

计量经济学: 第二次作业

主讲教师: 崔文昊

截止日期: 2022 年 10 月 13 日

1. 请在指定日期当天课前提交作业。
2. 请用 A4 纸完成作业。如果作业为多页, 请于 A4 纸左上角装订。
3. 使用 Matlab 完成的作业, 请将代码, 连同结果一并打印提交。

第一题 (20 分)

我们考虑简单的线性模型 $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + u_i$, 其中误差项独立同分布并且有 $Var(u_i|X_{2,i}) = \sigma^2$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 表示观测数量。我们已经在课堂中给大家推导出基于正态分布的 MLE 和 MM 与 OLS 估计等价, 并且有:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{2,i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^N (X_{2,i} - \bar{X}_2)^2}, \quad \hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2,$$

其中 $\bar{X}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{2,i}$, $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ 。我们在课堂上已经推导出 $Var(\hat{\beta}_2|X_{2,i}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^N (X_{2,i} - \bar{X}_2)^2}$, 计算 $Var(\hat{\beta}_1|X_{2,i})$ 和 $Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2|X_{2,i})$ 的值。

第二题 (15 分)

我们继续考虑第一题中简单的线性模型 $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + u_i$, 但是我们可以采用矩阵和向量将其表示为 $Y = X\beta + u$ 。

2.1 (5 分)

给出 Y, X, β 的具体表达式。

2.2 (5 分)

基于 X 的表达式, 计算 $X'X$ 和 $(X'X)^{-1}$ 的表达式。

2.3 (5 分)

计算 $Var(\hat{\beta}|X)$ (注意: $Var(\hat{\beta}|X)$ 是 2 维协方差矩阵), 并与第一题的计算结果进行比较, 结果是否一致?

第三题 (25 分)

我们考虑简单的过原点回归 $Y_i = \beta X_i + u_i$ 。

3.1 (10 分)

推导基于正态分布的 MLE 和 MM 的估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2}$ 。

3.2 (15 分)

假设真实的模型并不服从过原点回归，真实的模型服从简单的线性模型 $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ ，其中 $\alpha \neq 0$ 。但是你错误的使用过原点回归进行估计，得到了 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2}$ 的结果，证明除非在一种特殊情况下，我们一般会有 $E[\hat{\beta}] \neq \beta$ 。