第四节　单纯形法的计算步骤

4.1 单纯形表与计算步骤

4.2 示例与练习

4.1 单纯形表与计算步骤

（1）单纯形表

单纯形表基本结构

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
$\sigma_j = c_j - z_j \rightarrow$			0	$\cdots$	0	$c_{m+1} - \mathbf{c_B p}_{m+1}$	$\cdots$	$c_n - \mathbf{c_B p}_n$	

（2）计算步骤（max型问题）

步骤一，找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表。

步骤二，查看各非基变量的检验数σ_j。若所有$\sigma_j \leq 0$，则已达到最优，停止计算。否则，转下一步。

步骤三，若在$\sigma_j > 0$中有某个σ_k对应x_k的系数列向量$\mathbf{p}_k \leq \mathbf{0}$，则此问题无界，停止计算。否则，转入下一步。

步骤四，根据$\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$确定换入变量$x_k$，按$\theta$规则$\theta = \min(b_i/a_{ik}\,|a_{ik} > 0) = b_l/a_{lk}$，确定$x_l$为换出变量，转下一步。

步骤五，以a_{lk}为主元进行迭代，x_k所对应的列向量变为单位向量：

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ [a_{lk}] \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{第}l\text{行}$$

将$\mathbf{x_B}$列中的x_l换为x_k，同时$\mathbf{c_B}$列中的c_l换为c_k,得到新的单纯形表。重复步骤二至步骤五，直到算法终止。

✧ 最小化问题的迭代规则（min 型问题）

上述算法若用于最小化问题（min 型问题），则判断入基变量、解的最优性时，与max 型问题相反：

情况 1：若所有$\sigma_j \geq 0$，则达到最优；若同时有某个非基变量检验数$\sigma_k = 0$，则有无穷多最优解；

情况 2：根据$\min(\sigma_j < 0) = \sigma_k$，确定换入变量$x_k$；

情况 3：若有某个$\sigma_k < 0$所对应变量x_k的系数列向量$\mathbf{p}_k \leq \mathbf{0}$，则问题无界；

最小比值规则（θ规则）保持不变。

4.2 示例

运用单纯形表，求解下述线性规划问题

$$\min z = -10x_1 - 15x_2 - 12x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + \quad x_3 \le 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \le 15 \\ 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \le 5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

解，首先，标准化，得到：

$$\min z = -10x_1 - 15x_2 - 12x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

直接得到一个基：x_4, x_5, x_6，列出初始单纯形表：

初始单纯形表：

$c_j \rightarrow$			-10	-15	-12	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	9	5	3	1	1	0	0	3
0	x_5	15	-5	[6]	15	0	1	0	2.5
0	x_6	5	2	1	1	0	0	1	5
$\sigma_j \rightarrow$			-10	-15	-12	0	0	0	

注意，是求最小化问题，因此应该是负检验数中的最小者入基，所以是x_2入基；而出基变量仍然按照最小比值规则（θ规则）确定，因此x_5出基。

得到下一步单纯形表：

$c_j \rightarrow$			-10	-15	-12	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	1.5	[7.5]	0	-6.5	1	-1/2	0	1/5
-15	x_2	2.5	-5/6	1	2.5	0	1/6	0	-
0	x_6	2.5	17/6	0	-1.5	0	-1/6	1	15/17
$\sigma_j \rightarrow$			-45/2	0	51/2	0	2.5	0	

x_1入基，x_4出基，得到新的单纯形表：

$c_j \rightarrow$			-10	-15	-12	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-10	x_1	1/5	1	0	-13/15	2/15	-1/15	0	
-15	x_2	8/3	0	1	16/9	1/9	1/9	0	
0	x_6	29/15	0	0	43/45	-17/45	1/45	1	
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	6	3	1	0	

对于最小化问题，所有非基变量检验数都非负，则就达到了最优。

最优解为

$$\mathbf{x}^* = (x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{5}, \frac{8}{3}, 0,0,0, \frac{29}{15})^{\mathrm{T}}$$

最优函数值为

$$z^* = -42$$

✧ 关于初始可行基：

单纯形法需要获取一个初始可行基，上述例子在添加松弛变量之后，可以直接得到一个可行基。但多数情况下，并不能顺利的直接获取可行基。

若将上例的第三个约束：

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

修改为：

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

则模型标准化之后得到：

$$\min z = -10x_1 - 15x_2 - 12x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + \quad x_3 + x_4 \qquad\quad = 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \quad + x_5 \quad = 15 \\ 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \qquad\quad - x_6 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

考虑用观察法寻找一个基。如果x_6为基变量，则基可行解中$x_6 = -5 < 0$，不可行。

进一步观察到x_3, x_4, x_5的列向量线性无关，似乎可选x_3, x_4, x_5为基变量，则其初始单纯形表为：

$c_j \to$			-10	-15	-12	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	9	5	3	1	1	0	0	
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0	
-12	x_3	5	2	1	1	0	0	1	
$\sigma_j \to$									

将基矩阵化为单位矩阵，即需要把x_3的列化为$(0,0,1)^T$的形式：

初始单纯形表_单位基矩阵

$c_j \rightarrow$			-10	-15	-12	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	4	3	2	0	1	0	1	
0	x_5	-60	-35	-9	0	0	1	15	
-12	x_3	5	2	1	1	0	0	-1	
$\sigma_j \rightarrow$									

结果得到初始基解为：$x_3 = 5$，$x_4 = 4$，$x_5 = -60 < 0$，是不可行解。可见，观察法有可能轻易找到一个基，但不一定能同时保证这是可行基。

第 5 节将彻底解决初始可行基的问题。

课堂练习，

$$\max z = \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7$$

$$s.t.$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_1	0	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
0	x_2	0	0	1	0	[1/2]	-12	-1/2	3	0
0	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0	-
c_j-z_j			0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	

$c_j \rightarrow$			0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_1	0	1	-1/2	0	0	-2	-3/4	15/2	-
3/4	x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6	-
0	x_3	1	0	0	1	0	0	[1]	0	1
c_j-z_j			0	-3/2	0	0	-2	5/4	-21/2	

$c_j \rightarrow$			0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_1	3/4	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	
3/4	x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6	
1/2	x_6	1	0	0	1	0	0	[1]	0	
c_j-z_j			0	-3/2	-5/4	0	-2	0	-21/2	