第 4 章　整数规划

第 1 节　整数规划问题的特征

第 2 节　分支定界法

第 3 节　割平面法

第 4 节　0-1 规划

第 5 节　0-1 规划建模

第 6 节　指派问题

第一节　整数规划问题的特征

目标函数和约束函数是线性函数；决策变量取整数值，称为线性整数规划，简称整数规划（integer programming，IP）。

所有变量取整数，称为纯整数规划；

部分变量取整数，称为混合整数规划（MIP）；

变量只取 0 或 1，称为 0-1 规划；

某些约束函数或目标函数非线性，称为非线性（纯/混合）整数规划（NIP，NMIP）。

典型的整数规划问题：

- 运作问题（Operational problems）：货物的分配，生产调度、机器排序等；
- 计划问题（Planning problems）：资金预算、设施选址、证券组合分析等；
- 设计问题（Design problems）：通信和交通网络设计、集成电路设计、自动化生产线设计等；
- 路线优化（Design problems）：旅行商问题、邮递员问题等。

求解思路一：先解相应的线性规划，得到最优解后再四舍五入（圆整化），作为整数最优解？

考虑如下整数规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & -13x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\ & -8x_1 + 11x_2 \le 82 \\ & 9x_1 + 2x_2 \le 40 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{aligned}$$

去掉整数限制后，可求得线性规划的最优解$(x_1, x_2) = (2.4, 9.2)$，目标函数最优值 $f = -58.8$。

圆整化得到整数点$(x_1, x_2) = (2,9)$，但不满足第 **1** 个约束条件，因此不是整数规划的可行点，当然不是整数规划的最优解。

该问题确实存在整数最优解：

$(x_1, x_2) = (4,2)$，目标函数的最优值$f^* = -58$。

四舍五入取整的作法一般不可取：经四舍五入得到的解不一定是整数规划的可行解；即使是可行解，也不一定是整数规划的最优解。

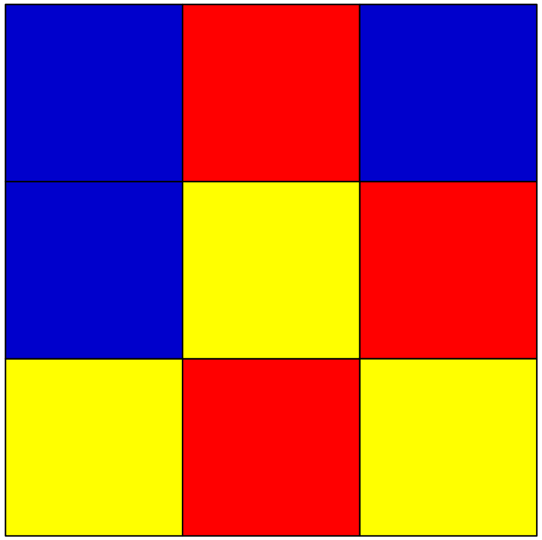
求解思路二：如果可行域是有界的，穷举变量所有可能的整数组合，比较它们的目标函数值以定出最优解？

对于小规模问题，变量数少，可行的整数组合数也少，穷举法（**exhaustive search**）是可行的；对于大规模问题，整数组合数会很大，会出现“组合爆炸”问题。即便用最快速的计算机，穷举法也无能为力。

穷举法完全依赖于计算机的计算能力，因此也称“暴力穷举/破解”（**brute-force search/ cracking**）。

整数规划属于一类所谓排列组合问题：解的表达采取变量的某种排列组合方式，呈现离散状态。

排列组合通常导致维数爆炸：设想有一种二维三阶“魔方”，那么可能的组合形式不大于$9! = 362880$种。



若仅仅升高一个维度到三维空间，其三阶魔方的可能组合为：

$$\frac{8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}}{3 \times 2 \times 2} = 43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000$$

假设“穷举”上述所有情况，每秒检查 300 种情况，则一共需要 45 亿年，大约是地球的年龄！

恢复魔方不能靠穷举法。人类思维通过优化，可以得到的恢复魔方最少步数大约为 30 步；计算机可以优化至 15-20 步。

恢复三维魔方的世界记录：

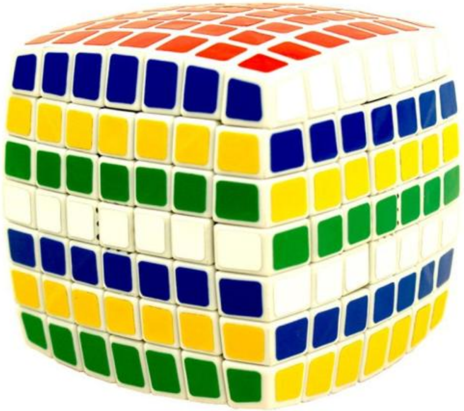
3 阶：6 秒左右

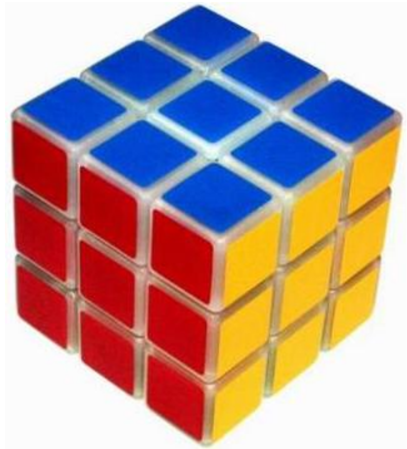
4 阶：60 秒左右

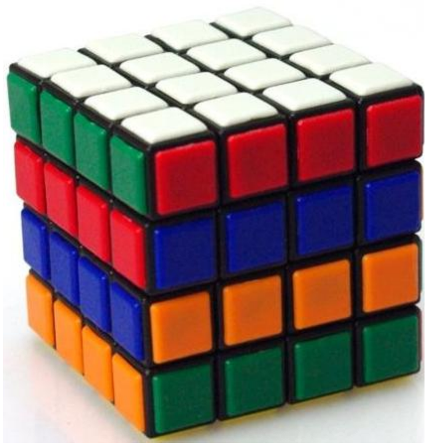
5 阶：100 秒左右

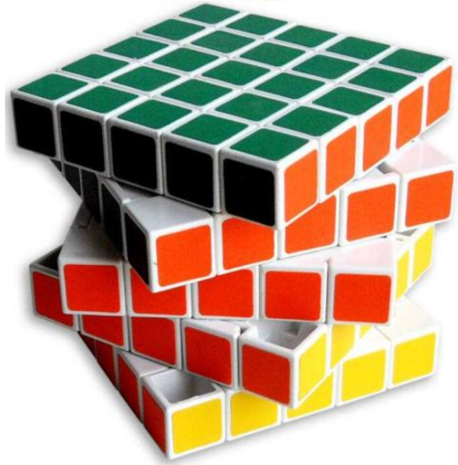
6 阶：360 秒左右

7 阶：400 秒左右









≫ 计算复杂性

为评价算法效率，需要衡量算法的计算时间，它反映了计算量（或者计算时间/步数）和问题规模的关系，称为“计算复杂性”。

旅行商问题（Traveling salesman problem，TSP）：

给定 n 个城市和任意两城市之间的距离，要求确定一条最短路线，该路线经过各城市一次且仅一次。

以城市个数 n 表示问题规模，那么以任一城市为起点，穷举所有可能的路径需要的计算量为$(n-1)!$。

假设计算机 1s 可以穷举 23 个城市的所有路径，那么解决 24 个城市的 TSP 问题，穷举法计算时间为 1s；

当城市数为 25 个时：以第 1 个城市为起点，第 2 个到达城市有可能是第 2、第 3……或第 25 个城市，共 24 种情况。

每种情况需要花费 1s 时间穷举剩余 23 个城市的所有路径。因此，25 个城市的枚举需要 24s。

计算时间和不同城市数目的关系如下：

城市数	24	25	26	27	28	29	30	31
计算时间	1s	24s	10min	4.3h	4.9d	136.5d	10.8y	325y

可见，随着问题的规模增加，穷举法的计算复杂性有可能是阶乘级的，因而增长异常迅速，导致算法在实践上并不可行。

排列组合问题（包括整数规划问题）的求解需要开发专门的方法。

整数规划的几种成熟求解方法：

- ✓ 分支定界法
- ✓ 割平面法
- ✓ 针对 0-1 规划的隐枚举法（隐数法）
- ✓ 分解协调与启发式方法

第二节　分支定界法

分支定界法（branch and bound，B&B）：设有最大化整数规划问题 A，忽略其整数约束，就得到相应的线性规划问题 B。

B 称为线性松弛（relaxation）问题。

求解问题 B，如果得到的最优解是整数，则直接得到原问题的整数最优解。

如果得不到整数解……

– 如果问题 B 的最优解不是整数，则对于整数最大化问题 A，B 的最优目标函数值必是 A 的最优目标函数值 z^*的上界，记作 $\bar{z}$，有：$z^* \le \bar{z}$；

– 如果能找到原问题 A 的任意一个整数可行解，则对应的目标函数值显然是 z^*的一个下界$\underline{z}$，有：$z^* \ge \underline{z}$。

分支定界法将问题 B 的可行域分成子区域（称为分支）构造子问题，通过求解子问题，逐步减小上界 $\bar{z}$、增大下界 $\underline{z}$，直到二者相等，则最终即可求得 z^*。

例 1，求解问题 A

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad ①$$

$$\text{s.t.} \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56 \quad ②$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70 \quad ③ \qquad （1）$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad ④$$

$$x_1, x_2 \text{为整数} \quad ⑤$$

解，不考虑约束⑤，解线性松弛问题 B ①-④，得最优解

$$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82, z_0 = 356$$

不符合整数条件⑤。

显然，$z_0 = 356$是 **A** 的最优值z^*的上界，记：$\bar{z} = z_0$。

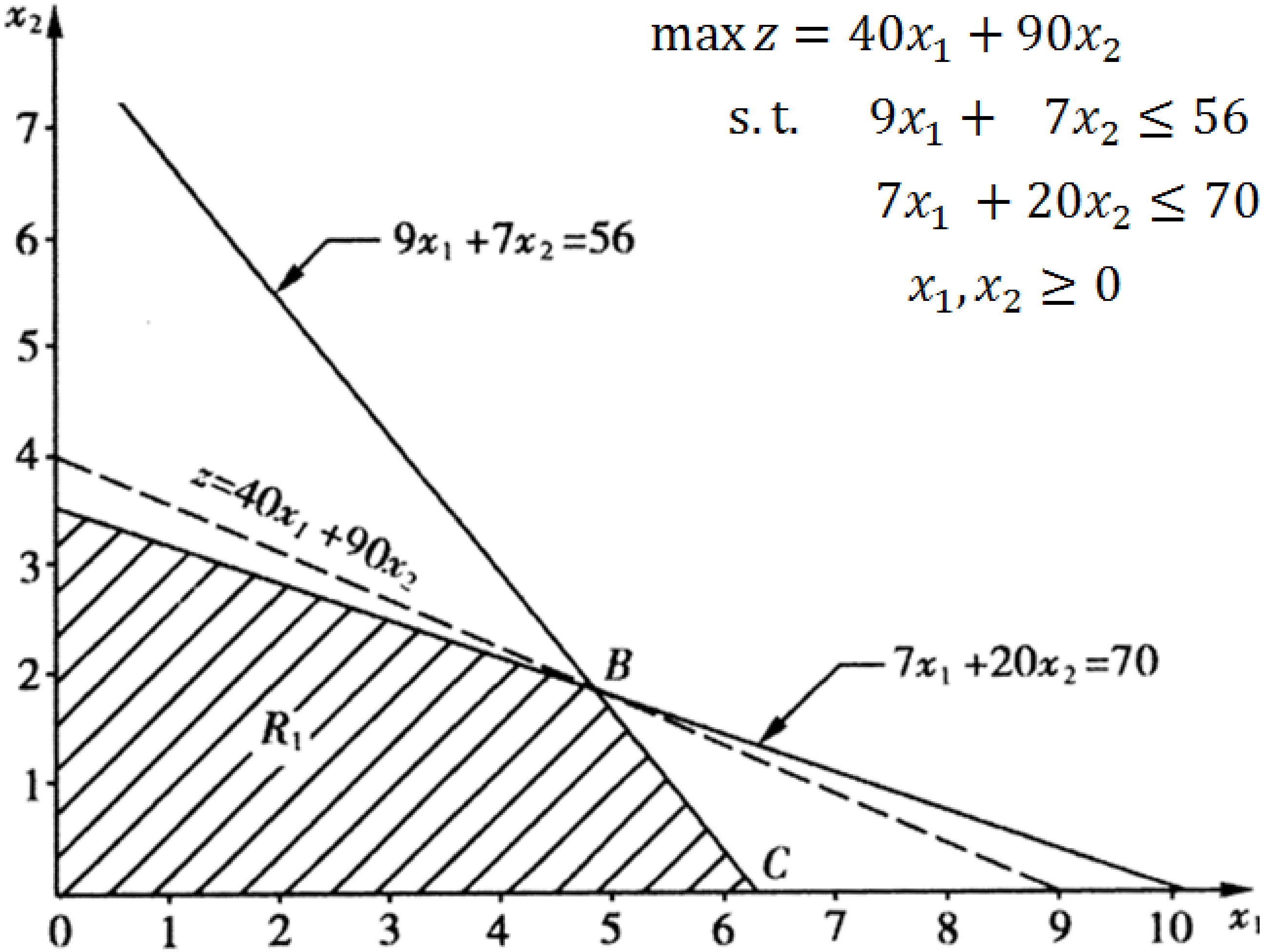
观察可知，$x_1 = x_2 = 0$是 **A** 的整数可行解，对应目标函数值$z = 0$。

$z = 0$是原问题最优目标函数值z^*的一个下界。

记$\underline{z} = 0$，则有：

$z^* \in [\underline{z}, \bar{z}]$，即

$$0 \le z^* \le 356$$



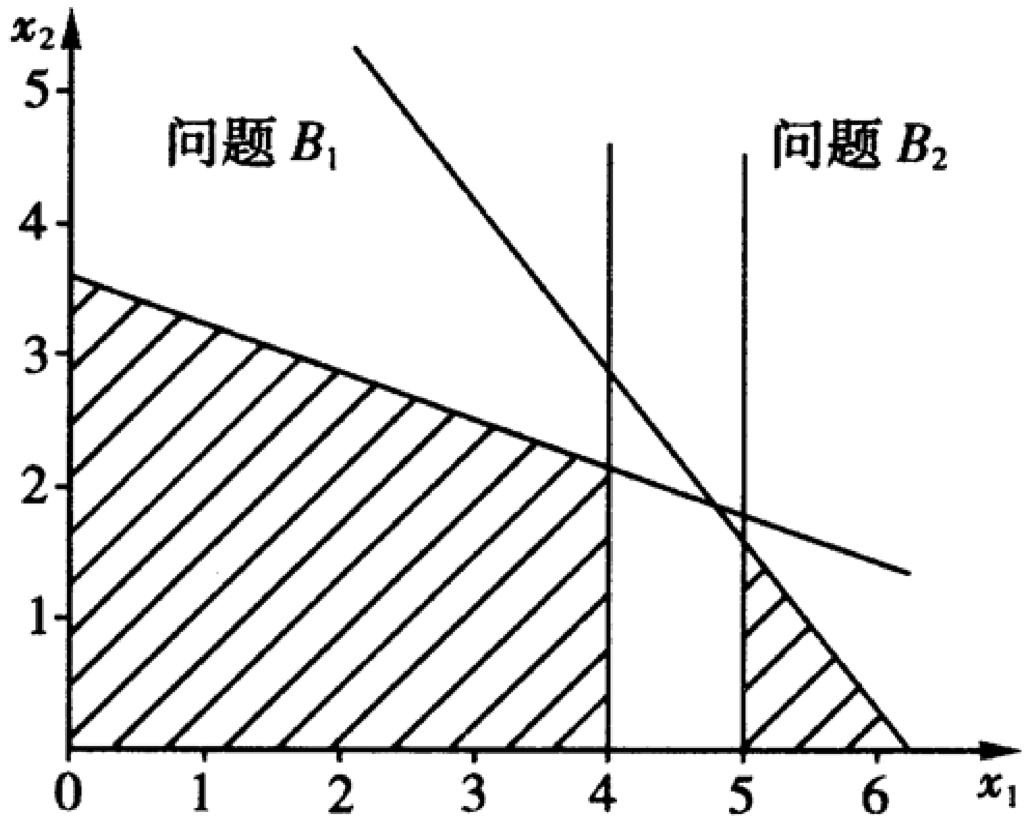
$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1 + 90x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ & 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

分支定界法：考虑其中某个<u>非整数</u>变量，如问题 B 中的 $x_1 = 4.81$，若 x_1 是整数，则必然满足：

$$x_1 \le 4 \text{ 或 } x_1 \ge 5$$

于是原问题可分解为两支子问题，其中每支是在原问题基础上增加了一个约束条件：

注 1：分支后并不影响问题 A 的可行域。



$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + \ \ 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1 \qquad\qquad \le 4 \\ x_1, x_2 \in Z \backslash Z^- \end{cases}$$

↓松弛子问题B_1

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + \ \ 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1 \qquad\qquad \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + \ \ 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1 \qquad\qquad \ge 5 \\ x_1, x_2 \in Z \backslash Z^- \end{cases}$$

↓松弛子问题B_2

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + \ \ 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1 \qquad\qquad \ge 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

不考虑整数条件分别求解两个线性松弛子问题，得到两个松弛子问题的最优解分别为：

松弛子问题 B1	松弛子问题 B2
$z_1 = 349$ $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2) = (4.00, 2.10)$	$z_2 = 341$ $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2) = (5.00, 1.57)$

还是没有得到全部变量为整数的解！

目标函数的上界存在于上述两个松弛子问题中，且问题的上界不会大于$\max(z_1, z_2) = 349$，故将上界 $\bar{z}$ 改为$\bar{z} = 349$，则整数最优解的目标值z^*满足：$0 \le z^* \le 349$。

继续分解：先分解最优值较大的子问题 B1，在 B1 上分别增加条件$x_2 \le 2$和$x_2 \ge 3$，构造松弛子问题 B3 和 B4。

$$\mathrm{B}_3: \quad \max z = 40x_1 + 90x_2 \quad \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1 \le 4 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

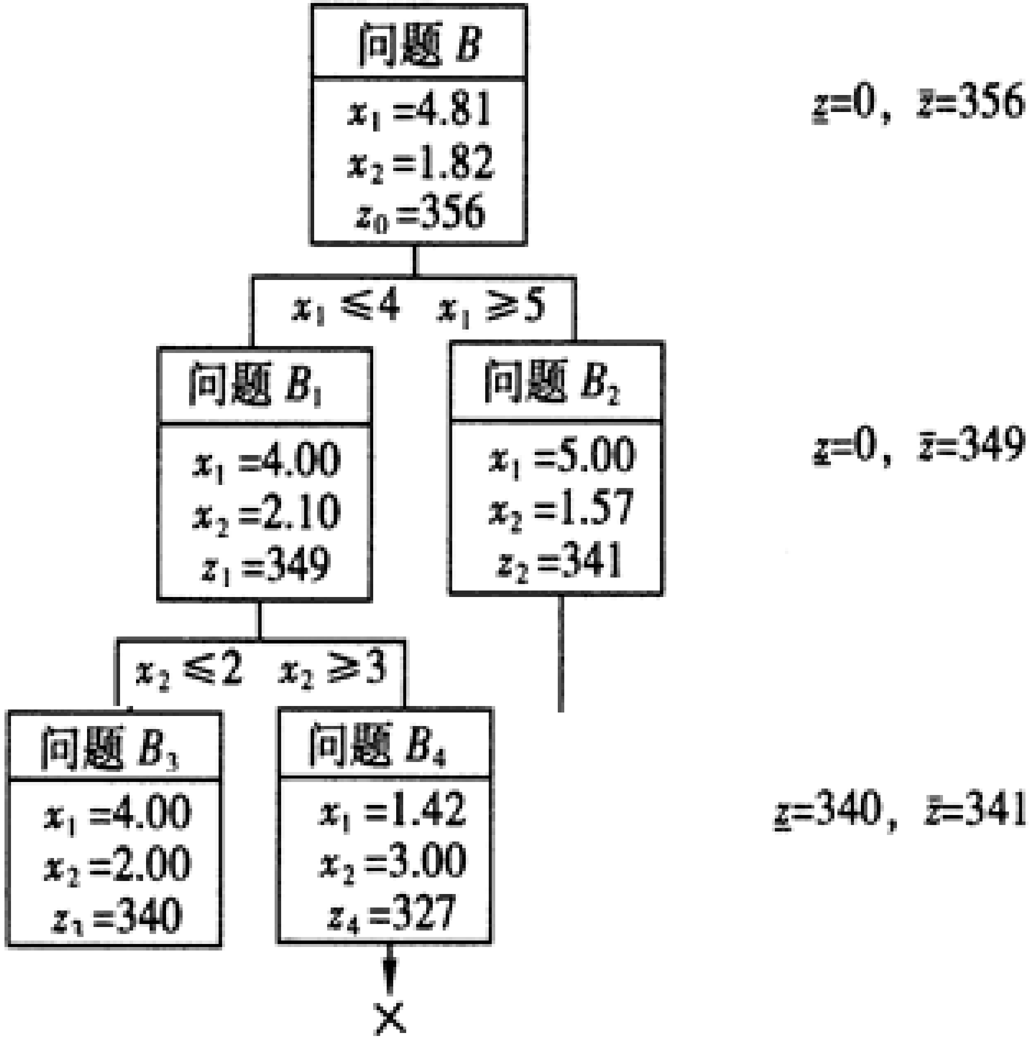
$$\mathbf{x}_{\mathrm{B3}}^{*} = (4.00, 2.00), z_{\mathrm{B3}} = 340$$

$$\mathrm{B}_4: \quad \max z = 40x_1 + 90x_2 \quad \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1 \le 4 \\ x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B4}}^{*} = (1.42, 3.00), z_{\mathrm{B4}} = 327$$

线性松弛问题 B3 的最优解：$\mathbf{x}_{B3}^{*}=(4.00,2.00)$是整数，目标值：$z_{B3}=340$，可取为新下界：$\underline{z}=340$；它大于$z_{B4}=327$，故最优解不可能在 B4 中，于是剪掉 B4 这一支。



再看松弛问题 B2：

松弛问题 B2 的最优值$z_2=341$，所以原问题最优值可能在[340,341]之间有整数解。

继续对 B₂ 分解，得子问题 B₅ 和 B₆：

$$\mathrm{B}_5: \quad \max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + \ \ 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1 \qquad\quad\ \geq 5 \\ \qquad\quad\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}5}^{*} = (5.44, 1.00), z_{\mathrm{B}3} = 308$$

$$\mathrm{B}_6: \quad \max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + \ \ 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1 \qquad\quad\ \geq 5 \\ \qquad\quad\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

无可行解

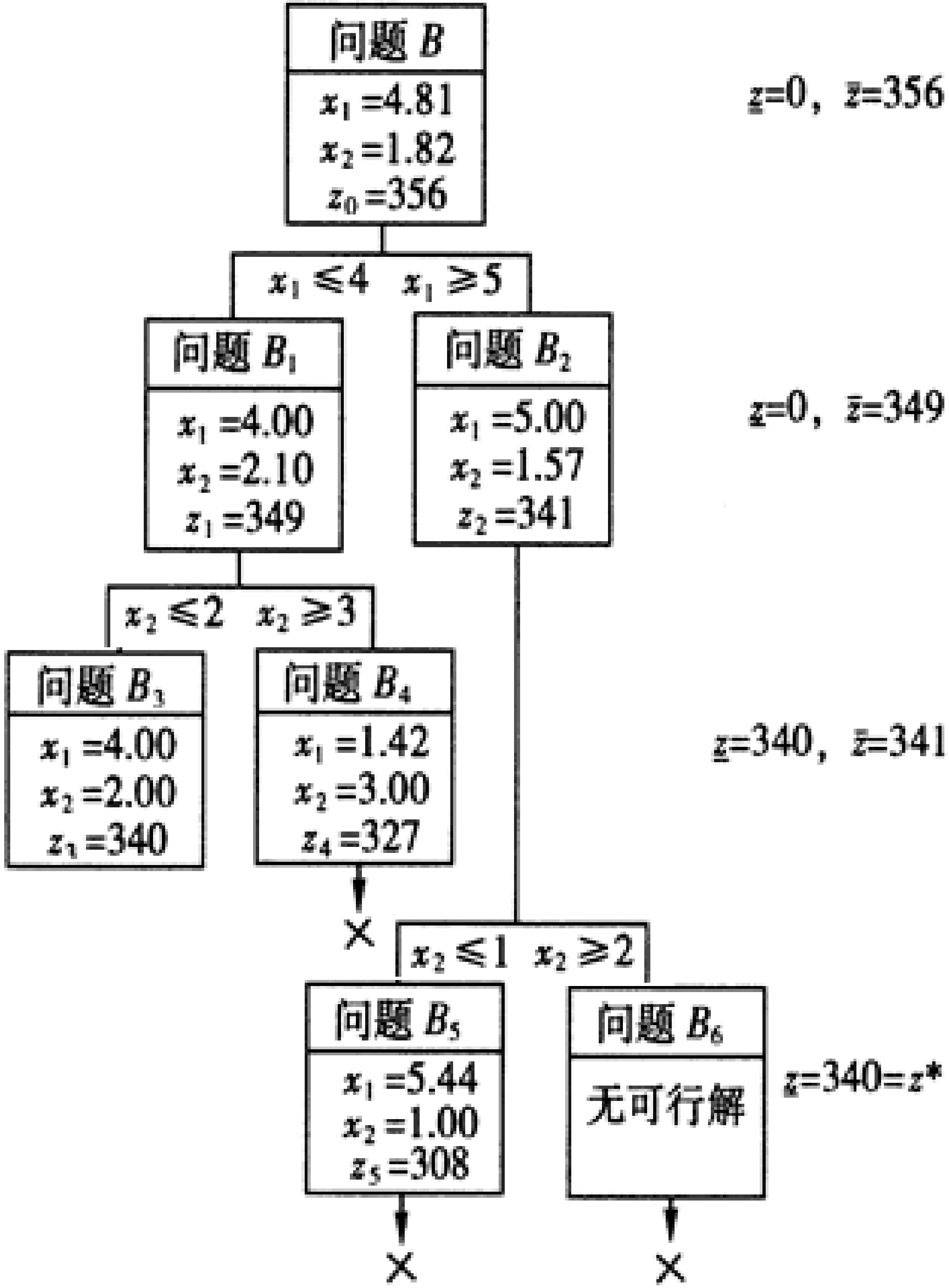
B5 的松弛问题无整数解，且$z_5 = 308 < \underline{z} = z_{B3} = 340$（已知的下界），因此，该支被剪掉；而问题 **B6** 无可行解。至此可断定：

$$z_{B3} = \underline{z} = z^* = 340$$

子问题 **B3** 的解：

$$x_1 = 4.00, x_2 = 2.00$$

为原问题的最优整数解。



➢ 最大化问题的分支定界算法步骤：

将要求解的整数规划问题称为问题 A，相应的线性松弛 LP 问题称为问题 B。

（1）解线性松弛问题 B，可能得到以下情况之一：

① B 无可行解，这时 A 也无可行解，停止计算。

② B 有最优解，并满足 A 的整数条件，B 的最优解即为 A 的最优解，停止计算。

③ B 有最优解，但不满足 A 的整数条件，记其目标值为$\bar{z}$（上界）。

（2）用观察法[1]找到 A 的一个整数可行解，求其目标值，记作$\underline{z}$（下界）。以z^*表示 A 的最优目标值，此时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

进行迭代。

❶：分支与定界，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量x_j，设其值为b_j。以$\lfloor b_j \rfloor$表示小于b_j的最大整数。构造两个约束条件：$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor$和$x_j \geq \lfloor b_j \rfloor + 1$。

将这两个约束分别加入问题 B，构造两个后继规划问题 B_1 和 B_2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

---

[1] 注，即便观察不出一个整数可行解，也没有关系。如果原问题确实有整数可行解，则在后面的分支过程中，整数解总会“浮现”出来。

定界：以每个后继问题为一个分支求解最优值，与其他分支的解比较，找出最优目标值最大者作为新的上界$\bar{z}$。

从符合整数条件的各分支中，找出目标值最大者作为新的下界$\underline{z}$，若无整数可行解，$\underline{z}$不变。

❷：比较与剪支，各分支的最优目标值中若有小于已知下界$\underline{z}$者，则剪掉该支，以后不再考虑。

若大于$\underline{z}$，且不满足整数条件，则重复❶。直到$z^* = \underline{z}$为止，得最优整数解$x_j^*, (j = 1, \dots, n)$。

≫ 最小化问题的分支定界算法步骤：

将要求解的整数规划问题称为问题 A，相应的线性松弛 LP 问题称为问题 B。

（1）解线性松弛问题 B，可能得到以下情况之一：

① B 无可行解，这时 A 也无可行解，停止计算。

② B 有最优解，并满足 A 的整数条件，B 的最优解即为 A 的最优解，停止计算。

③ B 有最优解，但不满足 A 的整数条件，记其目标值为$\underline{z}$（下界）。

（2)用观察法找 A 的一个整数可行解，求其目标值，记作$\bar{z}$（上界）。以z^*表示 A 的最优目标值，此时有

$$\underline{z} \le z^* \le \bar{z}$$

进行如下迭代。

❶：分支与定界，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量x_j，设其值为b_j。以$\lfloor b_j \rfloor$表示小于b_j的最大整数。构造两个约束条件：$x_j \le \lfloor b_j \rfloor$和$x_j \ge \lfloor b_j \rfloor + 1$。

将这两个约束分别加入问题 B，构造两个后继规划问题 B_1和 B_2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

定界：以每个后继问题为一分支求解最优值，与其他分支的解比较，找出最优目标值最小者作为新的下界$\underline{z}$。

从已符合整数条件的各分支中，找出目标值最小者作为新的上界$\bar{z}$，若无整数可行解，$\bar{z}$不变。

❷：比较与剪支，各分支的最优目标值中若有大于已知上界$\bar{z}$者，则剪掉该支，以后不再考虑。

若小于$\bar{z}$，且不满足整数条件，则重复❶。直到$z^* = \bar{z}$为止，得最优整数解$x_j^*, (j = 1, \dots, n)$。

例 2，用分枝定界法求解整数规划

$$\text{A:}\quad \begin{aligned} &\min z = 2x_1 - x_2 \\ &\text{s.t. } 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ &\quad -3x_1 + x_2 \le 3 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{aligned}$$

解，求解线性松弛问题 B：

$$\begin{aligned} &\min z = 2x_1 - x_2 \\ &\text{s.t. } 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ &\quad -3x_1 + x_2 \le 3 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

，最优解 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (8/17, 75/17)$，最小值 $z_0 = -59/17$；由此知 A 的最优目标值的一个下界 $\underline{z} = -59/17$。

而(0,0)为可行解，则目标函数值的上界$\bar{z}=0$。故 **A** 的最优目标值上下界可知：

$$z^* \in [-59/17,0]$$

由于 **B** 的解不满足整数性要求，注意到 $\bar{x}_1 = 8/17$，于是关于x_1引进条件

$$x_1 \le \lfloor \bar{x}_1 \rfloor \quad 和 \quad x_1 \ge \lfloor \bar{x}_1 \rfloor + 1$$

即

$$x_1 \le 0 \quad 及 \quad x_1 \ge 1$$

将 **A** 分解成 **2** 个子问题：

A1:

$$\min z = 2x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ 5x_1 + 4x_2 &\le 20 \\ -3x_1 + \ \ x_2 &\le 3 \\ x_1 \qquad\quad &\le 0 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0\text{，且为整数}$$

A2:

$$\min z = 2x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ 5x_1 + 4x_2 &\le 20 \\ -3x_1 + \ \ x_2 &\le 3 \\ x_1 \qquad\quad &\ge 1 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0\text{，且为整数}$$

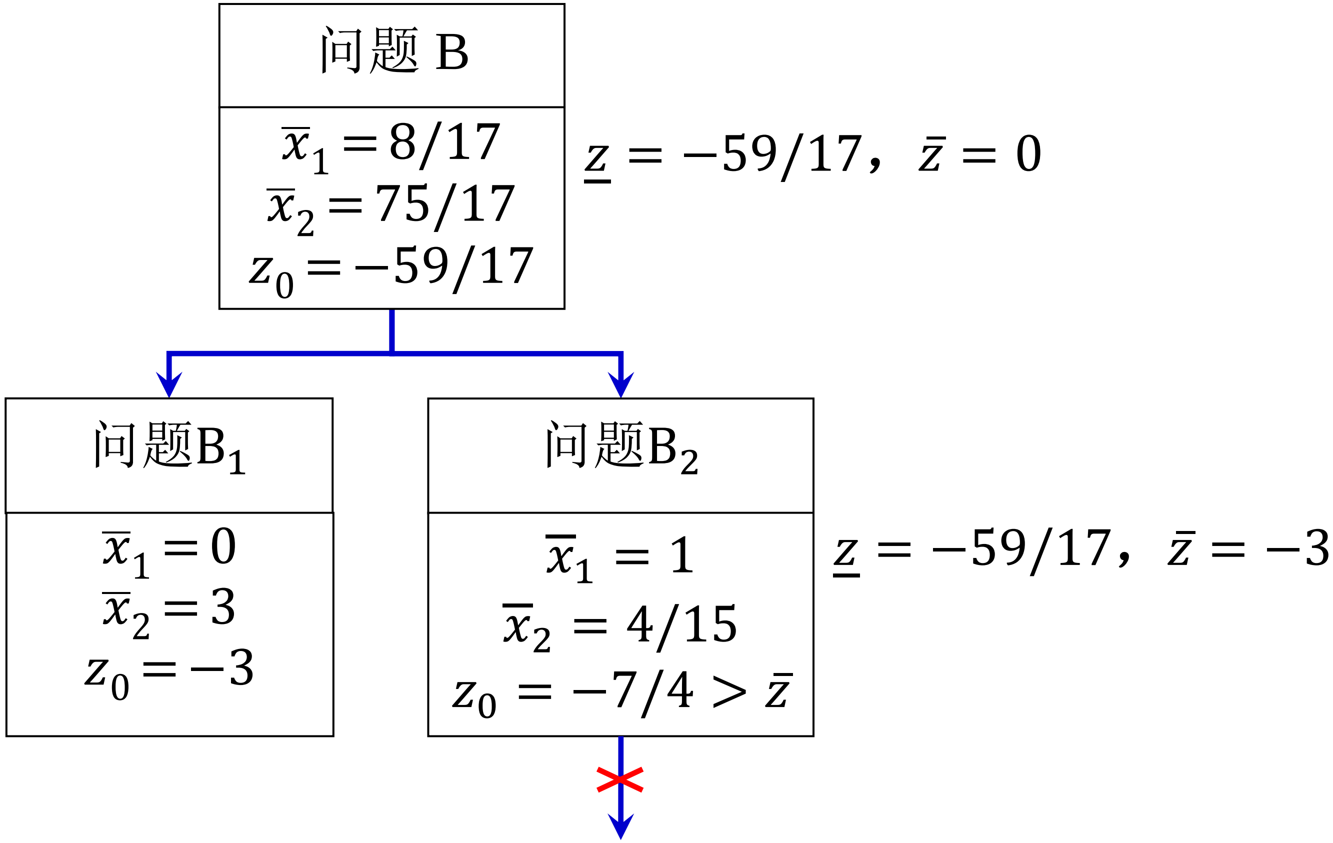
不考虑整数约束，求解相应的松弛问题$\mathbf{B}_1$和$\mathbf{B}_2$，分别得到最优解：

$$\mathbf{x}^*_{\mathbf{B}_1} = (0,3)^{\mathrm{T}}, z^*_{\mathbf{B}_1} = -3\text{；}\ \mathbf{x}^*_{\mathbf{B}_2} = (1,4/15)^{\mathrm{T}}, z^*_{\mathbf{B}_2} = -7/4$$

分支 B_1 的最优解为整数解，所以是 A 的可行解，因此将原问题 A 的最优值的上界更新为：

$$\bar{z} = -3 \rightarrow z^* \in [-59/17, -3]$$

由于问题 B_2 的最小值比最新上界还大，因此 B_2 分支被剪掉，最优解即为$(0,3)^T$。



第三节　割平面法

割平面法由 R.E. Gomory 1958 年提出，基本思想：首先求解整数规划的线性松弛问题。如果得到的最优解满足整数要求，则为整数规划的最优解。

否则，选择一个不满足整数要求的基变量，定义切割约束，增加到原来的约束方程中，以切掉一部分不满足整数要求的可行解，缩小可行域，而保留全部整数可行解，再求解新的松弛线性规划。重复以上过程，直至求出整数最优解。

割平面法的关键：如何定义切割约束？

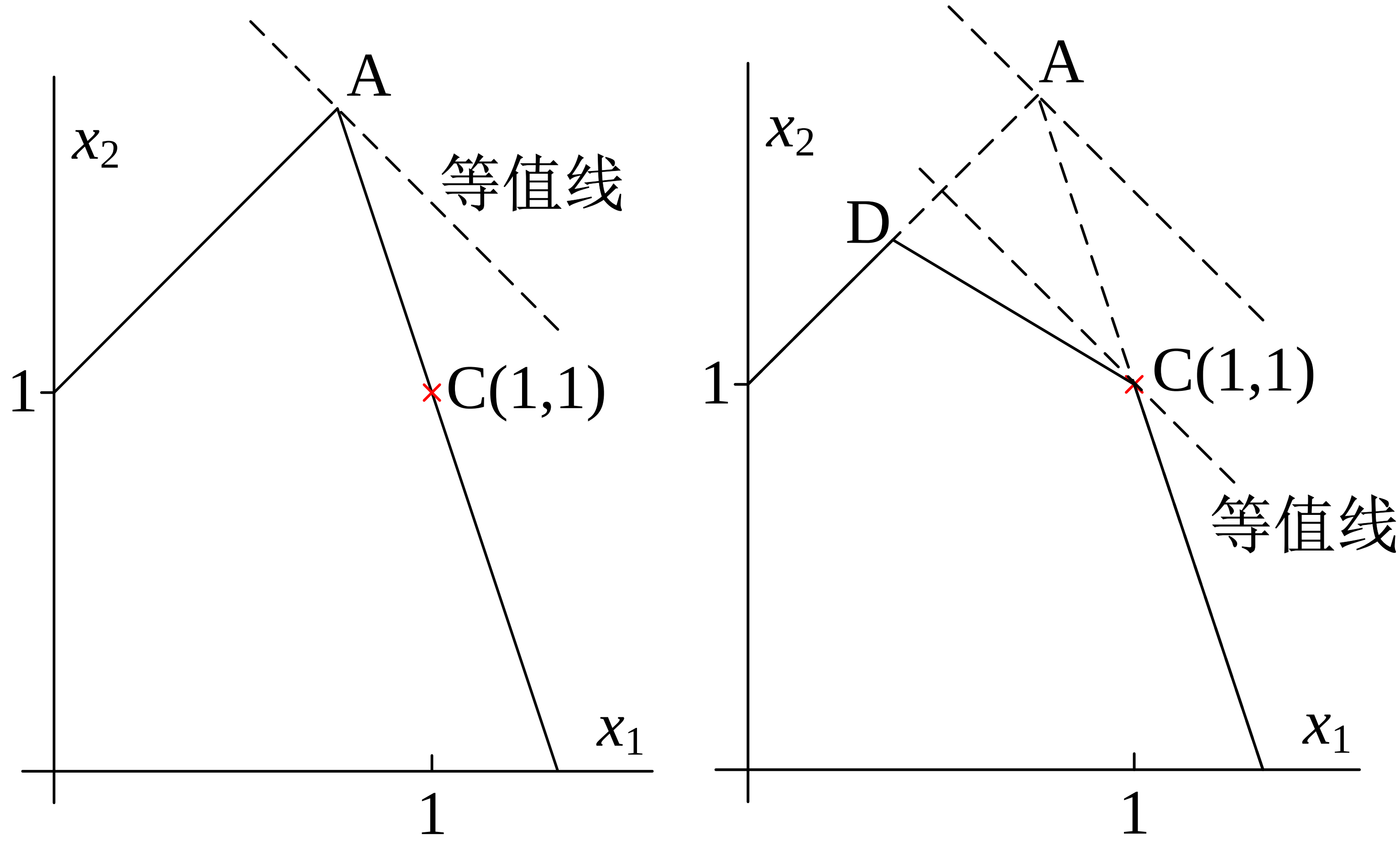
例 3，求解下述整数规划问题

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{为整数} \end{cases}$$

不考虑整数约束得到

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)^{\mathrm{T}}, z^* = 10/4$$

如图中 A 点：



若能用直线 **CD** 切割原可行域，则新的线性规划问题最优解为$(1,1)^T$，正好是原整数规划问题的最优解。

如何构造直线 CD？

考虑单纯形法：加入松弛变量x_3, x_4，构造标准型：

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 & \text{①} \\ 3x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4 & \text{②} \end{cases}$$

松弛问题的初始单纯形表为

	$c_j \rightarrow$			1	1	0	0
	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4
初始表	0	x_3	1	-1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	$c_j - z_j$			1	1	0	0

迭代得到最终的最优单纯形表：

最优表	$c_j \rightarrow$			1	1	0	0
	c $\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4
	1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	$c_j - z_j$			0	0	-1/2	-1/2

最优解:

$$x_1 = 3/4\,, x_2 = 7/4\,, x_3 = x_4 = 0, z^* = 5/2$$

最优表中的约束关系式为

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \text{ 和 } x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

选其中基变量为非整数的约束，将系数分解为整数部分和非负真分数之和。假设考虑x_1：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 + (-1 + \frac{3}{4})x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$$

由①、②式知，x_3, x_4必为整数，于是$x_1 - x_3$必为整数。而$(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$必为正数：真分数 3/4 减去一个正数，还要求结果为整数，那么就不可能是大于 0 的整数，因此有

$$\frac{3}{4}-(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4)\leq 0 \Leftrightarrow -3x_3-x_4\leq -3$$

若将这一新约束加到单纯形表中，则考虑 **LP 的标准形式**，就需要引入松弛变量x_5：

$$-3x_3-x_4+x_5=-3$$

注意，**为了使新的松弛变量x_5也为整数**[2]，**新增约束的系数，都必须先化为整数**。

将这个约束加入到最终单纯形表中，有：

[2] 对于原问题约束上增加的松弛变量，也有同样要求。因此，割平面法需要约束方程的系数、常数项都应首先化为整数。

	$c_j \rightarrow$			1	1	0	0	0
	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
新表	1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
	0	x_5	-3	0	0	[-3]	-1	1
	$c_j - z_j$			0	0	-1/2	-1/2	0

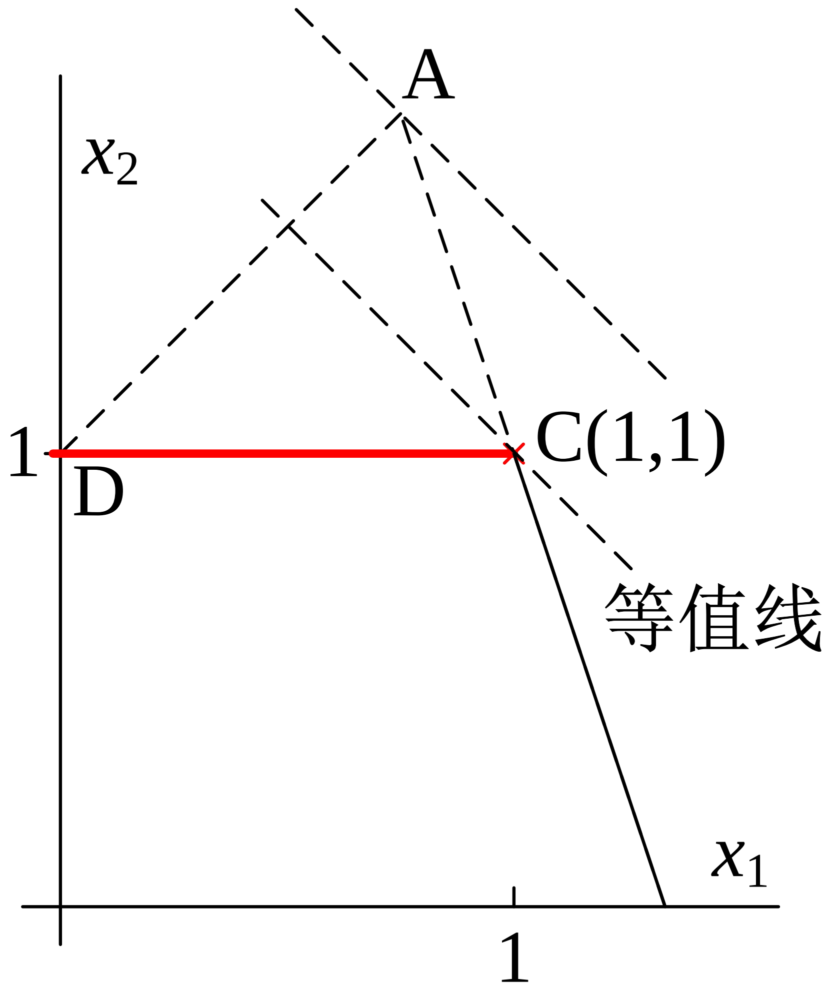
上述检验数都非正，因此根据对偶单纯形法，确定x_5为出基变量，x_3为换入变量，有：

	$c_j \rightarrow$			1	1	0	0	0
	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
最优表	1	x_1	1	1	0	0	1/3	-1/12
	1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
	0	x_3	1	0	0	1	1/3	-1/3
	$c_j - z_j$			0	0	0	-1/3	-1/6

上述新约束确实切掉了非整数解：如果将新约束 $-3x_3 - x_4 \leq -3$，用x_1, x_2表示（见①、②式），则得到

$$-3(1 + x_1 - x_2) - (4 - 3x_1 - x_2) \leq -3 \Rightarrow x_2 \leq 1$$

在图形上，相当于可行域被新加的直线 **CD** 切割为：



命题：切割约束切掉了一部分非整数解，但没有切掉任何整数解 *。

证明：设如下纯整数规划问题（2）

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{cx} \\ &\mathrm{s.t.}\ \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}\text{为整数} \end{aligned} \tag{2}$$

其松弛问题为

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{cx} \\ &\mathrm{s.t.}\ \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

令$\mathbf{p}_j$为矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 j 列，设最优基为 $\mathbf{B}$，则最优解为

* 即，割平面法增加的切割约束，并未改变原问题的性质。

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{B} \\ \mathbf{x}_\mathrm{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

若$\mathbf{x}^*$的分量均为整数，则它是问题（2）的最优解；否则选择一个不满足整数要求的基变量，比如$x_{\mathbf{B}_i}$，那么在最优单纯形表中，含有$x_{\mathbf{B}_i}$的约束方程为

$$x_{\mathbf{B}_i} + \sum_{j\in J} y_{ij} x_j = \bar{b}_i \qquad （4）$$

J为非基变量下标集，y_{ij}是$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_j$的第 i 个分量。

上式称为$\boxed{\text{源约束}}$，基于源约束，定义切割约束，以切掉非整数解。

令 $y_{ij}=\lfloor y_{ij}\rfloor+f_{ij},\ j\in J$ **and** $\bar{b}_i=\lfloor\bar{b}_i\rfloor+f_i$

其中 $\lfloor X\rfloor$表示不大于 X 的最大整数，$0<f_i<1, 0<f_{ij}<1$为正的真分数，则（4）式改写成

$$x_{\mathbf{B}_i}+\sum_{j\in R}\lfloor y_{ij}\rfloor x_j-\lfloor\bar{b}_i\rfloor=f_i-\sum_{j\in R}f_{ij}x_j \qquad (5)$$

对于整数可行解，（5）式左端为整数，则右端必为小于 1 的整数，因此整数解的必要条件为

$$f_i-\sum_{j\in R}f_{ij}x_j\le 0 \qquad (6)$$

即整数解必满足（6）式。将（6）式作为切割条件，增加到原问题（3）的约束中，得到新的线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
&\max \mathbf{cx} \\
&\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
&\quad\ f_i - \textstyle\sum_{j\in R} f_{ij} x_j \le 0 \\
&\quad\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

由于（6）式是根据“解是整数”这一整数型性要求推出来的必要条件，因此（6）式的引入，并不会影响整数解的可行性，即原问题的任何一个整数解都不会在新问题（7）中被切掉。

下面证明新约束确实切掉了一部分非整数解。

对于原来的非整数最优解$\mathbf{x}^* = [\mathbf{x}_\mathbf{B}, \mathbf{x}_\mathbf{N}]$，（7）式中的$x_j$（$j \in R$）均为非基变量，满足

$$x_j = 0, \forall j \in R$$

代入问题（7），就必然有

$$f_i - \sum_{j \in R} f_{ij} x_j = f_i > 0$$

即原来的非整数最优解违反了新约束，意味着增加条件（6）而形成的新问题（7）确实切掉了一部分非整数最优解。

例 4，用割平面法求解整数规划：

$$\min x_1 - 2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 + 3x_2 \le 2$$
$$x_1 + \ \ x_2 \le 4$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \text{且为整数}$$

解，<u>先化为 max 型问题</u> *

$$\max -x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 + 3x_2 \le 2$$
$$x_1 + \ \ x_2 \le 4$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

* 由于割平面法需要使用对偶单纯形法，为方便，可一律转化为最大化问题。

引入松弛变量x_3, x_4，以单纯形法解得最优单纯形表：

$c_j \rightarrow$			-1	2	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_2	2/3	-1/3	1	1/3	0
0	x_4	10/3	4/3	0	-1/3	1
$\sigma_j \rightarrow$			-1/3	0	-2/3	0

松弛问题的最优解$x_1 = 0, x_2 = 2/3$，不满足整数要求。

考虑非整数基变量x_2，由上表知，源约束为

$$-\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

将非基变量x_1和x_3的系数以及常数项分别分解为

$$-\frac{1}{3} = -1 + \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3}$$

根据（6）式，得到切割条件

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \leq 0$$

系数化为整数，即： $-2x_1 - x_3 \leq -2$

引进松弛变量x_5得到

$$-2x_1 - x_3 + x_5 = -2$$

将此条件置入最优单纯形表，得到

$c_j \rightarrow$			-1	2	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	2/3	-1/3	1	1/3	0	0
0	x_4	10/3	4/3	0	-1/3	1	0
0	x_5	-2	[-2]	0	-1	0	1
$\sigma_j \rightarrow$			-1/3	0	-2/3	0	0

表中的判别数均非正，显然是对偶可行的。用对偶单纯形方法求解，再经 1 次迭代达到最优：

$c_j \rightarrow$			-1	2	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	1	0	1	1/2	0	-1/6
0	x_4	2	0	0	-1	1	2/3
-1	x_1	1	1	0	1/2	0	-1/2
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	-1/2	0	-1/6

最优解为$x_1 = 1, x_2 = 1$，最优值$z^* = -1$，这个解也是整数规划的最优解。

➢添加切割约束时，必须保证松弛变量也是整数

情况 1：若切割约束的系数和右端项都是整数，那么添加的松弛变量在可行解中，必然是整数；

情况 2：若切割约束的系数和右端项不都是整数，则应该在添加松弛变量之前，将系数化为整数。*

例：$-\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \le -\frac{2}{3}$，化为$-x_1 + 9x_2 \le -2$；若加入松弛变量$x_3$：$-x_1 + 9x_2 + x_3 = -2$，则$x_3$必为整数。

割平面法虽然理论完备，但在实际应用中，其收敛速度较慢，因此独立应用比较困难，往往需要配合其他算法才能收到好的效果。

* 对整数规划的原问题也应如此处理。

第四节 0-1 规划

例 5，某公司拟在市东、西、南三区建立零售店，有 7 个位置（A_i）可供选择。要求：

东区从A_1、A_2、A_3三个点中至多选两个；

西区从A_4、A_5两个点中至少选一个；

南区从A_6、A_7两个点中至少选一个。

选用A_i点，则设备投资为b_i元，每年可获利润c_i元，但投资总额不能超过 30 万元。问应选择哪几个点才能使总利润最大？

解，引入 0-1 变量x_i，$x_i = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathrm{A}_i \text{ is selected} \\ 0, & \text{if } \mathrm{A}_i \text{ is not selected} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^{7} c_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{7} b_i x_i \le 30 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_4 + x_5 \ge 1 \\ & x_6 + x_7 \ge 1 \\ & x_i = 0 \text{ or } 1 \end{aligned} \tag{8}$$

穷举法：检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合，比较目标函数值以找到最优解。

设变量总数为 n，则穷举法需要检查 n 个变量的 2^n 个可能组合。

如果 n 较大，穷举法是不可能的。

需要设计一些方法，只检查变量取值组合的一部分，就能找到最优解。

部分穷举：隐枚举法（**implicit enumeration**）。

例 6，用隐枚举法求如下 0-1 整数规划

$$\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.}\ \ & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \quad ① \\
& x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \quad ② \\
& x_1 + x_2 \le 3 \quad ③ \\
& 4x_2 + x_3 \le 6 \quad ④ \\
& x_i = 0 \text{ or } 1 \quad ⑤
\end{aligned} \tag{9}$$

先通过试探找一个可行解，如$(x_1, x_2, x_3) = (1,0,0)$是一个可行解，目标值$z = 3$。

对于极大化问题求最优解，自然希望$z \geq 3$，于是增加一个约束条件：

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \quad \oplus$$

该条件称为过滤条件（**filtering constraint**）。原问题约束就变成 5 个（先不考虑 0-1 约束）。

用全部枚举的方法，3 个变量共有$2^3 = 8$个解，原来 4 个约束条件，共需 32 次运算。

若增加过滤条件，就可减少运算次数：

将约束条件按⊕（过滤条件）、①、②、③、④顺序排列：

解	条件					满足条件？是（√）否（×）	z值
	⊕≥3	①≤2	②≤4	③≤3	④≤6		
(0,0,0)	[0]					×	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	√	5
(0,1,0)	[-2]					×	
(0,1,1)	3	1	[5]			×	
(1,0,0)	3	1	1	1	0	√	3
(1,0,1)	8	0	2	1	1	√	8
(1,1,0)	[1]					×	
(1,1,1)	6	2	[6]			×	

对每个解，依次代入约束条件左侧，求出数值，看是否适合不等式条件。

<u>最先进行的应该是新添加进去的关于目标函数当前最优值过滤条件的检查。</u>

如某一条件不适合，同一行以后各条件就不必再检查，因而减少了运算次数。

本例实际只作 24 次运算，可求出最优解

$$(x_1,x_2,x_3)^* = (1,0,1), z^* = 8$$

规则改进 1-动态改变约束条件：

在计算中若遇到z值已超过过滤条件⊕右边的值，应立即动态改变过滤条件⊕，使过滤值为迄今为止最大者，然后继续。

如检查点(0,0,1)时，$z = 5 > 3$，应将条件⊕换成

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \qquad \oplus$$

这种对过滤条件的改进，更可以减少计算量。

规则改进 2-递增排列系数：

一般可重新排列x_i的顺序使目标函数中x_i的系数是递增（不减）的。上例中改写

$$z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$$

因-2, 3, 5 是递增的，变量(x_2, x_1, x_3)也按下述顺序取值：

$$(x_2, x_1, x_3) = (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), \ldots$$

这样最优解容易较早发现。再结合过滤条件的改进，更可简化计算。

$$
\begin{aligned}
\max z &= -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \\
\text{s.t.}\quad -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 &\geq 3 \quad \oplus \\
2x_2 \quad + x_1 \quad - x_3 &\leq 2 \quad ① \\
4x_2 + x_1 + x_3 &\leq 4 \quad ② \\
x_2 + x_1 \qquad\quad &\leq 3 \quad ③ \\
4x_2 \qquad\quad + x_3 &\leq 6 \quad ④ \\
x_i = 0 \ \text{or} \ 1 & \quad ⑤
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

按下述步骤进行：

点 (x_2,x_1,x_3)	条件					满足条件？是(√)否(×)	z值
	⊕(3)	①(2)	②(4)	③(3)	④(6)		
(0,0,0)	[0]					×	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	√	5

改进过滤条件，用

$$-2x_2+3x_1+5x_3\geq 5 \qquad \oplus'$$

代替⊕，继续进行。

点 (x_2,x_1,x_3)	条件					满足条件？是(√)否(×)	z值
	⊕′(5)	①(2)	②(4)	③(3)	④(6)		
(0,1,0)	[3]					×	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	√	8

再改进过滤条件，用

$$-2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 8 \qquad \oplus''$$

代替⊕′，再继续进行。

点 (x_2,x_1,x_3)	条件					满足条件？是(√)否(×)	z值
	⊕″(8)	①(2)	②(4)	③(3)	④(6)		
(1,0,0)	[2]					×	
(1,0,1)	[3]					×	
(1,1,0)	[1]					×	
(1,1,1)	[6]					×	

至此，z值已不能改进，即得到最优解（共计算 16 次）。