第三节　单纯形法

3.1 举例

3.2 初始基可行解的确定

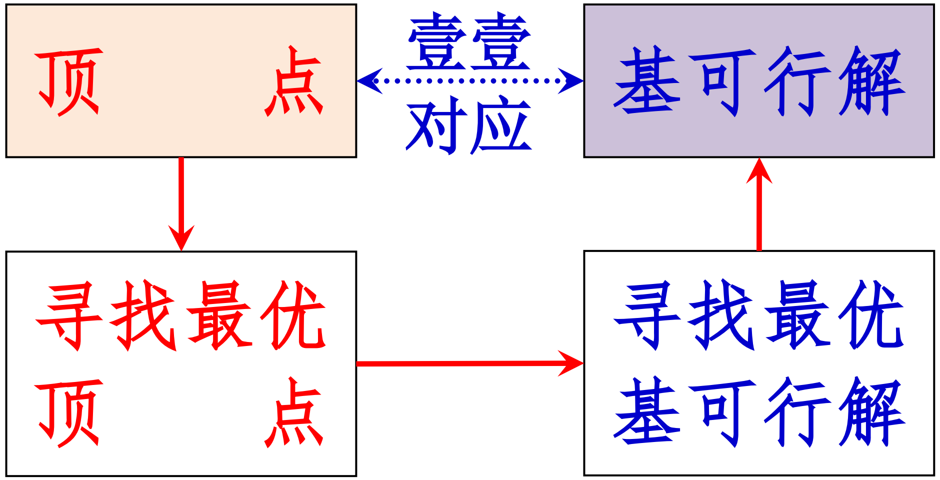
3.3 最优性检验与解的判别

3.4 基变换

3.5 单纯形法全过程：迭代与旋转

3.1 举例——单纯形法的基本思路

从可行域某顶点（基可行解）出发，按照一定规则和逻辑，寻找下一个使目标函数值更优的顶点（基可行解）。



不断迭代，直到目标函数实现最大值（对最大化问题）为止，从而得到最优解。[1]

1 当变量和约束条件很多时，顶点个数很多，穷举法考察所有顶点是不现实的；而单纯形法的每次迭代都会使目标函数有所改进，不是盲目的穷举。

考虑例 1 的标准型：

$$\max z = \underline{2}x_1 + \underline{3}x_2 + \underline{0}x_3 + \underline{0}x_4 + \underline{0}x_5 \qquad (11)$$

s.t.

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 8 \\ 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 16 \\ 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 12 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5 \end{cases} \qquad (12)$$

约束方程（12）的系数矩阵

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

初始顶点（基可行解），

观察可知，变量x_3,x_4,x_5对应的系数列向量$\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4,\mathbf{p}_5$线性独立，因而构成一个初始基矩阵：

$$\mathbf{B}_0=(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4,\mathbf{p}_5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

令非基变量$x_1=x_2=0$，刚好得到一个初始基可行解

$$\mathbf{x}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}，此时z=0。$$

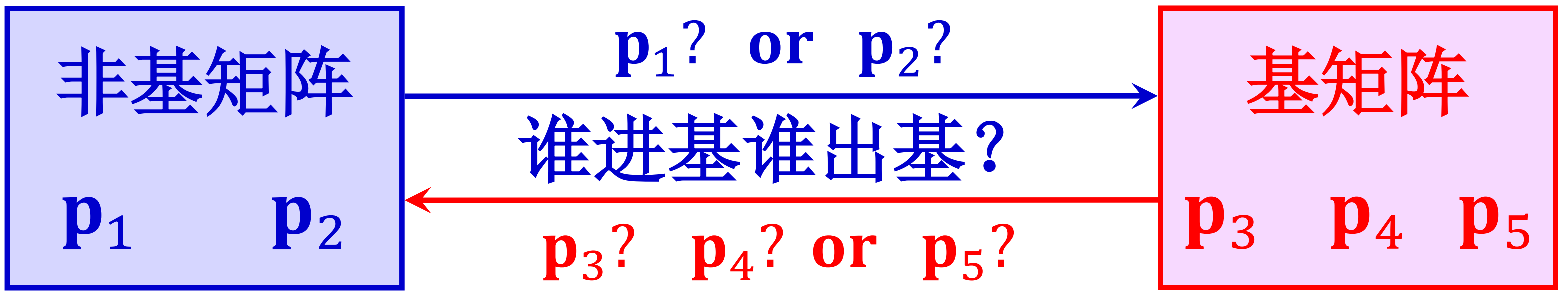
它表示：工厂没有安排生产产品 I、II；资源都没有被利用，所以工厂的利润 $z=0$ ——显然不是最优。

第一步改进，

考虑对当前解进行优化：因为最优解在顶点（基可行解）达到，所以只需寻找下一个更好的顶点（基可行解）。

✧ 寻找新的顶点/基可行解等价于寻找新的基矩阵。

从当前基矩阵出发找一个新的基，可考虑选一个非基变量对应的列向量，替换当前基矩阵中的某个列：



为确定进基变量，考虑将基变量用非基变量表示：

$$\begin{cases} x_3 = \ \ 8 - 1x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 - 0x_2 \\ x_5 = 12 - 0x_1 - 4x_2 \end{cases} \tag{13}$$

代入目标函数（11）式，有

$$\begin{aligned} z &= \underline{2}x_1 + \underline{3}x_2 + \underline{0}x_3 + \underline{0}x_4 + \underline{0}x_5 \\ &= \underline{2}x_1 + \underline{3}x_2 + \underline{0}(\ 8 - 1x_1 - 2x_2) + \\ &\quad\ \underline{0}(16 - 4x_1 - 0x_2) + \underline{0}(12 - 0x_1 - 4x_2) \\ &= 0 + \left[\underline{2} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right]x_1 + \left[\underline{3} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right]x_2 \\ &= 0 + (c_1 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{p}_1)x_1 + (c_2 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{p}_2)x_2 \end{aligned} \tag{14}$$

分析上述目标函数表达式（**14**）：

$$z = 0 + \left[\underline{2} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] x_1 + \left[\underline{3} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] x_2$$

$$= 0 + 2x_1 + 3x_2$$

非基变量x_1, x_2系数为正，那么如果将非基变量（$= 0$）变换为基变量（> 0），目标函数值就可能增大。

直觉上，x_2的正系数最大，因此x_2的增加可能带来目标函数$z = 2x_1 + 3x_2$更多的增加，于是选择（**14**）式中正系数最大的非基变量x_2作为换入变量。

同时，还需要在基变量中选择一个换出来，成为非基变量，从而保持基矩阵为$m \times m$方阵。

✧ 确定换出变量：

x_2入基后，新的基必由x_2及x_3, x_4, x_5中的某两个组成。

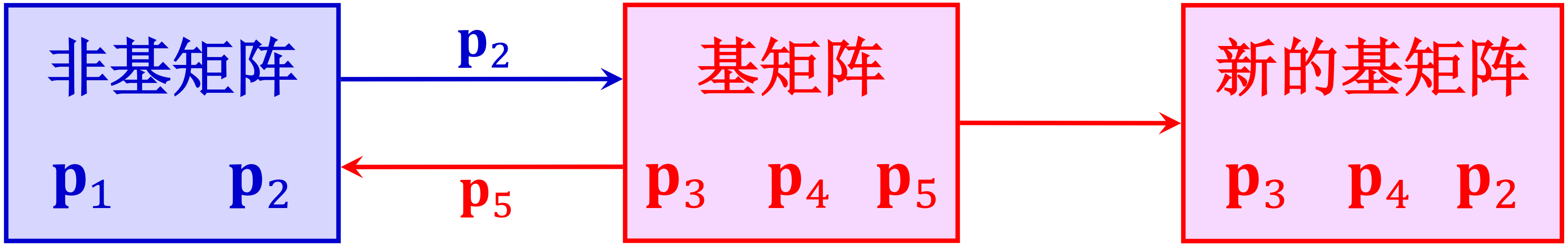
目前有把握断定：x_2入基后，所有剩余的非基变量在下一次迭代中仍是非基变量，因而必然取零，即$x_1 = 0$。根据（**13**）式，有：

$$\begin{cases} x_3 = \ \ 8 - 1x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 - 0x_2 \\ x_5 = 12 - 0x_1 - 4x_2 \end{cases} \xrightarrow{x_1=0} \begin{cases} x_3 = \ \ 8 - 2x_2 \\ x_4 = 16 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases}$$

若x_2作为基变量，则其取值越大越好，但是当赋予x_2尽可能大的值时，必须保证所有变量非负。即，要保证下式成立：

$$
\begin{cases}
x_3 = \;\; 8 - 2x_2 \geq 0 \\
x_4 = 16 - 0x_2 \geq 0 \\
x_5 = 12 - 4x_2 \geq 0
\end{cases} \qquad \text{（15）}
$$

可知，x_2最大只能取$\min\left\{\frac{8}{2}, -, \frac{12}{4}\right\} = 3$，上式才能成立。当$x_2 = 3$时，刚好有：$x_5 = 0$——而非基变量取值必然为 0，因此$x_5$恰好成了非基变量被换出，于是得到新的基变量为：$(x_3, x_4, x_2)$，对应新的基矩阵$(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2)$。



为更加直观，将 **LP** 问题的系数写成增广矩阵如下：

$$(\mathbf{c_B}, \mathbf{x_B}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ \underline{0} & x_3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \underline{0} & x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ \underline{0} & x_5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

初始单位阵$(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5)$对应一个基可行解$(x_3, x_4, x_5) = \mathbf{b} = (8,16,12)$，其余变量（非基变量）$x_1 = x_2 = 0$。

基变量的价值系数向量$\mathbf{c_B}$与非基变量的列向量$\mathbf{p}_1$和$\mathbf{p}_2$的点积分别为：$\mathbf{c_B}\mathbf{p}_1 = (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$和$\mathbf{c_B}\mathbf{p}_2 = (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$。

用非基变量表示基变量并代入目标函数所得（**14**）式为：

$$z = 0 + \left[\underline{2} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right]x_1 + \left[\underline{3} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right]x_2$$

即，以非基变量表达目标函数之后，非基变量在新的目标函数中的系数，就等于其本身的价值系数与上述点积之差：

$$\underline{2} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 2\text{，}\quad \left[\underline{3} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right] = 3$$

因此，为了确定哪个非基变量入基，我们只需要根据增广矩阵计算价值系数与上述点积之差：

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
 & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\
\underline{0} & x_3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
\underline{0} & x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
\underline{0} & x_5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \\
 & & \underbrace{2}_{\underline{2}-(\underline{0},\underline{0},\underline{0})\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}} & \underbrace{3}_{\underline{3}-(\underline{0},\underline{0},\underline{0})\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}} & & & &
\end{array}\right]
$$

对最大化问题，令价值系数与点积之差中最大正数对应的非基变量入基。

在确定出基变量时，需要计算：$\min\{8/2,12/4\}=3$，在增广矩阵中，上述各比值就是右端项b_i与进基变量x_2所在列各元素的比值；比值最小的行对应的变量x_5出基：

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
 & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i & b_i/a_{ik} \\
\underline{0} & x_3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 & 8/2 \\
\underline{0} & x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 & - \\
\underline{0} & x_5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 & 12/4 \\
 & & 2 & 3 & & & & &
\end{array}\right]
$$

最后得到新的基变量x_3,x_4,x_2。

为了以x_3,x_4,x_2为基变量求新的基可行解，令非基变量$x_1=x_5=0$，运用高斯消元，将增广矩阵中x_3,x_4,x_2所在的列变换为单位阵（注，右端项b_i要伴随变换）：

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{pmatrix}\mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i\\ x_3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8\\ x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16\\ x_2 & 0 & [4] & 0 & 0 & 1 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(\mathbf{A}',\mathbf{b}')=\begin{pmatrix}\mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i'\\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2\\ x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16\\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3\end{pmatrix}$$

得到新的基可行解：$(x_3,x_4,x_2)=\mathbf{b}'=(2,16,3)$。

✧ 线性规划问题的等价变换：

高斯消元是对约束方程进行了恒等变形，因此原 **LP** 问题就应等价于下述新的 **LP** 问题：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_5 = 2 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,5 \end{cases}$$

上述问题的约束矩阵中存在一个单位阵$(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2)$，是一个基矩阵，且显然对应基可行解$(x_3, x_4, x_2) = (2,16,3)$，目标函数值为$z = 2x_1 + 3x_2 = 9$。

同时，增广矩阵更新为：

$$(\mathbf{c}_\mathbf{B}, \mathbf{x}_\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \mathbf{c}_\mathbf{B} & \mathbf{x}_\mathbf{B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ \underline{0} & x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ \underline{0} & x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ \underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \end{bmatrix}$$

第二步改进，

从新的等价线性规划问题出发，再次将基变量用非基变量来表示，有

$$\begin{cases} x_3 = \ \ 2 - 1x_1 - (-\frac{1}{2})x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 - \qquad 0x_5 \\ x_2 = \ \ 3 - 0x_1 - \qquad \frac{1}{4}x_5 \end{cases} \qquad (16)$$

将（16）式代入目标函数，得到

$$
\begin{aligned}
z &= \underline{2}x_1 + \underline{0}x_3 + \underline{0}x_4 + \underline{3}x_2 + \underline{0}x_5 \\
&= \underline{2}x_1 + \underline{0}\left(2 - 1x_1 - (-\frac{1}{2})x_5\right) \\
&\quad + \underline{0}(16 - 4x_1 - 0x_5) + \underline{3}(3 - 0x_1 - \frac{1}{4}x_5) + \underline{0}x_5 \\
&= 9 + \left[\underline{2} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{3})\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]x_1 + \left[\underline{0} - (\underline{0}, \underline{0}, \underline{3})\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}\right]x_5 \\
&= 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5
\end{aligned}
$$

同理，上述非基变量在新的目标函数中的系数也可从增广矩阵中得到：

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\
\underline{0} & x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
\underline{0} & x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
\underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \\
 & & \underbrace{2}_{\underline{2}-(\underline{0},\underline{0},\underline{3})\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}} & & & & \underbrace{-3/4}_{\underline{0}-(\underline{0},\underline{0},\underline{3})\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/4\end{pmatrix}} &
\end{array}\right]$$

进一步分析：上式中，非基变量x_1的系数为正，说明目标函数值还可以增大——只要在目标函数中还存在有正系数的非基变量，目标函数值就还有增加的可能，就应选择非基变量与基变量对换。

x_1的系数为正且最大，故可作为基变量入基，那么剩下的非基变量x_5在下一步迭代中仍然为非基变量，且$x_5 = 0$。

同理，为实现目标函数最大，x_1入基时，其值越大越好，但同时需要保证（16）式的基变量非负：

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \qquad\quad \geq 0 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \qquad\quad\ \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{x_5=0} \begin{cases} x_3 = 2 - x_1 \qquad \geq 0 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \geq 0 \\ x_2 = 3 \qquad\qquad \geq 0 \end{cases}$$

显然，x_1最大只能取：$\min\{2/1, 16/4\} = 2$。此时，x_1成为基变量，$x_3 = 0$恰好成为非基变量。

在增广矩阵中，上述比值计算如下：

$$\begin{bmatrix} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & \\ \mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i & b_i/a_{ik} \\ \underline{0} & x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 & 2/1 \\ \underline{0} & x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 & 16/4 \\ \underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 & - \\ & & 2 & & & & -3/4 & & \end{bmatrix}$$

可见，比值最小的行对应的基变量x_3出基。

取最小比值所在行对应的基变量x_3出基，用x_1替换x_3得到新的基矩阵为：$(x_1, x_4, x_2) \rightarrow (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2)$；

为求得新的基可行解，在增广矩阵中，以高斯消元将$(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_4,\mathbf{p}_2)$变换为单位阵：

$$
(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{pmatrix}
\mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\
x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
x_4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3
\end{pmatrix}\Rightarrow
$$

$$
(\mathbf{A}',\mathbf{b}')=\begin{pmatrix}
\mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i' \\
x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
x_4 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 8 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3
\end{pmatrix}
$$

新的基可行解为：$(x_1,x_4,x_2)=(2,8,3),z=13$。

经高斯消元的恒等变形之后，原 **LP** 问题转换为下述新的等价形式：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_5 = 2 \\ -4x_3 + x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

其中目标函数也等价于：$z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$！

新的增广矩阵为

$$(\mathbf{c}_\mathbf{B},\mathbf{x}_\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \mathbf{c}_\mathbf{B} & \mathbf{x}_\mathbf{B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ \underline{2} & x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ \underline{0} & x_4 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 8 \\ \underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \end{bmatrix}$$

对应基可行解为

$$(x_1, x_4, x_2) = (2,8,3), \qquad z = 13$$

第三步改进，

将基变量用非基变量表示，并代入目标函数：

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 - (-\frac{1}{2})x_5 \\ x_4 = 8 - (-4)x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases} \xrightarrow{\text{代入目标函数}}$$

$$\xrightarrow[\text{变换后的目标函数中的系数}]{\text{基于增广矩阵计算非基变量在}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\
\underline{2} & x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
\underline{0} & x_4 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 8 \\
\underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \\
 & & & & -2 & & 1/4 &
\end{array}\right]$$

以非基变量表示的目标函数即为

$$z = 2x_1 + 3x_2 = 13 - 2x_3 + \frac{1}{4}x_5$$

因为x_5系数为正，所以x_5入基可进一步增大函数值。

对应出基变量可用最小比值方法确定：

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\
\underline{2} & x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
\underline{0} & x_4 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 8 \\
\underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \\
 & & & & -2 & & 1/4 &
\end{array}\right]$$

根据$\min\{8/2, 3/(1/4)\} = 4$，x_4出基，由此得到新的基变量为$(x_1, x_5, x_2) \to (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_2)$；进一步运用高斯消元，将$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_2)$变换为单位阵，求新的基可行解：

$$\begin{bmatrix} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}} & \mathbf{x}_{\mathbf{B}} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ \underline{2} & x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ \underline{0} & x_5 & 0 & 0 & -4 & 1 & [2] & 8 \\ \underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}} & \mathbf{x}_{\mathbf{B}} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ \underline{2} & x_1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 4 \\ \underline{0} & x_5 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 4 \\ \underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

新的基可行解为：$(x_1, x_5, x_2) = (4,4,2)$，其余变量为 0，对应目标函数值：$z = 14$。

若再次使用非基变量表达基变量并代入目标函数，基于增广矩阵可计算非基变量在目标函数中新的系数为：

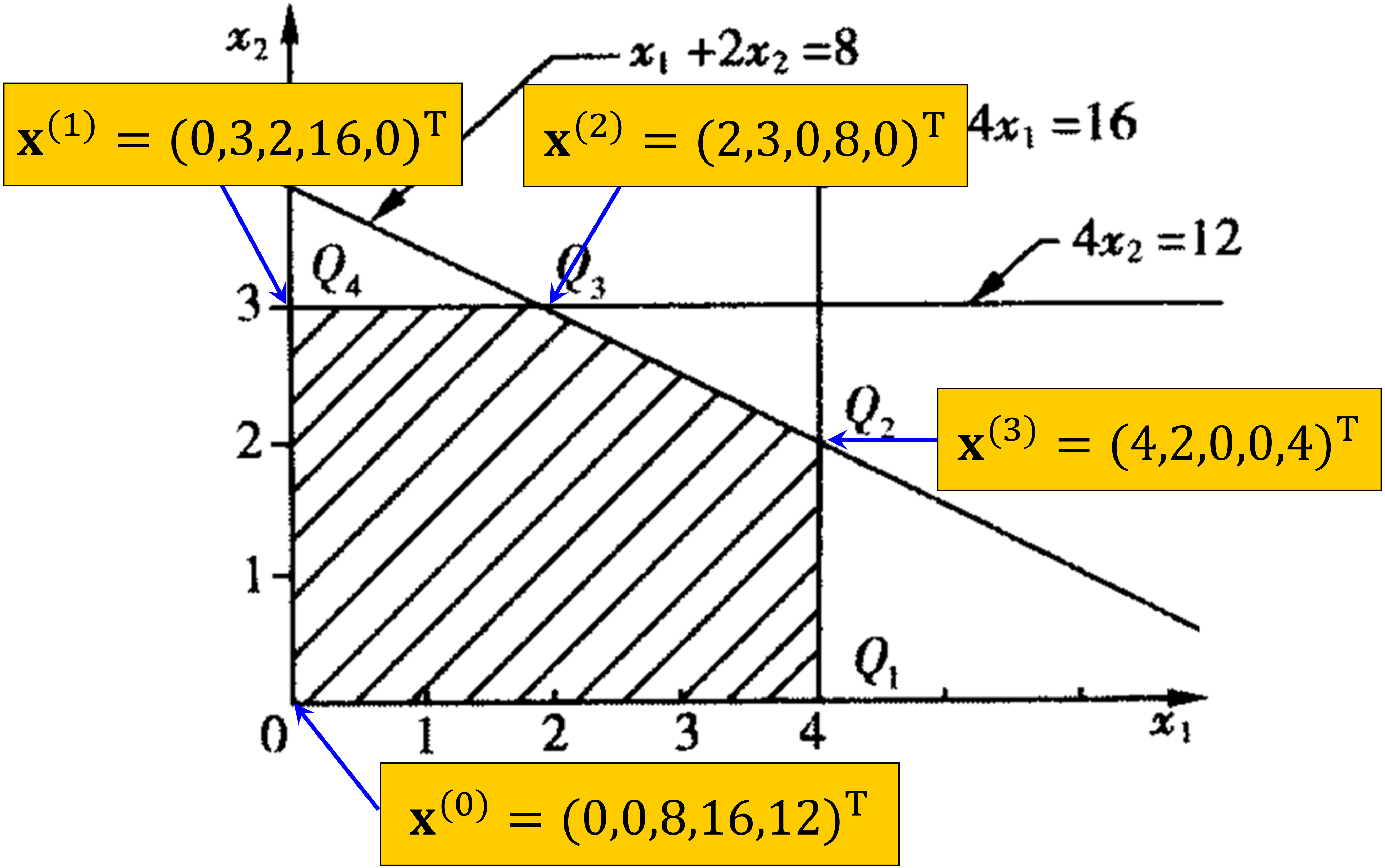
$$\left[\begin{array}{cccccccc} & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ \underline{2} & x_1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 4 \\ \underline{0} & x_5 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 4 \\ \underline{3} & x_2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 & 2 \\ & & & & -3/2 & -1/8 & & \end{array}\right]$$

目标函数将成为$z = 14 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{8}x_4$，没有任何正系数的非基变量，所以目标函数值无法再增大，即目标函数达到了最大，此时

最优基：$(x_1, x_5, x_2) \to (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_2)$

最优解：$\mathbf{x}^* = (4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$

上述算法搜索了 **4** 个可行域顶点就得到了最优解：



x_2
$x_1+2x_2=8$
$4x_1=16$
$4x_2=12$
$\mathbf{x}^{(1)}=(0,3,2,16,0)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{x}^{(2)}=(2,3,0,8,0)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{x}^{(3)}=(4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$
Q_1
Q_2
Q_3
Q_4
0
1
2
3
4
x_1

注：运算过程中，基变量、基向量的位置，并不取决于变量的下角标，而要按照进基、出基时的位置对应排列。

例，交换例 1 中约束❶和❷的顺序重新求解：

$$\max z = \underline{2}x_1 + \underline{3}x_2 + \underline{0}x_3 + \underline{0}x_4 + \underline{0}x_5$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 16 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 8 \\ 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 12 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

$\Downarrow$ 初始基矩阵和基变量

$$\begin{bmatrix} & & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\ \mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ 0 & x_4 & 4 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 16 \\ 0 & x_3 & 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 8 \\ 0 & x_5 & 0 & 4 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 12 \end{bmatrix}$$

3.2 初始基可行解的确定

确定初始基可行解，首先要找出初始可行基。

（1）直接观察法

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_j x_j=\mathbf{b}\\ x_j\geq 0, j=1,2,\dots,n\end{cases}$$

若能从$\{\mathbf{p}_j\}_{j=1,\dots,n}$中直接观察到$m$个独立列向量，那么就对应一个基矩阵，用高斯消元法将该基矩阵化为单位矩阵，就可能得到一个基可行解（初始顶点）。[2]

[2] 找m个独立列向量，求解后的解是基解，但不一定是基可行解，因为不能保证非负。

（2）松弛变量法

若所有约束条件是“$\leq$”形式的不等式（右端项非负），利用化标准型的方法，在每个约束左端加上一个松弛变量；重新对x_j及a_{ij}进行编号整理，即可得下列方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ \qquad\qquad x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

显然可得到一个$m \times m$阶单位矩阵作为初始可行基，并根据初始可行基，确定初始基可行解。

（3）人造基方法

对“≥”形式的不等式及等式约束，若不存在单位矩阵，需采用人造基方法：

① 对不等式约束减去一个非负的剩余变量(化标准形)，再加上一个非负的人工变量；

② 对于等式约束则直接加上一个非负人工变量。

这样得到的初始基并不能直接用来启动单纯形算法，需要运用单纯形的大M法或两阶段法（详见本章第 5 节）做特殊处理。

3.3 最优性检验与解的判别

如何判断迭代过程是否已经找到了最优点？

运用高斯消元可在增广矩阵中得到一个单位基矩阵。不失一般性，设前m个变量是基变量，则原 **LP** 等价于：

$$\max z = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{1j}x_j + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \ddots \\ x_i \quad + a'_{i,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{ij}x_j + \cdots + a'_{in}x_n = b'_i \\ \ddots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{mj}x_j + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

对应增广矩阵为 [3]

$$(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}, \mathbf{x}'_{\mathbf{B}}, \mathbf{b}', \mathbf{A}') = (\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}, \mathbf{x}'_{\mathbf{B}}, \mathbf{b}', \mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_m, \mathbf{p}'_{m+1}, \dots, \mathbf{p}'_j, \dots, \mathbf{p}'_n)$$

$$= \begin{bmatrix} & & & c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_j & \cdots & c_n \\ \mathbf{c}'_{\mathbf{B}} & \mathbf{x}'_{\mathbf{B}} & \mathbf{b}' & x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ c_1 & x_1 & b'_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_i & x_i & b'_i & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a'_{i,m+1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & x_m & b'_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

此时，基可行解为

$$(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_j, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} = (b'_1, \dots, b'_m, 0, \dots, 0, \dots 0)^{\mathrm{T}}$$

[3] 为方便，将右端项 **b** 提前到增广矩阵的第三列。

为了确定是否有更好的基可行解，试选择非基变量x_j进基，则在下一个基可行解中，x_j将可能从$x_j = 0$变为$x_j > 0$，且其余非基变量的取值仍然保持为0：

$$x_{m+1} = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$$

那么关于下一个基可行解的约束方程为

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad + a'_{1j}x_j = b'_1 \\ \quad \ddots \\ \quad\quad x_i \quad\quad + a'_{ij}x_j = b'_i \\ \quad\quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad\quad x_m + a'_{mj}x_j = b'_m \end{cases}$$

目标函数成为：$z = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m + c_jx_j$

为了能单独考察x_j进基后对目标函数的影响，将所有当前基变量$x_1, x_2, \dots, x_m$用x_j表达：

$$\begin{cases} x_1 & & & + a'_{1j}x_j = b'_1 \\ & \ddots & & \\ & x_i & & + a'_{ij}x_j = b'_i \\ & & \ddots & \\ & & x_m & + a'_{mj}x_j = b'_m \end{cases} \xrightarrow[\text{表示基变量}]{\text{用非基变量}} \begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1j}x_j \\ \vdots \\ x_i = b'_i - a'_{ij}x_j \\ \vdots \\ x_m = b'_m - a'_{mj}x_j \end{cases}$$

然后代入目标函数，得到

$$z = (c_1, \dots, c_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + c_j x_j$$

$$= (c_1, \dots, c_m)\begin{pmatrix} b_1' - a_{1j}' x_j \\ \vdots \\ b_m' - a_{mj}' x_j \end{pmatrix} + c_j x_j$$

$$= (c_1, \dots, c_m)\begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix} + \left[c_j - (c_1, \dots, c_m)\begin{pmatrix} a_{1j}' \\ \vdots \\ a_{mj}' \end{pmatrix} \right] x_j$$

$$= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}' \mathbf{b}' + (c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}' \mathbf{p}_j') x_j$$

令，$z_j = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{p}'_j$，记：

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{p}'_j$$
$$= \left[c_j - (c_1, \dots, c_m) \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{mj} \end{pmatrix} \right]$$

则有

$$z = z_0 + (c_j - z_j)x_j = z_0 + \sigma_j x_j$$

其中，$z_0 = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{b}'$，表示当前函数值。

同理，若其他非基变量也可能取大于 **0** 的值，则可以将基变量用所有非基变量表示并代入目标函数，那

么在当前基可行解下，目标函数可表达为

$$z = z_0 + \sigma_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \sigma_j x_j + \cdots + \sigma_n x_n \qquad \textbf{(17)}$$

显然，若某个$\sigma_j > 0$，则对应的x_j进基可改进目标函数（max 问题），否则就不能改进目标函数；因此称$\sigma_j = c_j - \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{p}'_j$ 为判断非基变量x_j是否能进基的检验数。

（1）最优解的判别定理

直观上看，根据（17）式，对 max 型问题（以下均指 max 型问题），如果所有非基变量的检验数$\sigma_j(j=m+1,\dots,n)$都≤ 0，则目标函数就没有改进的可能，因而就达到了最优。

定理：若$\mathbf{x}^{(0)}=(b_1',\dots,b_m',0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$为对应于基$\mathbf{B}^{(0)}$的基可行解，且对于所有非基变量$x_j,\ j=m+1,\dots,n$，有$\sigma_j\le 0$，则$\mathbf{x}^{(0)}$为一个最优解。其中，$\sigma_j=c_j-\mathbf{c}_{\mathrm{B}}'\mathbf{p}_j'=c_j-(c_1,\dots,c_m)\begin{pmatrix}a_{1j}'\\ \vdots\\ a_{mj}'\end{pmatrix}$，为检验数。

（2）无穷多最优解判别定理

定理：若$\mathbf{x}^{(0)} = (b_1', \dots, b_m', 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$为一个基可行解，且对于所有非基变量$x_j$，$j = m+1, \dots, n$，有$\sigma_j \le 0$；又，存在某个非基变量的检验数$\sigma_k$恰好等于 0：$\sigma_k = 0$，则 **LP** 问题有无穷多最优解。

证明，对所有非基变量$x_j, (j = m+1, \dots, n)$，有$\sigma_j \le 0$，因此$\mathbf{x}^{(0)}$是一个最优解，最优目标函数值为：

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$$

考虑将非基变量x_k换入基，替换某非零的基变量x_l，其余非基变量仍然为 0，所以目标函数等价为

$$z = z_0 + \sigma_k x_k$$

令x_k取适当的正数，使得x_l变为0而出基，从而形成一个新的基可行解：

$$\mathbf{x}^{(1)} = (b_1'', \dots, b_{l-1}'', 0, b_{l+1}'', \dots, b_m'', 0, \dots, b_k'', \dots, 0)^{\mathrm{T}}$$

目标函数的改变只由变量x_k所引起，此时目标函数值为

$$z = z_0 + \sigma_k x_k \xrightarrow{\sigma_k = 0} z = z_0 + 0 \cdot x_k = z_0$$

即，在$\mathbf{x}^{(1)}$处目标函数值仍为最优值z_0，所以$\mathbf{x}^{(1)}$也是最优解，且和$\mathbf{x}^{(0)}$是完全不同的两个最优解；两个最优解连线上的点都是最优解，因此，问题具有无穷多最优解。

（3）无界解判别定理

定理：若$\mathbf{x}^{(0)}=(b_1',\ldots,b_m',0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$为一个基可行解，有一个非基变量$x_k$的检验数$\sigma_k>0$，但是其对应的列向量$\mathbf{p}_k'=(a_{1k}',\ldots,a_{mk}')^{\mathrm{T}}\le\mathbf{0}$，则 LP 问题无界。

证明，让x_k入基（保持其余非基变量仍然为0），因为$a_{ik}'\le 0, i=1,\ldots,m$，所以即便$x_k\to+\infty$，仍然有：

$$x_i=b_i'-a_{ik}'x_k\ge 0 \text{ for all } i$$

即存在一个可行解，其中第k个分量：$x_k\to+\infty$。

若令x_k入基而其余非基变量仍然保持为 0，则在当前基可行解处，目标函数值为：

$$z = z_0 + \sigma_k x_k$$

因为$\sigma_k > 0$，而$x_k \to +\infty$，所以$\sigma_k x_k \to +\infty$，即目标函数值没有上限，因此原问题无界。

注：无界解的情况，要求满足两个条件：

（1）有某非基变量检验数严格大于0，即：$\exists \sigma_k > 0$；

（2）该非基变量的列非正，即：对所有$i = 1, \ldots, m$，有$a'_{ik} \leq 0$。

如果非基变量检验数最多等于零：$\sigma_k = 0$，而不存在某个$\sigma_k > 0$，那么即便对应的$a'_{ik} \leq 0$，也不会有无界解（根据情况 2，此时是无穷多最优解）。

例，

$$
\begin{aligned}
&\max z = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \qquad x_1 - x_2 - x_3 = 100;\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
 & & & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & \mathbf{b} & x_1 & x_2 & x_3 \\
0 & x_1 & 100 & 1 & -1 & -1 \\
 & \sigma_j \rightarrow & & & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

基可行解$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (100,0,0)^{\mathrm{T}}$，非基变量检验数$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$——不存在任何$\sigma_k > 0$，不应该无界。

实际上，其最优值为0，且有无穷多最优解；但因不存在检验数严格为正的非基变量，所以不是无界解。

上述问题修改为：

$$\begin{aligned}&\max z = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3\\ &\text{s.t.}\qquad x_1 - x_2 - x_3 = 100;\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{c}_\mathbf{B} & \mathbf{x}_\mathbf{B} & \mathbf{b} & {\color{red}x_1} & x_2 & x_3 \\ {\color{red}0} & {\color{red}x_1} & 100 & {\color{red}1} & -1 & -1 \\ & \sigma_j \rightarrow & & & {\color{blue}1} & {\color{blue}0} \end{bmatrix}$$

非基变量x_2的检验数$\sigma_2 = 1 > 0$，而其对应的列$a'_{12} = -1 < 0$，因此无界解的两个条件都满足，于是问题无界——事实上，满足约束条件：$x_1 - x_2 - x_3 = 100$的非负x_2可以无限大，目标函数值也就无界。

3.4 基变换

基变换先要确定换入变量，再确定换出变量，它们各自对应的系数列向量进行对换，得到一个新的基。

（1）换入变量的确定

若非基变量x_j的检验数$\sigma_j > 0$，则可将x_j换到基变量中去，使之由$x_j = 0$变为$x_j > 0$而增大目标函数值。

若有多个$\sigma_j > 0$，为使目标函数值尽快增大，直观上可选$\sigma_j > 0$中的最大者：$\sigma_k = \max_j\{\sigma_j | \sigma_j > 0\}$对应的变量$x_k$为换入变量。

（2）换出变量的确定

每次迭代求基可行解，都是基于高斯消元，将基矩阵变换为单位矩阵：

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{1k}x_k + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\
\quad \ddots \\
\qquad x_i \qquad + a'_{i,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{ik}x_k + \cdots + a'_{in}x_n = b'_i \\
\qquad\quad \ddots \\
\qquad\qquad x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{mk}x_k + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m
\end{cases}
$$

基矩阵：$\mathbf{B}^{(0)} = [\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}'_m] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$；基可行解：

$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} = (b'_1, \dots, b'_m, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$。

换基原理——进基变量x_k尽可能取最大值而导致某个基变量x_l为0，同时保证其他变量非负，于是令x_l出基，而令x_k入基。

若x_k入基，其他非基变量仍保持为0，约束方程变为

$$\begin{cases} x_1 & & & + a'_{1k}x_k = b'_1 \\ & \ddots & & \\ & x_i & & + a'_{ik}x_k = b'_i \\ & & \ddots & \\ & & x_m & + a'_{mk}x_k = b'_m \end{cases}$$

根据（17）式（$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$），$x_k$入基引起的目标函数的增量为$\sigma_k x_k$；为了让目标函数尽可能增大，$x_k$应越大越好，但同时还要保证其他变量非负，即

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + a'_{1k}x_k = b'_1 \\ \quad \ddots \\ \quad\quad x_i \quad\quad + a'_{ik}x_k = b'_i \\ \quad\quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad\quad x_m + a'_{mk}x_k = b'_m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1k}x_k \geq 0 \\ \quad \vdots \\ x_i = b'_i - a'_{ik}x_k \geq 0 \\ \quad \vdots \\ x_m = b'_m - a'_{mk}x_k \geq 0 \end{cases}$$

显然，只用考虑$a'_{ik} > 0, (i = 1, \dots, m)$的情况，所以$x_k$的最大取值只能是：$x_k = \min_i \left\{ \frac{b'_i}{a'_{ik}} \middle| a'_{ik} > 0 \right\}$。

设b'_l/a'_{lk}是$\{b'_i/a'_{ik}\,|a'_{ik}>0\},(i=1,\dots,m)$中最小的正比值，记最小比值

$$\theta=\min_i\left\{\frac{b'_i}{a'_{ik}}\middle|a'_{ik}>0\right\}=\frac{b'_l}{a'_{lk}}=x_k$$

这时恰好有

$$x_l=b'_l-a'_{lk}x_k=b'_l-a'_{lk}\frac{b'_l}{a'_{lk}}=0$$

于是x_l为换出变量。

按最小比值确定θ值和换出变量，称为最小比值规则，也称为θ规则。

将$\theta = b'_l / a'_{lk}$代入约束方程，得到新的基可行解$\mathbf{x}^{(1)}$。

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} - a'_{1k} \cdot b'_l / a'_{lk} \\ \vdots \\ x_{l-1}^{(0)} - a'_{l-1,k} \cdot b'_l / a'_{lk} \\ 0 \\ x_{l+1}^{(0)} - a'_{l+1,k} \cdot b'_l / a'_{lk} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} - a'_{mk} \cdot b'_l / a'_{lk} \\ 0 \\ \vdots \\ b'_l / a'_{lk} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即，

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} b_i' - \dfrac{b_l'}{a_{lk}'} \cdot a_{ik}', & i \neq l \\ \dfrac{b_l'}{a_{lk}'}, & i = l \end{cases}$$

最小比值规则产生的解$\mathbf{x}^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量组成的矩阵$\mathbf{B}^{(1)}$为：

$$\mathbf{x}^{(1)} = [x_1, \dots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \dots, x_m] \rightarrow$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = [\mathbf{p}_1', \dots, \mathbf{p}_{l-1}', \mathbf{p}_k', \mathbf{p}_{l+1}', \dots, \mathbf{p}_m']$$

问题：$\mathbf{B}^{(1)}$是否是一个基矩阵，从而对应的新解$\mathbf{x}^{(1)}$是基可行解？

（反证）若$\mathbf{B}^{(1)}$不是基矩阵，则其列向量不是线性独立，那么一定可以找到一组不全为零的数α_i，有

$$\mathbf{p}'_k = \sum_{i=1,i\neq l}^{m} \alpha_i \mathbf{p}'_i \qquad (21)$$

而由于原基矩阵$\mathbf{B}^{(0)} = [\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}'_m]$是单位矩阵，因此$\mathbf{p}'_k$也一样能被$\mathbf{B}^{(0)}$的列向量线性表示，且

$$\mathbf{p}'_k = \sum_{i=1}^{m} a'_{ik} \mathbf{p}'_i \qquad (22)$$

（22）式减（21）式，得到

$$\sum_{i=1,i\neq l}^{m}(a'_{ik}-\alpha_i)\mathbf{p}'_i+a'_{lk}\mathbf{p}'_l=\mathbf{0}$$

θ规则要求$a'_{ik}>0$ for θ_i，也就有$a'_{lk}>0$；这意味着总有一组不全为0的数使上式成立，所以$\mathbf{p}'_1,\dots,\mathbf{p}'_l,\dots,\mathbf{p}'_m$线性相关，这与$\mathbf{B}^{(0)}=[\mathbf{p}'_1,\dots,\mathbf{p}'_l,\dots,\mathbf{p}'_m]$是基矩阵相矛盾，所以新矩阵$\mathbf{B}^{(1)}=[\mathbf{p}'_1,\dots,\mathbf{p}'_{l-1},\mathbf{p}'_k,\mathbf{p}'_{l+1},\dots,\mathbf{p}'_m]$各列必须线性独立，也就必然是基矩阵。

并且，按照θ规则确定的新的基矩阵$\mathbf{B}^{(1)}$所对应的解的各分量均非负，因而是可行基矩阵，这就实现了从一个可行基到另一个可行基的变换。

3.5 单纯形法全过程——迭代与旋转

（1）启动与基变换

在一般 **LP** 问题中加入松弛变量或人工变量后，得到以下形式的约束方程组：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\ddots \\ \qquad x_i \qquad + a_{i,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \qquad\quad\ddots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

设$x_1, \ldots, x_m$为基变量，令所有非基变量为0，得到一个基可行解：$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$，$i = 1, \ldots, m$。

考虑约束方程系数矩阵的增广矩阵：

$$(\mathbf{c_B},\mathbf{x_B},\mathbf{b},\mathbf{A})=\left(\mathbf{c_B},\mathbf{x_B},\mathbf{b},\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m,\mathbf{p}_{m+1},\dots,\mathbf{p}_j,\dots,\mathbf{p}_n\right)$$

$$=\begin{bmatrix} & & & c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_j & \cdots & c_n \\ \mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & \mathbf{b} & x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ c_1 & x_1 & b_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_i & x_i & b_i & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{i,m+1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & x_m & b_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

非基变量的检验数： $\sigma_j=c_j-\mathbf{c_B}\mathbf{p}_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$。

设最大检验数$\sigma_k > 0, (k > m)$，则上述解不是最优解，就需要另找一个使目标函数值增大的基可行解。

按照规则，可选最大检验数$\sigma_k > 0, (k > m)$对应的变量x_k入基，其余非基变量仍然保持为0：

$$x_{m+1} = \cdots = x_{k-1} = x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$$

以x_k表达当前基变量，有

$$x_i = b_i - a_{ik}x_k, i = 1, \ldots, m$$

接着要在基变量组中选一个出基，而且出基之后这个出基变量的取值应该变成0。

计算θ比值，设

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

其中比值 $\frac{b_i}{a_{ik}}$ 由增广矩阵中右端项（**b**列）各元素和进基变量x_k列各元素（$a_{ik} > 0$）对应相除得到：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & \theta \\ b_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1/a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_l & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{l,m+1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} & b_l/a_{lk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m/a_{mk} \end{bmatrix}$$

按θ规则确定最小比值$\frac{b_l}{a_{lk}}$对应的x_l为换出变量，且对应的基变量x_l在下一次迭代中刚好变为0而被踢出基变量集合，形成新的基变量和基矩阵：

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = [\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{l-1}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{l+1}, \ldots, \mathbf{p}_m]$$

（2）高斯消元法求基可行解

求新的基可行解，只需通过高斯消元将新的基矩阵$\mathbf{B}^{(1)}=[\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{l-1},\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_{l+1},\dots,\mathbf{p}_m]$变换为单位矩阵：

$\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{l-1},\mathbf{p}_{l+1},\dots,\mathbf{p}_m$已经是单位列向量，所以只需将列向量$\mathbf{p}_k$基于高斯消元法变换为单位向量，同时其他列向量跟着变化即可：

$$\mathbf{p}_k=\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ [a_{lk}] \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数增广矩阵围绕元素a_{lk}（a_{lk}称为<u>主元素</u>，其对应所在列称为主元列，所在行称为主元行）做初等变换：

$$\begin{bmatrix} & c_1 & \cdots & c_l & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_k & \cdots & c_n \\ \mathbf{b} & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\ b_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_l & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{l,m+1} & \cdots & [a_{lk}] & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

步骤一：将增广矩阵第l行除以a_{lk}，成为

$$\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{a_{lk}}, 0, \ldots, 0, \frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}, \ldots, 1, \ldots, \frac{a_{ln}}{a_{lk}}, \frac{b_l}{a_{lk}}\right)$$

步骤二：x_k所在列其他行的元素都变换为零。

上式乘以$a_{ik}(i \neq l)$后，从增广矩阵的第i行减去，得到新的第i行：

$$\left(0,\ldots,0,-\frac{a_{ik}}{a_{lk}},0,\ldots,0,\right.$$
$$\left.a_{i,m+1}-\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}a_{ik},\ldots,0,\ldots,a_{in}-\frac{a_{ln}}{a_{lk}}a_{ik},b_i-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}\right)$$

设上述新的系数矩阵各元素为a'_{ij}，则计算公式为：

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{ik}, & i \neq l \\ \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}, & i = l \end{cases}, \qquad b'_i=\begin{cases} b_i-\dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}, & i \neq l \\ \dfrac{b_l}{a_{lk}}, & i = l \end{cases}$$

步骤三：经过初等变换后的新增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} & & & c_1 & \cdots & c_l & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_k & \cdots & c_n \\ \mathbf{c}_{\mathrm{B}}' & \mathbf{x}_{\mathrm{B}}' & \mathbf{b}' & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\ c_1 & x_1 & b_1' & 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a_{1,m+1}' & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & x_k & b_l' & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a_{l,m+1}' & \cdots & 1 & \cdots & a_{ln}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & x_m & b_m' & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 & a_{m,m+1}' & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn}' \end{bmatrix}$$

步骤四：新的基可行解为：

$$\mathbf{x}^{(1)} = (b_1', \dots, b_{l-1}', 0, b_{l+1}', \dots, b_m', 0, \dots, 0, b_l', 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$$

（3）新一轮基变换

考虑当前增广矩阵：

$$
\begin{bmatrix}
 & & & c_1 & \cdots & c_l & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_k & \cdots & c_n \\
\mathbf{c}_\mathbf{B}' & \mathbf{x}_\mathbf{B}' & \mathbf{b}' & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\
c_1 & x_1 & b_1' & 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a_{1,m+1}' & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_k & x_k & b_l' & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a_{l,m+1}' & \cdots & 1 & \cdots & a_{ln}' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_m & x_m & b_m' & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 & a_{m,m+1}' & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn}'
\end{bmatrix}
$$

✧ 计算检验数

各非基变量检验数：$\sigma_j = c_j - \mathbf{c}'_{\mathrm{B}}\mathbf{p}'_j$。

其中$\mathbf{c}'_{\mathrm{B}}$是原$\mathbf{c}_{\mathrm{B}}$中元素c_l被替换为c_k之后新的基变量对应的价值系数向量。

✧ 确定换入/换出变量

令最大正检验数对应的非基变量入基，运用最小θ规则确定出基变量，以高斯消元求解新的基可行解，进行下一轮换基；不断迭代，直到依据解的判定条件而结束。

上述单纯形算法一般在增广矩阵中完成。

例，在增广矩阵中运用单纯形法，求解线性规划（LP）问题。

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解，问题化为标准形式：

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0, j = 1,2, \dots, 5 \end{cases}$$

以x_3,x_4,x_5为基变量，将约束方程组的系数矩阵写成增广矩阵，由于基矩阵已经是单位矩阵，故可立即计算非基变量检验数：

$$
(\mathbf{c_B},\mathbf{x_B},\mathbf{b},\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4,\mathbf{p}_5)=
$$

$$
\begin{bmatrix}
 & & & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & \mathbf{b} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
0 & x_3 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & x_4 & 16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & x_5 & 12 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
 & \sigma_j \rightarrow & & \underbrace{2}_{2-(0,0,0)\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}} & \underbrace{4}_{4-(0,0,0)\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}} & & &
\end{bmatrix}
$$

让正检验数最大的变量x_2入基，运用最小比值规则（θ规则）确定出基变量：

$$
\begin{bmatrix}
 & & & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{c_B} & \mathbf{x_B} & \mathbf{b} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}} \\
0 & x_3 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8/2 \\
0 & x_4 & 16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & - \\
0 & x_5 & 12 & 0 & [4] & 0 & 0 & 1 & 12/4
\end{bmatrix}
$$

θ规则确定x_5出基，得到新的基变量x_3, x_4, x_2，且旋转主元为$[a_{32}] = [4]$：

$$\begin{bmatrix} & & & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}}' & \mathbf{x}_{\mathbf{B}}' & \mathbf{b}' & x_1 & \color{red}{x_2} & x_3 & x_4 & x_5 & \theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}} \\ 0 & x_3 & 8 & 1 & \color{red}{2} & 1 & 0 & 0 & 8/2 \\ 0 & x_4 & 16 & 4 & \color{red}{0} & 0 & 1 & 0 & - \\ 4 & x_2 & 12 & 0 & [4] & 0 & 0 & 1 & 12/4 \end{bmatrix}$$

以$[a_{32}] = [4]$为主元做高斯消元，将第二列消元为单位阵向量：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到新的基可行解。

在得到新的基可行解之后，进一步计算各非基变量的检验数：

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 & & & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{c}_{\mathbf{B}}' & \mathbf{x}_{\mathbf{B}}' & \mathbf{b}' & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
0 & x_3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\
0 & x_4 & 16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & x_2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\
 & \sigma_j \to & & \underbrace{2}_{2-(0,0,4)\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}} & & & & \underbrace{-1}_{0-(0,0,4)\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/4\end{pmatrix}}
\end{array}\right]$$

显然，x_1进基。

以θ规则确定出基变量：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_B' & \mathbf{x}_B' & \mathbf{b}' & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \theta_i = b_i'/a_{ik}' \\ 0 & x_3 & 2 & [1] & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2/1 \\ 0 & x_4 & 16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16/4 \\ 4 & x_2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & - \end{bmatrix}$$

最小比值对应的x_3出基，得到一组新的基变量x_1, x_4, x_2，且旋转主元为$[a_{11}] = [1]$：

$$\begin{bmatrix} & & & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{c}_B'' & \mathbf{x}_B'' & \mathbf{b}'' & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & x_1 & 2 & [1] & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & x_4 & 16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & x_2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

令非基变量$x_3 = x_5 = 0$，高斯消元得到新的基可行解：

并计算检验数：

$$
\begin{bmatrix}
 & & & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{c}_{\mathbf{B}}'' & \mathbf{x}_{\mathbf{B}}'' & \mathbf{b}'' & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
2 & x_1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\
0 & x_4 & 8 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\
4 & x_2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\
 & \sigma_j \rightarrow & & & & -2 & & 0
\end{bmatrix}
$$

所有非基变量检验数≤ 0，因此得到最优解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (2,3,0,8,0)^{\mathrm{T}}$$

最优目标函数值：$z^* = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}''\mathbf{b}'' = 16$。

由有一个非基变量x_5的检验数恰好等于0，因此上述问题应该还有另一个基可行解也是最优解：将x_5作为换入变量，按照θ规则确定出基变量为x_4：

			2	4	0	0	0	
$\mathbf{c}_\mathbf{B}''$	$\mathbf{x}_\mathbf{B}''$	$\mathbf{b}''$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$	$-$
0	x_4	8	0	0	-4	1	[2]	$8/2$
4	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$	$3/(\frac{1}{4})$

以新的基变量x_1, x_5, x_2、旋转主元$a_{25}'' = [2]$，做高斯消元求基可行解：

			2	4	0	0	0
$\mathbf{c}_B'''$	$\mathbf{x}_B'''$	$\mathbf{b}'''$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_5	8	0	0	-4	1	[2]
4	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$

高斯消元 $\Downarrow$ 计算检验数

			2	4	0	0	0
$\mathbf{c}_B'''$	$\mathbf{x}_B'''$	$\mathbf{b}'''$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
4	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0
	$\sigma_j \to$				-2	0	

根据检验数判断新的基可行解：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$$

也是最优解，且最优目标函数值也为 $z^* = \mathbf{c}_B'''\mathbf{b}''' = 16$。

所以，原问题有无穷多最优解。

小结：为什么上述方法称为单纯形法？

单纯形（**simplex**）：

在m维几何空间上，由一组不在同一超平面上的$m+1$个点组成的几何图形，称为单纯形。

1维直线上，单纯形是2个顶点的线段；

2维平面上，单纯形是3个顶点的三角形；

3维空间上，单纯形是4个顶点的四面体……

思考：求解线性规划问题的每次迭代都发生了什么？

每次迭代是先寻找了1个非基变量准备入基，然后考察m个基变量，按照θ规则选择1个基向量出基。

因此，每步总是围绕着m个基向量$+ 1$个非基向量来改进目标函数值，这$m + 1$个向量就对应m维空间一个单纯形的各顶点，因此称为单纯形法（**simplex method**）。

观点：

单纯形法的计算过程，其实质就是不断求解关于基变量的方程组；而不同方程组之间的转换，通过单纯形的切换实现。