第三章
多维随机变量及其分布

第一节

多维随机变量及其联合分布

Overview

多维随机变量

定义 3.1.1

若 X, Y 是两个定义在同一个样本空间上的随机变量，则称 (X, Y) 是两维随机变量.

多维随机变量

定义 3.1.1

若 X, Y 是两个定义在同一个样本空间上的随机变量，则称 (X, Y) 是两维随机变量.

同理可定义 n 维随机变量 (随机向量).

联合分布函数

定义 3.1.2(以下仅讨论两维随机变量)

对于任意一对实数 x 和 y, 称 $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数.

联合分布函数

定义 3.1.2(以下仅讨论两维随机变量)

对于任意一对实数 x 和 y, 称 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ 为 (X, Y) 的联合分布函数.

注意：F(x, y) 为 (X, Y) 落在点 (x, y) 的左下区域的概率.

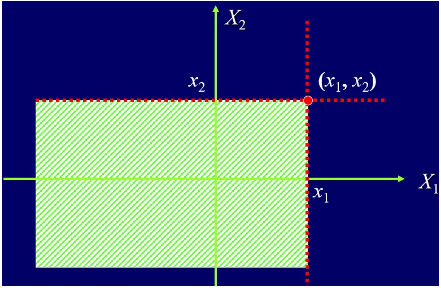

Figure: 联合分布

联合分布函数

联合分布函数的基本性质

联合分布函数

联合分布函数的基本性质

1. (单调性)

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别单调增

联合分布函数

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性)

联合分布函数的基本性质

1. **(单调性)** $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. **(有界性)** $0 \le F(x, y) \le 1$，且

联合分布函数

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性) $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且
   $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) =$

联合分布函数的基本性质

1. **(单调性)** $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. **(有界性)** $0 \le F(x, y) \le 1$，且
   $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) =$

联合分布函数

联合分布函数的基本性质

1. **(单调性)** $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. **(有界性)** $0 \le F(x,y) \le 1$，且
$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性) $0 \le F(x,y) \le 1$，且
   $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$
3. (右连续性)

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性) $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且
   $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$
3. (右连续性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别右连续.

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性) $0 \leq F(x, y) \leq 1$，且
   $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
3. (右连续性) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别右连续.
4. (非负性)

联合分布函数的基本性质

1. **(单调性)** $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. **(有界性)** $0 \leq F(x, y) \leq 1$，且
   $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
3. **(右连续性)** $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别右连续.
4. **(非负性)** 当 $a < b, c < d$ 时，有
   $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性) $0 \le F(x,y) \le 1$，且
   $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$
3. (右连续性) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别右连续.
4. (非负性) 当 $a<b, c<d$ 时，有
   $F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)\ge 0$

联合分布函数的基本性质

1. **(单调性)** $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. **(有界性)** $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且
   $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$
3. **(右连续性)** $F(x,y)$ 关于 x 和 y 分别右连续.
4. **(非负性)** 当 $a < b, c < d$ 时，有
   $F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \geq 0$?

联合分布函数的基本性质

1. (单调性) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别单调增
2. (有界性) $0 \leq F(x, y) \leq 1$，且
   $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
3. (右连续性) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 分别右连续.
4. (非负性) 当 $a < b, c < d$ 时，有
   $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0$?
   注意：上式左边 $= P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$.

联合分布列

二维离散随机变量

联合分布列

二维离散随机变量

- 若 (X, Y) 的可能取值为有限对, 或可列对, 则称 (X, Y) 为二维离散随机变量.

联合分布列

二维离散随机变量

- 若 (X,Y) 的可能取值为有限对, 或可列对, 则称 (X,Y) 为二维离散随机变量.

二维离散分布的联合分布列

联合分布列

二维离散随机变量

- 若 (X, Y) 的可能取值为有限对, 或可列对, 则称 (X, Y) 为二维离散随机变量.

二维离散分布的联合分布列

称 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \ldots$ 为 (X, Y) 的联合分布列,

联合分布列

二维离散随机变量

- 若 (X, Y) 的可能取值为有限对, 或可列对, 则称 (X, Y) 为二维离散随机变量.

二维离散分布的联合分布列

称 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \ldots$ 为 (X, Y) 的联合分布列，其表格形式如下:

联合分布列

二维离散随机变量

- 若 (X, Y) 的可能取值为有限对, 或可列对, 则称 (X, Y) 为二维离散随机变量.

二维离散分布的联合分布列

称 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$ 为 (X, Y) 的联合分布列，其表格形式如下:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

联合分布列

联合分布列的基本性质

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性)

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$
- (正则性)

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$
- (正则性) $\sum\sum p_{ij} = 1$

确定联合分布列的方法

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$
- (正则性) $\sum \sum p_{ij} = 1$

确定联合分布列的方法

1. 确定随机变量 (X, Y) 的所有取值数对.

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$
- (正则性) $\sum \sum p_{ij} = 1$

确定联合分布列的方法

1. 确定随机变量 (X, Y) 的所有取值数对.
2. 计算取每个数值对的概率

联合分布列

联合分布列的基本性质

- (非负性) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$
- (正则性) $\sum\sum p_{ij} = 1$

确定联合分布列的方法

1. 确定随机变量 (X, Y) 的所有取值数对.
2. 计算取每个数值对的概率
3. 列出表格

联合分布列

例 3.1.1

将一枚均匀的硬币抛掷 4 次,X 表示正面向上的次数,Y 表示反面朝上次数。求 (X, Y) 的联合分布列

联合分布列

列表为

$X\backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	1/16
1	0	0	0	1/4	0
2	0	0	6/16	0	0
3	0	1/4	0	0	0
4	1/16	0	0	0	0

联合分布列

例 3.1.2

设随机变量 $Y \sim N(0,1)$

求 $X_1 = \begin{cases} 0, & |Y| \geq 1 \\ 1, & |Y| < 1 \end{cases}$ $X_2 = \begin{cases} 0, & |Y| \geq 2 \\ 1, & |Y| < 2 \end{cases}$ 的联合分布列

联合分布列

列表为:

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0.0455	0.2719
1	0	0.6826

联合分布列

联合密度函数的基本性质

联合分布列

联合密度函数的基本性质

1. (非负性)

联合分布列

联合密度函数的基本性质

1. (非负性) $p(x, y) \geq 0$

联合分布列

联合密度函数的基本性质

1. (非负性) $p(x, y) \geq 0$
2. (正则性)

联合密度函数的基本性质

1. (非负性) $p(x,y) \geq 0$
2. (正则性) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$

联合分布列

联合密度函数的基本性质

1. (非负性) $p(x,y) \geq 0$
2. (正则性) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$

注意:$P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{D} p(x,y)dxdy$

常用多维分布

多项分布

常用多维分布

多项分布

- 若每次试验有 r 种结果:$A_1, A_2, ..., A_r$ 记 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, ..., r$

常用多维分布

多项分布

- 若每次试验有 r 种结果:$A_1, A_2, ..., A_r$ 记 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, ..., r$
- 记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数

常用多维分布

多项分布

- 若每次试验有 r 种结果:$A_1, A_2, \ldots, A_r$ 记 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, r$
- 记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数
- 则 $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ 的联合分布列为

常用多维分布

多项分布

- 若每次试验有 r 种结果:$A_1, A_2, ..., A_r$ 记 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, ..., r$
- 记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数
- 则 $(X_1, X_2, ..., X_r)$ 的联合分布列为
  $P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, ..., X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r}$

多项分布

- 若每次试验有 r 种结果:$A_1, A_2, ..., A_r$ 记 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, ..., r$
- 记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数
- 则 $(X_1, X_2, ..., X_r)$ 的联合分布列为
  $P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, ..., X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r}$

常用多维分布

多维超几何分布

常用多维分布

多维超几何分布

- 口袋中有 N 只球，分成 r 类

常用多维分布

多维超几何分布

- 口袋中有 N 只球，分成 r 类
- 第 i 种球有 N_i 只,$N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$

常用多维分布

多维超几何分布

- 口袋中有 N 只球，分成 r 类
- 第 i 种球有 N_i 只,$N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$
- 从中任取 n 只

常用多维分布

多维超几何分布

- 口袋中有 N 只球，分成 r 类
- 第 i 种球有 N_i 只,$N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$
- 从中任取 n 只
- 记 X_i 为取出的 n 只球中，第 i 种球的只数

常用多维分布

多维超几何分布

- 口袋中有 N 只球，分成 r 类
- 第 i 种球有 N_i 只,$N_1+N_2+\ldots+N_r=N$
- 从中任取 n 只
- 记 X_i 为取出的 n 只球中，第 i 种球的只数
- 则 $(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ 的联合分布列为：

多维超几何分布

- 口袋中有 N 只球，分成 r 类
- 第 i 种球有 N_i 只,$N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$
- 从中任取 n 只
- 记 X_i 为取出的 n 只球中，第 i 种球的只数
- 则 $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ 的联合分布列为：

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_r = n_r) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$$

二维均匀分布

常用多维分布

二维均匀分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

常用多维分布

二维均匀分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & Others\end{cases}$$

常用多维分布

二维均匀分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y) \in D \\ 0, & Others \end{cases}$$

- 其中 S_D 为 D 的面积

常用多维分布

二维均匀分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y) \in D \\ 0, & Others \end{cases}$$

- 其中 S_D 为 D 的面积
- 则称 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布

二维均匀分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & Others\end{cases}$$

- 其中 S_D 为 D 的面积
- 则称 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布
- 记为 $(X, Y)\sim U(D)$

常用多维分布

二维正态分布

常用多维分布

二维正态分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

二维正态分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}]\}$$

常用多维分布

二维正态分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}]\}$$

- 则称 (X, Y) 服从二维正态分布

二维正态分布

- 若二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}]\}$$

- 则称 (X, Y) 服从二维正态分布
- 记为 $(X, Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$

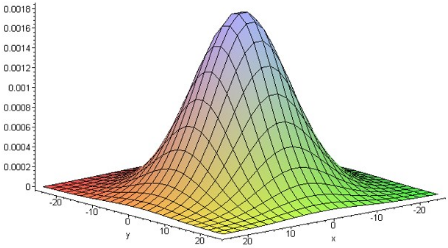

Figure: 二维正态分布

例 3.1.3

若 $(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+3y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & Others \end{cases}$ 试求常数 A

解:

例 3.1.3

若 $(X, Y) \sim p(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+3y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & Others \end{cases}$ 试求常数 A

解:

所以, $A = 6$

例 3.1.4

若 $(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & Others \end{cases}$ 试求 $P\{X < 2, Y < 1\}$

例 3.1.4

若 $(X, Y) \sim p(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & Others \end{cases}$ 试求 $P\{X < 2, Y < 1\}$

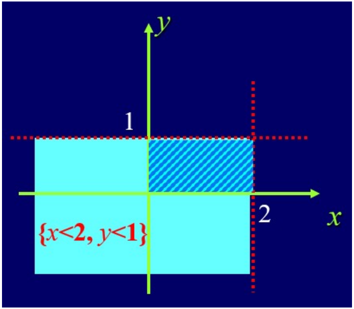

Figure: 例 3.1.4

解:

常用多维分布

例 3.1.5

若 $(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & Others \end{cases}$ 试求 $P\{(X,Y) \in D\}$, 其中 D 为 $2x+3y \leq 6$

例 3.1.5

若 $(X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)} & x\geq 0, y\geq 0\\ 0 & Others\end{cases}$ 试求 $P\{(X,Y)\in D\}$, 其中 D 为 $2x+3y\leq 6$

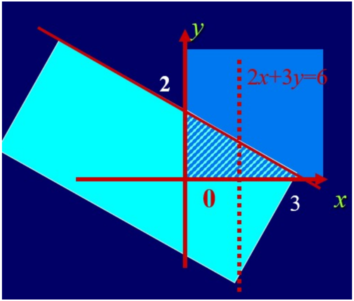

Figure: 例 3.1.5

解:

作业

课本 P 150: 3, 5, 7, 10, 12