# 《运筹学试卷 B》参考答案

一、用单纯形法求解某线性规划问题得到最终单纯形表

| $c_j$ | 基变量 | 50 | 40 | 10 | 60 | ***b*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| $a$ | $c$ | 0 | 1 | 1/2 | 1 | 6 |
| $b$ | $d$ | 1 | 0 | 1/4 | 2 | 4 |
| | $c_j$-$z_j$ | 0 | 0 | $e$ | $f$ | $g$ |

（1） 给出 $a,b,c,d,e,f,g$ 的值或表达式；

（2） 指出原问题是求目标函数的最大值还是最小值；

（3） 用 $a+\Delta a$，$b+\Delta b$ 分别代替 $a$ 和 $b$ ，仍然保持上表是最优单纯形表，求 $\Delta a$，$\Delta b$ 满足的范围。（本题共 15 分，第 1 小题 7 分，第 2 小题 3 分，第 3 小题 5 分）

**解：**

（1）根据基矩阵的位置，可知 $c$ 表示 $x_2$，$d$ 表示 $x_1$，且 $x_1=4$，$x_2=6$。

立即可知系数 $a=40$，$b=50$，且最优目标函数值 $g=50x_1+40x_2=440$。

非基变量的检验数满足：

$e=10-1/2\times a-1/4\times b=-22.5$

$f=60-1\times a -2\times b=-80$

（2）因为在非基变量检验数均为负数时实现最优，所以原问题是求最大值。

（3）若 $a$ 和 $b$ 发生变化，则非基变量检验数相应变化量为：

$-1/2\times\Delta a-1/4\times\Delta b$

$-1\times\Delta a-2\times\Delta b$

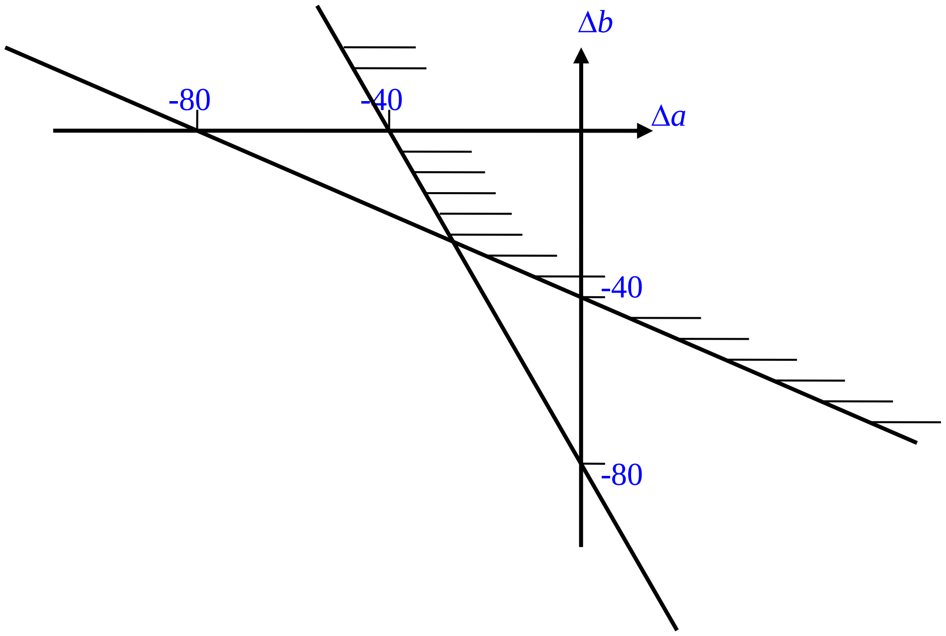
如果最优解不变，则新的检验数必须仍然非正，于是有：

$-22.5-1/2\times\Delta a-1/4\times\Delta b\le 0$

$-80-1\times\Delta a-2\times\Delta b\le 0$

最后得到：

$2\Delta a+\Delta b+80\ge 0$ 且 $\Delta a+2\Delta b+80\ge 0$，对应下图的取值范围：




二、用大 M 法求解下列线性规划问题

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 & & \le 4 \\ & x_2 & \le 6 \\ 3x_1 + & 2x_2 & = 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

（本题共 10 分）

**解：**

原问题在第 1、2 约束加上松弛变量，第 3 约束上加人工变量，成为：

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$
$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\ & x_2 & & +x_4 & & = 6 \\ 3x_1 + & 2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

初始基 $B_0 = (x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}$，启动单纯形表：

| $c_j$ | | | 3 | 5 | 0 | 0 | $-M$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $\boldsymbol{x}_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
| 0 | $x_3$ | 4 | [1] | 0 | 1 | 0 | 0 | (4) |
| 0 | $x_4$ | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | - |
| $-M$ | $x_5$ | 18 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 |
| $c_j-z_j$ | | | $(3+3M)$ | $5+2M$ | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| 0 | $x_4$ | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | $x_5$ | 6 | 0 | [2] | -3 | 0 | 1 | (3) |
| $c_j-z_j$ | | | 0 | (5) | -3 | 0 | | |
| 3 | $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 4 |
| 0 | $x_4$ | 3 | 0 | 0 | [3/2] | 1 | | (2) |
| 5 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | -3/2 | 0 | | - |
| $c_j-z_j$ | | | 0 | 0 | (9/2) | 0 | | |
| 3 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | -2/3 | | |
| 0 | $x_3$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 2/3 | | |
| 5 | $x_2$ | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| $c_j-z_j$ | | | 0 | 0 | 0 | -3 | | |

$\boldsymbol{x}^*=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$Z^*=36$。

三、已知线性规划问题

$$\max Z=3x_1+4x_2+x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 \quad +2x_2 \quad +3x_3\le 6 \\ -3x_1 \quad +x_2 \quad -4x_3\le 7 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

利用对偶理论证明其目标函数值无界。（本题共 8 分）

证明：

原问题的对偶问题是

$$\min w=6y_1+7y_2$$
$$\begin{cases} -y_1-3y_2\ge 3\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2y_1+y_2\ge 4\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 3y_1-4y_2\ge 4\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ y_1,y_2\ge 0 \end{cases}$$

由于式①不成立，所以对偶问题无可行解，由此可知原问题无最优解；又容易知 $x=[0,1,0]^{\mathrm{T}}$ 是原问题的可行解。于是，原问题有可行解却无最优解，因此原问题只能具有无界解，即目标值无界。

四、用分支定界算法求解某整数规划问题，得到下述三个子问题

B1:
$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 2x_2\\ &\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14.5\\ &\qquad 4x_1 + x_2 \le 16.5\\ &\qquad x_1 \ge 4\\ &\qquad x_1, x_2\text{非负整数}\\ &\mathbf{x}^* = (4, 1/2)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

B2:
$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 2x_2\\ &\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14.5\\ &\qquad 4x_1 + x_2 \le 16.5\\ &\qquad x_1 \le 3\\ &\qquad x_2 \le 2\\ &\qquad x_1, x_2\text{非负整数}\\ &\mathbf{x}^* = (3, 2)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

B3:
$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 2x_2\\ &\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14.5\\ &\qquad 4x_1 + x_2 \le 16.5\\ &\qquad x_1 \le 3\\ &\qquad x_2 \ge 3\\ &\qquad x_1, x_2\text{非负整数}\\ &\mathbf{x}^* = (11/4, 3)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

请完成后续求解（提示，可用图解法求解子问题）。（本题共 10 分）

**解：**

子问题 B1 的最优目标函数值为：$Z_{B1}$=3×4+2×1/2=13，

子问题 B2 的最优目标函数值为：ZB2=3×3+2×2=13，由于子问题 B2 的解已经是整数，所以原问题下界为 $Z_L$=13。

显然 $Z_{B1} \le Z_L$，因此子问题 B1 的分支被舍去，下面只需要对 B3 进行分支。

子问题 B3 分支为：

C1:
$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 2x_2\\ &\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14.5\\ &\qquad 4x_1 + x_2 \le 16.5\\ &\qquad x_1 \le 3\\ &\qquad x_2 \ge 3\\ &\qquad x_1 \le 2\\ &\qquad x_1, x_2\text{为非负整数}\end{aligned}$$

C2:
$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 2x_2\\ &\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14.5\\ &\qquad 4x_1 + x_2 \le 16.5\\ &\qquad x_1 \le 3\\ &\qquad x_2 \ge 3\\ &\qquad x_1 \ge 3\\ &\qquad x_1, x_2\text{为非负整数}\end{aligned}$$

子问题 C1，图解法可得最优解为 $\mathbf{x}^* = (2, 7/2)^{\mathrm{T}}$，最优值 $Z_{C1}$=3×2+2×7/2=13≤$Z_L$，因此 C1 分支也舍去。

子问题 C2 显然无解。

因此原问题最优解为 $\mathbf{x}^* = (3, 2)^{\mathrm{T}}$，$Z^*$=13。

五、已知约束非线性优化问题

$$\min\ f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases}(x_1 - 2)^2 - x_2 \le 0\\ -x_1 - x_2 + 3 \ge 0\end{cases}$$

（1）判断该问题是否为凸规划；

（2）写出该问题的 Kuhn-Tucker 条件；

（3）利用 Kuhn-Tucker 条件，求出该问题的 K-T 点和最优解。 （本题共 15 分，每小题 5 分）

**解：**

（1）原规划问题化为标准形式：

$$\begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{x})=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2 \\ &\text{s.t.}\quad g(\mathbf{x})=x_2-(x_1-2)^2\ge 0 \\ &\qquad\quad h(\mathbf{x})=-x_1-x_2+3\ge 0 \end{aligned}$$

目标函数、约束函数梯度为：

$$\partial f(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2(x_1-2)\\2(x_2-1)\end{bmatrix},\quad \partial g(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-2(x_1-2)\\1\end{bmatrix},\quad \partial h(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

Hesse 矩阵：

$\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}^2=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$，矩阵正定，目标函数为凸函数；

$\partial^2 g(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}^2=\begin{bmatrix}-2&0\\0&0\end{bmatrix}$，矩阵负定，非线性约束函数为凹函数；

所以原来问题是凸规划。

（2）设 $w\ge0$ 为约束 $g(\mathbf{x})\ge 0$ 的拉格朗日乘子，$v\ge0$ 为 $h(\mathbf{x})\ge 0$ 的拉格朗日乘子，问题的 KT 条件为：

$$\begin{cases} 2(x_1-2)+2w(x_1-2)+v=0 & ① \\ 2(x_2-1)-w+v=0 & ② \\ w[x_2-(x_1-2)^2]=0 & ③ \\ v(-x_1-x_2+3)=0 & ④ \\ x_2-(x_1-2)^2\ge 0 & ⑤ \\ -x_1-x_2+3\ge 0 & ⑥ \end{cases}$$

（3）求解（2）的方程，分情况讨论：

A．如果 $\boldsymbol{w=0}$ 且 $\boldsymbol{v=0}$

由方程①、②得到：$\mathbf{x}=(2,1)^{\mathrm{T}}$，且满足其余 KT 方程，因此 KT 方程组的解为 $\mathbf{x}=(2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w=0}$，$\boldsymbol{v=0}$.

B．如果 $\boldsymbol{w=0}$ 且 $\boldsymbol{v>0}$

KT 方程化为：$\begin{cases} 2(x_1-2)+v=0 & ① \\ 2(x_2-1)+v=0 & ② \\ -x_1-x_2+3=0 & ③ \end{cases}$，解得：$\mathbf{x}=(2,1)^{\mathrm{T}}$，$v=0$，这与 $v>0$ 矛盾，因此情况 B 无解。

C．如果 ***w*>0** 且 ***v*=0**

KT 方程化为：$\begin{cases} 2(x_1-2)+2w(x_1-2)=0 & ① \\ 2(x_2-1)-w=0 & ② \\ x_2-(x_1-2)^2=0 & ③ \end{cases}$

如果 $x_1 \neq 2$，则由①知 $w$=-1，这与 $w$>0 矛盾；

如果 $x_1=2$，由③知 $x_2=0$，再由②知 $w$=-1，这与 $w$>0 矛盾；

因此情况 C 无解。

D．如果 ***w*>0** 且 ***v*>0**

KT 方程化为：$\begin{cases} x_2-(x_1-2)^2=0 & ① \\ -x_1-x_2+3=0 & ② \end{cases}$，解得：$\mathbf{x}=(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{T}}$，或 $\mathbf{x}=(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{T}}$。

如果 $\mathbf{x}=(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{T}}$，则 KT 方程组中第①、②方程为：

$\begin{cases} 2(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2)+2w(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2)+v=0 & ① \\ 2(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-1)-w+v=0 & ② \end{cases}$，即：

$\begin{cases} (\sqrt{5}-1)w+v=1-\sqrt{5} & ① \\ w-v=1-\sqrt{5} & ② \end{cases}$，显然，方程①与 w>0 且 v>0 矛盾，因此不是 KT 点。

如果 $\mathbf{x}=(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{T}}$，则 KT 方程组中第①、②方程为：

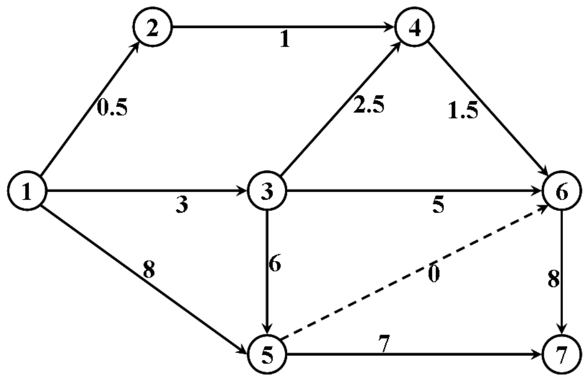
$\begin{cases} 2(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-2)+2w(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-2)+v=0 & ① \\ 2(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1)-w+v=0 & ② \end{cases}$，即：

$\begin{cases} -(1+\sqrt{5})w+v=1+\sqrt{5} & ① \\ w-v=1+\sqrt{5} & ② \end{cases}$，①+②得：

$-\sqrt{5}w=2+2\sqrt{5}$，这与 $w$>0 矛盾，因此不是 KT 点。

综上，规划问题的 KT 点为 $\mathbf{x}=(2,1)^{\mathrm{T}}$，由于原规划是凸规划，因此 KT 点也是全局最优点。

六、某项目的网络图由事项 1 开始到事项 7 结束，下图中标出了各活动的时间。



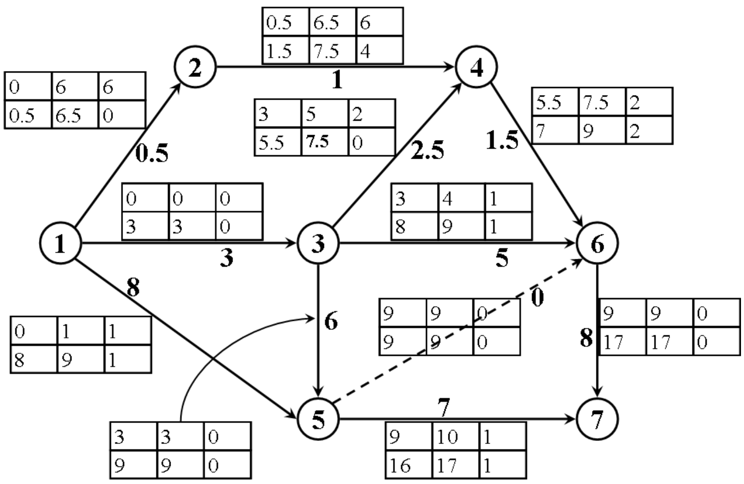

（1）按图例格式给出所有活动的最早开始时间 ES、最迟开始时间 LS、最早完成时间 EF、最迟完成时间 LF、活动总时差 TF、活动自由时差 FF；

| ES | LS | TF |
|---|---|---|
| EF | LF | |
| 图 例 | | |

（2）确定关键线路及总工期。（本题共 12 分，第 1 小题 10 分，第 2 小题 2 分）

**解：**

（1）按照计算公式，最早开始时间取决于紧前活动的最迟者，最迟完成时间取决于今后活动的最早者，结果如下：



（2）总时差为 0 的路线为关键路线：

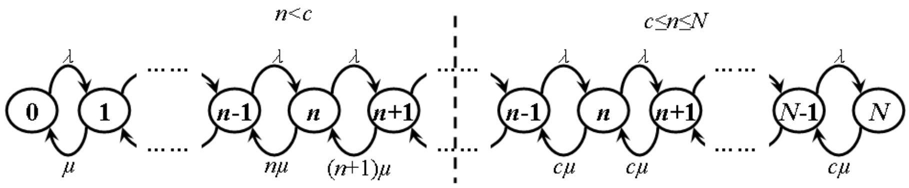
①→③→⑤→⑥→⑦

总工期：17。

七、在单队列、$c$ 个服务台的排队系统中，设系统容量为 $N$，顾客到达过程是均值为 $\lambda$ 的泊松流，每个服务台服务时间服从负指数分布，且单位时间平均服务顾客数为 $\mu$。请画出该系统的状态转移图，并列出系统有 $n$ 个顾客的概率 $P_n$ 的状态方程（不必求解）。（本题共 10 分）

**解：**

状态转移分为系统中顾客人数小于服务台个数 $c$，和介于服务台个数 $c$ 和系统容量 $N$ 之间两种情况，状态转移图：




由此得到状态转移方程为：

$$\mu P_1 = \lambda P_0$$
$$(n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + n\mu)P_n \qquad (1 \le n < c)$$
$$c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + c\mu)P_n \qquad (c \le n \le N-1)$$
$$c\mu P_N = \lambda P_{N-1}$$

八、设有局中人 I 和 II 进行的二人有限零和对策，局中人 I 的赢得矩阵如下

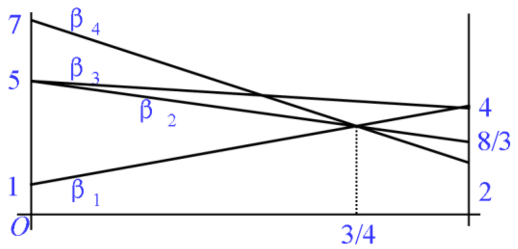
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8/3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

（1）用图解法求解局中人 I 的最优策略

（2）证明：局中人 II 有无穷多最优策略。（本题共 10 分，每小题各 5 分）

**解：**

（1）该矩阵不存在鞍点，因此需要求混合策略。使用图解法，最优策略图解如下：




容易求得局中人 I 的最优混合策略为 $x^*=(3/4,1/4)^T$, $V_G=13/4$。

（2）证明：

设局中人 II 的混合策略为$(y_1,y_2,y_3,y_4)$，局中人 II 的最优策略应使得其期望损失等于 I 的最优赢得，于是有：

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 = 1 \\ y_1 + 5\times y_2 + 7y_4 = 13/4 \\ 4y_1 + 8/3\times y_2 + 2y_4 = 13/4 \end{cases}$$，该方程系数矩阵行列式化为三角矩阵为：

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，显然其行列式值为 0，因此该方程组有无穷多解，即局中人 II 有无穷多最优策略。

九、某服装厂设计了一款新式服装准备推向全国。如果直接大批量生产与销售，主观估计成功与失败的概率各占一半，若成功可获得净利润 1200 万元，失败则会总亏损 500 万元。如果取消生产销售计划，则会损失设计与准备费用 40 万元。为稳妥起见，可先小批生产试销，试销的投入为 45 万元。据历史统计资料，试销成功与失败的概率分别为 0.6 和 0.4。如果试销成功，则大批生产销售成功的概率提高到 0.7；如果试销失败，则大批生产销售成功的概率只有 0.2。

（1）画出该问题的决策树，用 EMV 准则确定最优决策和期望收益；

（2）计算试销所获得额外信息的期望价值。(本题共 10 分，每小题 5 分)

**解：**

(1) 决策树及计算过程见下图。

最优决策：先进行试销。若试销成功，则大量生产销售；若试销失败，则取消大量生产销售计划。

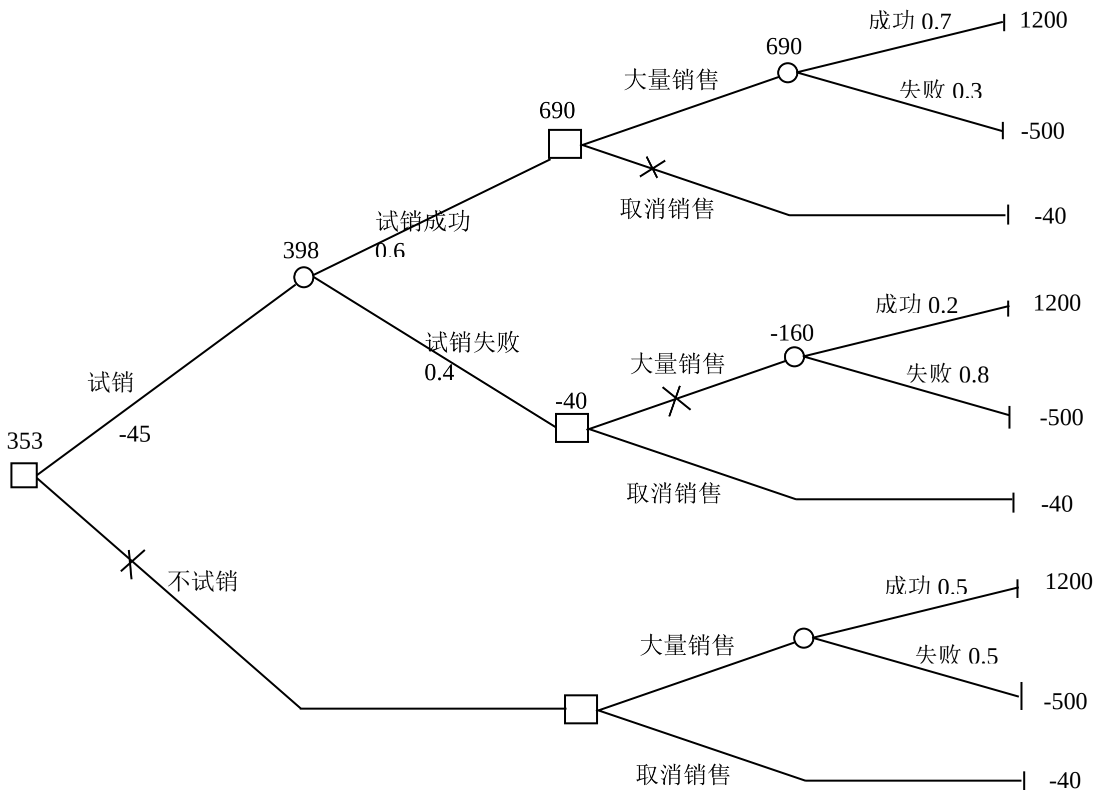
期望收益为 353 万元。

（2）根据决策树上的数据可知

拥有原始信息的期望收益 EVWOI=350 万元；

拥有试销信息的期望收益 EVWSI=398 万元

试销所获得额外信息的期望价值 EVSI=EVWSI-EVWOI=398-350=48 万元


353
试销
-45
不试销
398
试销成功
0.6
试销失败
0.4
690
大量销售
取消销售
690
成功 0.7
失败 0.3
1200
-500
-40
-40
大量销售
取消销售
-160
成功 0.2
失败 0.8
1200
-500
-40
大量销售
取消销售
成功 0.5
失败 0.5
1200
-500
-40