整数规划问题建模实例

案例1：California 制造公司建厂问题

California制造公司在加州多地有工厂和仓库，但在Los Angeles和San Francisco还没有；为扩展业务，选择在两地建新厂，并考虑在建厂所在地建配套仓库（也可以不建配套仓库）；但若两地都建厂，则最多只能在以上两地选一个地点建仓库。

问题：为给公司带来最大的长期效益，是否建厂？建在哪里？是否建仓库？建在哪里？

相　关　信　息

决策序号	Yes/No	决策变量（0-1）	利润值（百万$）	所需资金（百万$）
1	在Los Angeles建厂?	x_1	8	6
2	在San Francisco建厂?	x_2	5	3
3	在Los Angeles建仓库?	x_3	6	5
4	在San Francisco建仓库?	x_4	4	2
				可用资金: $10 million

$$\text{Max} \quad NPV = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

s.t.

资金: $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$

最多一个仓库: $x_3 + x_4 \le 1$

仓库依工厂而建: $x_3 \le x_1$

$x_4 \le x_2$

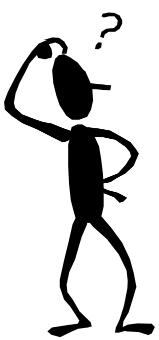
0-1变量: x_1, x_2, x_3, x_4 均为0或1

$x_1 = 1$: 若在L.A.建厂；否则$x_1 = 0$;

$x_2 = 1$: 若在S.F. 建厂；否则$x_2 = 0$;

$x_3 = 1$: 若在L.A.建仓库; 否则$x_3 = 0$;

$x_4 = 1$: 若在S.F.建仓库；否则$x_4 = 0$。



仓库最多只建一个
为何是$x_3 + x_4 \le 1$?
而不是$x_3 + x_4 = 1$?

案例2：W门窗公司生产计划问题

- W玻璃制品公司开发以下两种新产品：
  - ✓ 8英尺铝框玻璃门
  - ✓ 4英尺×6英尺的双把木框窗
- 公司有以下三个工厂：
  - 工厂1生产铝框和五金件
  - 工厂2生产木框
  - 工厂3生产玻璃，并组装窗与门
- 决策变量为门、窗生产数量（整数）

成本与利润信息

工厂	单位产品生产时间（小时）		每周可用时间（小时）
	门（Doors）	窗（Windows）	
1	1小时/门框	—	4
2	—	2小时/窗框	12
3	3小时/门	2小时/窗	18
单位利润（美元）	300	500	

线性规划模型：

- 决策变量：
  - D：门的生产数量；W：窗的生产数量
- 目标函数：$\max \ Profit = 300D + 500W$
- 约束条件： s.t.

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{工厂1} & 1D & & \leq 4 \\
\text{工厂2} & & 2W & \leq 12 \\
\text{工厂3} & 3D + & 2W & \leq 18
\end{array}
$$

- 非负性约束：$D, W \geq 0$

新情景：

对于每一种产品，在开始生产之前都需要为调试生产设备支出一次性的生产准备成本。

- ✓门的生产准备成本为 $700
- ✓窗的生产准备成本为 $1300

新考虑

问题：两种产品各生产多少可获利

新的利润函数：

$$P=\begin{cases}300D-700 & \text{只生产门：} D\geq 1\\ 500W-1300 & \text{只生产窗：} W\geq 1\\ 300D+500W-700-1300 & \text{都生产：} D\geq 1, W\geq 1\end{cases}$$

分段线性函数

引入“辅助0-1变量”：

$$y_1=\begin{cases}1 & \text{如果生产门}\\ 0 & \text{若不生产门}\end{cases}\qquad y_2=\begin{cases}1 & \text{如果生产窗}\\ 0 & \text{若不生产窗}\end{cases}$$

新问题的数学规划模型

Max $\quad P = 300D + 500W - 700y_1 - 1300y_2$

s.t.

原约束：

工厂 1: $\quad D \le 4$

工厂 2: $\quad 2W \le 12$

工厂 3: $\quad 3D + 2W \le 18$

生产种类约束：

门: $\quad D \le 9999y_1$

窗: $\quad W \le 9999y_2$

$D \ge 0$, $W \ge 0$ 且为整数, y_1 与 y_2 为0-1变量

案例3：W门窗公司新厂运作决策

- W公司生产门和窗，已经有以下三个工厂：
  - 工厂1生产铝框和五金件
  - 工厂2生产木框
  - 工厂3生产玻璃，并组装窗与门

公司最近新建了工厂4，也可生产这两种产品；但为管理方便，管理层决定在工厂3或4中只选一个来运行——“二选一”约束。

问题：选哪些厂生产，生产多少？

生产数据

工厂	单位产品生产时间（小时）		可用生产时间（小时）
	门	窗	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
4	2	4	28
单位利润	$300	$500	

若不考虑"二选一"，则产能约束为：

工厂3：$3D+2W \leq 18$　　工厂4：$2D+4W \leq 28$

考虑“二选一”约束的表示

定义辅助0-1变量，

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{选择工厂3} \\ 0 & \text{不选工厂3} \end{cases} \qquad y_4 = \begin{cases} 1 & \text{选择工厂4} \\ 0 & \text{不选工厂4} \end{cases}$$

工厂3： $3D + 2W \le 18 \rightarrow 3D + 2W \le 18 + 999(1\text{-}y_3)$

工厂4： $2D + 4W \le 28 \rightarrow 2D + 4W \le 28 + 999(1\text{-}y_4)$

二选一： $y_3 + y_4 = 1$

选一个充分大的正数即可，不一定必须是9999。

数学模型

$$\text{Max } P = 300D + 500W$$

s.t.

原约束:

工厂 1: $D \le 4$

工厂 2: $2W \le 12$

二选一约束:

工厂 3: $3D + 2W \le 18 + 999(1 - y_3)$

工厂 4: $2D + 4W \le 28 + 999(1 - y_4)$

$y_3 + y_4 = 1$

$D \ge 0, W \ge 0$; y_3 与 y_4为0-1变量

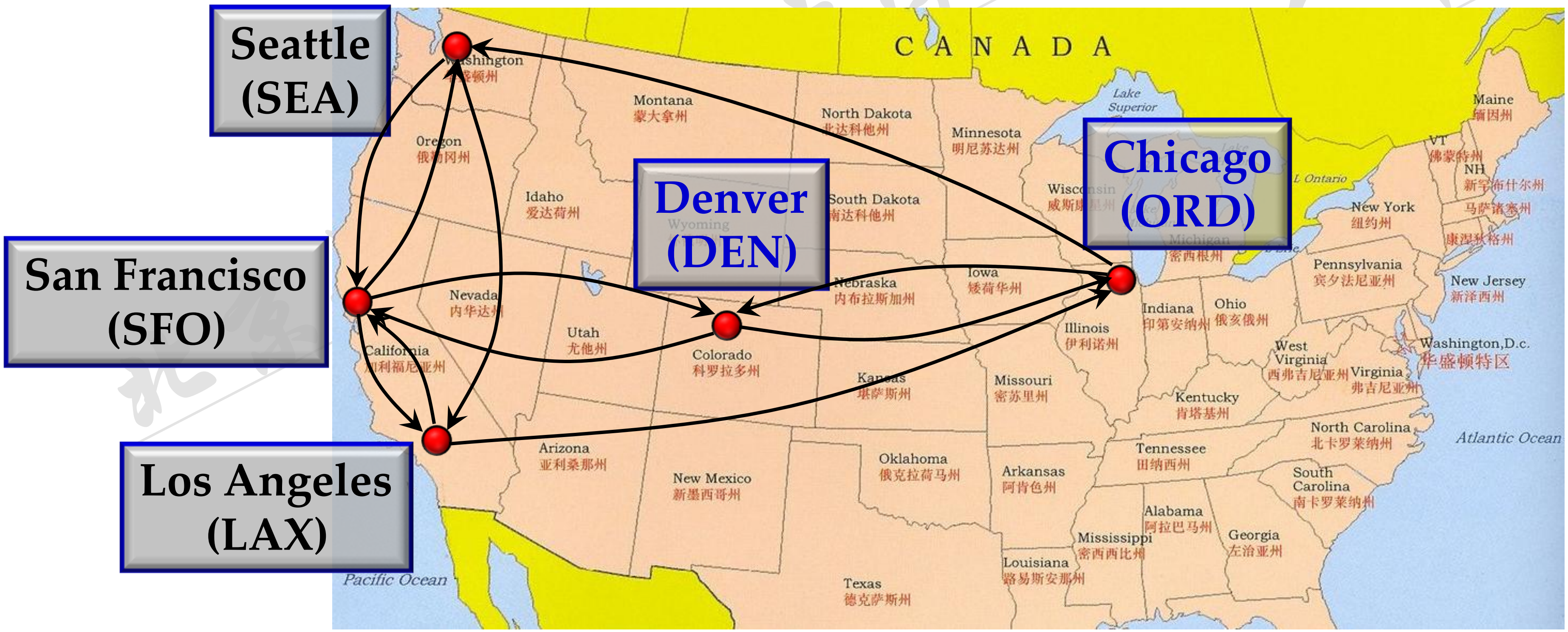
约束作用机理:

（1）如果选中工厂3，那么 $y_3 = 1$，$y_4 = 0$。于是工厂 4 的约束右端项充分大，这个约束实际上就不起作用，而只有工厂3的约束起作用，这就相当于不考虑工厂 4。

（2）如果选中工厂4，那么 y_3 和 y_4 的0-1机制将使得工厂4的约束发挥作用而工厂3实际上就被淘汰了。

案例4：西南航空公司人员调度问题

有 4 队机组，从中选择 X 队（X ≦ 4），分别执行 X 条飞行路线，这些路线要完全覆盖 11 个航班*。



	飞行方案（可行的航班次序与飞行路线）											
航班	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. SFO–LAX	①			①			①			①		
2. SFO–DEN		①			①			①			①	
3. SFO–SEA			①			①			①			①
4. LAX–ORD				②			②		③	②		③
5. LAX–SFO	②					③				⑤	⑤	
6. ORD–DEN				③	③				④			
7. ORD–SEA							③	③		③	③	④
8. DEN–SFO		②		④	④				⑤			
9. DEN–ORD					②			②			②	
10. SEA–SFO			②				④	④				⑤
11. SEA–LAX						②			②	④	④	②

飞行方案/路线：SFO-DEN-ORD-SEA-SFO

- 12个飞行方案对应12条可选路线，一个机组负责执飞一条路线，所以选择的总路线不会超过4条；
- 各机组人员工资水平有差异，因此执飞不同路线的成本也不同。

机组成本（$1000）	飞行方案（可行的航班次序与飞行路线）											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
机组1	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9
机组2	3	6	1	5	6	7	2	3	8	5	9	2
机组3	2	5	4	6	2	5	7	4	9	2	8	8
机组4	3	1	1	5	6	1	2	1	1	5	1	5

- 问题：

每个飞行方案固定由一队机组人员执行。从12个可能的飞行路线中选出 X 个飞行方案，则需要 X 队机组人员。要求使这 X个方案能完成所有航班，且机组人员的总成本最小。

- 这 X 个方案能完成所有航班，意味着这 X 个路线覆盖了所有航班，因此这类问题也称为“分组覆盖问题”。

变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第 } i \text{ 队机组分配到线路 } j\text{；} \quad i \leqq 4, j \leqq 12 \\ 0 & \text{第 } i \text{ 队机组不分配到线路 } j\end{cases}$$

约束条件1-航班覆盖：

航班1：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+ \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+ \\ x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+ \\ x_{1,10}+x_{2,10}+x_{3,10}+x_{4,10}\geq 1$$

可能分配

机组1 机组2 机组3 机组4

航班	飞行方案（可行的飞行路线）											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1			1			1			1		
2		1			1			1			1	
3			1			1			1			1
4				2			2		3	2		3
5	2					3				5	5	
6				3	3				4			
7							3	3		3	3	4
…	…											

约束条件1-航班覆盖：

航班2：

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+$$
$$x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+$$
$$x_{1,11}+x_{2,11}+x_{3,11}+x_{4,11}\geq 1$$

航班3：

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+$$
$$x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+$$
$$x_{19}+x_{29}+x_{39}+x_{49}+$$
$$x_{1,12}+x_{2,12}+x_{3,12}+x_{4,12}\geq 1$$

……

可能分配

机组1　机组2　机组3　机组4

航班	飞行方案（可行的飞行路线）											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	①			①			①			①		
2		①			①			①			①	
3			①			①			①			①
4				②			②		③	②		③
5	②					③				⑤	⑤	
6				③	③				④			
7							③	③		③	③	④
…	…											

约束条件1-航班覆盖：

航班6：

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+$$
$$x_{19}+x_{29}+x_{39}+x_{49}+\geq 1$$

航班11：

……

$$x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+$$
$$x_{19}+x_{29}+x_{39}+x_{49}+$$
$$x_{1,10}+x_{2,10}+x_{3,10}+x_{4,10}+$$
$$x_{1,11}+x_{2,11}+x_{3,11}+x_{4,11}+$$
$$x_{1,12}+x_{2,12}+x_{3,12}+x_{4,12}\geq 1$$

可能分配

机组1 机组2 机组3 机组4

航班	飞行方案（可行的飞行路线）											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	①			①			①			①		
2		①			①			①			①	
3			①			①			①			①
4				②			②		③	②		③
5	②					③				⑤	⑤	
6				③	③				④			
…	…											
11						②			②	④	④	②

为建模方便，为航班覆盖问题引入系数矩阵$\{a_{kj}\}$：

	飞行方案											
航班	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	①			①			①			①		
2		①			①			①			①	
3			①			①			①			①
…	…											
11						②			②	④	④	②

$\{a_{kj}\}$	飞行方案											
航班	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
…	…											
11	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1

基于系数矩阵$\{a_{kj}\}$，航班覆盖约束可统一表示为：

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{12} a_{kj}x_{ij} \geq 1,\ k=1,\ldots,11$$

$\{a_{kj}\}$	飞行方案											
航班	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
…	…											
11	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	…	$x_{1,10}$	$x_{1,11}$	$x_{1,12}$
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	…	$x_{2,10}$	$x_{2,11}$	$x_{2,12}$
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	…	$x_{3,10}$	$x_{3,11}$	$x_{3,12}$
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	…	$x_{4,10}$	$x_{4,11}$	$x_{4,12}$

$\{a_{kj}\}$的第1行与$\{x_{ij}\}$的 4 个行分别对应相乘再求和，就得到第 1个航班的覆盖约束；

$\{a_{kj}\}$的第k行与$\{x_{ij}\}$的 4 个行分别对应相乘再求和，就得到第 k个航班的覆盖约束，$k = 1,\ldots,11$。

约束条件2-机队完整性限制：

机组1： $x_{11}+x_{12}+...+x_{1,9}+x_{1,10}+x_{1,11}+x_{1,12}\le 1$

机组2： $x_{21}+x_{22}+...+x_{2,9}+x_{2,10}+x_{2,11}+x_{2,12}\le 1$

机组3： $x_{31}+x_{32}+...+x_{3,9}+x_{3,10}+x_{3,11}+x_{3,12}\le 1$

机组4： $x_{41}+x_{42}+...+x_{4,9}+x_{4,10}+x_{4,11}+x_{4,12}\le 1$

- 意义：若某机组分给了某条线路，则就不能再同时执飞其他线路。统一表达式：

$$\sum_{j=1}^{12} x_{ij}\le 1,\quad i=1,...,4$$

机组3 机组4 机组2

航班	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. SFO–LAX	①			①			①			①		
2. SFO–DEN		①			①			①			①	
3. SFO–SEA			①			①			①			①
4. LAX–ORD				②			②		③	②		③
5. LAX–SFO	②					③				⑤	⑤	
6. ORD–DEN				③	③				④			
7. ORD–SEA							③	③		③	③	④
8. DEN–SFO		②		④	④				⑤			
9. DEN–ORD					②			②			②	
10. SEA–SFO			②				④	④				⑤
11. SEA–LAX						②			②	④	④	②

机组3 机组4 机组2

	飞行方案（可行的航班次序与飞行路线）											
机组成本（$1000）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
机组1	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9
机组2	3	6	1	5	6	7	**2**	3	8	5	9	2
机组3	2	5	4	6	**2**	5	7	4	9	2	8	8
机组4	3	1	1	5	6	**1**	2	1	1	5	1	5

- 三队机组人员分别执飞三个航线即可覆盖所有航班，总成本$5,000。

✓工会合同问题：

- 工会的合同规定：所有机组人员都必须被安排工作。因此，前面空出来的第一个机队也必须被安排在某条航线上。
- 即使一个航班上有超过一队的机组人员，根据工会合同，公司仍然必须为这些人付出的时间支付与工作相同的报酬。

新模型

新的问题相当于每个机队都必须被完整分配，即：

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1,9}+x_{1,10}+x_{1,11}+x_{1,12} &= 1\\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2,9}+x_{2,10}+x_{2,11}+x_{2,12} &= 1\\
x_{31}+x_{32}+\ldots+x_{3,9}+x_{3,10}+x_{3,11}+x_{3,12} &= 1\\
x_{41}+x_{42}+\ldots+x_{4,9}+x_{4,10}+x_{4,11}+x_{4,12} &= 1
\end{aligned}
$$

机组1　　机组4　　机组3　　机组2

	飞行方案（可行的航班次序与飞行路线）											
机组成本（$1000）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
机组1	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9
机组2	3	6	1	5	6	7	2	3	8	5	9	2
机组3	2	5	4	6	2	5	7	4	9	2	8	8
机组4	3	1	1	5	6	1	2	1	1	5	1	5

- 四队机组人员分别执飞四条航线，总成本$7,000——但从前面可知，实际上最少只需要3个机组即可。