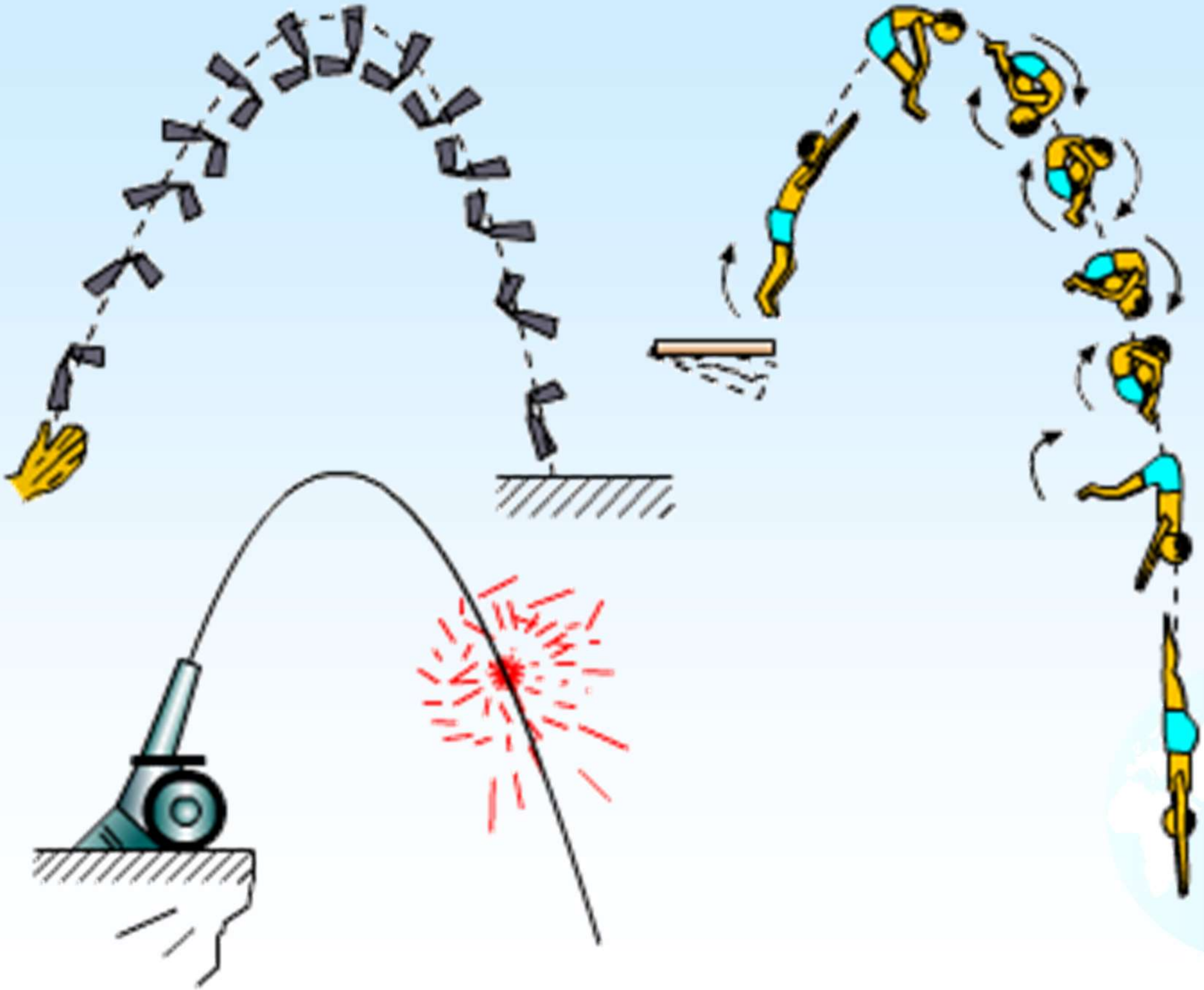
第六章 质心力学定理

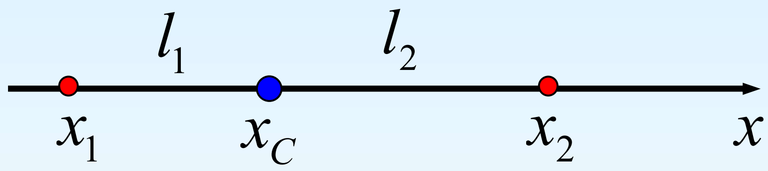


6.1 质心动量定理

1. 质心

质点系中总有一特殊点，其运动和质点系的所有质量集中于该处的质点运动相同 ⇒ 质心

例如：以两质点组为例



若有一点x_C，使 $m_1 l_1 = m_2 l_2$

x_C就是x_1和x_2的质心

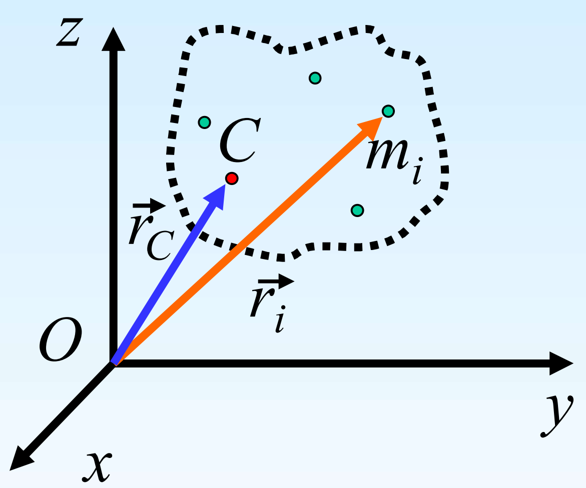
$$m_1(x_C - x_1) = m_2(x_2 - x_C) \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

- 这时 x_C 刚好是使杠杆平衡的点.

2. 质心坐标

推广到3维质点组，若n个质点的位矢为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_n$,

总质量 $M = \sum_i m_i$



$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i}$$

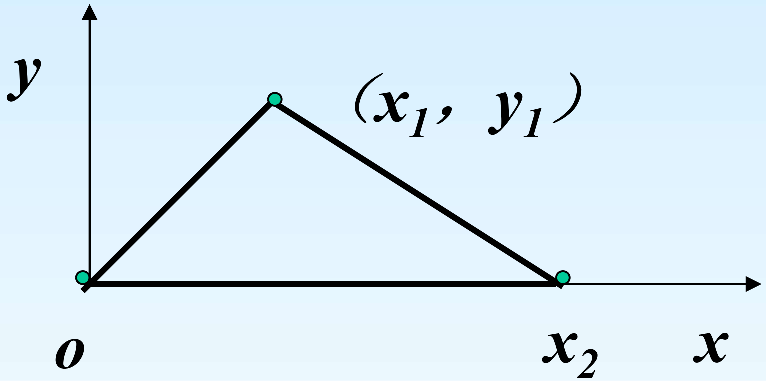
$\vec{r}_i$—第i个质点的位矢

M—质点系的总质量

在直角坐标系中质心位置坐标：

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \qquad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \qquad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

如：任意三角形的每个顶点有一质点m。



$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

对于质量连续分布物体：

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\mathrm{d}m = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}d\tau}{\int_V \rho(\vec{r})d\tau}$$

一维： $\mathrm{d}m = \lambda(x)\mathrm{d}x$ $\lambda(x)$ —线密度

二维： $\mathrm{d}m = \sigma(x,y)\mathrm{d}S$ $\sigma(x,y)$ —面密度

三维： $\mathrm{d}m = \rho(x,y,z)\mathrm{d}\tau$ $\rho(x,y,z)$ —体密度

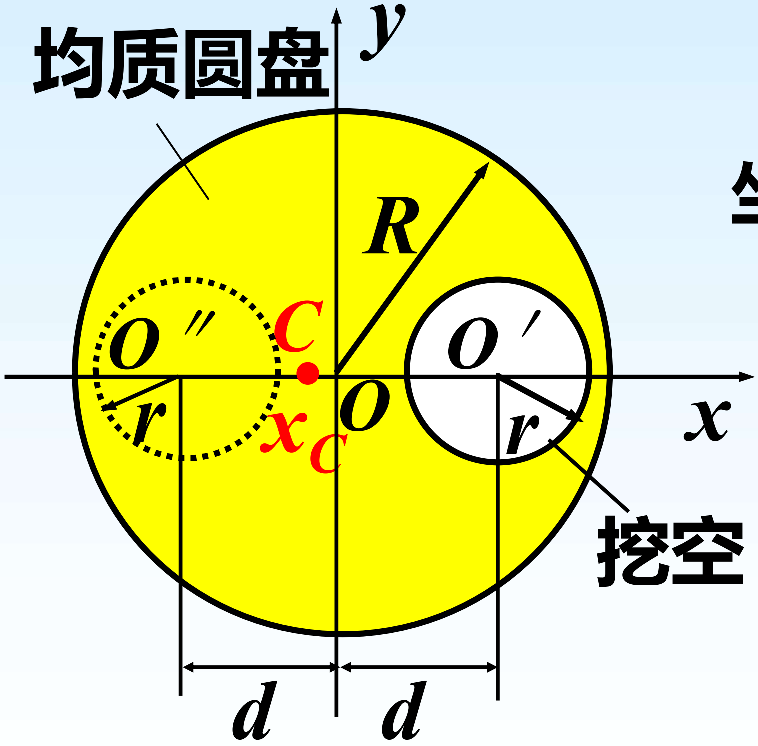
直角坐标系：

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{M} \quad y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{M} \quad z_C = \frac{\int z\mathrm{d}m}{M}$$

- 质心位置是质点组的固有性质，与参考系选择无关
  相对自身位置的唯一性

例　如图示，求挖掉小圆盘后系统的质心坐标。

解：　由对称性分析，质心C应在x轴上。



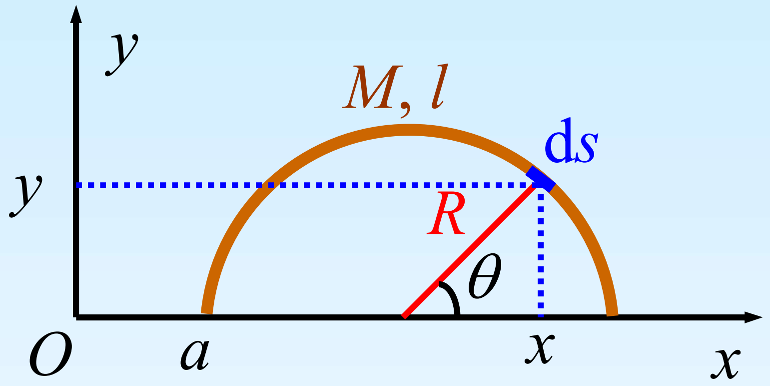
令 σ为质量的面密度，则质心坐标为：

$$x_C = \frac{0 + (-d \cdot \sigma \cdot \pi r^2)}{\sigma \cdot \pi R^2 - \sigma \cdot \pi r^2}$$

$$= -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

6.1 质心动量定理

例：质量为M，长度为l的均匀细杆弯成半圆形，求质心的位置。



解：取弧元$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}s = (M/l)R\mathrm{d}\theta$

或 $\quad \mathrm{d}m = M\mathrm{d}\theta/\pi$

$\mathrm{d}s$的坐标： $x = a + R + R\cos\theta;\ y = R\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int x\mathrm{d}m = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi (a + R + R\cos\theta)\mathrm{d}\theta = a + R \\ y_C = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y\mathrm{d}m = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi R\sin\theta\mathrm{d}\theta = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

- 质心不一定在质点分布区域之中
- 若某一方向上对称分布，质心在该方向的对称中心线上

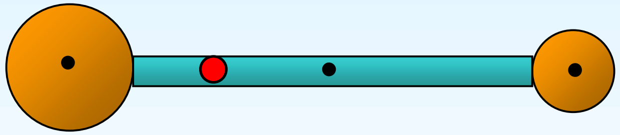
6.1 质心动量定理

说明：

- 质量均匀分布+几何对称性⇒质心在几何对称中心

均匀杆、圆盘、圆环、球，质心为其几何中心。

- 叠加性：已知系统各部分的质心，可求整个系统的质心



- ≠重心，物体固有，与外界无关。

"小线度"物体，地面附近，质心和重心是重合的。
如果物体的体积比之于地球不可忽略,则该球体所处的重力场就不均匀了,具体说是由下自上重力场逐渐减小,此时重力的作用点靠下,也就是重心低于质心.

- 质点系运动＝质心运动＋相对质心的运动

质心怎样运动?

3. 质心动量

质心运动速度：$\vec{v}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i\right] = \dfrac{1}{M}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i m_i\vec{r}_i\right]$

$$= \frac{1}{M}\left[\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{1}{M}\left[\sum_i m_i\vec{v}_i\right]$$

$$\boxed{M\vec{v}_C = \sum_i m_i\vec{v}_i}$$

⇒ 质心动量等于质点组的总动量.

定义： $M\vec{v}_C = \left[\sum_i m_i\right]\vec{v}_C$ ——质心动量

质心动量为质点组的总质量乘以质心速度.

4. 质心运动定理

质心动量： $\boxed{M\vec{v}_C=\sum_i m_i\vec{v}_i}$

质点组动量变化定理： $\mathrm{d}\vec{I}_{外}=\mathrm{d}\vec{P}\quad\Rightarrow\sum_i\vec{F}_i\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left[\sum_i m_i\vec{v}_i\right]$

所以： $\boxed{\mathrm{d}\left(M\vec{v}_C\right)=\sum_i F_i\mathrm{d}t}$ ——质心动量变化定理

质心动量的改变量等于合外力的冲量.

又： $\boxed{M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_i\vec{F}_i}$ 即 $\boxed{M\vec{a}_C=\sum_i\vec{F}_i}$ ——质心运动定理

质点组总质量与质心加速度的乘积等于质点组所受合外力.

（相当于质心运动的牛顿第二定律）

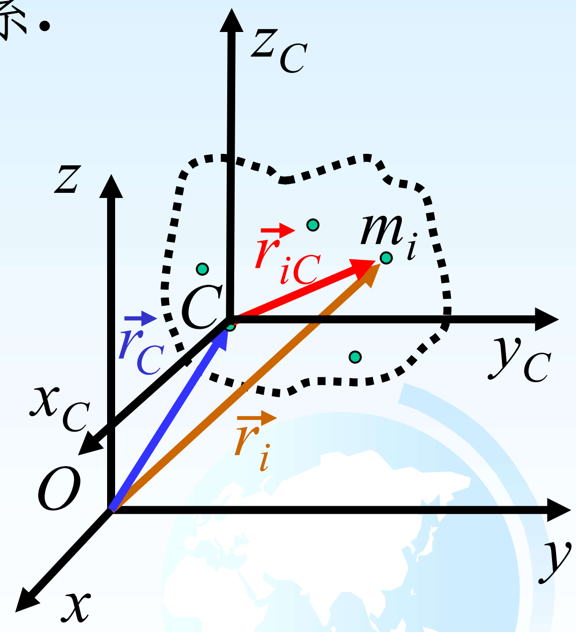
筛选法（大小土豆）

5. 质心参考系（随质心一起平动的参照系）

质心参考系： 以质心 $\vec{r}_C = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$ 为参考系

- 质心系可以是惯性系，也可以是非惯性系.

  当质点系所受合外力为零时，质心系是惯性系，否则是非惯性系.



证明：根据质心运动定理

$$M\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$\vec{a}_C = 0$ 质心系为惯性系

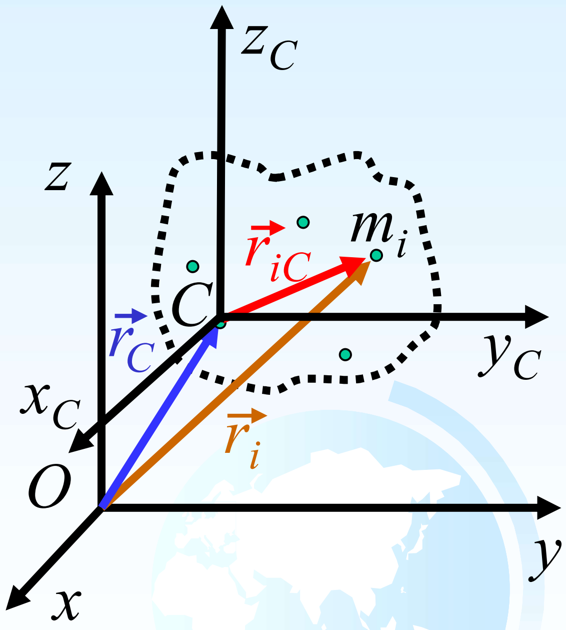
- 质心系中的质心速度恒为零

  ⇔质点组总动量恒为零.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_{iC} = 0 \qquad \vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\boxed{M\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_{iC} = 0}$$

——质点组总动量恒为零



从质心系看质点组运动:

所有质点总是从质心系原点散开或汇聚

例 一长$l=4\text{m}$，质量$m_1=150\text{kg}$ 的船，静止在湖面上。现有一质量$m_2=50\text{kg}$ 的人，从船头走到船尾，如图所示。

求 人和船相对于湖岸各移动的距离。 (设水对船的阻力忽略不计)

解 以人和船组成的质点系为研究对象

建立坐标系，坐标如图所示。

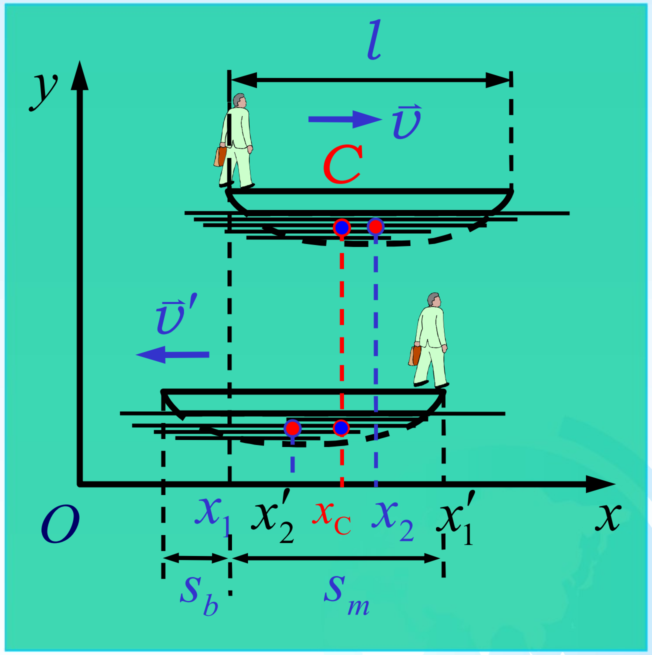
质点系所受外力沿x轴的分量为零

则 $$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}v_{Cx}}{\mathrm{d}t}=0$$

$$v_{Cx}=\text{常量}$$

而 $$v_{Cx}=v_{Cx0}=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=0$$

$$x_C=\text{常量}$$



质心位置坐标在人走动过程中保持不变

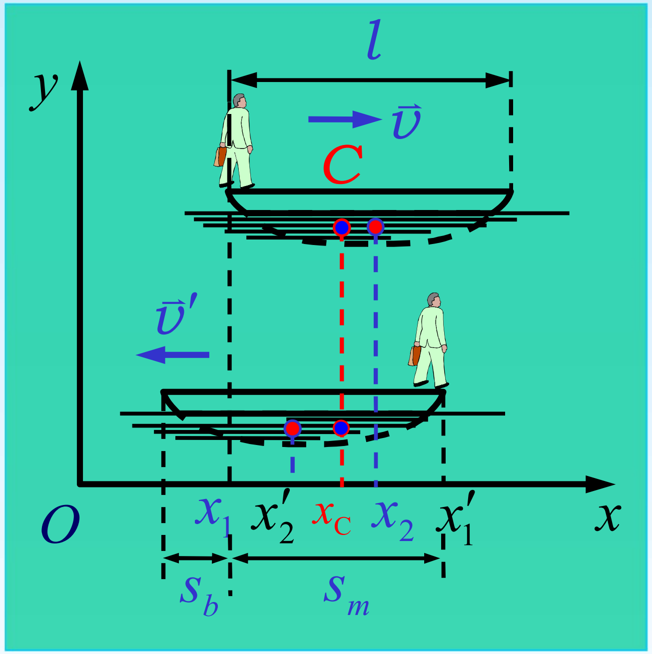
在人走之前，人船系统质心的坐标为

$$x_{\mathrm{C}}=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}$$

当人走到船尾时，系统质心的坐标为

$$x'_{\mathrm{C}}=\frac{m_2x'_1+m_1x'_2}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{m_2(x_1+l-s_{\mathrm{b}})+m_1(x_2-s_{\mathrm{b}})}{m_1+m_2}$$



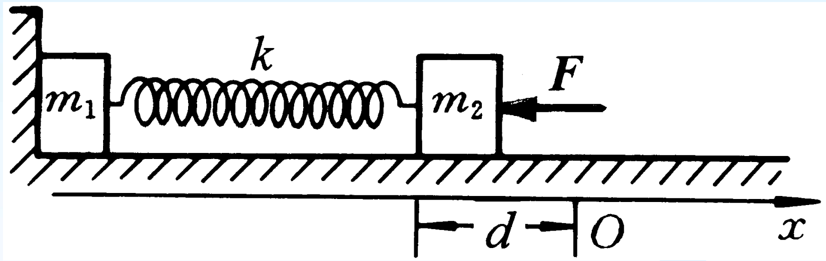
因为 $x'_{\mathrm{C}}=x_{\mathrm{C}}$

船相对于湖岸移动的距离为 $s_{\mathrm{b}}=\dfrac{m_2l}{m_2+m_1}=\dfrac{50\times4}{150+50}=1\mathrm{m}$

人相对于湖岸移动的距离为 $s_{\mathrm{m}}=l-s_{\mathrm{b}}=\dfrac{m_1l}{m_1+m_2}=3\mathrm{m}$

例 用劲度系数为k的弹簧，将质量分别为m_1和m_2的物体连接起来，放置在光滑的水平面上。设m_1紧靠墙，在m_2上施力将弹簧压缩了d. 若以物体m_1，m_2和弹簧为系统，试求在外力撤去之后，(1)系统质心加速度的最大值；(2)系统质心速度的最大值。

[解] (1)选取O点为x轴的原点。



按题意，物体m_1，m_2和弹簧所组成的系统，在受到了外力 $F_{1x} = -kd$ 使弹簧压缩了d 之后,墙壁对该系统的作用力为 $F_{2x} = kd$. 在撤去 F_{1x} 后，在作用 F_{2x}下，该系统质心加速度的最大值为

$$a_{cmax} = \frac{kd}{m_1 + m_2}$$

(2) 在撤去F_{1x}后的最初阶段，物体m_2在力$F_x = -kx$ 作用下作加速运动;

在 $x = 0$ 时力F_x减小到零，然而物体m_2的速度却达到了它的最大值$v_{2\max}$;

物体m_2的动能等于弹簧的弹性势能，$\frac{1}{2} m_2 v_{2max}^2 = \frac{1}{2} k d^2$

由此可得 $v_{2max} = \sqrt{k/m_2}\, d$

这时，系统的质心速度也达到了它的最大值，

即

$$v_{cmax} = \frac{m_2 v_{2\max}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{k m_2}\, d}{m_1 + m_2}$$

前:系统一直受到墙壁的作用力,质心速度一直在增加;

后:系统不再受到外力的作用,质心速度将不再改变。

6. 2 质心动能定理

1. 质心动能定理(科尼希定理)

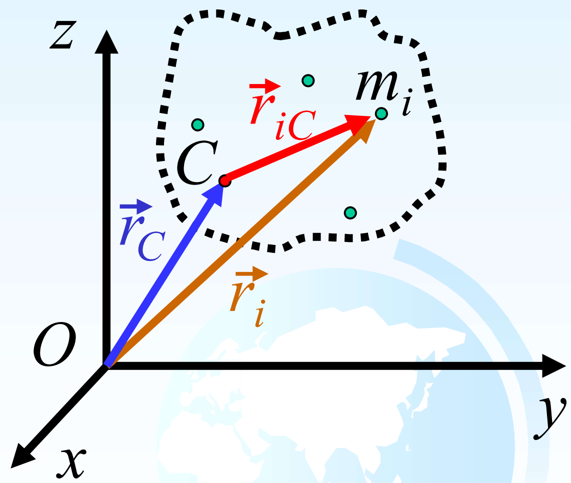
定义：$E_C = \frac{1}{2} M \upsilon_C^{\ 2}$ ——质心动能

$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^{\ 2}$ ——质点组总动能

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC} \quad \Rightarrow \vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_{iC}$$

$$\upsilon_i^2 = \vec{\upsilon}_i \cdot \vec{\upsilon}_i = \left(\vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_{iC}\right) \cdot \left(\vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_{iC}\right)$$

$$= \upsilon_C^{\ 2} + \upsilon_{iC}^{\ 2} + 2\vec{\upsilon}_C \cdot \vec{\upsilon}_{iC}$$



$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\upsilon_C^2 + \upsilon_{iC}^2 + 2\vec{\upsilon}_C \cdot \vec{\upsilon}_{iC}\right)$$

6.2 质心动能定理

$$E_k=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\vec{v}_C^2\right)+\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\vec{v}_{iC}^2\right)+\underline{\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i 2\vec{v}_C\cdot\vec{v}_{iC}\right)}$$

$$\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i 2\vec{v}_C\cdot\vec{v}_{iC}\right)=\vec{v}_C\cdot\underbrace{\sum_i m_i\cdot\vec{v}_{iC}}_{\text{质心系中质点组总动量!}}=\vec{v}_C\cdot 0=0$$

质心系中质点组**总动量!**

$$E_k=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i v_C^2\right)+\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i v_{iC}^2\right)=\underbrace{\frac{1}{2}Mv_C^2}_{E_C}+\underbrace{\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i v_{iC}^2\right)}_{E_{rC}}$$

$\boxed{E_k=E_C+E_{rC}}$ ——质心动能定理(科尼希定理)

质点组对惯性系的总动能等于质心对惯性系的动能与质点组对质心系的动能之和.

2. 重力势能与质心势能

定义： $E_C = Mgh_C$ ——质心重力势能

$$E = \sum_i m_i g h_i$$ ——质点组重力势能

$$M = \sum_i m_i$$

$$E = \sum_i m_i g h_i = g\sum_i m_i h_i = g\frac{\sum_i m_i h_i}{\sum_i m_i}\sum_i m_i = Mgh_C = E_C$$

即 $\boxed{E = E_C}$

质心重力势能等于质点组的总重力势能.

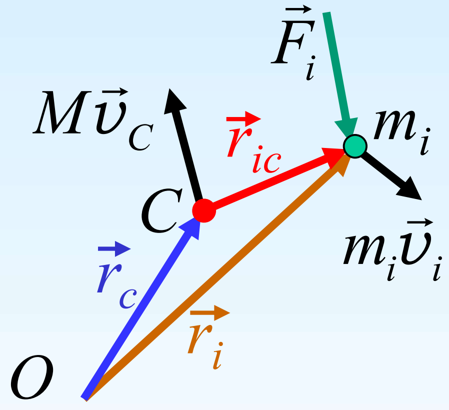
6.3 质心角动量定理

1. 质心角动量

定义：$\vec{L}_C = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C$ —质心角动量

$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i)$ —质点组总角动量

$M = \sum_i m_i$



因为：$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC}$　　$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{iC}$

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_C + \vec{r}_{iC}) \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{iC})$$

$$= \sum_i (\vec{r}_C \times m_i\vec{v}_C) + \sum_i (\vec{r}_{iC} \times m_i\vec{v}_{iC})$$

$$+ \sum_i (\vec{r}_C \times m_i\vec{v}_{iC}) + \sum_i (\vec{r}_{iC} \times m_i\vec{v}_C)$$

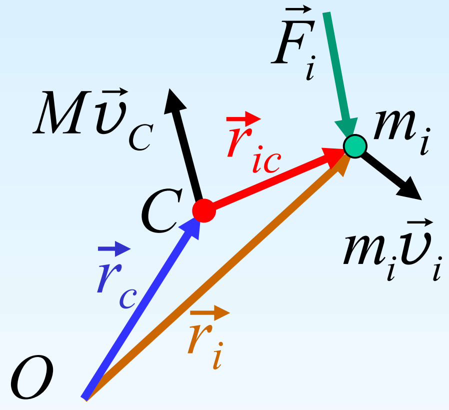
6.3 质心角动量定理

$$\vec{L}=\vec{r}_C\times\left(\sum_i m_i\right)\vec{v}_C+\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC}\right)$$

$$+\vec{r}_C\times\sum_i\left(m_i\vec{v}_{iC}\right)+\sum_i\left(m_i\vec{r}_{iC}\right)\times\vec{v}_C$$

$$=\vec{r}_C\times M\vec{v}_C+\underbrace{\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC}\right)}_{\vec{L}_{rC}}+\vec{r}_C\times 0+0\times\vec{v}_C$$

$$=\vec{L}_C+\vec{L}_{rC}$$ ——质点组相对质心角动量



$$\boxed{\vec{L}=\vec{L}_C+\vec{L}_{rC}}$$

质点组总角动量等于质心角动量与相对质心角动量之和.

2. 质心角动量变化定理

与单质点完全相同

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}_{\mathrm{C}}} \qquad \boxed{\vec{M}_{\mathrm{C}}=\vec{r}_C\times\sum_i\vec{F}_i}$$

($\vec{M}_C$和$\vec{L}_{\mathrm{C}}$ 都对同一点O)

3. 相对质心的角动量变化定理

质点组的角动量变化定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=M_{外}=\sum_i\left(\vec{r}_{\mathrm{i}}\times\vec{F}_{\mathrm{i}}\right)}$$

$$\vec{L}=\vec{L}_C+\vec{L}_{rC}$$

$$\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_{iC}$$

左边：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{rC}}}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = M_{外} = \sum_i \left(\vec{r}_\mathrm{i} \times \vec{F}_\mathrm{i}\right)}$$

左边：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{rC}}{\mathrm{d}t}$

右边：$\displaystyle\sum_i \left(\vec{r}_\mathrm{i} \times \vec{F}_\mathrm{i}\right) = \sum_i \left(\vec{r}_C \times \vec{F}_i\right) + \underbrace{\sum_i \left(\vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i\right)}_{\vec{M}_{rC}}$

$$= \vec{M}_C + \vec{M}_{rC}$$

$\vec{M}_{rC}$ ←外力相对质心力矩

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{rC}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_C + \vec{M}_{rC}$$

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_\mathrm{C} \qquad \boxed{\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{rC}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_\mathrm{rC}}$$

——相对质心角动量变化定理

相对质心角动量的时间变化率等于外力相对于质心的总力矩.

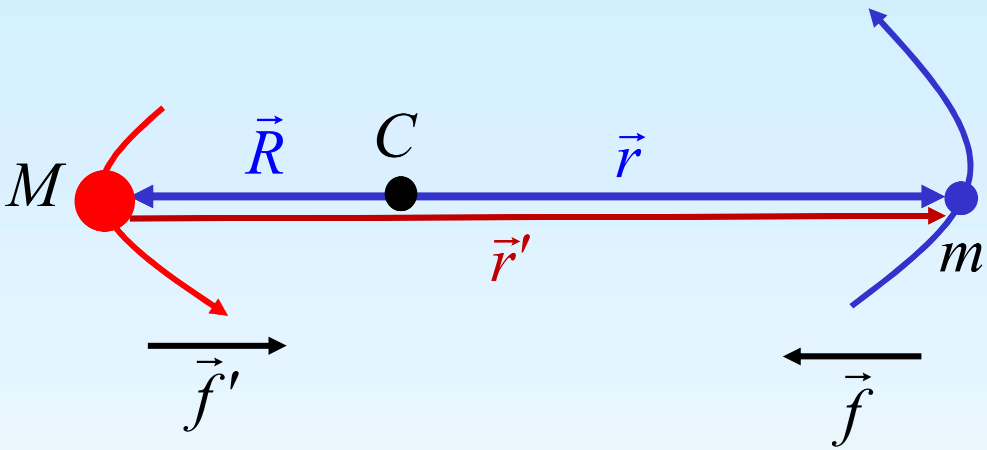
尽管质心系可能不是惯性系，但对质心来说，角动量定理仍然成立。

6.4 有心运动方程与约化质量

1. 有心运动方程

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\vec{f}\,' = -\vec{f}$$



不考虑第三者的影响，

质心系是惯性系：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}\vec{f}$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f}\,' \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{M}\vec{f}\,'$$

相减

$$\frac{\mathrm{d}^2(\vec{r} - \vec{R})}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}\vec{f} - \frac{1}{M}\vec{f}\,'$$

6.4 有心运动方程与约化质量

$$\frac{\mathrm{d}^2(\vec{r}-\vec{R})}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\vec{f} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\vec{f}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}}$$

μ —约化质量 (折合质量)

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{\mu}\vec{f} \longrightarrow \boxed{\mu\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\vec{f}}$$

—行星运动方程

(有心运动方程)

- 虽然日心系是个非惯性系，但把行星的真实质量用约化质量替代，行星运动方程具有牛顿运动方程的表达形式。或者说，约化质量替代了惯性力的贡献.
- 绕质心的两体运动简化为（绕日）单体运动！

2. 日心系作为准惯性系

行星运动方程 $\boxed{\mu\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\vec{f}}$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}}$$

$$M>>m \longrightarrow \mu\approx m$$

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\vec{f}} \longrightarrow \text{日心系可作为准惯性系}$$

准惯性系的精度(相对偏差): $\Delta=\dfrac{m-\mu}{m}=1-\dfrac{1}{1+\dfrac{m}{M}}\approx\dfrac{m}{M}$

- 日地系统 $\Delta\sim10^{-6}$

作业： 6.1, 6.3, 6.4, 6.7