第一章
随机事件与概率

第二节

概率的定义及其确定方法

Overview

概率的定义

- 主观定义:

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.
- 频率定义:

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.
- 频率定义: 事件 A 在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.
- 频率定义: 事件 A 在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.
- 古典定义:

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.
- 频率定义: 事件 A 在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.
- 古典定义: 如果一个随机试验所包含的单位事件是有限的，且每个单位事件发生的可能性均相等.

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.
- 频率定义: 事件 A 在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.
- 古典定义: 如果一个随机试验所包含的单位事件是有限的，且每个单位事件发生的可能性均相等.
- 几何定义:

概率的定义

- 主观定义: 事件 A 出现的可能性大小.
- 频率定义: 事件 A 在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.
- 古典定义: 如果一个随机试验所包含的单位事件是有限的, 且每个单位事件发生的可能性均相等.
- 几何定义: 推广到无限个试验结果.

概率的公理化定义

- 非负性公理：$P(A) \geq 0$;

概率的公理化定义

- 非负性公理：$P(A) \geq 0$;
- 正则性 (规范性) 公理：$P(\Omega) = 1$;

- 非负性公理：$P(A) \geq 0$;
- 正则性 (规范性) 公理：$P(\Omega) = 1$;
- 可列可加性公理：若 $A_1, , A_2, ..., A_n ...$ 互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_i)$

说明：

排列与组合公式

- 排列组合是什么？

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.
- 全排列:$P_n^n = n!$

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.
- 全排列:$P_n^n = n!$
- $0! = 1$.

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.
- 全排列:$P_n^n = n!$
- $0! = 1.$
- 排列：$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)...(n-r+1)$

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.
- 全排列:$P_n^n = n!$
- $0! = 1.$
- 排列：$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)...(n-r+1)$
- 重复排列：n^r

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.
- 全排列:$P_n^n = n!$
- $0! = 1.$
- 排列：$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)...(n-r+1)$
- 重复排列：n^r
- 组合： $C_n^r = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_n^r}{r!}$

排列与组合公式

- 排列组合是什么？从 n 个元素中任取 r 个元素，求取法数.
- 排列讲次序，组合不讲次序.
- 全排列:$P_n^n = n!$
- $0! = 1.$
- 排列：$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)...(n-r+1)$
- 重复排列：n^r
- 组合： $C_n^r = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_n^r}{r!}$
- 重复组合： $C_{n-r+1}^r = \left(\begin{array}{c} n+r-1 \\ r \end{array} \right)$

排列与组合公式

加法原理

完成某件事情有 n 类途径, 在第一类途径中有 m_1 种方法, 在第二类途径中有 m_2 种方法, 依次类推, 在第 n 类途径中有 m_n 种方法, 则完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ 种不同的方法.

乘法原理

完成某件事情需先后分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种方法, 第二步有 m_2 种方法，依次类推，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ 种不同的方法.

确定概率的频率方法

- 随机试验可大量重复进行.
- 进行 n 次重复试验，记 $n(A)$ 为事件 A 的频数，称 $f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$ 为事件 A 的频率.
- 频率 $f_n(A)$ 会稳定于某一常数 (稳定值).
- 用频率的稳定值作为该事件的概率.

古典概型

若一个随机试验 (Ω, F, P) 具有以下两个特征：

1. 有限性。样本空间的元素 (基本事件) 只有为有限个，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$;
2. 等可能性。每个基本事件发生的可能性是相等的，即 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n)$
   则称这类随机试验的数学模型为古典概型。
   则事件 A 的概率为: $P(A) = A$ 中样本点的个数 / 样本点总数

确定概率的古典方法

例 1.2.1

n 个人围一圆桌坐，求甲、乙两人相邻而坐的概率 $(n > 2)$

例 1.2.1

n 个人围一圆桌坐，求甲、乙两人相邻而坐的概率 $(n > 2)$
解：考虑甲先坐好，则乙有 $n-1$ 个位置可坐，而“甲乙相邻”只有两种情况，所以

$$P(A) = 2/(n-1)$$

例 1.2.2

n 个人坐成一排，求甲、乙两人相邻而坐的概率.(注意：请与上一题作比较)

例 1.2.2

n 个人坐成一排，求甲、乙两人相邻而坐的概率.(注意：请与上一题作比较)

解：

- 先考虑样本空间的样本点数：甲先坐、乙后坐，则共有 $n(n-1)$ 种可能.
- 甲在两端，则乙与甲相邻共有 2 种可能.
- 甲在中间 $(n-2)$ 个位置上，则乙左右都可坐，所以共有 $2(n-2)$ 种可能。由此得所求概率为：

$$\frac{2+2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

几何概型

若:

1. 可度量性。样本空间 Ω 充满某个区域，其度量 (长度、面积、体积) 为 S_Ω
2. 等可能性。落在 Ω 中的任一子区域 A 的概率，只与子区域的度量 S_A 有关, 而与子区域的位置无关

则事件 A 的概率为:$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$

几何概型的例子

例 1.2.3 蒲丰投针问题

平面上画有间隔为 d 的等距平行线，向平面任意投掷一枚长为 l 的针，求针与平行线相交的概率.

解:

1. 以 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离，又以 φ 表示针与此直线间的交角.
2. 易知样本空间 Ω 满足：$0 \le x \le d/2$; $0 \le \varphi \le \pi$
3. Ω 形成 $x-\varphi$ 平面上的一个矩形，其面积为：$S_\Omega = \frac{d}{2}\pi$
4. $A=$ “针与平行线相交”的充要条件是: $x < \frac{l}{2}\sin(\varphi)$
5. 针是任意投掷的，所以这个问题可用几何方法求解得

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin(\varphi)d\varphi}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2l}{d\pi}$$

π 的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为 l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做 N 次试验，得 n 次针与平行线相交，则频率为: n/N
- 用频率代替概率得: $\pi \approx 2lN/(dn)$
- 历史上有一些实验数据.

作业

课本 P30-31: 1, 4, 6, 11, 14, 15, 22, 24, 25