第一章 随机事件与概率

Instructor: 郝壮

haozhuang@buaa.edu.cn
School of Economics and Management
Beihang University

September 19, 2021

自然界中的有两类现象

1. 确定性现象
   - 每天早晨太阳从东方升起;
   - 水在标准大气压下加温到100°C沸腾;

2. 随机现象
   - 掷一枚硬币, 正面朝上?反面朝上?
   - 一天内进入某超市的顾客数;
   - 某种型号电视机的寿命;

概率论是研究随机现象的理论

经济学中的随机现象

- 经济增长率
- 失业率
- 人的寿命
- 股票价格

1.1.1 随机现象

- 随机现象: 在一定的条件下, 并不总出现相同结果的现象称为随机现象.
- 特点: 1. 结果不止一个; 2. 事先不知道哪一个会出现.
- 随机现象的统计规律性: 随机现象的各种结果会表现出一定的规律性, 这种规律性称之为统计规律性.

随机试验 (Random Trail) —— 对相同条件下可以重复的随机现象进行的实验与观察.

- 它具有两个特点: 随机性, 重复性.

1.1.2 样本空间

1. **样本空间**(Ω) —— 随机现象的**一切**可能的基本结果.

2. **样本点**(ω) —— **每一个**可能的基本结果.

3. 两类样本空间:

- 离散样本空间: 样本点的个数为有限个或可列个.
  eg. 掷一枚骰子的样本空间:
  $\mathbf{\Omega_1} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\} = \{1, 2, ..., 6\}$ (有限个)
  eg. 一天某商场顾客数的样本空间: $\mathbf{\Omega_2} = \{0, 1, 2, ...\}$ (可列个)
- 连续样本空间: 样本点的个数为无限不可列个.
  eg. 电视机寿命的样本空间: $\mathbf{\Omega_3} = \{t : t \geq 0\}$

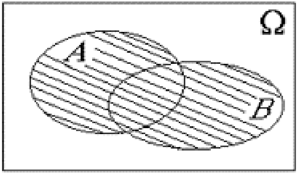
1.1.3 随机事件

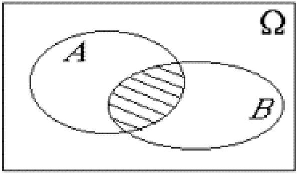
1. **随机事件** —— 某些样本点组成的集合, Ω的子集, 常用$A, B, C, ...$表示.

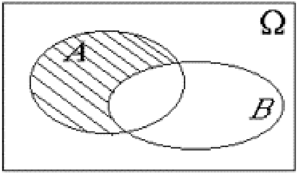
eg. 掷一枚骰子的样本空间: $\Omega_1 = \{1, 2, ..., 6\}$
事件A="出现4点", 事件B="出现奇数点"

- 在试验中, A中某个样本点出现了, 就说 A 出现了, 发生了, 记为A.
- 事件的三种表示: 用语言, 用集合, 用随机变量.

维恩图 (Venn): 表示样本空间和事件关系的几何图形







分别表示样本空间中的事件A和B的某种关系.

1.1.3 随机事件

仍以掷一枚骰子的样本空间: $\Omega_1 = \{1, 2, ..., 6\}$为例

2. **基本事件** —— Ω的单点集.

   eg. 事件B="出现4点" 是一个基本事件

3. **必然事件** (Ω)

   eg. 事件C="出现点数小于7" 是一个必然事件

4. **不可能事件** ($\varnothing$) —— 空集.

   eg. 事件D="出现点数大于6" 是一个不可能事件

1.1.4 随机变量

随机变量表示随机现象结果的变量. 常用大写字母 $X, Y, Z, \ldots$表示.

eg. 设随机变量X="掷一次骰子出现的点数",

- 事件A="出现4点"可用 "$X = 4$"表示,
- 事件D="出现点数大于6" 可用"$X > 6$"表示
- 思考: 不可能事件如何用随机变量表示?

1.1.4 随机变量

随机变量表示随机现象结果的变量. 常用大写字母 $X, Y, Z, \ldots$表示.

eg. 设随机变量X="掷一次骰子出现的点数",

- 事件A="出现4点"可用 "$X = 4$"表示,
- 事件D="出现点数大于6" 可用"$X > 6$"表示
- 思考: 不可能事件如何用随机变量表示?

eg. 再设随机变量Y="掷一次骰子出现6点的次数",

- "$Y = 0$"表示什么事件?
- "$Y = 1$"表示什么事件?
- "$Y > 1$"表示什么事件?

1.1.4 随机变量

随机变量表示随机现象结果的变量. 常用大写字母 $X, Y, Z, \ldots$表示.

eg. 设随机变量X="掷一次骰子出现的点数",

- 事件A="出现4点"可用 "$X = 4$"表示,
- 事件D="出现点数大于6" 可用"$X > 6$"表示
- 思考: 不可能事件如何用随机变量表示?

eg. 再设随机变量Y="掷一次骰子出现6点的次数",

- "$Y = 0$"表示什么事件?
- "$Y = 1$"表示什么事件?
- "$Y > 1$"表示什么事件?

在同一个随机现象中可定义不同的随机变量.

- **包含关系:** $A \subset B$, A 发生必然导致 B 发生.
  - eg. 设随机变量X="掷一次骰子出现的点数", 事件A="出现4点"; 事件B="出现点数为偶数点" $\Rightarrow A \subset B$

1.1.5 事件间的关系

- **包含关系**: $A \subset B$, A 发生必然导致 B 发生.
  - eg. 设随机变量X="掷一次骰子出现的点数", 事件A="出现4点"; 事件B="出现点数为偶数点" $\Rightarrow A \subset B$
- **相等关系**: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 而且 $B \subset A$.

1.1.5 事件间的关系

- **包含关系**: $A \subset B$, A 发生必然导致 B 发生.
  - eg. 设随机变量X="掷一次骰子出现的点数", 事件A="出现4点"; 事件B="出现点数为偶数点" $\Rightarrow A \subset B$
- **相等关系**: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 而且 $B \subset A$.
- **互不相容**: A和B不可能同时发生 (A与B没有相同的样本点, 记为 $A \cap B = \varnothing$). (若A与B有相同的样本点, 则可称为相容.)

例1.1.1: 口袋中有a 个白球, b 个黑球, 从中一个一个不返回地取球. A = "取到最后一个是白球", B = "取到最后一段是白球". 问随机事件A 与 B 的关系?

解:

例1.1.1: 口袋中有a 个白球, b 个黑球, 从中一个一个不返回地取球. A = "取到最后一个是白球", B = "取到最后一段是白球". 问随机事件A 与 B 的关系?

解:

- 1) B 发生必然导致A发生, 所以 $B \subset A$;

例1.1.1

例1.1.1: 口袋中有a 个白球, b 个黑球, 从中一个一个不返回地取球. A = "取到最后一个是白球", B = "取到最后一段是白球". 问随机事件A 与 B 的关系?

解:

- 1) B 发生必然导致A发生, 所以 $B \subset A$;
- 2) 又因为A发生必然导致B发生, 所以 $A \subset B$,

例1.1.1: 口袋中有a 个白球, b 个黑球, 从中一个一个不返回地取球. A = "取到最后一个是白球", B = "取到最后一段是白球". 问随机事件A 与 B 的关系?

解:

- 1) B 发生必然导致A发生, 所以 $B \subset A$;
- 2) 又因为A发生必然导致B发生, 所以 $A \subset B$,
- 由此得 $A = B$.

1.1.6 事件的运算

并: $A \cup B$ A 与 B 至少有一发生

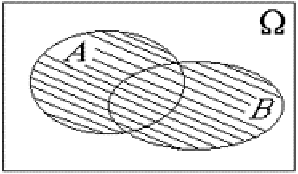
交: $A \cap B = AB$ A 与 B 同时发生

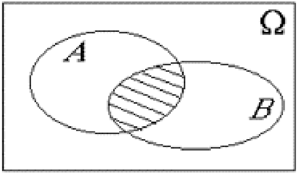
差: $A - B$ A发生但 B不发生

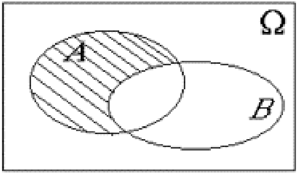
对立: $\overline{A}$ A 不发生

事件运算的图示

- $A \cup B$
- $A \cap B = AB$
- $A - B$







并: $A \cup B$ $\quad$ A 与 B 至少有一发生

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 有限并; $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列并.

并: $A \cup B$ A 与 B 至少有一发生

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 有限并; $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列并.

交: $A \cap B = AB$ A 与 B 同时发生

- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 有限交; $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列交.

并: $A \cup B$ A 与 B 至少有一发生

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 有限并; $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列并.

交: $A \cap B = AB$ A 与 B 同时发生

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 有限交; $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列交.

差: $A - B$ A发生但 B不发生

对立: $\overline{A}$ A 不发生

- $\overline{A} \cap A = \varnothing$
- $A - B = A\overline{B}$
- $A - B = A - AB$
- 思考上式的特殊情况: 如果A和B互不相容, $A - B = ?$

事件运算的性质

1. 交换律

- $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$

2. 结合律

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$

3. 分配律

- $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. 对偶律 (德摩根公式)

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

事件运算的性质

用集合论的语言证明: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

证明:

设样本点$\omega\in\overline{A\cup B}$,这表明$\omega$既不属于$A$也不属于$B$,即$\omega\notin A$和 $\omega\notin B$同时成立, 所以$\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$, 所以

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$$

反之,设样本点$\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$, 所以$\omega\notin A$和 $\omega\notin B$同时成立,即ω既不属于A也不属于B,所以$\omega\notin A\cup B$,即$\omega\in\overline{A\cup B}$.所以

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

综上, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

德莫根公式可推广到多个(有限个)事件及可列个事件场合

- $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

概率论与集合论术语对应

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	空间
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
$A \subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$AB = \varnothing$	A与B互不相容	A与B无相同元素
$A \cup B$	A与B至少有一发生	A与B的并集
AB	A与B同时发生	A与B的交集
$A - B$	A发生且B不发生	A与B的差集
$\overline{A}$	A不发生, 对立事件	A的余集

注意点(1)

- 基本事件互不相容,基本事件之并=Ω
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $\varnothing \subset AB \subset A$ or $B \subset A \cup B \subset \Omega$

注意点(2)

- $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, AB = A$
- $A - B = A - AB$
- $A \cup B = A \cup (B - A) = A \cup (B - AB)$
- $A = AB \cup A\overline{B}$

样本空间的分割

若 $A_1, A_2, ..., A_n$ 有

1. A_i互不相容;
2. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

则称 $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ 为样本空间Ω的一组分割.

课堂练习1

1. 若A 是 B 的子事件,则 $A \cup B =$ ( ), $AB =$ ( )

课堂练习1

1. 若A 是 B 的子事件,则 $A \cup B = (\ )$, $AB = (\ )$

解: $A \cup B = (\ \mathbf{B}\ )$, $AB = (\ \mathbf{A}\ )$

课堂练习2

2. 设 A 与B 同时出现时 C 也出现,则( )

① $A \cup B$ 是 C 的子事件;
② C 是$A \cup B$的子事件;
③ AB 是 C 的子事件;
④ C 是 AB的子事件.

课堂练习2

2. 设 A 与B 同时出现时 C 也出现,则( )

① $A \cup B$ 是 C 的子事件;
② C 是$A \cup B$的子事件;
③ AB 是 C 的子事件;
④ C 是 AB的子事件.

解: ③

3. 设事件 A = "甲种产品畅销,乙种产品滞销" , 则A的对立事件为( )

①甲种产品滞销,乙种产品畅销;
②甲, 乙两种产品均畅销;
③甲种产品滞销;
④甲种产品滞销或者乙种产品畅销.

3. 设事件 A = "甲种产品畅销,乙种产品滞销" , 则A的对立事件为( )

①甲种产品滞销,乙种产品畅销;
②甲, 乙两种产品均畅销;
③甲种产品滞销;
④甲种产品滞销或者乙种产品畅销.

解: ④

课堂练习4

4. 设 x 表示一个沿数轴做随机运动的质点位置,试说明下列各对事件间的关系

① $A = |x - a| < \tau$,$B = x - a < \tau$

② $A = x > 20$, $B = x \leq 22$

③ $A = x > 22$, $B = x < 19$

4. 设 x 表示一个沿数轴做随机运动的质点位置,试说明下列各对事件间的关系

① $A = |x - a| < \tau, B = x - a < \tau$

② $A = x > 20,\ B = x \leq 22$

③ $A = x > 22,\ B = x < 19$

解:

① $A \subset B$

②相容

③不相容

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A

②仅A出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A

②仅A出现; $A\overline{B}\ \overline{C}$

③恰有一个出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A

②仅A出现; $A\overline{B}\,\overline{C}$

③恰有一个出现; $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

④至少有一个出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A

②仅A出现; $A\overline{B}\,\overline{C}$

③恰有一个出现; $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

④至少有一个出现; $A \cup B \cup C$

⑤至多有一个出现;

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A
②仅A出现; $A\overline{B}\,\overline{C}$
③恰有一个出现; $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$
④至少有一个出现; $A \cup B \cup C$
⑤至多有一个出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$
⑥都不出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A

②仅A出现; $A\overline{B}\,\overline{C}$

③恰有一个出现; $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

④至少有一个出现; $A \cup B \cup C$

⑤至多有一个出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

⑥都不出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

⑦不都出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

① A出现; A

②仅A出现; $A\overline{B}\,\overline{C}$

③恰有一个出现; $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

④至少有一个出现; $A \cup B \cup C$

⑤至多有一个出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

⑥都不出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

⑦不都出现; $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

⑧至少有两个出现;

课堂练习5

5. A, B, C 是定义在样本空间Ω上的三个事件. 试用A, B, C表示下列事件:

①A出现; A

②仅A出现; $A\overline{B}\,\overline{C}$

③恰有一个出现; $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

④至少有一个出现; $A \cup B \cup C$

⑤至多有一个出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

⑥都不出现; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

⑦不都出现; $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

⑧至少有两个出现; $AB \cup BC \cup AC$

引入事件域的概念为定义事件的**概率**做准备:

设Ω为样本空间, $\mathcal{F}$ 是由Ω的子集组成的集合类, 若$\mathcal{F}$ 满足以下三点, 则称 $\mathcal{F}$ 为事件域

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. 若$A \in \mathcal{F}$,则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
3. 若 $A_n \in \mathcal{F}$,$n = 1, 2, ...,$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

事件域又称σ域或σ代数.

称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间. 可测是指$\mathcal{F}$是有概率可言的(可以在$\mathcal{F}$上定义概率).

第1次作业

习题1.1中题目1, 3, 4, 5, 7, 8, 9

什么是概率?

- 直观定义—— 事件A出现的可能性大小.
- 统计定义—— 事件A在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.
- 古典定义; 几何定义.

如何给出概率的一般定义?

1.2.1 概率的公理化定义

定义1.2.1 设Ω 为一个样本空间, $\mathcal{F}$为Ω 的某些子集组成的一个事件域. 如果对任一事件$A \in \mathcal{F}$, 定义在 $\mathcal{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$满足:

- 非负性公理: $P(A) \geq 0$;
- 正则性公理: $P(\Omega) = 1$;
- 可列可加性公理: 若 $A_1, A_2, ..., A_n, ...$互不相容,则$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

则称$P(A)$ 为事件A的**概率**, 称三元素$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为**概率空间**.

- 概率公理化定义没有说明概率应该如何确定
- 频率方式, 古典概率, 几何概率等确定概率的方法满足公理,均可看作是恰当的概率确定方式

试运用概率公理化定义证明:

- **性质1.3.1** $P(\varnothing) = 0$.
- **性质1.3.2 (有限可加性)** 若$AB = \varnothing$ (互不相容), 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **性质1.3.3 (对立事件公式)** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

1.2.2 排列(permutation)与组合公式(combination)

下面介绍古典概率确定方法中常用到的**排列和组合**概念.
从 n 个元素中任取 r 个, 求取法数.

排列讲次序, 组合不讲次序.

排列和组合公式推导均基于如下基数原理:

- **加法原则**: 完成某件事情有 n 类途径, 在第一类途径中有m_1种方法, 在第二类途径中有m_2种方法, 依次类推, 在第 n 类途径中有m_n种方法,则完成这件事共有 $m_1 + m_2 + ... + m_n$种不同的方法.
- **乘法原则**: 完成某件事情需先后分成 n 个步骤, 做第一步有m_1种方法, 第二步有m_2 种方法, 依次类推, 第 n 步有m_n种方法, 则完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$种不同的方法.

排列

- 排列: $P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)...(n-r+1)$
- 全排列($r = n$): $P_n = n!$ (阶乘 factorial of n)
- 规定: 0! = 1
- 重复排列(有放回的取r次, permutation with replacement): n^r

组合

- 组合:
$$C_n^r \equiv \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n\text{中取 }r\text{的排列数}}{r\text{个元素的排列数}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
- 规定: $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- 重复组合(combination with replacement):
$$C_{n+r-1}^r = \binom{n+r-1}{r}$$ (放回了$r-1$次)

确定概率的频率方法

- 随机试验可大量重复进行.
- 进行n次重复试验, 记 $n(A)$ 为事件A的**频数**,
  称$f_n(A) = \dfrac{n(A)}{n}$ 为事件A的**频率**.
- 频率$f_n(A)$会稳定于某一常数(稳定值).
- 用**频率的稳定值**作为该事件的**概率**.

eg. 预测Covid-19在人群中的患病率(prevalence), 可用随机选取的血清样本阳性频率逼近.

证明用频率方法确定的概率满足公理化定义:

- 非负性: $f_n(A) \geq 0$;
- 正则性: $P(\Omega) = 1$;
- 可列可加性: 若事件 $A_1, A_2, ..., A_n, ...$互不相容, 则事件$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$的频数等于分别计算各事件的频数再相加$n(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} n(A_i)$.

故$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \dfrac{n(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} n(A_i)}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(A_i)$

1.2.4 确定概率的古典方法: 古典概型

若一个随机试验$(\Omega, \mathcal{F}, P)$具有以下两个特征:

(1) **有限性.** 样本空间的元素(基本事件)只有为有限个,即$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$;
(2) **等可能性.** 每个基本事件发生的可能性是相等的,即 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n)$.

则称这类随机试验的数学模型为古典概型.

其中事件A的概率为: $P(A) = A$中样本点的个数 / 样本点总数.

注意

- 抛一枚硬币三次 $\Leftrightarrow$ 抛三枚硬币一次
- $\Omega_1 = \{$ (正正正), (反正正), (正反正), (正正反),(正反反), (反反反)$\}$
  此样本空间中的样本点等可能.
- $\Omega_2 = \{$(三正), (二正一反), (二反一正), (三反)$\}$
  此样本空间中的样本点不等可能.

计算古典概率时要确保样本空间中每个样本点等可能性.

$n\ (n \geq 3)$ 个人围一圆桌坐, 求甲, 乙两人相邻而坐的概率.

解:

例1.2.1

n $(n \geq 3)$ 个人围一圆桌坐, 求甲, 乙两人相邻而坐的概率.

解: 考虑甲先坐好, 则乙有$n-1$个位置可坐, 而"甲乙相邻"只有两种情况, 所以

$$P(A) = 2/(n-1).$$

例1.2.2

$n(n \geq 3)$ 个人坐成一排, 求甲, 乙两人相邻而坐的概率. (注意: 请与上一题作比较)

解:

1) 先考虑样本空间的样本点数: 甲先坐, 乙后坐, 则共有$n(n-1)$种可能.

2) 甲在两端, 则乙与甲相邻共有2种可能.

3) 甲在中间$(n-2)$个位置上, 则乙左右都可坐, 所以共有$2(n-2)$种可能. 由此得所求概率为:

$$\frac{2+2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

常见模型(1) —— 不返回抽样 (sampling without replacement)

N件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. (口袋中有M个白球, $N-M$个黑球). 从中不返回任取n件产品, 则此"n 件中有 m 件不合格品" (定义为事件A_m) 的概率为:

$$P(A_m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

其中, $n \leq N, m \leq M, n-m \leq N-M.$

- 此模型又称超几何模型(hypergeometric model).

思考题

口袋中有5 个白球, 7个黑球, 4个红球. 从中不返回任取3 个. 求取出的 3 个球为不同颜色的球的概率.

解:

思考题

口袋中有5 个白球, 7个黑球, 4个红球. 从中不返回任取3 个. 求取出的 3 个球为不同颜色的球的概率.

解:

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}\binom{4}{1}}{\binom{16}{3}} = \frac{1}{4}$$

彩票问题——幸运35选7

购买: 从01, ..., 35 中选7个号码. 开奖: 7个基本号码, 1个特殊号码. 中奖规则如下:

中奖级别	中奖规则
1等奖	7个基本号码
2等奖	6个基本号码 + 1个特殊号码
3等奖	6个基本号码
4等奖	5个基本号码 + 1个特殊号码
5等奖	5个基本号码
6等奖	4个基本号码 + 1个特殊号码
7等奖	4个基本号码, 或 3个基本号码 + 1个特殊号码

求中奖概率.

中奖概率

- Ω中所含样本点个数: C_{35}^7
- 将35个号分成三类: 7个基本号码, 1个特殊号码, 27个无用号码
- 记 p_i 为中i等奖的概率. 利用抽样模型得:

$$p_1 = \frac{C_7^7 C_1^0 C_{27}^0}{C_{35}^7}, p_2 = \frac{C_7^6 C_1^1 C_{27}^0}{C_{35}^7}, \cdots$$

中奖概率

中奖概率如下:

$$p_1=\frac{1}{6724520},p_2=\frac{7}{6724520}$$
$$p_3=\frac{189}{6724520},p_4=\frac{567}{6724520}$$
$$p_5=\frac{7371}{6724520},p_6=\frac{12285}{6724520}$$
$$p_7=\frac{204750}{6724520}$$

不中奖的概率为:

$$p_0=1-p_1-p_2-p_3-p_4-p_5-p_6-p_7=0.9665$$

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件.

求事件B_m="n件中有m 件不合格品"的概率(记做$P(B_m)$). 其中, $m \le n, m = 0, 1, 2, ..., n$.

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件.

样本空间Ω中样本点的总数:

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件.

样本空间Ω中样本点的总数: N^n

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件.

样本空间Ω中样本点的总数: N^n

事件B_0="n件中有0 件不合格品"的概率:

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件.

样本空间Ω中样本点的总数: N^n

事件B_0="n件中有0 件不合格品"的概率:

$$P(B_0) = \left(\frac{N-M}{N}\right)^n$$

事件B_1="n件中有1 件不合格品"的概率:

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件.

样本空间Ω中样本点的总数: N^n

事件B_0="n件中有0 件不合格品"的概率:

$$P(B_0) = \left(\frac{N-M}{N}\right)^n$$

事件B_1="n件中有1 件不合格品"的概率:

$$P(B_m) = \binom{n}{1} \frac{M^1(N-M)^{n-1}}{N^n}$$

$\binom{n}{1}$ 为第i次抽取到不合格品的可能总数.

常见模型(2) —— 返回抽样 (sampling with replacement)

N 件产品, 其中M件不合格品, $N-M$件合格品. 从中有返回地任取n件. 则此n件中有m 件不合格品的概率(记做$P(B_m)$)为:

$$P(B_m) = \binom{n}{m} \frac{M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = \binom{n}{m} \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

其中, $m \leq n, m = 0, 1, 2, ..., n.$

n 个不同球放入 N个不同的盒子中. 每个盒子中所放球数不限. 求恰有n个盒子中各有一球的概率$(n \leq N)$

$$p = \frac{\binom{N}{n} \cdot n!}{N^n} = \frac{P_N^n}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

课堂练习. 生日问题

求n个人中至少有两人生日相同的概率.

解:

课堂练习. 生日问题

求n个人中至少有两人生日相同的概率.

解: 看成 n个球放入$N = 365$个盒子中.

P(至少两人生日相同)=$1 - P$(生日全不相同).

用盒子模型得: $p_n = P$(至少两人生日相同)=

$$1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

$p_{20} = 0.4058, p_{30} = 0.6963, p_{50} = 0.9651, p_{60} = 0.9922$

若

1) **(可度量性)** 样本空间Ω充满某个区域, 其度量(长度, 面积, 体积)为S_{Ω};
2) **(等可能性)** 落在Ω中的任一子区域A的概率, 只与子区域的度量S_A有关, 而与子区域的位置无关

则事件A的概率为: $P(A)=\dfrac{S_A}{S_{\Omega}}$

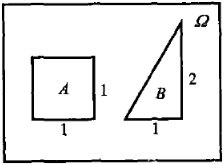


图 1.2.2 落在度量相同的子区域内的等可能性

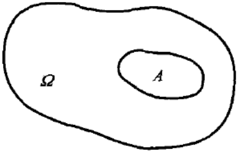


图 1.2.3 几何概率

例1.2.3 蒲丰投针问题(Buffon's needle problem) 平面上画有间隔为d的等距平行线, 向平面任意投掷一枚长为ℓ的针($\ell < d$), 求针与平行线相交的概率.

蒲丰投针问题

解: 以x表示针的中点与最近一条平行线的距离, 又以ϕ表示针与此直线间的交角. 样本空间Ω满足:
$0 \leq x \leq d/2; 0 \leq \varphi \leq \pi$

Ω形成$x - \varphi$平面上的一个矩形, 其面积为: $S_{\Omega} = d\pi/2$

A = "针与平行线相交" 的充要条件是:

$$x \leq \frac{\ell}{2} sin(\varphi).\ \text{(垂直边长)}$$

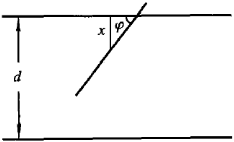


图 1.2.5 蒲丰投针问题

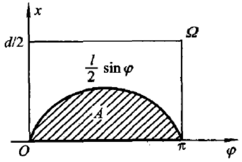


图 1.2.6 蒲丰投针问题中的 Ω 和 A

蒲丰投针问题

针是任意投掷的, 所以这个问题可用几何方法求解得

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^\pi \frac{\ell}{2} sin(\varphi) d\varphi}{d\pi/2} = \frac{2\ell}{d\pi} \text{ (三角函数积分)}$$

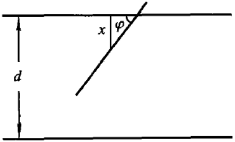


图 1.2.5　蒲丰投针问题

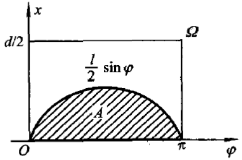


图 1.2.6　蒲丰投针问题中的 Ω 和 A

(三角函数积分:

$$\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = -\cos(\varphi)\Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2)$$

π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知: 长为L的针与平行线相交的概率为: $\dfrac{2\ell}{d\pi}$.
- 而实际去做 N 次试验, 得 n 次针与平行线相交, 则频率为: n/N.
- 用频率代替概率得: $\pi \approx 2\ell N/(dn)$.
- 这种方法称为随机模拟法,也称模特卡罗方法(Monte-Carlo Simulation).

1.2.5 确定概率的主观方法(略)

一件事件的概率是人们根据经验对该事件发生可能性所给出的个人(主观)信念(贝叶斯学派Bayesian school). 这样给出的概率成为**主观概率**.

在计量经济学贝叶斯估计中有应用.

第2次作业

习题1.2中题目1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 23, 27, 28

习题1.3中题目1, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 18, 20, 22

可由概率的公理化定义推导出概率的一系列性质:

- **性质1.3.1** $P(\varnothing) = 0.$
- 注意: 逆不一定成立.

1.3.1 概率的可加性

- **性质1.3.2 (有限可加性)** 若$AB = \varnothing$ (互不相容), 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

  可推广到 n 个互不相容事件: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

- **性质1.3.3 (对立事件公式)** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质1.3.4

- 若A包含B, $A\supset B$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$;
  证明： 若$A\supset B$,则
  $A=(A-B)\cup B\Rightarrow P(A)=P(A-B)+P(B)$;
- 若$A\supset B$, 则 $P(A)\geq P(B)$.

性质1.3.5 对任意两个事件A和B,
$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证明： 因为 $A-B=A-AB$, 且 $AB\subset A$, 所以
$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$;

判断对错

1. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则
$P(A - B) = P(A) - P(B)$

判断对错

1. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则
$P(A - B) = P(A) - P(B)$

错!

判断对错

1. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$

错!

若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则 $P(A-B) = P(A)$, 因为由性质1.3.5, $P(A-B) = P(A) - P(AB)$, 且$P(AB) = 0$

判断对错

1. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则
$P(A-B) = P(A) - P(B)$

错!

若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则
$P(A-B) = P(A)$, 因为由性质1.3.5,
$P(A-B) = P(A) - P(AB)$, 且$P(AB) = 0$

2. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则
$P(A+B) = P(A) + P(B)$

判断对错

1. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

错!

若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则
$P(A - B) = P(A)$, 因为由性质1.3.5,
$P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 且$P(AB) = 0$

2. 若事件A与事件B互不相容, 即$A \cap B = \varnothing$, 则 $P(A + B) = P(A) + P(B)$

错! 事件运算没有定义加法(并, 交, 差, 对立).

性质1.3.6 (证明见后)

- 对任意两个事件A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- 对任意三个事件, 有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$

- 对任意n个事件, 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) \\ & + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \end{aligned}$$

证明: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

证明: 因为 1) $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 2) A与$B - AB$互不相容, 3) $B \supset AB$, 所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

证明: 归纳法: $n=2$成立, 设$n-1$成立,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n-1} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n-1} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-2}P(A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

证明： 对n, 有

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\cup A_n\right)=&P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)+P\left(A_n\right)-P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\cap A_n\right)\\
=&P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)+P\left(A_n\right)-P\left(\left(A_1A_n\right)\cup\left(A_2A_n\right)\cup\ldots\left(A_{n-1}A_n\right)\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n-1}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n-1}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n-1}P(A_iA_jA_k)\\
&+\cdots+(-1)^{n-2}P(A_1A_2\ldots A_{n-1})\\
&+P\left(A_n\right)-P\underbrace{\left(\left(A_1A_n\right)\cup\left(A_2A_n\right)\cup\ldots\left(A_{n-1}A_n\right)\right)}_{\text{n-1项, 运用n-1成立时的展开公式}}\\
=&\ldots\\
=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)\\
&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)
\end{aligned}
$$

1.3.4 概率的连续性(不做重点掌握)

- 本节给出概率连续性的定义.
- 本节给出概率可列可加性的充要条件.
- 因为概率是事件(集合)的函数, 所以先讨论事件(集合)的"极限", 给出事件序列极限的定义.

事件序列的极限

定义1.3.1 $\mathcal{F}$为Ω 的某些子集组成的一个事件域.

若事件域$\mathcal{F}$中任一事件序列$\{F_n\}$满足:
$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
则称$\{F_n\}$ 为**单调不减**事件序列, 其极限事件为

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_n$$

若事件域$\mathcal{F}$中任一事件序列$\{F_n\}$满足:
$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$
则称$\{F_n\}$ 为**单调不增**事件序列, 其极限事件为

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_n$$

定义1.3.2

对$\mathcal{F}$上的概率$P(\cdot)$ (概率是集合函数),

(1) 若对$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\{F_n\}$, 有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称$P(\cdot)$是下连续的(continuous from below).(极限事件的概率=事件概率的极限)

(2) 若对$\mathcal{F}$中任一单调不增的事件序列$\{F_n\}$, 有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称$P(\cdot)$是上连续的(continuous from above). (极限事件的概率=事件概率的极限)

性质1.3.7 (概率的连续性)

- 若$P(\cdot)$是事件域$\mathcal{F}$上的一个概率函数, 则$P(\cdot)$既是下连续的, 又是上连续的.

证明: 见教材

性质1.3.8 (可列可加性的充要条件)

- 若$P(\cdot)$是事件域$\mathcal{F}$上满足: 非负, 正则的概率(集合函数), 则$P(\cdot)$有可列可加性的充要条件是它具有有限可加性和下连续性.

证明: 见教材

例1.3.1

$AB = \varnothing, P(A) = 0.6, P(A \cup B) = 0.8$, 求 B 的对立事件的概率.

解:

例1.3.1

$AB=\varnothing, P(A)=0.6, P(A\cup B)=0.8$, 求 B 的对立事件的概率.

解:由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$
得 $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.8-0.6=0.2$,
所以 $P(\overline{B})=1-0.2=0.8$.

例1.3.2

$P(B) = 0.3, P(A \cup B) = 0.6$, 求 $P(A - B)$.

解:

例1.3.2

$P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$, 求 $P(A-B)$.

解: 因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$, 所以先求 $P(AB)$
由加法公式得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$

利用对立事件

口袋中有$n-1$个黑球, 1个白球, 每次从口袋中随机地摸出一球, 并换入一只黑球. 求第k次取到黑球的概率.

解:

利用对立事件

口袋中有$n-1$个黑球, 1个白球, 每次从口袋中随机地摸出一球, 并换入一只黑球. 求第k次取到黑球的概率.

解: 记A为"第k次取到黑球", 则A的对立事件为"第k次取到白球".

而"第k次取到白球"意味着: "第1次...第$k-1$次取到黑球, 而第k次取到白球"

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

思考题

口袋中有$n-2$个黑球, 2个白球, 每次从口袋中随机地摸出一球, 并换入一只黑球. 求第k次取到黑球的概率.

(hint: 加总多种情况：第k次摸到白球且只有第k次摸到白球, 第k次摸到白球且第1次摸到白球, 第k次摸到白球且第2次摸到白球, 第k次摸到白球且第3次摸到白球...)

例1.3.4

一颗骰子掷4次,求至少出现一次6点的概率.

- **解:**

例1.3.4

一颗骰子掷4次,求至少出现一次6点的概率.

- **解:** 用对立事件进行计算, 记 A="至少出现一次6点", 则 $\overline{A}$ ="从未出现6点", 所求概率为

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177$$

例1.3.5

两颗骰子掷 24 次, 求至少出现一次双6点的概率.

- **解:**

例1.3.5

两颗骰子掷 24 次, 求至少出现一次双6点的概率.

- **解:** 记 B = "至少出现一次双6点", 则 $\overline{B}$ ="从未出现双6点",
- 则所求概率为

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.4914$$

利用对立事件和加法公式

从 $1, 2, \cdots\cdots, 9$中有返回地取n次, 求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.

解:

利用对立事件和加法公式

从 1, 2, ⋯⋯, 9中有返回地取n次, 求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.

解: 因为 "乘积能被10整除" 意味着:

- "取到过5"(记为A) 且 "取到过偶数" (记为B).
- 因此所求概率为 $P(AB)$.
- 利用对立事件公式, 德莫根公式和加法公式

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= 1 - P(\overline{AB}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}\,\overline{B}) \\
&= 1 - \frac{8^n}{9^n} - \frac{5^n}{9^n} + \frac{4^n}{9^n}
\end{aligned}
$$

利用对称性

甲掷硬币$n+1$次, 乙掷n次. 求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率. (首先猜想答案)

解:

利用对称性

甲掷硬币$n+1$次, 乙掷n次. 求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率. (首先猜想答案)

解: 记事件 甲$_{正}$="甲掷出的正面数",乙$_{正}$="乙掷出的正面数". 甲$_{反}$="甲掷出的反面数",乙$_{反}$="乙掷出的反面数". (所谓的对称性是指事件"甲掷出反面数大于乙掷出反面数"的概率与事件"甲掷出正面数大于乙掷出正面数"的概率是相同的, 因为这两个问题是对称的.)

$$
\begin{aligned}
P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) &= P(n+1-\text{甲}_{\text{反}} > n-\text{乙}_{\text{反}}) \\
&= P(\text{甲}_{\text{反}} - 1 < \text{乙}_{\text{反}}) = P(\text{甲}_{\text{反}} \le \text{乙}_{\text{反}}) \\
&= 1 - P(\overline{\text{甲}_{\text{反}} \le \text{乙}_{\text{反}}}) \\
&= 1 - P(\text{甲}_{\text{反}} > \text{乙}_{\text{反}}) \\
&= 1 - P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) \quad (\text{对称性})
\end{aligned}
$$

所以 $2P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) = 1$, 由此得 $P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) = 1/2$

n个人, n顶帽子, 任意取, 至少一个人拿对自己帽子的概率.

记 A_i = "第i个人拿对自己的帽子", $i = 1, ..., n$.

求 $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$.

用加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1A_2...A_n)$$

配对模型(续)

由于:

- $P(A_i) = 1/n$,
- $P(A_iA_j) = 1/n(n-1)$,
- $P(A_iA_jA_k) = 1/n(n-1)(n-2)$,
- ...
- $P(A_1A_2...A_n) = 1/n!$

所以:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = n\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \to 1 - e^{-1}$$

第2次作业

习题1.2中题目1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 23, 27, 28

习题1.3中题目1, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 18, 20, 22

知道某事件发生的条件下, 另一事件发生的概率.

Motivation 1: 计量经济学中核心概念之一

Motivation 2:

1) 10个人摸彩, 有3张中彩.

- 问: 第1个人中彩的概率为多少? $P(A) = 3/10$
- 第2个人中彩的概率为多少? $P(B) = 3/10$

2) 10个人摸彩, 有3张中彩.

- 问: 已知第1个人摸中, 第2个人中彩的概率为多少?

$$P(B|A) = 2/9 = \frac{C_3^2/C_{10}^2}{3/10} = P(AB)/P(A)$$

1.4.1条件概率的定义

定义1.4.1 设事件A与B是样本空间Ω中的两个事件, 若 $P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为"在B发生的条件下, A的条件概率", 简称条件概率.

条件概率$P(A|B)$的计算

- 1) 缩减样本空间: 将Ω缩减为$\Omega_B = B$ (如motivation中的例子).
- 2) 用定义: $P(A|B) = P(AB)/P(B)$.

例1.4.1

10个产品中有7个正品, 3个次品, 从中不放回地抽取两个, 已知第一个取到次品, 求第二个取到正品的概率.

解: 设A= {第一个取到次品}, B= {第二个取到正品},

解法1: 缩减样本空间, 易知概率为$7/9$

解法2: 用条件概率定义

$$P(B|A) = P(AB)/P(A) = \frac{C_3^1 C_7^1 / A_{10}^2}{3/10}$$

性质1.4.1 (条件概率是概率): 条件概率 $P(A|B)$满足概率的三条公理. 即若设$P(B) > 0$, 则

1) $P(A|B) \geq 0, A \in \mathcal{F}$ (用定义证明)
2) $P(\Omega|B) = 1$ (用定义证明)
3) 若 $\mathcal{F}$ 中的 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 互不相容,
则$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$.

证明: 若 $\mathcal{F}$ 中的 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 互不相容,
则$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$.

因为$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 互不相容, 所以 $A_1B, A_2B, \ldots, A_nB, \ldots$ 也互不相容, 故

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{P\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_nB)\right)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_nB)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$$

因为条件概率是概率, 所以条件概率具有概率的一切性质. 由此得:

- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$
- 若 A 与 B 互不相容, 则 $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

注意点

- $P(\Omega|B) = 1$;
- $P(B|\Omega)$一般不等于 1;
- $P(A|\Omega) = P(A)$;
- $P(A|A) = 1$.

(1) 设$P(B) > 0$, 且$A \subset B$, 则下列必然成立的是( )

① $P(A) < P(A|B)$ ② $P(A) \leq P(A|B)$

③ $P(A) > P(A|B)$ ④ $P(A) \geq P(A|B)$

课堂练习

(1) 设$P(B) > 0$, 且$A \subset B$, 则下列必然成立的是( )

① $P(A) < P(A|B)$ ② $P(A) \leq P(A|B)$

③ $P(A) > P(A|B)$ ④ $P(A) \geq P(A|B)$

解: ②

课堂练习

(1) 设$P(B) > 0$, 且$A \subset B$, 则下列必然成立的是( )

① $P(A) < P(A|B)$ ② $P(A) \leq P(A|B)$

③ $P(A) > P(A|B)$ ④ $P(A) \geq P(A|B)$

解: ②

(2) $P(A) = 0.6, P(A \cup B) = 0.84, P(\Omega - B|A) = 0.4$, 则 $P(B) =$( ).

课堂练习

(1) 设$P(B) > 0$, 且$A \subset B$, 则下列必然成立的是( )

① $P(A) < P(A|B)$ ② $P(A) \leq P(A|B)$

③ $P(A) > P(A|B)$ ④ $P(A) \geq P(A|B)$

解: ②

(2) $P(A) = 0.6, P(A \cup B) = 0.84, P(\Omega - B|A) = 0.4$, 则 $P(B) =$( ). **解: 0.6**

条件概率的运算

- 乘法公式;
- 全概率公式;
- 贝叶斯公式.

1.4.2 乘法公式

性质1.4.2

(1) 若 $P(B)>0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$;

若 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

(2) 若 $P(A_1A_2...A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$$

乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.

乘法公式的应用

例: 一批零件共有100个, 其中10个不合格品. 从中一个一个不返回取出, 求第三次才取出不合格品的概率.

解: 记 A_i ="第i次取出的是不合格品", B_i ="第i次取出的是合格品", 目的求 $P(B_1B_2A_3)$

用乘法公式

$$P(B_1B_2A_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(A_3|B_1B_2) = \frac{90}{100}\frac{89}{99}\frac{10}{98}$$

全概率公式用于求复杂事件的概率.

性质1.4.3 若事件$B_1, B_2, ..., B_n$ 是样本空间Ω的一组分割, 即$B_1, B_2, ..., B_n$互不相容, 且$\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, 如果 $P(B_i) > 0$, 则对任一事件A, 有

$$P(A) = P(A\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来"分割"样本空间.
- 全概率公式最简单的形式:
  $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

证明1.4.3 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

证明:因为

$$A=A\Omega=A\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$$

且 $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ 互不相容, 故

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$$

再由乘法公式: $P(AB)=P(B)P(A|B)$, 上式得证.

例1.4.2

设10 件产品中有 3 件不合格品, 从中不放回地取两次, 每次一件, 求取出的第二件为不合格品的概率.

解: 设 A ="第一次取得不合格品", B ="第二次取得不合格品".

由全概率公式得:

$$\begin{aligned} P(B) =& P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\ =& (3/10) \times (2/9) + (7/10) \times (3/9) = 3/10 \end{aligned}$$

摸彩模型

n 张彩票中有一张中奖, 从中不返回地摸取, 记 A_i为"第i次摸到中奖券", 则

(1) $P(A_1) = 1/n$.
(2) 可用全概率公式计算得 $P(A_2) = 1/n$.
(3) 可用归纳法计算得 $P(A_i) = 1/n$, $i = 1, 2, ..., n$.

当n 张彩票中有 k张中奖, $P(A_i) = k/n$, $i = 1, 2, ..., n$.

结论: 不论先后, 中彩机会是一样的.

例1.4.6 保险公司认为投保人可以分为两类人: 一类为容易出事故者, 一类为安全者. 统计表明: 一个易出事故者发生事故的概率为0.4, 安全者发生事故的概率为0.1. 若假定第一类人占所有投保人比例为20%, 现有一个新的投保人投保此保险, 问该投保人发生事故的概率有多大.

$$
\begin{aligned}
P(A) =& P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\
=& 0.2 \times 0.4 + 0.8 \times 0.1 = 0.16
\end{aligned}
$$

甲口袋有a只白球, b只黑球; 乙口袋有n只白球, m只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋, 然后从乙口袋中任取一球, 求从乙口袋中取出的是白球的概率.

解:

全概率公式的习题

甲口袋有a只白球, b只黑球; 乙口袋有n只白球, m只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋, 然后从乙口袋中任取一球, 求从乙口袋中取出的是白球的概率.

解:

概率为:

$$\frac{a}{a+b} \times \frac{n+1}{n+m+1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{n}{n+m+1}$$

1.4.4 贝叶斯公式

- 乘法公式是求"几个事件同时发生"的概率;
- 全概率公式是求"最后结果"的概率;
- 贝叶斯公式是求后验概率的公式(已知"结果", 求"原因"的概率).

已知"结果", 求"原因"

某人从甲地到乙地, 乘飞机, 火车, 汽车迟到的概率分别为0.1, 0.2, 0.3, 他等可能地选择这三种交通工具. 若已知他最后迟到了, 求他分别是乘飞机, 火车, 汽车的概率.

$$(1/6, 2/6, 3/6)$$

贝叶斯(Bayes)公式

性质1.4.4 若事件$B_1, B_2, ..., B_n$是样本空间Ω的一组分割,且$P(A) > 0,\ P(B_i) > 0$,则

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, 2, ..., n$$

注意点

1) $B_1, B_2, ..., B_n$可以看作是导致A发生的原因;

2) $P(B_j|A)$是在事件A发生的条件下, 某个原因B_j发生的概率, 称为 "**后验(*ex post*)概率**";

3) 贝叶斯(Bayes)公式又称为"**后验概率公式**"或"逆概公式";

4) 称$P(B_j)$ 为"**先验(*ex anti*)概率**".

4) 通过事件A的发生, 人们可以更新对B_j的发生概率的信念, 这是贝叶斯推断的基本原理.

例1.4.3 某商品由三个厂家供应, 其供应量为: 甲厂家是乙厂家的2倍; 乙, 丙两厂相等. 各厂产品的次品率为2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品, 发现是次品, 求它是甲厂生产的概率?

解:

例1.4.3 某商品由三个厂家供应, 其供应量为: 甲厂家是乙厂家的2倍; 乙, 丙两厂相等. 各厂产品的次品率为2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品, 发现是次品, 求它是甲厂生产的概率?

解: 用1, 2, 3分别记甲, 乙, 丙厂,设 A_i ="取到第i 个工厂的产品", B="取到次品",

由题意得: $P(A_1)=0.5, P(A_2)=P(A_3)=0.25; P(B|A_1)=P(B|A_2)=0.02, P(B|A_3)=0.04.$

由贝叶斯公式得:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=0.4$$

第3次作业

习题1.4中题目2, 4, 8, 9, 11, 14, 17, 18, 20, 26

习题1.5中题目1, 2, 8, 12, 18, 23, 24, 25

事件的独立性

- 直观说法: 对于两个随机事件, 若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生, 则这两事件是独立的.
- $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ (事件B发生的概率不影响事件A发生的概率)
- $\Leftrightarrow P(AB)/P(B) = P(A|B) = P(A)$
- $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

定义1.5.1 若事件 A 与 B 满足: $P(AB)=P(A)P(B)$, 则称事件A与事件B相互独立, 简称A与B独立.

A, B为两个事件, 若 $P(A)>0$, 则A 与B 独立等价于 $P(B|A)=P(B)$.

性质1.5.1 若事件A与B独立, 则 A 与$\overline{B}$独立, $\overline{A}$ 与 B独立, $\overline{A}$ 与$\overline{B}$独立.

证明:

$$\begin{aligned}
P(A\overline{B}) =& P(A) - P(AB) \quad (\text{因为} A\overline{B} = A - AB \text{且} A \supset AB) \\
=& P(A) - P(A)P(B) \\
=& P(A)(1 - P(B)) \\
=& P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}$$

*因为A与B相互独立, 所以A不影响B的发生, 也不影响B的不发生

事件独立性的判断

可根据定义判断事件的独立性.

实际应用中, 往往根据经验来判断两个事件的独立性. 独立事件举例: 返回抽样, 甲乙两人分别工作, 重复试验等.

定义1.5.2 对于A, B, C三个事件, 称满足:
$P(AB)=P(A)P(B)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$
为A, B, C**两两独立**.

若还有 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$则称A, B, C**相互独立**.

定义1.5.3 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$满足: 两两独立, 三三独立, ..., nn 独立, 则称$A_1, A_2, \ldots, A_n$**相互独立**.

一些结论

若A, B, C 相互独立, 则

- $A \cup B$ 与 C 独立,
- $A \cap B$与 C 独立,
- $A - B$ 与 C 独立.

证明: $A \cup B$ 与 C 独立

$$
\begin{aligned}
P((A \cup B) \cap C) =& P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\
=& P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
=& (P(A) + P(B) - P(A)P(B))P(C) \\
=& P((A \cup B))P(C)
\end{aligned}
$$

若只有两两独立, 则上述结论不成立. 思考如何证明$A - B$ 与 C 独立? ($A - B = A\overline{B}$)

例1.5.1

例1.5.1 两射手独立地向同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.9 和 0.8, 求目标被击中的概率.

解: 设 A ="甲中", B= "乙中", C= "目标被击中", 所以

解法i)

$$
\begin{aligned}
P(C) = P(A \cup B) =& P(A) + P(B) - P(AB) \\
=& P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\
=& 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 \\
=& 0.98.
\end{aligned}
$$

解法ii) 用对立事件公式

$$
\begin{aligned}
P(C) =& P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - (1 - 0.9)(1 - 0.8) \\
=& 1 - 0.02 = 0.98.
\end{aligned}
$$

例1.5.2 甲, 乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.7, 现已知目标被击中, 求它是甲击中的概率.

解:设 A="甲中", B="乙中", C="目标被击中", 所以

$$\begin{aligned} P(A|C) &= P(AC)/P(C) \\ &= P(A)/[P(A)+P(B)-P(A)P(B)] \\ &= 0.6/0.88 \\ &\approx 0.68 \end{aligned}$$

例1.5.3 两射手轮流对同一目标进行射击, 甲先射, 谁先击中则得胜. 每次射击中,甲, 乙命中目标的概率分别为α 和 β, 求甲得胜的概率.

解: 因为$P(\text{甲胜}) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)P(\text{甲胜})$

所以 $P(\text{甲胜}) = \alpha/[(1-\alpha)(1-\beta)]$.

例1.5.4 口袋中有3个白球, 5个黑球, 甲, 乙两人轮流从口袋中有返回地取一球, 甲先取. 谁先取到白球为胜, 求甲胜的概率.

解: $P(\text{甲胜}) = 3/8 + (5/8)(5/8)P(\text{甲胜})$

所以 $P(\text{甲胜}) = 8/13$.

1.5.3 试验的独立性 (Independence of Trails)

定义1.5.4 若试验E_1的任一结果(事件)与试验E_2的任一结果(事件)都是相互独立的事件, 则称这**两个试验相互独立**, 或称**独立试验**.

类似地, 若试验$E_1, E_2, ..., E_n$的任一结果(事件)都是相互独立的事件, 则称这n**个试验相互独立**. 如果者n个独立实验还是相同的, 则称为n**重独立重复试验**.

n 重伯努里试验 (Bernoulli trial)

伯努里试验: 若某种试验只有两个结果 (成功, 失败; 黑球, 白球; 正面, 反面), 则称这个试验为伯努里试验.

在伯努里试验中, 一般记"成功"的概率为p.

n **重伯努里试验:** n次独立重复的伯努里试验.

n 重伯努里试验成功的次数

在n重伯努里试验中, 记成功的次数为X.

X 的可能取值为: $0, 1, ..., n$.

X 取值为 k的概率为:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

第3次作业

习题1.4中题目2, 4, 8, 9, 11, 14, 17, 18, 20, 26

习题1.5中题目1, 2, 8, 12, 18, 23, 24, 25