第六章 连续系统建模与仿真

一. 简单微分模型

二. 基于微分方程的建模方法与仿真

三. Arena连续模型与离散/连续组合模型

离散系统仿真

是由事件驱动的，事件的发生是离散且随机的，即系统状态变量的取值依时间轴离散且随机分布的。

连续系统仿真

是基于活动的仿真模式，系统的状态随时间连续变化，仿真时钟将时间轴分为很多细小的连续的碎片，时钟沿着碎片有序推进，系统变量在每个时间碎片上依据活动的动态变化进行相应的取值。

一. 简单微分模型

例. 某雪球直径20 cm，以1 cm^3/s的速度融化。(1) 它的半径以什么速度在缩小。(2) 它的表面积如何变化?

(1)

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} = \frac{d(4\pi r^3/3)}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \times r' = 1\ cm^3/s$$

(2)

$$A = 4\pi r^2$$

$$A' = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 8\pi r \times r'$$

二. 基于微分方程的建模方法与仿真

1. 一般处理动态连续问题

动态问题

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

2. 微分方程建模常用方法

- **根据规律列方程**
  - 通过运用已知的基本公式或基本定理建立常微分方程
  - 根据实际问题本身给定或隐含的条件建立常微分方程
- **导数分析法**

$$\frac{dy}{dx} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- **微元分析法**

$$dI = \Delta I \approx f(x)dx$$

- **模拟近似法**

3. 传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

模型1 已感染人数 (病人) $i(t)$

假设 • 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模 $i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\frac{di}{dt}=\lambda i \\ &i(0)=i_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow i(t)=i_0 e^{\lambda t} \quad \Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \ ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2-SI 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

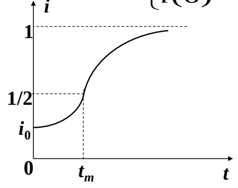
假设 1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病 λ~ 日接触率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$

$$\begin{aligned} &\frac{di}{dt}=\lambda si \\ &s(t)+i(t)=1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2 $\begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$



$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m=\lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ(日接触率)↓ → t_m↑

$t\to\infty\Rightarrow i\to 1$?

病人可以治愈！

模型3-SIS 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ μ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ~ 日接触率

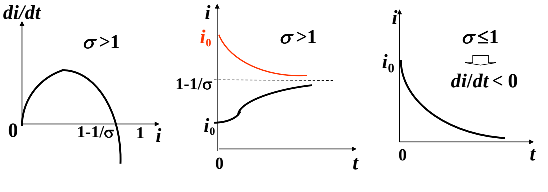
$1/\mu$~感染期

$\sigma=\lambda/\mu$

σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数。

模型3

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})] \Rightarrow i(\infty)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1 \\ 0, & \sigma\le 1 \end{cases}$$



$\sigma>1$, i_0小 $i(t)$按S形曲线增长 **接触数σ =1阈值**

$\sigma\le 1\to i(t)\downarrow$ 感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型4-SIR 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者

假设 1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ, 接触数 $\sigma=\lambda/\mu$

建模 $s(t)+i(t)+r(t)=1$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}\Rightarrow$$

无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

⇩

在相平面 $s\sim i$ 上研究解的性质

$i_0+s_0\approx 1$（通常 $r(0)=r_0$ 很小）

模型4

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}\xrightarrow[\sigma=\lambda/\mu]{\text{消去}dt}\begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\ i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$

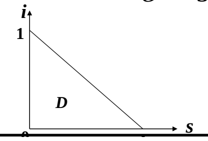
相轨线 ⇩

$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

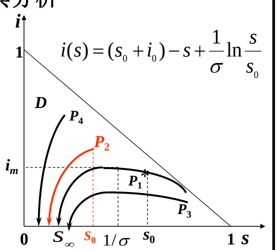
$$D=\{(s,i)\mid s\ge 0,\ i\ge 0,\ s+i\le 1\}$$

在 D 内作相轨线 $i(s)$ 的图形，进行分析



模型4 相轨线 $i(s)$ 及其分析

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\ i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$s=1/\sigma,\ i=i_m\qquad t\to\infty,\ i\to 0$

s_∞满足 $s_0+i_0-s_\infty+\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1: $s_0>1/\sigma$ → $i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: $s_0<1/\sigma$ → $i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

$1/\sigma$~阈值

模型4 预防传染病蔓延的手段

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow,\ \mu\uparrow$

  λ(日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

  μ(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑

- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

  $s_0+i_0+r_0=1$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0\qquad \text{忽略}i_0\qquad \sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

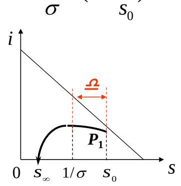
模型4 被传染人数的估计

记被传染人数比例 $x=s_0-s_\infty$

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0\ \xrightarrow[i_0\cong 0,\ s_0\cong 1]{}\ x+\frac{1}{\sigma}\ln\left(1-\frac{x}{s_0}\right)\cong 0$$

$$\xrightarrow[x\ll s_0]{}\ x\left(1-\frac{1}{s_0\sigma}-\frac{x}{2s_0^2\sigma}\right)\cong 0$$

$$\Rightarrow x\approx 2s_0\sigma\left(s_0-\frac{1}{\sigma}\right)$$



$s_0-1/\sigma=\delta$ ⇨ $x\cong 2\delta$

δ小, $s_0\sigma\cong 1$

提高阈值$1/\sigma$→降低被传染人数比例 x

模型5-SEIR 传染病有潜伏期

假设 1）总人数N不变，病人、健康人、潜伏者和移出者的比例分别为$i(t), s(t), e(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ，日治愈率μ，接触数 $\sigma=\lambda/\mu$

3）单位时间内潜伏者以比例常数β转为染病者

建模 $s(t)+i(t)+e(t)+r(t)=1$

建立 $i(t), s(t), e(t), r(t)$ 方程

模型5

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ \dfrac{de}{dt} = \lambda si - \beta e \\ \dfrac{di}{dt} = \beta e - \mu i \\ \dfrac{dr}{dt} = \mu i \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0, e(0) = e_0 \end{cases}$$

微分方程的建模步骤

- **翻译或转化**

  实际问题中表示导数的常用词，速率、增长、衰变、边际

- **建立瞬时表达式**

  自变量的微小变化Δt时因变量增量ΔW，建立Δt上的增量表达式，令$\Delta t \to 0$，即得到$\frac{dW}{dt} = 0$的表达式。

- **配备物理单位**

  在建模时注意采用相同的物理单位

- **确定条件**

  系统在某一特定边界或时刻上的信息，相对于微分方程而言独立，常用来确定相关常数。

4. 微分方程的仿真求解

欧拉算法

设$x_{i+1} - x_i = h\ (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$,可以用以下离散化方法求解微分方程。

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

若步长较小，则

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

故有公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

几何意义：折线逼近曲线，一阶的Runge-Kutta法

三. Arena连续模型与离散/连续组合模型

1. 简单的连续模型

某种液体产品以每分钟10体积单位的速度注入容器

模型11-1

- **Elements Panel（构模元素）**
  - **Level模块：定义水平变量Tank Volume**
  - **Rates模块：定义变化速度**
  - **Continuous模块：连续模型设置**

三. Arena连续模型与离散/连续组合模型

1. 简单的连续模型

某种液体产品以每分钟10体积单位的速度注入容器

模型11-1

- **Elements Panel（构模元素）**
  - **Level模块：定义水平变量Tank Volume**
  - **Rates模块：定义变化速度**
  - **Continuous模块：连续模型设置**

2. 连续模型和离散逻辑的结合

某种液体产品以每分钟10体积单位的速度注入容器，流入10分钟后体积达到100，然后以每分钟10体积单位的速度排空容器，10分钟后流光。重复该过程

模型11-2

- **Elements Panel（构模元素）**
  - **Level模块：定义水平变量Tank Volume**
  - **Rates模块：定义变化速度**
  - **Continuous模块：连续模型设置**
  - **Detect模块：检测连续水平值，根据阈值创建实体**

2. 连续模型和离散逻辑的结合

煤从煤场通过卸煤槽运到四个码头，装上驳船。存储场的出煤速度为2400吨/小时，煤通过四条卸煤槽在码头装船。

拖船到达装载设备后，等到四个码头中任意一个空闲，码头工人即将拖船和驳船连在一起，准备装船，连接过程需花费TRIA（2,5,10）分钟，所装煤的数量取决于驳船的数量和大小。

模型11-3

运输能力	300	400	450	500	550	600	650	700	800	1000
比例	12	3	13	7	8	12	24	3	11	7

驳船运输能力分布

完成装船后，码头工人解开驳船和拖船，拖船开走离开码头。花费TRIA（3,4.5,7.5）分钟，装载设备一天工作24小时，全天拖船到达分布如下。

时间段	平均每小时到达的拖船数量
12:00 am-2:00 am	0.50
2:00 am-6:00 am	1.00
6:00 am-8:00 am	2.00
8:00 am-12:00 pm	3.50
12:00 pm-1:00 pm	1.75
1:00 pm-3:00 pm	2.75
3:00 pm-4:00 pm	4.00
4:00 pm-6:00 pm	5.00
6:00 pm-8:00 pm	4.50
8:00 pm-9:00 pm	2.50
9:00 pm-10:00 pm	1.00
10:00 pm-12:00 am	0.50

3. 状态连续变化系统

均热炉加热铁锭，为下一步的辗轧做准备，铁锭到达均热炉的间隔时间服从均值为2.25小时的指数分布，均热炉中最多容纳9块铁锭，铁锭之间的装入和出炉都是相互独立的。铁锭在均热炉加热到2200度后离开均热炉。

刚进入均热炉的铁锭温度在300-500度之间，均匀分布。均热炉的温度会因为铁锭的装入而降低，假设温度改变是即时发生的，等于铁锭温度与当时炉内温度之间的差值除以铁锭数量。

炉内加热时，单位时间温度改变量为2（2600-当前炉温），铁锭温度变化速度为0.15（炉温-铁锭温度）

模型11-4