现代管理科学方法
（第7讲）

郭仁拥 博士/教授/博导

讲授内容

1. 考虑车辆运送能力VRP的MIP刻画
2. VRP启发式求解方法的分类

1. 考虑车辆运送能力VRP的MIP刻画

考虑车辆运送能力车辆路径问题（CVRP）—非对称网络

- K—相同车辆数量
- C—车辆运送能力
- 一个仓库位于顶点0
- d_i—位于顶点 $i \in V \setminus \{0\}$ 顾客的需求（$0 \le d_i \le C$，$d_0 = 0$）
- 每辆车行走最多一条路线

- 问题解：找到一个具有最小费用的 K 条路线（闭圈）集，使得（a）每个闭圈均访问仓库；（b）每个顾客由恰恰一条路线访问；（c）一条路线访问的所有顾客需求和不超过 C

车辆流刻画

- 二进制变量 x_{ij}， $\forall\ (i, j) \in A'$
- $$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果}(i, j)\text{在解内} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

解结构

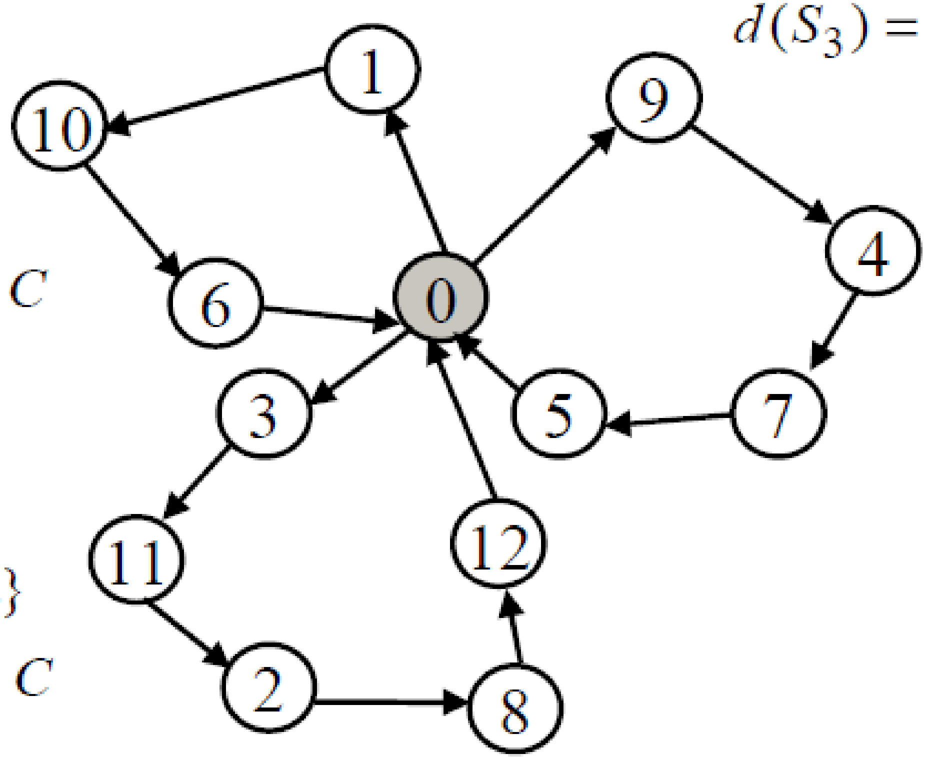
- K=3

$$S_3 = \{4,5,7,9\}$$

$$d(S_3) = \sum_{i \in S_3} d_i \le C$$

$$S_1 = \{1,6,10\}$$

$$d(S_1) = \sum_{i \in S_1} d_i \le C$$



$$S_2 = \{2,3,8,11,12\}$$

$$d(S_2) = \sum_{i \in S_2} d_i \le C$$

一个MIP刻画

$$\min \sum_{(i,j)\in A'} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i\in V\setminus\{j\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{0\}$$ 到达度约束

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$ 离开度约束

$$\sum_{i\in V\setminus\{0\}} x_{i0} = K$$ 仓库到达度约束

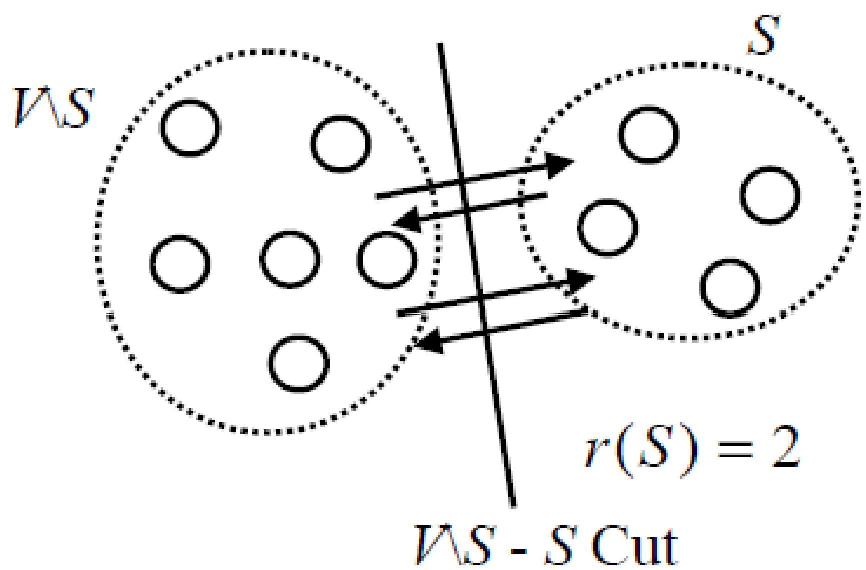
$$\sum_{j\in V\setminus\{0\}} x_{0j} = K$$ 仓库离开度约束

$$\sum_{i\notin S} \sum_{j\in S} x_{ij} \geq r(S) \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset$$ 运送能力割约束（CCC）

$$x_{ij} \in B \quad \forall (i,j) \in A'$$ 二进制约束

- 运送能力割约束（CCC）施加了连通性和车辆运送能力要求
- $r(S)$ 是服务集合 S 中顶点所需的最小车辆数，它可以由求解装箱问题得到，也可以简单设定

$$r(S)=\lceil d(S)/C \rceil$$

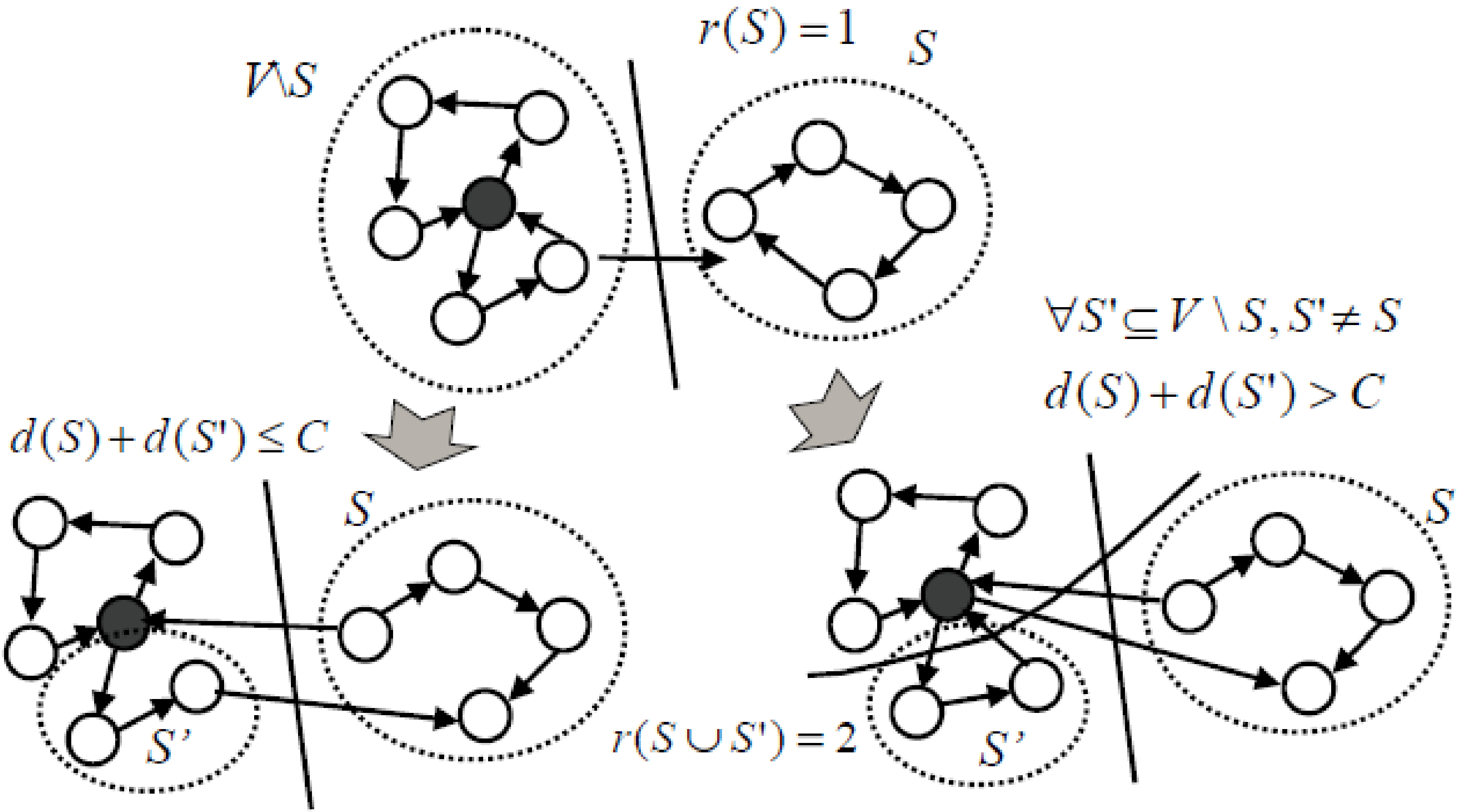


→由度约束隐含

←由CCC施加

$$\Rightarrow \sum_{i\notin S}\sum_{j\in S} x_{ij} = \sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij}$$

CCC避免了不包含仓库的子闭迹，例如



- 一类替代约束：广义子闭迹消去约束（Generalized subtour elimination constraints, GSEC）

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \le |S| - r(S)\,,\ \forall\ S \subseteq V \setminus \{0\}\,,\ S \ne \varnothing$$

> CCC和GSEC的基数均是指数阶的

- 一类替代约束：多项式基数约束

$$u_i - u_j + C \cdot x_{ij} \le C - d_j, \quad d_i + d_j \le C, \quad \forall\ i, j \in V \setminus \{0\}, \quad i \ne j$$

$$d_i \le u_i \le C, \quad \forall\ i, j \in V \setminus \{0\}$$

u_i — 访问顾客i之后的车辆装载

如果$x_{ij} = 0 \ \Rightarrow u_i - u_j \le C - d_j$；否则$x_{ij} = 1 \ \Rightarrow u_j \ge u_i + d_j$

CVRP扩展

- 追踪车辆需要$O(n^2K)$个二进制变量

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{如果车辆}k\text{经过}(i, j) \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$O(nK)$个二进制变量

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{如果顾客}i\text{由车辆}k\text{服务} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

y 和 **x** 满足关系 $y_{ik} = \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ijk}$

$$\min \sum_{(i,j)\in A'} c_{ij} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

每个顾客由恰恰一辆车服务

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ijk} = \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{jik} \quad \forall i \in V, k = 1,\dots,K$$

同一辆车进入并离开一个顾客顶点

$$\sum_{k=1}^{K} y_{0k} \le K$$

最多*K*辆车被使用（一些车辆可能不被使用）

$$u_{ik} - u_{jk} + C_k x_{ijk} \le C_k - d_j \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, k = 1, \ldots, K$$

使得 $d_i + d_j \le C_k$

子闭迹消去和运送能力约束（针对不同车辆）

$$d_i \le u_{ik} \le C_k$$

服务顾客*i*之后的车辆装载

$$x_{ijk} \in B \quad \forall (i, j) \in A', k = 1, \ldots, K$$

二进制约束

$$y_{ik} \in B \quad u_{ik} \in \Re \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, k = 1, \ldots, K$$

二进制和实数约束

- **时间约束**

t_{ij} — 从 i 到 j 的行走时间

s_i — 顾客 i 的服务时间

T — 最大车辆总服务时间

$$\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} t_{ij}x_{ijk} + \sum_{i\in V\setminus\{0\}} s_i y_{ik} \le T$$

确定算法（例如，分支定界、分支切割）一般只能求解小规模算例（$n<50$，有时 $n<100$）

2. VRP启发式求解方法的分类

一般来说，启发式算法可以在可计算时间内找到次优解

三类主要启发式算法：

- 构造启发（Constructive）— 逐步构建问题解
- 改进启发（Improvement）— 通过局部搜索过程，逐步改进给定问题解
- 元启发（Metaheuristic）— 扩展局部搜索，考虑一个种群解