# 2015 级数学分析(I)期末试题

姓名: ____________ 班级: ________ 学号: ________

考试日期: 2016年1月21日

**一、多项选择题:**（每题 5 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)\in \mathrm{R}([a,b])$, 则变上限积分函数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 一定是$[a,b]$ 上的（A C E）:

   A. 连续函数； B. 可微函数； C. 可积函数； D. 连续可微函数； E. 一致连续函数。

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则 $f(x)$ **不一定**满足以下哪些条件?（B C D）

   A. 割线斜率递增； B. 切线斜率递增； C. 切线总是位于割线的上方； D. $f''(x)\geq 0$.

3. 下面哪些命题一定是成立的?（B E）

   A. $\exists\delta>0$, 使得 $\sup\limits_{x\in(x_0-\delta,x_0)} f(x)\leq \limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$;

   B. 若存在 $[a,b]$ 的两个划分 $\pi,\pi'$, 使得 $\underline{S}(f,\pi)=\overline{S}(f,\pi')$, 则 $f\in\mathrm{R}([a,b])$;

   C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbf{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$;

   D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbf{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$;

   E. 若 $R(x,y)$ 是有理函数，则 $R(\cos x,\sin x)$ 的原函数一定是初等函数。

4. 下面哪些命题一定是**错误**的?（B C）

   A. 在 $(a,b)$ 上一致连续的函数，可以在 $[a,b]$ 上延拓成连续函数；

   B. 凸函数不一定是连续函数；

   C. $\ln(1+\tan^3 x)=\tan^3 x-\frac{1}{2}\tan^6 x+\frac{1}{3}\tan^9 x+o(x^{13}),\ \ (x\to 0)$;

   D. 若数列 $\{a_n\}$ 单调，则或者 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=\sup\limits_n\{a_n\}$, 或者 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n=\inf\limits_n\{a_n\}$.

二、计算题：（共计 45 分）

1. （10 分）$\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x =?$

$$\int \frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sinh x}{\cosh^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan(\sinh x) + C.$$

2. （15 分）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$;

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]\\
=&\lim_{x\to\infty}x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^{-6}}\right]\\
=&\lim_{x\to\infty}x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(1+O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right]\\
=&\lim_{x\to\infty}x^3\left[\frac{1}{6x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

3.（10 分）请将函数 $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}$ 展开到含 $x^{13}$ 的项（Peano 余项的 Taylor 展开）；

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{\sin x^3} &= \left[x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}+o(x^{15})\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x\left[1+\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)^2+o(x^{12})\right] \\
&= x\left[1-\frac{1}{18}x^6+\left(\frac{1}{360}-\frac{1}{324}\right)x^{12}+o(x^{12})\right] \\
&= x-\frac{1}{18}x^7-\frac{1}{3240}x^{13}+o(x^{13}).
\end{aligned}
$$

4.（10 分）$\int \frac{5}{(x^2-2x+2)(x+1)}\mathrm{d}x=?$

$$\frac{5}{(x^2-2x+2)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\frac{C}{x+1}.$$

令 $x\to -1 \Rightarrow C=1;$

令 $x\to \infty \Rightarrow A+C=0 \Rightarrow A=-1;$

令 $x\to 0 \Rightarrow B/2+C=5/2 \Rightarrow B=3.$

$$\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|1+x|+C;$$

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+3}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x &= -\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x+2\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\ln[(x-1)^2+1]+2\arctan((x-1)^2+1)+C.\end{aligned}$$

三、判断证明题：（共计 35 分）

1. （15 分）请问 $\mathrm{C}([a,b]) \subset \mathrm{R}([a,b])$ 是否成立？请证明你的结论或者举出反例。

证明：$f \in \mathrm{C}([a,b]) \Rightarrow f$ 在 $[a,b]$上 连续，所以 $f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

从而 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于 $\forall x, x' \in [a,b]$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

取 $[a,b]$ 上任意划分 $\pi$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 满足 $\|\pi\| < \delta$,

则振幅 $\omega_{[x_{j-1},x_j]} = \sup_{x,x' \in [x_{j-1},x_j]} |f(x) - f(x')| \leq \dfrac{\epsilon}{b-a}$.

所以振幅部分和

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \omega_{[x_{j-1},x_j]}(x_j - x_{j-1}) &\leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

由可积性的充要条件，知 $f \in \mathrm{R}([a,b])$.

2. （10 分）若在开区间 $(a,b)$ 上有 $F'(x)=f(x)$, 请问是否有 $f(x)\in \mathrm{C}([a,b])$? 如果你认为 $f(x)$ 连续，请证明你的结论；否则请举出反例，并且证明间断点有哪些类型？

反例：$F(x):=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

间断点类型：只可能出现振荡型的第二类间断点，也就是说，不可能出现 $f(x_0)\neq f(x_0+)$ 或者 $f(x_0)\neq f(x_0-)$.

否则不妨设 $f(x_0)>f(x_0+)$. 由 $\lim\limits_{y\to x_0+} f(y)=f(x_0+)\Rightarrow \forall\epsilon>0$ 满足 $f(x_0)>f(x_0+)+\epsilon$, $\exists\delta>0$, $\forall y\in(x_0,x_0+\delta)$, 都有

$$f(y)<f(x_0+)+\epsilon<f(x_0).$$

由此知 $f(x)$ 在区间 $[x_0,y]$ 上与 Darboux 定理矛盾。

3. （10 分）请准确叙述有限覆盖定理和闭区间套定理的内容，并用有限覆盖定理证明闭区间套定理。

证明：考虑闭区间套：$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 如果 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \emptyset$, 考虑开区间 $(a, b) \supset [a_1, b_1]$.

则 $(a, b) = (a, b) \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[(a, a_n) \cup (b_n, b)]$, 构成 $[a_1, b_1]$ 的开覆盖，从而其中必有有限子覆盖。

但是对于 $\forall N \in \mathbf{N}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{N}[(a, a_n) \cup (b_n, b)]$ 不可能覆盖 $[a_1, b_1]$, 矛盾。