第四章
大数定律与中心极限定理

第二节

特征函数

Overview

前言

特征函数来源

前言

特征函数来源于傅里叶变换，

特征函数来源于傅里叶变换，是处理概率论问题的有力工具，

前言

特征函数来源于傅里叶变换，是处理概率论问题的有力工具，其作用在于：

前言

特征函数来源于傅里叶变换，是处理概率论问题的有力工具，其作用在于：

- 可将独立随机变量和的分布的卷积运算（积分运算）转换成乘法运算

前言

特征函数来源于傅里叶变换，是处理概率论问题的有力工具，其作用在于：

- 可将独立随机变量和的分布的卷积运算（积分运算）转换成乘法运算
- 可将求分布的各阶原点矩（积分运算）转换成微分运算

前言

特征函数来源于傅里叶变换，是处理概率论问题的有力工具，其作用在于：

- 可将独立随机变量和的分布的卷积运算（积分运算）转换成乘法运算
- 可将求分布的各阶原点矩（积分运算）转换成微分运算
- 可将求随机变量序列的极限分布转换成一般的函数极限问题

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|$,

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|$, $|Z|^2 =$

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|$, $|Z|^2 = X^2 + Y^2$,

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|$, $|Z|^2 = X^2 + Y^2$, $Z\bar{Z} = |Z|^2$.

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|, |Z|^2 = X^2 + Y^2, Z\bar{Z} = |Z|^2$.
3. 复随机变量的数学期望：

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z=Z(\omega)=X(\omega)+iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega)=X(\omega)-iY(\omega)$
2. $Z(\omega)=X(\omega)+iY(\omega)$ 的模为 $|Z|$, $|Z|^2=X^2+Y^2$, $Z\bar{Z}=|Z|^2$.
3. 复随机变量的数学期望：$E(Z)$

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|, |Z|^2 = X^2 + Y^2, Z\bar{Z} = |Z|^2$.
3. 复随机变量的数学期望：$E(Z) = E(X) + iE(Y)$.

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|$, $|Z|^2 = X^2 + Y^2$, $Z\bar{Z} = |Z|^2$.
3. 复随机变量的数学期望：$E(Z) = E(X) + iE(Y)$.
4. 相互独立: $Z_1(\omega) = X_1(\omega) + iY_1(\omega)$ 和 $Z_2(\omega) = X_2(\omega) + iY_2(\omega)$,

复随机变量定义

定义 4.1.0

复随机变量定义为 $Z = Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$,
其中 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实随机变量.

1. $Z(\omega)$ 的复共轭随机变量：$\bar{Z}(\omega) = X(\omega) - iY(\omega)$
2. $Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ 的模为 $|Z|, |Z|^2 = X^2 + Y^2, Z\bar{Z} = |Z|^2$.
3. 复随机变量的数学期望：$E(Z) = E(X) + iE(Y)$.
4. 相互独立: $Z_1(\omega) = X_1(\omega) + iY_1(\omega)$ 和 $Z_2(\omega) = X_2(\omega) + iY_2(\omega)$，当且仅当 (X_1, Y_1) 与 (X_2, Y_2) 相互独立。

特征函数的定义

定义 4.1.1

设 X 是一随机变量，称 $\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < \infty$

特征函数的定义

定义 4.1.1

设 X 是一随机变量，称 $\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < \infty$ 为 X 的特征函数.

特征函数的定义

定义 4.1.1

设 X 是一随机变量，称 $\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < \infty$ 为 X 的特征函数.

注意点 (1)：

特征函数的定义

定义 4.1.1

设 X 是一随机变量，称 $\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < \infty$ 为 X 的特征函数.

注意点 (1)：
1. 任一随机变量的特征函数总是有的 $(|e^{itX}| = 1)$.

特征函数的定义

定义 4.1.1

设 X 是一随机变量，称 $\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < \infty$ 为 X 的特征函数.

注意点 (1)：
1. 任一随机变量的特征函数总是有的 $(|e^{itX}| = 1)$.
2. $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位.

特征函数的定义

定义 4.1.1

设 X 是一随机变量，称 $\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < \infty$ 为 X 的特征函数.

注意点 (1)：
1. 任一随机变量的特征函数总是有的 $(|e^{itX}| = 1)$.
2. $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位.

注意点 (2)

特征函数的定义

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时,

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty < t < \infty$

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty < t < \infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty<t<\infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$, $-\infty<t<\infty$

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k}p_k$, $-\infty<t<\infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)dx$, $-\infty<t<\infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

特征函数的定义

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty < t < \infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$, $-\infty < t < \infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

注意点 (3)

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty < t < \infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$, $-\infty < t < \infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

注意点 (3)

特征函数的计算中用到复变函数，为此注意

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}p_k$, $-\infty<t<\infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx$, $-\infty<t<\infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

注意点 (3)

特征函数的计算中用到复变函数，为此注意

1. 欧拉公式：

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty<t<\infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$, $-\infty<t<\infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

注意点 (3)

特征函数的计算中用到复变函数，为此注意

1. 欧拉公式： $e^{itx}=\cos(tx)+i\sin(tx)$
2. 复数的共轭：

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty < t < \infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$, $-\infty < t < \infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

注意点 (3)

特征函数的计算中用到复变函数，为此注意

1. 欧拉公式：$e^{itx}=\cos(tx)+i\sin(tx)$
2. 复数的共轭：$\overline{a+bi}=a-bi$
3. 复数的模：

特征函数的定义

注意点 (2)

1. 当 X 为离散随机变量时, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$, $-\infty < t < \infty$
2. 当 X 为连续随机变量时,$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$, $-\infty < t < \infty$

这是 $p(x)$ 的傅里叶变换

注意点 (3)

特征函数的计算中用到复变函数，为此注意

1. 欧拉公式：$e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$
2. 复数的共轭：$\overline{a+bi} = a - bi$
3. 复数的模：$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

常用分布的特征函数

P219:

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0-1 分布：

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:
9. 负二项分布:

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0–1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:
9. 负二项分布:
10. 正态分布:

常用分布的特征函数

P219:

1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:
9. 负二项分布:
10. 正态分布:
11. 伽马分布:

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：
2. 0–1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:
9. 负二项分布:
10. 正态分布:
11. 伽马分布:
12. $\mathcal{X}^2$:

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:
9. 负二项分布:
10. 正态分布:
11. 伽马分布:
12. $\mathcal{X}^2$:
13. 贝塔分布:

常用分布的特征函数

P219:
1. 单点分布：
2. 0-1 分布：
3. 二项分布：
4. 泊松分布：
5. 均匀分布:
6. 标准正态分布:
7. 指数分布:
8. 几何分布:
9. 负二项分布:
10. 正态分布:
11. 伽马分布:
12. $\mathcal{X}^2$:
13. 贝塔分布:
14. 柯西分布

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- 性质 4.1.5 若 $E(X^l)$ 存在，X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可 l 次求导，且 $1 \leq k \leq l$, 则

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- 性质 4.1.5 若 $E(X^l)$ 存在，X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可 l 次求导，且 $1 \leq k \leq l$, 则 $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- 性质 4.1.5 若 $E(X^l)$ 存在，X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可 l 次求导，且 $1 \leq k \leq l$, 则 $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

上式提供了一条求随机变量的各阶距，

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- 性质 4.1.5 若 $E(X^l)$ 存在，X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可 l 次求导，且 $1 \le k \le l$, 则 $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

上式提供了一条求随机变量的各阶距，进而可以求出数学期望和方差。

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- 性质 4.1.5 若 $E(X^l)$ 存在，X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可 l 次求导，且 $1 \leq k \leq l$, 则 $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

  上式提供了一条求随机变量的各阶距，进而可以求出数学期望和方差。
  $E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i}$

特征函数的性质

- 性质 4.1.1 $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- 性质 4.1.2 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- 性质 4.1.3 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
- 性质 4.1.4 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- 性质 4.1.5 若 $E(X^l)$ 存在，X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可 l 次求导，且 $1 \leq k \leq l$, 则 $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

  上式提供了一条求随机变量的各阶距，进而可以求出数学期望和方差。
  $E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i}$
  $Var(X) = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2.$

特征函数的定理

- 定理 4.1.1 (一致连续性)

特征函数的定理

- 定理 4.1.1 (一致连续性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续。

特征函数的定理

- 定理 4.1.1 (一致连续性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续。
- 定理 4.1.2 (非负定性)

特征函数的定理

- 定理 4.1.1 (一致连续性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续。
- 定理 4.1.2 (非负定性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的，即：对任意正整数 n 及 n 个实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 和 n 个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，有：

特征函数的定理

- 定理 4.1.1 (一致连续性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续。
- 定理 4.1.2 (非负定性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的，即：对任意正整数 n 及 n 个实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 和 n 个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$， 有：
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k - t_j)z_k z_j \geq 0$$

特征函数的定理

- 定理 4.1.1 (一致连续性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续。
- 定理 4.1.2 (非负定性) 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的，即：对任意正整数 n 及 n 个实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有：
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k z_j \geq 0$$
- 定理 4.1.3 逆转公式: 设 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为随机变量 X 的分布函数和特征函数，则对 $F(x)$ 的任意两个连续点 $x_1<x_2$, 有：
$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性)

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性) 对 $F(x)$ 的每一个连续点 x, 当 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，由逆转公式得：

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性) 对 $F(x)$ 的每一个连续点 x, 当 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，由逆转公式得：
$$F(x)=\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$$

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性) 对 $F(x)$ 的每一个连续点 x, 当 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，由逆转公式得：
$$F(x) = \lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$$
- 定理 4.1.5 (连续场合)

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性) 对 $F(x)$ 的每一个连续点 x, 当 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，由逆转公式得：
$$F(x) = \lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$$
- 定理 4.1.5 (连续场合) 若 X 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $\varphi(x)$,

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性) 对 $F(x)$ 的每一个连续点 x, 当 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，由逆转公式得：
$$F(x)=\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$$
- 定理 4.1.5 (连续场合) 若 X 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $\varphi(x)$, 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, 则

特征函数的定理 (续)

- 定理 4.1.4 (唯一性) 对 $F(x)$ 的每一个连续点 x, 当 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，由逆转公式得：
$F(x)=\lim\limits_{y\to-\infty}\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$
- 定理 4.1.5 (连续场合) 若 X 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $\varphi(x)$, 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, 则
$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$

作业

课本 P228: 1, 2, 3, 4