# 第7章　扩展的单方程模型

- 经典的单方程计量经济学模型理论与方法：

  限于常参数、线性、揭示变量之间因果关系的单方程模型；

  被解释变量是连续的随机变量，其抽样是随机和不受限制的；

  或者只利用时间序列样本，或者只利用截面数据样本；

  主要依靠对经济理论和行为规律的理解确定模型的结构形式。

- 本章中，将讨论几种**单方程扩展模型**，主要包括：

  **1. 将被解释变量抽样由完全随机扩展为受到限制的选择性样本模型；**

  **2. 将被解释变量是连续的扩展为离散的离散选择模型；**

  **3. 将单一种类的样本扩展为同时包含截面数据和时间序列数据的平行数据样本（Panel Data）等。**

# 第7章　说明

- 这些模型与方法，无论在计量经济学理论方面还是在实际应用方面，都具有重要意义。

- 但是，这些模型都形成了各自丰富的内容体系，甚至是计量经济学的新分支学科，模型方法的数学过程较为复杂。
- 本章只介绍其中最简单的模型，以了解这些模型理论与方法的概念与思路。

# §7.1 选择性样本模型

# Selective Samples Model

一、经济生活中的选择性样本问题 ：对y

二、“截断”问题的计量经济学模型

三、“归并”问题的计量经济学模型*

# The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2000

## "for his development of theory and methods for analyzing selective samples”

**James J Heckman**

**USA**

- **“Shadow Prices, Market Wages and Labour Supply”, Econometrica 42 (4), 1974, P679-694**

  发现并提出“选择性样本”问题。

- **“Sample Selection Bias as a Specification Error”, Econometrica 47(1), 1979, P153-161**

  证明了偏误的存在并提出了**Heckman两步修正法**。

# 一、经济生活中的选择性样本问题

# 1、“截断”（truncation）问题

- 由于条件限制，样本不能随机抽取，即不能从全部个体，而只能从一部分个体中随机抽取被解释变量$y$的样本观测值、这部分个体的观测值都大于或小于某个确定值：“掐头”或“去尾”。
  - 例如消费函数模型：由于抽样原因，被解释变量样本观测值最低200元、最高10000元。
  - 例如农户贷款影响因素分析模型：如果调查了10000户，其中只有6000户在一年内发生了贷款。仅以发生了贷款的6000户的贷款额作为被解释变量观测值，显然是将其它没有发生贷款的4000户“截断”掉了。

# 2、“归并/审查”（censoring）问题

- 将被解释变量处于某一范围的样本观测值，都用一个相同的值代替。
  - 经常出现在“检查”、“调查”活动中，因此也称为“检查”(censoring) 问题。
  - 例如需求函数模型：用实际消费量作为需求量的观测值，如果存在供给限制，就出现“归并”问题。
  - 被解释变量观测值，存在最高和最低的限制；例如考试成绩，最高100、最低0，出现“归并”问题。

# 二、“截断”问题的计量经济学模型

# 1、思路

- 如果只能从“掐头”或者“去尾”的连续区间随机抽取“被解释变量y的样本观测值”，那么很显然，抽取每一个样本观测值的概率以及抽取一组样本观测值的联合概率，与被解释变量的样本观测值不受限制的情况是不同的。

- 如果能够知道在这种情况下、抽取一组样本观测值的联合概率函数，那么就可以通过该函数极大化求得模型的参数估计量。

# 2、截断分布

$$f(\xi|\xi > a) = \frac{f(\xi)}{P(\xi > a)}$$

a为随机变量ξ
分布范围内的一个常数

1) $$f(\xi|\xi > c) = \frac{f(\xi)}{P(\xi > c)} = \frac{1/(b-a)}{\int_c^b \frac{1}{b-a} d\xi} = \frac{1}{b-c}$$

如果ξ服从均匀分布 U(a, b):
但是它只能在(c, b)内取得样本观测值，
且取得每一个样本观测值的概率相同

2) $$f(\xi|\xi>a)=\frac{f(\xi)}{P(\xi>a)}$$

$$=\frac{(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(\xi-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{1-\Phi(\alpha)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(\frac{\xi-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\alpha)}$$

ξ服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

$$P(\xi>a)=1-F(a)=1-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})=1-\Phi(\cdot)$$

**Φ** 是标准正态分布概率函数（分子项为密度函数）

## 3、截断被解释变量数据模型的最大似然估计

$$y_i = \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$$

$$y_i \,|\, \boldsymbol{X}_i \sim N(\mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i, \sigma^2)$$

$$f(y_i \mid y_i > a) = \frac{\frac{1}{\sigma}\varphi((y_i - \mathrm{B}'\mathbf{X}_i)/\sigma)}{1-\Phi((a-\mathrm{B}'\mathbf{X}_i)/\sigma)}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}(\ln(2\pi) + \ln\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-\Phi\left(\frac{a-\mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i}{\sigma}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\begin{pmatrix}\mathrm{B}\\ \sigma^2\end{pmatrix}} = \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\left(\frac{y_i - \mathrm{B}'\mathbf{X}_i}{\sigma^2} - \frac{\lambda_i}{\sigma}\right)\mathbf{X}_i \\ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(y_i - \mathrm{B}'\mathbf{X}_i)^2}{2\sigma^4} - \frac{\alpha_i \cdot \lambda_i}{2\sigma^2}\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}_i = \mathbf{0}$$

$$\alpha_i = (a - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{X}_i)/\sigma$$

$$\lambda_i(\alpha_i) = \phi(\alpha_i)/(1-\Phi(\alpha_i))$$

- 求解该1阶极值条件，即可以得到模型的参数估计量。

- 由于这是一个复杂的非线性问题，需要采用迭代方法求解，例如牛顿法。

# 4、例7.1.1:城镇居民消费模型

| 人均收入 | 人均消费 | 人均收入 | 人均消费 | 人均收入 | 人均消费 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1120 | 1020 | 4640 | 2900 | 6090 | 3900 |
| 1310 | 1150 | 4750 | 2980 | 6200 | 3950 |
| 1300 | 1145 | 4800 | 2970 | 6330 | 4000 |
| 1430 | 1230 | 4810 | 3050 | 6450 | 4030 |
| 1500 | 1275 | 4990 | 3200 | 6570 | 4080 |
| 1670 | 1385 | 5070 | 3100 | 6700 | 4130 |
| 2100 | 1660 | 5130 | 3175 | 6840 | 4000 |
| 2370 | 1840 | 5210 | 3200 | 7010 | 4200 |
| 2530 | 1950 | 5300 | 2450 | 7170 | 4160 |
| 2790 | 2110 | 5390 | 3230 | 7350 | 4210 |
| 2980 | 2240 | 5450 | 3310 | 7500 | 4325 |
| 3200 | 2380 | 5500 | 3500 | 7670 | 4385 |
| 3460 | 2550 | 5570 | 3510 | 7840 | 4450 |
| 3630 | 2660 | 5630 | 3590 | 8000 | 4500 |
| 3880 | 2700 | 5690 | 3600 | 8190 | 4865 |
| 4040 | 2730 | 5770 | 3650 | 8350 | 4880 |
| 4210 | 2720 | 5860 | 3720 | 8500 | 4890 |
| 4390 | 2850 | 5930 | 3850 | 8690 | 4920 |
| 4520 | 2800 | 6000 | 3800 | 8830 | 4970 |

# OLS估计：将样本看为“不受任何限制下”随机抽取的样本

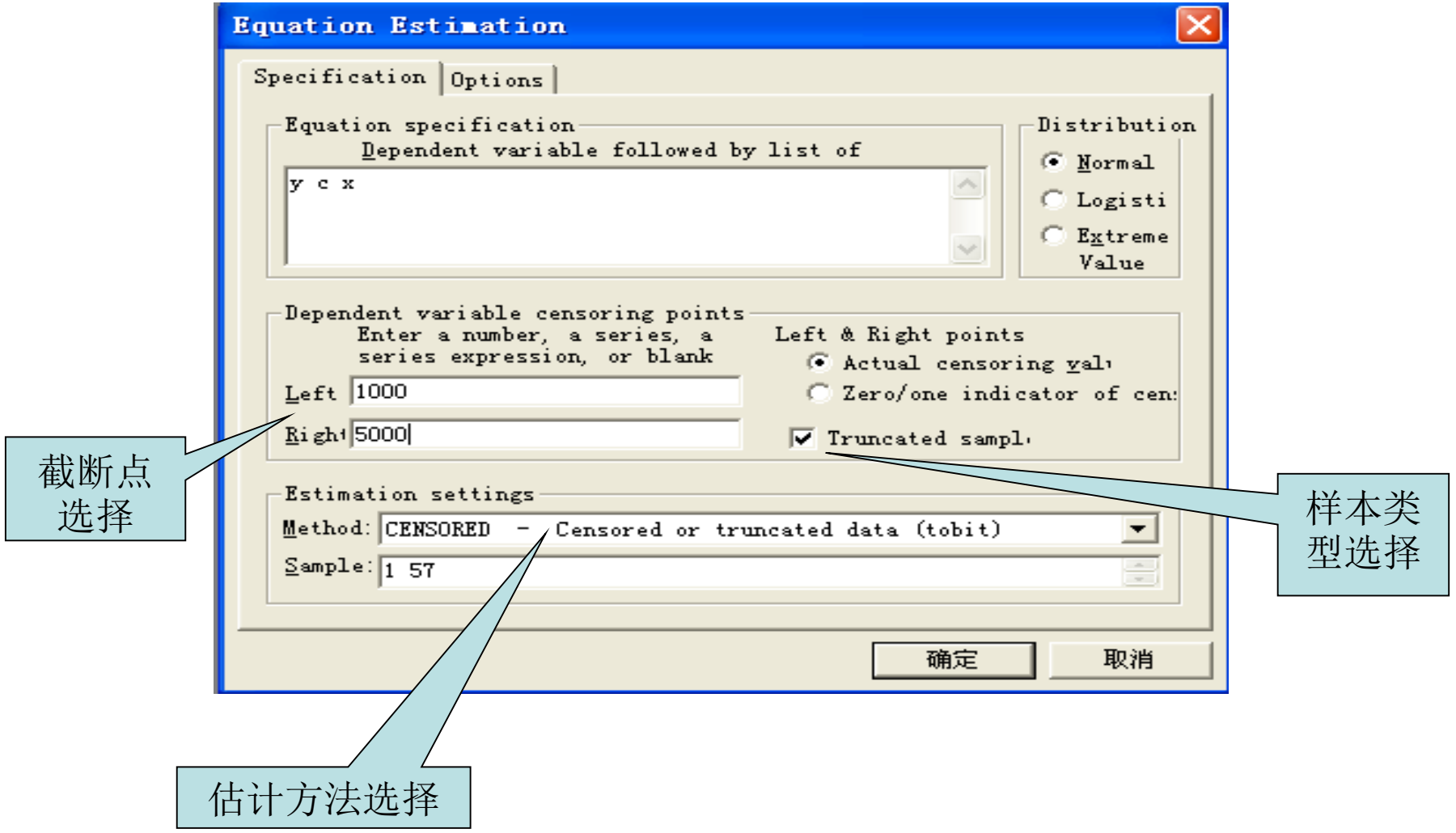
Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 01/03/11 Time: 16:26
Sample: 1 57
Included observations: 57

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 604.9304 | 57.65070 | 10.49303 | 0.0000 |
| X | 0.508307 | 0.010363 | 49.04995 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.977650 | Mean dependent var | 3228.509 |
| Adjusted R-squared | 0.977244 | S.D. dependent var | 1076.505 |
| S.E. of regression | 162.3915 | Akaike info criterion | 13.05235 |
| Sum squared resid | 1450405. | Schwarz criterion | 13.12404 |
| Log likelihood | -369.9921 | F-statistic | 2405.898 |
| Durbin-Watson stat | 1.011832 | Prob(F-statistic) | 0.000000 |

$$Y_i = 604.93 + 0.5083 X_i \qquad i = 1, 2, \cdots, 57 \qquad R^2 = 0.9777$$

# ML估计：将样本看为“在消费水平大于1000元、小于5000元的特定人群”中随机抽取的样本



Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Quadratic hill climbing)
Date: 01/03/11 Time: 16:49
Sample: 1 57
Included observations: 57
Truncated sample
Left censoring (value) series: 1000
Right censoring (value) series: 5000
Convergence achieved after 4 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

| | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 556.7026 | 63.70923 | 8.738178 | 0.0000 |
| X | 0.519423 | 0.011845 | 43.85160 | 0.0000 |
| Error Distribution | | | | |
| SCALE:C(3) | 161.6729 | 15.70998 | 10.29109 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.977492 | Mean dependent var | 3228.509 |
| Adjusted R-squared | 0.976658 | S.D. dependent var | 1076.505 |
| S.E. of regression | 164.4681 | Akaike info criterion | 12.96250 |
| Sum squared resid | 1460686. | Schwarz criterion | 13.07003 |
| Log likelihood | -366.4314 | Hannan-Quinn criter. | 13.00429 |
| Avg. log likelihood | -6.428621 | | |

$$Y_i = 556.70 + 0.5194 X_i \qquad i = 1, 2, \cdots, 57 \qquad R^2 = 0.9775$$

# 5、为什么截断被解释变量数据模型，不能采用普通最小二乘估计？

- 对于截断被解释变量数据计量经济学模型，如果仍然把它看作为经典的线性模型，采用OLS估计，会产生什么样的结果？

- 因为 $y_i$ 只能在大于$a$的范围内取得观测值，那么$y_i$的条件均值为（略）：

$$E(y_i \mid y_i > a) = \int_a^{\infty} y_i \phi(y_i \mid y_i > a) dy_i$$

$$= \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i + \sigma \frac{\phi((a - \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i)/\sigma)}{1 - \Phi((a - \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i)/\sigma)}$$

$$E(y_i \mid y_i > a) = \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i + \sigma\lambda(\alpha_i)$$

$$\boldsymbol{\alpha_i = \frac{a - B'X_i}{\sigma}}$$

$$\frac{\partial E(y_i \mid y_i > a)}{\partial \boldsymbol{X}_i} = \mathrm{B} + \sigma\left(\frac{d\lambda_i}{d\alpha_i}\right)\frac{\partial \alpha_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}$$

$$= \mathrm{B} + \sigma(\lambda_i^2 - \alpha_i\lambda_i)\left(\frac{-\mathrm{B}}{\sigma}\right)$$

$$= \mathrm{B}(1 - \lambda_i^2 + \alpha_i\lambda_i)$$

$$= \mathrm{B}(1 - \delta(\alpha_i))$$

$$y_i \mid y_i > a = E(y_i \mid y_i > a) + u_i = \mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i + \sigma\lambda(\alpha_i) + u_i$$

$$Var(u_i) = \sigma^2(1 - \lambda_i^2 + \lambda_i\alpha_i) = \sigma^2(1 - \delta_i)$$ 略

- 由于被解释变量数据的截断问题，使得原模型变换为包含一个非线性项模型。

- 如果采用**OLS**直接估计原模型：
  - 实际上忽略了一个非线性项；
  - 忽略了随机误差项的异方差性。

◆这就造成参数估计量的偏误；而且，如果不了解被解释变量的分布，要估计该偏误的严重性、也是很困难的。

# 三、“归并/审查”问题的计量经济学模型：Tobit

# 1、思路

- 以一种简单的情况为例，讨论“归并”问题的计量经济学模型：

  假设原始被解释变量服从正态分布，其样本观测值以0为界：小于0的、都归并为0，大于0的、则取实际值。

- 如果y*以表示原始被解释变量，y以表示归并后的被解释变量，那么则有：

$$y = 0 \quad \text{if} \quad y^* \le 0$$
$$y = y^* \quad \text{if} \quad y^* > 0$$

$$y^* \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- 单方程线性“归并”问题的计量经济学模型为：

$$\begin{cases} y_i^* = X_i \mathrm{B} + \mu_{\mathrm{i}} \\ y_i = \max(y_i^*, 0) \end{cases}$$

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2)$$

•如果能够得到 $y^*_i$ 的概率密度函数，那么就可以方便地采用**最大似然法**估计模型，这就是研究这类问题的思路。

•由于该模型是由**Tobin**于**1958**年最早提出的，所以也称为**Tobit**模型。

## 2、“归并”变量的正态分布

- 由于原始被解释变量y*、服从正态分布，有

$$P(y) = P(y^*) \qquad 当 y^* > 0$$

$$P(y=0) = P(y^* \le 0) = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

## 3、归并被解释变量数据模型的最大似然估计

$$\ln L = \sum_{y_i>0} -\frac{1}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\sigma^2+\frac{(y_i-\mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i)^2}{\sigma^2}\right)+\sum_{y_i=0}\ln\left(1-\Phi\left(\frac{\mathrm{B}'\boldsymbol{X}_i}{\sigma}\right)\right)$$

- 该似然函数由两部分组成：

  一部分对应于没有限制的观测值，是经典回归部分；
  一部分对应于受到限制的观测值。

- 这是一个非标准的似然函数，它实际上是离散分布与连续分布的混合。

- 如何理解后一部分？

为什么要求和？

- 如果样本观测值不是以**0**为界，而是以某一个数值**a**为界，则有

$$\begin{aligned} y &= a \qquad \text{当} y^* \le a \\ y &= y^* \qquad \text{当} y^* > a \end{aligned}$$

$$y^* \sim N(\mu, \sigma^2)$$

估计原理与方法相同。

# 4、例7.1.2:城镇居民消费模型

| 人均收入 | 人均消费 | 人均收入 | 人均消费 | 人均收入 | 人均消费 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 1000 | 1040 | 1000 | 1080 | 1000 |
| 1120 | 1020 | 4640 | 2900 | 6090 | 3900 |
| 1310 | 1150 | 4750 | 2980 | 6200 | 3950 |
| 1300 | 1145 | 4800 | 2970 | 6330 | 4000 |
| 1430 | 1230 | 4810 | 3050 | 6450 | 4030 |
| 1500 | 1275 | 4990 | 3200 | 6570 | 4080 |
| 1670 | 1385 | 5070 | 3100 | 6700 | 4130 |
| 2100 | 1660 | 5130 | 3175 | 6840 | 4000 |
| 2370 | 1840 | 5210 | 3200 | 7010 | 4200 |
| 2530 | 1950 | 5300 | 2450 | 7170 | 4160 |
| 2790 | 2110 | 5390 | 3230 | 7350 | 4210 |
| 2980 | 2240 | 5450 | 3310 | 7500 | 4325 |
| 3200 | 2380 | 5500 | 3500 | 7670 | 4385 |
| 3460 | 2550 | 5570 | 3510 | 7840 | 4450 |
| 3630 | 2660 | 5630 | 3590 | 8000 | 4500 |
| 3880 | 2700 | 5690 | 3600 | 8190 | 4865 |
| 4040 | 2730 | 5770 | 3650 | 8350 | 4880 |
| 4210 | 2720 | 5860 | 3720 | 8500 | 4890 |
| 4390 | 2850 | 5930 | 3850 | 8690 | 4920 |
| 4520 | 2800 | 6000 | 3800 | 8830 | 4970 |

# OLS估计：将样本看为不受任何限制下随机抽取的样本

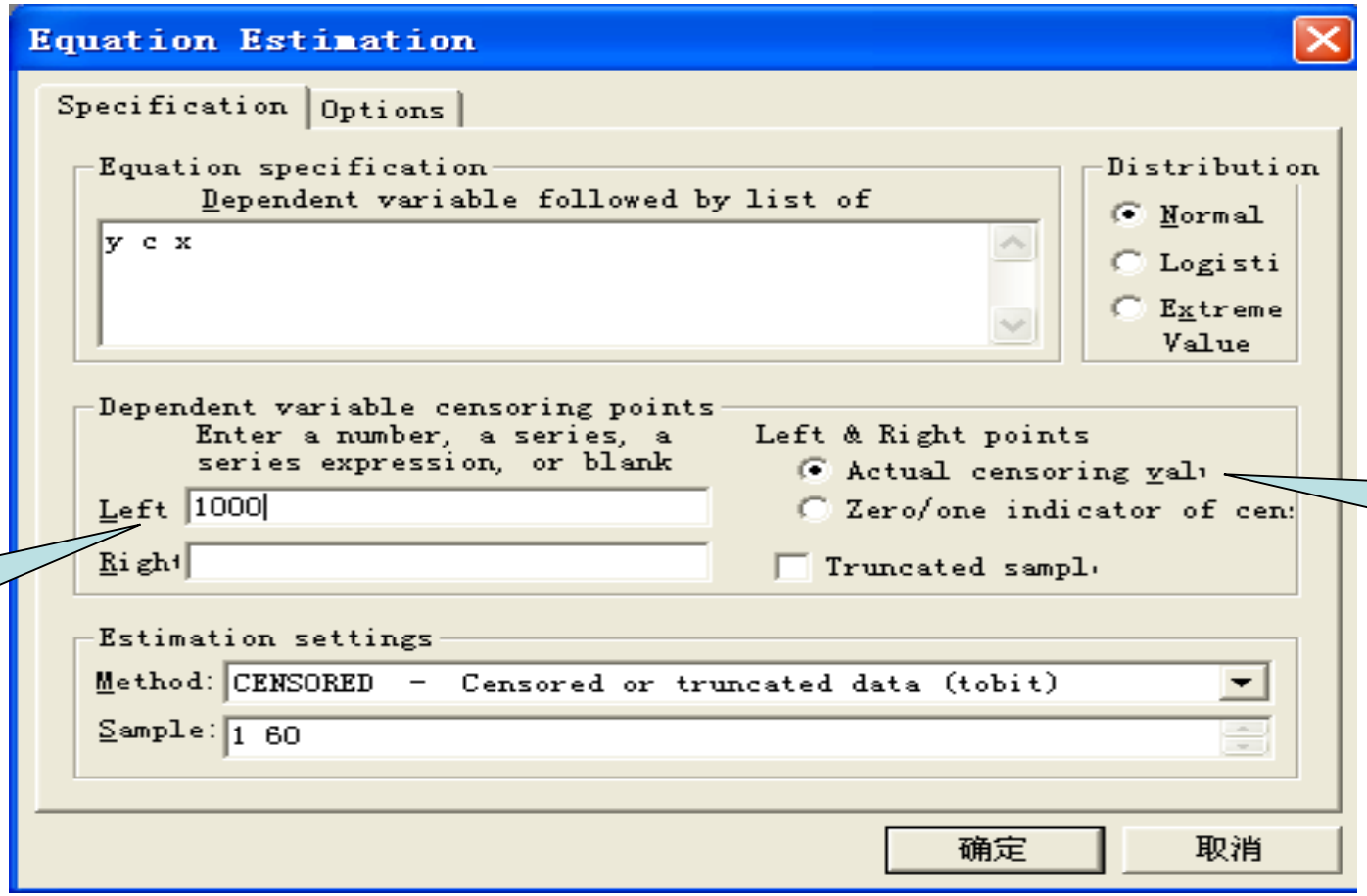
Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 01/03/11 Time: 17:29
Sample: 1 60
Included observations: 60

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 571.8328 | 50.79816 | 11.25696 | 0.0000 |
| X | 0.513639 | 0.009360 | 54.87669 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.981104 | Mean dependent var | 3117.083 |
| Adjusted R-squared | 0.980778 | S.D. dependent var | 1157.512 |
| S.E. of regression | 160.4800 | Akaike info criterion | 13.02698 |
| Sum squared resid | 1493723. | Schwarz criterion | 13.09679 |
| Log likelihood | -388.8094 | F-statistic | 3011.451 |
| Durbin-Watson stat | 0.982967 | Prob(F-statistic) | 0.000000 |

$$Y_i = 571.83 + 0.5136 X_i \qquad i = 1,2,\cdots,60 \qquad R^2 = 0.9811$$

# OLS估计：将样本看为在消费水平为1000元的归并样本




选择归并值

选择归并样本

Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Quadratic hill climbing)
Date: 01/03/11 Time: 17:37
Sample: 1 60
Included observations: 60
Left censoring (value) series: 1000
Convergence achieved after 4 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

| | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 545.9460 | 53.37070 | 10.22932 | 0.0000 |
| X | 0.517810 | 0.009767 | 53.01764 | 0.0000 |
| Error Distribution | | | | |
| SCALE:C(3) | 163.6581 | 15.43580 | 10.60250 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.980688 | Mean dependent var | 3117.083 |
| Adjusted R-squared | 0.980011 | S.D. dependent var | 1157.512 |
| S.E. of regression | 163.6523 | Akaike info criterion | 12.57143 |
| Sum squared resid | 1526578. | Schwarz criterion | 12.67615 |
| Log likelihood | -374.1429 | Hannan-Quinn criter. | 12.61239 |
| Avg. log likelihood | -6.235715 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Left censored obs | 3 | Right censored obs | 0 |
| Uncensored obs | 57 | Total obs | 60 |

$$Y_i = 545.95 + 0.5178 X_i \qquad i = 1,2,\cdots,60$$

# 5、实际模型中的Truncation与Censored

- 时间序列样本，一般不考虑。

- 截面上的全部个体作为样本，不考虑Truncation。
- 按照抽样理论（随机 VS 非随机）、选取截面上部分个体作为样本，不考虑Truncation。
- **按照特定规则、选取截面上的部分个体**作为样本，必须考虑Truncation。

- 截面数据作样本，根据样本观测值的经济背景，决定是否考虑Censored。

# §7.2 二元选择模型
# Binary Choice Model

一、二元离散选择模型的经济背景

二、二元离散选择模型*

三、二元**Probit**离散选择模型及其参数估计

四、二元**Logit**离散选择模型及其参数估计

五、二元离散选择模型的检验***

# 说明

- 在经典计量经济学模型中，被解释变量 y 通常被假定为连续变量。

- 离散被解释变量数据计量经济学模型（Models with Discrete Dependent Variables）和离散选择模型(DCM, Discrete Choice Model)。
- 二元选择模型(Binary Choice Model)和多元选择模型(Multiple Choice Model)。

- 本节只介绍二元选择模型。

- 离散选择模型起源于Fechner于1860年进行的动物条件二元反射研究。
- 1962年，Warner首次将它应用于经济研究领域，用以研究公共交通工具和私人交通工具的选择问题。
- 70、80年代，离散选择模型被普遍应用于经济布局、企业定点、交通问题、就业问题、购买决策等经济决策领域的研究。

- 模型的估计方法，主要发展于80年代初期。

# 一、二元离散选择模型的经济背景

# 实际经济生活中的二元选择问题

- 研究选择结果与影响因素之间的关系。
- 影响因素包括两部分：决策者的属性和备选方案的属性。

- 对于单个方案的取舍：例如，购买者对某种商品的购买决策问题，求职者对某种职业的选择问题，投票人对某候选人的投票决策，银行对某客户的贷款决策。
- 对于两个方案的选择：例如，两种出行方式的选择，两种商品的选择。

# 二、二元离散选择模型

# 1、原始模型

- 对于二元选择问题，可建立如下计量经济学模型：
  Y为观测值为1和0的决策被解释变量；
  X为解释变量，包括选择对象的属性和选择主体的属性。

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\mathrm{B} + \mathrm{N} \qquad y_i = \boldsymbol{X_i}\mathrm{B} + \mu_i$$

$$E(\mu_i) = 0 \qquad E(y_i) = \mathbf{X_i}\mathrm{B}$$

$p_i = P(y_i = 1) \qquad 1 - p_i = P(y_i = 0)$

$$E(y_i) = 1 \cdot P(y_i = 1) + 0 \cdot P(y_i = 0) = p_i$$

$$E(y_i) = P(y_i = 1) = \boldsymbol{X_i}\mathrm{B}$$

左/右端矛盾

$$\mu_i = \begin{cases} 1 - \boldsymbol{X_i}\mathrm{B} & \text{当} y_i = 1\text{，其概率为} \boldsymbol{X_i}\mathrm{B} \\ -\boldsymbol{X_i}\mathrm{B} & \text{当} y_i = 0\text{，其概率为} 1 - \boldsymbol{X_i}\mathrm{B} \end{cases}$$

具有
异方差性

- 由于存在这两方面的问题，所以原始模型不能作为实际研究二元选择问题的模型。
- 需要将原始模型变换为效用模型，这是离散选择模型的关键。

# 2、效用模型

$$U_i^1 = \boldsymbol{X}_i \mathrm{B}^{\boldsymbol{1}} + \varepsilon_i^1$$

*第i个个体 选择1的效用*

$$U_i^0 = \boldsymbol{X}_i \mathrm{B}^{0} + \varepsilon_i^0$$

*第i个个体 选择0的效用*

$$U_i^1 - U_i^0 = \boldsymbol{X}_i(\mathrm{B}^{\boldsymbol{1}} - \mathrm{B}^{\boldsymbol{0}}) + (\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^0)$$

$$y_i^* = \boldsymbol{X}_i \mathrm{B} + \mu_i^*$$

作为研究对象的二元选择模型

$$P(y_i = 1) = \boldsymbol{P(y_i^* > 0)} = P(\mu_i^* > -\mathbf{X_i}\mathrm{B})$$

- 注意，在模型中：效用不可观测，能够得到的观测值、仍然是选择结果，即1和0。

- 很显然，如果不可观测的$U^1>U^0$，即对应于观测值为1——因为该个体选择公共交通工具的效用大于选择私人交通工具的效用，他当然要选择公共交通工具；
- 相反，如果不可观测的$U^1\leq U^0$，即对应于观测值为0——因为该个体选择公共交通工具的效用小于选择私人交通工具的效用，他当然要选择私人交通工具。

# 3、最大似然估计

- 欲使得效用模型可以估计，就必须为随机误差项$u^*$选择一种特定的概率分布。
- 两种最常用的分布是标准正态分布和逻辑（**logistic**）分布，于是形成了两种最常用的二元选择模型—**Probit模型**和**Logit模型**。

- 最大似然函数及其估计过程如下：

$$F(-t)=1-F(t)$$

标准正态分布、或逻辑分布概率函数关于y轴的 **对称性**

$$P(y_i=1)=P(y_i^*>0)=P(\mu_i^*>-\boldsymbol{X}_i\mathrm{B})$$
$$=1-P(\mu_i^*\le-\boldsymbol{X}_i\mathrm{B})$$
$$=1-F(-\boldsymbol{X}_i\mathrm{B})=F(\boldsymbol{X}_i\mathrm{B})$$

$$P(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\prod_{y_i=0}(1-F(\boldsymbol{X}_i\mathrm{B}))\prod_{y_i=1}F(\boldsymbol{X}_i\mathrm{B})$$

似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}(F(\mathbf{X}_i\mathrm{B}))^{y_i}(1-F(\mathbf{X}_i\mathrm{B}))^{1-y_i}$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} (y_i \ln F(\boldsymbol{X_i}\mathrm{B}) + (1-y_i)\ln(1-F(\boldsymbol{X_i}\mathrm{B})))$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i f_i}{F_i} + (1-y_i)\frac{-f_i}{(1-F_i)}\right]\boldsymbol{X_i} = \boldsymbol{0}$$

1阶极值条件

• 在样本数据支持下，如果知道概率分布函数和概率密度函数，求解该非线性方程组，可得到模型参数估计量。

# 三、二元Probit离散选择模型及其参数估计

# 1、标准正态分布的概率分布函数

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)dx$$

$$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$$

# 2、重复观测值不可以得到情况下二元Probit离散选择模型的参数估计

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathrm{B}} = \sum_{y_i=0} \frac{-f_i}{1-F_i}\mathbf{X_i} + \sum_{y_i=1} \frac{f_i}{F_i}\mathbf{X}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{q_i f(q_i \mathbf{X}_i \mathrm{B})}{F(q_i \mathbf{X}_i \mathrm{B})} \right) \mathbf{X_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{X_i}$$

$$= \mathbf{0}$$

$$q_i = 2y_i - 1 \quad = \quad 1 \quad or \quad -1$$

补充：$y = f(x) = f(2a - x)$，关于 $x = a$ 对称

- 关于参数的非线性函数，不能直接求解：

  需采用完全信息最大似然法中所采用的迭代方法。

- 应用计量经济学软件。

- 这里所谓“重复观测值不可以得到”，是指对每个决策者、只有一个观测值/一个决策结果。

  如果有多个观测值，也将其看成为多个不同的决策者。

# 例7.2.2 贷款决策模型

- 分析与建模：

某商业银行从历史贷款客户中随机抽取78个样本，根据设计的指标体系：分别计算它们的“商业信用支持度”（CC）和“市场竞争地位等级”（CM）；

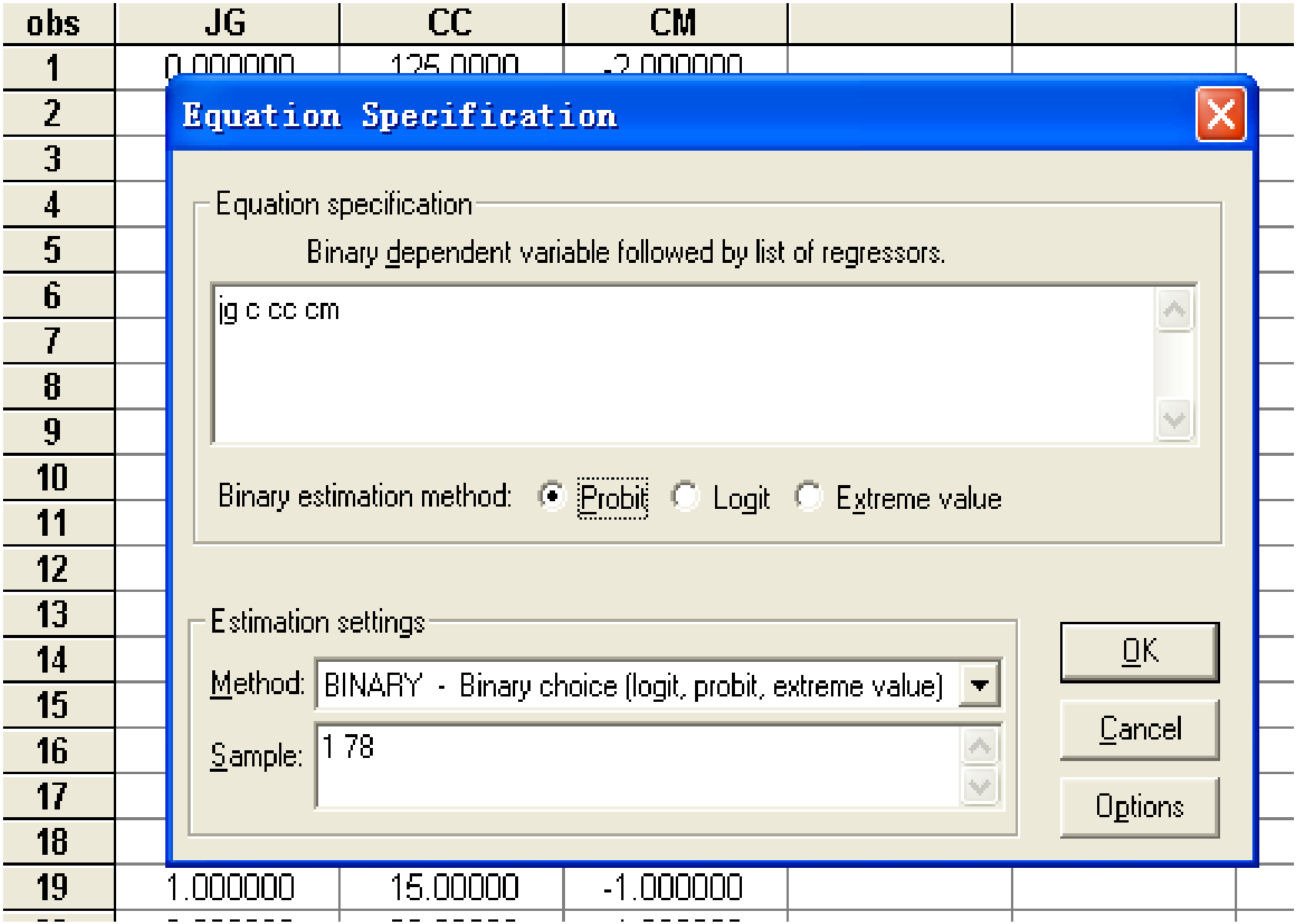
对它们贷款的结果（JG）采用二元离散变量：1表示贷款成功、0表示贷款失败。

目的是研究JG与CC、CM之间的关系，并为正确贷款决策提供支持。

- 样本观测值

CC=XY
CM=SC

| JG | XY | SC | JGF | JG | XY | SC | JGF | JG | XY | SC | JGF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 125.0 | -2 | 0.0000 | 0 | 1500 | -2 | 0.0000 | 0 | 54.00 | -1 | 0.0000 |
| 0 | 599.0 | -2 | 0.0000 | 0 | 96.00 | 0 | 0.0000 | 1 | 42.00 | 2 | 1.0000 |
| 0 | 100.0 | -2 | 0.0000 | 1 | -8.000 | 0 | 1.0000 | 0 | 42.00 | 0 | 0.0209 |
| 0 | 160.0 | -2 | 0.0000 | 0 | 375.0 | -2 | 0.0000 | 1 | 18.00 | 2 | 1.0000 |
| 0 | 46.00 | -2 | 0.0000 | 0 | 42.00 | -1 | 6.5E-13 | 0 | 80.00 | 1 | 6.4E-12 |
| 0 | 80.00 | -2 | 0.0000 | 1 | 5.000 | 2 | 1.0000 | 1 | -5.000 | 0 | 1.0000 |
| 0 | 133.0 | -2 | 0.0000 | 0 | 172.0 | -2 | 0.0000 | 0 | 326.0 | 2 | 0.0000 |
| 0 | 350.0 | -1 | 0.0000 | 1 | -8.000 | 0 | 1.0000 | 0 | 261.0 | 1 | 0.0000 |
| 1 | 23.00 | 0 | 0.9979 | 0 | 89.00 | -2 | 0.0000 | 1 | -2.000 | -1 | 0.9999 |
| 0 | 60.00 | -2 | 0.0000 | 0 | 128.0 | -2 | 0.0000 | 0 | 14.00 | -2 | 3.9E-07 |
| 0 | 70.00 | -1 | 0.0000 | 1 | 6.000 | 0 | 1.0000 | 1 | 22.00 | 0 | 0.9991 |
| 1 | -8.000 | 0 | 1.0000 | 0 | 150.0 | -1 | 0.0000 | 0 | 113.0 | 1 | 0.0000 |
| 0 | 400.0 | -2 | 0.0000 | 1 | 54.00 | 2 | 1.0000 | 1 | 42.00 | 1 | 0.9987 |
| 0 | 72.00 | 0 | 0.0000 | 0 | 28.00 | -2 | 0.0000 | 1 | 57.00 | 2 | 0.9999 |
| 0 | 120.0 | -1 | 0.0000 | 1 | 25.00 | 0 | 0.9906 | 0 | 146.0 | 0 | 0.0000 |
| 1 | 40.00 | 1 | 0.9998 | 1 | 23.00 | 0 | 0.9979 | 1 | 15.00 | 0 | 1.0000 |
| 1 | 35.00 | 1 | 0.9999 | 1 | 14.00 | 0 | 1.0000 | 0 | 26.00 | -2 | 4.4E-16 |
| 1 | 26.00 | 1 | 1.0000 | 0 | 49.00 | -1 | 0.0000 | 0 | 89.00 | -2 | 0.0000 |
| 1 | 15.00 | -1 | 0.4472 | 0 | 14.00 | -1 | 0.5498 | 1 | 5.000 | 1 | 1.0000 |
| 0 | 69.00 | -1 | 0.0000 | 0 | 61.00 | 0 | 2.1E-12 | 1 | -9.000 | -1 | 1.0000 |
| 0 | 107.0 | 1 | 0.0000 | 1 | 40.00 | 2 | 1.0000 | 1 | 4.000 | 1 | 1.0000 |
| 1 | 29.00 | 1 | 1.0000 | 0 | 30.00 | -2 | 0.0000 | 0 | 54.00 | -2 | 0.0000 |
| 1 | 2.000 | 1 | 1.0000 | 0 | 112.0 | -1 | 0.0000 | 1 | 32.00 | 1 | 1.0000 |
| 1 | 37.00 | 1 | 0.9999 | 0 | 78.00 | -2 | 0.0000 | 0 | 54.00 | 0 | 1.4E-07 |
| 0 | 53.00 | -1 | 0.0000 | 1 | 0.000 | 0 | 1.0000 | 0 | 131.0 | -2 | 0.0000 |
| 0 | 194.0 | 0 | 0.0000 | 0 | 131.0 | -2 | 0.0000 | 1 | 15.00 | 0 | 1.0000 |


obs
JG
CC
CM
1
0.000000
125.0000
-2.000000
19
1.000000
15.00000
-1.000000
Equation Specification
Equation specification
Binary dependent variable followed by list of regressors.
ig c cc cm
Binary estimation method:
Probit
Logit
Extreme value
Estimation settings
Method:
BINARY - Binary choice (logit, probit, extreme value)
Sample:
1 78
OK
Cancel
Options

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 11/10/05 Time: 11:04
Sample: 1 78
Included observations: 78
Convergence achieved after 13 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 8.797358 | 7.544067 | 1.166129 | 0.2436 |
| CC | -0.257882 | 0.228894 | -1.126642 | 0.2599 |
| CM | 5.061789 | 4.458482 | 1.135317 | 0.2562 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 0.410256 | S.D. dependent var | 0.495064 |
| S.E. of regression | 0.090067 | Akaike info criterion | 0.118973 |
| Sum squared resid | 0.608402 | Schwarz criterion | 0.209616 |
| Log likelihood | -1.639954 | Hannan-Quinn criter. | 0.155259 |
| Restr. log likelihood | -52.80224 | Avg. log likelihood | -0.021025 |
| LR statistic (2 df) | 102.3246 | McFadden R-squared | 0.968942 |
| Probability(LR stat) | 0.000000 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Obs with Dep=0 | 46 | Total obs | 78 |
| Obs with Dep=1 | 32 | | |

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Estimation Command:
==========
BINARY(D=N) JG C CC CM

Estimation Equation:
==========
JG = 1-@CNORM(-(C(1) + C(2)*CC + C(3)*CM))

Substituted Coefficients:
==========
JG = 1-@CNORM(-(8.797358365 - 0.2578816621*CC + 5.061788659*CM))

输出的估计结果

•该方程表示，当CC和CM已知时，代入方程、可计算贷款成功的概率JGF。

例如，将表中第19个样本观测值CC=15、CM=－1代入方程右边，计算{括号内的值为0.1326552 }；

查标准正态分布表，对应于0.1326552的累积正态分布概率为0.5517；于是，JG的预测值JGF=1－0.5517=0.4483——即对应于该客户，贷款成功的概率为0.4483。

模拟预测

| obs | JG | CC | CM | JGF |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000000 | 125.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.000000 | 599.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 3 | 0.000000 | 100.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 4 | 0.000000 | 160.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 5 | 0.000000 | 46.00000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 6 | 0.000000 | 80.00000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 7 | 0.000000 | 133.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 8 | 0.000000 | 350.0000 | -1.000000 | 0.000000 |
| 9 | 1.000000 | 23.00000 | 0.000000 | 0.997922 |
| 10 | 0.000000 | 60.00000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 11 | 0.000000 | 70.00000 | -1.000000 | 0.000000 |
| 12 | 1.000000 | -8.000000 | 0.000000 | 1.000000 |
| 13 | 0.000000 | 400.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 14 | 0.000000 | 72.00000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 15 | 0.000000 | 120.0000 | -1.000000 | 0.000000 |
| 16 | 1.000000 | 40.00000 | 1.000000 | 0.999803 |
| 17 | 1.000000 | 35.00000 | 1.000000 | 0.999999 |
| 18 | 1.000000 | 26.00000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 19 | 1.000000 | 15.00000 | -1.000000 | 0.447233 |
| 20 | 0.000000 | 69.00000 | -1.000000 | 0.000000 |

- 预测：

如果有一个新客户，根据客户资料、计算其“商业信用支持度”（XY）和“市场竞争地位等级”（SC），代入模型、就可得到贷款成功概率，以此决定、是否给予该客户贷款。

# 3、重复观测值可得到情况下二元Probit离散选择模型的参数估计 （略）

- 思路
  - 对每个决策者有多个重复（例如10次左右）观测值。
  - 对第i个决策者重复观测$n_i$次，选择$y_i=1$的次数比例为$p_i$，那么可将$p_i$作为真实概率$P_i$的一个估计量。
  - 建立“概率单位模型”，采用广义最小二乘法估计。
  - 实际中并不常用。

- 对第i个决策者重复观测n次，选择$y_i=1$的次数比例为$p_i$，那么可以将$p_i$作为真实概率$P_i$的一个估计量。

$$p_i = P_i + e_i = F(\boldsymbol{X_i}\mathrm{B}) + e_i$$

定义“观测到的”概率单位

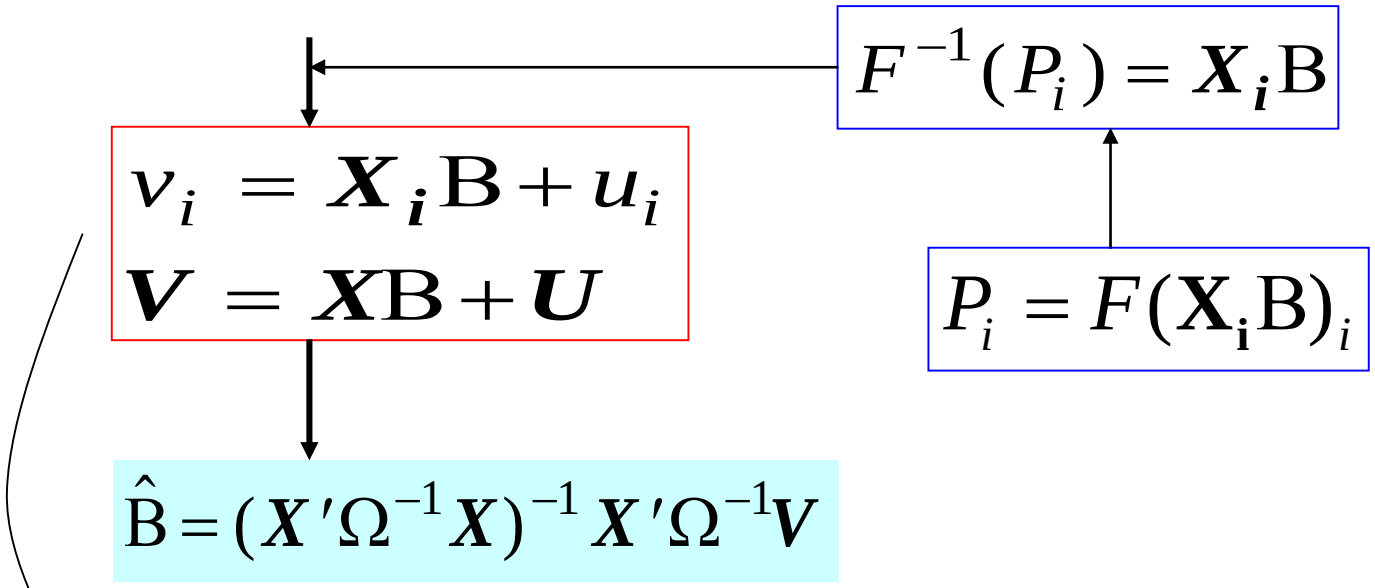
$$E(e_i) = 0$$
$$Var(e_i) = p_i(1-p_i)/n_i$$

$$v_i = F^{-1}(p_i) = F^{-1}(P_i + e_i)$$

$$F^{-1}(P_i + e_i) = F^{-1}(P_i) + \frac{e_i}{f(F^{-1}(P_i))}$$

$$v_i = F^{-1}(P_i) + u_i$$

$$E(u_i) = 0$$
$$Var(u_i) = \frac{P_i(1-P_i)}{n_i(f(F^{-1}(P_i)))^2}$$




**V的观测值通过求解标准正态分布的概率分布函数的反函数得到**

$$p_i = \int_{-\infty}^{v_i} (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)dt$$

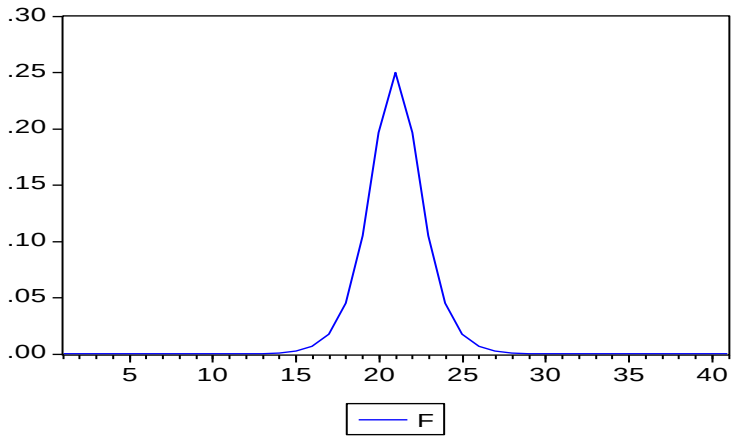
实际观测得到的

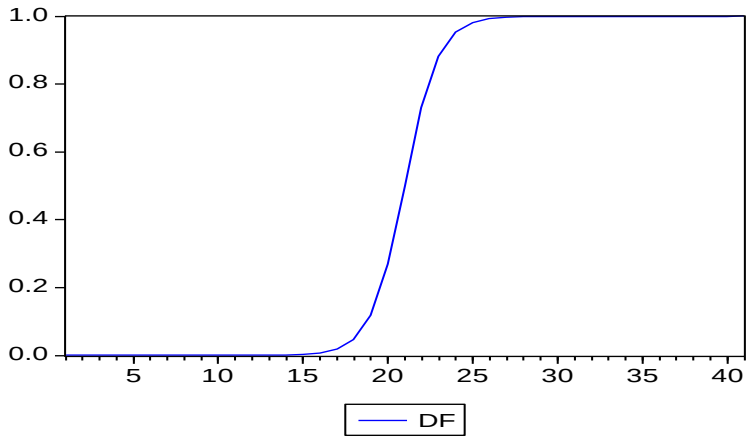
# 四、二元Logit离散选择模型及其参数估计

# 1、逻辑分布的概率分布函数

$$F(t)=\frac{1}{1+e^{-t}} \longrightarrow F(t)=\frac{e^{t}}{1+e^{t}}=\Lambda(t)$$

$$f(t)=\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^{2}} \rightarrow f(t)=\frac{e^{t}}{(1+e^{t})^{2}}=\Lambda(t)(1-\Lambda(t))$$



## Börsch-Supan于1987年指出：

- 若按照效用最大化为依据、进行选择/决策，具有极限值的逻辑分布是较好的选择；

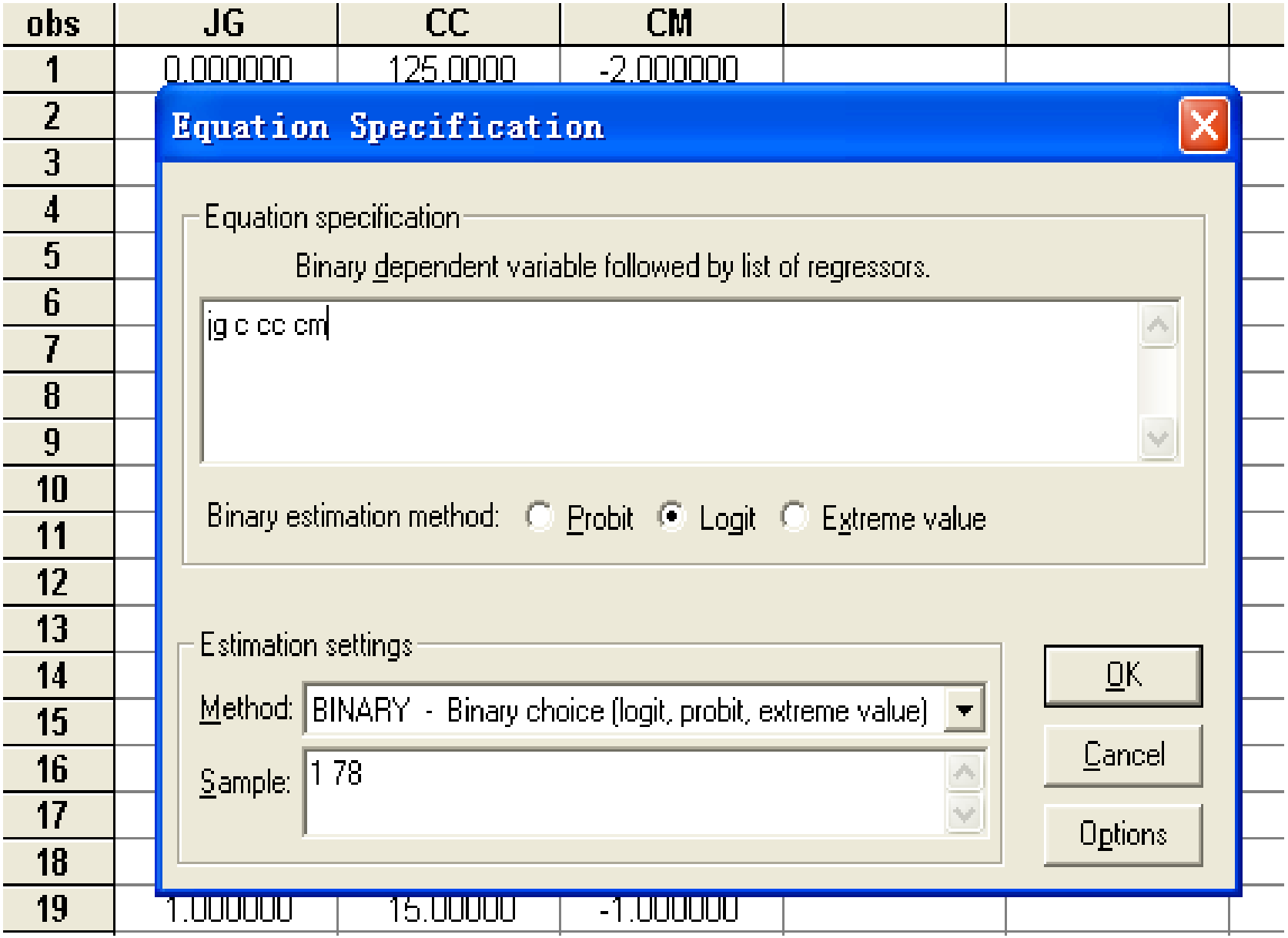
  这种情况下的二元选择模型，应采用Logit模型。

# 2、重复观测值不可以得到情况下二元logit离散选择模型的参数估计

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i f_i}{F_i} + (1-y_i)\frac{-f_i}{(1-F_i)}\right]\boldsymbol{X_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \Lambda(\boldsymbol{X_i}\mathrm{B}))\boldsymbol{X_i} = \boldsymbol{0}$$

- 关于**参数B的非线性方程组**，不能直接求解：需采用完全信息最大似然法中所采用的迭代方法。
- 应用计量经济学软件。


obs
JG
CC
CM
1
0.000000
125.0000
-2.000000
19
1.000000
15.00000
-1.000000
Equation Specification
Equation specification
Binary dependent variable followed by list of regressors.
jg c cc cm
Binary estimation method:
Probit
Logit
Extreme value
Estimation settings
Method:
BINARY - Binary choice (logit, probit, extreme value)
Sample:
1 78
OK
Cancel
Options

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Logit (Newton-Raphson)
Date: 11/10/05 Time: 16:53
Sample: 1 78
Included observations: 78
Convergence achieved after 13 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 16.11426 | 14.56353 | 1.106481 | 0.2685 |
| CC | -0.465035 | 0.431760 | -1.077068 | 0.2814 |
| CM | 9.379903 | 8.712437 | 1.076611 | 0.2817 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 0.410256 | S.D. dependent var | 0.495064 |
| S.E. of regression | 0.091187 | Akaike info criterion | 0.120325 |
| Sum squared resid | 0.623629 | Schwarz criterion | 0.210968 |
| Log likelihood | -1.692674 | Hannan-Quinn criter. | 0.156611 |
| Restr. log likelihood | -52.80224 | Avg. log likelihood | -0.021701 |
| LR statistic (2 df) | 102.2191 | McFadden R-squared | 0.967943 |
| Probability(LR stat) | 0.000000 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Obs with Dep=0 | 46 | Total obs | 78 |
| Obs with Dep=1 | 32 | | |

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Estimation Command:

==========

BINARY(D=L,R) JG C CC CM

Estimation Equation:

==========

JG = 1-@LOGIT(-(C(1) + C(2)*CC + C(3)*CM))

Substituted Coefficients:

==========

JG = 1-@LOGIT(-(16.11426399 - 0.4650347429*CC + 9.379903458*CM))

| obs | JG | CC | CM | JGFF |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000000 | 125.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.000000 | 599.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 3 | 0.000000 | 100.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 4 | 0.000000 | 160.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 5 | 0.000000 | 46.00000 | -2.000000 | 3.64E-11 |
| 6 | 0.000000 | 80.00000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 7 | 0.000000 | 133.0000 | -2.000000 | 0.000000 |
| 8 | 0.000000 | 350.0000 | -1.000000 | 0.000000 |
| 9 | 1.000000 | 23.000 | 0000 | 0.995586 |
| 10 | 0.000000 | 60.000 | 0000 | 5.41E-14 |
| 11 | 0.000000 | 70.000 | 0000 | 6.13E-12 |
| 12 | 1.000000 | -8.0000 | 0000 | 1.000000 |
| 13 | 0.000000 | 400.00 | 000 | 0.000000 |
| 14 | 0.000000 | 72.000 | 00 | 2.86E-08 |
| 15 | 0.000000 | 120.0000 | -1.0000 | 0.000000 |
| 16 | 1.000000 | 40.00000 | 1.000000 | 0.998986 |
| 17 | 1.000000 | 35.00000 | 1.000000 | 0.999901 |
| 18 | 1.000000 | 26.00000 | 1.000000 | 0.999998 |
| 19 | 1.000000 | 15.00000 | -1.000000 | 0.440000 |
| 20 | 0.000000 | 69.00000 | -1.000000 | 9.76E-12 |

结果类似

Probit

0.999999

1.000000

0.447233

0.000000

# 3、重复观测值可以得到情况下二元logit离散选择模型的参数估计　（略）

- 思路
  - 对每个决策者有多个重复（例如10次左右）观测值。
  - 对第i个决策者重复观测$n_i$次，选择$y_i=1$的次数比例为$p_i$，那么可以将$p_i$作为真实概率$P_i$的一个估计量。
  - 建立“对数成败比例模型”，采用广义最小二乘法估计。
  - 实际中并不常用。

- 用样本重复观测得到的$p_i$构成“成败比例”，取对数并进行台劳展开，有

$$\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \approx \ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) + \frac{e_i}{P_i(1-P_i)}$$

$$F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

$$\frac{P_i}{1-P_i} = e^{\mathbf{X_i}\mathrm{B}}$$

$$\frac{F(t)}{1-F(t)} = e^{t}$$

$$\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \approx \ln\left(e^{X_i\mathrm{B}}\right) + u_i = \boldsymbol{X}_i\mathrm{B} + u_i$$

逻辑分布的概率分布函数

$$v_i = \boldsymbol{X_i}\mathrm{B} + u_i$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X}\mathrm{B} + \boldsymbol{U}$$

$$\hat{\mathrm{B}} = (\boldsymbol{X}'\hat{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\hat{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}$$

# 五、二元离散选择模型的检验**

# 1、计量经济学模型中的两类检验统计量

- 基于LS
  - $R^2$
  - 总体显著性F检验
  - 约束回归的F检验

- 基于ML
  - Wald
  - LR (likelihood ratio)
  - LM (lagrange multiplier)

- 原理类似（无约束回归 VS 受约束回归）

## 2、拟合检验

$$LRI = 1 - \frac{\ln L}{\ln L_0}$$

$$\ln L_0 = n(P\ln P + (1-P)\ln(1-P))$$

- P：样本观测值中，被解释变量等于1的比例。

  $L_0$：模型中**“所有解释变量的系数都为0”时的似然函数值**。

- **LRI=1**，即L=1，完全拟合、联合概率100%。

  LRI=0，即$L=L_0$，所有解释变量、完全不显著，完全不拟合。

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 11/10/05 Time: 11:04
Sample: 1 78
Included observations: 78
Convergence achieved after 13 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

LnL = －1.639954
$LnL_0$= －52.80224
拟合优度 **LRI=0.968942**，不是LR统计量

| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 8.797358 | 7.544067 | 1.166129 | 0.2436 |
| CC | -0.257882 | 0.228894 | -1.126642 | 0.2599 |
| CM | 5.061789 | 4.458482 | 1.135317 | 0.2562 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 0.410256 | S.D. dependent var | 0.495064 |
| S.E. of regression | 0.090067 | Akaike info criterion | 0.118973 |
| Sum squared resid | 0.608402 | Schwarz criterion | 0.209616 |
| Log likelihood | -1.639954 | Hannan-Quinn criter. | 0.155259 |
| Restr. log likelihood | -52.80224 | Avg. log likelihood | -0.021025 |
| LR statistic (2 df) | 102.3246 | McFadden R-squared | 0.968942 |
| Probability(LR stat) | 0.000000 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Obs with Dep=0 | 46 | Total obs | 78 |
| Obs with Dep=1 | 32 | | |

# 3、省略变量检验**

- 经典模型中采用的“变量显著性t检验”，仍然是有效的（此时称为z统计量）。

- 如果“省略的变量”与“保留的变量”不是正交的，那么对参数估计量将产生影响，需要进一步检验这种省略是否恰当。

零假设为：$H_0 : \mathbf{Y}^* = \mathbf{X}_1\mathrm{B}_1 + \mu^*$

备择假设为：$H_1 : \mathbf{Y}^* = \mathbf{X}_1\mathrm{B}_1 + \mathbf{X}_2\mathrm{B}_2 + \mu^*$

用于检验的统计量为 Wald 统计量、LR 统计量和 LM 统计量，具体计算方法如下：

$$W = \hat{\mathrm{B}}_2' V_2^{-1} \hat{\mathrm{B}}_2$$

其中 $V_2 = AsyVar(\hat{\mathrm{B}}_2)$。

$$LR = -2(\ln \hat{L}_0 - Ln\hat{L}_1)$$

若 $X_2$ 中的变量省略后、对参数估计量没有影响，那么 $H_1$ 和 $H_0$ 情况下的对数最大似然函数值应相差不大：

此时**LR统计量的值很小**，自然会小于临界值，不拒绝 $H_0$。

其中 $\hat{L}_0$、$\hat{L}_1$ 分别为 $H_0$ 情形和 $H_1$ 情形下的似然函数值的估计量。

$$LM = g_0' V_0^{-1} g_0$$

其中 $g_0$ 是 $H_1$ 情形下的对数似然函数对参数估计量的一阶导数向量，

用 $H_0$ 情形下的最大似然参数估计量代入计算；$V_0$ 是 $H_1$ 情形下参数最大似然估计量的方差矩阵估计量。

- 检验步骤：
  - 首先进行“受约束模型”的估计
  - 选择系数检验
  - 引入省略的变量
  - 判断

# 省略CC、只保留CM，估计模型：

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 03/21/09 Time: 15:56
Sample: 1 78
Included observations: 78
Convergence achieved after 4 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

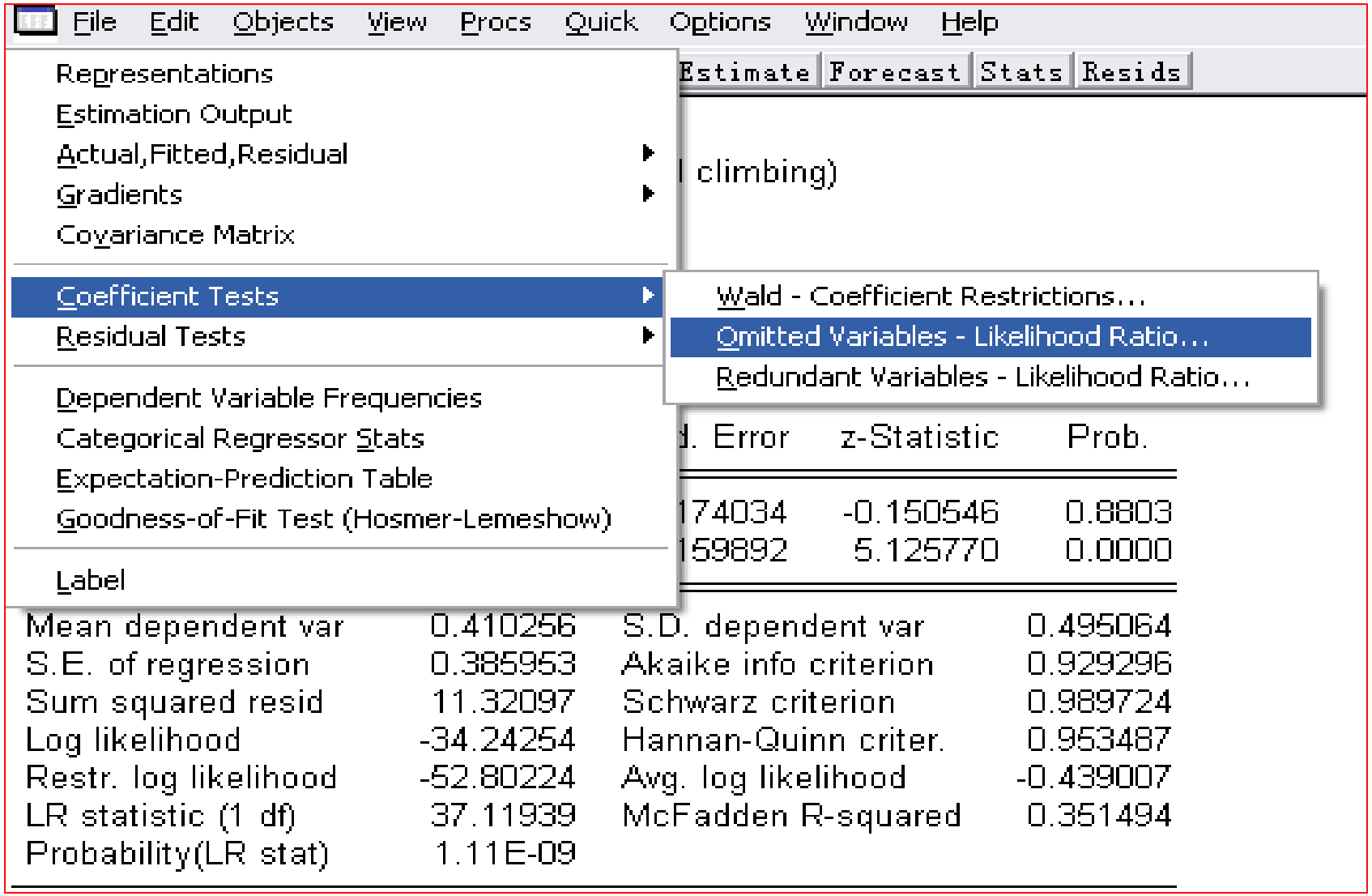
拟$R^2$ = 0.351494
有较大下降

| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -0.026200 | 0.174034 | -0.150546 | 0.8803 |
| CM | 0.819570 | 0.159892 | 5.125770 | 0.0000 |

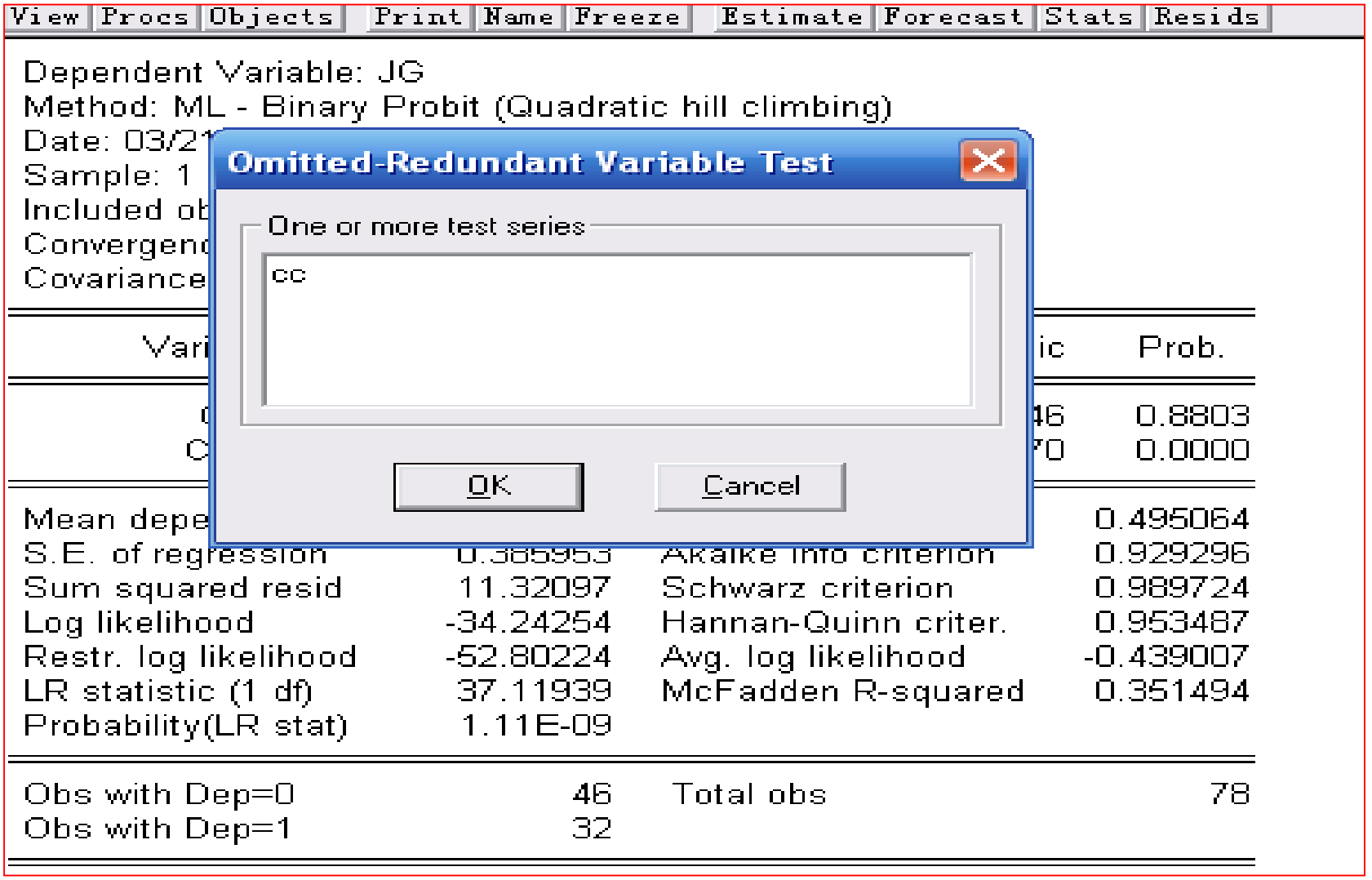
| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 0.410256 | S.D. dependent var | 0.495064 |
| S.E. of regression | 0.385953 | Akaike info criterion | 0.929296 |
| Sum squared resid | 11.32097 | Schwarz criterion | 0.989724 |
| Log likelihood | -34.24254 | Hannan-Quinn criter. | 0.953487 |
| Restr. log likelihood | -52.80224 | Avg. log likelihood | -0.439007 |
| LR statistic (1 df) | 37.11939 | McFadden R-squared | 0.351494 |
| Probability(LR stat) | 1.11E-09 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Obs with Dep=0 | 46 | Total obs | 78 |
| Obs with Dep=1 | 32 | | |

# 选择“Omitted Variables-LR Test”



# 引入CC


View
Procs
Objects
Print
Name
Freeze
Estimate
Forecast
Stats
Resids
Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 03/21
Sample: 1
Included ob
Convergenc
Covariance
Omitted-Redundant Variable Test
One or more test series
cc
OK
Cancel
Vari
ic
Prob.
46
0.8803
70
0.0000
Mean depe
0.495064
S.E. of regression
0.385953
Akaike info criterion
0.929296
Sum squared resid
11.32097
Schwarz criterion
0.989724
Log likelihood
-34.24254
Hannan-Quinn criter.
0.953487
Restr. log likelihood
-52.80224
Avg. log likelihood
-0.439007
LR statistic (1 df)
37.11939
McFadden R-squared
0.351494
Probability(LR stat)
1.11E-09
Obs with Dep=0
46
Total obs
78
Obs with Dep=1
32

View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Omitted Variables: CC

| | | | |
|---|---|---|---|
| F-statistic | 1320.579 | Probability | 0.000000 |
| Log likelihood ratio | 65.20518 | Probability | 0.000000 |

Test Equation:
Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 03/21/09 Time: 16:04
Sample: 1 78
Included observations: 78
Convergence achieved after 13 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

拒绝CC系数为0、的$H_0$假设

| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 8.797358 | 7.544067 | 1.166129 | 0.2436 |
| CM | 5.061789 | 4.458482 | 1.135317 | 0.2562 |
| CC | -0.257882 | 0.228894 | -1.126642 | 0.2599 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 0.410256 | S.D. dependent var | 0.495064 |
| S.E. of regression | 0.090067 | Akaike info criterion | 0.118973 |
| Sum squared resid | 0.608402 | Schwarz criterion | 0.209616 |
| Log likelihood | -1.639954 | Hannan-Quinn criter. | 0.155259 |
| Restr. log likelihood | -52.80224 | Avg. log likelihood | -0.021025 |
| LR statistic (2 df) | 102.3246 | McFadden R-squared | 0.968942 |
| Probability(LR stat) | 0.000000 | | |

# 4、异方差性检验*

- 截面数据样本，容易存在异方差性。
- 假定异方差结构为：

$$\mathrm{Var}(\varepsilon|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = (\exp(\mathbf{Z}'\gamma))^2$$

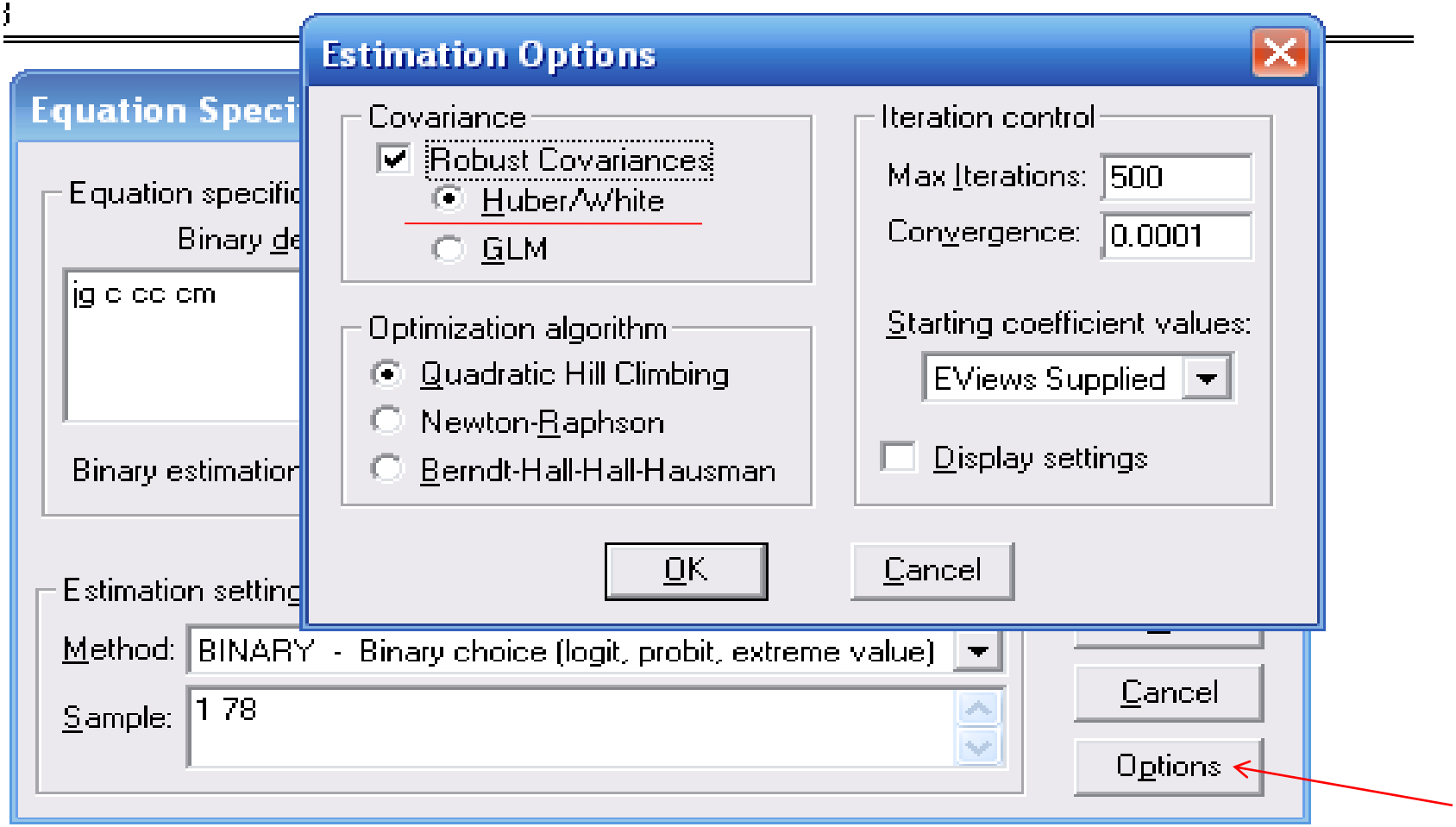
$$H_0 : \gamma = \mathbf{0}$$

将解释变量、分为两类：
Z为只与个体特征有关的变量；
显然，异方差与这些变量相关。

- 采用LM检验：

将异方差检验问题，变为一个约束检验问题

- 一般都存在异方差；
- 不检验，直接采用 Huber/White 数值修正、进行估计
  -



View | Procs | Objects | Print | Name | Freeze | E

Dependent Variable: JG
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill
Date: 03/21/09 Time: 17:03
Sample: 1 78
Included observations: 78
Convergence achieved after 13 iterations
QML (Huber/White) standard errors & covariance

| Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|
| 8.797358 | 7.544067 | 1.166129 | 0.2436 |
| -0.257882 | 0.228894 | -1.126642 | 0.2599 |
| 5.061789 | 4.458482 | 1.135317 | 0.2562 |

| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 8.797358 | 1.350230 | 6.515451 | 0.0000 |
| CC | -0.257882 | 0.044167 | -5.838766 | 0.0000 |
| CM | 5.061789 | 1.005360 | 5.034801 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 0.410256 | S.D. dependent var | 0.495064 |
| S.E. of regression | 0.090067 | Akaike info criterion | 0.118973 |
| Sum squared resid | 0.608402 | Schwarz criterion | 0.209616 |
| Log likelihood | -1.639954 | Hannan-Quinn criter. | 0.155259 |
| Restr. log likelihood | -52.80224 | Avg. log likelihood | -0.021025 |
| LR statistic (2 df) | 102.3246 | McFadden R-squared | 0.968942 |
| Probability(LR stat) | 0.000000 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Obs with Dep=0 | 46 | Total obs | 78 |
| Obs with Dep=1 | 32 | | |

## 5、分布检验（略）

- 检验关于分布的假设（probit、logit ）。

- 一般不进行该项检验，具体见相关教科书：（Greene, P682）。

- β：模型1的参数；
  γ：模型2的参数。

- 组合模型的似然函数（略）：

$$L_\rho = \frac{[(1-\alpha)L_1(y|X,\beta)^\rho + \alpha L_2(y|X,\gamma)^\rho]^{\frac{1}{\rho}}}{\int_z [(1-\alpha)L_1(z|X,\beta)^\rho + \alpha L_2(z|X,\gamma)^\rho]^{\frac{1}{\rho}} dz}$$

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha > 0$$

构造LM统计量，如果不拒绝0假设，表明模型1是适当的。

# 6、回代/预测检验

- 当二元离散选择模型被估计后，将所有样本的解释变量观测值代入模型，计算**“每个样本被解释变量、选择1的概率”**，再与被解释变量的实际观测值进行比较——以判断模型的预测（回代）效果，是一种实际有效的模型检验方法。

- 概率阈值的3种选择：
  - 朴素选择：p=0.5 (1、0的样本相当时）
  - 先验选择：p=（**选1的样本数/全部样本**）（全样本时）
  - 最优阈值（较复杂）：犯第一类错误最小原则

# 例7.2.2

- 朴素选择，即以0.5为阈值：除了2个样本外，所有样本都通过了回代检验。

- 先验选择，即**以选择1的样本比例0.41、为阈值**：除了1个样本外，所有样本都通过了回代检验。

# 实例1—财务欺诈识别模型

我国上市公司财务欺诈识别模型

- 样本：

  年度报告审计意见为“无法发表意见”或者“证监会立案调查”等公司属于财务欺诈样本；

  年度报告审计意见为“标准无保留意见”和财务报表满足“利润×现金流量＞0”的公司属于配对样本。

- 解释变量：

  开始选择11个财务指标；

  通过t检验，确定6个指标：资产负债率、资产毛利率、资产周转率、营运资金比率、应收账款周转率、经营活动现金流量/资产额。

- 样本：财务欺诈公司30，非财务欺诈公司30

- 采用犯第一类错误最小原则，确定最优阈值为0.68
  - 欺诈样本中，p<0.68，26个，占86.7%
  - 非欺诈样本中，p>0.68，25个，占83.3%

# 实例2—上市公司并购

- 被解释变量：当年发生并购行为为1，反之为0。
- 解释变量：净利润率、……，全流通虚变量。
- 试图研究全流通对并购的影响。

- 样本：1994-2008上市公司，并购样本731、非并购样本9835。
- 采用先验原则，P=5%
- 模拟结果(效果，不太理想)：
  - 并购样本中：p>5%占53%
  - 非并购样本中：p<5%占72%