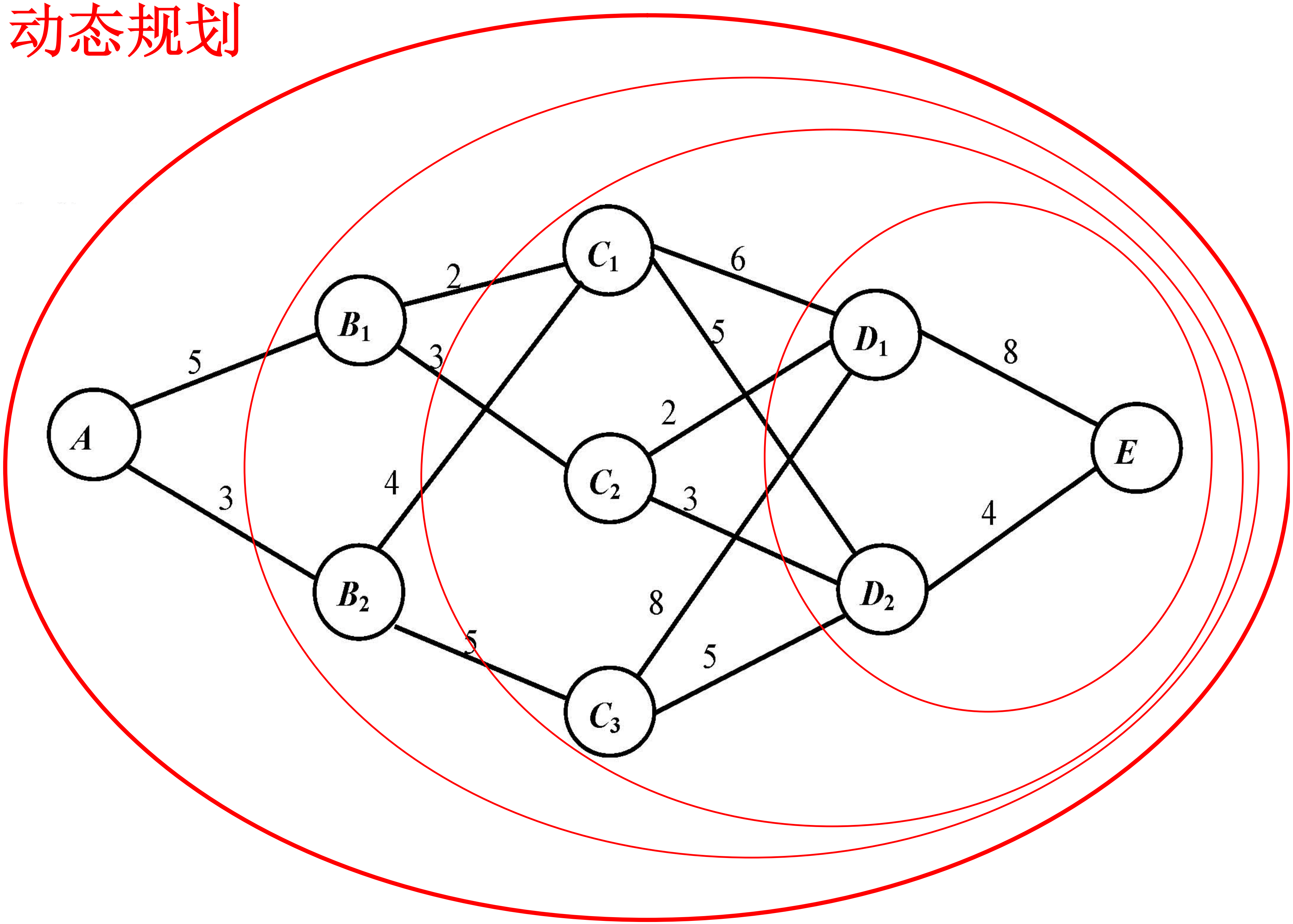
动态规划

动态规划



Bellman 针对具有无后效性的多阶段决策过程的特点，提出了著名的解决多阶段决策问题的最优性原理：

"*全过程的最优策略应该具有这样的性质：无论初始状态和初始决策如何，对以前的决策所形成的状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略*"

最优性原理的含义：最优策略的任何一个后部子过程对应的子策略，必须是该后部子过程初始状态下的最优策略。每个最优策略只能由一系列最优子策略构成。

若由起点A到达终点E的最短路线经过了B_1，则这条路线上由B_1到终点E的子路线，就是从B_1点出发到达终点E的最短路线。

动态规划基本定理：

定理 1：（动态规划的最优性定理）对于给定的初始状态s_1，策略$p_{1,n}^* = \{u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*\} \in P_{1,n}(s_1)$是最优策略的充分必要条件是，对于任意的$k\ (1 < k < n)$，有

$$V_{1,n}(s_1, p_{1,n}^*) = \underset{p_{1,k-1} \in P_{1,k-1}(s_1)}{\mathrm{opt}} \left\{ V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + \underset{p_{k,n} \in P_{k,n}(\bar{s}_k)}{\mathrm{opt}} V_{k,n}(\bar{s}_k, p_{k,n}) \right\}$$

其中，$p_{1,n} = (p_{1,k-1}, p_{k,n})$。

$\bar{s}_k$是由初始状态s_1和子策略$p_{1,k-1}$确定的第 k 阶段状态。

逆推解法递推方程

$$s_{k+1} = T(s_k, u_k)$$

$$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{\text{opt}} \{v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = n, n-1, \cdots, 1$$

终端条件为 $f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$。

最优指标函数 $f_k(s_k)$ 表示第k阶段初始状态为 s_k时，从第k阶段到第n阶段的最优值。

顺推解法递推方程

$$s_k = \widetilde{T}(s_{k+1}, u_k)$$

$$f_k(s_{k+1}) = \underset{u_k \in \widetilde{D}_k(s_{k+1})}{opt} \{v_k(s_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(s_k)\},\quad k = 1, 2, \cdots, n$$

始端条件： $f_0(s_1) = 0$

最优指标函数 $f_k(s_{k+1})$ **表示第** k **阶段末的结束状态为** s_{k+1} **时，从第 1 阶段到第** k **阶段的最优值。**

图与网络优化

树、支撑树与最小（支撑）树

树：没有圈的连通图。

定理 4：图$G=(V,E)$是树的充要条件是：G不含圈，且恰有$p-1$条边。

定理 5：图$G=(V,E)$是树的充要条件是：G是连通图，并且边数$q(G)=p(G)-1$。

定理 6：图$G=(V,E)$是树的充要条件是：任意两顶点之间恰有（有且仅有）一条链。

* 定理4～6可以看作树的等价定义

树、支撑树与最小（支撑）树

求最小树的避圈法

1. 删除网络中所有的边；
2. 加入第一条边：选择成本最低的一条边加入；
3. 加入下一条边：在已有边相连的节点和还没有边相连的节点之间，选一条成本最低的边加入；
4. 重复步骤3，直至所有节点都有边与其相连。

最短路 —— 无负权标号法

$T(v_k)$，加*为$P(v_k)$

前驱节点号（$\lambda(v_k)$）

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	k	$\lambda(k)$
0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	0
	6(1)	3(1)	**1(1)***	∞	∞	∞	∞	∞	4	1
	6(1)	**3(1)***		∞	11(4)	∞	∞	∞	3	1
	5(3)*			∞	11(4)	∞	∞	∞	2	3
				6(2)*	11(4)	∞	∞	∞	5	2
					10(5)	**9(5)***	12(5)	∞	7	5
					10(5)*		12(5)	∞	6	5
							12(5)*	∞	8	5

本次获得永久标号的节点号

最短路 —— 含负权标号法

前驱节点号

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	0	-1(1)	-2(1)	3(1)	∞	∞	∞	∞
2	0	-2-3=-5(3)	-2(1)	-2-5=-7(3)	-1+2=1(2)	-2+1=-1(3)	3+2=5(4)	∞
3	0	-2-3=-5(3)	-2(1)	-2-5=-7(3)	-5+2=-3(2)	-2+1=-1(3)	-7+2=-5(4)	-1+7=6(6)
4	0	-2-3=-5(3)	-2(1)	-2-5=-7(3)	-5+2=-3(2)	-2+1=-1(3)	-7+2=-5(4)	-1+7=6(6)

- 与**Dijkstra**方法的主要差异在于，此处不再区分永久标号和临时标号，所有节点标号均要参与检查更新！

最短路 — 应用

1. 设备更新
2. 生产计划
3. 含约束的最短路问题

最大流

定理 8：可行流 f^* 是最大流，当且仅当（充要条件）不存在关于 f^* 的增广链。

- 若网络存在增广链，则沿增广链可进一步增加流量（增加顺流，减少逆流；而 v_s 流出的是顺流，增加则意味着网络总流量增加）。

增广链：非饱顺流+非零逆流！

最大流量最小截量定理：任一个网络 D 中，从 v_s 到 v_t 的最大流的流量等于分离 v_s, v_t 的最小截集的容量。

最大流 — 标号法

- 标号包括两部分：前驱节点和增流量；
- 取一个已标号的点v_i，对所有未标号点v_j进行标号：

（1）对前向弧(v_i, v_j)若$f_{ij} < c_{ij}$，则给v_j标号$(v_i, l(v_j))$

$$l(v_j) = \mathrm{Min}\{l(v_i), c_{ij} - f_{ij}\}$$

（2）对后向弧(v_i, v_j)若$f_{ji} > 0$，则给v_j标号$(-v_i, l(v_j))$

$$l(v_j) = \mathrm{Min}\{l(v_i), f_{ji}\}$$

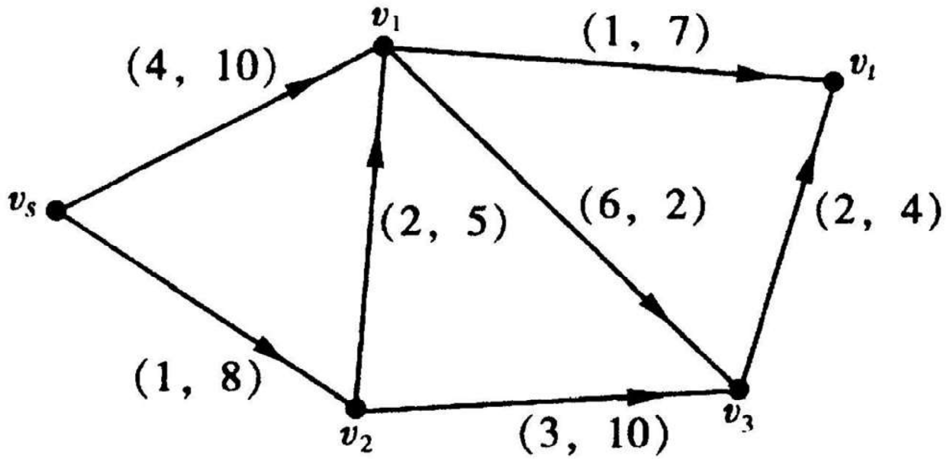
- 一但v_t被标号，则得到一条增广链，转入调整阶段。
- 令调整量 $\theta = l(v_t)$

（1）对前向弧(v_i, v_j)，令 $f'_{ij} = f_{ij} + \theta$；

（2）对后向弧(v_i, v_j)，令 $f'_{ji} = f_{ji} - \theta$；

最小费用最大流

例 12：求最小费用最大流，弧旁数字为(b_{ij},c_{ij}) 。



(1) 取$f^{(0)}=0$为初始可行流。

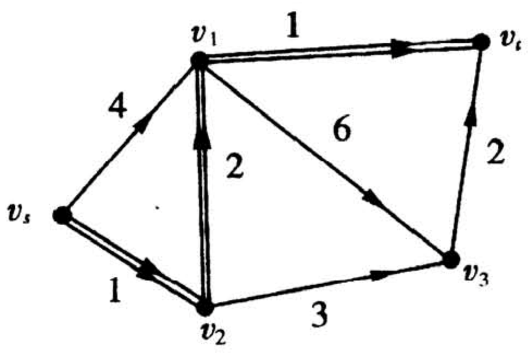
(2) 构造赋权有向图$W(f^{(0)})$，求出从 v_s 到 v_t 的最短路(v_s,v_2,v_1,v_t)（图(a)中双箭头）。

(3) 在原网络 D 中与这条最短路相应的增广链为

$$\mu=(v_s,v_2,v_1,v_t)。$$

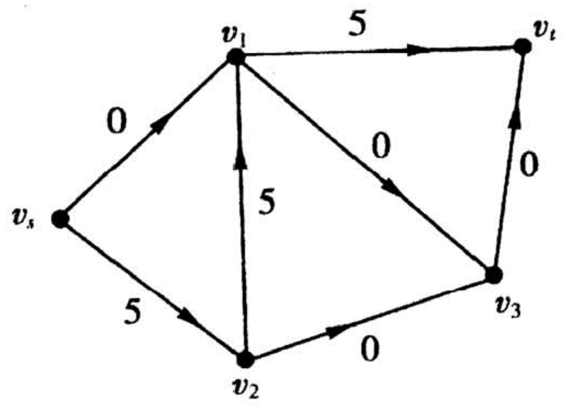
(4) 在μ上进行调整，$\theta=5$，得$f^{(1)}$ （图(b)）。

最小费用最大流



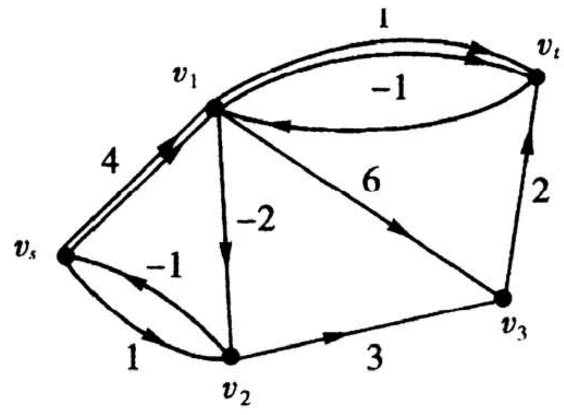
(a)

$W(f^{(0)})$



(b)

$f^{(1)}$, $v(f^{(1)})=5$



(c)

$W(f^{(1)})$

按照上述算法依次得$f^{(1)}$，$f^{(2)}$，$f^{(3)}$，$f^{(4)}$

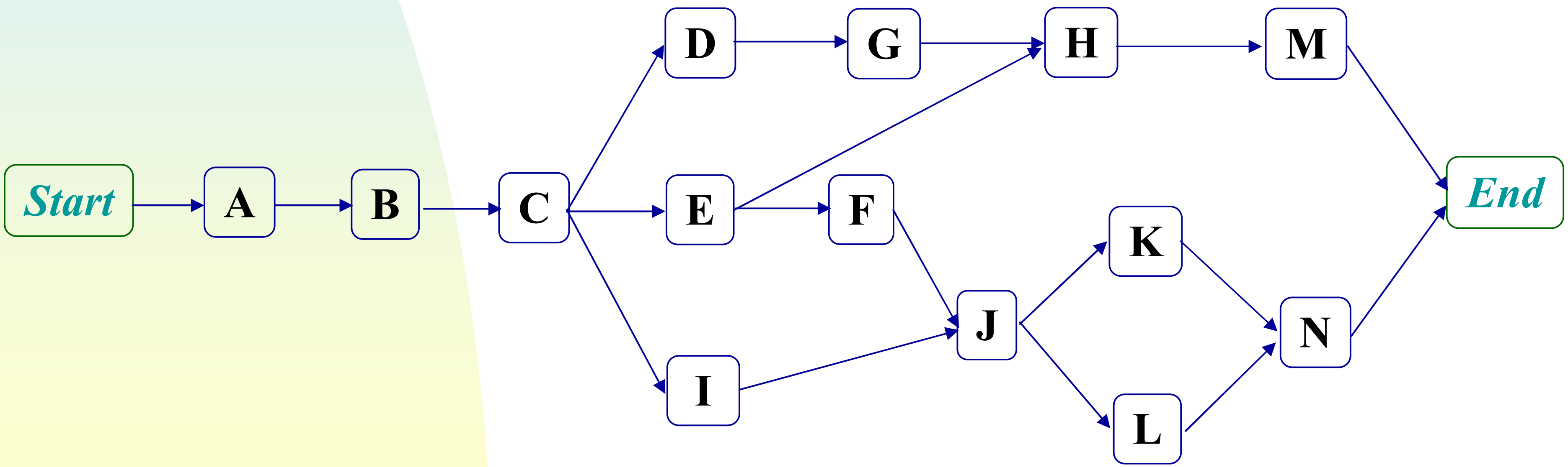
流量依次为 5，7，10，11；构造赋权有向图为$W(f^{(1)}),W(f^{(2)}),W(f^{(3)}),W(f^{(4)})$。$W(f^{(4)})$中已不存在从$v_s$到$v_t$的最短路，故$f^{(4)}$为最小费用最大流。

网络计划

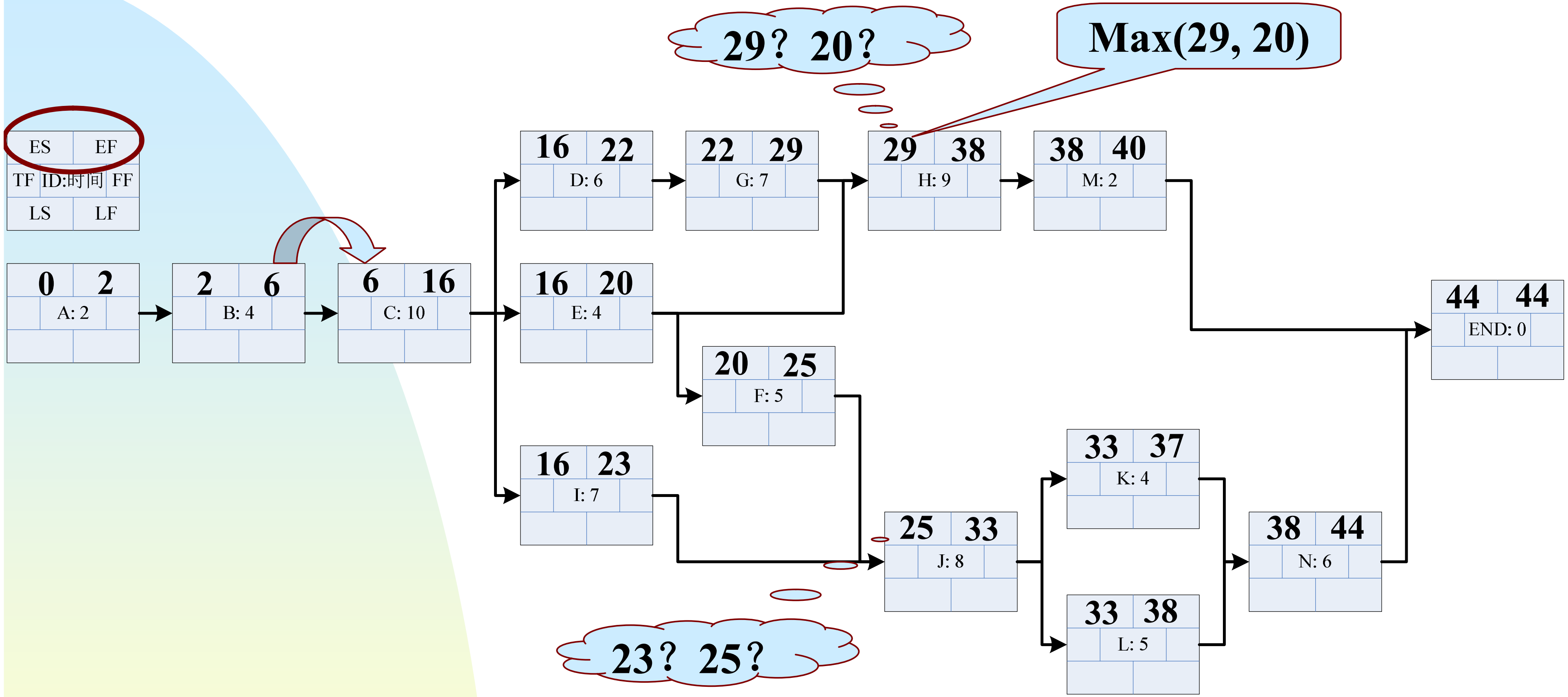
项目网络图绘制（AON）

活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
紧前活动	-	A	B	C	C	E	D	E,G	C	F,I	J	J	H	K,L

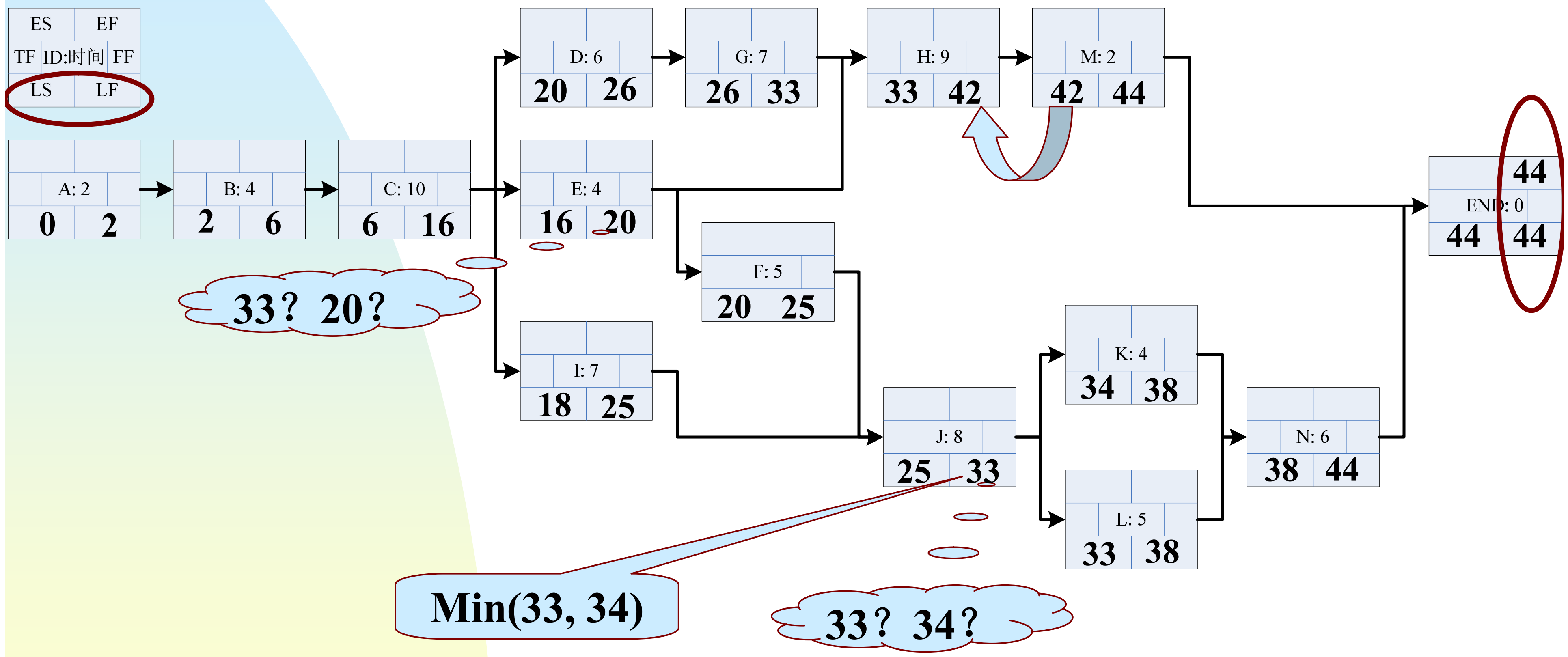
- 从“紧前活动”栏寻找下一步要画的活动
- 若存在多个“开始活动”（无紧前）或多个“结束活动”（无紧后），则必须引入虚拟活动



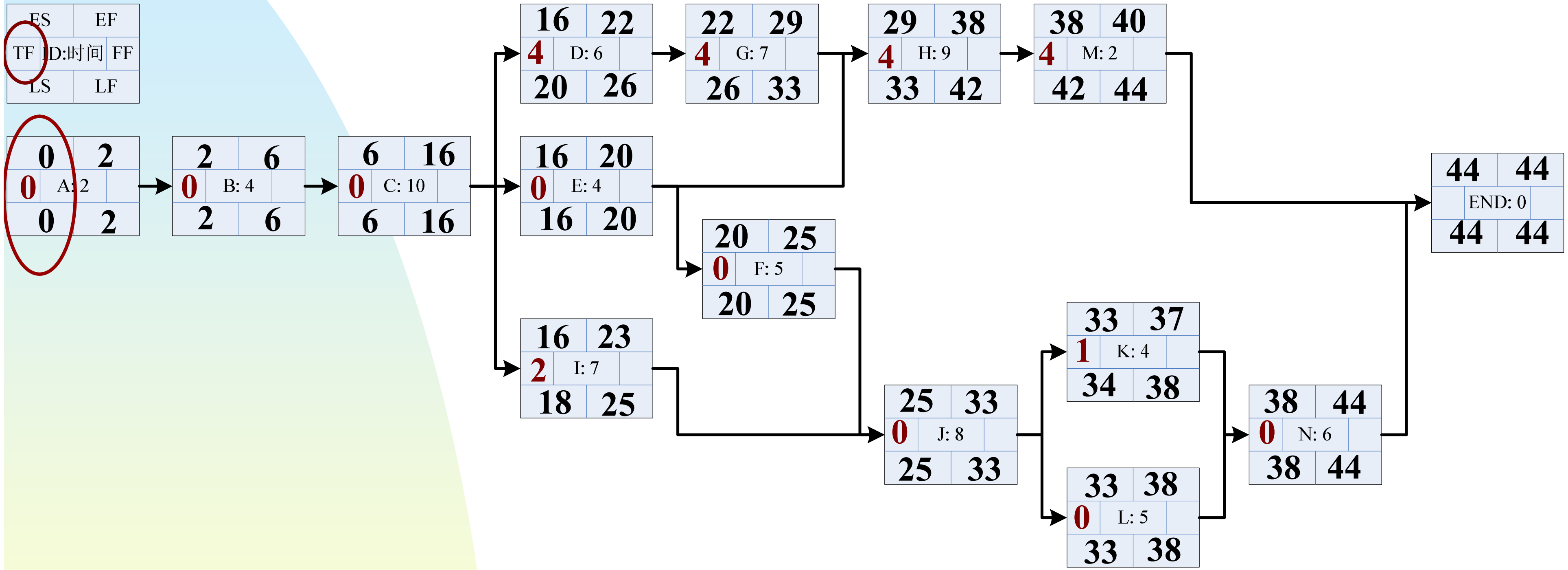
活动日程安排（1）：最早时间



活动日程安排（2）：最晚时间

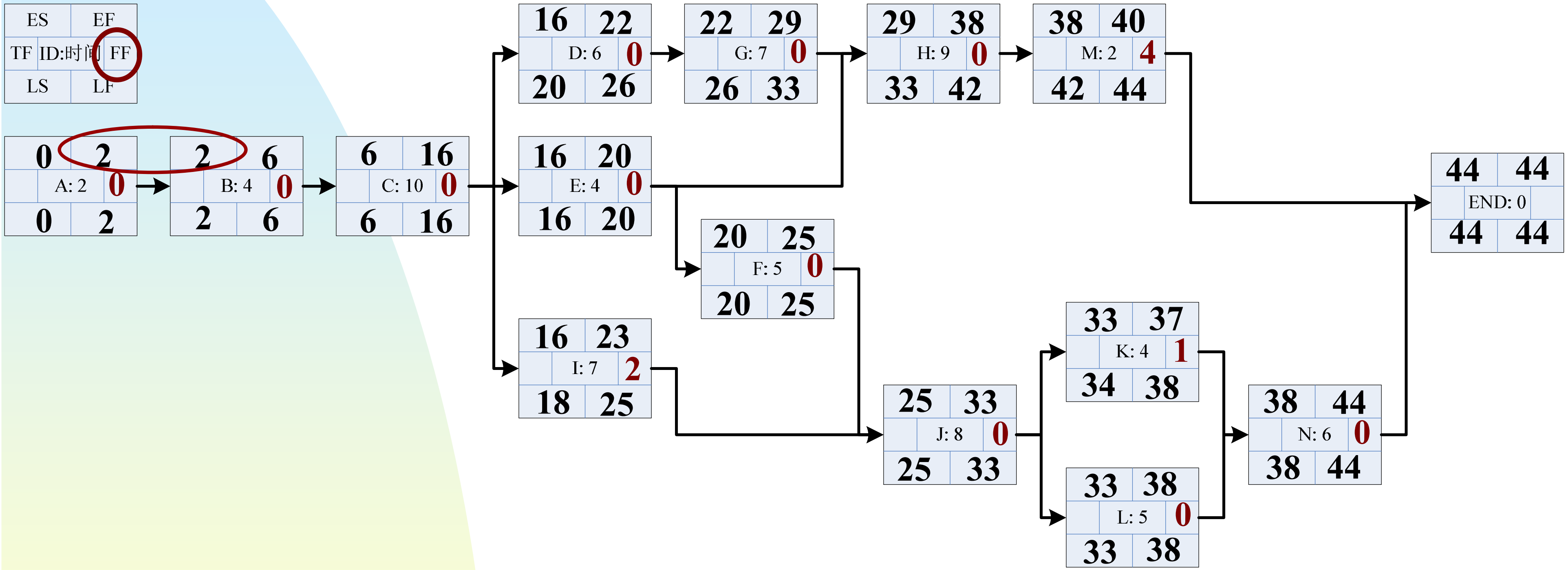


活动日程安排（3）：时差确定



总时差（TF）

活动日程安排（3）：时差确定



自由时差（FF）

按期完工概率计算

- 活动时间的均值和方差
  - 方差的近似估计

$$\sigma^2 = \left(\frac{p-o}{6}\right)^2$$

  - 均值的近似估计

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6}$$

引例各活动时间的均值和方差

活动	o	m	p	均值	方差
A	1	2	3	2	$^1/_9$
B	2	3.5	8	4	1
C	6	9	18	10	4
D	4	5.5	10	6	1
E	1	4.5	5	4	$^4/_9$
F	4	4	10	5	1
G	5	6.5	11	7	1
H	5	8	17	9	4
I	3	7.5	9	7	1
J	3	9	9	8	1
K	4	4	4	4	0
L	1	5.5	7	5	1
M	1	2	3	2	$^1/_9$
N	5	5.5	9	6	$^4/_9$

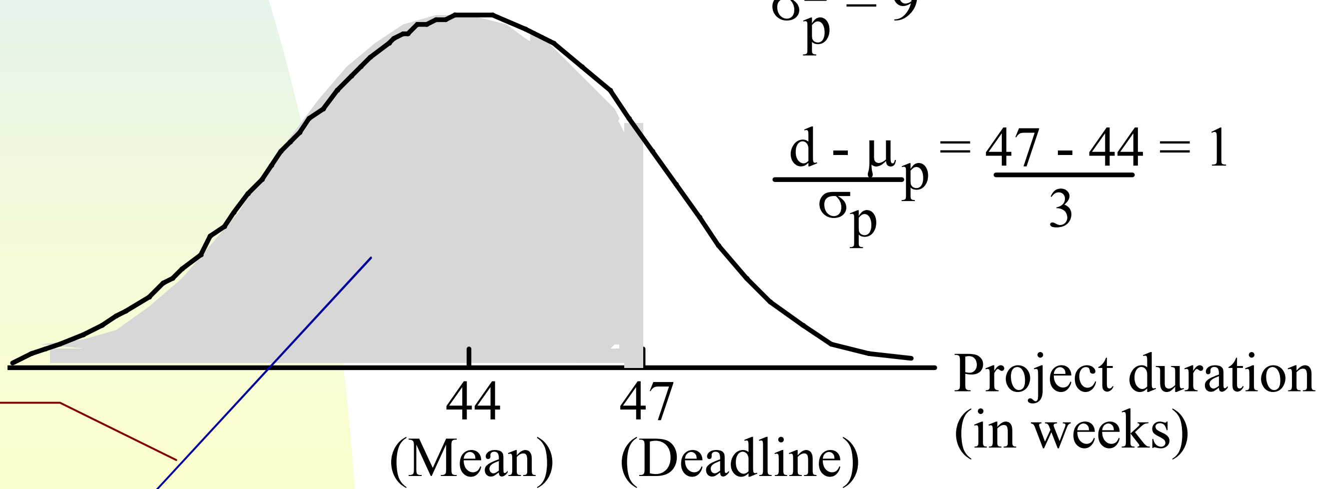
按期完工概率计算

- 根据简化近似1可求得：

$$\mu_P = \text{各关键活动的工期均值之和} = 44$$

- 根据简化近似1和简化近似2可求得：

$$\sigma^2{}_P = \text{各关键活动的工期方差之和} = 9$$



$$\sigma_p^2 = 9$$

$$\frac{d - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{47 - 44}{3} = 1$$

查表

P(*T*≤47) = 0.84

排队论

1.3 排队模型的分类

1971 年排队论符号标准化会议决定将 Kendall 符号扩充为：*X* / *Y* / *Z* / *A* / *B* / *C*

X 表示相继到达间隔时间的分布；

Y 表示服务时间的分布；

Z 表示并列的服务台数目。

A 处填写系统容量限制 *N*；

B 处填写顾客源数目 *m*；

C 处填写服务规则，如先到先服务（FCFS），后到先服务（LCFS）等。

2.2 泊松流

$N(t)$表示在时间区间$[0,t)$内到达的**顾客数**。$P_n(t_1,t_2)$表示在时间区间$[t_1,t_2)$内有n个顾客到达的概率，即

$$P_n(t_1,t_2) = P\{N(t_2) - N(t_1) = n\} \quad (t_2 > t_1, n \geq 0)$$

定义：当$P_n(t_1,t_2)$满足下述三个条件时，称顾客到达形成泊松流。

（1）在不相重叠时间区间内顾客到达数相互独立，称为无后效性。

（2）对充分小的Δt，在时间区间$[t,t+\Delta t)$内有 1 个顾客到达的概率与 t 无关，而约与区间长Δt成正比，即

2.2 泊松流

$$P_1(t,t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \tag{2}$$

λ>0是常数，含义为单位时间内到达的顾客数，或单位时间有一个顾客到达的概率（此时须保证时间“单位”足够小，使得λ<1，也称为概率强度。

（3）对于充分小Δt，在时间区间$[t,t+\Delta t)$内有 2 个或 2 个以上顾客到达的概率极小，以至于可以忽略，即

$$\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)=o(\Delta t) \tag{3}$$

满足上述条件的到达过程，称为泊松流。

$$P_n(\Delta t)=\frac{(\lambda\Delta t)^n}{n!}e^{-\lambda\Delta t},\Delta t>0;\quad n=0,1,2\Lambda$$

2.3 负指数分布

负指数分布的性质：

（1）由条件概率公式易证明

$$P\{T > t + s \mid T > s\} = P\{T > t\} \qquad (11)$$

该性质称为无记忆性或马尔柯夫性。

（2）当输入过程是泊松流，则顾客相继到达的间隔时间 T 必服从负指数分布。

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad (9)$$

排队系统状态概率的计算

记 $$C_n = \frac{\lambda_{n-1} \Lambda \ \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \Lambda \ \mu_3 \mu_2 \mu_1} \quad ,n = 1,2,\Lambda$$

则有 $$P_n = C_n P_0 \quad ,n = 1,2,\Lambda$$

由 $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_0 = 1$$ 有

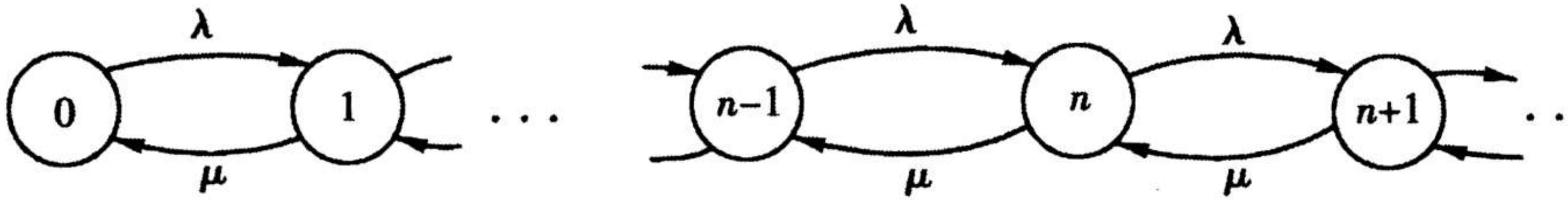
$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} \qquad P_n = \frac{C_n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} \qquad (19')$$

3.1 标准 *M*/*M*/1 模型（*M*/*M*/1/∞/∞）

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \tag{17}$$

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0 \quad n \geq 1 \tag{18}$$

上述关于P_n的差分方程可由状态转移关系表示：



$$P_0 = 1 - \rho, P_n = (1-\rho)\rho^n, n \geq 1, \rho < 1 \tag{19}$$

3.1 标准 *M/M/1* 模型（*M/M/1/∞/∞*）

排队系统主要性能指标

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1)\ L_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} & (2)\ L_q = \dfrac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} \\[2ex]
(3)\ W_s = \dfrac{1}{\mu-\lambda} & (4)\ W_q = \dfrac{\rho}{\mu-\lambda}
\end{array}\right\} \qquad (21)
$$

这些指标之间的相互关系（称为 **Little 公式**）：

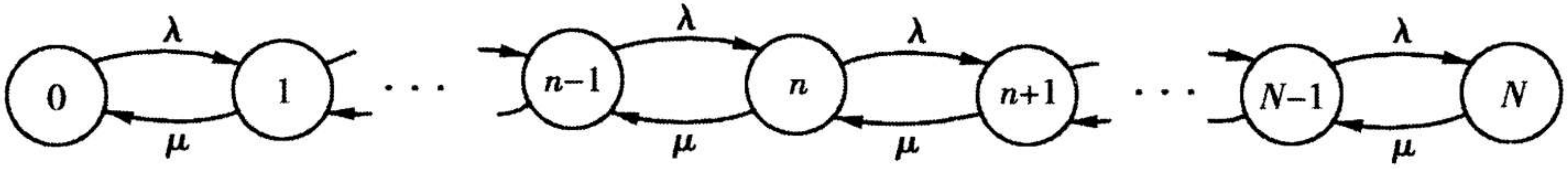
$$
\left.\begin{array}{ll}
(1)\ L_s = \lambda W_s & (2)\ L_q = \lambda W_q \\[2ex]
(3)\ W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} & (4)\ L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu}
\end{array}\right\} \qquad (22)
$$

有限则为λ_e

$$L_q = \rho L_s \qquad W_q = \rho W_s \qquad L_q = L_s - (1-P_0)$$

所有单机系统！

3.2 系统容量有限制的情形（*M*/*M*/1/*N*/∞）



$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda+\mu) P_n, \quad n \le N-1 \\ \mu P_N = \lambda P_{N-1} \end{cases} \qquad (23)$$

解（23）式得到
$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \qquad \rho \neq 1 \\ P_n = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^n, n \le N \end{cases} \qquad (24)$$

注，若$\rho = 1$，可由（23）知$P_0 = P_1 = \dots = P_N = 1/(N+1)$。

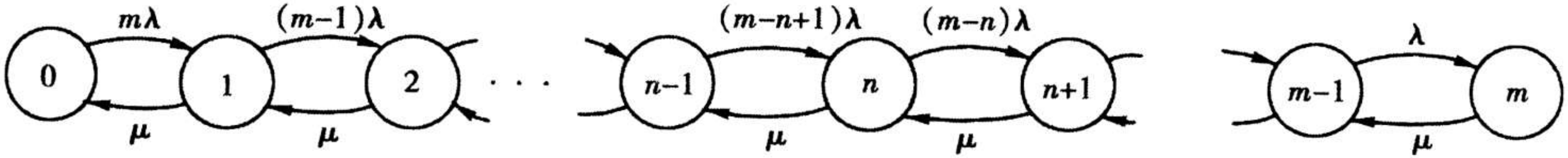
3.2 系统容量有限制的情形（*M*/*M*/1/*N*/∞）

M/*M*/1/*N*/∞型指标归纳如下（当$\rho \neq 1$）：

$$\begin{cases} L_s = \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} & ① \\ L_q = L_s - (1-P_0) = L_s - \dfrac{\lambda_e}{\mu} & ② \\ W_s = \dfrac{L_s}{\mu(1-P_0)} = \dfrac{L_S}{\lambda_e} & ③ \\ W_q = W_s - 1/\mu & ④ \end{cases} \qquad (25)$$

3.3 顾客源为有限的情形（*M/M/*1/∞/*m*）

$$
\begin{cases}
\mu P_1 = m\lambda P_0 \\
\mu P_{n+1} + (m-n+1)\lambda P_{n-1} = [(m-n)\lambda + \mu]P_n\text{，}\ 1 \le n \le m-1 \\
\mu P_m = \lambda P_{m-1}
\end{cases}
$$



$$
\begin{cases}
P_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \\
P_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad (1 \le n \le m)
\end{cases}
\qquad (27)
$$

排列$A_m^{\ i}$

3.3 顾客源为有限的情形（*M/M/1/∞/m*）

系统各项指标为

$$\left\{\begin{array}{ll} L_s = m - \dfrac{\mu}{\lambda}(1-P_0) & \text{①} \\ L_q = m - \dfrac{(\lambda+\mu)(1-P_0)}{\lambda} = L_s - \underline{(1-P_0)} & \text{②} \\ W_s = \dfrac{m}{\mu(1-P_0)} - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{L_S}{\lambda_e} & \text{③} \\ W_q = W_s - 1/\mu & \text{④} \end{array}\right. \quad (28)$$

$$\frac{\lambda_e}{\mu}$$

在机器故障问题中L_s就是平均故障台数，而$m-L_s$表示正常运转的平均台数。

4.1 标准 *M/M/c* 模型(*M/M/c/∞/∞*)

$$\begin{cases} P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{c!} \frac{1}{1-\rho} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \right]^{-1} \\ P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & (n \le c) \\ \frac{1}{c! c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & (n > c) \end{cases} \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} L_s = L_q + \lambda / \mu \\ L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) P_n = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0 \end{cases} \tag{30}$$

$$W_q = L_q / \lambda \qquad W_s = L_s / \lambda$$

4.3 系统容量有限制的情形（$M/M/c/N/\infty$）

特别当 $N=c$（即时制，如停车场），这时

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{c} \dfrac{(c\rho)^k}{k!}} \\ P_n = \dfrac{(c\rho)^n}{n!} P_0 \qquad (0 \le n \le c) \end{cases} \tag{33}$$

当 $n=c$ 即关于 P_c 的公式，被称为爱尔朗呼唤损失公式

(Erlang 1917 年发现，应用于电话系统的设计中)。

5.2 $M/M/1$ 模型中最优服务率μ

取目标函数 z 为单位时间服务成本与顾客在系统逗留费用之和的期望值

$$z = c_s \mu + c_w L_s \qquad (37)$$

c_s为当$\mu = 1$时服务机构单位时间费用；

c_w为每个顾客在系统停留单位时间费用。

将（21）式L_s代入得：$z = c_s \mu + c_w \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$。求极小值

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{c_w}{c_s}\lambda} \qquad (38)$$

对策论

2.1 矩阵对策的数学模型

定义 1：设$G=\{S_1,S_2;A\}$为矩阵对策。其中

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\} \quad S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\} \quad A=(a_{ij})_{m\times n}$$

若等式

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*j^*} \qquad (1)$$

成立，记$V_G=a_{i^*j^*}$，称V_G为对策 G 的值。称使（1）式成立的纯局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$为 G 在纯策略下的解（或平衡局势），α_{i^*}与β_{j^*}分别称为局中人 I，II 的最优纯策略。

2.1 矩阵对策的数学模型

定理 1：矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$在纯策略意义下有解的充分必要条件是：存在纯局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$，使得对一切$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$，均有

$$a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j} \tag{2}$$

注 2：$a_{i^*j^*}$既是矩阵 A 第$i*$行最小值，又是第$j*$列最大值，则$a_{i^*j^*}$为对策的值，且$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$就是对策的解。

2.1 矩阵对策的数学模型

例 6：$G=\{S_1,S_2;A\}$

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$$

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$$

$$A=\begin{bmatrix}6&5&6&5\\1&4&2&-1\\8&5&7&5\\0&2&6&2\end{bmatrix}$$

解：直接在 A 上计算，有

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \min \\ \hline \alpha_1 & 6 & 5 & 6 & 5 & 5^* \\ \alpha_2 & 1 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ \alpha_3 & 8 & 5 & 7 & 5 & 5^* \\ \alpha_4 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ \hline \max & 8 & 5^* & 7 & 5^* & \end{array}$$

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^* j^*}=5$$

其中$i^*=1,3$；$j^*=2,4$，故 (α_1,β_2)，(α_1,β_4)，(α_3,β_2)，(α_3,β_4)四个局势都是对策的解，且$V_G=5$。

2.2 矩阵对策的混合策略

定义 4 ：设$G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$是矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$的混合扩充，如果

$$V_G = \max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) = \min_{y \in S_2^*} \max_{x \in S_1^*} E(x, y) \qquad \textbf{(7)}$$

称V_G为对策G^*的值，使（7）式成立的混合局势(x^*, y^*)为 **G** 在混合策略意义下的解（或简称解），x^*和y^*分别称为局中人 I 和 II 的最优混合策略（或简称最优策略）。

一般对$G = \{S_1, S_2; A\}$及其混合扩充$G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$不加区别，都用$G = \{S_1, S_2; A\}$表示。

2.2 矩阵对策的混合策略

定理 2：矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$在混合策略意义下有解的充要条件是：存在$x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，使(x^*,y^*)为函数$E(x,y)$的一个鞍点，即对一切$\boldsymbol{x}\in S_1^*$，$\boldsymbol{y}\in S_2^*$，有

$$E(x,y^*)\le E(x^*,y^*)\le E(x^*,y) \tag{8}$$

注 4：当 G 在纯策略意义下解存在时，定义 4 中关于对策 G 的值的定义V_G与前面的定义是一致的。当 G 在混合策略意义下的解(x^*,y^*)存在时，$V_G=E(x^*,y^*)$。

2.3 矩阵对策的基本定理

定理 4：设$x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$，则(x^*, y^*)为 G 的解的充要条件是：存在数 v，使得x^*和y^*分别是不等式组（I）和（II）的解，且$v = V_G$。

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \ge v, & j = 1, \cdots, n \\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \ge 0, & i = 1, \cdots, m \end{cases} \qquad (14)
$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \le v, & i = 1, \cdots, m \\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \ge 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases} \qquad (15)
$$

2.3 矩阵对策的基本定理

定理 8：$G_1=\{S_1,S_2;A_1\}$、$G_2=\{S_1,S_2;A_2\}$分别是两个矩阵对策，若$A_1=\{a_{ij}\}_{m\times n}$，$A_2=\{a_{ij}+L\}_{m\times n}$，其中$L$为一常数，那么有：

（1）$V_{G_2}=V_{G_1}+L$；

（2）两个对策的最优策略相同。

定理 9：从对策矩阵中删除被优超的行或列，得到新的对策矩阵。新的对策矩阵的最优策略和最优值一定也是原来矩阵对策的最优策略和最优值。

3.1 公式法

当 A 不存在鞍点时，可证等式组（I）和（II）一定有严格非负解 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 和 $y^* = (y_1^*, y_2^*)$，其中

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (20)$$

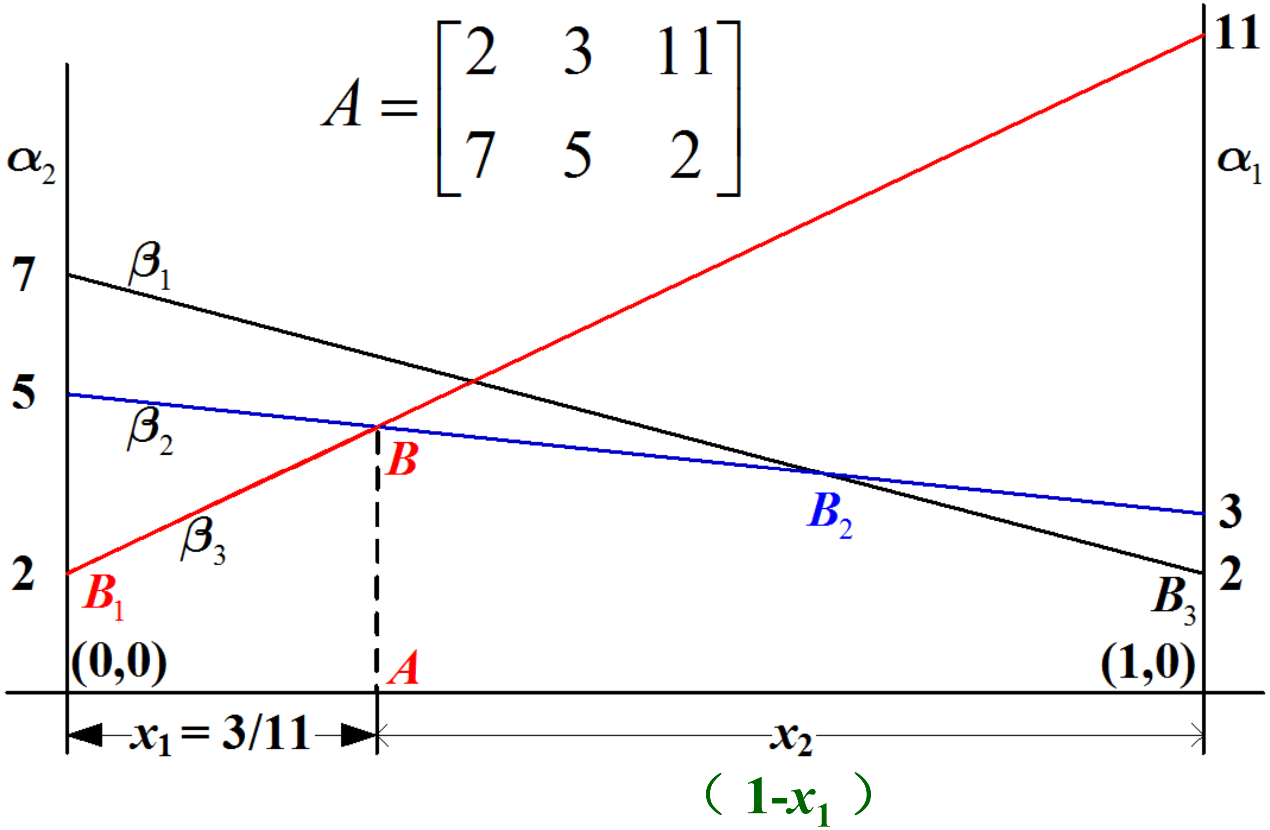
$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (21)$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (22)$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (23)$$

3.2 图解法

当局中人 I 策略为x_1时，其最少可能收入为由局中人 II 选择β_1，β_2，β_3时所确定的三条直线：



$2x_1+7(1-x_1)=V$、$3x_1+5(1-x_1)=V$、$11x_1+2(1-x_1)=V$

在x_1处纵坐标之最小者，即折线$B_1BB_2B_3$。

$E(x,1)$ $E(x,2)$ $E(x,3)$

3.3 线性规划法

原问题

$$\max \ w \qquad\qquad \min \ v$$

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\sum\limits_i a_{ij}x_i \ge w, & j=1,\cdots,n \\ \sum\limits_i x_i = 1 \\ x_i \ge 0, & i=1,\cdots,m\end{cases}$$

和

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\sum\limits_j a_{ij}y_j \le v, & i=1,\cdots,m \\ \sum\limits_j y_j = 1 \\ y_j \ge 0, & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

变换为

等价于**max *w***

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} x_i' \longrightarrow \mathbf{1/w}$$

等价于**min *v***

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} y_j' \longrightarrow \mathbf{1/v}$$

和

$$(P')\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i' \ge 1, & j=1,2,\Lambda\ n \\ x_i' \ge 0, & i=1,2,\Lambda\ n\end{cases}$$

$$(D')\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j' \le 1, & i=1,2,\Lambda\ m \\ y_j' \ge 0, & j=1,2,\Lambda\ n\end{cases}$$

决策论

收益表（单位：千美元）

备选方案	自然状态	
	有石油	干涸
钻探石油	700	–100
出售土地	90	90
先验概率	0.25	0.75

决策矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

不确定型决策 — 乐观准则

乐观准则着眼于未来状况对自己最为有利，因而采用了一种“好中取好”的思想。

其决策过程如下：

1. 对每个备选方案，在其所有自然状态中找出最大收益；
2. 在各方案最大收益中找出最大的一个，所对应的方案即为决策结果。

	自然状态			
备选方案	有油	干涸	方案的最大收益	
钻探石油	700	–100	700	← Max-Max
出售土地	90	90	90	

不确定型决策 — 悲观准则

悲观准则着眼于未来状况对自己最为不利，因而采用了一种“坏中取好”的思想。

其决策过程如下：

1. 对每个备选方案，在其所有自然状态中找出最小收益；
2. 在各方案最小收益中找出最大的一个，所对应的方案即为决策结果。

	自然状态			
备选方案	有油	干涸	方案的最小收益	
钻探石油	700	–100	-100	
出售土地	90	90	90	← Max-Min

不确定型决策 — 最小机会损失准则

又称最小后悔值准则或**Savage**准则。

其决策过程如下：

1. 将收益表中的收益值换成机会损失值（后悔值），得到机会损失值矩阵（机会损失表）；
2. 根据机会损失值矩阵按悲观准则决策。

机会损失值 = 同一状态下最大收益值 - 相应的收益值

$$a'_{ij} = \operatorname*{Max}_{i} a_{ij} - a_{ij} = a^{*}_{j} - a_{ij}$$

机会损失表

	自然状态		
备选方案	有油	干涸	方案的最大机会损失
钻探石油	**0**	**190**	**190** ← **Min-Max**
出售土地	**610**	**0**	**610**

机会损失值a'_{ij}

不确定型决策——折中准则

将每个方案的最好与最坏情况加以折中考虑。

其决策过程如下：

1. 按乐观系数α对各方案的最好收益与最坏收益加权求和；
2. 选取加权收益最大的方案。

$$a_i = \alpha \operatorname*{Max}_j a_{ij} + (1-\alpha) \operatorname*{Min}_j a_{ij} \quad i = 1,2,\Lambda\ ,m$$

取乐观系数 $\alpha = 1/4$

	自然状态		
备选方案	有油	干涸	方案的最大-最小加权收益
钻探石油	700	-100	100 ← **Max**
出售土地	90	90	90

风险决策 — 最大期望收益准则（贝叶斯决策规则）

最大期望收益准则（贝叶斯决策规则）着眼于使方案的期望收益最大化。其决策过程如下：

1. 对每一备选方案，将各自然状态的先验概率与相应的收益相乘，并对所有自然状态求和，即可得到各备选方案的期望收益（**EMV**）；
2. 期望收益（**EMV**）最大的备选方案，即为决策结果。

	自然状态		
备选方案	有石油	干涸	期望收益（**EMV**）
钻探石油	**700**	**–100**	**100** (=700*0.25-100*0.75)
出售土地	**90**	**90**	**90** (=90*0.25+90*0.75)
先验概率	**0.25**	**0.75**	

风险决策——最小期望机会损失准则

又称最小期望后悔值准则。

其决策过程如下：

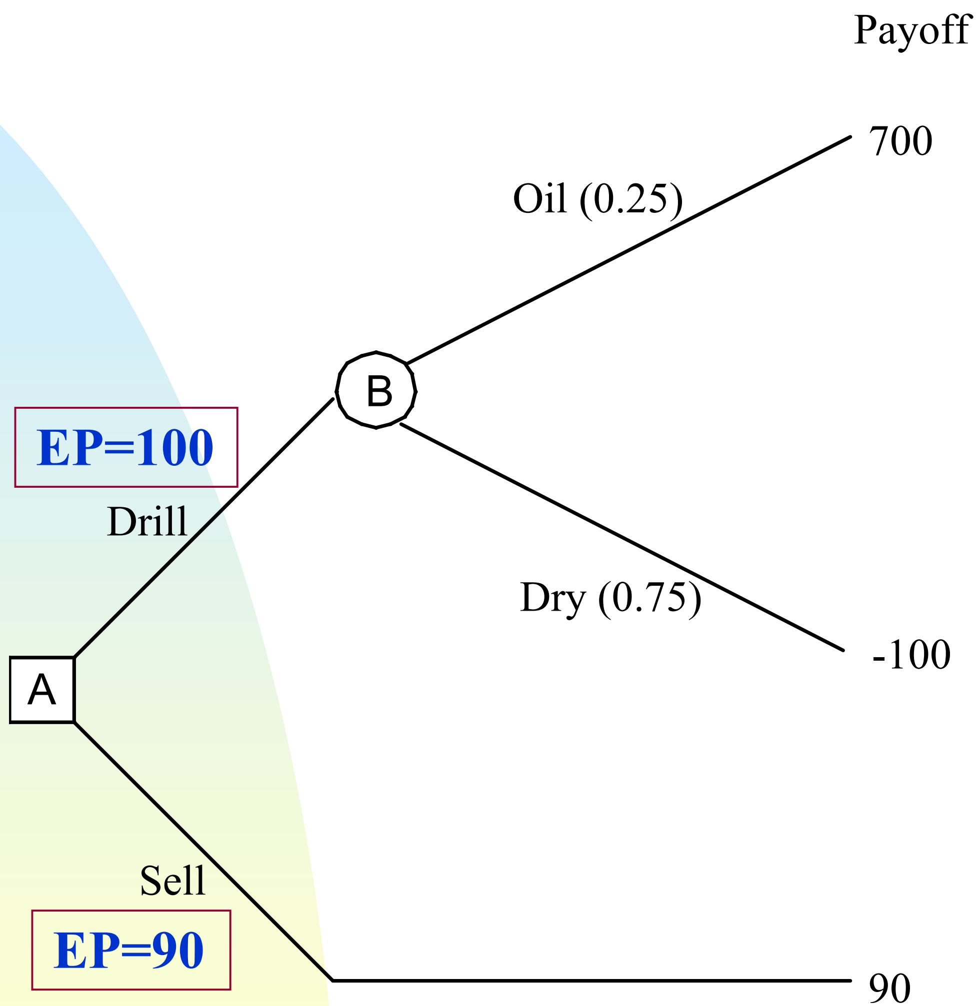
1. 将收益表中的收益值换成机会损失值（后悔值），得到机会损失值矩阵（机会损失表）；
2. 求各方案机会损失值的数学期望，选取期望值最小的方案。

机会损失表

	自然状态		
备选方案	有油	干涸	方案的期望机会损失（EOL_i）
钻探石油	0	190	142.5 ← Min
出售土地	610	0	152.5
先验概率	0.25	0.75	

机会损失值a'_{ij}

决策树



★ 每个决策节点发出的分枝标有相应决策的期望收益，其收益值为其紧后节点的期望收益（若无节点，则为“叶子”值）；从后向前计算。

转折概率的确定

转折概率为先验概率的某一值，大于该值与小于该值会得到不同决策。

设 p = 有石油的概率，则

EP（钻探石油）= p*700+(1-p)*(-100)

EP（出售土地）= 90

令 EP（钻探石油）= EP（出售土地）

求得 $p = 0.2375$

结论：

当 $p < 0.2375$ 时，出售土地

当 $p > 0.2375$ 时，钻探石油

完全情报价值（EVPI）

拥有完全情报（perfect information），意味着能够精确了解未来会出现哪种自然状态。

EP（拥有完全情报）= 如果知道真实自然状态进行决策得到的期望收益

EP（无完全情报）= 以原始的先验概率用贝叶斯规则决策得到的期望收益

完全情报价值**EVPI**（**expected value of perfect information**）**:**

EVPI = EP（拥有完全情报）**- EP**（无完全情报）

EP（拥有完全情报）

备选方案	自然状态 有石油	 干涸
钻探石油	700	–100
出售土地	90	90
各状态下的最大收益	700	90
先验概率	0.25	0.75

EP（拥有完全情报）= 各状态的先验概率与该状态下最大收益乘积之和

$= 700*0.25 + 90*0.75 = 242.5$

新信息的采用 —
利用后验概率估计各自然状态出现的可能性

- 由于先验概率的确定带有很大的主观性，因此它们只是真实概率的一个粗略估计。
- 可以利用所采集到的额外信息来改进这些估计，改进后的概率估计称为后验概率（**Posterior Probability**）。
- 后验概率的形式： ***P***（自然状态 | 实验结果 ）
  - 本例中为 ***P***（**Oil** | 勘探结果 ）和 ***P***（**Dry** | 勘探结果）

条件概率：$P(A|B) = P(AB) / P(B)$

应用决策树进行序贯决策