

第一章

随机事件与概率

第一节

随机事件及其运算

Overview

- 1 随机现象
- 2 样本空间
- 3 随机事件
- 4 事件间的关系
- 5 事件的运算
- 6 事件域
- 7 分割
- 8 课堂练习

自然界中的有两类现象: 掷一枚硬币, 正面朝上? 反面朝上?

- 确定性现象

- ① 每天早晨太阳从东方升起;
- ② 水在标准大气压下加温到 100°C 沸腾;

- 随机现象

- ① 掷一枚硬币, 正面朝上? 反面朝上?
- ② 一天内进入某超市的顾客数;
- ③ 某种型号电视机的寿命;

- 随机现象: 在一定的条件下, 并不总出现相同结果的现象称为随机现象.
- 特点:
 - ① 结果不止一个
 - ② 试验中只能出现其中一个结果
 - ③ 事先不知道哪一个会出现
- 随机现象的统计规律性: 随机现象的各种结果会表现出一定的规律性, 这种规律性称之为统计规律性.

样本空间

- ① 随机试验 (E) 对随机现象进行的观察、记录与实验.
它具有两个特点：随机性、重复性.
- ② 样本点随机试验的每一个可能结果.
- ③ 样本空间 (Ω) 随机试验的所有样本点构成的集合
- ④ 两类样本空间：
离散样本空间样本点的个数为有限个或可列个
连续样本空间样本点的个数为无限不可列个

随机事件

- ① **随机事件**: 随机现象的某些样本点组成的集合. Ω 的子集, 常用 $A B C \dots$ 表示
- ② **基本事件**: Ω 的单点集.
- ③ **必然事件**: (Ω)
- ④ **不可能事件**: (ϕ) 空集.
- ⑤ **随机变量**表示随机现象结果的变量. 常用大写字母 $X, Y, Z \dots$ 表示.

表示随机现象结果的变量. 常用大写字母 $X, Y, Z \dots$ 表示.

事件的表示

- 在试验中, A 中某个样本点出现了, 就说 A 出现了, 发生了, 记为 A .
- 维恩图(Venn diagram).
- 事件的三种表示: 用语言、用集合、用随机变量.

事件间的关系

- 包含关系: $A \subset B$
A 发生必然导致 B 发生
- 相等关系: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 而且 $B \subset A$
- 互不相容: A 和 B 不可能同时发生

事件的运算

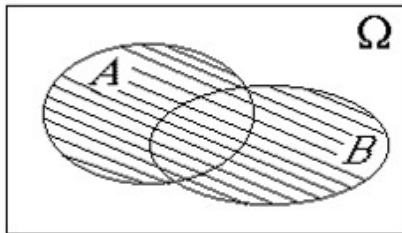
- 并: $A \cup B$
- 交: $A \cap B = AB$
- 差: $A - B$
- 对立: \bar{A}

事件的运算

- 并: $A \cup B$ (A 与 B 至少有一发生)
- 交: $A \cap B = AB$ (A 与 B 同时发生)
- 差: $A - B$ (A 发生但 B 不发生)
- 对立: \bar{A} (A 不发生)

事件的运算

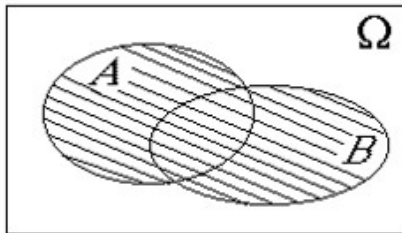
事件运算的图示



表示什么事件运算？

事件的运算

事件运算的图示

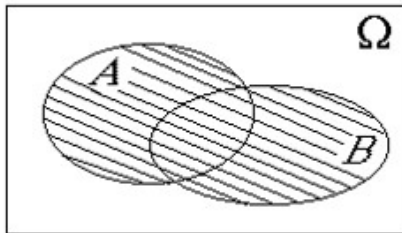


表示什么事件运算？

Figure: $A \cup B$

事件的运算

事件运算的图示

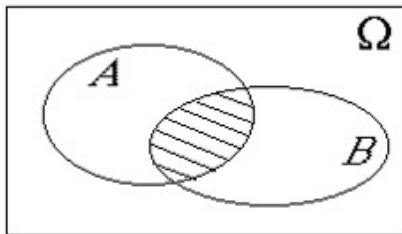


表示什么事件运算？

Figure: $A \cup B$ 其他??

事件的运算

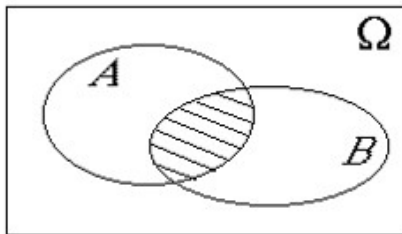
事件运算的图示



表示什么事件运算？

事件的运算

事件运算的图示

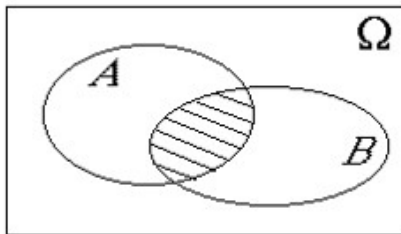


表示什么事件运算？

Figure: $A \cap B$

事件的运算

事件运算的图示

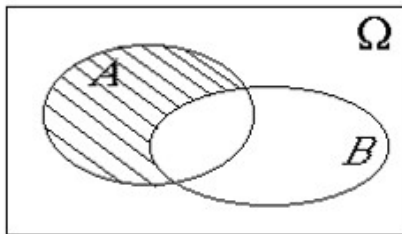


表示什么事件运算？

Figure: $A \cap B$ 其他??

事件的运算

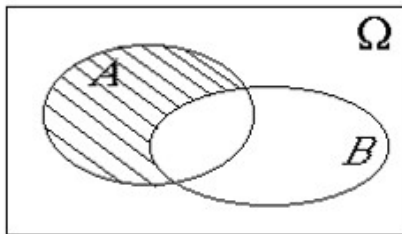
事件运算的图示



表示什么事件运算？

事件的运算

事件运算的图示

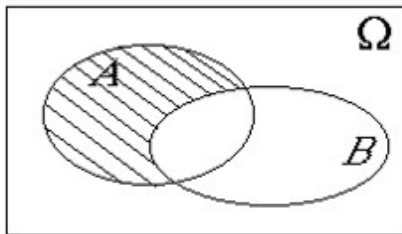


表示什么事件运算？

Figure: $A - B$

事件的运算

事件运算的图示



表示什么事件运算？

Figure: $A - B$ 其他??

德摩根公式

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

事件的运算

回顾一下上节课内容：

记号	概率论	集合论
Ω		
ϕ		
ω		
$A \subset B$		
$AB = \phi$		
$A \cup B$		
AB		
$A - B$		
\overline{A}		

设 Ω 为样本空间, \mathcal{F} 是由 Ω 的子集组成的集合类, 若 \mathcal{F} 满足以下三点, 则称 \mathcal{F} 为一个事件域, 又称为 σ 域或 σ 代数.

① $\Omega \in \mathcal{F}$

② 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$

③ 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

设 Ω 为样本空间, \mathcal{F} 是由 Ω 的子集组成的集合类, 若 \mathcal{F} 满足以下三点, 则称 \mathcal{F} 为一个事件域, 又称为 σ 域或 σ 代数.

① $\Omega \in \mathcal{F}$

② 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$

③ 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

例 1: 若样本空间只含有两个样本点 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, 记 $A = \{\omega_1\}$, $\bar{A} = \{\omega_2\}$, 则其事件域为 $\mathcal{F} = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$.

样本空间的分割

若 A_1, A_2, \dots, A_n 有

- ① A_i 互不相容;
- ② $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为 Ω 的一个分割.

课堂练习

1

若 A 是 B 的子事件, 则 $A \cup B = (?)$, $AB = (?)$

2

设 A 与 B 同时出现时 C 也出现, 则 $(?)$

- ① $A \cup B$ 是 C 的子事件;
- ② C 是 $A \cup B$ 的子事件;
- ③ AB 是 C 的子事件;
- ④ C 是 AB 的子事件.

课堂练习

3

设事件 $A = \text{“甲种产品畅销，乙种产品滞销”}$ ，则 A 的对立事件为 (?)

- ① 甲种产品滞销，乙种产品畅销；
- ② 甲、乙两种产品均畅销；
- ③ 甲种产品滞销；
- ④ 甲种产品滞销或者乙种产品畅销.

4

设 x 表示一个沿数轴做随机运动的质点位置，试说明下列各对事件间的关系

- ① $A = \{|x - a| < \sigma\}, B = \{x - a < \sigma\}$
- ② $A = \{x > 20\}, B = \{x \leq 22\}$
- ③ $A = \{x > 22\}, B = \{x < 19\}$

作业

1. 试用 A、B、C 表示下列事件：

- ① A 出现
- ② 仅 A 出现
- ③ 恰有一个出现
- ④ 至少有一个出现
- ⑤ 至多有一个出现
- ⑥ 都不出现
- ⑦ 不都出现
- ⑧ 至少有两个出现

作业

1. 试用 A、B、C 表示下列事件：

- ① A 出现
- ② 仅 A 出现
- ③ 恰有一个出现
- ④ 至少有一个出现
- ⑤ 至多有一个出现
- ⑥ 都不出现
- ⑦ 不都出现
- ⑧ 至少有两个出现

2

若样本空间只含有三个样本点 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, 记 $A = \{\omega_1\}$, $B = \{\omega_2\}$, $C = \{\omega_3\}$ 则其事件域为 \mathcal{F} ?

课本 P11: 1,2,5,6,9