数学分析期末复习

漆毅

一、实数

- 完备性公里;
- 确界原理;
- 闭区间套定理;
- 有限覆盖定理;
- Bolzano-Weierstrass 原理；
- 可数集与不可数集

二、极限

1. 数列极限

- $\varepsilon - N$ 定义，唯一性、有界性;
- 四则运算;
- 保序性与夹逼定理；
- 存在准则
    - Cauchy 收敛准则；
    - 单调有界准则 $\Rightarrow$ 重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$；
    - Bolzano-Weierstrass 引理
- 上极限与下极限、性质

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{完备性公里} & \Rightarrow & \text{闭区间套定理} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{确界原理} & & \text{有限覆盖定理} & \Rightarrow & \text{Cauchy 收敛原理} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{单调有界准则} & & \text{Bolzano-Weierstrass 原理} & & \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & \text{Bolzano-Weierstrass 引理} & &
\end{array}
$$

2. 函数极限

- $\varepsilon - \delta$ 定义，唯一性、局部有界性;
- 四则运算;
- 保序性与夹逼定理 $\Rightarrow$ 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;
- 存在准则
  - Cauchy 收敛准则；
  - 单调函数极限存在准则；
- 极限的邻域刻画-关于基的极限；
- 复合函数的极限;
- 渐近行为比较 - 无穷小、无穷大比较

三、连续函数

- 连续的 $\varepsilon-\delta$ 定义、邻域定义;
- 四则运算;
- 复合函数的连续性；
- 间断点及其分类; 单调函数的间断点；
- 闭区间上函数的性质
  - 零点存在定理 $\Leftrightarrow$ 介值定理 (利用闭区间套定理证明)；
  - 最值定理 (利用有限覆盖定理证明);
  - Cantor 定理 (利用有限覆盖定理证明)
- 一致连续的定义

四、一元微分学

1. 导数与微分

- 函数的导数与微分的概念、几何意义;
- 基本的导数公式与微分公式;
- 基本的微分法则
  - 四则运算;
  - 复合函数微分法;
  - 反函数微分法;
  - 隐函数微分法 $\to$ 对数求导法；
- 高阶导数与高阶微分

2. 微分学基本定理

- Fermat 引理;
- Rolle 定理;
- Lagrane 中值定理;
- Cauchy 中值定理；
- Taylor 公式

3. 微分学的应用

- L'Hospital 法则; (数列极限可转化为函数极限求解)
- 单调性；(可证明不等式、讨论极值)
- 极值; (可求最值，证明不等式)
- 凸性; (可证明不等式)
- 函数作图 - 渐近线
  - 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线；
  - 若当 $x \to \infty$ 时，$f(x) = ax + b + o(1)$, 则 $y = ax + b$ 为 $y = f(x)$ 的一条渐近线；

4. 原函数

- 原函数与不定积分的概念、性质
- 基本不定积分公式
- 凑微分法： $\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$
- 换元法： $\displaystyle\int f(x)dx \overset{\varphi(t)}{=} \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$
- 分部积分法: $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$
  - 被积函数为多项式和三角函数或指数函数的乘积时，令多项式为 u;
  - 被积函数为多项式和反三角函数或对数函数的乘积时，令多项式为 v
  - 建立循环式

- 有理函数的不定积分：化为多项式与简单的部分分式求不定积分；
- 可化为有理函数积分的不定积分
    - 三角有理式的不定积分：$\int R(\cos x, \sin x)dx$;
    - 简单无理式的不定积分：$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$;
    - 简单无理式的不定积分：$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$;
- 在区间内连续的函数一定存在原函数，但原函数不一定都是初等函数！

五、2010 级试题

一、　判断题（15 分，每小题 3 分。对的打 √，错的打 ×）

1、数列有界的充分必要条件是它的任何子列都有其收敛的子列。

2、若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，$g(x)$ 在 x_0 处不可微，则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处一定不可微。

3、若 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内单调，则 $f'(x)\in C(a,b)$。

4、若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内连续。

5、若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=A\neq 0$，则 x_0 一定是 $f(x)$ 的极值点。

二、 计算题（32 分，每小题 8 分）

1、求函数 $y = x^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数，并写出它在点 $(2/\pi, 2/\pi)$ 处的切线方程。

2、设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 确定的二阶可微的隐函数，求它的二阶微分

d^2y。

3、计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\ln x) - \cos(x-1)}{\sin^2(x-1)}$。

4、已知 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ ax + b, & x \le 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可微，试确定常数 a, b。

三、 （15 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调性、凸性、极值与拐点、渐近线，并绘出它的图像。

四、 （10 分）证明：$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x},\quad x>0$。

五、 （10 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可微，并且 $f(0)=0$。证明

（1）当 $f'(0)\neq 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 发散；

（2）当 $f'(0)=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛。

六、（10 分）证明：

（1）当 $n \geq 2$ 时方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots x^2 + x = 1$ 在区间 $(0,1)$ 内有而且只有一个根 x_n；

（2）数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限值。

七、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导，$f(a)f'(a) \geq 0$，并且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$。证明：至少存在一个 $\xi \in [a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

六、2012 级试题

一、（15 分，每小题 3 分）判断下列命题的正误（在正确命题面打 √，错误命题后面打 ×）

1、严格单调函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是其反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $f(x_0)$ 处可导。[ ]

2、若 $f(x)$ 在区间 I 上可微，则其导函数 $f'(x)$ 在区间 I 上不可能有第一类间断点。[ ]

3、若 $f(x)$ 的开区间 I 内的凸函数，则 $f(x)$ 在开区间 I 内连续。[ ]

4、若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内连续。[ ]

5、单调函数的间断点最多只有可数多个。[ ]

二、（5 分） 给出“ $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续”的 $\varepsilon_0-\delta$ 定义。

四、 计算（28 分，每小题 7 分）

1、求函数 $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a})$ 的导数 y'。

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)-\ln(1+x^2)}{x^2\sin x}$

3、$\int x\arctan x dx$

4、$\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

五、 （8分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ \beta, & x\le 0. \end{cases}$ 试问当α的在什么范围取值，β为何值时函数$f(x)$的导函数$f'(x)$在$x=0$处连续？

六、 （7分）求函数$f(x)=e^{x}-x\sin x$在$x=0$处的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式。

七、 （15 分）（1）作函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ 的图像，其中 $a>0$ 为常数；

（2）证明：设 $x_1>0$， $x_{n+1}=f(x_n)=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right), n=1,2,L$ ，则

$$x_{n+1}<x_n, n=2,3,L$$

（3）证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求极限值；

（4）过曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x_n, f(x_n))$ 作水平直线，与直线 $y=x$ 的交点坐标为

$(f(x_n), f(x_n))=(x_{n+1}, x_{n+1})$，请在你所作函数图像中画出直线 $y=x$，并随便指定一个 $x_1>0$，在 x 轴上标出点列 $\{x_n\}$ 的前三项（但愿你能明白些什么）。

八、　(14 分) 证明下列各题

1、当 $0<x<1$ 时，$x^n(1-x)<\dfrac{1}{ne}$。

2、设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)f_+'(0)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则必存在 $\xi\in[0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

九、　(附加题，10 分) 用 Bolzano-Weierstrass 引理（每个有界数列必有收敛子列）证明 Cauchy 数列一定收敛。