2015 级数学分析(II)期末试题

姓名: ______________ 班级: __________ 学号: __________

考试日期: 2016年6月30日

1. （10 分）请讨论以下级数的敛散性，并证明你的结论：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-1\Big].$$

2. （10 分）求极限：$\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$ =?（要求写清楚中间步骤和理由依据）

3. （10 分）考虑由抛物面和平面截成的曲线：$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = x+2. \end{cases}$

请求出此曲线在两点 $(0,2,1)$ 和 $\left(1,3,\dfrac{5}{2}\right)$ 之间的弧长。

4. （10 分）设集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ 的所有聚点都是内点。请证明：如果 E 没有孤立点，则 E 或为空集，或为整个空间 $\mathbf{R}^n$.

5. （12 分）请证明课本上的以下结论：设开集 $D \subset \mathbf{R}^n$，映射 $\boldsymbol{f}: D \longrightarrow \mathbf{R}^m$. 则 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续的充要条件是：对任意开集 $G \subset \mathbf{R}^m$，集合 $\boldsymbol{f}^{-1}(G) \in \mathbf{R}^n$ 是开集。

6.（16 分）

(1) 求出 $f(x) = \sin ax$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数，其中 $a \notin \mathbf{Z}$.

(2) 以上 Fourier 级数是否收敛于 $f(x)$? 请说明结论是否成立的理由。

(3) 以上 Fourier 级数是否依范数收敛于 $f(x)$? 请说明结论是否成立的理由。

(4) 以上 Fourier 级数在区间 $[-3, 3]$ 上是否一致收敛于 $f(x)$? 请说明结论是否成立的理由。

7. （16 分）设映射 $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ 和 $\boldsymbol{g}: \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^l$ 都可微，则有链式法则 $J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot J(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$ 成立。请问：如果外映射 $\boldsymbol{g}$ 或者内映射 $\boldsymbol{f}$ 不可微，链式法则是否成立？链式法则成立至少需要什么条件？请证明你的结论或者举出反例。

8.（16 分）记 $\binom{\alpha}{n} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

请问当 $\alpha = \dfrac{1}{8}$ 和 $\alpha = -2$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 是发散、条件收敛还是绝对收敛？请证明你的结论。