第三章
多维随机变量及其分布

第四节

多维随机变量的特征数

Overview

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布列为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布列为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ 或联合密度函数为 $p(x, y)$,

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布列为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ 或联合密度函数为 $p(x, y)$, 则 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布列为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ 或联合密度函数为 $p(x, y)$, 则 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)]$$

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布列为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ 或联合密度函数为 $p(x, y)$, 则 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j g(x_i, y_j) p_{ij}, & \\ & \end{cases}$$

定理 3.4.1 多维随机变量函数的数学期望

设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布列为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ 或联合密度函数为 $p(x, y)$, 则 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j g(x_i, y_j) p_{ij}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p(x, y) dxdy, \end{cases}$$

多维随机变量函数的数学期望

课堂练习

在长为 a 的线段上任取两点 X 与 Y, 求两点间的平均长度, 求 $E(|X-Y|)$

数学期望与方差的运算性质

数学期望与方差的运算性质

- (性质 3.4.1) $E(X+Y)=$

数学期望与方差的运算性质

- (性质 3.4.1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

数学期望与方差的运算性质

- (性质 3.4.1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- (性质 3.4.2) 当 X 与 Y 独立时，$E(XY)=$

数学期望与方差的运算性质

- (性质 3.4.1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- (性质 3.4.2) 当 X 与 Y 独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$

数学期望与方差的运算性质

讨论 X+Y 的方差

数学期望与方差的运算性质

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) =$

数学期望与方差的运算性质

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] =$

数学期望与方差的运算性质

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$

数学期望与方差的运算性质

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. 当 X 与 Y 独立时，$E[X - E(X)][Y - E(Y)] =$

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. 当 X 与 Y 独立时，$E[X - E(X)][Y - E(Y)] = 0.$

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. 当 X 与 Y 独立时，$E[X - E(X)][Y - E(Y)] = 0.$
4. 当 X 与 Y 独立时，$Var(X \pm Y) =$

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. 当 X 与 Y 独立时，$E[X - E(X)][Y - E(Y)] = 0.$
4. 当 X 与 Y 独立时，$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y).$

数学期望与方差的运算性质

讨论 X+Y 的方差

1. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)]$
2. $E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. 当 X 与 Y 独立时，$E[X - E(X)][Y - E(Y)] = 0.$
4. 当 X 与 Y 独立时，$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y).$

注意：以上命题反之不成立

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. (性质 3.4.5) 若 X 与 Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. (性质 3.4.5) 若 X 与 Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$
3. (性质 3.4.6) $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. (性质 3.4.5) 若 X 与 Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$
3. (性质 3.4.6) $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
4. (性质 3.4.7) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. (性质 3.4.5) 若 X 与 Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$
3. (性质 3.4.6) $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
4. (性质 3.4.7) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
5. (性质 3.4.8) $Cov(X,a)=0$

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. (性质 3.4.5) 若 X 与 Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$
3. (性质 3.4.6) $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
4. (性质 3.4.7) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
5. (性质 3.4.8) $Cov(X,a)=0$
6. (性质 3.4.9) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

协方差

协方差反映的是一种关联程度。

定义 3.4.1

称 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为 X 与 Y 的协方差.

协方差的性质

1. (性质 3.4.4) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. (性质 3.4.5) 若 X 与 Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$
3. (性质 3.4.6) $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
4. (性质 3.4.7) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
5. (性质 3.4.8) $Cov(X,a)=0$
6. (性质 3.4.9) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
7. (性质 3.4.10) $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$

协方差

课堂练习

X 与 Y 独立，$Var(X) = 6, Var(Y) = 3$，则 $Var(2X - Y) =$

协方差

课堂练习

X 与 Y 独立，$Var(X) = 6, Var(Y) = 3$，则 $Var(2X - Y) = (27)$

相关系数

定义 3.4.2

称 $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)},\sqrt{Var(X)}}$,

相关系数

定义 3.4.2

称 $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)},\sqrt{Var(X)}}$, 为 X 与 Y 的相关系数

相关系数

定义 3.4.2

称 $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)},\sqrt{Var(X)}}$, 为 X 与 Y 的相关系数

注意

若记

$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ $Y^* = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}$

相关系数

定义 3.4.2

称 $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)},\sqrt{Var(X)}}$, 为 X 与 Y 的相关系数

注意

若记

$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ $Y^* = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}$ 则 $Corr(X, Y) = Cov(X^*, Y^*)$

相关系数

相关系数的性质

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \le Var(X)Var(Y)$.

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \le Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \le Corr(X,Y) \le 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点:

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \le Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \le Corr(X,Y) \le 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1,

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \le Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \le Corr(X,Y) \le 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1, 则说明 X 与 Y 间 正相关

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1, 则说明 X 与 Y 间 正相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于-1,

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1, 则说明 X 与 Y 间 正相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于-1, 则说明 X 与 Y 间 负相关

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1, 则说明 X 与 Y 间 正相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于-1, 则说明 X 与 Y 间 负相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于 0,

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \le Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \le Corr(X,Y) \le 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1, 则说明 X 与 Y 间 正相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于-1, 则说明 X 与 Y 间 负相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于 0, 则说明 X 与 Y 间 不相关,

相关系数

相关系数的性质

- 施瓦茨不等式 $\{Cov(X,Y)\}^2 \leq Var(X)Var(Y)$.
- 性质 3.4.11 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$
- 性质 3.4.12

$$Corr(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 几乎处处有线性关系}$$
$$P(Y = aX + b) = 1$$

注意点：$Corr(X,Y)$ 的大小反映了X 与 Y 之间的线性关系

- $Corr(X,Y)$ 接近于 1, 则说明 X 与 Y 间 正相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于-1, 则说明 X 与 Y 间 负相关
- $Corr(X,Y)$ 接近于 0, 则说明 X 与 Y 间 不相关, 没有线性关系

相关系数

例 3.4.1

设 (X, Y) 的联合分布列为

X, Y	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

求 X, Y 的相关系数

相关系数

二维正态分布的特征数 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2.\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

相关系数

二维正态分布的特征数 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2.\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

1. $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,

相关系数

二维正态分布的特征数 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2.\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

1. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. 参数 ρ 为 X 和 Y 的相关系数

相关系数

二维正态分布的特征数 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2 . \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

1. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. 参数 ρ 为 X 和 Y 的相关系数
3. X, Y 独立 $\Leftrightarrow \rho = 0.$

相关系数

二维正态分布的特征数 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2.\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

1. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. 参数 ρ 为 X 和 Y 的相关系数
3. X, Y 独立 $\Leftrightarrow \rho = 0.$
4. 不相关与独立等价

随机向量的数学期望与协方差阵

定义 3.4.3

记 $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$

定义 3.4.3

记 $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$
则 $E(\overline{X}) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n))'$

随机向量的数学期望与协方差阵

定义 3.4.3

记 $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$

则 $E(\overline{X}) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n))'$

称 $$\begin{vmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_1) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \dots & Cov(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \dots & Var(X_n) \end{vmatrix}$$

随机向量的数学期望与协方差阵

定义 3.4.3

记 $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$
则 $E(\overline{X}) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n))'$

称 $$\begin{vmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_1) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \dots & Cov(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \dots & Var(X_n) \end{vmatrix}$$

为 $\overline{X}$ 的协方差阵，

定义 3.4.3

记 $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$
则 $E(\overline{X}) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n))'$

称 $$\begin{vmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_1) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \dots & Cov(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \dots & Var(X_n) \end{vmatrix}$$

为 $\overline{X}$ 的协方差阵，记为 $Cov(\overline{X})$

协方差阵的性质

协方差阵的性质

定理 3.4.2

协方差阵对称、

协方差阵的性质

定理 3.4.2

协方差阵对称、非负定.

协方差阵的性质

定理 3.4.2

协方差阵对称、非负定.

课堂练习

设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1), Var(X-Y)=0$, 求 (X,Y) 的协差阵 $\sum$.

课堂练习

设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1), Var(X-Y)=0$, 求 (X,Y) 的协差阵 $\sum$.

作业

课本 P 189: 1, 2, 6, 11, 19, 27