精讲课件

大学计算机基础
（理科类）

第3讲 问题抽象与建模

北京航空航天大学

第2讲回顾

1、**图灵机模型**由（　　　）、（　　　）和（　　　）_这3个部件组成。

2、图灵机中的**计算**就是执行（　　　），对（　　　）符号串进行变换，经过有限个步骤，得到预定的（　　　）符号串的过程。

3、**图灵机的思想**是（　　　）、（　　　）、（　　　）及（　　　）自动执行的基本思想。

4、世界**第二台电子计算机**是（　　　）。它存在两大缺陷：采用（　　　）进行运算，没有（　　　）。

5、**冯·诺依曼思想**：在电子计算机中采用（　　　）；（　　　）和（　　　）以同等地位存储在机器的存储器中，机器能够根据程序自动进行计算。

6、计算机之所以能够**自动工作**，是因为计算机有（　　　）这个关键部件，该部件控制（　　　）实现自动存取，计算规则是由（　　　）来执行的。

第2讲回顾（续）

7、计算机中数据的**最小单位**是（　　　）；现代计算机中数据存储和处理的**基本单位**是（　　　）。1Byte =（　　　）bit，1KB =（　　　）B。

8、**进位制**中的三个要素是（　　　）、（　　　）和（　　　）。数制中某一位上的符号所表示数码所处位置的价值称为（　　　）。

9、**R进制数转换为十进制数**的方法是，把R进制数的每位数码乘以对应的（　　　），然后（　　　）。

10、**十进制数转换为R进制数**的方法：整数转换采用（　　　）；小数转换用采用（　　　）。

11、**八进制数转换为十六进制数**时，以（　　　）为桥梁，首先将（　　　）数转换为（　　　）数，再将（　　　）数转换为（　　　）数。

本节课主要内容

- 一、第3讲概括
- 二、实验建模案例
- 三、综合建模案例

一、第3讲概括

北京航空航天大学

第3讲　问题抽象与建模

3.1 科学抽象过程与方法

3.2 模型的定义和分类

3.3 数学建模的一般步骤和基本方法

3.4 建模的综合案例分析

本讲重点和难点

重点

- 了解计算机解决实际问题的过程
- 掌握数学建模的7个步骤
- 掌握数学建模的三种基本方法

难点

- 如何对实际问题进行合理的抽象？
- 如何建立合适的数学模型？

实际问题到计算机程序的映射

- **描述实际问题——用自然语言描述**
- **抽象——找出问题中的本质**
- **建模——对问题本质采用数学符号进行模型描述**
- **设计算法——对模型的实现方法和步骤进行计算机符号描述，如流程图、伪代码等**
- **编写程序——对算法用程序设计语言进行描述**

抽象+自动化

3.1 科学抽象过程与方法

- **抽象**是一种思维方式，抽取问题的**最本质特征**和**属性**
- **科学抽象**是**科学研究**的一种思维方法。通过**分离**、**提纯**和**概括**，抽取出研究对象的**本质特征**，形成**科学概念**或**科学符号**，以达到揭示研究对象的普遍规律和因果关系。

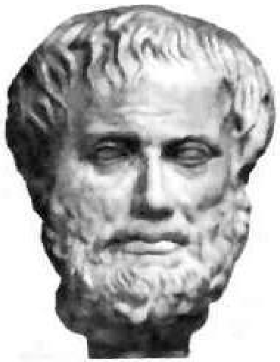
1、科学抽象的过程

- **科学抽象的三个过程**
  - **分离**：将研究对象从其他对象中分离出来，只研究该**对象本身**
  - **提纯**：排除干扰因素，在**纯粹**的状态下对研究对象进行考察
  - **简化**：对实际问题进行**适度**、**合理**的**约简**

科学抽象的案例：【例3.1】

【例3.1】分析研究落体运动时的科学抽象过程。

伽利略是如何得出自由落体定律的？



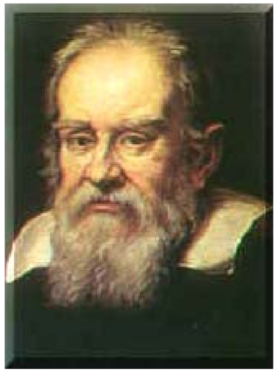
亚里士多德（Aristotle 公元前384～前322）

- 亚里士多德（Aristotle）是古希腊著名的思想家和哲学家，在西方被称为“最博学的人”，世界古代史上伟大的哲学家、科学家和教育家之一
- 亚里士多德通过对大量的物体自由下落的观察，得出结论：“体积相等的两个物体，较重的下落得较快”，此论点流传了1900多年之久

■ 思考：这个论点对吗？为什么会得出这样的结论？

【例3.1】分析

- “**重物体比轻物体坠落较快**”这个关于落体运动的观点是错误的！
- 因为亚里士多德没有意识到空气阻力因素的干扰



伽利略

- **伽利略**（1564-1642），意大利**科学家**、**数学家**、**物理学家**、**天文学家**。被称为“**观测天文学之父**”、“**现代物理学之父**”、“**科学方法之父**”、“**现代科学之父**”
- **提纯**：1589-1591年，他依靠思维的抽象，在思想上撇开空气阻力的因素，设想在**纯粹形态**下的落体运动，通过实验，得出了**自由落体定律：**<u>真空中自由落体运动是一种初速度为零的匀加速直线运动，同一地点轻、重物体的自由下落速度是相同的</u>，纠正了亚里士多德的错误论点

科学抽象的过程——简化

◆ **简化**

- ✓ **简化**：撇开非本质的因素，**简略反映客观事实**
- ✓ 是对纯态研究结果的一种表述方式，简化的目的是为了能够求出问题的解
- ✓ 比如，自由落体定律可简略用公式表示：$s = \frac{1}{2}gt^2$

  其中，s为物体在t时间内下落的距离，g为重力加速度，通常的计算g取值**9.8m/s^2**

2、科学抽象的方法

科学抽象方法

- **逻辑方法**
  - **归纳**
  - 演绎
  - 类比
- **非逻辑方法**
  - 科学想象
  - 直觉
  - 灵感
- **量化方法**
  - **数学方法**
  - 系统科学方法
  - 复杂性研究方法

科学抽象的逻辑方法--归纳

归 纳

- **归纳**：从**特殊**的、**具体**的认识推进到**一般**的抽象认识的一种思维方式
- 是从**个别**或**特殊**的事实中概括出**共同本质**或**一般原理**的逻辑思维方法，也是一种推理形式
- **从特殊事实→一般规律**
- **从具体事物→普遍规律**

归纳的案例：【例3.2】

【例3.2】归纳的案例：斐波那契数列（兔子数列）。

- **已知**：最初有一对小兔子，一个月后能长成大兔，再过一个月能生下一对小兔，并且此后每月生育一对兔子。小兔在出生后两个月又开始生育且繁殖情况与最初的那对兔子一样。
- **问题1**：如果所有兔子都不死，则第12个月末共有多少对兔子？

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
小兔子对数	1	0	1	1	2	3	5	8	13			
大兔子对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21			
兔子总对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34			?

第6个月有多少对兔子？

1月：1对

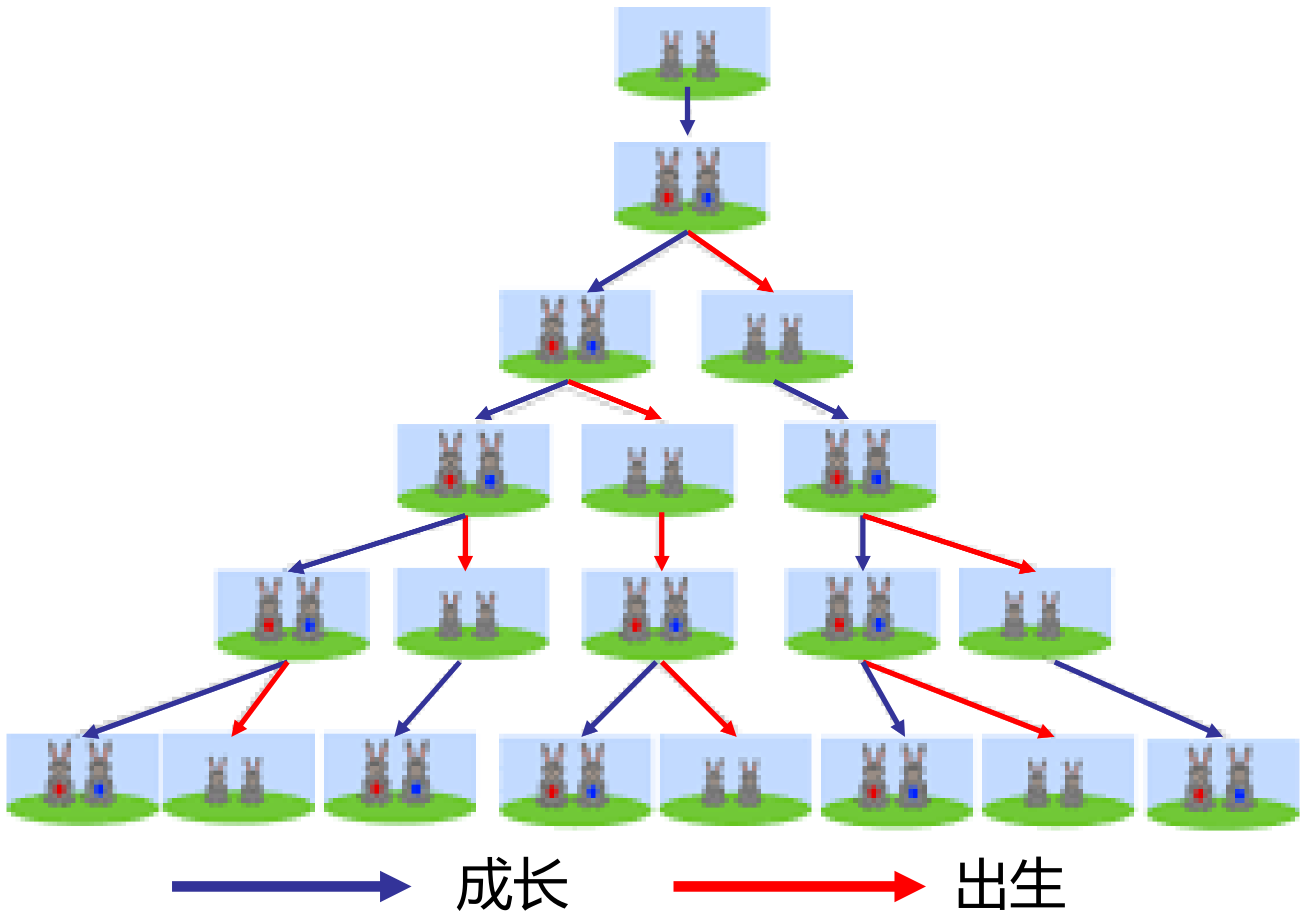
2月：1对

3月：2对

4月：3对

5月：5对

6月：8对



归纳——观察总结，发现规律

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
小兔子对数	1	0	1	1	2	3	5	8	13	**21**	**34**	**55**
大兔子对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	**34**	**55**	**89**
兔子总对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	**55**	**89**	**144**

- **观察表中兔子对数，有何规律?**
  - 本月**小兔子**对数 = 上一个月大兔子对数
  - 本月**大兔子**对数 = 上一个月小兔子和大兔子对数之和
  - 本月(≥3)**兔子总对数** = **前两个月**兔子总对数**之和**

第12个月末共有144对兔子

第n个月末有多少对兔子？

- **问题2**：第n个月末时，兔子对数是多少？
  - 假定从第0个月开始计算，显然第0个月的兔子对数为0
  - 根据上述归纳推理，得出计算兔子对数的**一般公式**

若用$F(n)$表示第n个月兔子的对数，则有：

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

兔子繁殖问题的模型

【例3.2】的Python程序

```
fib=[None]*13           #创建占用13个元素空间（（值为None）的列表）
fib[0]=0                #第0个月时没有兔子
fib[1]=1

print('第1个月：',fib[1])          #打印

for n in range(2,13):              #for循环语句，range为范围函数
    fib[n]=fib[n-1]+fib[n-2]       #计算第n个月兔子的对数
    print('第',n,'个月：',fib[n])   #打印
```

```
>>>
第1个月： 1
第 2 个月： 1
第 3 个月： 2
第 4 个月： 3
第 5 个月： 5
第 6 个月： 8
第 7 个月： 13
第 8 个月： 21
第 9 个月： 34
第 10 个月： 55
第 11 个月： 89
第 12 个月： 144
```

- **思考**：求第24个月末时的兔子对数，如何修改程序？

斐波那契数列

- **斐波那契数列**（Fibonacci sequence）
  - 如果有这样一个数列，这个数列**从第3项开始，每一项都等于前两项之和**，则称该数列为**斐波那契数列（兔子数列）**
  - 相邻两个斐波那契数的比值是随着序号的增加逐渐趋于黄金分割比，即f(n)/f(n+1)-→0.618，故又称为**黄金分割数列**
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233，377，610，987，1597，2584，4181，6765，10946，17711，28657，46368.......
  - 其中的任意一个数，称为**斐波那契数**

1、模型的定义

- **模型（model ）**：是对实体的**特征**及其**变化规律**的一种**表示**或者**抽象**，即是把对象实体通过**适当的过滤**，用适当的表现规则描绘出的**原型的简洁替代物**

- **建模**（或模型化）：**把实体（对象）变为模型的过程**

2、模型的分类

按照抽象程度不同，模型分为**物理模型**和**符号模型**两大类。

- **物理模型**：以**实物**或**画图形式**直观地表达认识对象**特征**
- **符号模型**：用**符号**表示对象的**组成元素**与**相互关系**

模型
- **物理模型**
  - **实物模型**
  - **模拟模型**
- **符号模型**
  - **数学模型**
  - **结构模型**
  - **仿真模型**

■ **思考**：你知道有哪些实物模型和模拟模型？

数学模型

数学模型

- 是参照某种事物系统的特征或数量依存关系，采用**数学语言**，概括地或近似地表述出的一种**数学结构**

自由落体定律 $s = \frac{1}{2}gt^2$

兔子繁殖问题的模型

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

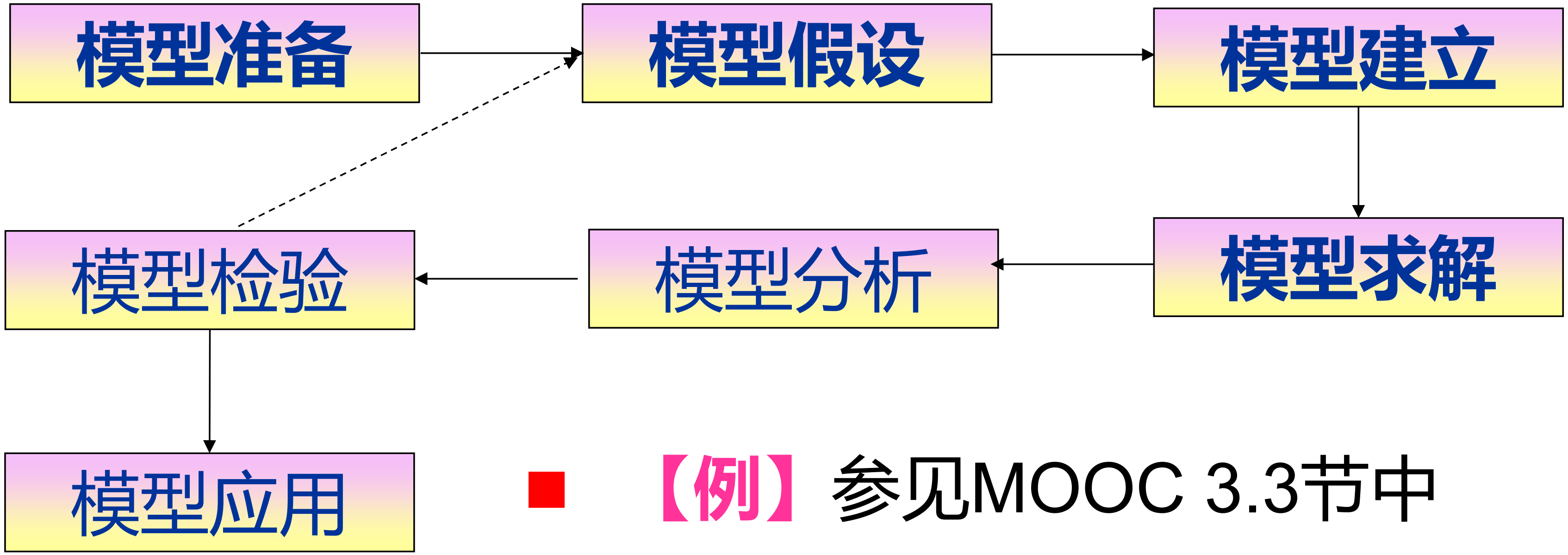
数学模型分类

- **按研究对象的特性**
  - 确定的、随机的，模糊的、突变的，静态的、动态的，连续的、离散的，线性的、非线性的模型
- **按建立模型的数学方法**
  - 初等模型、微分方程模型、 几何模型、图论模型、规划论模型、控制模型、逻辑模型、扩散模型等
- **按对象的实际领域**
  - 人口、交通、生态、生理、经济、社会、工程系统模型等
- **按对对象的了解程度**
  - 白箱、灰箱、黑箱模型

- **根据问题本质和对象特征，选择合适的、匹配度较高的模型**

3.3 数学建模的一般步骤和基本方法

- **数学建模7个步骤**



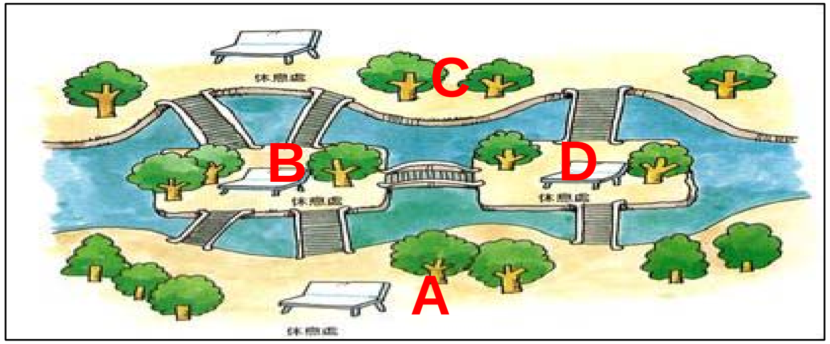
- **【例】**参见MOOC 3.3节中“**七桥问题的建模步骤**”

数学建模的一般步骤

- **模型准备**：通过了解问题的实际背景，搜集资料，形成一个比较清晰的数学问题——**识别问题**（将现实问题表述成数学问题）
- **模型假设**：针对问题特点和建模目的做出**合理**的、**简化**的假设，并用明确的数学语言写出问题的目标表达式。需要在合理与简化之间做出折中
- **模型建立**：用**数学的语言、符号**描述问题，尽量使用简单的数学工具
- **模型求解**：运用各种数学方法、软件和计算机技术求得模型的**未知参数**
- **模型分析**：对模型求解的数字结果进行各种分析，分析所建立的模型是否**准确**、是否**稳定**等
- **模型检验**：将模型的**解答与实际现象、数据比较**，来确保模型的合理性、适用性
- **模型应用**：将模型**应用于实际**问题中

【课堂讨论1】

- MOOC课程第3讲3.3节 “**七桥问题的建模步骤**”
  - **原问题**：从ABCD四块陆地中任意一块出发，是否恰好通过每座桥一次，再回到起点？
- **问题1**：原问题被抽象为什么数学问题？给出描述。
- **问题2**：如何进行模型求解？



数学建模的基本方法

数学建模的基本方法

- **机理建模**：根据某个**理论依据**（先验知识）建立模型
- **实验建模**：通过实验获取实验数据，然后对**实验数据**进行分析，**归纳**总结出内在规律，建立模型
- **综合建模**：通过机理分析建立**数学框架**，通过实验分析确定模型中包含的**参数**或关系

【随堂测验1】

■ 在MOOC课程第3讲**【例3.1】**“**车辆跟随距离问题**”中，判断司机的“**两秒法则**”能否代替司机培训班的“**车身法则**”，**采用的是什么建模方法？**

A. 机理建模

B. 实验建模

C. 综合建模

数学建模的案例

- **教材【案例2.3】时针和分针重合次数问题**——机理建模
- **教材【案例2.2】“行车间距”问题**——综合建模
- **教材【案例2.4】人口预测问题**——实验建模
- **教材【案例2.5】小行星运行轨道问题**——综合建模
- **教材【案例2.8】最短路径问题**——机理建模

二、实验建模案例

北京航空航天大学

实验建模方法

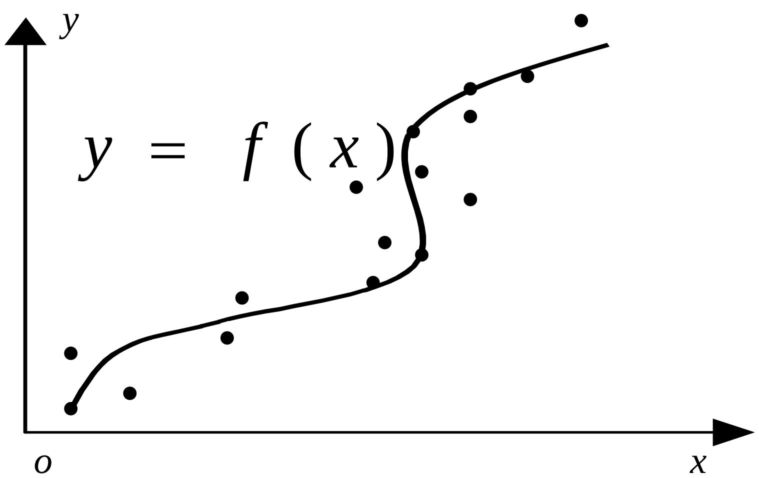
- **实验建模**：在研究对象的内在规律难以获得的情况下，通过**输入、输出数据**的对比和分析，建立数学模型的方法
- **方法**
  - **基于数理统计学的方法**
    - ✓ 收集和分析**随机数据**，抽象出适合的**概率**模型
    - ✓ 如：抽样，给出产品检验的合格率
  - **基于作图的方法**
    - ✓ 以**表格**、**图示**等直观手段，探索数据的结构和特点，发现其规律并建立模型（**插值法**、**曲线\面拟合法**）
    - ✓ 如：人口预测问题

拟合与插值

- 从实验观察、测量得到的一组数据之中往往隐藏着某些变量之间的**未知函数**关系
  - 无法写出解析表达式
  - 解析表达式过于复杂
- 能否找到一个比较简单的近似函数$y=f(x)$，使函数在观测点的值接近或者等于已知的值，用函数$y=f(x)$取代原始的函数关系$y=g(x)$？
- **拟合与插值**

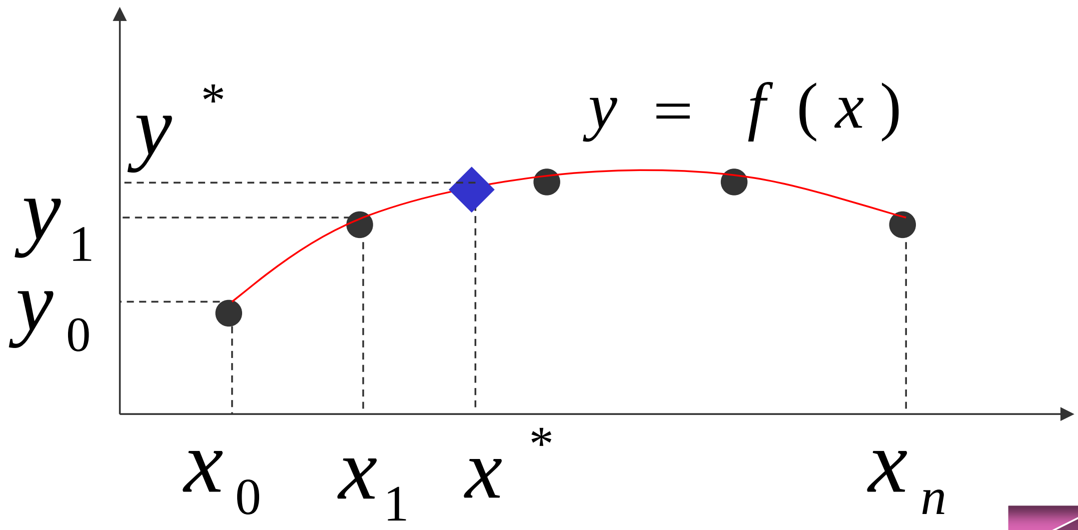
拟合

- 当测量得到的数据**比较多**，或者测量值与真实值之间有一定**误差**时，采用**拟合**方法
- **拟合（Fitting）**：寻求一个**简单、易算**的近似函数$y = f(x)$，使$f(x)$在**某种准则**下与已知的n个离散数据点（x_i, y_i）（i=1,2,...,n）最接近，**不要求近似函数通过所有数据点**



插值

- 当测量数据的数据量**较小**并且数据值是**准确**的，或者基本没有误差时，采用插值的方法
- **插值（Interpolation）**：用一个近似的函数关系式$y=f(x)$来刻画一组实验观测数据中自变量x与因变量y之间的关系，要求这个近似函数曲线**通过**已知的**所有数据点**



【例3.3】人口预测问题。

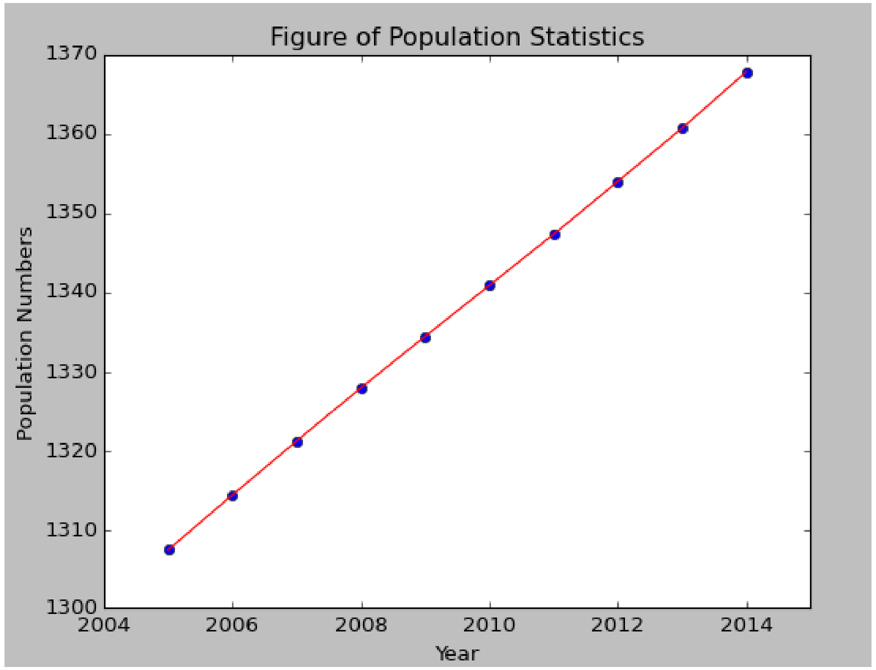
据人口统计年鉴，已知我国从2005年至2014年人口数据资料如表1所示。试建立**人口数**与**年份**的函数关系，并估算**2018**年的人口数。查阅官方资料，看看你预测得是否准确？

表1 2005~2014年人口数据统计表(单位为：百万)

年份	2005	2006	2007	2008	2009
人口数	1307.56	1314.48	1321.29	1328.02	1334.50
年份	2010	2011	2012	2013	2014
人口数	1340.91	1347.35	1354.04	1360.72	1367.82

模型准备与模型建立

- **第一步：模型准备**
  - **进行探索性数据分析**
    - ✓ **绘制：离散点图**
    - ✓ **观察**：属于什么曲线（直线、抛物线、椭圆、多项式表示的曲线）



线性模型

- **第二步：模型建立**
  - $y = ax + b$

编程绘制散点图

```
#scatter.py
import numpy as np                    #导入科学计算包numpy库
import matplotlib.pyplot as plt       #导入绘图库matplotlib.pyplot模块

#一组真实实验数据
x1 = np.array([2005,2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014], dtype=float)
y1 = np.array([1307.56, 1314.48, 1321.29, 1328.02,
1334.50,1340.91,1347.35,1354.04,1360.72,1367.82], dtype=float)
plt.plot(x1,y1,'o')                   #绘制散点图，形状为实心圆点

plt.plot(x1, y1 ,'r')                 #绘制曲线，颜色为红色
plt.title('Figure of Population Statistics') #设置图标题
plt.xlabel('Year')                    #设置x轴标签
plt.ylabel('Population Numbers')      #设置y轴标签
plt.xlim(2004, 2015)                  #设置x轴坐标限度
plt.ylim(1300, 1370)                  #设置y轴坐标限度
plt.show()
```

array函数创建一维数组

模型求解

第三步：模型求解

- 求解a和b：**最小二乘法拟合——使各实验（或观测）数据与拟合曲线的偏差的平方和最小**

$$J=\sum_{i=1}^{n}\delta_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$$

- Python的数值计算库**Scipy**库中的**optimize**模块提供了实现最小二乘拟合算法的函数**leastsq**
  - **leastsq函数**根据给出的一系列数据点，对给定的待拟合函数实现最小二乘拟合算法，求出**拟合参数**

NumPy库和Scipy库

- **NumPy**：**科学计算基础库**，Python的一个第三方库
  - **创建N维数组**（ **array函数**）、**创建矩阵**（ **matrix类**）、**线性代数计算**（**linalg.solve**）、三角函数计算、**多项式拟合**（**polyfit函数**）、傅立叶变换、生成随机数等
- **Scipy** ：**数值计算库**，Python的一个第三方库
  - 矩阵运算、线性方程组求解、积分、优化、**插值（ interpolate函数**）、**拟合**（**leastsq函数**）、信号处理、图像处理、统计等

编程：求解参数

```
#population.py
import numpy as np
from scipy.optimize import leastsq #函数leastsq实现最小二乘拟合算法

#（1）定义待拟合的函数。x是变量，p是待求参数
def fun(x, p):
    a, b = p
    return a*x + b                    #返回拟合函数值

#（2）定义偏差函数：计算拟合数据与真实数据之间的误差
#p是待拟合的参数，x和y分别是真实数据的x和y坐标值
def residuals(p, x, y):
    return fun(x, p) - y
```

编程：求解参数（续1）

array函数创建一维数组

（3）一组真实实验数据
```
x1 = np.array([2005,2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014], dtype=float) #年份
y1 = np.array([1307.56, 1314.48, 1321.29, 1328.02, 1334.50,1340.91,1347.35,1354.04,1360.72,1367.82], dtype=float) #人口数
```

#（4）调用拟合函数leastsq，求出拟合参数。第一个参数是拟合数据与真实数据之间的偏差，第二个是拟合初始值，第三个是需要拟合的实验数据

```
r = leastsq(residuals, [1, 1], args=(x1, y1))
```

编程：求解参数（续2）

```
#（5）输出拟合参数。r[0]存储的是拟合参数，r[1]、r[2]代表其他信息
a,b=r[0]
a=round(a,3)                    #采用round函数，只取保留三位小数的值
b=round(b,3)
print ('拟合参数a=%0.3f，b=%0.3f' % (a,b)) #输出拟合参数

#（6）估算2018年人口数
x0=2018
Result=a*x0 + b
print('估算2018年的人口数为%0.3f' % Result)
print('拟合模型为：','y=%.3f*x+(%.3f)' %(a, b))
```

程序运行结果

```
拟合参数a=6.631, b=-11987.995
估算2018年的人口数为1393.363
拟合模型为: y=6.631*x+(-11987.995)
error=0.001445
```

人口数x与年份y的函数关系：

$$y = 6.631x - 11987.995$$

模型检验

第四步：模型检验 $y = 6.631x - 11987.995$

- 估算2018年人口数：将x = 2018代入模型，可得人口预测值，y=1393.363(百万)
- 查阅官方资料，2018年实际人口值为**1395.38百万**
- 评价模型误差值：|预测值 – 实际值|/实际值 = |1393.363 -1395.38|/1395.38 ≈ 0.001445= **0.145%**

模型误差值为0.145%，证明准确性较高。

【例3.3】实验建模案例总结

【例3.3】总结

- 采用**实验建模**
- **绘制图形**，观察曲线形状，**确定模型y=ax+b**
- 利用**最小二乘法**计算出未知量a、b
- 通过计算误差值**检验模型**质量

【随堂测验2】

- 当测量数据比较多，或者测量值与真实值之间有一定误差时，宜采用**拟合**方法。只需按照**某种准则（如最小二乘准则）**，使近似函数$y = f(x)$与已知的n个离散数据点最接近，**不要求近似函数通过所有数据点**
- **这段话是否正确？**

A. 不正确　　**B. 正确**

三、综合建模案例

北京航空航天大学

■ 综合建模

结合**机理建模**和**实验建模**的方法，通过**机理分析**建立数学框架，通过**测试分析**确定模型中包含的参数或关系。

- 内部结构和特性基本清楚的系统：**白箱问题**， 采用**机理建模**
- 内部结构和特性尚不清楚的系统：**黑箱问题**， 采用**实验建模**
- **内部结构和特性有些了解但又不十分清楚**的系统：**灰箱问题**（如过程控制、航空航天领域的问题），采用**综合建模**

【例3.4】小行星运行轨道问题。

为了确定一颗小行星绕太阳运行的轨道，在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，在5个不同的时间对小行星做了5次观察，测得轨道上5个点的坐标数据如表2所示（单位为天文测量单位）。

表2 轨道上5个点的坐标数据

测试点 / 坐标点	1	2	3	4	5
x	5.764	6.286	6.759	7.168	7.408
y	0.648	1.202	1.823	2.526	3.360

- **试确立小行星的轨道方程，并绘制轨线**

第一步：模型准备

- **研究对象**：小行星运动轨道
- **求解目标**：小行星轨道方程
- **已知信息**：轨道上5个测量点的坐标数据
- **先验知识**：**开普勒第一定律**（每颗行星都沿着各自**椭圆轨道**环绕太阳运动，并且太阳处在椭圆一个焦点上）

第二步：模型假设

- 小行星运动轨迹满足**开普勒第一定律**，即它的轨道是**标准椭圆**
- 小行星可视为质点
- 小行星的轨道不会变化
- 其他星体对小行星轨道的影响可以忽略不计
- 观测数据真实有效

第三步：模型建立

小行星轨道的椭圆方程：

$a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2+2a_4x+2a_5y+1=0$

将5个测量点的数据代入方程，得到一个**五元一次线性方程组**

写成矩阵形式：$AX=b$

$$A=\begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 \\ x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 \\ x_5^2 & 2x_5y_5 & y_5^2 & 2x_5 & 2y_5 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

编程：求解参数

```
# 例3.4-planet_solve_OK.py，求解参数
import numpy  as np          #导入科学计算包NumPy

A=np.matrix([[33.2237,7.4701,0.4199,11.5280,1.2960],
             [39.5138,15.1115,1.4448,12.5720,2.4040],
             [45.6841,24.6433,3.3233,13.5180,3.6460],
             [51.3802,36.2127,6.3807,14.3360,5.0520],
             [54.8785,49.7818,11.2896,14.8160,6.7200]])
b=np.matrix( '-1;-1;-1;-1;-1')
Z=np.linalg.solve(A, b)
a1,a2,a3,a4,a5=Z

print ('椭圆方程中各系数为：')
print('a1=%0.4f, a2=%0.4f, a3=%0.4f, a4=%0.4f, a5=%0.5f' % (a1,a2,a3,a4,a5))
```

matrix类创建矩阵对象

linalg为NumPy的线性代数模块，用于对矩阵进行运算；其中**solve**函数求解多元一次方程组

第四步：模型求解

利用测量数据确定模型中的**关键参数**a_1~a_5。

- 求得a_1~a_5 ：

  a1=0.0507, a2=-0.0351, a3=0.0381, a4=-0.2265,

  a5=0.13210

- 获得**轨道方程**：

$$0.0507x^2 - 0.0702xy + 0.0381y^2 - 0.453x + 0.2642y + 1 = 0$$

编程：绘制轨线

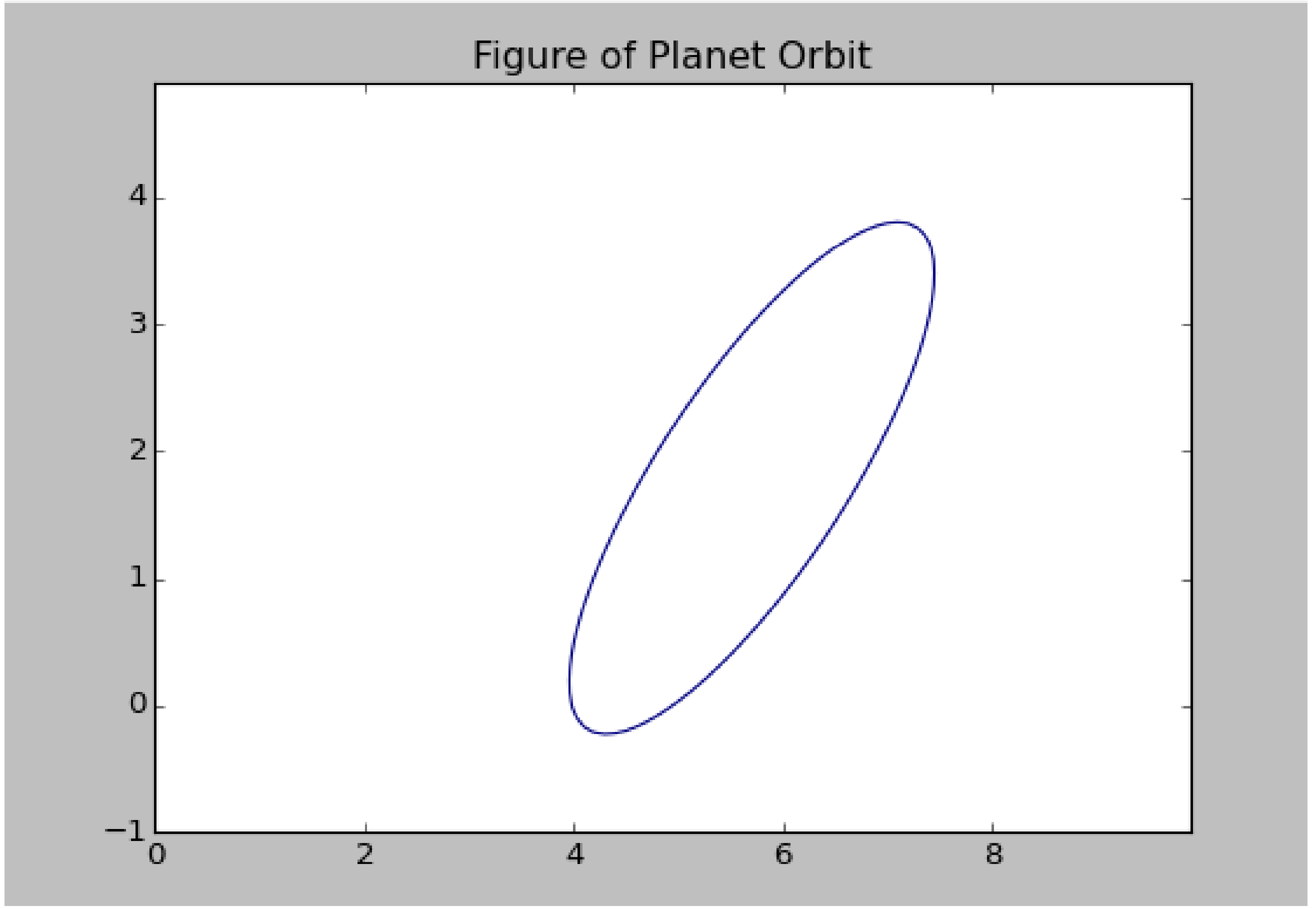
```
#例3.4-planet_draw_OK.py
#绘制小行星的轨线
import numpy  as np                        #导入科学计算包NumPy
import matplotlib.pyplot as plt  #导入matplotlib.pyplot模块

x = np.arange(0, 10, 0.1)                  #生成x的一个等间隔取值数组，步长为0.1
y= np.arange(-1, 5, 0.1)                   #生成y的一个等间隔取值数组，步长为0.1
x, y = np.meshgrid(x,y)                    #生成二维平面上的x坐标值和y坐标值

plt.contour(x, y, 0.0507*(x**2)-0.0702*x*y+0.0381*(y**2)-0.4530*x+0.2642*y, [-1])
#绘制轮廓线

plt.show()                                 #使图形在屏幕上显示
```

小行星的轨线



【举手发言】

■ **问题**：

1、什么是综合建模？一般应用于什么场合？

2、白箱问题一般采用什么方法建模？黑箱问题呢？

综合建模方法总结

- **综合建模**是将**机理建模**和**实验建模**相结合的方法，一般适于**灰箱问题**
  - **模型建立**：根据**先验知识**——开普勒第一定律，确定小行星的标准椭圆运行轨迹 机理建模
  - **模型求解**：根据**测量数据**，采用数学方法，求出模型中未知**参数** 实验建模

【课堂练习】

【课堂练习】已知甲乙两地相距750公里，船从甲地到乙地顺水航行需30小时，从乙地到甲地逆水航行需50小时。假设船速和水流速度都是匀速。试**建立数学模型**并求解。问：

（1）船速是多少？水速是多少？

（2）你采用的是什么建模方法？

三分钟内完成

本讲小结

北京航空航天大学

第3讲 问题抽象与建模

3.1 科学抽象过程与方法

3.2 模型的定义和分类

3.3 数学建模的一般步骤和基本方法

3.4 建模的综合案例分析

3.1 科学抽象过程与方法

- **抽象**是一种思维方式，抽取问题的**最本质特征**和**属性**
- **科学抽象**是在科学研究中通过对经验材料的比较和分析，通过**分离**、**提纯**和**概括**，抽取出研究对象的本质特征，形成**科学概念**或**科学符号**，以达到揭示研究对象的普遍规律和因果关系。

科学抽象的过程

■ 科学抽象的三个过程

- **分离**：将研究对象从其他对象中分离出来，只研究该**对象本身**
- **提纯**：排除干扰因素，在**纯粹**的状态下对研究对象进行考察
- **简化**：对实际问题进行**适度**、**合理**的**约简**

科学抽象的方法

科学抽象方法

- 逻辑方法
  - 归纳
    - 从个别事实中概括出一般原理的思维方法
  - 演绎
  - 类比
- 非逻辑方法
  - 科学想象
  - 直觉
  - 灵感
- 量化方法
  - 数学方法
    - 主要有数值分析、数学建模和数学实验
  - 系统科学方法
  - 复杂性研究方法

3.2 模型的定义和分类

■ 模型定义

模型是把对象实体通过**适当的过滤**，用适当的表现规则描绘出的原型的**简洁替代物**

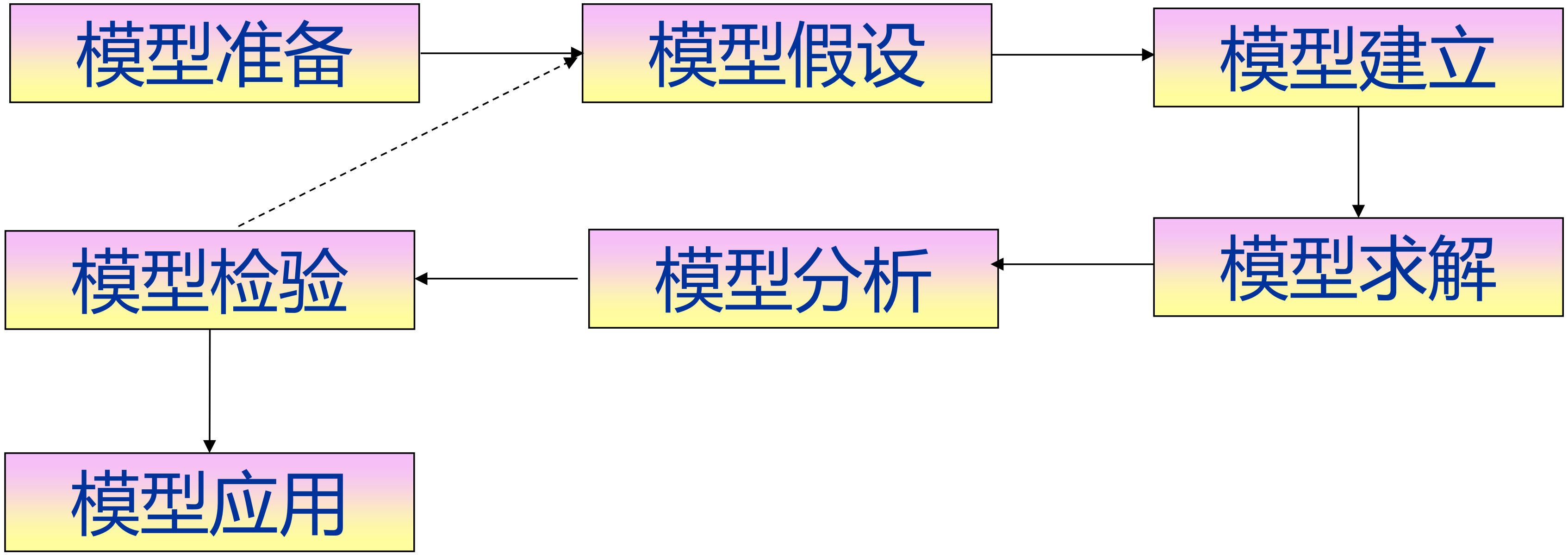
- **模型**
  - **物理模型**
    - 实物模型
    - 模拟模型
  - **符号模型**
    - 数学模型
    - 结构模型
    - 仿真模型

数学模型的定义和分类

- **数学模型**
  - 是参照某种事物系统的特征或数量依存关系，采用**数学语言**，概括地或近似地表述出的一种**数学结构**
- **数学建模**：把实际问题变为数学模型的过程
- **数学模型分类**（按研究对象的特性）
  - 确定性模型和随机性模型
  - 静态模型和动态模型
  - 连续时间模型和离散时间模型
  - 线性模型和非线性模型

3.3 数学建模的一般步骤和基本方法

■ 数学建模7个步骤



数学建模核心步骤

- **确定数学模型的类型**，根据问题、所求结果精确度等因素确定数学模型的**类型**
- **确定基本量**，根据有关理论确定若干基本量，以反映对象量的规定性，刻画它的状态、特征和变化规律等
- **抽象出数学模型**，用数学的**概念**、**符号**和**数学表达式**来描述对象

数学建模的基本方法

- **机理建模**：根据某个**理论依据**（先验知识）建立模型
- **实验建模**：通过实验获取实验数据，然后对**实验数据**进行分析，**归纳**总结出内在规律，建立模型
- **综合建模**：通过机理分析建立数学框架，通过实验分析确定模型中包含的参数或关系