第三章
多维随机变量及其分布

第五节

条件分布与条件期望

前言

对二维随机变量 (X, Y)

- 随机变量 X 的条件分布：

前言

对二维随机变量 (X, Y)

- 随机变量 X 的条件分布：在给定 Y 取某个值的条件下，X 的分布

前言

对二维随机变量 (X, Y)

- 随机变量 X 的条件分布：在给定 Y 取某个值的条件下，X 的分布
- 随机变量 Y 的条件分布：

前言

对二维随机变量 (X, Y)

- 随机变量 X 的条件分布：在给定 Y 取某个值的条件下，X 的分布
- 随机变量 Y 的条件分布：在给定 X 取某个值的条件下，Y 的分布

前言

对二维随机变量 (X, Y)

- 随机变量 X 的条件分布：在给定 Y 取某个值的条件下, X 的分布
- 随机变量 Y 的条件分布：在给定 X 取某个值的条件下, Y 的分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) =$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} =$

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

  (注:

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j}=P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j}=$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j} = \sum\limits_i p_{ij}$)

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$)
- 条件密度函数

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注： $p_{\cdot j} = \sum\limits_i p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$
- 条件分布函数

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$
- 条件分布函数

  $F(x|y) =$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$
- 条件分布函数

$$F(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

  (注： $p_{\cdot j} = \sum\limits_{i} p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$
- 条件分布函数

$$F(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i \leq x} P(X = x_i | Y = y) \\ \\ \end{cases}$$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注：$p_{\cdot j} = \sum\limits_i p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$
- 条件分布函数

$$F(x|y) = P(X \le x | Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i \le x} P(X = x_i | Y = y) \\ \int_{-\infty}^{x} p(t|y)dt = \end{cases}$$

条件分布

条件分布

- 条件分布列 $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  (注： $p_{\cdot j} = \sum\limits_{i} p_{ij}$)
- 条件密度函数 $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$
- 条件分布函数

$$F(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i \leq x} P(X = x_i | Y = y) \\ \int_{-\infty}^{x} p(t|y)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(t,y)}{p_Y(y)} dt \end{cases}$$

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=$$

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y) \\ \end{cases}$$

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

(1)$E(X|Y=y)$ 是 y 的函数,

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_iP(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

(1)$E(X|Y=y)$ 是 y 的函数，所以记 $g(y)=E(X|Y=y)$。

(2) 进一步将条件期望看成是随机变量 Y 的函数，

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

(1)$E(X|Y=y)$ 是 y 的函数，所以记 $g(y)=E(X|Y=y)$。

(2) 进一步将条件期望看成是随机变量 Y 的函数，记为 $g(Y)=E(X|Y)$,

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

(1)$E(X|Y=y)$ 是 y 的函数，所以记 $g(y)=E(X|Y=y)$。

(2) 进一步将条件期望看成是随机变量 Y 的函数，记为 $g(Y)=E(X|Y)$, 则 $E(X|Y=y)$ 看成是 $Y=y$ 时 $E(X|Y)$ 的一个取值。

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

(1)$E(X|Y=y)$ 是 y 的函数，所以记 $g(y)=E(X|Y=y)$。

(2) 进一步将条件期望看成是随机变量 Y 的函数，记为 $g(Y)=E(X|Y)$, 则 $E(X|Y=y)$ 看成是 $Y=y$ 时 $E(X|Y)$ 的一个取值。

定理 3.5.1 重期望公式

条件数学期望

定义 3.5.4

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum_i x_i P(X=x_i|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|y)dx\end{cases}$$

注意点

(1)$E(X|Y=y)$ 是 y 的函数，所以记 $g(y)=E(X|Y=y)$。

(2) 进一步将条件期望看成是随机变量 Y 的函数，记为 $g(Y)=E(X|Y)$，则 $E(X|Y=y)$ 看成是 $Y=y$ 时 $E(X|Y)$ 的一个取值。

定理 3.5.1 重期望公式

$$E(X)=E(E(X|Y))$$

课本 P 205: 1，3，4，8，10，12