第二章
随机变量及其分布

第二节

随机变量的数学期望

Overview

前言

前言

- 分赌本问题 (17 世纪)

前言

- 分赌本问题 (17 世纪)
- 甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 元

前言

- 分赌本问题 (17 世纪)
- 甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 元
- 无平局，谁先赢 3 局，则获全部赌注

前言

- 分赌本问题 (17 世纪)
- 甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 元
- 无平局，谁先赢 3 局，则获全部赌注
- 当甲赢 2 局、乙赢 1 局时，中止了赌博

前言

- 分赌本问题 (17 世纪)
- 甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 元
- 无平局，谁先赢 3 局，则获全部赌注
- 当甲赢 2 局、乙赢 1 局时，中止了赌博
- 问如何分赌本?

两种分法

两种分法

1. 按已赌局数分:

两种分法

1. 按已赌局数分:
   则甲分总赌本的 2/3、乙分总赌本的 1/3

两种分法

1. 按已赌局数分:
   则甲分总赌本的 2/3、乙分总赌本的 1/3
2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:

两种分法

1. 按已赌局数分:
则甲分总赌本的 2/3、乙分总赌本的 1/3
2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:
因为再赌两局必分胜负，共四种情况:

前言

两种分法

1. 按已赌局数分:
   则甲分总赌本的 2/3、乙分总赌本的 1/3
2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:
   因为再赌两局必分胜负，共四种情况:
   甲甲、甲乙、乙甲、乙乙

前言

两种分法

1. 按已赌局数分:
   则甲分总赌本的 2/3、乙分总赌本的 1/3
2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:
   因为再赌两局必分胜负，共四种情况:
   甲甲、甲乙、乙甲、乙乙
   所以甲分总赌本的 3/4、乙分总赌本的 1/4

数学期望的概念

数学期望的概念

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得 X 是一个可能取值为

数学期望的概念

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得 X 是一个可能取值为0 或 100 的随机变量，

数学期望的概念

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得 X 是一个可能取值为0 或 100 的随机变量，其分布列为：

数学期望的概念

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得 X 是一个可能取值为0 或 100 的随机变量，其分布列为：

X	0	100
P	1/4	3/4

数学期望的概念

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得 X 是一个可能取值为0 或 100 的随机变量，其分布列为：

X	0	100
P	1/4	3/4

甲的“期望”所得是：$0 \times 1/4 + 100 \times 3/4 = 75$

数学期望的定义

定义 2.2.1 数学期望的定义

定义 2.2.1 数学期望的定义

设离散随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_n)=p_n, n=1,2,\ldots$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望，记为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$$

数学期望的定义

定义 2.2.1 数学期望的定义

设离散随机变量 X 的分布列为 $P(X = x_n) = p_n, n = 1, 2, \ldots$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望，记为

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

定义 2.2.2 连续随机变量的数学期望

数学期望的定义

定义 2.2.1 数学期望的定义

设离散随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_n)=p_n, n=1,2,\dots$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望，记为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$$

定义 2.2.2 连续随机变量的数学期望

设连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$, 若积分

$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx$ 绝对收敛，则称该积分为 X 的数学期望，记为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

数学期望的定义

例 2.2.1

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则 X 的数学期望是？

例 2.2.1

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则 X 的数学期望是？

解

数学期望的定义

例 2.2.1

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则 X 的数学期望是？

解

$$E(X) = -1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 0.8$$

数学期望的定义

例 2.2.1

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则 X 的数学期望是?

解

$E(X) = -1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 0.8$

注意点

数学期望的定义

例 2.2.1

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则 X 的数学期望是？

解

$E(X) = -1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 0.8$

注意点

- 数学期望简称为期望 或均值

例 2.2.1

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则 X 的数学期望是？

解

$E(X) = -1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 0.8$

注意点

- 数学期望简称为期望 或均值

数学期望的定义

定理 2.2.1

数学期望的定义

定理 2.2.1

设 $Y = g(X)$ 是随机变量 X 的函数，随机变量 X 的分布用分布列 $p(x_i) = P(X = x_i)$ 或密度函数 $p(x)$ 表示, 若 $E(g(X))$ 存在，则

数学期望的定义

定理 2.2.1

设 $Y = g(X)$ 是随机变量 X 的函数，随机变量 X 的分布用分布列 $p(x_i) = P(X = x_i)$ 或密度函数 $p(x)$ 表示，若 $E(g(X))$ 存在，则

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X = x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx \end{cases}$$

例 2.2.2

设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

例 2.2.2

设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

解:

数学期望的定义

例 2.2.2

设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

解:

$$E(X^2+2)=\sum_{i=1}^{3}(X^2+2)P(X=x_i)$$

例 2.2.2

设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

解:

$$E(X^2+2)=\sum_{i=1}^{3}(X^2+2)P(X=x_i)$$
$$=(0^2+2)\times 1/2+(1^2+2)\times 1/4+(2^2+2)\times 1/4$$

数学期望的定义

例 2.2.2

设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

解:

$$E(X^2+2)=\sum_{i=1}^{3}(X^2+2)P(X=x_i)$$
$$=(0^2+2)\times 1/2+(1^2+2)\times 1/4+(2^2+2)\times 1/4$$
$$=1+3/4+6/4$$

例 2.2.2

设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

解:

$$E(X^2+2)=\sum_{i=1}^{3}(X^2+2)P(X=x_i)$$
$$=(0^2+2)\times 1/2+(1^2+2)\times 1/4+(2^2+2)\times 1/4$$
$$=1+3/4+6/4$$
$$=13/4$$

数学期望的性质

数学期望的性质

数学期望的性质

数学期望的性质

- 若 c 是常数，则 $E(c)$

数学期望的性质

- 若 c 是常数，则 $E(c)= c$.

数学期望的性质

- 若 c 是常数，则 $E(c) = c$.
- 对于任意常数 a, 有 $E(aX)$

数学期望的性质

- 若 c 是常数，则 $E(c)=c$.
- 对于任意常数 a, 有 $E(aX)=aE(X)$.

数学期望的性质

- 若 c 是常数，则 $E(c)= c$.
- 对于任意常数 a, 有 $E(aX)= aE(X)$.
- 对于任意两个函数 $g_1(X)$ 和 $g_2(X)$,
  $E(g_1(X) + g_2(X))$

数学期望的性质

- 若 c 是常数，则 $E(c) = c$.
- 对于任意常数 a, 有 $E(aX) = aE(X)$.
- 对于任意两个函数 $g_1(X)$ 和 $g_2(X)$,
  $E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X))$

例 2.2.3

$$X \sim p(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,Others \end{cases}$$

求下列 X 的函数的数学期望 (1)$2X-1$,(2) $(X-2)^2$

解:

例 2.2.3

$$X \sim p(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,Others \end{cases}$$

求下列 X 的函数的数学期望 (1)$2X-1$,(2) $(X-2)^2$

解: 定义

例 2.2.3

$$X \sim p(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,Others \end{cases}$$

求下列 X 的函数的数学期望 (1)$2X-1$,(2) $(X-2)^2$

解: 定义

1. $E(2X-1) = 1/3$
2. $E(X-2)^2 = 11/6$

作业

书 P84: 1, 4, 5, 6, 14, 15, 18, 19