第五节　单纯形法的进一步讨论

5.1 初始可行基与人工变量法

设 LP 问题的约束条件为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, \dots, x_n \geq 0;\ x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

对每一个约束方程，考虑分别强行加入人工变量：$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$，得到

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \\
x_1, \dots, x_n \geq 0;\ x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \geq 0 &
\end{cases}
$$

以$x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$为基变量，得到一个单位基矩阵。令非基变量$x_1, \dots, x_n$为零，得到一个初始基可行解

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0,0, \dots ,0, b_1, b_2, \dots , b_m)^{\mathrm{T}}$$

因人工变量是后加入到约束条件中的虚拟变量，若原问题有可行解，则经过基变换，所有人工变量应该能被其他变量从基中替换出来。

这可以通过合理构造目标函数来实现。

1、大 M 法

人工变量对目标函数值不应造成影响：对最大化问题（max）设人工变量在目标函数中的系数为$-M$（M为任意大的正数），对最小化问题（min），设人工变量在目标函数中的系数为$+M$；如此，优化过程会迫使人工变量离开。

例，用大 M 法求解 **LP** 问题。

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解，加入松弛变量x_4，减去剩余变量x_5，原问题标准形式为

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

再加入人工变量x_6, x_7，引入系数大M，得到等价问题：[1]

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

---

[1] 注意，本例是求最小，因此要改用$\sigma_j = c_j - z_j \geq 0$判别最优，而$\theta$规则不变。

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j \rightarrow$			$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$\sigma_j \rightarrow$			-1	$1-M$	0	0	M	0	$3M-1$	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$\sigma_j \rightarrow$			-1	0	0	0	1	$M-1$	$M+1$	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	$-2/3$	2/3	$-5/3$	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	$-4/3$	4/3	$-7/3$	
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	0	1/3	1/3	$M-1/3$	$M-2/3$	

注：上述优化过程，如果能通过基变换，使得基变量不再含有非零的人工变量，则表示原问题有可行解；

对于max问题，若最终单纯形表中所有$\sigma_j \leq 0$，但在其中还有某个非零人工变量，则表示原问题无可行解。

对于min问题，若最终单纯形表中所有$\sigma_j \geq 0$，但在其中还有某个非零人工变量，则表示原问题无可行解。

2、两阶段法

第一阶段：在标准形式线性规划问题的约束上加入**人工变量**$x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$，构造以人工变量之和最小化为目标的新的 LP 问题（第一阶段问题）：

$$\min w = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots & & \ddots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解第一阶段问题，若$w=0$，说明原问题存在基可行解，进入第二阶段。否则原问题无可行解，停止计算。

第二阶段：从第一阶段得到的最终表中除去人工变量，将目标函数行的系数换为原问题的目标函数系数，作为第二阶段计算的初始表，继续迭代，直至完成求解。

注意，无论是最大化问题还是最小化问题，两阶段法在第一阶段构造的都是最小化问题；因为最终目的是要让人工变量成为 0 而出基。

例，用两阶段法重新求解上述 LP 问题。

解，先加入人工变量，构造第一阶段 LP 问题

$$\min w = x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

第一阶段求解：

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	–2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	–4	1	2	0	–1	1	0	3/2
1	x_7	1	–2	0	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j \rightarrow$			6	–1	–3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	–2	0	1	0	0	–1	-
1	x_6	1	0	[1]	0	0	–1	1	–2	1
0	x_3	1	–2	0	1	0	0	0	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			0	–1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	–2	2	–5	
0	x_2	1	0	1	0	0	–1	1	–2	
0	x_3	1	–2	0	1	0	0	0	1	
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	

人工变量$x_6, x_7 = 0$，所以第一阶段完全剔除了人工变量，因此当前解的非人工变量部分：$(0,1,1,12,0)^T$是原问题的基可行解，可以开始第二阶段的计算。

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	–2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	–1	-
1	x_3	1	–2	0	1	0	0	-
$\sigma_j \rightarrow$			-1	0	0	0	1	
–3	x_1	4	1	0	0	1/3	–2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	–1	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	–4/3	
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	0	1/3	1/3	

5.2 退化

单纯形法用θ规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，出现退化解；若再行换基，则换出变量$x_l = 0$，迭代后目标函数值不变。

退化的情况在现实中几乎遇不到，但还是有人构造了一个特例，当出现退化时，进行多次迭代，基从$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots$又返回到$\mathbf{B}_1$，即出现计算过程的循环，永远达不到最优解。

退化的例子：

$$\max z=\frac{3}{4}x_1-150x_2+\frac{1}{50}x_3-6x_4$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}x_1-60x_2-\dfrac{1}{25}x_3+9x_4+x_5 & =0\\ \dfrac{1}{2}x_1-90x_2-\dfrac{1}{50}x_3+3x_4+x_6 & =0\\ x_3+x_7 & =1\\ x_i\ge 0\end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	0	[1/4]	-60	-1/25	9	1	0	0	0
0	x_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3/4	x_1	0	1	-240	-4/25	36	4	0	0	-
0	x_6	0	0	[30]	3/50	-15	-2	1	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			0	30	7/50	-33	-3	0	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3/4	x_1	0	1	0	[8/25]	-84	-12	8	0	0
-150	x_2	0	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	1
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	2/25	-18	-1	-1	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1/50	x_3	0	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0	-
-150	x_2	0	-1/160	1	0	[1/40]	1/120	-1/60	0	0
0	x_7	1	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1	2/525
$\sigma_j \rightarrow$			-1/4	0	0	3	2	-3	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1/50	x_3	0	-125/2	10500	1	0	[50]	-150	0	0
-6	x_4	0	-1/4	40	0	1	1/3	-2/3	0	0
0	x_7	1	125/2	-10500	0	0	-50	150	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			1/2	-120	0	0	1	-1	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	0	-5/4	210	1/50	0	1	-3	0	-
-6	x_4	0	1/6	-30	-1/150	1	0	[1/3]	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			7/4	-330	-1/50	0	0	2	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	0	[1/4]	-60	-1/25	9	1	0	0	
0	x_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	
$\sigma_j \rightarrow$			7/4	-330	-1/50	0	0	2	0	

——又回到了初始可行基!

退化的解决方法：摄动法、字典序法。

1974 年勃兰特（Bland）提出一种简便的规则，简称勃兰特规则：

（1）选取$\sigma_j > 0$中下标最小（不是检验数最大）的非基变量x_k为换入变量。

（2）当按θ规则计算存在两个或两个以上最小比值时，选取最小比值对应的下标最小的基变量为换出变量。

可以证明，按勃兰特规则，一定能避免出现循环。

用勃兰特规则计算上例：

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	0	[1/4]	-60	-1/25	9	1	0	0	0
0	x_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3/4	x_1	0	1	-240	-4/25	36	4	0	0	-
0	x_6	0	0	[30]	3/50	-15	-2	1	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	-
$\sigma_j \rightarrow$			0	30	7/50	-33	-3	0	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3/4	x_1	0	1	0	[8/25]	-84	-12	8	0	0
-150	x_2	0	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1	1
$\sigma_j \rightarrow$			0	0	2/25	-18	-1	-1	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1/50	x_3	0	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0	-
-150	x_2	0	-1/160	1	0	[1/40]	1/120	-1/60	0	0
0	x_7	1	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1	2/525
$\sigma_j \rightarrow$			-1/4	0	0	3	2	-3	0	

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1/50	x_3	0	-125/2	10500	1	0	50	-150	0	-
-6	x_4	0	-1/4	40	0	1	1/3	-2/3	0	-
0	x_7	1	[125/2]	-10500	0	0	-50	150	1	2/125
$\sigma_j \rightarrow$			1/2	-120	0	0	1	-1	0	

下一步迭代需使用勃兰特规则：上表中正检验数对应的变量为x_1, x_5，令下标最小的变量x_1入基，而非正检验数最大的x_5入基，得到：

$c_j \to$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1/50	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1	-
-6	x_4	1/250	0	-2	0	1	[2/15]	-1/15	1/250	3/100
3/4	x_1	2/125	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125	-
$\sigma_j \to$			0	-36	0	0	7/5	-11/5	-1/125	

$c_j \to$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	θ_i
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1/50	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1	
0	x_5	3/100	0	-15	0	15/2	1	-1/2	3/100	
3/4	x_1	1/25	1	-180	0	6	0	2	1/25	
$\sigma_j \to$			0	-15	0	-21/2	0	-3/2	-1/20	

求解结束!

5.3 检验数的几种表示形式

检验数 \ LP 模型	$\max z = \mathbf{cx}$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\min z = \mathbf{cx}$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
$\sigma_j = c_j - z_j$	$\leq \mathbf{0}$（最优）	$\geq \mathbf{0}$（最优）
$\sigma_j = z_j - c_j$	$\geq \mathbf{0}$（最优）	$\leq \mathbf{0}$（最优）