第一章
随机事件与概率

第三节

概率的性质

Overview

性质 1.3.1

$P(\phi) = 0$

性质 1.3.1

$P(\phi) = 0$

注意: 逆不一定成立

概率的可加性

性质 1.3.2(有限可加性)

若 $AB=\phi$, 则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 可推广到 n 个互不相容事件.

概率的可加性

性质 1.3.2(有限可加性)

若 $AB = \phi$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. 可推广到 n 个互不相容事件.

性质 1.3.3 (对立事件公式)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

概率的单调性

性质 1.3.4

若 $B \subset A$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$
若 $B \subset A$, 则 $P(A) \geq P(B)$

概率的单调性

性质 1.3.4

若 $B \subset A$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$

若 $B \subset A$, 则 $P(A) \geq P(B)$

性质 1.3.5

$P(A-B) = P(A) - P(AB)$

概率的加法公式

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

例 1.3.1

$AB=\phi, P(A)=0.6, P(A\cup B)=0.8$，求 B 的对立事件的概率。

例 1.3.1

$AB=\phi, P(A)=0.6, P(A\cup B)=0.8$，求 B 的对立事件的概率。

解：

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$

得 $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.8-0.6=0.2,$

所以 $P(\overline{B})=1-0.2=0.8.$

例 1.3.2

$P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A-B)$.

概率的加法公式

例 1.3.2

$P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A-B)$.

解：

因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以先求 $P(AB)$

由加法公式得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$

所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$

概率的加法公式

例 1.3.3

$P(A)=P(B)=P(C)=1/4, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=1/6$, 求 A、B、C 都不出现的概率.

例 1.3.3

$P(A)=P(B)=P(C)=1/4, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=1/6$, 求 A、B、C 都不出现的概率.

解:

因为 A、B、C 都不出现的概率为

$P(\overline{ABC})=1-P(A\cup B\cup C)$

$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$=1-1/4-1/4-1/4+0+1/6+1/6-0=1-5/12=7/12$

概率的加法公式

利用对立事件

例：口袋中有 $n-1$ 个黑球、1 个白球，每次从口袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球. 求第 k 次取到黑球的概率.

利用对立事件

例：口袋中有 $n-1$ 个黑球、1 个白球，每次从口袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球. 求第 k 次取到黑球的概率.

解：

记 A 为“第 k 次取到黑球”，则 A 的对立事件为“第 k 次取到白球”

而“第 k 次取到白球”意味着：

“第 1 次……第 $k-1$ 次取到黑球，而第 k 次取到白球”

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{(n-1)^{(k-1)}}{n^k}$$

例 1.3.4

一颗骰子掷 4 次，求至少出现一次 6 点的概率.

例 1.3.4

一颗骰子掷 4 次，求至少出现一次 6 点的概率.

解：
用对立事件进行计算,
记 $A =$ “至少出现一次 6 点”,
则所求概率为
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = A - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177$

例 1.3.5

两颗骰子掷 24 次，求至少出现一次双 6 点的概率.

概率的加法公式

例 1.3.5

两颗骰子掷 24 次，求至少出现一次双 6 点的概率.

解:

记 $B=$ “至少出现一次双 6 点”，则所求概率为

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{35^{24}}{36^{24}}=0.4914$

概率的加法公式

利用对立事件和加法公式

从 $1,,2,\ldots,9$ 中返回取 n 次，求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

概率的加法公式

利用对立事件和加法公式

从 $1, , 2, \ldots, 9$ 中返回取 n 次，求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解：

- 因为“乘积能被 10 整除”意味着:
- “取到过 5”(记为 A) 且“取到过偶数”(记为 B).
- 因此所求概率为 $P(AB)$.
- 利用对立事件公式、德莫根公式和加法公式
- $P(AB) = 1 - P(\overline{AB})$

概率的加法公式

利用对立事件和加法公式

从 $1,,2,\ldots,9$ 中返回取 n 次，求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解：

- 因为“乘积能被 10 整除”意味着:
- “取到过 5”(记为 A) 且“取到过偶数”(记为 B).
- 因此所求概率为 $P(AB)$.
- 利用对立事件公式、德莫根公式和加法公式
- $P(AB) = 1 - P(\overline{AB})$
  $= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$

概率的加法公式

利用对立事件和加法公式

从 $1,,2,...,9$ 中返回取 n 次，求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解：

- 因为“乘积能被 10 整除”意味着:
- “取到过 5”(记为 A) 且“取到过偶数”(记为 B).
- 因此所求概率为 $P(AB)$.
- 利用对立事件公式、德莫根公式和加法公式
- $P(AB) = 1 - P(\overline{AB})$
  $= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$ 概率的加法公式
  $= 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) - P(\overline{A}\ \overline{B})$

概率的加法公式

思考题

甲掷硬币 n+1 次，乙掷 n 次. 求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率.

概率的加法公式

思考题

甲掷硬币 $n+1$ 次，乙掷 n 次. 求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率.

概率的连续性

- 因为概率是事件 (集合) 的函数，所以先讨论事件 (集合) 的“极限”
- 本节给出可列可加性的充要条件.

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，其极限事件为

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，其极限事件为
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，其极限事件为
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$
- 若事件序列 $\{E_n\}$ 满足：$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，其极限事件为
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$
- 若事件序列 $\{E_n\}$ 满足：$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$
  则称 $\{E_n\}$ 为单调不增事件序列，

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，其极限事件为
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$
- 若事件序列 $\{E_n\}$ 满足：$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$
  则称 $\{E_n\}$ 为单调不增事件序列，其极限事件为

概率的连续性

事件序列的极限

- 若事件序列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$
  则称 $\{F_n\}$ 为单调不减事件序列，其极限事件为
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$
- 若事件序列 $\{E_n\}$ 满足：$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$
  则称 $\{E_n\}$ 为单调不增事件序列，其极限事件为
  $$\lim_{n\to+\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$$

集合函数的连续性

设 $P(\cdot)$ 是一个集合函数,

1. 若任对单调不减集合序列 $\{F_n\}$,
   $P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$
   有则称 $P(\cdot)$ 是下连续的.
2. 若任对单调不增集合序列 $\{F_n\}$,
   $P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$
   有则称 $P(\cdot)$ 是上连续的.

概率的连续性

性质 1.3.7

若 $P(\cdot)$ 是事件域 F 上的一个概率函数，则 $P(\cdot)$ 既是下连续的，又是上连续的.

概率的连续性

性质 1.3.7

若 $P(\cdot)$ 是事件域 F 上的一个概率函数，则 $P(\cdot)$ 既是下连续的，又是上连续的.

性质 1.3.8 可列可加性的充要条件

若 $P(\cdot)$ 是事件域 F 上满足：非负、正则的集合函数，则 $P(\cdot)$ 有可列可加性的充要条件是它具有有限可加性和下连续性.

作业

P39-40: 1, 4, 5, 6, 12, 13,14, 15, 16