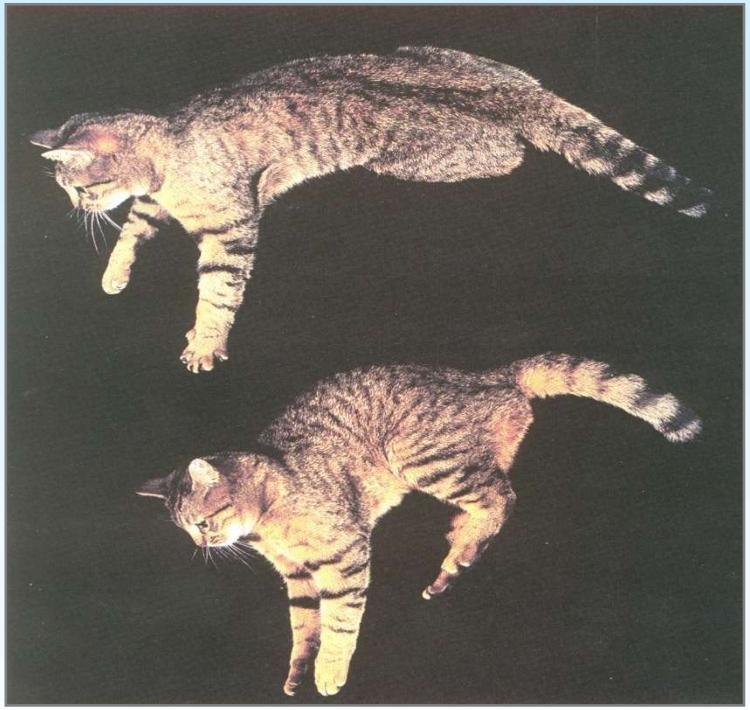


在一只猫从高处摔落的下将过程中，它上半身向一个方向扭转，而下半身会向相反方向扭转。且无论从何处摔落，猫通常都能以四脚着地。猫在下落及落地过程中体现出哪些物理规律?

第7章 刚体力学

7. 1 刚体运动学

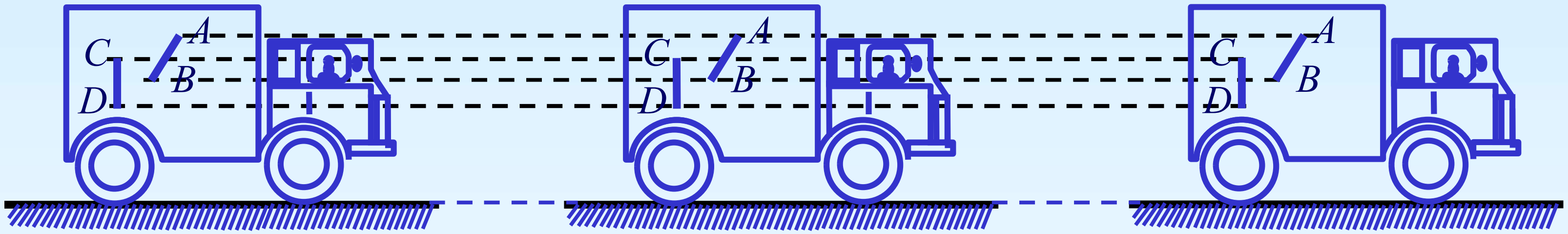
1. 刚体模型

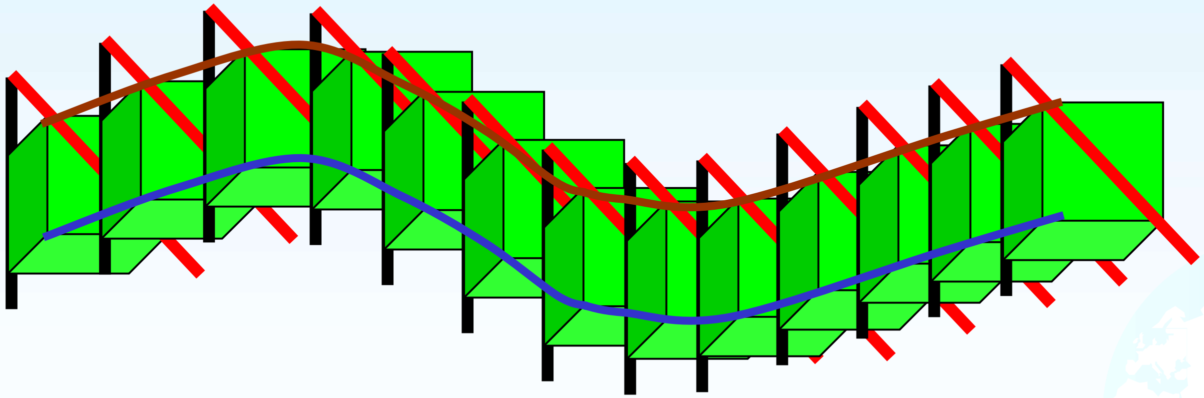
刚体：在力的作用下，大小和形状都始终保持不变的物体。

- 刚体和质点一样是一种理想模型；
  (为何是理想模型?
  受力不变形)
- 刚体可以看成是由无数质点构成的质点组；
- 刚体无论在多大的力作用下或刚体无论作何运动，刚体中任意两质点间的距离保持不变。

2. 刚体的平动

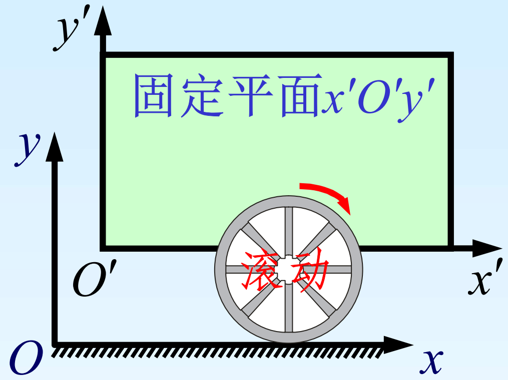
平动：刚体运动时，若在其内部所作的任何一条直线，在运动中都始终保持与自身平行的运动形式。

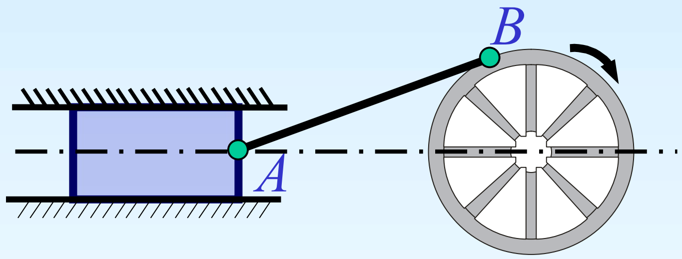




- 平动时，刚体上各点的轨迹可以是直线，也可以是曲线
- 平动时，刚体上所有质点具有相同的位移、速度和加速度
- 刚体的平动可用一个点的运动描述；通常用刚体的质心

平面运动：在运动过程中，刚体上任一点的运动限于一固定的轨道平面，各点的轨道平面或重合或平行。





(1) 基面、基点、基轴

基面：选定任一点运动的轨道平面为参考平面。与基面垂直的任意直线上的各点，速度和加速度相同

基点：基面上任选的一点，作为参考点。

刚体平面运动=基点平动+绕基点转动 $\Rightarrow$ 3个自由度

基轴：通过基点且垂直于基面。

(2) 刚体平动时的速度与加速度

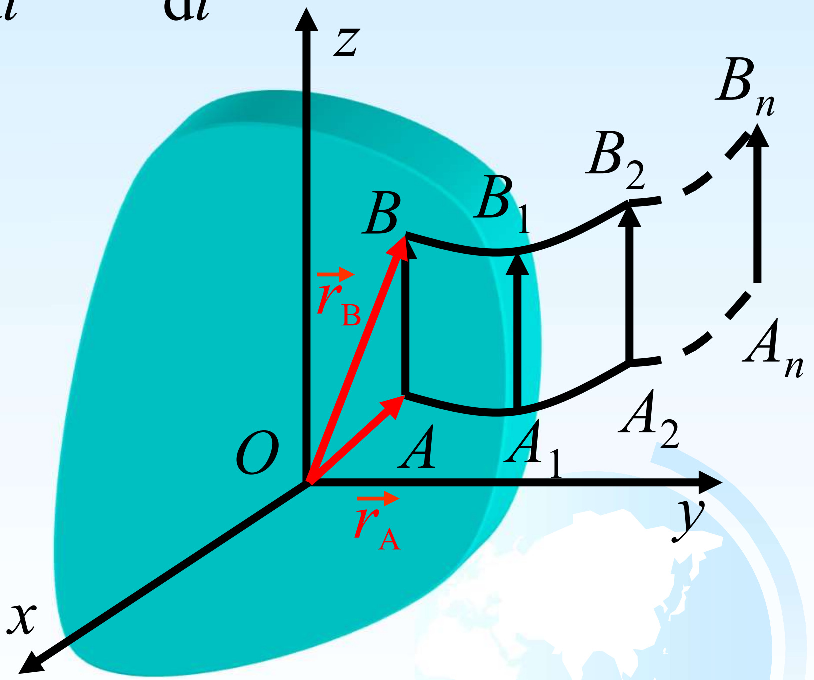
如图，任取A、B两点

有 $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$ 求导 $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$

$\because$ $\overrightarrow{AB} = \vec{C}$ （常矢量）

$\therefore$ $\boxed{\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B}$

$\boxed{\dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B}$



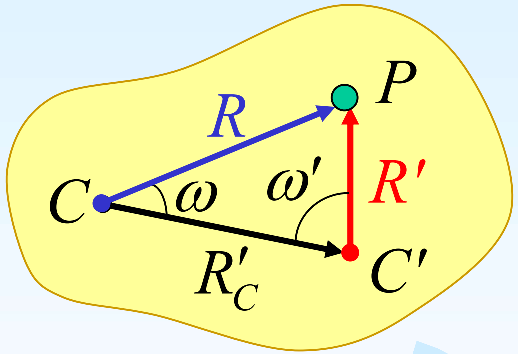
(3) 基面上任意点的运动

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{R}_{iA}$$

选质心为基点 $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}_i$

可证：对任意基点而言，基面上各点以相同的角速度旋转！

或：角速度与基点选择无关



证： 以C为基点： $\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$

以C'为基点： $\vec{v}_P = \vec{v}'_C + \vec{\omega}' \times \vec{R}'$

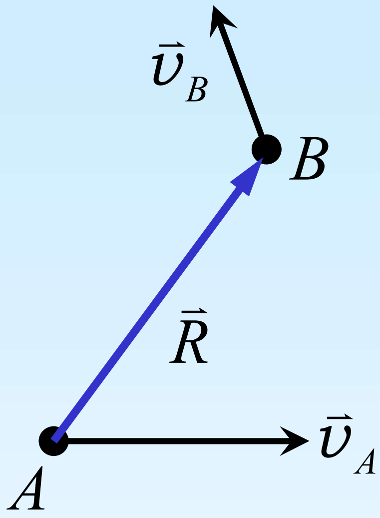
而 $\vec{v}'_C = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}'_C$，

$$\vec{R}'_C = \vec{R} - \vec{R}'$$

代入得 $\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{R} - \vec{R}') + \vec{\omega}' \times \vec{R}'$

$$\vec{\omega}' \times \vec{R}' - \vec{\omega} \times \vec{R}' = 0 \qquad \therefore\ \vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

(4) 刚体角速度的唯一性



任选刚体上两点A、B，有

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}_A\times\vec{R}=\vec{v}_B-\vec{\omega}_B\times\vec{R}+\vec{\omega}_A\times\vec{R}$$

$$\begin{cases}\vec{\omega}_B\times\vec{R}=\vec{\omega}_A\times\vec{R}\\ \vec{R}\text{ 任意}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\vec{\omega}_B=\vec{\omega}_A$$

刚体转动的角速度相对刚体上任一点都相同！

3. 刚体的转动

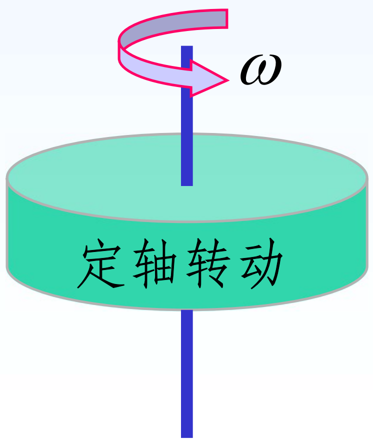
转动：刚体上的各质点都绕同一直线作圆周运动的运动形式

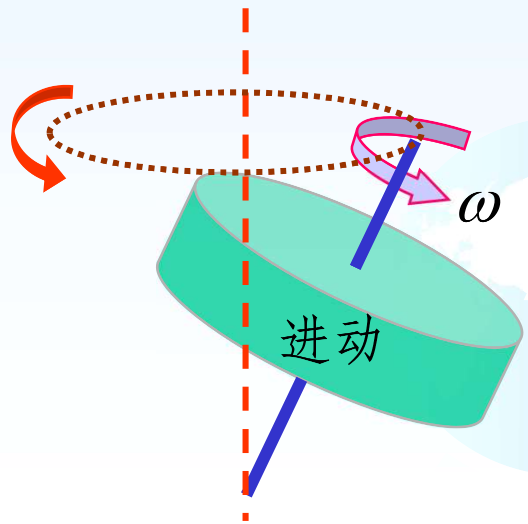
转动轴：刚体转动围绕的那条直线(转轴可是固定或变化的)

定轴转动：转轴在所选参考系中固定不动的转动

非定轴转动：转轴位置随时间变化的转动

定点转动：在运动过程中，刚体上某一点始终保持不动的运动形式 ——进动

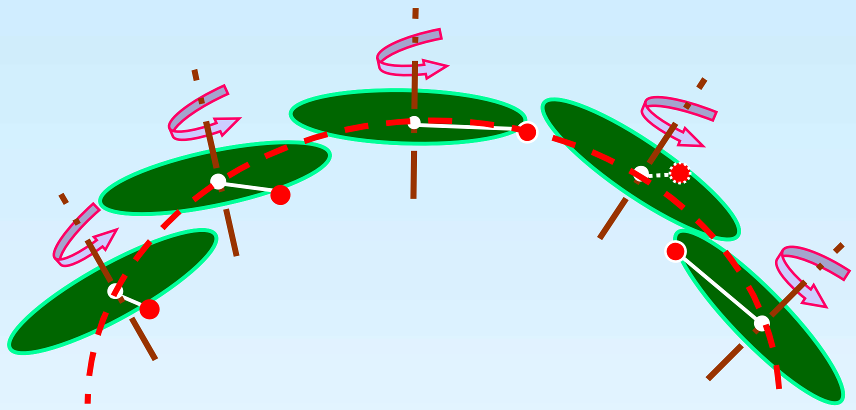




一般运动:

除上述几种运动形式外，刚体其它更为复杂的运动形式。

例如：铁饼在空中的运动



(1) 定轴转动

定轴转动时，刚体上各质点都绕固定轴作圆周运动，在任意时刻其上各质点的位移、速度、加速度(线量)一般不相同。

刚体定轴转动的角量描述：

角坐标、角位移、角速度、角加速度

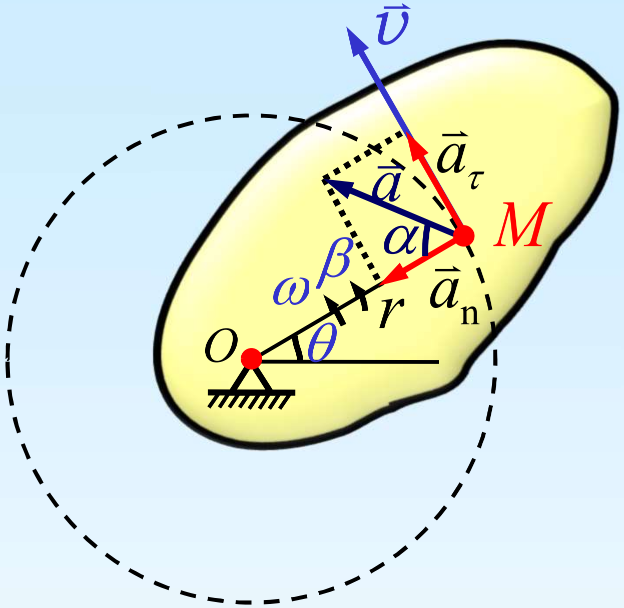
质点运动学中的概念及有关公式都适用于刚体的定轴转动。

转动平面：刚体上垂直于固定轴的任意平面(基面)。

$$v = \omega r$$

$$a_\tau = r\beta$$

$$a_n = \omega^2 r = \omega v$$



- M点的线速度、切向加速度沿圆轨迹的切线，指向由ω、β的正负确定。

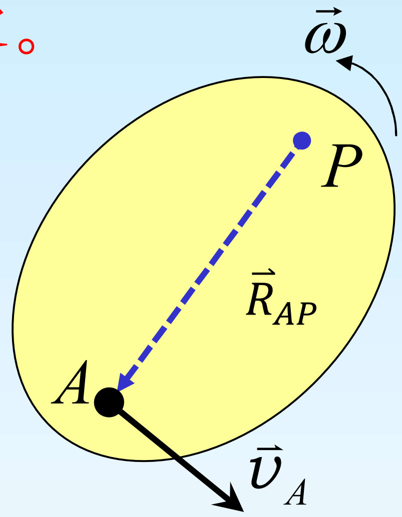
- 刚体转动时，如果 ω 和β同号，刚体转动是加速的；如果ω和β异号，刚体转动是减速的。

(2) 瞬心

选择一个基点P，某一瞬时，该点的速度为零。

以瞬心P为基点，刚体没有平动，只有转动。

刚体上其它点A的速度为：



$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{R}_{AP}$$

$\vec{R}_{AP}$为质点A相对于瞬心P的位矢。

- 瞬心一般而言可随时间变化位置
- 瞬心可以位于基面上刚体之外的某一点

如何确定瞬心?

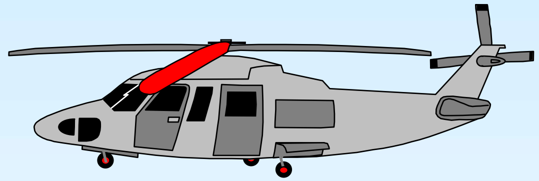
a) 已知某一瞬时基面上两点的速度方向，

b) 已知刚体的角速度 $\vec{\omega}$ 和某一点速度$\vec{v}_A$，瞬心P必在A的右边，$R_{pA} = \dfrac{v_A}{\omega}$

4. 刚体的自由度

自由度：完全确定物体空间位置所需要的独立坐标数目





火车：自由度为1　　轮船：自由度为2　　飞机：自由度为3

刚体的自由度

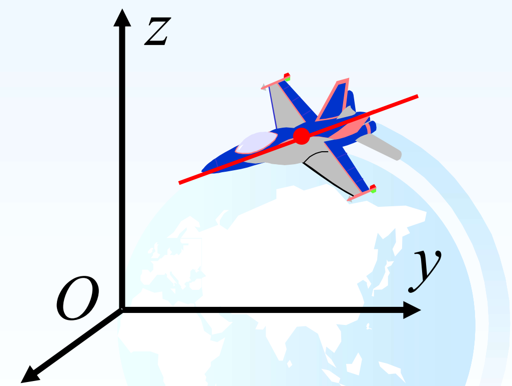
确定质心C的位置：3个平动自由度 (x, y, z)

确定转轴的取向：α, β, γ中两个是独立的

确定刚体绕瞬时轴转过的角度 φ.

当刚体受到某些约束时——自由度减少

多个物体组成系统时——自由度增加



$i = 3+2+1= 6$

刚体的自由度:

平动 ——3个自由度

绕固定轴转动 ——1个自由度

平面运动 ——3个自由度

绕固定点转动 ——3个自由度

一般运动 ——6个自由度

7.2 定轴转动惯量

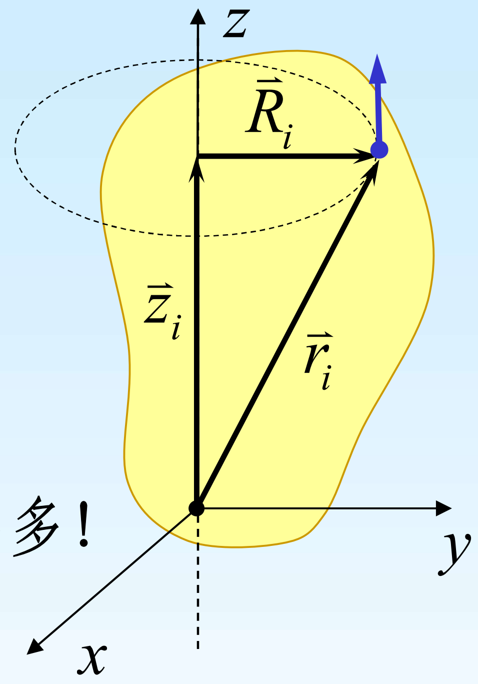
1. 刚体转动问题的复杂性

刚体平动时动量与速度的关系为

$$\vec{P} = M\vec{v}_C$$

动量与速度方向相同；

刚体转动时，角动量与角速度的关系复杂得多！



设刚体绕Z轴转动（角速度的方向？）

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

式中 $\vec{r}_i = \left(x_i, y_i, z_i\right), \vec{\omega} = \left(0, 0, \omega\right)$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = -y_i \omega \vec{i} + x_i \omega \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = -x_i z_i \omega \vec{i} - y_i z_i \omega \vec{j} + \left(x_i^2 + y_i^2\right)\omega \vec{k}$$

于是得 $$L_x = -\omega\sum_{i=1}^{N} x_i z_i \Delta m_i = I_{xz}\omega$$

$$L_y = -\omega\sum_{i=1}^{N} y_i z_i \Delta m_i = I_{yz}\omega$$

$$L_z = \omega\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{\,2} + y_i^{\,2}\right)\Delta m_i = \omega\sum_{i=1}^{N} R_i^{\,2}\Delta m_i = I_{zz}\omega$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{xz} \\ 0 & 0 & I_{yz} \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

L_x, L_y, L_z 取决于刚体的形状和质量分布

- 角动量的x、y分量并不为零！即角动量与角速度**不同方向！**

刚体角动量与角速度的一般关系为：

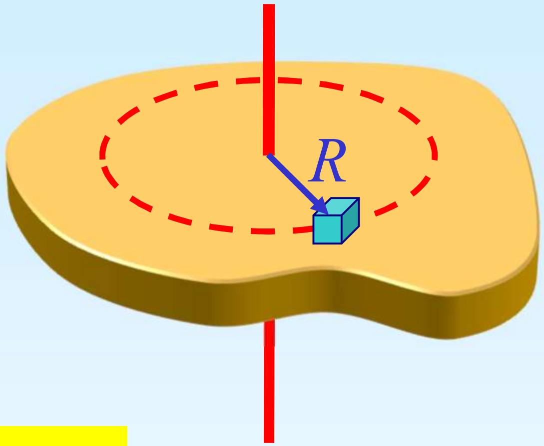
$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{惯性张量}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

或：转动惯量、惯性系数、惯量矩、…

2. 转动惯量计算公式

- 离散质点 $\boxed{I=\sum_i R_i^{\ 2}\Delta m_i}$

- 连续分布物体 $\boxed{I=\int_V R^2\rho \mathrm{d}V}$



$$I=\begin{cases}\int_L R^2\eta \mathrm{d}l & \text{质量线分布，}\eta\text{为线密度(}\boxed{\eta=\dfrac{m}{L}}\text{)}\\ \int_S R^2\sigma \mathrm{d}S & \text{质量面分布，}\sigma\text{为面密度(}\boxed{\sigma=\dfrac{m}{S}}\text{)}\\ \int_V R^2\rho \mathrm{d}V & \text{质量体分布，}\rho\text{为体密度(}\boxed{\rho=\dfrac{m}{V}}\text{)}\end{cases}$$

7.2 定轴转动惯量

- 转动惯量I的物理意义： 刚体在转动中惯性大小的量度

  ——转动惯量I越大，转动状态越不容易改变。

- 影响转动惯量I大小的三个因素

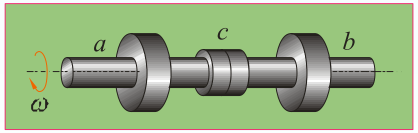
  (1) 刚体的转轴位置：同一刚体依不同的转轴而有不同的I

  (2) 刚体的总质量：I与刚体自身的总质量成正比

  (3) 质量相对转轴的分布：I 与形状、大小和密度分布有关

- 转动惯量叠加定理

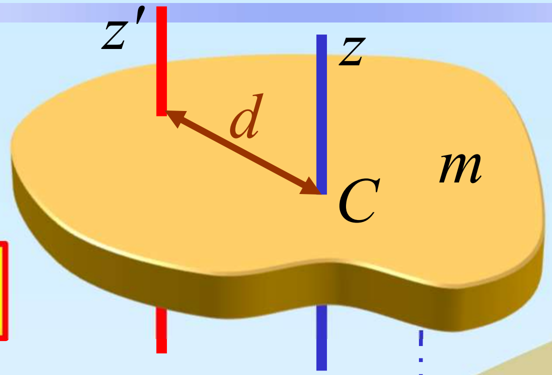
  对同一个旋转轴（点），转动惯量具有可加性



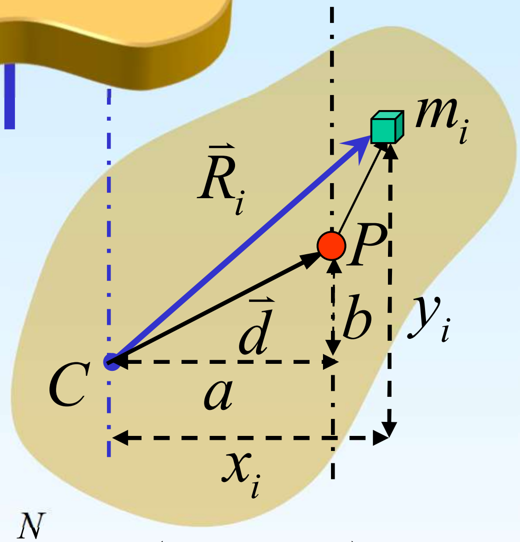
$$I = I_a + I_b + I_c + \cdots$$

3. 两个有用的定理

转轴平移，转动惯量如何变化?



- 平行轴定理： $\boxed{I_P = I_C + Md^2}$



证明： $I_C = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$

$$I_P = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(x_i - a\right)^2 + \left(y_i - b\right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2a \sum_{i=1}^{N} m_i x_i - 2b \sum_{i=1}^{N} m_i y_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \left(a^2 + b^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) - \underline{2amx_c} - \underline{2bmy_c} + \sum_{i=1}^{N} m_i \left(a^2 + b^2\right)$$

为零

$$= I_C + Md^2$$

例： 由柯尼希定理导出刚体的平行轴定理

绕任意固定轴 MN 转动的刚体的动能 $E_k = \frac{1}{2} I_{MN} \omega^2$

此轴到刚体质心的距离 d

刚体质心的速度 $\upsilon_C = \omega d$

$\Rightarrow$质心动能 $E_{kC} = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 = \frac{1}{2} md^2\omega^2$

刚体相对质心的转动角速度为 ω

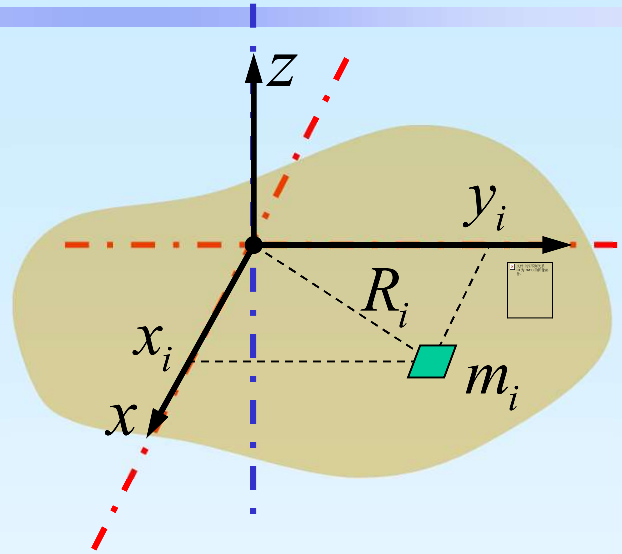
$\Rightarrow$刚体相对质心的动能 $E_k' = \frac{1}{2} I_C \omega^2$

由柯尼希定理有 $E_k = E_{kC} + E_k'$

$\Rightarrow$ $\boxed{I_{MN} = I_C + md^2}$

- 薄板正交轴定理：

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$



证明：
$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^{\ 2}$$

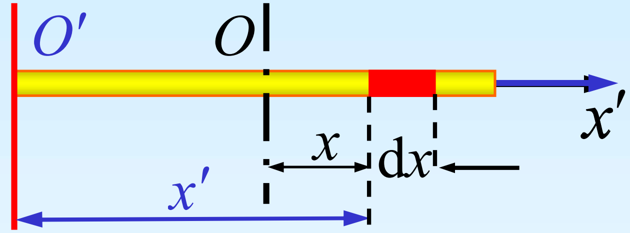
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^{\ 2}$$

$$= I_x + I_y$$

例：试求质量m，长为l的均质细杆对如下给定轴的转动惯量。

(1) 转轴垂直于杆并通过杆的中点；

(2) 转轴垂直于杆并通过杆的一端。



解：(1) 取如图所示的坐标

在细杆上x处取线元dx

线元的质量为

$$\mathrm{d}m = \eta \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

细杆对过中点的垂直转轴的转动惯量为

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \eta \mathrm{d}x = \frac{1}{12} m l^2$$

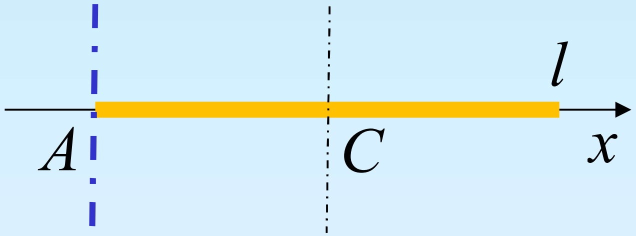
(2) 以细杆的一端 O'为坐标原点，取如图所示的坐标

则此时的转动惯量为：$I = \int_0^l x'^2 \eta \mathrm{d}x' = \eta \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2$

- 利用平行轴定理另解

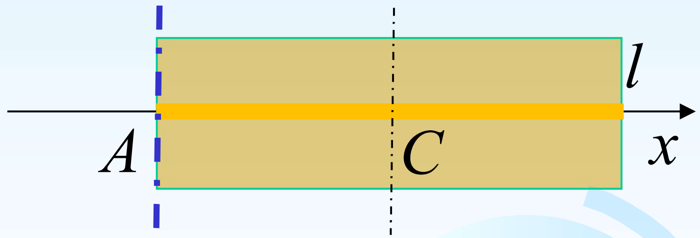
$$I_A = I_C + Md^2$$

$$= \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

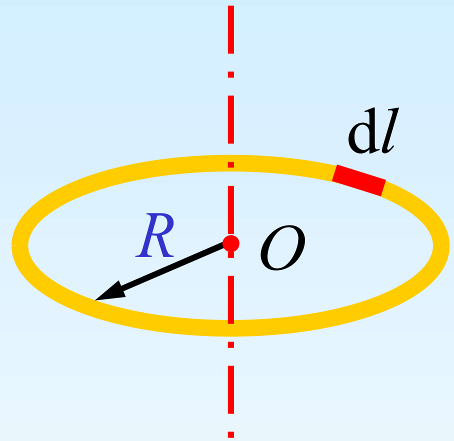


- 匀质细杆延展为匀质长方板：

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2 \quad I_A = \frac{1}{3}ml^2$$



例：试求一质量为m，半径为R的均质细圆环对通过其中心且垂直于环面的转轴的转动惯量。



解：均质细圆环的质量线密度为

$$\eta = \frac{m}{2\pi R}$$

在圆环上任取长度为dl的线元，

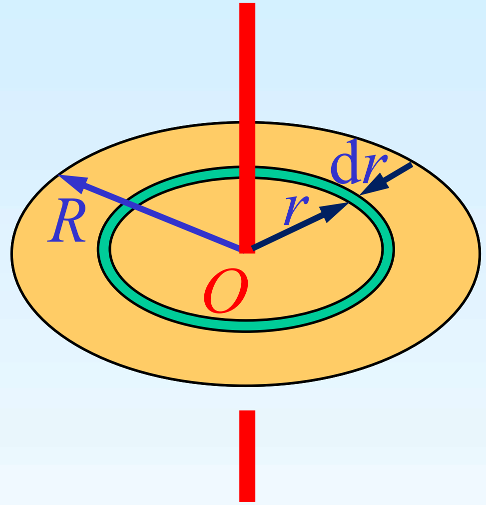
该线元的质量为 $\mathrm{d}m = \eta \mathrm{d}l$

由于圆环上各线元到转轴的距离均为R，所以圆环对该轴的转动惯量为

$$I = \int_0^{2\pi R} R^2 \eta \mathrm{d}l = R^2 \eta \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}l = R^2 \frac{m}{2\pi R} \cdot 2\pi R = mR^2$$

等同于一个质点。

例：试求半径为R，质量为m的均质薄圆盘，对过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量。



解：薄圆盘的质量面密度 $\sigma=\dfrac{m}{\pi R^2}$

薄圆盘可以看成是许多半径不同的同心圆环的集合。

任取一半径为r，宽度 $\mathrm{d}r$ 的圆环。

圆环的质量为： $\mathrm{d}m=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$

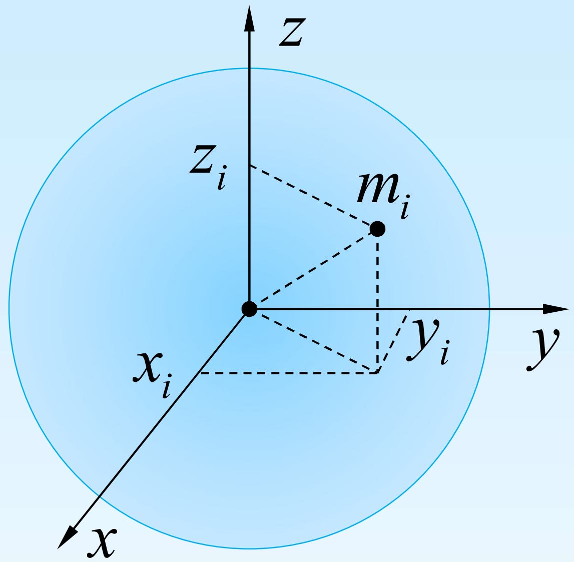
圆环对过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I=r^2\mathrm{d}m=r^2\cdot\sigma 2\pi r\mathrm{d}r=2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r$$

则整个圆盘对该轴的转动惯量为

$$I=\int\mathrm{d}I=2\pi\sigma\int_0^R r^3\mathrm{d}r=2\pi\frac{m}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{4}R^4=\frac{1}{2}mR^2$$

例：质量 m、半径为R的匀质薄球壳，求其以直径为转轴的转动惯量。



$$I_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2mR^2$$

$$I_x = I_y = I_z = I$$

$\Rightarrow$ $I = \dfrac{2}{3} mR^2$ $\Rightarrow$ 匀质球体 $I = \dfrac{2}{5} mR^2$

均匀球体(半径R、质量m)绕直径的转动惯量。

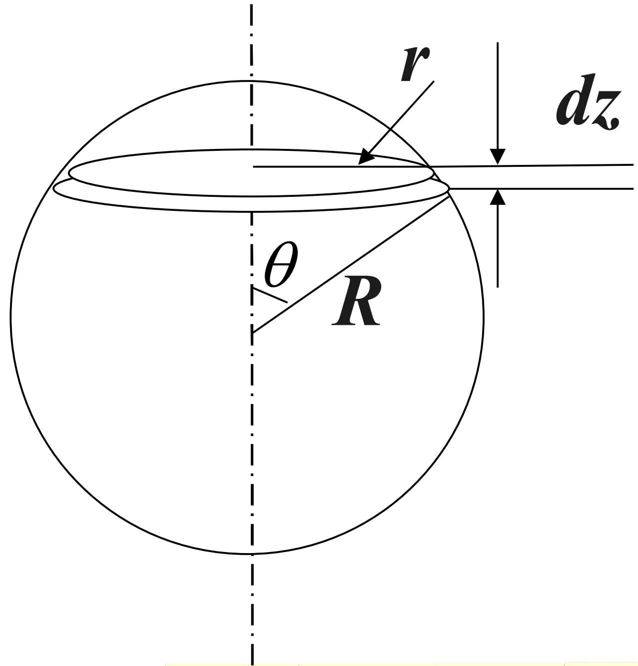
解：将该球体划分为许多厚为**dz**的小圆盘，显然该圆盘的质量为：

$$dm = \rho dv = \rho \cdot \pi r^2 dz = \rho \cdot \pi \left(R^2 - z^2 \right) dz$$

$$J = \int_{-R}^{R} \rho \cdot \frac{\pi}{2} \left(R^2 - z^2 \right)^2 dz$$

$$= \frac{8}{15} \pi \rho R^5$$

$$= \frac{2}{5} m R^2$$



常见刚体的转动惯量

刚体（质量为m）	转轴位置	转动惯量
细棒（棒长为l）	通过中心与棒垂直	$I_C = \frac{1}{12}ml^2$
	通过端点与棒垂直	$I_D = \frac{1}{3}ml^2$
细圆环（半径为R）	通过中心与环面垂直	$I_C = mR^2$
	直径	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2$
薄圆盘（半径为R）	通过中心与盘面垂直	$I_C = \frac{1}{2}mR^2$
	直径	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2$
空心圆柱（内外半径为R_1和R_2）	对称轴	$I_C = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$
球壳（半径为R）	中心轴	$I_C = \frac{2}{3}mR^2$
球体（半径为R）	中心轴	$I_C = \frac{2}{5}mR^2$


胖子滚下山坡后不久，他的伙伴发明了车轮……

作业: **7.6, 7.9, 7.10**