第四章
大数定律与中心极限定理

第一节

随机变量序列的两种收敛性

Overview

前言

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

前言

两种收敛性：依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

前言

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

实例：X_n：第 n 次检查中不合格品数，$X_n \sim b(1,p), n = 1,2,\cdots,$ 其中，p 为该产品的不合格率. 前 n 次检查中，不合格品数为 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

前言

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

实例：X_n：第 n 次检查中不合格品数，$X_n \sim b(1, p), n = 1, 2, \cdots$, 其中，$p$ 为该产品的不合格率. 前 n 次检查中，不合格品数为
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
问题：（1）当 $p = 0.3$, $n = 10$, 求最多有 3 个产品不合格的概率?

前言

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

实例：X_n：第 n 次检查中不合格品数，$X_n \sim b(1,p), n = 1, 2, \cdots,$ 其中，p 为该产品的不合格率. 前 n 次检查中，不合格品数为
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
问题：（1）当 $p = 0.3$, $n = 10$, 求最多有 3 个产品不合格的概率?
(2) 当 $p = 0.3$, $n = 1000$ 时, 求不合格品数在 $50 \sim 300$ 间的概率？

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

实例：X_n：第 n 次检查中不合格品数，$X_n \sim b(1,p), n = 1,2,\cdots,$ 其中，p 为该产品的不合格率. 前 n 次检查中，不合格品数为
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
问题：（1）当 $p = 0.3$, $n = 10$, 求最多有 3 个产品不合格的概率?
(2) 当 $p = 0.3$, $n = 1000$ 时, 求不合格品数在 $50 \sim 300$ 间的概率？

随机变量 Y：$\{S_n\}$ 收敛于 Y

前言

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

实例：X_n：第 n 次检查中不合格品数，$X_n \sim b(1,p), n = 1, 2, \cdots$，其中，$p$ 为该产品的不合格率. 前 n 次检查中，不合格品数为
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
问题：（1）当 $p = 0.3$, $n = 10$, 求最多有 3 个产品不合格的概率?
(2) 当 $p = 0.3$, $n = 1000$ 时, 求不合格品数在 $50 \sim 300$ 间的概率？

随机变量 Y：$\{S_n\}$ 收敛于 Y或 S_n 的分布函数 $F_n(x)$ 收敛于 $F(x)$?

两种收敛性: 依概率收敛和按分布收敛.

为什么要学这两种收敛性?

实例：X_n：第 n 次检查中不合格品数，$X_n \sim b(1,p), n=1,2,\cdots,$ 其中，p 为该产品的不合格率. 前 n 次检查中，不合格品数为
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
问题：（1）当 $p=0.3$, $n=10$, 求最多有 3 个产品不合格的概率?
(2) 当 $p=0.3$, $n=1000$ 时, 求不合格品数在 $50 \sim 300$ 间的概率？

随机变量 Y：$\{S_n\}$ 收敛于 Y或 S_n 的分布函数 $F_n(x)$ 收敛于 $F(x)$?

$P(a \le S_n \le b)$ 近似等于 $P(a \le Y \le b)$

前言

后续基础：

1. 依概率收敛：用于大数定律

前言

后续基础：

1. 依概率收敛：用于大数定律
2. 按分布收敛：用于中心极限定理

依概率收敛

定义 4.1.1 依概率收敛

若对任意的 $\epsilon > 0$,

定义 4.1.1 依概率收敛

若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|Y_n - Y| < \epsilon\} = 1$,

依概率收敛

定义 4.1.1 依概率收敛

若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n \to +\infty} P\{|Y_n - Y| < \epsilon\} = 1$, 则称随机变量序列 Y_n依概率收敛于Y,

定义 4.1.1 依概率收敛

若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|Y_n - Y| < \epsilon\} = 1$, 则称随机变量序列 Y_n依概率收敛于Y, 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} Y$$

依概率收敛

定义 4.1.1 依概率收敛

若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $\lim_{n\to+\infty} P\{|Y_n - Y| < \epsilon\} = 1$, 则称随机变量序列 Y_n依概率收敛于Y, 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} Y$$

大数定律讨论的就是依概率收敛.

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P}$

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$

依概率收敛

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$

$X_n \times Y_n \xrightarrow{P}$

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$
$X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$

$X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$

$X_n \div Y_n \xrightarrow{P}$

依概率收敛

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$
$X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$
$X_n \div Y_n \xrightarrow{P} a \div b$

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$

$X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$

$X_n \div Y_n \xrightarrow{P} a \div b (b \neq 0)$

依概率收敛

定理 4.3.1 依概率收敛的性质

若两个随机变量序列 X_n, Y_n, a, b 两个常数

$$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b$$

则: $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$
$X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$
$X_n \div Y_n \xrightarrow{P} a \div b (b \neq 0)$

概括成一句话：$\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 的加、减、乘、除，依概率收敛到 a 与 b 的加、减、乘、除.

按分布收敛、弱收敛

前面讲到：分布函数序列 $F_n(x)$ 收敛到一个极限分布函数 $F(x)$ 具有重要的意义。

按分布收敛、弱收敛

前面讲到：分布函数序列 $F_n(x)$ 收敛到一个极限分布函数 $F(x)$ 具有重要的意义。

例 4.1.1.（书 P211）

对分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 而言，点点收敛要求太高.

按分布收敛、弱收敛

定义 4.1.2

若在 $F(x)$ 的连续点上都有

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$,

按分布收敛、弱收敛

定义 4.1.2

若在 $F(x)$ 的连续点上都有

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$, 记为

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$

按分布收敛、弱收敛

定义 4.1.2

若在 $F(x)$ 的连续点上都有

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$, 记为

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$

也称 $\{X_n\}$ 按分布收敛于 X,

按分布收敛、弱收敛

定义 4.1.2

若在 $F(x)$ 的连续点上都有

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$, 记为

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$

也称 $\{X_n\}$ 按分布收敛于 X, 记作：$X_n \xrightarrow{L} X$

按分布收敛、弱收敛

依概率收敛与按分布收敛的关系

按分布收敛、弱收敛

依概率收敛与按分布收敛的关系

- 定理 4.1.2 $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

按分布收敛、弱收敛

依概率收敛与按分布收敛的关系

- 定理 4.1.2 $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$
- 定理 4.1.3 $X_n \xrightarrow{P} a \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L} a$

作业

课本 P213: 2,4,6