《 运筹学试卷 A 》参考答案

一、对线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\max\ z = 4x_1 + 5x_2 + c_3x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\
& a_{21}x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 18 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

在第 1 个约束中引入人工变量 x_4，第 2 个约束中引入松弛变量 x_5，采用大 M 法利用单纯形表求解得到了最优解，单纯形表完整的迭代过程见下表：

$c_j \to$			4	5	c_3	$-M$	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-M$	x_4	b_1	1	[2]	1	1	0
0	x_5	18	a_{21}	3	2	0	1
$c_j - z_j$			$4+M$	$5+2M$	c_3+M	0	0
$c_j \to$			4	5	c_3	$-M$	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	$b_1/2$	[1/2]	1	1/2	1/2	0
0	x_5	3	$a_{21}-3/2$	0	1/2	–3/2	1
$c_j - z_j$			3/2	0	$c_3-5/2$	$-M-5/2$	0
$c_j \to$			4	5	c_3	$-M$	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	b_1	1	2	1	1	0
0	x_5	8	0	1	3/2	–1	1
$c_j - z_j$			0	–3	–2	$-M-4$	0

（1）试根据上述求解过程单纯形表，确定参数 a_{21}， b_1 和 c_3 的值，以及该问题的最优解；

（2）以上述线性规划问题为原问题，写出其对偶问题；

（3）利用对偶性质，求出对偶问题的最优解。（本题共 25 分，第 1 小题 15 分，第 2、3 小题各 5 分）

解：

（1）由最终单纯形表 x_3 的判别数 $c_3-4=-2$，得到 $c_3=2$；

由中间单纯形表右端项的初等行变换规则：$3=18-3\times\frac{b_1}{2}$，得到 $b_1=10$；

由中间单纯形表到最终单纯形表的变换规则：$a_{21}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times(-1)=0$，得到 $a_{21}=1$；

该问题的最优解：$x_1^*=10$，$x_2^*=0$，$x_3^*=0$

（2）对偶问题：

$$\begin{aligned} \min\ \ & w=10y_1+18y_2 \\ \text{s.t.}\ \ & y_1+\ \ y_2\ge 4 \\ & 2y_1+3y_2\ge 5 \\ & y_1+2y_2\ge 2 \\ & y_1\text{无约束}, y_2\ge 0 \end{aligned}$$

（3）依据互补松弛定理。在最优解处，原问题第 2 个约束为严格不等式，故 $y_2=0$。由于 $x_1^*>0$，故对偶问题第 1 个约束为等式，$y_1+y_2=4$，得到 $y_1=4$。

故对偶问题的最优解为 $y_1^*=4$，$y_2^*=0$。

二、用分支定界法求解如下整数规划问题

$$\text{IP}:\quad \left.\begin{aligned} & \max z=2x_1+3x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1+\ \ x_2\le 6 \\ & 2x_1+4x_2\le 17 \\ & x_1, x_2\ge 0 \end{aligned}\right\}\ \text{LP}$$
$$x_1, x_2\text{为整数}$$

先解其松弛问题 LP，得最优解 $x_1^*=7/2$，$x_2^*=5/2$，不满足整数要求。显然 $x_1=0$，$x_2=0$ 为问题 IP 的一个可行解。

（1）依据以上信息，给出问题 IP 最优目标函数值的初始上下界；

（2）写出针对 x_2 的分支子问题；

（3）基于上述分支子问题，完成问题 IP 的求解（提示：可用图解法），给出最

优解并更新最优目标函数值的上下界。（本题共 10 分，第 1 小题 2 分，第 2 小题 3 分，第 3 小题 5 分）

解：

（1）将松弛问题最优解代入目标函数，$z=2\times\frac{7}{2}+3\times\frac{5}{2}=14\frac{1}{2}$；

$x_1=0$，$x_2=0$为 IP 的一个可行解，对应的$z=0$；

故最优目标函数值：$0\le z^*\le 14\frac{1}{2}$

（2）分支子问题

$$B_1:\quad \begin{aligned} &\max z=2x_1+3x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+\ x_2\le 6\\ & 2x_1+4x_2\le 17\\ & x_2\le 2\\ & x_1,x_2\ge 0\\ & x_1,x_2\text{为整数}\end{aligned}\qquad\qquad B_2:\quad \begin{aligned} &\max z=2x_1+3x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+\ x_2\le 6\\ & 2x_1+4x_2\le 17\\ & x_2\ge 3\\ & x_1,x_2\ge 0\\ & x_1,x_2\text{为整数}\end{aligned}$$

（3）用图解法（略）求得：

B_1松弛问题最优解$x_1=4,x_2=2$，恰好满足整数要求，不必再探测，对应目标值$z=14$；更新最优目标函数值上下界：$14\le z^*\le 14\frac{1}{2}$

B_2松弛问题最优解$x_1=5/2,x_2=3$，不满足整数要求。

对应目标值$z=2\times\frac{5}{2}+3\times 3=14$，不大于已知的$z^*$的下界，故不可能找到更好的解，不必再探测。

所有子问题探测完毕，得到最优解：$x_1=4,x_2=2$

三、已知约束非线性优化问题

$$\begin{aligned} \min\quad & f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\\ \text{s.t.}\quad & x_2-(x_1-2)^2\le 0\\ & x_2-x_1=0\end{aligned}$$

（1）判断该问题是否为凸规划；

（2）写出该问题的 Kuhn-Tucker 条件；

（3）利用 Kuhn-Tucker 条件，求出该问题的 K-T 点和最优解。（本题共 15 分，每小题 5 分）

解：

（1）易证不等式约束函数 $x_2-(x_1-2)^2$ 为凹函数，满足 $x_2-(x_1-2)^2\le 0$ 的点的集合不是凸集，故该问题不是凸规划。

（2）重写原问题，以便套用 K-T 条件：

$$\begin{aligned} \min\quad & f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2 \\ \text{s.t.}\quad & g(x)=(x_1-2)^2-x_2\ge 0 \\ & h(x)=x_1-x_2=0 \end{aligned}$$

K-T 条件：

$$\begin{cases} 2(x_1-2)-2\gamma(x_1-2)-\lambda=0 \\ 2(x_2-3)+\gamma+\lambda=0 & \text{（梯度条件）} \\ \gamma[(x_1-2)^2-x_2=0 & \text{（互补松弛条件）} \\ \gamma\ge 0 & \text{（不等式约束乘子非负条件）} \\ (x_1-2)^2-x_2\ge 0 \\ x_1-x_2=0 & \text{（可行性条件，可不写）} \end{cases}$$

（3）讨论：

① $\gamma>0$

$$\begin{cases} (x_1-2)^2-x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4 \end{cases}$$

根据梯度条件可求出配套的 Lagrange 乘子：$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ \gamma=2 \\ \lambda=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4 \\ \gamma=2 \\ \lambda=-4 \end{cases}$

这两个点均为 K-T 点。

② $\gamma=0$

$$\begin{cases} 2(x_1-2)-\lambda=0 \\ 2(x_2-3)+\lambda=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5/2 \\ x_2=5/2 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

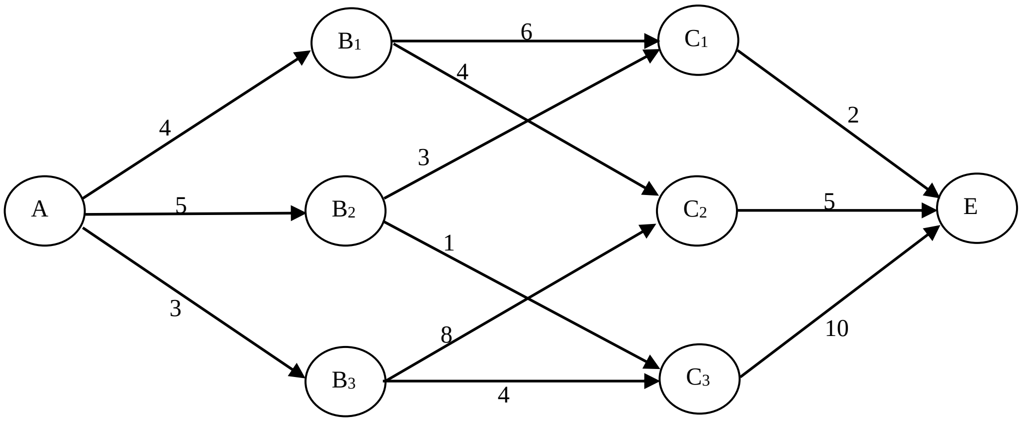
检查可行性：$(x_1-2)^2-x_2=(\frac{5}{2}-2)^2-\frac{5}{2}=-\frac{9}{4}<0$，不满足不等式约束，故不可能是

K-T 点。

因此，该问题有两个 K-T 点：$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$。

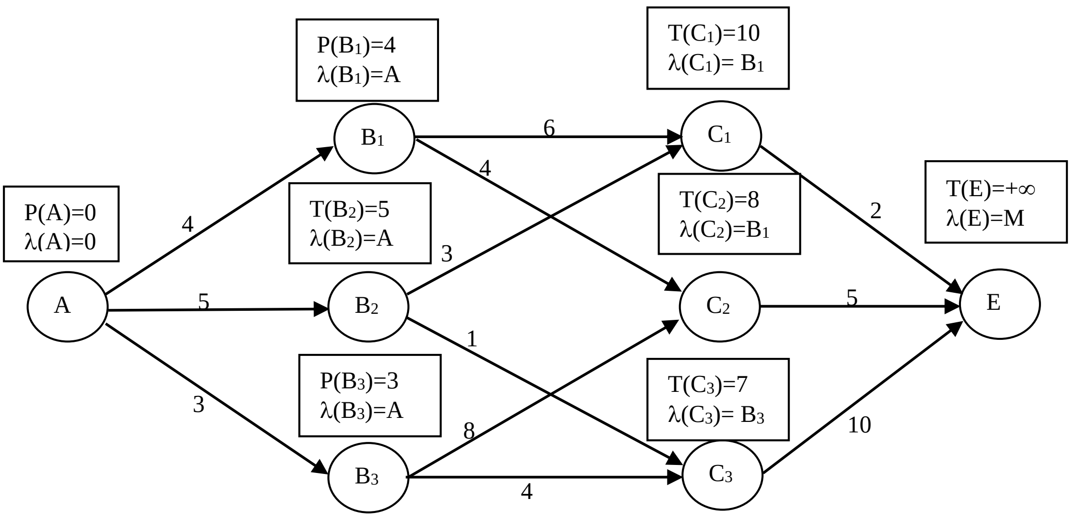
它们具有相同的目标函数值，故都是该问题最优解，最优目标值为 5。

四、已知 A 点到 E 点单行线交通网络如下图所示，箭线旁的数字表示该线路的距离。



(1)用动态规划的逆推解法求出从 A 点到 E 点的最短路，要求列出计算过程。

(2)用图论中求最短路的 Dijkstra 算法求 A 点到 E 点的最短路，在算法执行过程中得到如下结果（P 代表永久标号，T 代表临时标号，λ代表回溯指针）：



指出下一步迭代应将哪个点的临时标号 T 修改为永久标号 P，列出算法终止时各点的标号值及指针（λ）值（不要求列出计算过程）。（本题共 20 分，每小题 10 分）

解：

（1）分 3 个阶段，最优指标值为各点到 E 点的最短距离。

初始状态 $s_1 = A$，状态转移方程 $s_{k+1} = u_k(s_k)$

当 $k=3$ 时：

$f_3(C_1)=2$， $u_3(C_1)=E$

$f_3(C_2)=5$， $u_3(C_2)=E$

$f_3(C_3)=10$， $u_3(C_3)=E$

当 $k=2$ 时：

$f_2(B_1)=\min\{6+f_3(C_1),4+f_3(C_2)\}=\min\{6+2,4+5\}=8$， $u_2(B_1)=C_1$

$f_2(B_2)=\min\{3+f_3(C_1),1+f_3(C_3)\}=\min\{3+2,1+10\}=5$， $u_2(B_2)=C_1$

$f_2(B_3)=\min\{8+f_3(C_2),4+f_3(C_3)\}=\min\{8+5,4+10\}=13$， $u_2(B_3)=C_2$

当 $k=1$ 时：

$f_1(A)=\min\{4+f_2(B_1),5+f_2(B_2),3+f_2(B_3)\}=\min\{4+8,5+5,3+13\}=10$， $u_1(A)=B_2$

故 A 到 E 的最短距离为 10，最短路为： $A\to B_2\to C_1\to E$ 。

（2）下一步迭代应将 B_2 点的临时标号 T 修改为永久标号 P。

算法终止时各点的标号值及指针（λ）值如下：

$P(A)=0$； $P(B_1)=4$， $P(B_2)=5$， $P(B_3)=3$； $P(C_1)=8$， $P(C_2)=8$， $P(C_3)=6$；
$P(E)=10$

$\lambda(A)=0$；$\lambda(B_1)=A$，$\lambda(B_2)=A$，$\lambda(B_3)=A$；$\lambda(C_1)=B_2$，$\lambda(C_2)=B_1$，$\lambda(C_3)=B_2$；
$\lambda(E)=C_1$

五、某杂货店设置了一个小型停车场，有 3 个车位。杂货店不营业时停车场关闭。在营业时间，当停车场未满时，车辆可进入停车场使用停车位，平均每小时有两个停车位被占用；若停车场已满，则到达的车辆会离开且不再回来。据统计，0，1，2，3 个停车位被占用的概率分别为：

$$P_0 = 0.2,\quad P_1 = 0.3,\quad P_2 = 0.3,\quad P_3 = 0.2$$

（1）将停车场看作一个排队系统，说明该排队系统中顾客是什么？服务台又是什么？有多少个服务台？系统容量有多大？

（2）确定该系统的基本性能指标：期望队长 L_s，期望排队长 L_q，顾客平均等待时间 W_q，顾客平均逗留时间 W_s。

（3）该杂货店对驾车购物顾客的损失率是多少？（本题共 10 分，第 1 小题 2 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 2 分）

解：

（1）该排队系统中顾客是车辆，服务台是停车位，有 3 个服务台，系统容量为 3。

（2）期望队长 $L_s = \sum_{n=0}^{3} nP_n = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = 0.3 + 2\times 0.3 + 3\times 0.2 = 1.5$

期望排队长 L_q=0

顾客等待时间 $W_q = 0$

顾客平均逗留时间 $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} = 0 + \dfrac{1}{2} = 0.5$（小时）

（3）该杂货店对驾车购物顾客的损失率就是停车场满员的概率 0.2。

六、设矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 中，局中人 I 策略集为 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，局中人 II 策略集为 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$，局中人 I 的赢得矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$。

（1）用图解法求解该矩阵对策，给出局中人 II 的最优策略及矩阵对策的值；

（2）根据（1）的结果，确定局中人 I 的最优策略。（本题共 10 分，每小题 5 分）

解：

（1）令局中人 II 的混合策略为 $(y, 1-y)^T$，图解法（略）得到 $y = 2/5$。

局中人 II 的最优策略为$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)^T$，对策的值$V_G=\frac{7}{5}$。

（2）设局中人 I 的混合策略为$(x_1,x_2,x_3)^T$当局中人 I 采取策略α_1，期望赢得为$4\times\frac{2}{5}-3\times\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}<V_G$（严格不等式），故$x_1=0$。（或由图直接得出此结论亦可）

由于局中人 II 的最优策略$y_1>0$，$y_2>0$，故有$\begin{cases}2x_2-x_3=V_G\\x_2+3x_3=V_G\end{cases}$，在加上概率归一条件$x_2+x_3=1$，解得$\begin{cases}x_2=4/5\\x_2=1/5\end{cases}$

故局中人 I 的最优策略为$\left(0,\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)^T$（通过其它思路求出亦可）

七、已知决策收益表如下：

状态	状态 1	状态 2	状态 3
概率	0.3	0.5	0.2
方案 1	20	12	8
方案 2	16	a	b
方案 3	12	12	12

a,b为两个待定参数，$a>12$，$b>8$。已知此问题的完全情报价值为 1.6，拥有完全情报时的期望收益为 16.4。若按最大期望收益准则决策，其结果为选择方案 2。试求 a、b 之值。(本题共 10 分)

解：

如果拥有完全情报，则对应状态 1、状态 2、状态 3 时，所获得的收益分别为：max(20,16,12)=20，max(12,a,12)=a，max(8, b,12)=max(b,12)。

则完全情报下的期望收益为：EVWPI=0.3×20+0.5×a+0.2×max(b,12)

只拥有原始情报时，方案 2 为最优方案，则期望收益为：

EVWOI=0.3×16+0.5a+0.2b

完全情报价值 EVPI=1.6，拥有完全情报时的期望收益 EVWPI=16.4，因此：

EVWPI=0.3×20+0.5×a+0.2×max(b,12)=16.4

EVPI=EVWPI- EVWOI=16.4-(0.3×16+0.5a+0.2b)=1.6

上述两式化简为：

$0.5a+0.2\times\max(b,12)=10.4$

$0.5a+0.2b=10$

分情况讨论：

（1）$b>12$，则有：$0.5a+0.2b=10.4$ 且 $0.5a+0.2b=10$，不可能成立，舍去。

（2）$b\leq 12$，则有：$0.5a+0.2\times 12=10.4$ 且 $0.5a+0.2b=10$，得到 $a=16$ and $b=10$。

综上，$a=16$, $b=10$。