2015 级数学分析(I)期中试题

姓名：______________ 班级：__________ 学号：__________

考试日期：2015年11月21日

注意：凡是使用导数，或者使用无穷小替换而没有进行证明的答案，都不得分。

1. （15 分）请计算以下极限（提示：你可能需要证明恒等式：$\cosh x - 1 = 2\sinh^2\dfrac{x}{2}$）：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cosh\frac{a}{n}\right)^{n^2} = ?$$

2. （15 分）请证明：对任意的正实数 $M, \epsilon > 0$, 都有：

$$x^M = o(\mathrm{e}^{\epsilon x}) \quad (x \to +\infty).$$

3. （13 分）求证：对定义在数轴 $\mathbf{R}$ 上的任意函数 $f(x)$,

$$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

4. （15 分）设非负数列 $\{a_n\}$ 有上界并且记 $\limsup_{n\to\infty} a_n := l$. 请证明：$l \in \mathbf{R}$ 并且 $l \geq 0$. 请问：是否一定有 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$？请证明你的结论或者举出反例。

5.（10 分）如果我们对定义在 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数进行了如下修改：

$$\tilde{R}(x) := \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q},\ q > 0,\ \gcd(p,q) = 1; \\ x, & x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

其中记号 gcd 表示最大公约数（greatest common divisor）。请问 $\tilde{R}(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否连续？请证明你的结论。如果有间断点，请证明间断点的类型。

6. （12 分）请用有限覆盖定理，证明 Cauchy 基本列一定是收敛列。（提示：用有限覆盖定理，证明在某个有限闭区间内，一定存在某个极限点, 使得此基本列中，必有一子列收敛于此极限点。）

7. （10 分）请计算极限（无计算步骤的答案不得分）：

$$\lim_{x\to 0+} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{e}^x - 1\right)^{\frac{1}{[1+\ln(1+x)]^3-1}} = ?$$

8. （10 分）请问，如果 $\alpha \in (0,1)$, 函数 $y = x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否一定一致连续？请证明你的结论或者举出反例。（提示：使用 $x+h$ 与 x, 或者 $s_n + \dfrac{1}{n}$ 与 s_n 的形式，论证起来会比较简单。）