现代管理科学方法
（第2讲）

郭仁拥 博士/教授/博导

讲授内容

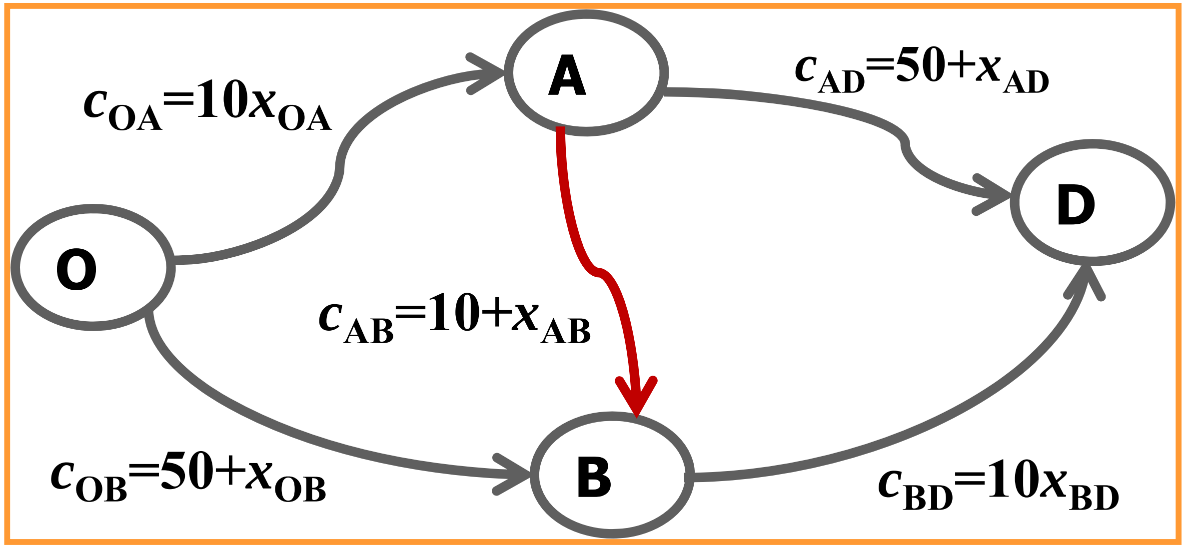
1. 交通网络的描述与刻画
2. 用户均衡的定义与公式刻画
3. 交通分配问题的优化模型刻画
4. 一阶最优性条件

1. 交通网络的描述与刻画

- 考虑一个交通网络 $G(N, L)$，这里 N 是节点集，L 是有向路段集
- W 是起讫节点（OD）对集合， R_w 是OD对 $w \in W$ 间路径集合
- 出行需求表示为列向量 $\mathbf{d} = (d_w, w \in W)^{\mathrm{T}}$，这里 d_w（> 0）是OD对 $w \in W$ 间的出行需求
- 路径流量向量表示为 $\mathbf{f} = (f_{r,w}, r \in R_w, w \in W)^{\mathrm{T}}$，这里 $f_{r,w}$（≥ 0）是路径 $r \in R_w$ 上的流量
- 路段流量向量表示为 $\mathbf{x} = (x_a, a \in L)^{\mathrm{T}}$，这里 x_a（≥ 0）是路段 $a \in L$ 上的流量

- $\boldsymbol{\Delta}=(\delta_{a,r}, a\in L, r\in R_w, w\in W)$ 是路段-路径关联矩阵，如果路径 r 经过路段 a，则 $\delta_{a,r}=1$；否则，$\delta_{a,r}=0$
- $\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_{r,w}, r\in R_w, w\in W)$ 表示OD对-路径关联矩阵，如果路径 r 连接OD对 w，则 $\lambda_{r,w}=1$；否则，$\lambda_{r,w}=0$
- $\mathbf{d}$、$\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{d}=\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}$，即
- $x_a=\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}\delta_{a,r} f_{r,w}, \quad \forall\ a\in L$
- $d_w=\sum_{r\in R_w} f_{r,w}, \quad \forall\ w\in W$
- 可行路段流量和路径流量集合 Ω 被表示为
- $\Omega\equiv\left\{(\mathbf{x},\mathbf{f})\,|\,\mathbf{x}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}, \mathbf{d}=\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}, \mathbf{f}\geq\mathbf{0}\right\}$

- 该交通网络是强连通的（Strongly connected），即每个OD对间至少有一条路径，则集合Ω是非空的
- 集合Ω是紧的（有界闭集）和凸的
- $\mathbf{c}(\mathbf{x})=(c_a(x_a),a\in L)^{\mathrm{T}}$是路段出行费用向量，其中$c_a(x_a)$（$>0$）是路段$a\in L$的出行费用
- 对于任意$a\in L$，函数c_a关于x_a是连续可微的和增的
- $\mathbf{C}(\mathbf{f})=(C_{r,w}(\mathbf{f}),r\in R_w,w\in W)^{\mathrm{T}}$是路径出行费用向量，其中$C_{r,w}(\mathbf{f})$（$>0$）是路径$r\in R_w$的出行费用
- $\mathbf{c}(\mathbf{x})$和$\mathbf{C}(\mathbf{f})$满足$\mathbf{C}(\mathbf{f})=\mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}(\mathbf{x})$，即
- $C_{r,w}(\mathbf{f})=\sum\limits_{a\in L}\delta_{a,r}c_a(x_a)$



6个单位出行者从节点O到达节点D

$N = \{\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$， $L = \{\mathrm{OA}, \mathrm{AD}, \mathrm{OB}, \mathrm{BD}, \mathrm{AB}\}$， $W = \{\mathrm{OD}\}$

$R_{\mathrm{OD}} = \{\mathrm{OAD}, \mathrm{OABD}, \mathrm{OBD}\}$， $d_{\mathrm{OD}} = 6$

$x_{\mathrm{OA}} = f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OABD}}$， $x_{\mathrm{AD}} = f_{\mathrm{OAD}}$， $x_{\mathrm{OB}} = f_{\mathrm{OBD}}$

$x_{\mathrm{BD}} = f_{\mathrm{OABD}} + f_{\mathrm{OBD}}$， $x_{\mathrm{AB}} = f_{\mathrm{OABD}}$

$d_{\mathrm{OD}} = f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OABD}} + f_{\mathrm{OBD}}$

$$\delta_{\mathrm{OA,OAD}} = 1, \quad \delta_{\mathrm{OA,OABD}} = 1, \quad \delta_{\mathrm{OA,OBD}} = 0, \quad \delta_{\mathrm{AD,OAD}} = 1$$

$$\delta_{\mathrm{AD,OABD}} = 0, \quad \delta_{\mathrm{AD,OBD}} = 0, \quad \delta_{\mathrm{OB,OAD}} = 0, \quad \delta_{\mathrm{OB,OABD}} = 0$$

$$\delta_{\mathrm{OB,OBD}} = 1, \quad \delta_{\mathrm{BD,OAD}} = 0, \quad \delta_{\mathrm{BD,OABD}} = 1, \quad \delta_{\mathrm{BD,OBD}} = 1$$

$$\delta_{\mathrm{AB,OAD}} = 0, \quad \delta_{\mathrm{AB,OABD}} = 1, \quad \delta_{\mathrm{AB,OBD}} = 0$$

$$\lambda_{\mathrm{OAD,OD}} = 1, \quad \lambda_{\mathrm{OABD,OD}} = 1, \quad \lambda_{\mathrm{OBD,OD}} = 1$$

$$c_{\mathrm{OA}}(x_{\mathrm{OA}}) = 10x_{\mathrm{OA}}, \quad c_{\mathrm{AD}}(x_{\mathrm{AD}}) = 50 + x_{\mathrm{AD}}, \quad c_{\mathrm{OB}}(x_{\mathrm{OB}}) = 50 + x_{\mathrm{OB}}$$

$$c_{\mathrm{BD}}(x_{\mathrm{BD}}) = 10x_{\mathrm{BD}}, \quad c_{\mathrm{AB}}(x_{\mathrm{AB}}) = 10 + x_{\mathrm{AB}}$$

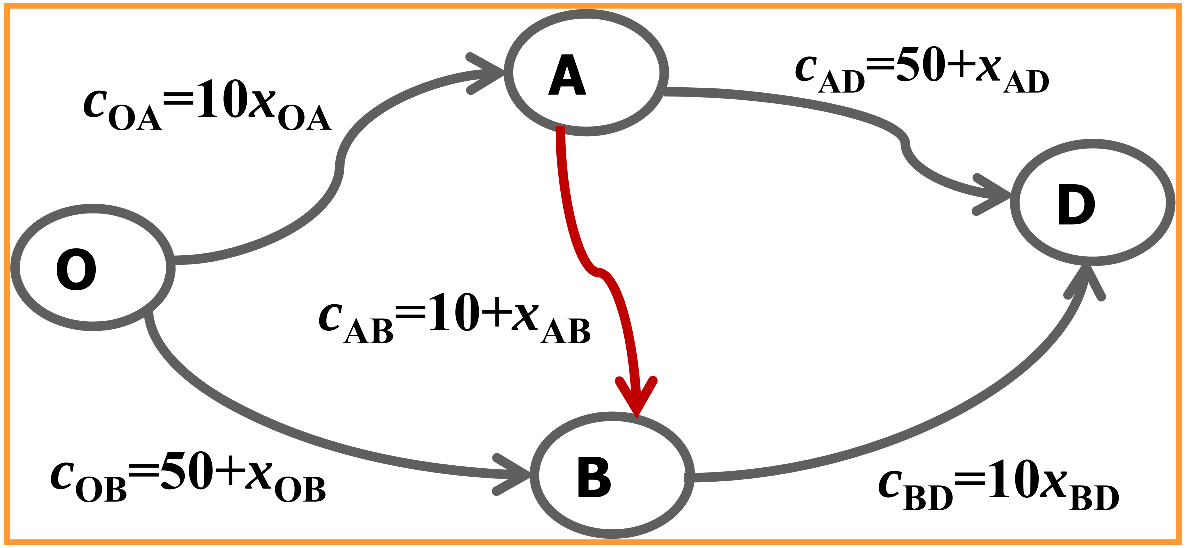
$$C_{\mathrm{OAD}}(\mathbf{f}) = c_{\mathrm{OA}}(x_{\mathrm{OA}}) + c_{\mathrm{AD}}(x_{\mathrm{AD}})$$

$$C_{\mathrm{OBD}}(\mathbf{f}) = c_{\mathrm{OB}}(x_{\mathrm{OB}}) + c_{\mathrm{BD}}(x_{\mathrm{BD}})$$

$$C_{\mathrm{OABD}}(\mathbf{f}) = c_{\mathrm{OA}}(x_{\mathrm{OA}}) + c_{\mathrm{AB}}(x_{\mathrm{AB}}) + c_{\mathrm{BD}}(x_{\mathrm{BD}})$$

2. 用户均衡的定义与公式刻画

- **用户均衡**的概念由Wardrop（1952）首先提出，在用户均衡状态下，没有出行者可以通过单方面改变其出行路径来降低其出行费用
- 用户均衡是巨量出行者在路径选择决策上长期相互博弈的结果，被认为是一种符合竞争经济学原则的交通网络流量分配结果
- $\mathbf{f}^*$ 是一个UE流量方式，UE条件的数学公式表达
- $$C_{r,w}\left(\mathbf{f}^*\right)\begin{cases} = \mu_w, & \text{if } f_{r,w}^* > 0, \forall r \in R_w, w \in W \\ \geq \mu_w, & \text{if } f_{r,w}^* = 0, \forall r \in R_w, w \in W \end{cases}$$
- 这里 μ_w 是OD对 $w \in W$ 间的最小出行费用



6个单位出行者从节点O到达节点D

$(\mathbf{x},\mathbf{f})$ 是一个UE流量方式，则

$f_{OAD}=2$， $f_{OBD}=2$， $f_{OABD}=2$

$x_{OA}=4$， $x_{AD}=2$， $x_{OB}=2$， $x_{BD}=4$， $x_{AB}=2$

$c_{OA}(x_{OA})=40$， $c_{AD}(x_{AD})=52$， $c_{OB}(x_{OB})=52$

$c_{BD}(x_{BD})=40$， $c_{AB}(x_{AB})=12$

$C_{OAD}(\mathbf{f})=C_{OBD}(\mathbf{f})=C_{OABD}(\mathbf{f})=92$

这个UE流量方式是如何计算得到的呢？

3. 交通分配问题的优化模型刻画

问题：如何求解交通分配问题（TAP）,得到用户均衡（UE）流量分布方式？

问题：如何求解交通分配问题（TAP）,得到用户均衡（UE）流量分布方式？

可以通过求解一个最优化模型来计算UE流量分布方式

为了计算用户均衡流量分布方式，可求解如下最优化模型

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{L}}} V(\mathbf{x}) = \sum_{a\in L}\int_0^{x_a} c_a(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

这里 $\Omega_{\mathrm{L}} \equiv \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x},\mathbf{f}) \in \Omega\}$，即 $\mathbf{x}$ 满足如下约束

$$x_a = \sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w} \delta_{a,r} f_{r,w}, \quad \forall\ a \in L \qquad (2)$$

$$d_w = \sum_{r\in R_w} f_{r,w}, \quad \forall\ w \in W \qquad (3)$$

$$f_{r,w} \geq 0, \quad \forall\ r \in R_w,\ w \in W \qquad (4)$$

为了计算用户均衡流量分布方式，可求解如下最优化模型

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{L}}} \boxed{V(\mathbf{x}) = \sum_{a\in L}\int_0^{x_a} c_a(x)\mathrm{d}x} \quad \text{目标函数} \qquad (1)$$

这里 $\Omega_{\mathrm{L}} \equiv \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x},\mathbf{f}) \in \Omega\}$，即 $\mathbf{x}$ 满足如下约束

$$x_a = \sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}\delta_{a,r} f_{r,w}, \quad \forall\, a \in L \qquad (2)$$

$$d_w = \sum_{r\in R_w} f_{r,w}, \quad \forall\, w \in W \qquad (3)$$

$$f_{r,w} \geq 0, \quad \forall\, r \in R_w,\ w \in W \qquad (4)$$

决策变量的可行集

性质1 最优化模型(1)的最优解存在。

证明：一方面，由于对于任意的$a \in L$，函数c_a关于x_a是连续可微的，因此优化模型(1)的目标函数V关于$\mathbf{x}$是连续的。其次，集合Ω_{L}是非空的、紧的（有界闭集）和凸的。因此，优化模型(1)的最优解存在。

性质2 最优化模型(1)关于 $\mathbf{x}$ 一个严格凸优化问题。

证明：目标函数 V 关于 $\mathbf{x}$ 的Hessian矩阵表示为

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}\left(dc_a(x_a)/dx_a \,, a \in L \right)$$

由于对于任意 $a \in L$，函数 c_a 关于 x_a 是增的，所以对于任意 $a \in L$，有 $dc_a(x_a)/dx_a > 0$ 成立。$\nabla^2 V(\mathbf{x})$ 是一个对角矩阵，且对角上所有元素均为正，因此函数 V 关于 $\mathbf{x}$ 是严格凸的。此外，集合 Ω_{L} 是紧的和凸的。因此，最优化模型(1)关于 $\mathbf{x}$ 一个严格凸优化问题。

性质2表明最优化模型(1)的路段流量解是唯一的。然而，路径流量解可能不是唯一的

性质3 优化模型(1)的最优解等价于用户均衡（UE）解。也就是说，$\mathbf{x}^*$ 是优化模型(1)的最优解当且仅当 $\mathbf{f}^*$ 是一个UE流量方式。这里 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{f}^*$ 满足 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{d}=\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{f}\geq\mathbf{0}$ 。

- **性质2和3表明该交通系统的UE路段流量解是唯一的，然而，UE路径流量解可能不是唯一的**
- **为证明性质3，需引入一阶最优性条件，即KKT条件（Karush-Kuhn-Tucker）**

4. 一阶最优性条件

一阶最优性条件 设 $\mathbf{x}=(x_i, i=1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$， $f:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，$g_j:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$， $\forall\, j=1,2,\cdots,m$。函数 f 和 g_j（ $j=1,2,\cdots,m$ ）是连续可微的。考虑最优化问题

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{5}$$

$$s.t.\ g_j(\mathbf{x})=0,\ \text{对于} j=1,2,\cdots,m_e, \tag{6}$$

$$g_j(\mathbf{x})\ge 0,\ \text{对于} j=m_e+1, m_e+2,\cdots,m. \tag{7}$$

如果 $\mathbf{x}$ 是优化问题(5)~(7)的最优解，那么它满足

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\text{，对于 } i=1,2,\cdots,n, \tag{8}$$

$$\lambda_j g_j(\mathbf{x})=0\text{，}\lambda_j\ge 0\text{，对于 } j=m_e+1,m_e+2,\cdots,m. \tag{9}$$

此外，如果优化问题(5)~(7)是一个凸优化问题，那么 $\mathbf{x}$ 是该优化问题的最优解当且仅当 $\mathbf{x}$ 满足条件(6)~(9)。

课堂练习

利用KKT条件计算如下优化问题的最优解。

$$\min_{(x_1, x_2)} U(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$
$$s.t.\ x_1 + x_2 = 1$$

$$\min_{(x_1, x_2)} U(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$
$$s.t.\ x_1 + x_2 \geq -1$$

以上两个优化问题是凸优化问题，因此KKT条件是充要条件

左侧优化问题的KKT条件为

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2x_1 = \lambda, \quad \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 2x_2 = \lambda,$$

这里λ是等式约束的拉格朗日乘子，结合约束$x_1 + x_2 = 1$得到最优解$(x_1, x_2) = (1/2, 1/2)$

右侧优化问题的KKT条件为

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2x_1 = \lambda \text{，} \quad \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 2x_2 = \lambda \text{，} \quad \lambda \geq 0 \text{，} \quad (x_1 + x_2 + 1)\lambda = 0$$

这里λ是不等式约束的拉格朗日乘子，结合约束$x_1 + x_2 + 1 \geq 0$

得到最优解$(x_1, x_2) = (0, 0)$

接下来利用一阶最优性条件来证明性质3

性质3的证明 设$(\mathbf{x}^*,\mathbf{f}^*)\in\Omega$是优化模型(1)的一个最优解。由于$\mathbf{x}=\Delta\mathbf{f}$，即$\mathbf{x}$是$\mathbf{f}$的函数，因此，优化模型(1)可以表达为一个仅仅涉及决策变量$\mathbf{f}$的优化问题。根据一阶最优性条件，如果$\mathbf{f}^*$是优化模型(1)的一个最优解，那么它满足

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial f_{r,w}}=\mu_w+\lambda_{r,w},\quad \forall\ r\in R_w,\ w\in W \tag{10}$$

$$\lambda_{r,w}f_{r,w}=0,\quad \lambda_{r,w}\ge 0,\quad f_{r,w}\ge 0,\quad \forall\ r\in R_w,\ w\in W \tag{11}$$

这里μ_w（$w\in W$）是对应守恒约束(3)的拉格朗日乘子，$\lambda_{r,w}$（$r\in R_w$，$w\in W$）是对应非负约束(4)的拉格朗日乘子。

偏导数 $\partial V(\mathbf{x})/\partial f_{r,w}$ 可进一步表示为

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial f_{r,w}} = \sum_{a \in L} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial f_{r,w}} = \sum_{a \in L} c_a(x_a)\delta_{a,r} = C_{r,w}(\mathbf{f})$$

将上式代入公式(10)，结合不等式(11)可得到

$$\left(C_{r,w}(\mathbf{f}) - \mu_w\right) f_{r,w} = 0\text{，}\ \forall\ r \in R_w\text{，}\ w \in W \tag{12}$$

$$C_{r,w}(\mathbf{f}) - \mu_w \geq 0\text{，}\ \ f_{r,w} \geq 0\text{，}\ \forall\ r \in R_w\text{，}\ w \in W \tag{13}$$

公式(12)和(13)意味着

$$C_{r,w}(\mathbf{f})\begin{cases}=\mu_w, & \text{if } f_{r,w}>0, \forall r\in R_w, w\in W\\ \geq \mu_w, & \text{if } f_{r,w}=0, \forall r\in R_w, w\in W\end{cases}$$

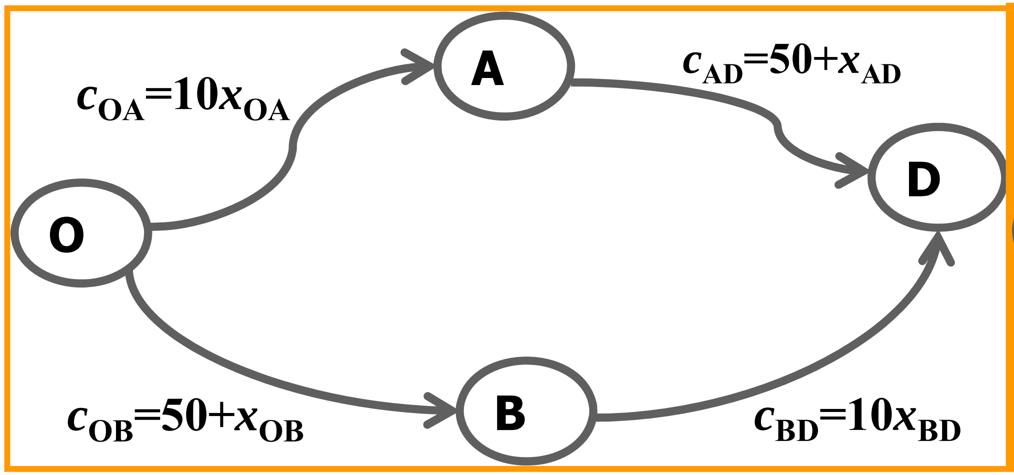
也就是说 $\mathbf{f}^*$ 是一个UE流量方式。此外，优化模型(1)是一个凸优化问题，因此 $\mathbf{x}^*$ 是该优化模型的最优解当且仅当 $\mathbf{f}^*$ 是一个UE流量方式。

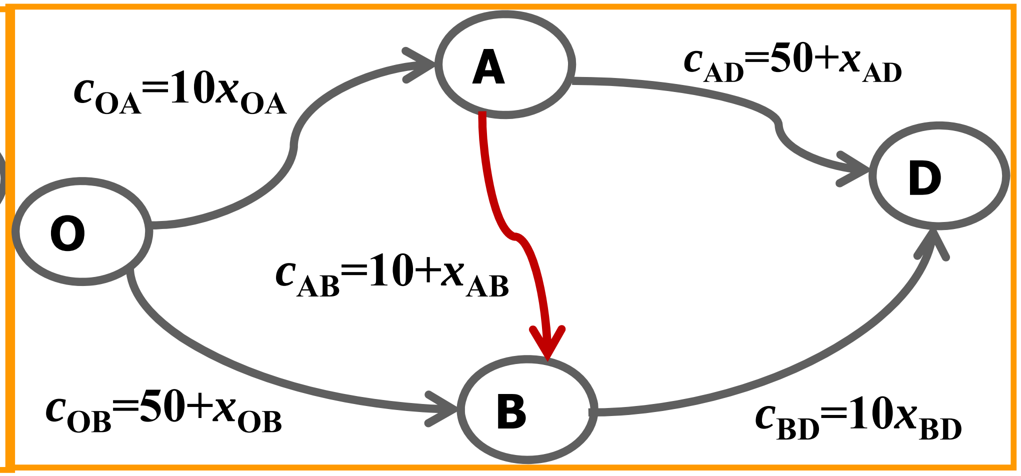
课堂练习

一个交通网络的系统总费用是指网络中所有出行者的总出行费用。例如，对于下面左侧网络，系统总费用表示为

$$U(\mathbf{x}) = x_{\mathrm{OA}} \cdot c_{\mathrm{OA}}(x_{\mathrm{OA}}) + x_{\mathrm{AD}} \cdot c_{\mathrm{AD}}(x_{\mathrm{AD}}) + x_{\mathrm{OB}} \cdot c_{\mathrm{OB}}(x_{\mathrm{OB}}) + x_{\mathrm{BD}} \cdot c_{\mathrm{BD}}(x_{\mathrm{BD}})$$

请给出最小化如下网络系统总费用的优化模型，并利用KKT条件计算系统最优流量分布方式（$d_{\mathrm{OD}} = 6$）。





最小化左侧网络系统总费用的优化模型如下：

$$\min_{(\mathbf{x},\mathbf{f})} U(\mathbf{x}) = x_{\mathrm{OA}} c_{\mathrm{OA}}(x_{\mathrm{OA}}) + x_{\mathrm{AD}} c_{\mathrm{AD}}(x_{\mathrm{AD}}) + x_{\mathrm{OB}} c_{\mathrm{OB}}(x_{\mathrm{OB}}) + x_{\mathrm{BD}} c_{\mathrm{BD}}(x_{\mathrm{BD}})$$

$$s.t. \quad \begin{pmatrix} x_{\mathrm{OA}} \\ x_{\mathrm{AD}} \\ x_{\mathrm{OB}} \\ x_{\mathrm{BD}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\mathrm{OAD}} \\ f_{\mathrm{OBD}} \end{pmatrix}, \quad d_{\mathrm{OD}} = f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OBD}}, \quad f_{\mathrm{OAD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OBD}} \geq 0$$

目标函数的Hessian矩阵为

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OA}}^2} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OA}} \partial x_{\mathrm{AD}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OA}} \partial x_{\mathrm{OB}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OA}} \partial x_{\mathrm{BD}}} \\ \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{AD}} \partial x_{\mathrm{OA}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{AD}}^2} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{AD}} \partial x_{\mathrm{OB}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{AD}} \partial x_{\mathrm{BD}}} \\ \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OB}} \partial x_{\mathrm{OA}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OB}} \partial x_{\mathrm{AD}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OB}}^2} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{OB}} \partial x_{\mathrm{BD}}} \\ \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{BD}} \partial x_{\mathrm{OA}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{BD}} \partial x_{\mathrm{AD}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{BD}} \partial x_{\mathrm{OB}}} & \dfrac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial x_{\mathrm{BD}}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

因此目标函数是严格凸的。此外，可行集是非空、闭的、凸的，

因此该优化问题的KKT条件是充要条件。

该优化问题的KKT条件为

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial f_{\mathrm{OAD}}} = 22 f_{\mathrm{OAD}} + 50 = \mu_{\mathrm{OD}} + \lambda_{\mathrm{OAD}}, \quad \lambda_{\mathrm{OAD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OAD}} \geq 0, \quad \lambda_{\mathrm{OAD}} f_{\mathrm{OAD}} = 0,$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial f_{\mathrm{OBD}}} = 22 f_{\mathrm{OBD}} + 50 = \mu_{\mathrm{OD}} + \lambda_{\mathrm{OBD}}, \quad \lambda_{\mathrm{OBD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OBD}} \geq 0, \quad \lambda_{\mathrm{OBD}} f_{\mathrm{OBD}} = 0,$$

结合守恒约束就得到方程组： $f_{\mathrm{OAD}} = f_{\mathrm{OBD}}$ 和 $f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OBD}} = 6$

求解得到 $f_{\mathrm{OAD}} = f_{\mathrm{OBD}} = 3$，即最优解是 $x_{\mathrm{OA}} = x_{\mathrm{AD}} = x_{\mathrm{OB}} = x_{\mathrm{BD}} = 3$，

优化问题的最小值是498

最小化右侧网络系统总费用的优化模型如下：

$$\min_{(\mathbf{x},\mathbf{f})} U(\mathbf{x}) = x_{\mathrm{OA}} c_{\mathrm{OA}}(x_{\mathrm{OA}}) + x_{\mathrm{AD}} c_{\mathrm{AD}}(x_{\mathrm{AD}}) + x_{\mathrm{OB}} c_{\mathrm{OB}}(x_{\mathrm{OB}}) + x_{\mathrm{BD}} c_{\mathrm{BD}}(x_{\mathrm{BD}}) + x_{\mathrm{AB}} c_{\mathrm{AB}}(x_{\mathrm{AB}})$$

$$s.t. \quad \begin{pmatrix} x_{\mathrm{OA}} \\ x_{\mathrm{AD}} \\ x_{\mathrm{OB}} \\ x_{\mathrm{BD}} \\ x_{\mathrm{AB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\mathrm{OAD}} \\ f_{\mathrm{OBD}} \\ f_{\mathrm{OABD}} \end{pmatrix}, \quad d_{\mathrm{OD}} = f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OBD}} + f_{\mathrm{OABD}},$$

$$f_{\mathrm{OAD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OBD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OABD}} \geq 0$$

目标函数的Hessian矩阵为

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

因此目标函数是严格凸的。此外，可行集是非空、闭的、凸的，

因此该优化问题的KKT条件是充要条件。

该优化问题的KKT条件为

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial f_{\mathrm{OAD}}} = 22 f_{\mathrm{OAD}} + 20 f_{\mathrm{OABD}} + 50 = \mu_{\mathrm{OD}} + \lambda_{\mathrm{OAD}}, \quad \lambda_{\mathrm{OAD}} \geq 0, \quad \lambda_{\mathrm{OAD}} f_{\mathrm{OAD}} = 0,$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial f_{\mathrm{OBD}}} = 22 f_{\mathrm{OBD}} + 20 f_{\mathrm{OABD}} + 50 = \mu_{\mathrm{OD}} + \lambda_{\mathrm{OBD}}, \quad \lambda_{\mathrm{OBD}} \geq 0, \quad \lambda_{\mathrm{OBD}} f_{\mathrm{OBD}} = 0,$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial f_{\mathrm{OABD}}} = 20 f_{\mathrm{OAD}} + 20 f_{\mathrm{OBD}} + 42 f_{\mathrm{OABD}} + 10 = \mu_{\mathrm{OD}} + \lambda_{\mathrm{OABD}}, \quad \lambda_{\mathrm{OABD}} \geq 0, \quad \lambda_{\mathrm{OABD}} f_{\mathrm{OABD}} = 0,$$

$$f_{\mathrm{OAD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OBD}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{OABD}} \geq 0,$$

如果三条路径上流量均为正，则结合守恒约束就得到方程组：

$f_{\mathrm{OAD}} = f_{\mathrm{OBD}}$， $f_{\mathrm{OAD}} - 10 f_{\mathrm{OBD}} - 11 f_{\mathrm{OABD}} = -20$， $f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OBD}} + f_{\mathrm{OABD}} = 6$

该方程组无解

如果 $f_{\mathrm{OABD}} = 0$ 且另外两条路径上流量均为正，则结合守恒约束就得到方程组：

$22 f_{\mathrm{OAD}} + 50 = \mu_{\mathrm{OD}} = 22 f_{\mathrm{OBD}} + 50$，

$20 f_{\mathrm{OAD}} + 20 f_{\mathrm{OBD}} + 10 = \mu_{\mathrm{OD}} + \lambda_{\mathrm{OABD}}$， $f_{\mathrm{OAD}} + f_{\mathrm{OBD}} = 6$，

求解得到 $f_{\mathrm{OAD}} = f_{\mathrm{OBD}} = 3$， $f_{\mathrm{OABD}} = 0$，即最优解是

$x_{\mathrm{OA}} = x_{\mathrm{AD}} = x_{\mathrm{OB}} = x_{\mathrm{BD}} = 3$， $x_{\mathrm{AB}} = 0$，优化问题的最小值是498