# 第二节 线性规划的对偶理论

**2.1 对偶问题的提出**

**2.2 原问题与对偶问题的关系**

**2.3 对偶问题的基本性质**

# 2.1 对偶问题的提出

考虑第 1 章例 1。

| | 产品 I | 产品 II | 资源总量 |
|---|---|---|---|
| 机床加工 | 1 台时/件 | 2 台时/件 | 8 台时 |
| 铝 | 4 kg/件 | 0 kg/件 | 16 kg |
| 铜 | 0 kg/件 | 4 kg/件 | 12 kg |
| 利润 | 2 元/件 | 3 元/件 | |

假设 **GE** 想租用 **A** 工厂的设备并购买其原材料，那么 **A** 工厂就要对设备台时和原材料估价。

设$y_1$表示 **A** 工厂出租单位设备台时赚取的租金利润，$y_2, y_3$表示 **A** 工厂出售单位重量的铝、铜分别赚取的销售利润。那么，**GE** 租用设备和购买原材料的成本溢价为

$$w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

对 **GE** 而言，这个成本溢价应该越小越好：

$$\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

A 工厂出租台时和出售资源赚取的利润不能太低，为达成协议，至少应该能够保证工厂 A 卖出资源得到的利润，不小于自己生产产品得到的利润：

1 个单位的设备台时和 4kg 的铝可生产一件产品 I 而获利 2 元，那么对工厂 A 来说，出租这 1 个单位的设备台时加上出售 4kg 的铝获得的利润 $y_1+4y_2$，应不低于生产 1 件产品 I 的利润，即：$y_1+4y_2 \geq 2$。

（2)生产 1 件产品 II 的设备台时和原材料被出租/出售，收益应不低于 1 件产品 II 的利润：$2y_1+4y_3 \geq 3$。

假设决策者理性，那么 **GE** 为了能成功租到设备和购买到原材料，且使自己的付出最小，就需求解规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 & \\
y_1 + 4y_2 \qquad\qquad & \geq 2 \\
2y_1 \qquad\qquad + 4y_3 & \geq 3 \\
y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{aligned}
$$

称上述 **LP** 问题为原 **LP** 问题的对偶规划（**DP**，**Dual Programming**）。

最大化 LP 问题$\{\max z = \mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}; \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$与其对偶问题（DP）的对应关系：

$$\begin{array}{l} \max z = \mathbf{cx} \\ \quad \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \quad \ge \mathbf{0} \end{array} \quad \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l} \min w = \mathbf{yb} \\ \quad \mathbf{yA} \ge \mathbf{c} \\ \quad \mathbf{y} \quad \ge \mathbf{0} \end{array}$$

其中，$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$为行向量。

一般的，根据原 LP 问题系数矩阵**A**、**c**、**b**即可写出其对偶问题。

✧ 工厂 A 生产计划问题的原问题和对偶问题：

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \quad \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \min w &= \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} &\ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}=(2,3), \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\min w = (y_1, y_2, y_3)\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$(y_1, y_2, y_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \ge (2,3)$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 & \\ y_1 + 4y_2 \qquad\qquad &\ge 2 \\ 2y_1 \qquad\qquad + 4y_3 &\ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

## 2.2 原问题与对偶问题的关系

### ✧对称形式的对偶

考虑例 1 的“≤”型不等式约束的最大化（max）问题：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

根据经济意义，上述问题的对偶为“≥”型不等式约束的min（最小化）问题：

$$\min w = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \geq (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$$

上述原问题与对偶问题的变换关系称为对称形式或标准对偶，即：

$$\begin{array}{l} \max z = \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l} \min w = \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

。

例 3，已知原问题

$$\min z = \mathbf{cx} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix},\mathbf{c}=(2,3),\mathbf{b}=\begin{bmatrix}8\\16\\12\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

$$\min z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 11 \\ 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

写出其对偶问题。

解，先将最小化问题转换为标准形式：

$$\min z = 10x_1 + 3x_2 \qquad \max z = -10x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 11 \\ 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 11 \\ 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

上述max问题的对偶为

$$\max z = -10x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 11 \\ 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \min w = 5r_1 + 11r_2 + 10r_3 \\ \begin{cases} 1r_1 + 3r_2 + 0r_3 \ge -10 \\ 2r_1 - 2r_2 + 3r_3 \ge -3 \\ r_1, r_2, r_3 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

问题可进一步写为

$$\max w = -5r_1 - 11r_2 - 10r_3$$

$$\begin{cases} -r_1 - 3r_2 \leq 10 \\ -2r_1 + 2r_2 - 3r_3 \leq 3 \\ r_1, r_2, r_3 \geq 0 \end{cases}$$

令$y_1 = -r_1, y_2 = -r_2, y_3 = -r_3$，则原问题的对偶可表达为

$$\min z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 11 \\ 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \quad \max w = 5y_1 + 11y_2 + 10y_3 \quad \begin{cases} y_1 + 3y_2 \leq 10 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

# ✐对称形式的对偶结构

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{l} \max z = \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ \ge \mathbf{0} \end{array} \overset{对偶}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \min w = \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ \ge \mathbf{0} \end{array}$ | $\begin{array}{l} \min z = \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ \ge \mathbf{0} \end{array} \overset{对偶}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \max w = \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} \le \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ \le \mathbf{0} \end{array}$ |
| $\begin{array}{l} \max z = \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ \ge \mathbf{0} \end{array} \overset{对偶}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \min w = \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ \le \mathbf{0} \end{array}$ | $\begin{array}{l} \min z = \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ \ge \mathbf{0} \end{array} \overset{对偶}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \max w = \mathbf{yb} \\ \mathbf{yA} \le \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ \ge \mathbf{0} \end{array}$ |

## ✧非对称形式的对偶

非对称形式：原问题的约束条件中含有等式约束条件。

考虑等式约束条件的LP问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

注意到等式约束等价于

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i \end{cases}$$

于是可将等式约束条件等价为两个不等式约束：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \quad b_i, \ i=1,2,\dots,m \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i, \ i=1,2,\dots,m \\ x_j \ge 0, \ j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

设$y_i'$、$y_i''$分别是对应于上述两个约束的对偶变量，则可按照对称形式，写出上述模型的对偶问题为

$$\min w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i''$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i' + \sum_{i=1}^{m}(-a_{ij})y_i'' \ge c_j, \ j=1,2,\dots,n \\ y_i', y_i'' \ge 0, \ i=1,2,\dots,m \end{cases}$$

整理上式，有

$$\min w=\sum_{i=1}^{m} b_i(y_i'-y_i'')$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}(y_i'-y_i'')\ge c_j,\ j=1,2,\dots,n\\ y_i',y_i''\ge 0,\ \ i=1,2,\dots,m\end{cases}$$

令$y_i=y_i'-y_i''$（显然$y_i$可取任意实数），得到

$$\min w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

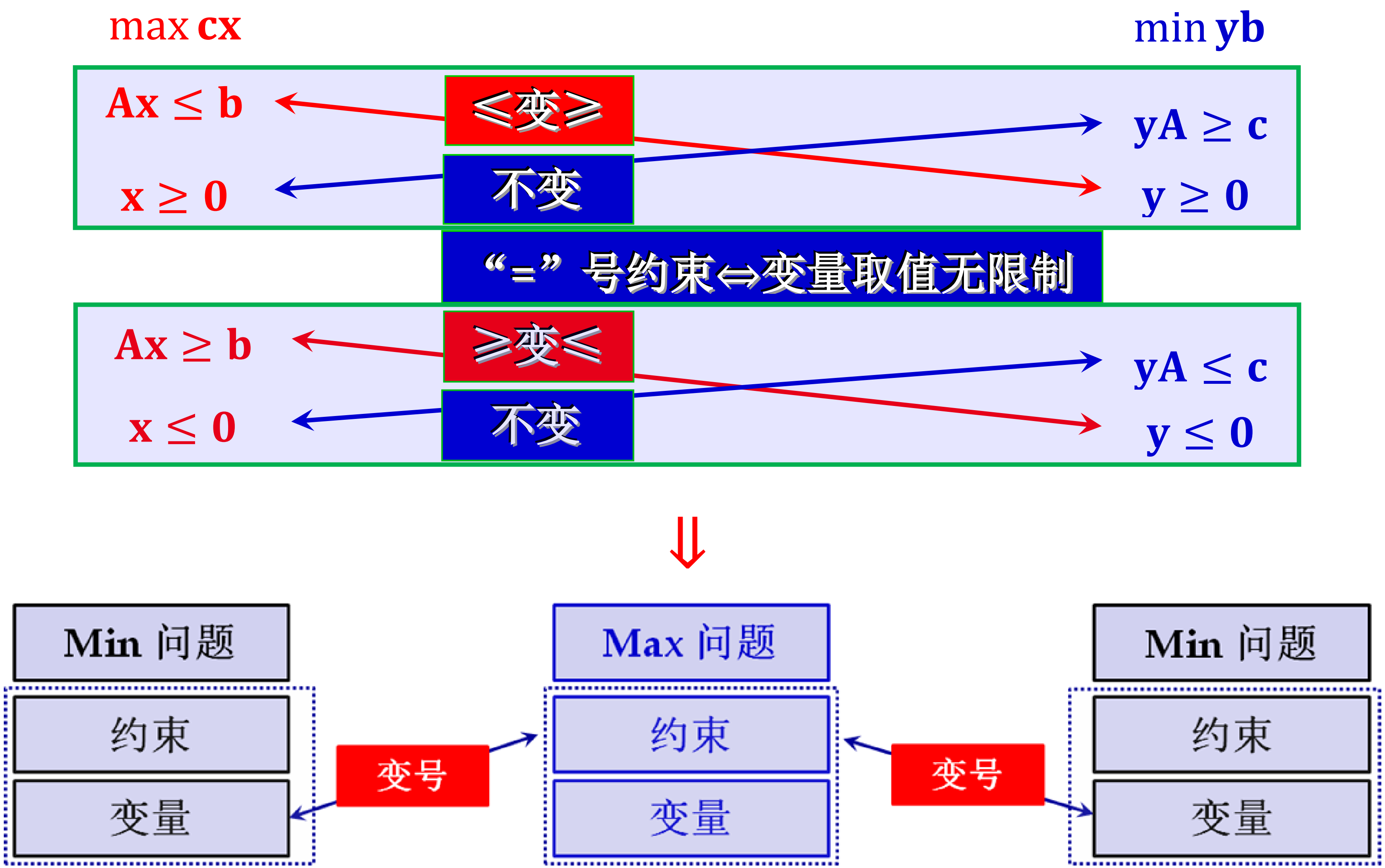
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\ge c_j,\ j=1,2,\dots,n\\ y_i\text{取值无约束},\ \ i=1,2,\dots,m\end{cases}$$

即，

$$\begin{array}{l} \max z=\mathbf{cx}\\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ \mathbf{x}\ \ge \mathbf{0}\end{array} \quad \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l}\min w=\mathbf{yb}\\ \mathbf{yA}\ge \mathbf{c}\\ \mathbf{y}\in \mathbf{R}\end{array}$$

反过来，若变量$\in \mathbf{R}$，则对偶问题的对应约束为等式。

# ✧对偶结构图



max cx
min yb
Ax ≤ b
≤变≥
yA ≥ c
x ≥ 0
不变
y ≥ 0
“=”号约束⇔变量取值无限制
Ax ≥ b
≥变≤
yA ≤ c
x ≤ 0
不变
y ≤ 0
⇓
Min 问题
约束
变量
变号
Max 问题
约束
变量
变号
Min 问题
约束
变量

**例 4**，求min型 **LP** 原问题的对偶问题。

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ \qquad\quad x_2 + \quad x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0; x_2, x_3 \geq 0;\ x_4\text{无约束} \end{cases}$$

**解**，设对偶变量为 $y_1, y_2, y_3$；根据原问题和对偶问题的对应关系，得到对偶问题。

$$\max w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} +1y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ +1y_1 + 0y_2 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ +1y_1 - 1y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

## 2.3 对偶问题的基本性质

（1）对称性：对偶问题的对偶是原问题。

（2）弱对偶性：设max型原问题为$\{\max z = \mathbf{cx}; \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}; \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$，其可行解为$\bar{\mathbf{x}}$；$\bar{\mathbf{y}}$是其对偶问题的可行解，则有$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$。[1]

证明，上述max型原问题的对偶问题是

$$\min w = \mathbf{yb}; \mathbf{yA} \ge \mathbf{c}; \mathbf{y} \ge \mathbf{0}$$

$\bar{\mathbf{y}}$是其可行解，因此有$\bar{\mathbf{y}} \ge \mathbf{0}$；又，$\bar{\mathbf{x}}$是原问题的可行解，所以：$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{b}$，以$\bar{\mathbf{y}}$左乘$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{b}$，得到：

[1] 最大化问题可行解的目标函数值不大于其最小化对偶问题可行解的目标函数值。

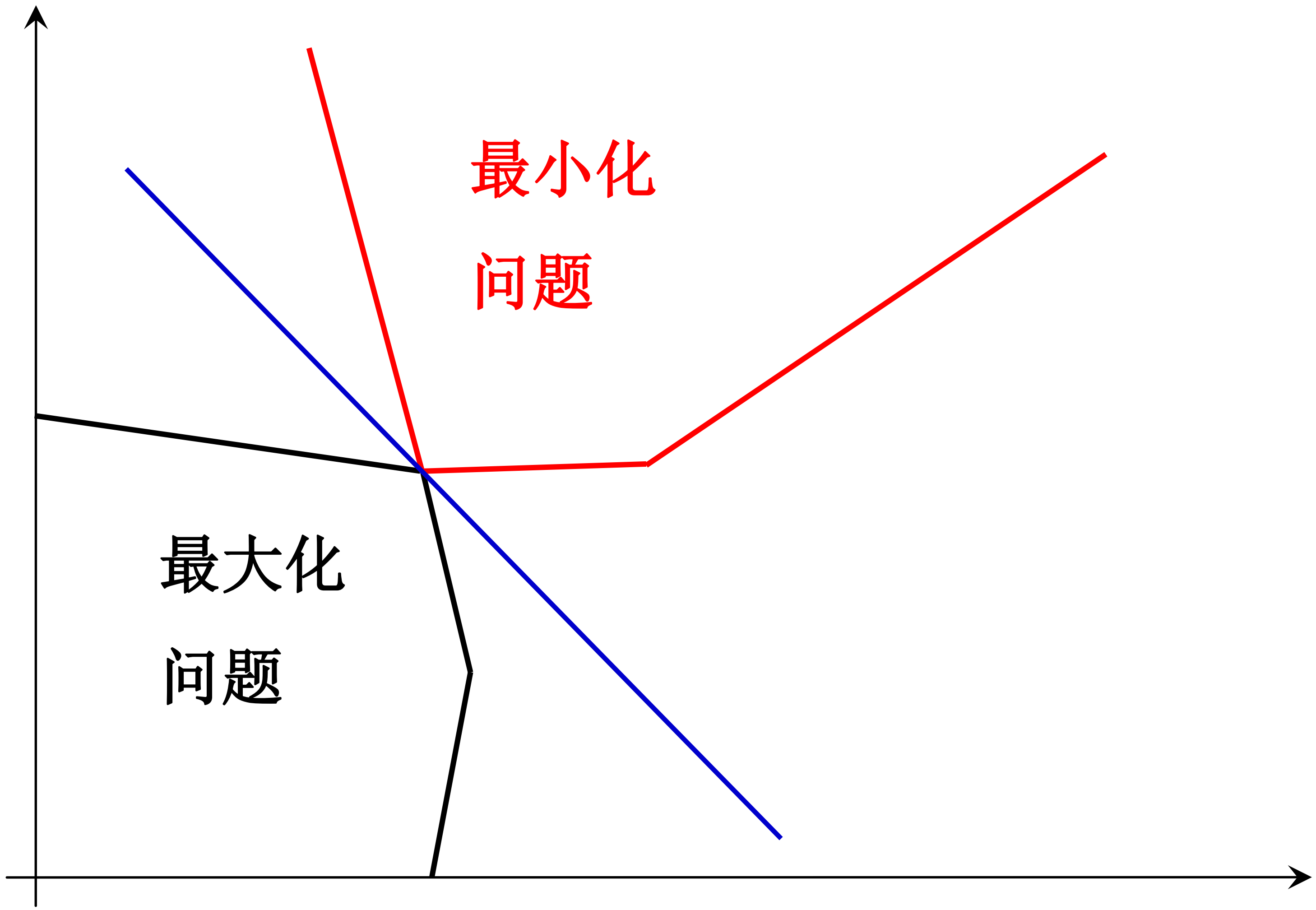
$$\bar{\mathbf{y}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$$

因$\bar{\mathbf{y}}$是对偶问题的可行解，故满足：$\bar{\mathbf{y}}\mathbf{A} \ge \mathbf{c}$；将$\bar{\mathbf{x}} \ge \mathbf{0}$右乘$\bar{\mathbf{y}}\mathbf{A} \ge \mathbf{c}$，得到：

$$\bar{\mathbf{y}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \ge \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$$

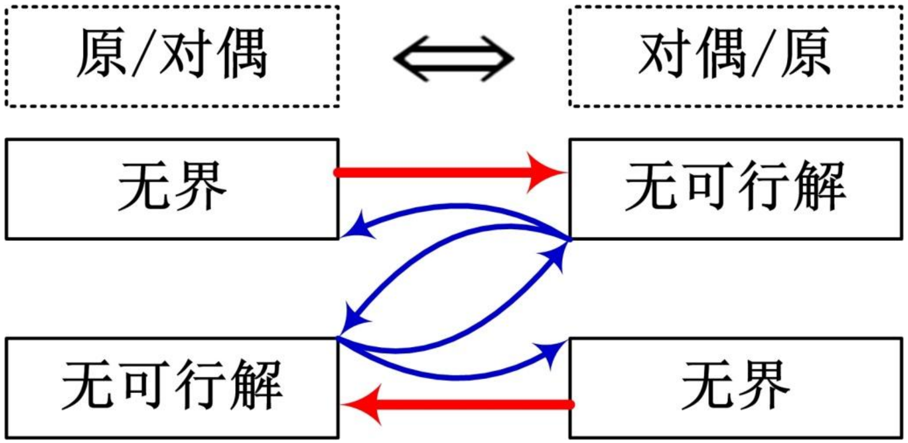
综上，有：$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$。■

直观的，最大化问题的最大值是其对偶最小化问题的一个下界；反过来，最小化问题的最小值是其对偶最大化问题的一个上界。


最小化
问题
最大化
问题

（3）无界性：若原问题无界，则其对偶问题无可行解；同样，对偶问题无界，则原问题无可行解。

✧注，该性质不可逆：当原问题无可行解时，其对偶问题可能具有无界解，但也可能和原问题一样无可行解；反之亦然。



（4）最优解的性质：设$\hat{\mathbf{x}}$是原问题可行解，$\hat{\mathbf{y}}$是对偶问题可行解。若$\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}$，则$\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{y}}$是各自的最优解。

证明，不失一般性，设原问题为最大化问题，对偶为最小化问题。

若$\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}$，根据弱对偶性：对偶问题的所有可行解$\bar{\mathbf{y}}$都成立$\bar{\mathbf{y}}\mathbf{b} \geq \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}$；因$\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}$，所以$\bar{\mathbf{y}}\mathbf{b} \geq \hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}$。可见$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}$是对偶问题最小化问题的最小值，因而$\hat{\mathbf{y}}$是其最优解。

同样可证明 $\hat{\mathbf{x}}$ 是原问题（最大化）的最优解。■

（5）强对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。

证明，设原问题为$\max z = \mathbf{cx}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，$\hat{\mathbf{x}}$是原问题的最优解，对应最优基矩阵为$\mathbf{B}$。那么检验数满足：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} - \mathbf{c_B B^{-1} A} \leq \mathbf{0}$$

取，$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c_B B^{-1}}$（即单纯形乘子），则有$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$。显然$\hat{\mathbf{y}}$是对偶问题的可行解（即，原问题最优解的单纯形乘子对应对偶问题的一个可行解）。

若$\hat{\mathbf{y}}$是对偶问题可行解，那么对偶问题函数值为：

$$w = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{b} = \mathbf{c_B B^{-1} b}$$

而原问题最优基为**B**，则其对应最优解$\hat{\mathbf{x}}$和最优目标函数值为

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B^{-1} b}; z^* = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c_B B^{-1} b}$$

由此得到：$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{b} = \mathbf{c_B B^{-1} b} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}$，由性质（4）可知，$\hat{\mathbf{y}}$是对偶问题的最优解，且最优函数值相等。

更具体的，原问题的最优单纯形乘子就是对偶问题的最优解。■

（6）互补松弛定理：设$\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{y}}$是原问题及其对偶的可行解；$\mathbf{x}_S$为原问题的松弛变量，$\mathbf{y}_S$为对偶问题的剩余变量。则：

$$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_S = 0 \text{ and } \mathbf{y}_S\hat{\mathbf{x}} = 0 \xLeftrightarrow{\text{充分必要条件}} \hat{\mathbf{x}}、\hat{\mathbf{y}}\text{为各自的最优解。}$$

证明，设原始-对偶为：$\begin{array}{l} \max z = \mathbf{cx} \\ \begin{cases} \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{x}_S \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$和$\begin{array}{l} \min w = \mathbf{yb} \\ \begin{cases} \mathbf{yA} - \mathbf{y}_S = \mathbf{c} \\ \mathbf{y}, \mathbf{y}_S \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$。

由对偶问题知$\mathbf{c} = \mathbf{yA} - \mathbf{y}_S$，代入原问题，得到

$$z = \mathbf{cx} = (\mathbf{yA} - \mathbf{y}_S)\mathbf{x} = \mathbf{yAx} - \mathbf{y}_S\mathbf{x} \qquad (15)$$

同理，由原问题知$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_S$，代入对偶问题，得到

$$w = \mathbf{yb} = \mathbf{y}(\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_S) = \mathbf{yAx} + \mathbf{yx}_S \qquad (16)$$

“$\Rightarrow$”方向：对于原问题和对偶问题的可行解$\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{y}}$，若$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_S = 0 \text{ and } \mathbf{y}_S\hat{\mathbf{x}} = 0$，则有$z = w = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$，由性质 4 可知$\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{y}}$是各自最优解。

“$\Leftarrow$”方向：若$\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{y}}$是原问题和对偶问题最优解，性质 5 和（15）、（16）式给出：$\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}_S\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_S = \hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}$，即：$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_S + \mathbf{y}_S\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$，而$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{x}_S, \mathbf{y}_S$各分量非负，因此必有：

$$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_S = 0 \text{ and } \mathbf{y}_S\hat{\mathbf{x}} = 0$$

进一步，对乘积的各分量，均有：$\hat{y}_i x_{Si} = 0 \text{ and } y_{Si}\hat{x}_i = 0$。

■

（7）设原问题：$\max z = \mathbf{cx}\,; \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_S = \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{x}_S \geq \mathbf{0}$，对偶问题： $\min w = \mathbf{yb}\,; \mathbf{yA} - \mathbf{y}_S = \mathbf{c}; \mathbf{y}, \mathbf{y}_S \geq \mathbf{0}$，则原问题单纯形表检验数行对应对偶问题的一个基解(注：不一定是可行基)。

| | $\mathbf{x_B}$ | $\mathbf{x_N}$ | $\mathbf{x}_S$ |
|---|---|---|---|
| $\sigma_j \longrightarrow$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{c_N} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ | $-\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$ |
| $y_j \longrightarrow$ | $-\mathbf{y}_{S1} = \mathbf{0}$ | $-\mathbf{y}_{S2}$ | $-\mathbf{y}$ |

$\mathbf{y}_{S1}$：原问题中基变量$\mathbf{x_B}$的对偶问题对应的剩余变量

$\mathbf{y}_{S2}$：原问题中非基变量$\mathbf{x_N}$的对偶问题对应的剩余变量

证明：设B是原问题一个可行基，$\mathbf{A}=(\mathbf{B},\mathbf{N})$；原问题及其对偶问题为

$$\max z=\mathbf{c_B x_B}+\mathbf{c_N x_N}$$
$$\begin{cases}\mathbf{Bx_B}+\mathbf{Nx_N}\le\mathbf{b}\\ \mathbf{x_B},\mathbf{x_N}\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

$$\min w=\mathbf{yb}$$
$$\begin{cases}\mathbf{yB}\ge\mathbf{c_B}\\ \mathbf{yN}\ge\mathbf{c_N}\\ \mathbf{y}\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

上述两个模型的标准形式可表示为

$$\max z=\mathbf{c_B x_B}+\mathbf{c_N x_N}$$
$$\begin{cases}\mathbf{Bx_B}+\mathbf{Nx_N}+\mathbf{x}_S=\mathbf{b}\\ \mathbf{x_B},\mathbf{x_N},\mathbf{x}_S\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

$$\min w=\mathbf{yb}$$
$$\begin{cases}\mathbf{yB}-\mathbf{y}_{S1}=\mathbf{c_B}\quad（17）\\ \mathbf{yN}-\mathbf{y}_{S2}=\mathbf{c_N}\quad（18）\\ \mathbf{y},\mathbf{y}_{S1},\mathbf{y}_{S2}\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

当求得原问题的一个解$\mathbf{x_B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$，其相应的检验数为：$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{B}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{N}=\mathbf{c_N}-\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$，$\boldsymbol{\sigma}_S=-\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$。

令$\mathbf{y}=\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$，代入（17），(18）式，有

$\mathbf{y}_{S1}=\mathbf{0}$、$\mathbf{y}_{S2}=\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c_N}$，以及$\mathbf{y}=\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$

$\mathbf{y}$是$m$维向量，$\mathbf{y}_{S2}$是$n-m$维向量，于是向量$(\mathbf{y},\mathbf{y}_{S2})$为$n$维向量，而对偶问题的约束个数恰好是$n$个。

基解：满足约束条件（变量非负约束除外），且非零分量个数不超过方程个数的解就是基解。于是$(\mathbf{y},\mathbf{y}_{S1},\mathbf{y}_{S2})$就是对偶问题的一个基解（注：不一定是基可行解，因为$\mathbf{y}_{S2}$可能为负数）。■

**例 5**，已知 **LP** 问题

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} - \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

用对偶理论证明上述 **LP** 问题的解无界。

**证明**，原问题的对偶问题为:

$$\min w = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ \quad y_1 + \quad y_2 \ge 1 \\ \quad y_1 - \quad y_2 \ge 0 \\ \qquad y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由第 1 个约束知，对偶问题无可行解，则原问题或者无可行解，或者是无界解。

然而原问题有可行解，如$\mathbf{x}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$就满足原问题约束方程：

$$\begin{cases} -\ \ x_1+x_2+x_3\le 2 \\ -2x_1+x_2-x_3\le 1 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

所以排除原问题无可行解的情况，于是原问题无解。

**例 6，有 LP 问题**

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \quad + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

已知其对偶问题的最优解为$y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z^* = 5$。试找出原问题的最优解。

解，首先写出原问题的对偶问题

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 \\ y_1 - \ \ y_2 \le 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \le 5 \\ y_1 + \ \ y_2 \le 2 \\ 3y_1 + \ \ y_2 \le 3 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

将$y_1^* = 4/5$，$y_2^* = 3/5$，代入约束，第 **2**、**3**、**4** 约束为严格不等式，由互补松弛性得$x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。

因$y_1^*, y_2^* > 0$，由互补松弛性可知原问题两个约束的剩余变量为 **0**，

故$\begin{cases} x_1 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + \ \ x_5 = 3 \end{cases}$ ⇒解得$x_1^* = 1, x_5^* = 1$，于是最优解为

$$\mathbf{x}^* = (1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}，\ w^* = z^* = 5$$

## 2.4 对偶问题的经济解释

在单纯形法的每步迭代中，目标函数值$z=\mathbf{c_B B^{-1} b}$和检验数$\mathbf{c_N}-\mathbf{c_B B^{-1} N}$中都有乘子$\mathbf{c_B B^{-1}}$。若$\mathbf{B}$是最优基，则对应的$\mathbf{y}$是对偶问题最优解的一部分。

设 $\mathbf{B}$ 是 $\{\max z=\mathbf{cx}\,|\mathbf{Ax}\le\mathbf{b};\mathbf{x}\ge\mathbf{0}\}$ 的最优基，则有$z^*=\mathbf{c_B B^{-1} b}=\mathbf{y^* b}$，对$\mathbf{b}$求偏导：

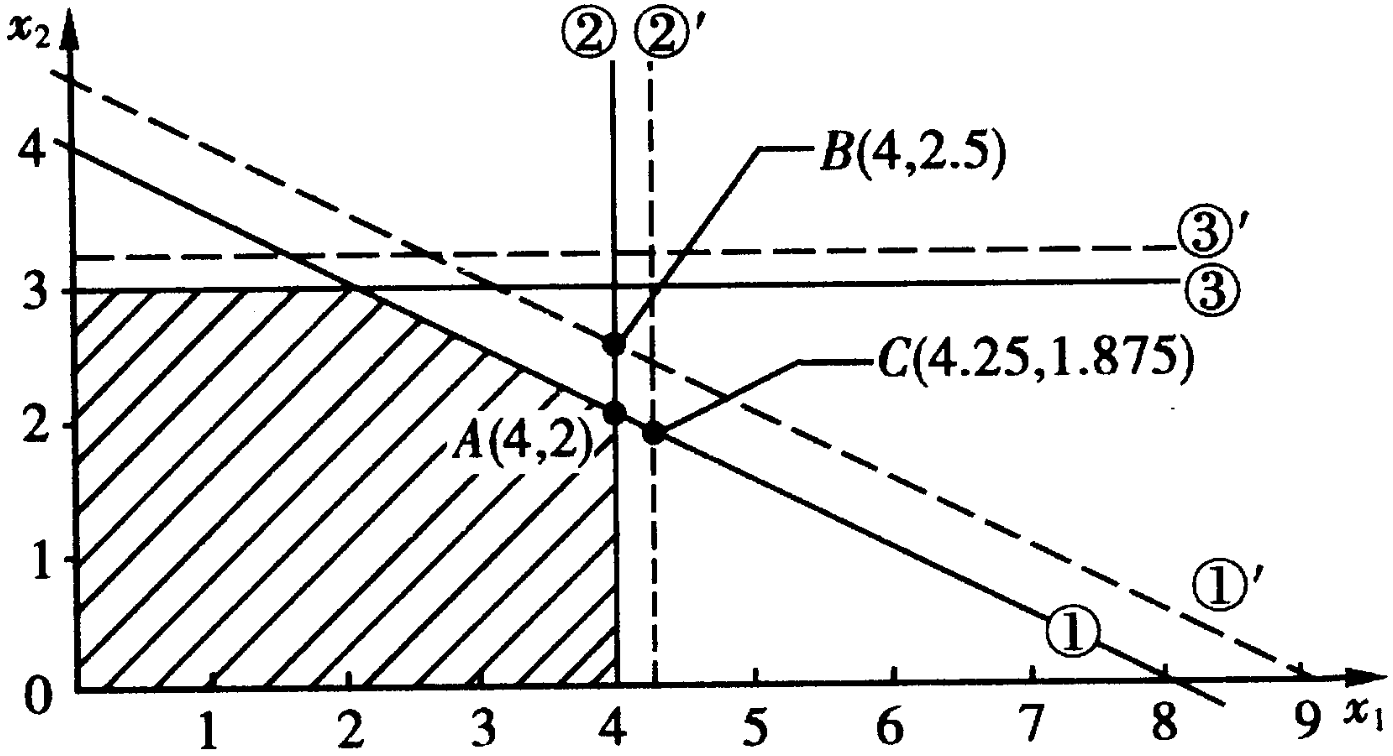
$$\frac{\partial z^*}{\partial \mathbf{b}}=\mathbf{c_B B^{-1}}=\mathbf{y}^*$$

变量$y_i^*$的经济意义：在其它条件不变的情况下，单位资源变化引起的目标函数最优值的变化。

| $c_j \rightarrow$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{c_B}$ | $\mathbf{x_B}$ | **b** | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
| 2 | $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | |
| 0 | $x_5$ | 4 | 0 | 0 | -2 | 1/2 | 1 | |
| 3 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 1/2 | -1/8 | 0 | |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | 0 | $-1.5$ | $-0.125$ | $0$ | |
| | | | | | | $-\mathbf{y}=-\mathbf{C_B B^{-1}}$ | | |

由最终计算表，得：$\mathbf{y} = \mathbf{C_B B^{-1}} = (1.5, 0.125, 0)$。

涵义：其他条件不变，若设备增加 1 台时，该厂按最优计划安排生产可多获利 1.5 元；铝增加 1kg，可多获利 0.125 元；铜增加 1kg，对获利无影响。




设备增加 1 台时，约束由①移至①’，最优解(4,2)变为(4,2.5)，目标函数$z = 15.5$；铝增加 1kg，约束由②移至②’，最优解变为(4.25,1.875)，目标函数$z = 14.125$；铜增加 1kg，约束由③移至③’，最优解不变。

$y_i^*$代表对企业第$i$种资源的估价，是针对具体工厂的具体产品而存在的一种特殊价格，称为“影子价格”。

在该厂现有资源和现有生产方案下，设备每小时租让费应为“**1.5** 元+折旧”，**1kg** 铝出让费为“**0.125** 元+成本价”，**1kg** 铜可按“成本价”出让，这时该厂的收入与自己组织生产时获利相等。

影子价格代表资源拥有者（生产企业）对资源的估价，它和市场价格相对。

## ✧影子价格对市场的调节作用

影子价格随具体情况而异，在完全市场经济条件下，当某种资源的市场价低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大生产；

当某种资源的市场价高于企业影子价格时，企业应把已有资源卖掉。

影子价格在资源的一定数量范围内才成立，当资源数量变化过大时，影子价格将会变化；灵敏度分析用来解决这一问题。