一、名词解释

1. 图的联通分量：若一个图中任何两个节点间有路(边)相通，称此图为连通图；

   定义连通分量：若图G的节点子集满足如下两个条件：①子集中任意两个节点均有路径相连；②该子集不是其他任何满足条件①的子集的一部分，则称该子集为图G的一个联通分量。

2. 桥与捷径

   桥：在一个图中，已知 A 和B相连,若去掉连接A和B的边导致A和B**分属不同的连通分量**，则该边称为桥(bridge)

   捷径：若边A-B的端点A和B**没有共同的朋友**,则称边A-B为捷径(local bridge-局部桥).换句话说,删去该边导致A到B的距离增大到2以上(不含2).

   跨度span: 捷径的跨度为该边两端点在没有该边的实际距离。

   PS：若一条边是捷径，则一定不是三元闭包关系中的任何一条边

3. 三元闭包与社团闭包和会员闭包的关系

   社团闭包：两个个体之间因为参与同一个社团而有建立链接的倾向——是选择原理的体现

   会员闭包：个体会倾向于参加朋友已经参加的社团——是社会影响的体现

   分别概括了个体与个体、个体与社团之间关系演变倾向的规律

4. GSP：Generalized Second-Price Auction（广义次价拍卖），设n个广告位，按点击率r1, r2, ..., rn，递减排列n个广告主，对每个点击有不同的出价，递减排列，b1, b2, ..., bn沿着“次价拍卖”的自然思路将r1分给第一个广告主，按b2收取点击费将r2分给第二个广告主，按b3收取点击费 ...将rn分给第n个广告主，收取某个门槛点击价格（可以是0）

5. 清仓价格：如果一组价格形成的偏好卖家图有完美匹配，那么它就是一组市场清仓价格。（价格完美解决了买家对于物品/服务购买的矛盾的一组价格，它使得每个物品/服务有不同的买家）

6. 三元闭包：在一个社交圈内，若两个人有一个共同的朋友，则这两人在未来成为朋友的可能性就会提高，这就是三元闭包原则。（或者说两个人的共同朋友越多，则他们成为朋友的可能性越高）

7. 进化稳定策略：一种由基因决定的策略，一旦在一个种群中盛行，则倾向于保持下去。

   形式化地，我们如下概括这些基本定义：

   - 种群里一个生物体的适应性是指它从和群中一个随机数量的生物体互动得到的预期收益。
   - 策略T在x 程度上入侵策略S，指的是在总体中有x占比的生物体采用策略T，1—x 占比采用策略S，其中x是一个小于1的正数。
   - 最后，假设存在一个正数y，当任何其他策略T以x<y程度入侵策略S时，采用策略S的个体的适应性严格高于采用策略T的个体，则称策略S是进化稳定的。

8. 次价拍卖：次价密封投标拍卖也被称为维克瑞拍卖（Vickrey auctions）。竞拍者同时向卖方提交密封报价；出价最高者赢得商品但以第二高出价购买该商品。

9. 网络效应：在直接利益驱使下，一个人可能会选择时使自己的行为与他人的行为一致起来，而不管自己的决策是否最好。一旦成为最流行的事物，使用它就注定会提供附加价值。这便是网络效应（network effect）。网络效应会放大那些优秀的技术和产品的作用，而且一旦某种商品具有网络效应，要取代他就很难。

10. 纳什议价解：双方满意于均分 s = 1-x-y（x,y在[0,1]之间,s>=0）对于A：x+s/2 = (x+1-y)/2对于B：y+s/2 = (y+1-x)/2

11. 平衡结果：给定网络中其余部分为每个节点提供的最好外部选项，一个交换(由匹配和节点价值组成)称为平衡，对匹配中的每条边上的价值划分都满足纳什议价解

12. VCG：VCG原则：每个个体支付他对其余所有个体造成的总"损失"。也就是说，每个个体所支付的价格等于当这个个体不出现时，其他所有个体获取的价值增量总和。它基于Clarke和Groves的工作，推广了Vickrey的单项次价拍卖。
13. 结构洞：结构洞看起来就是存在于网络中两个没有紧密联系的节点集合之间的“空地”，没有严格的数学定义
14. 聚集系数与邻里重叠度（+计算）：

    聚集系数（也叫聚类系数，clustering coefficient）

    顶点的聚类系数：一个顶点，它有K个邻居顶点,这k个邻居顶点之间实际存在的边的个数比上这k个邻居顶点最多可能存在的边的个数($最多边数 = C_k^2 = \frac{k\times(k-1)}{2}$)，计算：$cc_v = \frac{实际边数}{最多边数}$，可以表示这个点的任意邻居仍是邻居的概率

    图的聚类系数：所有顶点聚类系数的平均值，计算：$cc_G = \frac{\sum cc_v}{n_v}$

    可以将一条边的强度数值化，得邻里重叠度：将强度排序,或者该边在所有边中的占据前百分之几，计算：$邻里重叠度 = \frac{与A、B均为邻居的节点数}{与A或B至少一个为邻居的节点数}$

    PS：捷径是邻里重叠度为0的边
15. 二部图和归属网络

    归属网络：描述人们相遇的机会；考虑一种特别网络， 其中包含人和情景两类节点。用图来表示一群人参与一组社会焦点的情况，每个人对应一个节点，每种活动也是一个节点，如果个体A参与活动X，我们就在个体A与活动X之间建立连接。这样的图称为归属网络（affiliation network），因为它表明个体对社团的归属关系。

    二部图：是指它所有的节点可以被分成两个组，每一条边所连接的两个节点分别在不同的组中。

    归属网络是二部图的一个例子。

二、方法

1. 图的笛卡尔积、直积、合成图计算

    对于两个图$G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$，有顶点集合$V_1 \times V_2 = \{(x, y)|x \in V_1, y \in V_2\}$，对于$U = (u_1, u_2), V = (v_1, v_2)$，U,V在顶点集合中

    - 笛卡尔积图：当u1=v1且u2与v2在G2中相邻，或u2=v2且u1与v1在G1中相邻时，连接U，V两点
    - 直积图：当u1与v1在G1中相邻且u2与v2在G2中相邻，连接U，V两点
    - 合成图：当u1=v1或u1与v1在G1中相邻，且u2与v2在G2中相邻，连接U，V两点，可得合成图G1[G2]
2. 阶数计算方法及其应用如Girvan-Newman 理论分解图

    之间关系：Betweenness，阶数，介度，介中心度

    图划分(graph partitioning),又称图分割将网络分成一组关系紧密的区域,以及这些区域之间稀疏的互联.网络经过分割得到的组成部分成为“区域(regions)”：

    - 分割法，如Girvan-Newman
    - 聚集法

    定义:一条边的介数(betweenness)为其承载信息流的总量,将所有节点引起的流量都计算在内

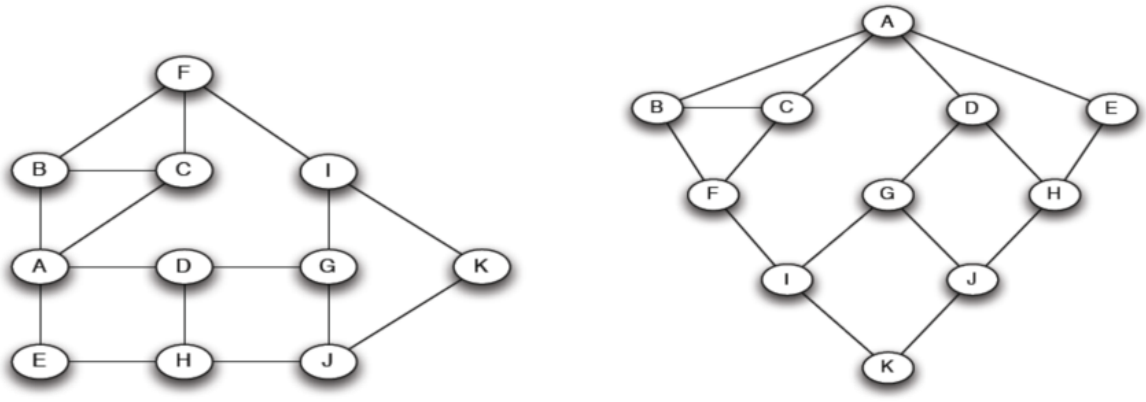
    Girvan-Newman理论:不断删除高介数的边

    - 不断删除多条(有可能是)介数最高的边,将他们从图中移除.这有可能导致图分裂成多个部分.得到图划分的第一层区域

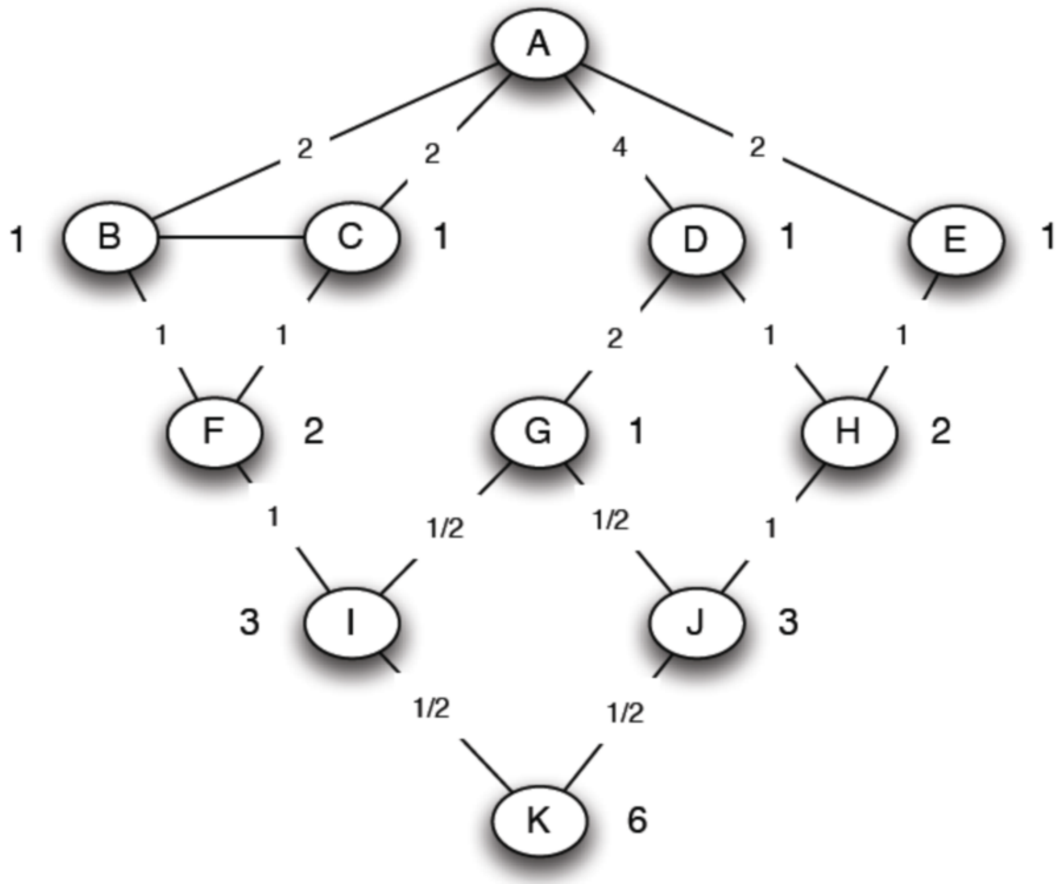
- 对划分后的子图重新计算所有的介数,再将介数最高的边删除, 这样可能会将一些已经存在的部分分裂成更小的部分.如此得到一些嵌套在大区域里小区域.
- 用此方法继续移除图中这样的边,每步都重新计算介数最高的边将其移除.

简化介数计算——先宽搜索（广度优先搜索）：

- 确定A到其他每个节点的最短路径数，改画BFS图（从上到下）
- 从下至上计算信息流，最终节点信息为1，按上一个相邻阶段的最短路径数之比划分路径上的信息流；再接着向上计算信息流时，划分的是下层的信息流加上本节点的1个信息。



(a) *A sample network* (b) *Breadth-first search starting at node A*



3. 全支付拍卖中的均衡出价：课本（pdf）9.7.3， P169

继续使用之前在首价拍卖中使用的基本框架，有 n 个竞拍者，每一个人有随机地、独立地均匀分布在区间[0,1]的估值。和之前一样，我们想找到一个反映出价的估值的函数 $s(\cdot)$，这样如果所有竞拍者使用 $s(\cdot)$时，那使用 $s(\cdot)$就是最优策略。

在一个全支付拍卖中，假如竞拍者 i 没有赢，i 的期望回报就是个负值。公式如下：

$$v_i^{n-1}(v_i - s(v_i)) + (1 - v_i^{n-1})(-s(v_i))$$

第一项对应假如 i 赢得竞拍的回报，第二项对应如果 i 输掉竞拍的回报。正如此前我们可以考虑一个假的估值，对应函数 $s(\cdot)$表示一个偏离的出价策略；那么假如 $s(\cdot)$是竞拍者使用的均衡选择，则

$$v_i^{n-1}(v_i - s(v_i)) + (1 - v_i^{n-1})(-s(v_i)) \geqslant v^{n-1}(v_i - s(v)) + (1 - v^{n-1})(-s(v)) \tag{9.8}$$

v 取值范围在区间[0,1]之间。

注意，期望回报是由无论输赢都需支付的一个固定价格 $s(v)$以及假如 i 赢得拍卖的估值 v_i 组成的。消去不等式(9.8)中的同类项，我们可重写为：

$$v_i^n - s(v_i) \geqslant v^{n-1}v_i - s(v) \tag{9.9}$$

现在，将右边的写为一个函数 $g(v) = v^{n-1}v^i - s(v)$，由不等式(9.9)可以看到，当 $v = v_i$，函数 $g(\cdot)$得到最大值。即令 $g'(v_i) = 0$，通过以下微分方程可以确定函数 $s(\cdot)$：

$$s'(v_i) = (n-1)v_i^{n-1}$$

因此得到，$s(v) = \left(\frac{n-1}{n}\right)v_i^n$。

因为 $v_i < 1$，它的 n 次方随 n 的增加以指数率减小(如函数 $s(\cdot)$所示)。这证明了在全支付拍卖中当竞拍人数增加时，竞拍者应该大大减少他们的出价。

我们也可以得出卖家的期望收入。在全支付拍卖中，卖家从每一个参与者中收取费用；另一面，竞拍者也因此以低价出价。每个竞拍者对卖家收入贡献的期望值为：

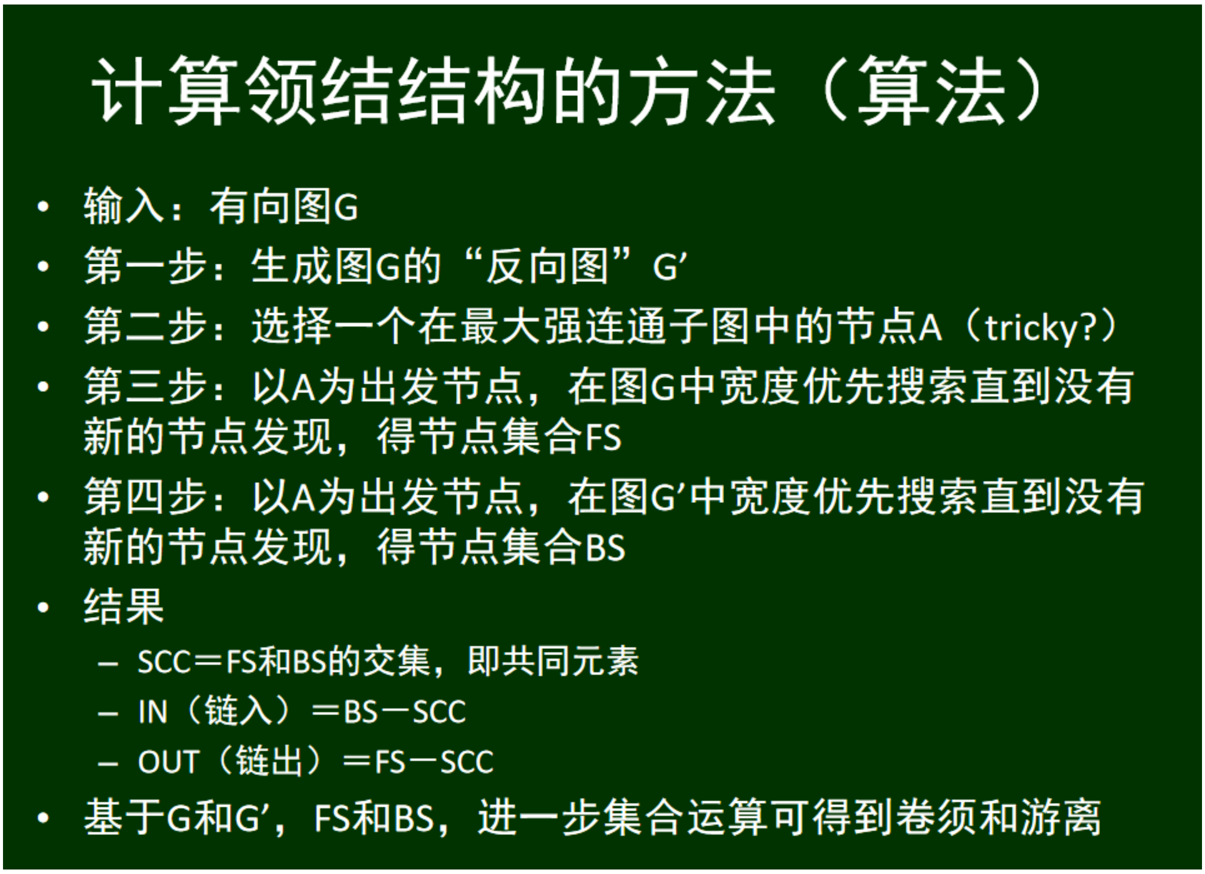
$$\int_0^1 s(v)\mathrm{d}v = \left(\frac{n-1}{n}\right)\int_0^1 v^n \mathrm{d}v = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

因为这是卖家从每个竞拍者所得的收入，卖家的总期望收入是：

$$n\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}$$

这个期望值当竞拍者采用同样的方法产生估值时，与首价和次价拍卖中卖家的期望收入相同。这个结果再次体现了收入等价原则，包括在一般拍卖形式下的全支付拍卖。

4. 计算“领结”的方法



5. 中枢权威排名

   先权威更新，后中枢更新，此时一步更新完成。

   p的权威值更新为指向p的中枢值之和，p的中枢值更新为p指向的权威值之和

   矩阵分析，对于n个节点的有向图G，M为nxn矩阵，是有向图的邻接矩阵，a是权威值向量(nx1)，h是中枢值向量(nx1)

   权威更新：$a^k = M^T h^{<k-1>}$，中枢更新$h^{<k>} = Ma^{<k>} = MM^T h^{<k-1>}$

6. 网页排名

   网页排名的具体计算方法如下：

   - (1) 对于一个有n个节点的网络，设所有节点的网页排名初始值为1/n。
   - (2) 选择操作的步骤数为k。
   - (3) 对网页排名做k次更新操作，每次更新使用一下规则：
     - 基本网页更新规则：每个网页均等地将自己当前的网页排名值分配给所有向外的链接，这些链接将这些均等地值传递给所指向的网页。（如果网页没有指向其他网页的链接，就将当前所有网页排名值传递给自身）每个网页以其获得的所有网页排名值的总和更新它的网页排名。

   网页排名的总和永远为1

   按比例缩放网页排名：设定缩放引子s在(0,1)中，每步先使用基本网页更新，然后乘以s，最后将剩余的1-s平均分为n份，给每个节点

   矩阵分析：对于n个节点的有向图G，N为nxn矩阵，若不存在i到j的连接，则Nij=0，否则Nij为i连接到其他所有节点个数的倒数，即Nij=1/li（N是G的邻接矩阵按行归一化的矩阵）。r是排名向量（nx1），s是标量缩放因子。

   基本网页更新规则：$r^{<k>} = N^T r^{<k-1>}$

   按比例缩放：$r^{<k>} = \tilde{N}^T r^{<k-1>}, \tilde{N}_{ij} = sN_{ij} + \frac{1-s}{n}$