第 2 章 对偶理论与灵敏度分析

第一节　改进单纯形法

1.1　单纯形法的矩阵表示

1.2　改进单纯形法的计算原理

1.3　基矩阵求逆的简便方法

1.4　改进单纯形法示例

1.5　约简单纯形表

1.1 单纯形法的矩阵表示

设标准型 LP 问题：$\max z = \mathbf{cx}\,;\mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$。

将系数矩阵$\mathbf{A}$分为$\mathbf{A} = (\mathbf{B}\ \ \mathbf{N})$两块，$\mathbf{B}$是基变量的系数矩阵，称为基矩阵，$\mathbf{N}$是非基变量对应的非基矩阵。

相应地，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [\mathbf{c_B}, \mathbf{c_N}]$，也分为基与非基两部分。

标准型 LP 问题由此等价地写为

$$
\begin{aligned}
&\max z = \mathbf{c_B x_B} + \mathbf{c_N x_N} \\
&\text{s.t.} \quad \mathbf{B x_B} + \mathbf{N x_N} = \mathbf{b} \\
&\qquad\qquad \mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

若$\mathbf{B}$是可行基矩阵，则对约束方程两边左乘$\mathbf{B}^{-1}$，得到

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathbf{B}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\Rightarrow \mathbf{x}_\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}$$

代入目标函数，有

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathbf{B}+\mathbf{c}_\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}=\mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}+\mathbf{c}_\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} \\ &= \mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}+(\mathbf{c}_\mathbf{N}-\mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_\mathbf{N} \end{aligned}$$

可见，非基变量检验数用矩阵表示就是$\mathbf{c}_\mathbf{N}-\mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$；令$\mathbf{x}_\mathbf{N}=\mathbf{0}$，得到一个基可行解：$\mathbf{x}_\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$；当前目标函数值就是$\mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$；

其中$\mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}$是一个行向量，称为单纯形乘子。

高斯消元相当于对单纯形表左乘基矩阵的逆矩阵 $\mathbf{B}^{-1}$：

	基变量$\mathbf{x_B}$	非基变量$\mathbf{x_N}$	等式右边项 RHS
系数矩阵	$\mathbf{B^{-1}B = I}$	$\mathbf{B^{-1}N}$	$\mathbf{B^{-1}b}$
检验数	$\underbrace{\mathbf{0} \qquad \mathbf{c_N - c_B B^{-1} N}}_{\mathbf{c - c_B B^{-1} A}}$		

迭代后的单纯形表中，非基变量$\mathbf{x_N}$各列对应的$\mathbf{c_N - c_B B^{-1} N}$就是其检验数；基变量$\mathbf{x_B}$各列对应的检验数为$\mathbf{c_B - c_B B^{-1} B = 0}$，因此所有检验数可统一表示为：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c - c_B B^{-1} A}$$

计算基矩阵的逆矩阵$\mathbf{B}^{-1}$是单纯形法的核心。

1.2 改进单纯形法的计算原理

假设非基变量x_k入基，则将单纯形表的x_k列单独写成：

	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{x_{N'}}$	x_k	右端项
系数	$\mathbf{B^{-1}B = I}$	$\mathbf{B^{-1}N'}$	$\mathbf{y}_k = \mathbf{B^{-1}p}_k$	$\mathbf{x_B = B^{-1}b}$
$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{c_{N'} - c_B B^{-1} N'}$	$c_k - \mathbf{c_B B^{-1} p}_k$	

其中$\mathbf{N}' = (\mathbf{p}_{m+1}, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n)$，表示非基矩阵除去了$\mathbf{p}_k$列；此时$\theta$规则就是：$\min_i \left\{ \frac{(\mathbf{x_B})_i}{(\mathbf{y}_k)_i} = \frac{(\mathbf{B^{-1}b})_i}{(\mathbf{y}_k)_i} \middle| (\mathbf{y}_k)_i > 0 \right\}$。

显然，$\mathbf{B^{-1}N'}$的计算可以略去以减少计算量，由此改进单纯形计算过程。

✧ 改进单纯形法计算步骤（max 问题）

Step1 设当前基矩阵和非基矩阵为：

$$\mathbf{B} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \dots, \mathbf{p}_m) \quad \mathbf{N} = (\mathbf{p}_{m+1}, \dots, \mathbf{p}_k, \dots, \mathbf{p}_n)$$
$$\mathbf{x}_\mathbf{B} = (x_1, \dots, x_r, \dots, x_m) \quad \mathbf{x}_\mathbf{N} = (x_{m+1}, \dots, x_k, \dots, x_n)$$
$$\mathbf{c}_\mathbf{B} = (c_1, \dots, c_r, \dots, c_m) \quad \mathbf{c}_\mathbf{N} = (c_{m+1}, \dots, c_k, \dots, c_n)$$

求基矩阵的逆阵$\mathbf{B}^{-1}$，确定基可行解：$\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$；

Step2 计算非基变量检验数：$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_\mathbf{N} - \mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$，若其第$k$个分量为正且最大，则令$x_k$入基，$x_k$在原始系数矩阵中的向量为$\mathbf{p}_k$，对应的主元列须变换为：$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_k$；

Step 3 若θ规则确定x_r出基：$\min_i \left\{ \frac{(\mathbf{x_B})_i}{(\mathbf{y}_k)_i} \middle| (\mathbf{y}_k)_i > 0 \right\} = \frac{(\mathbf{x_B})_r}{(\mathbf{y}_k)_r}$，

则交换$\mathbf{p}_r$和$\mathbf{p}_k$，得到新的基矩阵：

$$\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r-1}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{r+1} \dots, \mathbf{p}_m)$$
$$\mathbf{x}_{\widehat{\mathbf{B}}} = (x_1, \dots, x_{r-1}, x_k, x_{r+1}, \dots, x_m)$$
$$\mathbf{c}_{\widehat{\mathbf{B}}} = (c_1, \dots, c_{r-1}, c_k, c_{r+1}, \dots, c_m)$$
$$\widehat{\mathbf{N}} = (\mathbf{p}_{m+1}, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n)$$
$$\mathbf{x}_{\widehat{\mathbf{N}}} = (x_{m+1}, \dots, x_{k-1}, x_r, x_{k+1}, \dots, x_n)$$
$$\mathbf{c}_{\widehat{\mathbf{N}}} = (c_{m+1}, \dots, c_{k-1}, c_r, c_{k+1}, \dots, c_n)$$

Step 4 求新基$\widehat{\mathbf{B}}$的逆矩阵$\widehat{\mathbf{B}}^{-1}$，返回（1），直到非基变量检验数$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_{\widehat{\mathbf{N}}} - \mathbf{c}_{\widehat{\mathbf{B}}}\widehat{\mathbf{B}}^{-1}\widehat{\mathbf{N}}$满足最优性条件或终止条件。

如何求新的基矩阵 $\widehat{\mathbf{B}}$ 的逆阵 $\widehat{\mathbf{B}}^{-1}$？

1.3　基矩阵求逆的简便方法

将矩阵B和单位矩阵I组成一个增广矩阵：$(\mathbf{B},\mathbf{I})$，则对增广矩阵左乘$\mathbf{B}^{-1}$，有

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B},\mathbf{I})=(\mathbf{I},\mathbf{B}^{-1})$$

矩阵左乘等价于高斯消元将增广矩阵$(\mathbf{B},\mathbf{I})$变换为$(\mathbf{I},\mathbf{B}^{-1})$，则原来单位矩阵I所在的位置，就相应变成了矩阵B的逆矩阵$\mathbf{B}^{-1}$。

高斯消元的计算较为复杂，不适合高维矩阵求逆；借助初等矩阵，可以构造更简便的方法。

（一）初等矩阵

首先，高斯消元就是将矩阵各列变换成单位向量。设有矩阵A：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{21} & \cdots & y_{rk} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}，其第k列\ \mathbf{y}_k=\begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ [y_{rk}] \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix}。$$

问题：能否不使用高斯消元，而通过左乘某个矩阵（更容易计算且与高斯消元等价），使$\mathbf{y}_k$列以y_{rk}为主元变换为单位向量。即

$$\mathbf{E}\mathbf{y}_k=\mathbf{E}\begin{bmatrix} y_{1k}\\ \vdots\\ [y_{rk}]\\ \vdots\\ y_{mk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \xleftarrow{\text{第}r\text{个元素为 1，其余为 0}} \Longrightarrow \mathbf{E}=?$$

构造初等矩阵（$m\times m$维）$\mathbf{E}_r$：

$$\mathbf{E}_r=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & -y_{1k}/y_{rk} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & -y_{2k}/y_{rk} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1/y_{rk} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -y_{m-1,k}/y_{rk} & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{-y_{mk}/y_{rk}}_{\text{第}r\text{列}} & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{第}r\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

显然有，

$$
\mathbf{E}_r\mathbf{y}_k=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & -y_{1k}/y_{rk} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & -y_{2k}/y_{rk} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & {\color{red}1/y_{rk}} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -y_{m-1,k}/y_{rk} & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{-y_{mk}/y_{rk}}_{\color{blue}\text{第}r\text{列}} & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{1k}\\ y_{2k}\\ \vdots\\ y_{rk}\\ \vdots\\ y_{m-1,k}\\ y_{mk}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ {\color{red}1}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\xleftarrow{\color{blue}\text{第}r\text{行}}
$$

例，以下述矩阵**A**第 5 列的<u>第 2 行</u>元素为主元，将第 5 列变换为单位向量，求所需的初等矩阵。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -4 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 2 & \underline{2} & -1\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}? & ? & ? & ? & 0 & ?\\ ? & ? & ? & ? & 1 & ?\\ ? & ? & ? & ? & 0 & ?\\ ? & ? & ? & ? & 0 & ?\\ ? & ? & ? & ? & 0 & ?\end{bmatrix}$$

所构造的初等矩阵的主元应该在<u>第 2 行第 2 列</u>：

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(-3)/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & \underline{2} & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times & \times & 1 & \times \\ \times & \times & \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times & \times & 0 & \times \end{bmatrix}$$

（二）基于初等矩阵计算$\mathbf{B}^{-1}$

在单纯形法的迭代过程中，初始基矩阵一般是单位矩阵，其逆矩阵是已知的——就是自身。

假设迭代到某一步，基矩阵为

$$\mathbf{B}=(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_r,\dots,\mathbf{p}_m)$$

迭代的任务就是将它化成单位矩阵$\mathbf{I}$。

在迭代过程中，系数矩阵经历了如下变化：

$$\mathbf{A}\ =(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_r,\dots,\mathbf{p}_m,\dots,\mathbf{p}_k,\dots\ \ \mathbf{I}\ \ )$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A}'=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r,\dots,\mathbf{e}_m,\dots,\mathbf{y}_k,\dots\mathbf{B}^{-1})$$

其中$\mathbf{e}_r$为单位列向量，其第r个元素为1，其余为0。

上述变换相当于给增广矩阵左乘 $\mathbf{B}^{-1}$，所以矩阵第k列$\mathbf{p}_k$变化为：$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_k$。

假设有另外一个基矩阵 $\widehat{\mathbf{B}}$，它和上述基 $\mathbf{B}$ 的区别就是某个列不一样：用$\mathbf{p}_k$代替了基$\mathbf{B}$中的$\mathbf{p}_r$。求基可行解，就要确定这个新的基$\widehat{\mathbf{B}}$的逆阵$\widehat{\mathbf{B}}^{-1}$。

固然可以使用高斯消元法：

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \dots, \mathbf{p}_m, \dots, \mathbf{p}_k, \dots \quad \mathbf{I} \quad)$$

$$\downarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_r, \dots \widehat{\mathbf{B}}^{-1})$$

则立得$\widehat{\mathbf{B}}^{-1}$，但计算量较大。

比较上述两种变换的区别：

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \dots, \mathbf{p}_m, \dots, \mathbf{p}_k, \dots \quad \mathbf{I} \quad) \to$$

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{y}_k, \dots \mathbf{B}^{-1})$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \dots, \mathbf{p}_m, \dots, \mathbf{p}_k, \dots \quad \mathbf{I} \quad) \to$$

$$\widehat{\mathbf{A}}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_r, \dots \widehat{\mathbf{B}}^{-1})$$

比较上述变换结果（注，$\mathbf{B}^{-1}$已由上一步迭代得到）：

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{y}_k, \dots \mathbf{B}^{-1})$$

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_r, \dots \widehat{\mathbf{B}}^{-1})$$

可见，若将增广矩阵$\mathbf{A}'$中的$\mathbf{y}_k$线性变换为单位向量$\mathbf{e}_r$，则原基矩阵的逆矩阵$\mathbf{B}^{-1}$就变成了新基矩阵的逆阵$\widehat{\mathbf{B}}^{-1}$。

要将列向量$\mathbf{y}_k$变成单位向量$\mathbf{e}_r$，只要给增广矩阵$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{y}_k, \dots \mathbf{B}^{-1})$的$\mathbf{y}_k$列左乘一个关于元素$y_{rk}$的初等矩阵$\mathbf{E}_r$即可，即

$$\mathbf{E}_r \mathbf{y}_k = \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \xleftarrow{\text{出基变量所在的第}r\text{行}} \\ \\ \\ \end{array}$$

左乘的初等矩阵$\mathbf{E}_r$应为：

$$\mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -y_{1k}/y_{rk} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -y_{2k}/y_{rk} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\color{red}1/y_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{-y_{mk}/y_{rk}}_{\color{blue}\text{第}r\text{列}} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ {\color{blue}\text{第}r\text{行}} \\ \longleftarrow \\ \\ \\ \end{array}$$

其中，

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ {\color{red}y_{rk}} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix}。$$

左乘之后：

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{y}_k, \dots \mathbf{B}^{-1})$$

$$= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_r, \dots \mathbf{E}_r \mathbf{B}^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_r, \dots \quad \widehat{\mathbf{B}}^{-1} \ )$$

因此，新的基矩阵的逆矩阵就是

$$\widehat{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{E}_r \mathbf{B}^{-1}$$

可见，确定新的基矩阵的逆矩阵，只需要当前基矩阵的逆矩阵$\mathbf{B}^{-1}$，和主元所在的当前列：$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_k$。

其中$\mathbf{y}_k$用来构造初等矩阵$\mathbf{E}_r$。

1.4　约简单纯形表

改进单纯形法每步所需计算的数据有：基矩阵的逆矩阵（简称基逆）$\mathbf{B}^{-1}$、基可行解$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$、检验数$\boldsymbol{\sigma}$、主元列$\mathbf{y}_k$和比值$\boldsymbol{\theta}$；不需计算其他变量对应的列。

$c_j \rightarrow$			10	15	12	0	0	0	$\boldsymbol{\theta}$
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{y}_k$	x_2	x_3	$\mathbf{B}^{-1}$			
0	x_4	1.5	[7.5]	0	-6.5	1	-1/2	0	1/5
15	x_2	2.5	-5/6	1	2.5	0	1/6	0	-
0	x_6	2.5	17/6	0	-1.5	0	-1/6	1	15/17
$\boldsymbol{\sigma}$			45/2		$-51/2$		$-5/2$		

改进单纯形法比单纯形表节省了计算量。

✧ “约简”单纯形表

对单纯形表进行改造，形成“约简”单纯形表，辅助改进单纯形法的计算过程。

$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{B^{-1}b}$	$\mathbf{B^{-1}}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_r$
			$\left[\quad\right]$			$\left[\quad\right]$

每一步将新的基矩阵的逆矩阵填入上表，根据$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c_N} - \mathbf{c_B B^{-1} N}$确定入基变量后，写出$\mathbf{y}_k = \mathbf{B^{-1} p}_k$，然后根据规则确定出基变量$x_r$，以$y_{rk}$为主元构造初等变换阵$\mathbf{E}_r$，确定新的基矩阵的逆阵$\mathbf{E}_r\mathbf{B^{-1}}$，进行下一步迭代，直到结束。

例 2，用改进单纯形法求 **LP** 问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad = 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

解，系数矩阵

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一步：初始基逆$\mathbf{B}_0^{-1}$与初始基可行解$\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_0}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_0}$	$\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_0^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_0}$
0 0 0	x_3 x_4 x_5	8 16 12	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$			

↓检验数：$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{N}}=(\sigma_1,\sigma_2)=\mathbf{c}_{\mathbf{N}}-\mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{N}_0}&=(\sigma_1,\sigma_2)=\mathbf{c}_{\mathbf{N}_0}-\mathbf{c}_{\mathbf{B}_0}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{N}_0\\&=(c_1,c_2)-(c_3,c_4,c_5)\mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\\&=(2,3)-(0,0,0)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\4&0\\0&4\end{bmatrix}=(2,3)\end{aligned}$$

↓主元列：$\mathbf{y}_k=\mathbf{y}_2=\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$

$\mathbf{c_{B_0}}$	$\mathbf{x_{B_0}}$	$\mathbf{B_0}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_0^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_0}$
0 0 0	x_3 x_4 x_5	8 16 12	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	2 0 [4]	8/2 — 12/4	

↓主元素：$(\mathbf{y}_k)_3=[4]$，构造初等阵$\mathbf{E}_{r_0}$

$\mathbf{c_{B_0}}$	$\mathbf{x_{B_0}}$	$\mathbf{B_0}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_0^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_0}$
0 0 0	x_3 x_4 x_5	8 16 12	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	2 0 [4]	8/2 — 12/4	$\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{bmatrix}$

第二步：新的基逆$\mathbf{B}_1^{-1}=\mathbf{E}_{r_0}\mathbf{B}_0^{-1}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_1^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_1}$
0 0 3	x_3 x_4 x_2		$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{bmatrix}$			

↓①求基可行解：$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_1^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_1}$
0 0 3	x_3 x_4 x_2	2 16 3	$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{bmatrix}$			

↓②计算检验数：$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{N}}=(\sigma_1,\sigma_5)=\mathbf{c}_{\mathbf{N}}-\mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{N}_1}=(\sigma_1,\sigma_5)=\mathbf{c}_{\mathbf{N}_1}-\mathbf{c}_{\mathbf{B}_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{N}_1=(c_1,c_5)-(c_3,c_4,c_2)\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_5)$$

$$=(2,0)-(0,0,3)\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=(2,-\frac{3}{4})$$

↓③主元列：$\mathbf{y}_k=\mathbf{y}_1=\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_1^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_1}$
$\begin{matrix}0\\0\\3\end{matrix}$	$\begin{matrix}x_3\\x_4\\x_2\end{matrix}$	$\begin{matrix}2\\16\\3\end{matrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{bmatrix}$	$\begin{matrix}[1]\\4\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}2/1\\16/4\\-\end{matrix}$	

↓④基于主元素：$(\mathbf{y}_k)_1=[1]$，构造初等阵$\mathbf{E}_{r_1}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_1}$	$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_1^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_1}$
$\begin{matrix}0\\0\\3\end{matrix}$	$\begin{matrix}x_3\\x_4\\x_2\end{matrix}$	$\begin{matrix}2\\16\\3\end{matrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{bmatrix}$	$\begin{matrix}[1]\\4\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}2/1\\16/4\\-\end{matrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

第三步：新的基逆$\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E}_{r_1}\mathbf{B}_1^{-1}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_2}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_2}$	$\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_2^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_2}$
2 0 3	x_1 x_4 x_2	2 8 3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$	-1/2 [2] 1/4	— 8/2 $\frac{3}{1/4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/8 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{N}_2} = (\sigma_3, \sigma_5) = \mathbf{c}_{\mathbf{N}_2} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}_2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{N}_2$$

$$= (c_3, c_5) - (c_1, c_4, c_2)\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_5)$$

$$= (0,0) - (2,0,3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-2, \frac{1}{4})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

第四步：新的基逆$\mathbf{B}_3^{-1}=\mathbf{E}_{r_2}\mathbf{B}_2^{-1}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{B}_3}$	$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_3}$	$\mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}_3^{-1}$	$\mathbf{y}_k$	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{E}_{r_3}$
2 0 3	x_1 x_5 x_2	4 4 2	$\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}$			

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{N}_3}=(c_3,c_4)-(c_1,c_5,c_2)\mathbf{B}_3^{-1}(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4)$$

$$=(0,0)-(2,0,3)\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{8}\right)$$

$$\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z^*=\mathbf{c}_{\mathbf{B}_3}\mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{b}=(2,0,3)\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}=14$$

课堂练习

借助约简单纯形表，用改进单纯形法求解 LP 问题：

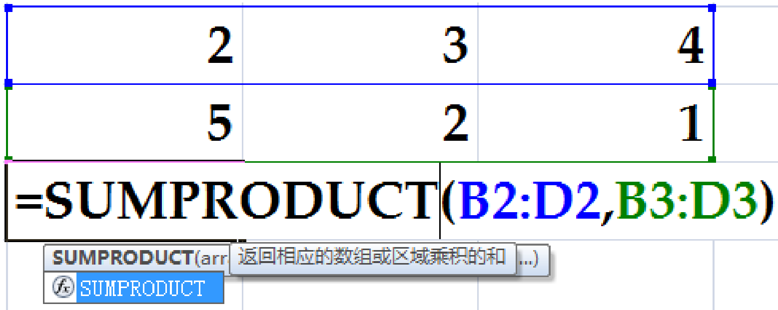
$$\max z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + \quad x_3 \le 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \le 15 \\ 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \le 5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

附录：用 Excel 辅助做矩阵相乘

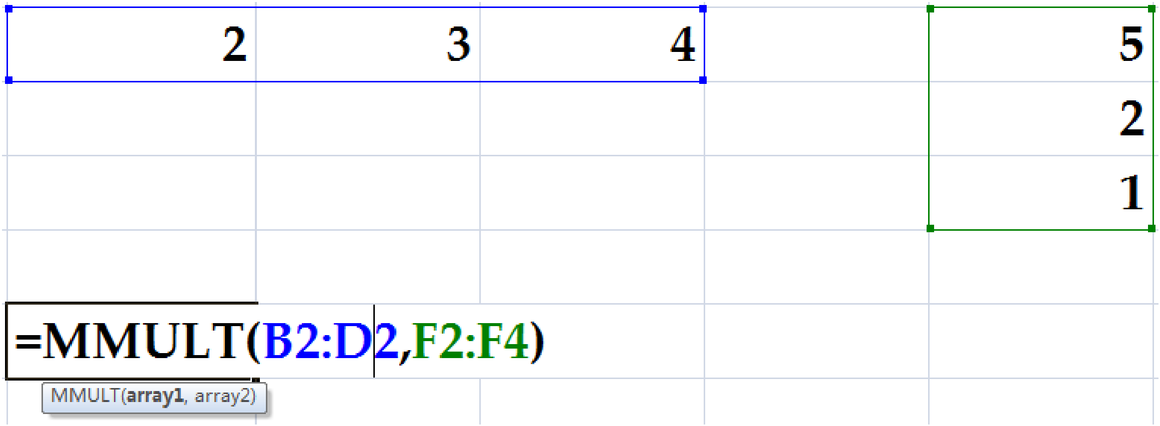
（1）向量相乘

在 Excel 中，一行有n个数据，另一行也有n个数据，求对应元素乘积之和，可调用 SUMPRODUCT()函数：



得到正确结果：20。

而如果第二行n个数据是按列放置，即行向量和列向量的点积，就必须使用矩阵相乘函数：MMULT()。



得到正确结果：20。

（2）矩阵相乘

第一步，使用 MMULT()函数，在任一单元格输入公式，输入计算公式：

2	3	4		5	4
2	3	1		2	5
				1	10
=MMULT(B2:D3,F2:G4)					

MMULT(**array1**, array2)

第二步，按 Enter 键，计算，可得到第一个矩阵第一行和第二个矩阵第一列对应相乘的结果：

2	3	4		5	4
2	3	1		2	5
				1	10
20					

第三步，从已经计算的单元格出发，选定矩阵相乘结果矩阵的单元格范围：

2	3	4		5	4
2	3	1		2	5
				1	10
20					

第四步，按 F2 激活功能键，然后按 Ctrl+Shift+Enter 组合键，即可完成矩阵相乘运算。

2	3	4		5	4
2	3	1		2	5
				1	10
20	63				
17	33				