第一章
随机事件与概率

第四节

条件概率

Overview

条件概率的定义

问题的提出：

条件概率的定义

问题的提出：

- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.

问题的提出：

- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：第 1 个人中彩的概率为多少？

问题的提出：

- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：第 1 个人中彩的概率为多少？
  第 2 个人中彩的概率为多少？

条件概率的定义

问题的提出：

- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：第 1 个人中彩的概率为多少？
  第 2 个人中彩的概率为多少？
- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.

条件概率的定义

问题的提出：

- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：第 1 个人中彩的概率为多少？
  第 2 个人中彩的概率为多少？
- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：已知第 1 个人没摸中，

问题的提出：

- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：第 1 个人中彩的概率为多少?
  第 2 个人中彩的概率为多少?
- 10 个人摸彩，有 3 张中彩.
  问：已知第 1 个人没摸中，
  第 2 个人中彩的概率为多少?

条件概率的定义

定义 1.4.1

对于事件 A, B，若 $P(B) > 0$，则称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

条件概率的定义

定义 1.4.1

对于事件 A, B，若 $P(B) > 0$，则称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在 B 发生的条件下，A 发生的条件概率.

条件概率的定义

条件概率 $P(A|B)$ 的计算:

条件概率的定义

条件概率 $P(A|B)$ 的计算:

1. 缩减样本空间:

条件概率的定义

条件概率 P(A|B) 的计算:

1. 缩减样本空间：将 Ω 缩减为 $\Omega_B = B$.

条件概率 P(A|B) 的计算:

1. 缩减样本空间：将 Ω 缩减为 $\Omega_B = B$.
2. 用定义：

条件概率的定义

条件概率 P(A|B) 的计算:

1. 缩减样本空间：将 Ω 缩减为 $\Omega_B = B$.
2. 用定义：$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

例 1.4.1

10 个产品中有 7 个正品、3 个次品，从中不放回地抽取两个，已知第一个取到次品，求第二个又取到次品的概率.

例 1.4.1

10 个产品中有 7 个正品、3 个次品，从中不放回地抽取两个, 已知第一个取到次品, 求第二个又取到次品的概率.

解:

设 $A = \{$ 第一个取到次品 $\}$，$B = \{$ 第二个取到次品 $\}$,

例 1.4.1

10 个产品中有 7 个正品、3 个次品，从中不放回地抽取两个，已知第一个取到次品，求第二个又取到次品的概率.

解：

设 $A=\{$ 第一个取到次品 $\}$，$B=\{$ 第二个取到次品 $\}$，

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/15}{3/10}=2/9$

条件概率是概率

- 条件概率 $P(A|B)$ 满足概率的三条公理??

条件概率的定义

条件概率是概率

- 条件概率 $P(A|B)$ 满足概率的三条公理??
- 由此得:
  $P(A \cup B|C) = ?$
  若 A 与 B 互不相容，则
  $P(A \cup B|C) = ?$
  $P(\overline{A}|B) = ?.$

条件概率的定义

条件概率是概率

- 条件概率 $P(A|B)$ 满足概率的三条公理??
- 由此得：
  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$
  若 A 与 B 互不相容，则
  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$
  $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

条件概率的定义

注意点

- $P(\Omega|B) =?; P(B|\Omega) =?;$
- $P(A|\Omega) =?; P(A|A) =?.$

条件概率的定义

注意点

- $P(\Omega|B) = 1; P(B|\Omega) \neq 1;$
- $P(A|\Omega) = P(A); P(A|A) = 1.$

课堂练习

1. 设 P(B) > 0，且 $A \subset B$，则下列必然成立的是 (2)
   1. $P(A) < P(A|B)$
   2. $P(A) \leq P(A|B)$
   3. $P(A) > P(A|B)$
   4. $P(A) \geq P(A|B)$
2. $P(A) = 0.6, P(A \cup B) = 0.84, P(\Omega - B|A) = 0.4$，则 $P(B) = (0.6)$.

课堂练习

1. 设 P(B) > 0，且 $A \subset B$，则下列必然成立的是 (?)
   1. $P(A) < P(A|B)$
   2. $P(A) \leq P(A|B)$
   3. $P(A) > P(A|B)$
   4. $P(A) \geq P(A|B)$
2. $P(A) = 0.6, P(A \cup B) = 0.84, P(\Omega - B|A) = 0.4$，则 $P(B) = (?)$.

条件概率的定义

条件概率的三大公式

- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

乘法公式

性质 1.4.2 乘法公式

1. 若 $P(B) > 0$，则 $P(AB) = P(B)P(A|B)$;
   若 $P(A) > 0$，则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.
2. 若 $P(A_1, A_2, ..., A_{n-1}) > 0$，则
   $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A2|A1) \cdots P(A_n|A_1, A_2, ..., A_{n-1})$

乘法公式的应用

- 乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.
- 一批零件共有 100 个，其中 10 个不合格品。从中一个一个不返回取出，求第三次才取出不合格品的概率.

乘法公式的应用

- 乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.
- 一批零件共有 100 个，其中 10 个不合格品。从中一个一个不返回取出，求第三次才取出不合格品的概率.
- 解：
  记 Ai=“第 i 次取出的是不合格品” Bi=“第 i 次取出的是合格品”，目的求 $P(B_1B_2A_3)$ 用乘法公式

乘法公式

乘法公式的应用

- 乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.
- 一批零件共有 100 个，其中 10 个不合格品。从中一个一个不返回取出，求第三次才取出不合格品的概率.
- 解：
  记 Ai=“第 i 次取出的是不合格品” Bi=“第 i 次取出的是合格品”，
  目的求 $P(B_1B_2A_3)$ 用乘法公式
  $P(B_1B_2A_3)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(A_3|B_1B_2)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}$

全概率公式

性质 1.4.3 全概率公式

若事件 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一组分割，且 $P(B_i) > 0$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

注意点 (1)

- 全概率公式用于求复杂事件的概率

注意点 (1)

- 全概率公式用于求复杂事件的概率
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.

注意点 (1)

- 全概率公式用于求复杂事件的概率
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.
- 全概率公式最简单的形式
  $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

全概率公式

注意点 (1)

- 全概率公式用于求复杂事件的概率
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.
- 全概率公式最简单的形式
  $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

注意点 (2)

- 若事件 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是互不相容的，且 $P(B_i) > 0$，
  则由 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ 可得
  $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$

例 1.4.2

设 10 件产品中有 3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

例 1.4.2

设 10 件产品中有 3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解:
设 $A =$ “第一次取得不合格品”,$B =$ “第二次取得不合格品”.
由全概率公式得:

例 1.4.2

设 10 件产品中有 3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解:

设 $A=$ "第一次取得不合格品",$B=$ "第二次取得不合格品".

由全概率公式得:

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

全概率公式

例 1.4.2

设 10 件产品中有 3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解:

设 $A=$ “第一次取得不合格品”, $B=$ “第二次取得不合格品”.

由全概率公式得:

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

$=(3/10)\times(2/9)+(7/10)\times(3/9)=3/10$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) =$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$
2. 可用全概率公式计算得 $P(A2) =$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$
2. 可用全概率公式计算得 $P(A2) = 1/n$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$
2. 可用全概率公式计算得 $P(A2) = 1/n$
3. 可用归纳法计算得 $P(A_i) =$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$
2. 可用全概率公式计算得 $P(A2) = 1/n$
3. 可用归纳法计算得 $P(A_i) = 1/ni = 1, 2, ...n$

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$
2. 可用全概率公式计算得 $P(A2) = 1/n$
3. 可用归纳法计算得 $P(A_i) = 1/ni = 1, 2, \ldots n$
4. 结论：

摸彩模型（1）

n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到中奖券”，则

1. $P(A_1) = 1/n$
2. 可用全概率公式计算得 $P(A2) = 1/n$
3. 可用归纳法计算得 $P(A_i) = 1/ni = 1, 2, \ldots n$
4. 结论：不论先后，中彩机会是一样的.

全概率公式

波利亚罐子模型

罐中有 b 个黑球、r 个红球，每次从中任取一个，取出后将球放回，再加入 c 个同色球和 d 个异色球. 若

1. 当 $c=-1, d=0$ 时，为不返回抽样.
2. 当 $c=0, d=0$ 时，为返回抽样.
3. 当 $c>0, d=0$ 时，为传染病模型.
4. 当 $c=0, d>0$ 时，为安全模型.

波利亚罐子模型 (续)

记 $p_k(b,r)$ 为“口袋中有 b 个黑球、r 个红球时，第 k 次取出黑球”的概率，$k=1,2,\dots$

1. 当 $c=-1, d=0$ 时为不返回抽样，所以由摸彩模型得：
$p_k(b,r)=b/(b+r), k=1,2,\dots$
2. 当 $c=0, d=0$ 时为返回抽样，所以
$p_k(b,r)=b/(b+r), k=1,2,\dots$
3. 当 $c>0, d=0$ 时，为传染病模型. 此时
$p_k(b,r)=b/(b+r), k=1,2,\dots$
4. 当 $c=0, d>0$ 时，为安全模型. 此时，

全概率公式的例题

甲口袋有 a 只白球、b 只黑球；乙口袋有 n 只白球、m 只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，求从乙口袋中取出的是白球的概率.

全概率公式的例题

甲口袋有 a 只白球、b 只黑球；乙口袋有 n 只白球、m 只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，求从乙口袋中取出的是白球的概率.
解: 记 A 为“从甲口袋中取出的是白球”, B 为“从乙口袋中取出的是白球”,
$P(B) =$

全概率公式的例题

甲口袋有 a 只白球、b 只黑球；乙口袋有 n 只白球、m 只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，求从乙口袋中取出的是白球的概率.

解: 记 A 为“从甲口袋中取出的是白球”，B 为“从乙口袋中取出的是白球”，

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

全概率公式的例题

甲口袋有 a 只白球、b 只黑球；乙口袋有 n 只白球、m 只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，求从乙口袋中取出的是白球的概率.

解: 记 A 为“从甲口袋中取出的是白球”, B 为“从乙口袋中取出的是白球”,

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$
$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{n+1}{n+m+1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{n}{n+m+1}$$

思考题

- 甲口袋有 a 只白球、b 只黑球；乙口袋有 n 只白球、m 只黑球. 从甲口袋任取两球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，求从乙口袋中取出的是白球的概率.
- 以上是甲、乙两口袋的球数不同，如果两口袋装的黑、白球个数都相同，则情况又如何？

敏感性问题的调查

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p
- 两个问题：A：生日是否在 7 月 1 日前？B：是否考试作弊？

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p
- 两个问题：A：生日是否在 7 月 1 日前？B：是否考试作弊？
- 抛硬币回答 A 或 B.

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p
- 两个问题：A：生日是否在 7 月 1 日前？B：是否考试作弊？
- 抛硬币回答 A 或 B.
- 答题纸上只有：“是”、“否”

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p
- 两个问题：A：生日是否在 7 月 1 日前？B：是否考试作弊？
- 抛硬币回答 A 或 B.
- 答题纸上只有：“是”、“否”
- 可用全概率公式分析“敏感性”问题

贝叶斯公式

贝叶斯公式

- 乘法公式是求

贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率

贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率
- 全概率公式是求

贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率
- 全概率公式是求“最后结果”的概率

贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率
- 全概率公式是求“最后结果”的概率
- 贝叶斯公式是

贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率
- 全概率公式是求“最后结果”的概率
- 贝叶斯公式是已知“最后结果”，求“原因”的概率.

贝叶斯公式

已知“结果”，求“原因”

某人从甲地到乙地，乘飞机、火车、汽车迟到的概率分别为 0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率.

$(1/6, 2/6, 3/6)$

贝叶斯公式

贝叶斯（Bayes）公式

若事件 $B_1, B_2, ..., B_n$ 是样本空间的一组分割，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$. 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

贝叶斯公式

注意点

1. $B_1, B_2, ..., B_n$ 可以看作是导致 A 发生的原因

贝叶斯公式

注意点

1. $B_1, B_2, ..., B_n$ 可以看作是导致 A 发生的原因
2. $P(B_j|A)$ 是在事件 A 发生的条件下, 某个原因 B_j 发生的概率, 称为 "后验概率"

注意点

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 可以看作是导致 A 发生的原因
2. $P(B_j|A)$ 是在事件 A 发生的条件下, 某个原因 B_j 发生的概率, 称为“后验概率”
3. Bayes 公式又称为“后验概率公式”或“逆概公式”

注意点

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 可以看作是导致 A 发生的原因
2. $P(B_j|A)$ 是在事件 A 发生的条件下, 某个原因 B_j 发生的概率, 称为 “后验概率”
3. Bayes 公式又称为 “后验概率公式” 或 “逆概公式”
4. 称 $P(B_j)$ 为 “先验概率”

全概率公式

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 $2\%, 2\%, 4\%$. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解:

用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设 $Ai=$ “取到第 i 个工厂的产品”，$B=$ “取到次品”，由题意得:

$P(A_1)=$

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 $2\%, 2\%, 4\%$. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解:
用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设 $Ai =$ "取到第 i 个工厂的产品"，$B =$ "取到次品"，由题意得:
$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = P(A_3) =$

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 $2\%, 2\%, 4\%$. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解:

用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设 $Ai =$ “取到第 i 个工厂的产品”，$B =$ “取到次品”，由题意得:

$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = P(A_3) = 0.25$;

$P(B|A_1) = P(B|A_2) =$

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解:

用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设 $Ai =$ “取到第 i 个工厂的产品”，$B =$ “取到次品”，由题意得:

$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = P(A_3) = 0.25$;

$P(B|A_1) = P(B|A_2) = 0.02$,

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 $2\%, 2\%, 4\%$. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解:

用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设 $Ai =$ "取到第 i 个工厂的产品"，$B =$ "取到次品"，由题意得:

$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = P(A_3) = 0.25$;

$P(B|A_1) = P(B|A_2) = 0.02, P(B|A_3) =$

例 1.4.3

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 $2\%, 2\%, 4\%$. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解:

用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设 $Ai =$“取到第 i 个工厂的产品”，$B =$“取到次品”，由题意得:

$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = P(A_3) = 0.25$;

$P(B|A_1) = P(B|A_2) = 0.02, P(B|A_3) = 0.04$

由 Bayes 公式得:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)}$$

作业

思考题 1

口袋中有 a 只白球、b 只黑球。在下列情况下，求第 k 次取出的是白球的概率：

1. 从中一只一只返回取球
2. 从中一只一只不返回取球
3. 从中一只一只返回取球，且返回的同时再加入一只同色球

思考题 2

口袋中有一只球，不知它是黑的还是白的。现再往口袋中放入一只白球，然后从口袋中任意取出一只，发现是白球。试问口袋中原来的那只球是白球的可能性多大？

课本 P51-52: 1,2,3, 7, 11, 13, 16, 18, 25