第四章
大数定律与中心极限定理

第三节

大数定律

Overview

前言

- 讨论: “频率是概率的

前言

- 讨论: “频率是概率的近似值”,

前言

- 讨论: “频率是概率的近似值”, “概率是频率的

前言

- 讨论: “频率是概率的近似值”, “概率是频率的稳定值”

前言

- 讨论: “频率是概率的近似值”， “概率是频率的稳定值”
- 大数定律是研究什么么的?

前言

- 讨论: “频率是概率的近似值”， “概率是频率的稳定值”
- 大数定律是研究什么的？频率与概率之间关系

前言

如何通过频率来确定概率？

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则

前言

如何通过频率来确定概率?

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布?

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n, p)$.

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n,p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n,p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n) =$

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n,p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n)=np$,

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n, p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n) = np$, $Var(S_n) =$

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n, p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n) = np$, $Var(S_n) = np(1-p)$

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n, p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n) = np,\ Var(S_n) = np(1-p)$
问题 3. 频数的数学期望和方差分别为？

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n,p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n)=np,\ Var(S_n)=np(1-p)$
问题 3. 频数的数学期望和方差分别为？
$E(\frac{S_n}{n})=$

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n, p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n) = np$, $Var(S_n) = np(1-p)$
问题 3. 频数的数学期望和方差分别为？
$E(\frac{S_n}{n}) = p$,

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n,p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n)=np,\ Var(S_n)=np(1-p)$
问题 3. 频数的数学期望和方差分别为？
$E(\frac{S_n}{n})=p,\ Var(\frac{S_n}{n})=$

前言

如何通过频率来确定概率？

记 A 为随机事件，S_n 为 n 重伯努利试验中随机事件 A 发生的次数，则事件 A 出现的频率为：$\frac{S_n}{n}$.

记一次试验中 A 发生的概率为 p, 则
问题 1. S_n 服从什么分布？二项分布 $b(n, p)$.
问题 2. S_n 的数学期望和方差分别为？
$E(S_n) = np,\ Var(S_n) = np(1-p)$
问题 3. 频数的数学期望和方差分别为？
$E(\frac{S_n}{n}) = p,\ Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{p(1-p)}{n}$

前言

讨论：当 $n \to \infty$ 时，频率 $\frac{S_n}{n}$ 与概率 p 的极限状态.

根据数学分析的数列极限概念，则数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的极限为 p 意味着对任意的 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大的时候，绝对偏差必定会小于 ϵ, 即：

$$|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon$$

.

但是，即使充分小的 $\epsilon > 0$ 和很大的 n, 也不能指望对任意的样本点 $\omega \in \Omega$ 使得上述不等式永远成立。

前言

讨论：当 $n \to \infty$ 时，频率 $\frac{S_n}{n}$ 与概率 p 的极限状态.

根据数学分析的数列极限概念，则数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的极限为 p 意味着对任意的 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大的时候，绝对偏差必定会小于 ϵ, 即：

$$|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon$$

.

但是，即使充分小的 $\epsilon > 0$ 和很大的 n, 也不能指望对任意的样本点 $\omega \in \Omega$ 使得上述不等式永远成立。

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| \geq \epsilon\} = 0$$

前言

讨论：当 $n \to \infty$ 时，频率 $\frac{S_n}{n}$ 与概率 p 的极限状态.

根据数学分析的数列极限概念，则数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的极限为 p 意味着对任意的 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大的时候，绝对偏差必定会小于 ϵ, 即：

$$|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon$$

.

但是，即使充分小的 $\epsilon > 0$ 和很大的 n, 也不能指望对任意的样本点 $\omega \in \Omega$ 使得上述不等式永远成立。

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| \geq \epsilon\} = 0$$

大数定律对上述讨论做了很好的解释。

前言

- 给出几种大数定律:

前言

- 给出几种大数定律：
  伯努利大数定律、切比雪夫大数定律、马尔可夫大数定律、辛钦大数定律.

伯努利大数定律

定理 4.2.1 伯努利大数定律

设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，每次试验中事件 A 出现的概率 $P(A) = p$,

伯努利大数定律

定理 4.2.1 伯努利大数定律

设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，每次试验中事件 A 出现的概率 $P(A) = p$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

伯努利大数定律

定理 4.2.1 伯努利大数定律

设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，每次试验中事件 A 出现的概率 $P(A)=p$, 则对任意的 $\epsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\epsilon\}=1$$

注意

伯努利大数定律

注意

伯努利大数定律说明：随着 n 的增大，

注意

伯努利大数定律说明：随着 n 的增大，事件 A 发生的频数 $\frac{S_n}{n}$ 与概率 p 的偏差 $|\frac{S_n}{n} - p|$ 大于预先给定的精度 ϵ 的可能性

伯努利大数定律

注意

伯努利大数定律说明：随着 n 的增大，事件 A 发生的频数 $\frac{S_n}{n}$ 与概率 p 的偏差 $|\frac{S_n}{n} - p|$ 大于预先给定的精度 ϵ 的可能性越来越小。

伯努利大数定律

注意

伯努利大数定律说明：随着 n 的增大，事件 A 发生的频数 $\frac{S_n}{n}$ 与概率 p 的偏差 $|\frac{S_n}{n} - p|$ 大于预先给定的精度 ϵ 的可能性越来越小。这就是频数趋于概率的定义。

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $Var(X)$ 都存在，则对于任意 $\epsilon > 0$, 有
$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$

注意

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $Var(X)$ 都存在，则对于任意 $\epsilon > 0$, 有
$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$

注意

1. 给出了随机变量 X 与数学期望之间差距概率的估计方式；

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $Var(X)$ 都存在，则对于任意 $\epsilon > 0$, 有
$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$

注意

1. 给出了随机变量 X 与数学期望之间差距概率的估计方式；
2. 适用性比较广；

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $Var(X)$ 都存在，则对于任意 $\epsilon > 0$, 有
$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$

注意

1. 给出了随机变量 X 与数学期望之间差距概率的估计方式；
2. 适用性比较广；
3. 误差较大

例：设 $X \sim U(0,10)$,

例：设 $X \sim U(0,10)$, 求（1）$E(X)$, $Var(X)$;

例：设 $X \sim U(0,10)$, 求（1）$E(X)$, $Var(X)$; (2) 当 $\epsilon = 4$ 时, 求随机变量 X 与数学期望之间的差距大于给定 ϵ 的可能性？

切比雪夫不等式

例：设 $X \sim U(0,10)$, 求（1）$E(X)$, $Var(X)$; (2) 当 $\epsilon = 4$ 时, 求随机变量 X 与数学期望之间的差距大于给定 ϵ 的可能性？

例：S_n 是连续抛一枚硬币 n 次中出现正面的次数，求

例：设 $X \sim U(0,10)$, 求（1）$E(X)$, $Var(X)$; (2) 当 $\epsilon = 4$ 时, 求随机变量 X 与数学期望之间的差距大于给定 ϵ 的可能性？

例：S_n 是连续抛一枚硬币 n 次中出现正面的次数，求正面出现的频率与概率 0.5 的偏差大于预先给定的精度 ϵ (若 $\epsilon = 0.01$) 的可能性？

切比雪夫不等式

例：设 $X \sim U(0,10)$, 求（1）$E(X)$, $Var(X)$; (2) 当 $\epsilon = 4$ 时, 求随机变量 X 与数学期望之间的差距大于给定 ϵ 的可能性？

例：S_n 是连续抛一枚硬币 n 次中出现正面的次数，求正面出现的频率与概率 0.5 的偏差大于预先给定的精度 ϵ (若 $\epsilon = 0.01$) 的可能性？

例：如果 $Var(X) = 0$, 证明：$P\{X = E(X)\} = 1.$

例：设 $X \sim U(0,10)$, 求（1）$E(X)$, $Var(X)$; (2) 当 $\epsilon = 4$ 时, 求随机变量 X 与数学期望之间的差距大于给定 ϵ 的可能性？

例：S_n 是连续抛一枚硬币 n 次中出现正面的次数，求正面出现的频率与概率 0.5 的偏差大于预先给定的精度 ϵ (若 $\epsilon = 0.01$) 的可能性？

例：如果 $Var(X) = 0$, 证明：$P\{X = E(X)\} = 1$.

定义 4.3.1 大数定律:

若随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足：

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < \epsilon\} = 1$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

常用的几个大数定律

定理 4.2.2 切比雪夫大数定律

$\{X_n\}$ 两两不相关，且 $\{X_n\}$ 方差存在，有共同的上界, 即：$Var(X_i) \le c$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$
则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

注意

常用的几个大数定律

定理 4.2.2 切比雪夫大数定律

$\{X_n\}$ 两两不相关，且 $\{X_n\}$ 方差存在，有共同的上界, 即：$Var(X_i) \leq c$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$
则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

注意

1. 如果 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且方差有限，

常用的几个大数定律

定理 4.2.2 切比雪夫大数定律

$\{X_n\}$ 两两不相关，且 $\{X_n\}$ 方差存在，有共同的上界, 即：$Var(X_i) \le c$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$
则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

注意

1. 如果 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且方差有限，则 $\{X_n\}$ 必定服从大数定律。

定理 4.2.2 切比雪夫大数定律

$\{X_n\}$ 两两不相关，且 $\{X_n\}$ 方差存在，有共同的上界, 即：$Var(X_i) \leq c$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$
则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

注意

1. 如果 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且方差有限，则 $\{X_n\}$ 必定服从大数定律。
2. 伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例。

定理 4.2.3 马尔可夫大数定律

若随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足:

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n}X_i) \to 0 \text{ (马尔可夫条件)}$$

则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

定理 4.2.4 辛钦大数定律

若随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 X_n 的数学期望存在
则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

注意点

1. 伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例
2. 切比雪夫大数定律是马尔可夫大数定律的特例
3. 伯努利大数定律是辛钦大数定律的特例

作业

课本 P236: 1，2，3，4