

- $A \cup B$ 与 C 独立？
- $A \cap B$ 与 C 独立？

一些结论

若 A、B、C 相互独立，则

- $A \cup B$ 与 C 独立？
- $A \cap B$ 与 C 独立？
- $A - B$ 与 C 独立？

一些结论

若 A、B、C 相互独立，则

- $A \cup B$ 与 C 独立？
- $A \cap B$ 与 C 独立？
- $A - B$ 与 C 独立？
- 若 A、B、C 只有两两独立，则上述三种情况如何？

多个事件的相互独立性

例 1.5.1

两射手独立地向同一目标射击一次，其命中率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率.

例 1.5.1

两射手独立地向同一目标射击一次，其命中率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率.

解:

设 $A=$ “甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

例 1.5.1

两射手独立地向同一目标射击一次，其命中率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率.

解:

设 $A=$ “甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

解法 1:

$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

例 1.5.1

两射手独立地向同一目标射击一次，其命中率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率.

解:

设 $A=$ “甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

解法 1:

$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98.$

多个事件的相互独立性

例 1.5.1

两射手独立地向同一目标射击一次，其命中率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率.

解:

设 $A =$“甲中”, $B =$ “乙中”, $C =$ “目标被击中”, 所以

解法 1:

$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98.$

解法 2:

用对立事件公式

$P(C) = P(A \cup B)$

例 1.5.1

两射手独立地向同一目标射击一次，其命中率分别为 0.9 和 0.8，求目标被击中的概率.

解:

设 $A=$ “甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

解法 1:

$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.9+0.8-0.9\times0.8=0.98.$

解法 2:

用对立事件公式

$P(C)=P(A\cup B)$

$=1-(1-0.9)(1-0.8)=1-0.02=0.98.$

例 1.5.2

甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲击中的概率.。

例 1.5.2

甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲击中的概率.。

解:

设 $A =$ "甲中", $B =$ "乙中", $C =$ "目标被击中", 所以

例 1.5.2

甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲击中的概率.。

解:

设 $A=$“甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

$$P(A|C) \quad = P(AC)/P(C)$$

例 1.5.2

甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲击中的概率.。

解:

设 $A=$“甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

$$\begin{aligned} P(A|C) &= P(AC)/P(C) \\ &= P(A)/[P(A)+P(B)-P(A)P(B)] \end{aligned}$$

多个事件的相互独立性

例 1.5.2

甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲击中的概率.。

解:

设 $A=$“甲中”, $B=$ “乙中”, $C=$ “目标被击中”, 所以

$$
\begin{aligned}
P(A|C) &= P(AC)/P(C) \\
&= P(A)/[P(A)+P(B)-P(A)P(B)] \\
&= 0.6/0.88 \\
&= 15/22
\end{aligned}
$$

多个事件的相互独立性

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 $A_i =$ “第 i 个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统:?
2. 两个元件的并联系统: ?
3. 五个元件的桥式系统: ?

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 $A_i =$ “第 i 个元件正常工作”, $p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统:

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 $A_i =$ “第 i 个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统: $P(A_1A_2) = p_1p_2$

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 $A_i =$ “第 i 个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统: $P(A_1A_2) = p_1p_2$
2. 两个元件的并联系统:

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 $A_i =$ “第 i 个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统: $P(A_1A_2) = p_1p_2$
2. 两个元件的并联系统:
   $P(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1p_2 = 1 - (1 - p1)(1 - p2)$

多个事件的相互独立性

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 A_i = “第 i 个元件正常工作”, $p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统: $P(A_1A_2) = p_1p_2$
2. 两个元件的并联系统:
   $P(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1p_2 = 1 - (1 - p1)(1 - p2)$
3. 五个元件的桥式系统: 用全概率公式

例 1.5.5

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记 $A_i =$ “第 i 个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$.

1. 两个元件的串联系统: $P(A_1 A_2) = p_1 p_2$
2. 两个元件的并联系统:
   $P(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 1 - (1 - p1)(1 - p2)$
3. 五个元件的桥式系统: 用全概率公式
   $P((A_1 \cup A_4)(A_2 \cup A_5)) = P(A_1 \cup A_4)P(A_2 \cup A_5)$

试验的独立性

试验的独立性

试验的独立性

若试验 E_1 的任一结果与试验 E_2 的任一结果都是相互独立的事件，

试验的独立性

试验的独立性

若试验 E_1 的任一结果与试验 E_2 的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，

试验的独立性

若试验 E_1 的任一结果与试验 E_2 的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，或称独立试验.

试验的独立性

n 重伯努里试验

n 重伯努里试验

- 伯努里试验：
  若某种试验只有两个结果 (成功、失败；黑球、白球；正面、反面)，则称这个试验为伯努里试验.

试验的独立性

n 重伯努里试验

- 伯努里试验：
  若某种试验只有两个结果 (成功、失败；黑球、白球；正面、反面)，则称这个试验为伯努里试验.
- 在伯努里试验中，一般记“成功”的概率为 p.

试验的独立性

n 重伯努里试验

- 伯努里试验：
  若某种试验只有两个结果 (成功、失败；黑球、白球；正面、反面)，则称这个试验为伯努里试验.
- 在伯努里试验中，一般记“成功”的概率为 p.
- **n** 重伯努里试验：n 次独立重复的伯努里试验.

n 重伯努里试验成功的次数

n 重伯努里试验成功的次数

- 在 n 重伯努里试验中，记成功的次数为 X.

n 重伯努里试验成功的次数

- 在 n 重伯努里试验中，记成功的次数为 X.
- X 的可能取值为:$0, 1, ..., n$

n 重伯努里试验成功的次数

- 在 n 重伯努里试验中，记成功的次数为 X.
- X 的可能取值为:$0, 1, ..., n$
- X 取值为 k 的概率为：

试验的独立性

n 重伯努里试验成功的次数

- 在 n 重伯努里试验中，记成功的次数为 X.
- X 的可能取值为:$0, 1, ..., n$
- X 取值为 k 的概率为：
  $P(X = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1 - p)^{n-k}$

作业

课本 P59: 4, 5, 6, 15, 19, 20, 21