

第五节 0-1规划建模

1、生产计划问题

④ W玻璃制品公司开发以下两种新产品：

- ✓ 8英尺铝框玻璃门
- ✓ 4英尺×6英尺的双把木框窗

④ 公司有以下三个工厂：

- 工厂1生产铝框和五金件
- 工厂2生产木框
- 工厂3生产玻璃，并组装窗与门

成本与利润信息

工厂	单位产品生产时间（小时）		每周可用时间 （小时）
	门（Doors）	窗（Windows）	
1	1小时/门框	—	4
2	—	2小时/窗框	12
3	3小时/门	2小时/窗	18
单位利润 （美元）	300	500	

利润最大的线性规划模型：

- 决策变量：

- D：门的生产数量； W：窗的生产数量

- 目标函数： $\max \text{Profit} = 300D + 500W$

- 约束条件： s.t.

- 工厂1 $1D \leq 4$

- 工厂2 $2W \leq 12$

- 工厂3 $3D + 2W \leq 18$

- 非负性约束： $D, W \geq 0$

② 新情景:

对于每一种产品，在开始生产之前都需要为调试生产设备支出一次性的生产准备成本。

✓ 门的的生产准备成本为 \$700

✓ 窗的生产准备成本为 \$1300

新考虑

问题：两种产品各生产多少可获利最大？

④ 新的利润函数：

$$P = \begin{cases} 300D - 700 \\ 500W - 1300 \\ 300D + 500W - 700 - 1300 \end{cases}$$

只生产门： $D \geq 1$

只生产窗： $W \geq 1$

都生产： $D \geq 1, W \geq 1$

分段线性函数

④ 引入“辅助0-1变量”：

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{如果生产门} \\ 0 & \text{如果不生产门} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{如果生产窗} \\ 0 & \text{如果不生产窗} \end{cases}$$

④ 新问题的数学规划模型

$$\text{Max } P = 300D + 500W - 700y_1 - 1300y_2$$

s.t.

原约束:

$$\text{工厂 1: } D \leq 4$$

$$\text{工厂 2: } 2W \leq 12$$

$$\text{工厂 3: } 3D + 2W \leq 18$$

生产种类约束:

$$\text{门: } D \leq 9999y_1$$

$$\text{窗: } W \leq 9999y_2$$

Why?



$D \geq 0, W \geq 0$ 且为整数, y_1 与 y_2 为0-1变量

2、新厂运作决策

④ W公司生产门和窗，已经有以下三个工厂：

- 工厂1生产铝框和五金件
- 工厂2生产木框
- 工厂3生产玻璃，并组装窗与门

公司最近新建了工厂4，也可生产这两种产品；但为管理方便，管理层决定在工厂3或4中只选一个来运行——“二选一”约束。

问题：选哪些厂生产，生产多少？

生产数据

工厂	单位产品生产时间（小时）		可用生产时间（小时）
	门	窗	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
4	2	4	28
单位利润	\$300	\$500	

若不考虑“二选一”，则产能约束为：

$$\text{工厂3: } 3D+2W \leq 18$$

$$\text{工厂4: } 2D+4W \leq 28$$

考虑“二选一”约束的表示

定义辅助0-1变量,

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{选择工厂3} \\ 0 & \text{不选工厂3} \end{cases} \quad y_4 = \begin{cases} 1 & \text{选择工厂4} \\ 0 & \text{不选工厂4} \end{cases}$$

工厂3: $3D + 2W \leq 18 \rightarrow 3D + 2W \leq 18 + 999(1-y_3)$

工厂4: $2D + 4W \leq 28 \rightarrow 2D + 4W \leq 28 + 999(1-y_4)$

二选一: $y_3 + y_4 = 1$

选一个充分大的正数即可，不一定是9999。

数学模型

$$\text{Max } P = 300D + 500W$$

s.t.

原约束:

$$\text{工厂 1: } D \leq 4$$

$$\text{工厂 2: } 2W \leq 12$$

二选一约束:

$$\text{工厂 3: } 3D + 2W \leq 18 + 999(1 - y_3)$$

$$\text{工厂 4: } 2D + 4W \leq 28 + 999(1 - y_4)$$

$$y_3 + y_4 = 1$$

$$D \geq 0, W \geq 0; \quad y_3 \text{ 与 } y_4 \text{ 为 0-1 变量}$$

约束作用机理:

(1) 如果选中工厂3, 那么 $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ 。于是工厂4的约束右端项充分大, 这个约束实际上就不起作用, 而只有工厂3的约束起作用, 这就相当于不考虑工厂4。

(2) 如果选中工厂4, 那么 y_3 和 y_4 的0-1机制将使得工厂4的约束发挥作用而工厂3实际上就被淘汰了。