

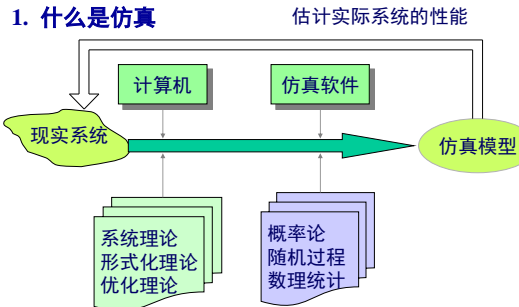
第一章 离散系统仿真基本原理

- 一. 引言
- 二. 离散系统仿真方法
- 三. 离散系统仿真的组成部分

第一章 离散系统仿真的基本原理

一. 引言

1. 什么是仿真



第一章 离散系统仿真的基本原理

仿真以系统理论、随机过程理论、统计理论以及优化理论为基础，借助计算机和仿真软件对现实系统或未来系统行为进行动态实验研究的方法。

系统仿真是指在计算机上运行仿真模型，模拟实际系统的运行状态和随时间变化的过程，并通过对仿真运行的观察和统计，得到被仿真系统的基本特性和参数，以此来估计和推断实际系统性能。

第一章 离散系统仿真的基本原理

模型:

- 模型是现实系统的一种抽象和简化
- 模型应包含那些决定系统性能的主要因素
- 模型应反映出系统中各主要因素之间的逻辑关系和数学关系

仿真模型特点:

- 仿真模型包含实体，属性，活动和状态变量
- 可以在计算机上运行仿真模型，以模仿现实系统的动态行为

第一章 离散系统仿真的基本原理

2. 历史回顾

- 1773 蒲丰(Buffon)随机投针试验，求出 π 的近似值
- 1876 Gosset 用类似方法求连续函数定积分的近似值
- 1908 Student用随机抽样的方法证明了t分布的密度函数
- 1946 冯·诺伊曼(Von Neuman)等人在计算机上用随机抽样的方法模拟了裂变物质中子连锁反应，并以蒙特卡罗(Monte-Carlo)方法作为随机模拟方法的代号。随后，此名字很快得到人们的普遍接受。

第一章 离散系统仿真的基本原理

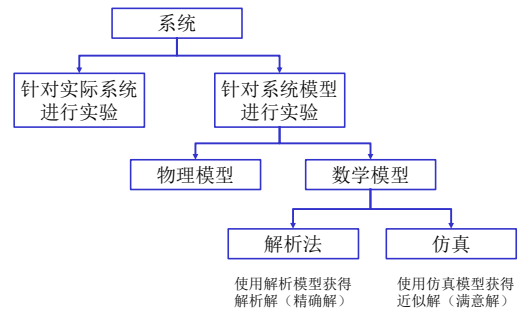
- 60年代: GPSS (General Purpose Simulation System) 面世。只有大型企业才使用仿真技术，通常由具有博士学位的研究人员组成仿真小组，程序运行费用\$600-1000/小时。
- 70-80年代: 计算机高效率、低成本；仿真语言逐步完善。通常大型企业使用仿真技术，而且一般仅用于企业重大问题的诊断和潜在问题的分析。大学开始将仿真列为工业工程及运筹学专业的正式课程。

- 80-90年代：随着计算机的及其图形与动画技术迅猛发展，仿真技术开始进入一般经营活动，而且较大企业开始在重要项目或投资的论证阶段使用仿真方法。但在小型企业中的应用仍很少。
- 90年代以后：仿真系统进一步成熟、完善，良好的图形与动画技术日趋广泛，高性能计算机、友好的人机界面、方便的建模环境、易于集成的软件包的推出。大多数企业已将仿真方法作为一个标准工具，仿真进入了多数企业的早期决策阶段，而且正进入越来越多的非传统经营行业。

- 研究热点：**
- 离散系统的仿真机制
 - 仿真输入/输出数据的统计分析
 - 仿真优化理论
 - 与其他软件的集成
 - 更方便的建模环境（“傻瓜型”）
 - 用仿真手段控制实际系统
 - 分布式并行仿真
 - Internet上的仿真
 - 虚拟现实（VR）仿真
 - 可视化交互仿真

- 应用领域：**
- 制造业
 - 宏观经济学
 - 金融工程学
 - 交通运输
 - 工程项目
 - 军事
 - 航空航天
 - 社会服务（医疗、餐饮等）
 - 生物医学
 - 计算物理学（如粒子输运计算、量子热力学计算、空气动力学计算、核工程）

3. 什么时候需要用仿真

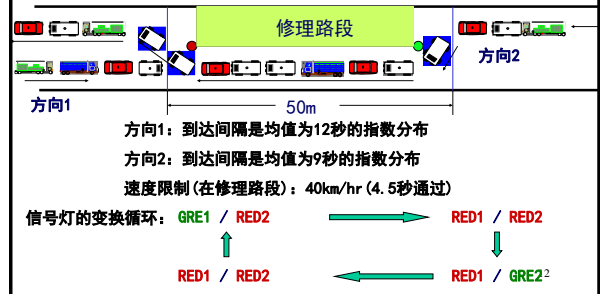


3. 什么时候需要用仿真

- 当系统存在随机因素，无法用解析方法求解时
如：生产加工程序、交通灯、超级市场的存货策略
- 对昂贵或不可恢复系统的分析
如：车间布局、重要的经济政策、宇宙飞船的发射与控制
- 对未来系统的设计与分析
如：大型项目的投资分析、可行性分析
- 其他各种无法用解析方法分析的复杂问题

例. 单行道交通系统仿真

在一条通道上有50米需要修理而被封闭，在封闭的单行道两端设置了交通信号灯控制交通流。



第一章 离散系统仿真的基本原理

修理路段

方向2

方向1

50m

问题：如何确定两个方向的绿灯时间，使两个方向的车辆等待时间最少？

不同绿灯时间的仿真结果：

仿真运行	绿灯时间(秒)		平均等待时间(秒)		
	方向1	方向2	方向1	方向2	方向1+方向2
1	45	60	21.1	33.6	54.7
2	30	40	35.1	53.2	88.3
3	60	80	22.6	28.2	50.8

13

第一章 离散系统仿真的基本原理

4. 仿真的优点与缺点

优点：

- ❖ 可控、无破坏、可复现、经济
- ❖ 体现了实验思考的方法论（给出直观逻辑推理无法预见的系统动态）、直观、what/if分析
- ❖ 是复杂问题的分析与求解的“最后的方法”

14

第一章 离散系统仿真的基本原理

缺点：

- ❖ 由于随机因素的影响，仿真输出只是随机系统中的一个样本，若处理不当，将无法正确反映系统的真实行为，而其直观性则使人容易接受错误结论。
- ❖ 易使人过于依赖仿真，而忽视其他方法。

15

第一章 离散系统仿真的基本原理

5. 实施仿真的手段

- 手工仿真
- 利用通用计算机语言仿真
- 利用专用仿真语言仿真
- 利用仿真器仿真

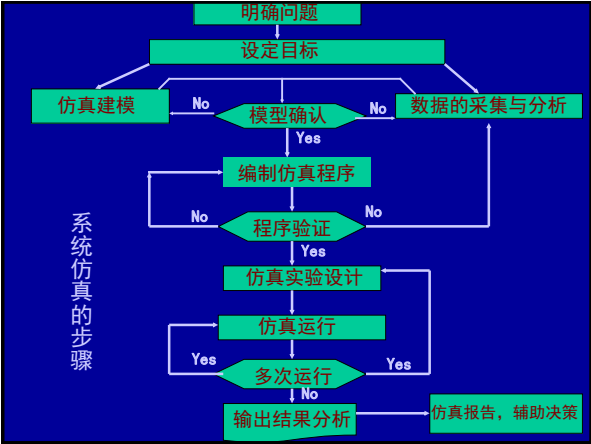
16

第一章 离散系统仿真的基本原理

6. 实施仿真的步骤

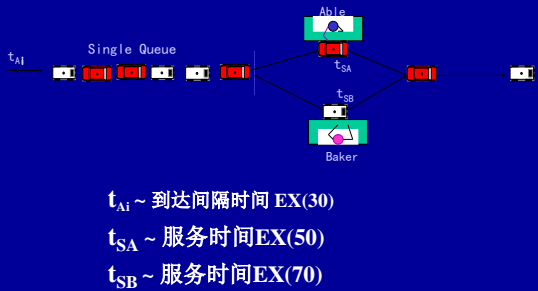
- 明确问题
- 设定目标
- 仿真建模
- 数据的采集与分析
- 仿真模型的确认
- 仿真程序的编制与验证
- 仿真模型的运行
- 仿真输出结果的统计分析

17



例. 汽车餐馆问题

(双服务台单列排队问题)



19

汽车餐馆模型的仿真结果
(运行时间为28800秒, 即 8小时)

	Ave.	Min	Max.	
通行时间				
Able	576	254	1421	
Backer	636	326	1512	
等待时间	307.9	0	1174	
队列长度	4.96	0	20	
利用率				
Able	0.398	0	1	227
Baker	0.450	0	1	157

20

例. 报童问题

有关报纸的买卖问题

- 报童早上购买报纸每张0.33元, 他可以成捆购买 (50, 60, 70, ...)
- 报童卖报每张0.50元, 每张净利0.17元
- 如果报纸购进太多, 退价为0.15元, 每张损失0.17元

21

需求类型及分布

需求	需求类型		
	好	中	差
	0.35	0.45	0.20
40	0.03	0.10	0.44
50	0.05	0.18	0.22
60	0.15	0.40	0.16
70	0.20	0.20	0.12
80	0.35	0.08	0.06
90	0.15	0.04	0.00
100	0.07	0.00	0.00

一天的利润为:

利润 = 售报收入 - 报纸成本 - 超量损失 + 回收价格
(RV) (RV) (CONST) (RV) (RV)

22

问题: 如何确定每天购进报纸的数量, 以获得最大的利润

方案: 每早分别购进报纸50, 60, 70, 80, 90, 100份

仿真: 按前面的需求类型、各需求水平及其概率对不同方案进行仿真建模和运行 (20天)

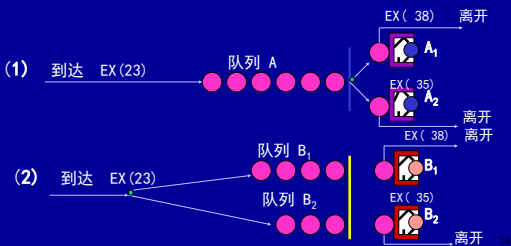
结果: 利用仿真结果计算每天的平均利润, 找出最好的购买策略

23

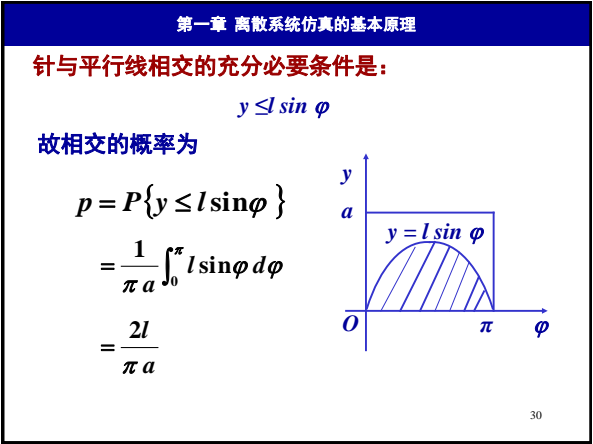
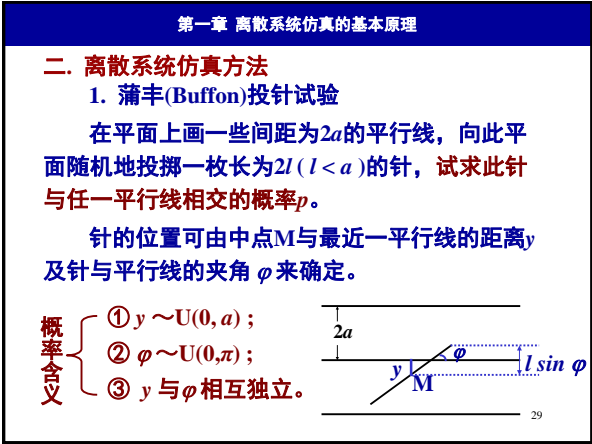
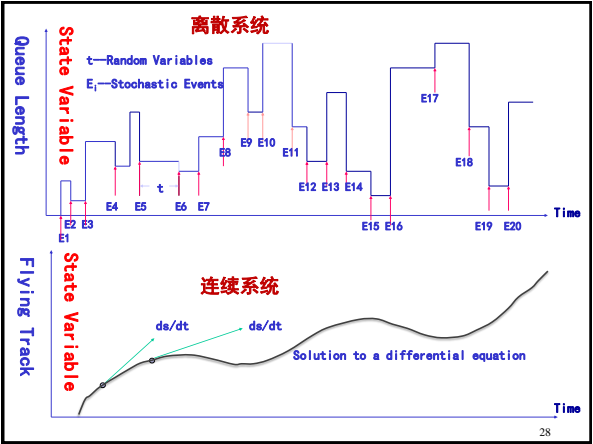
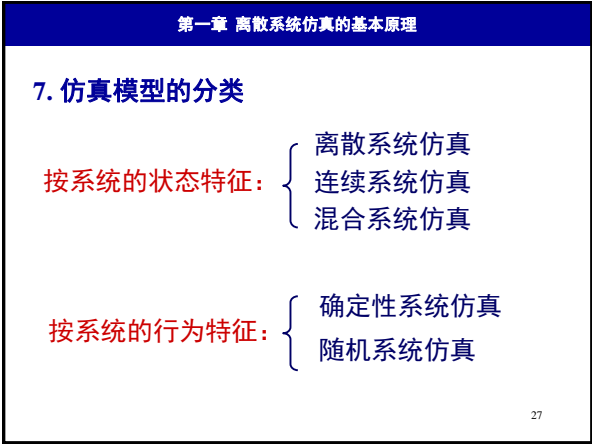
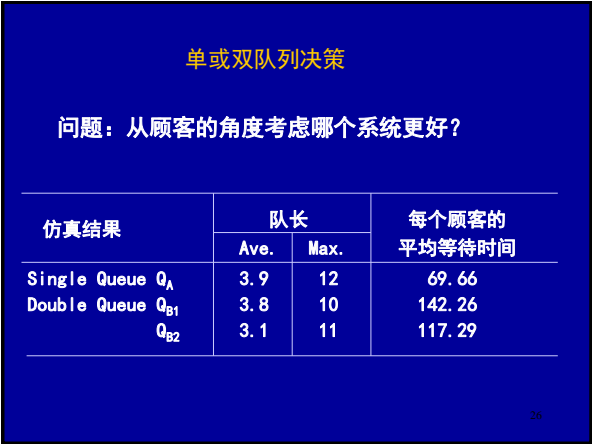
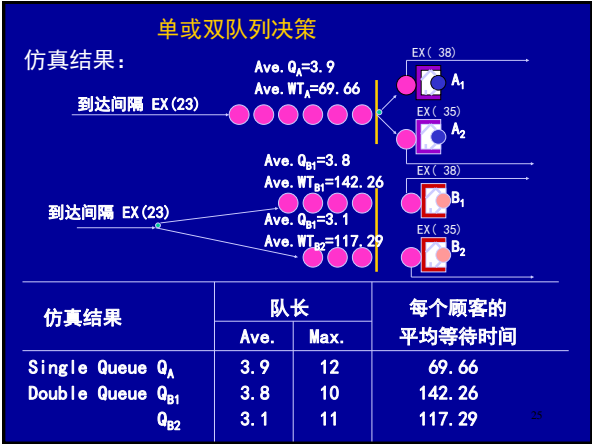
例. 单或双队列, 双服务台的排队系统

- 到达间隔相同: EX(23)
- 两系统服务台的服务率相同

服务台号	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂
服务时间	EX(38)	EX(35)	EX(38)	EX(35)



24



第一章 离散系统仿真的基本原理

由上述概率可以利用投针试验计算 π 值。

设 n —投针次数； m —针线相交次数，
当 n 充分大时，可用频率 m/n 作为概率 p 的估计值，从而求得 π 的估计值为

$$\pi \approx \frac{2l}{a} \frac{n}{m}$$

31

第一章 离散系统仿真的基本原理

历史上投针实验结果($a=1$)

实验者	时间	l	n	m	m/n	π 的估计值
Wolf	1853	0.8	5000	2532	0.5064	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218.5	0.3803	3.1554
Fox	1894	0.75	1030	489	0.4748	3.1595
Lazzarini	1901	0.83	3408	1808	0.5305	3.1416

32

第一章 离散系统仿真的基本原理

蒲丰试验在计算机上的实现步骤：

(1) 产生随机数：① $y_i \sim U(0, a)$ ，
② $\varphi_i \sim U(0, \pi)$ ，
③ y_i 与 φ_i 相互独立

其中 $i=1, 2, \dots, n$ ；

(2) 模拟试验：检验不等式

$$y_i \leq l \sin \varphi_i$$

是否成立。若成立，表示第 i 次试验成功(即针与平行线相交)。
设 n 次试验中成功次数为 m 次，则的估计值为

$$\pi \approx \frac{2l}{a} \frac{n}{m} \quad (a>l, \text{均为预先给定})$$

33

第一章 离散系统仿真的基本原理

蒙特卡罗方法的基本思想：

为求解数学、工程技术或随机服务系统等方面的问题，首先构造一个仿真模型，使所求问题的解正好是该模型的参数或有关。然后通过仿真—统计试验，把得到的统计特征(均值、概率等)的估计值作为所求问题的数值解。

34

第一章 离散系统仿真的基本原理

2. 样本量(实验次数)的确定

做多少次随机实验才能保证Monte-Carlo方法的精度？以投针试验为例， n 次试验中相交(成功)次数 X_n 服从二项分布(即 $B(n, p)$ ， p 是每次投针相交的概率)，且

$$E(X_n)=np, \text{Var}(X_n)=np(1-p)$$

由中心极限定理知，当 n 充分大时

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

35

第一章 离散系统仿真的基本原理

☆ 知识点回顾-中心极限

以均值为 μ ，方差为 σ^2 的独立同分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 之和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 的标准化变量，当 n 充分大时，有

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \sim N(0, 1)$$

进一步地，因为 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ，则

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ 或 } \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

36

因此对于给定的置信度 $1-\alpha$, 有

$$P\left\{\left|\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

即

$$P\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = 1-\alpha$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — 正态分布的临界值

37

☆ 知识点回顾-置信区间

设总体 X 的分布函数 $F(x, \theta)$ 含有一个未知参数 $\theta \in \Theta$, 对于给定值 $0 < \alpha < 1$, 若由来自 X 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定的两个统计量 $\bar{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, $1-\alpha$ 为置信水平。

38

☆ 知识点回顾-置信区间

设正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 当方差 σ^2 已知时, 均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$$

当方差 σ^2 未知时, 均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$$

39

若要求误差(精度)为 ε , 只需下式成立:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \varepsilon$$

即

$$n > \frac{z_{1-\alpha/2}^2 p(1-p)}{\varepsilon^2}$$

例. 要求实验精度 $\varepsilon=0.01$, 置信度为 $1-\alpha=95\%$, $Z_{0.975}=1.96$, 取 $p=0.5093$, 则试验次数 $n=9600$ 次。如果精度提高一位, 即 $\varepsilon=0.001$, $n=?$

$$n = 960067 \text{ 次}$$

40

几个投针实验结果

实验者	n	l/a	$p = 2l/(\pi a)$	$ \pi - \pi^* $	$1-\alpha$
裴鹿成等	50万	0.83	0.530496	0.00061	80.6%
Lazzarini	3408	0.83	0.530496	0.0000029	50%
Smith	3204	0.83	0.530496	0.0137	93.9%
Wolf	5000	0.80	0.509296	0.018	99.5%
Fox	1120	0.83	0.530496	0.00031	50.8%

41

3. Monte-Carlo方法的收敛性

用仿真方法求解实际问题时, 经常用随机变量 X 的简单样本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的样本均值 \bar{X}_n 和样本方差 S_n^2 来估计 $E(X)$ 和 $\sigma^2 = \text{Var}(X)$, 其中

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

由中心极限定理知, 当 n 充分大时,

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} \approx 1-\alpha \quad (2-1)$$

42

这表明 $|\bar{X}_n - E(X)| < \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ 近似地以概率

$1-\alpha$ 成立。可见 \bar{X}_n 随试验次数 n 的增加按统计规律 (2-1) 逐步收敛于问题的解。收敛的速度是 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 。

这样的收敛速度当要求把仿真结果的精度提高一位，就要增加100倍的工作量。

三. 离散系统仿真的组成部分

- 随机离散事件
- 仿真时钟及其推进方式
- 未来事件表
- 随机数发生器
- 自动汇集各种统计数据，打印报告

1. 系统状态变量

反映系统特征及状态的随机变量。如当前时间、队长、处于忙态的机器数等。

2. 实体

实体是系统研究的对象或组成部分，包括流动实体和固定实体。

流动实体：顾客，零件，航行器，船只等

固定实体：服务台，机器，轨道，码头等

3. 属性

描述流动实体特征的一组数值，由建模人员定义。属性可看作实体上所贴的标签，如零件的编号、到达时间、完工时间等。

4. 离散事件

在离散时刻随机发生，且引起系统状态发生瞬间变化的事情，简称事件。如：到达事件，离开事件等。

离散事件是离散系统仿真的核心。

5. 仿真时钟及其推进方式

仿真时钟是仿真过程中的当前时间指示，记为 $TNOW$ 。两种不同的时钟推进方式：

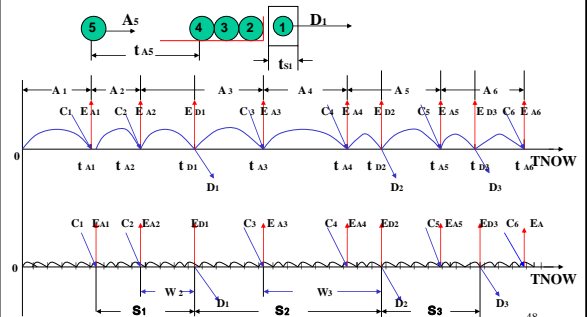
(1) 面向事件的仿真时钟

面向事件的仿真时钟，按下一离散事件将要发生的时刻向前推进，即每次都跳跃性地推进到下一事件的发生时刻。

(2) 面向时间间隔的仿真时钟

面向时间间隔的仿真时钟，它以充分小的时间间隔等距向前推进。

单一服务台排队系统仿真时钟的推进方式



6. 未来事件表

由事件发生时间大于TNOW的事件所构成的时序列表。

当 $t = \text{TNOW}$ 时，应系统中的以下内容：

- ① 系统状态。
- ② 系统正在执行的活动。
- ③ 当前活动将要产生的事件及时间。
- ④ 系统统计数据的当前值和累计计数等。

49

仿真过程的终止

— 规定仿真的最大运行时间 T_E

$\text{TNOW} \geq T_E$ 时终止

— 规定终止事件 E

若 E 发生则终止

此时的终止时间为随机时刻

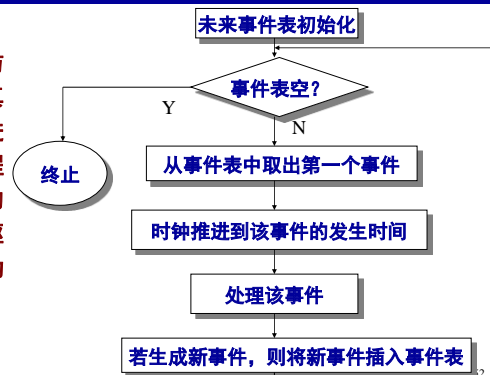
50

未来事件表(FEL)

TNOW	当前事件类型	可能产生的新事件	FEL	系统状态	
				NIQ	Status
0	A ₁	(A ₂ ,4),(D ₁ ,6)	(A ₂ ,4),(D ₁ ,6),(E,60)	0	1
4	A ₂	(A ₃ ,10)	(D ₁ ,6),(A ₃ ,10),(E,60)	1	1
6	D ₁	(D ₂ ,13)	(A ₃ ,10),(D ₂ ,13),(E,60)	0	1
10	A ₃	(A ₄ ,15)	(D ₂ ,13),(A ₄ ,15),(E,60)	1	1
13	D ₂	(D ₃ ,17)	(A ₄ ,15),(D ₃ ,17),(E,60)	0	1
15	A ₄	(A ₅ ,18)	(D ₃ ,17),(A ₅ ,18),(E,60)	1	1
17	D ₃	(D ₄ ,25)	(A ₅ ,18),(D ₄ ,25),(E,60)	0	1
18	A ₅	(A ₆ ,25)	(D ₄ ,25),(A ₆ ,25),(E,60)	1	1
25	D ₄	(D ₅ ,30)	(A ₆ ,25),(D ₅ ,30),(E,60)	0	1
25	A ₆	(A ₇ ,29)	(A ₇ ,29),(D ₅ ,30),(E,60)	1	1
29	A ₇	(A ₈ ,31)	(D ₅ ,30),(A ₈ ,31),(E,60)	2	1
30	D ₅	(D ₆ ,36)	(A ₈ ,31),(D ₆ ,36),(E,60)	1	51 1

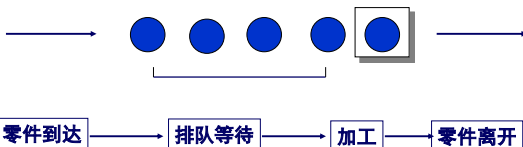
第一章 离散系统仿真的基本原理

仿真进程的驱动



例. 单服务台排队系统

FIFO



$t = 0$ 时开始, $t = 60$ 时结束

53

所关心的系统性能测度

- 完工零件数
- 零件在队列中的平均与最大等待时间

$$\sum_{i=1}^n D_i / n \quad \text{Max}\{D_i\}$$

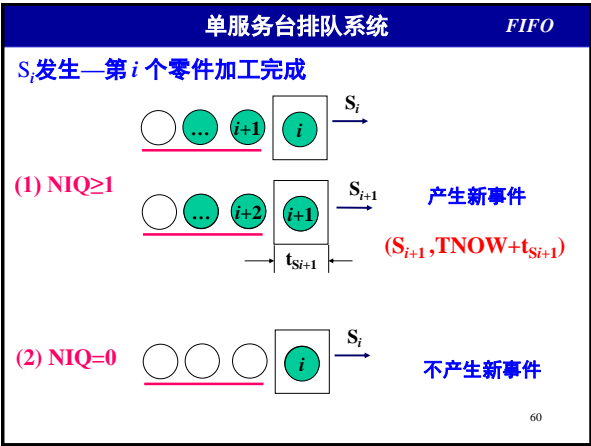
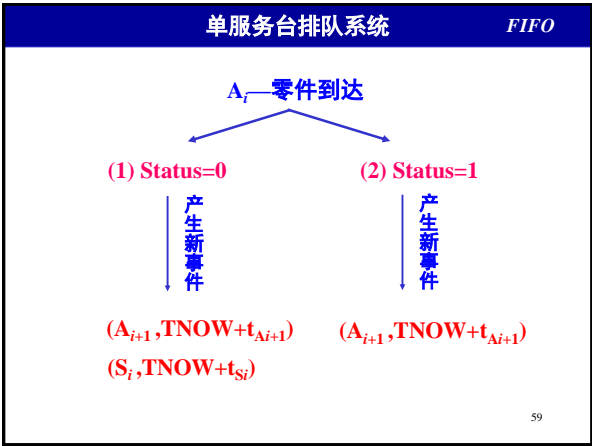
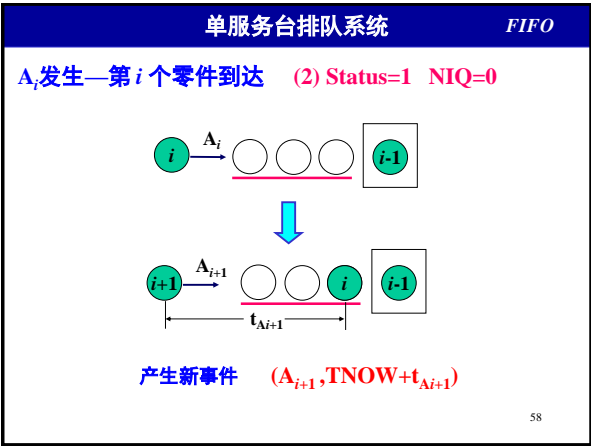
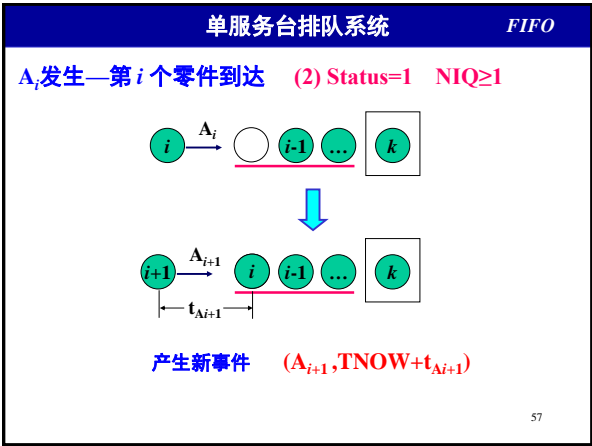
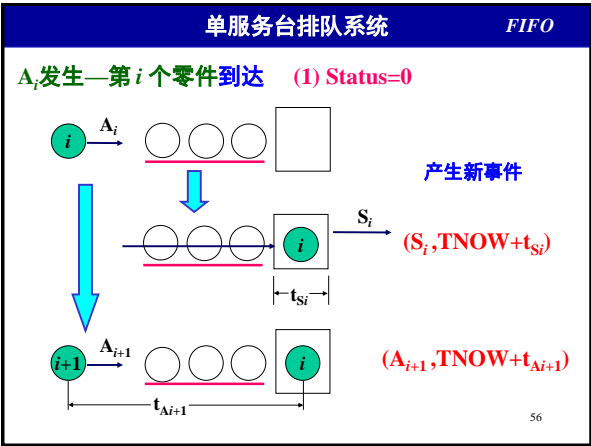
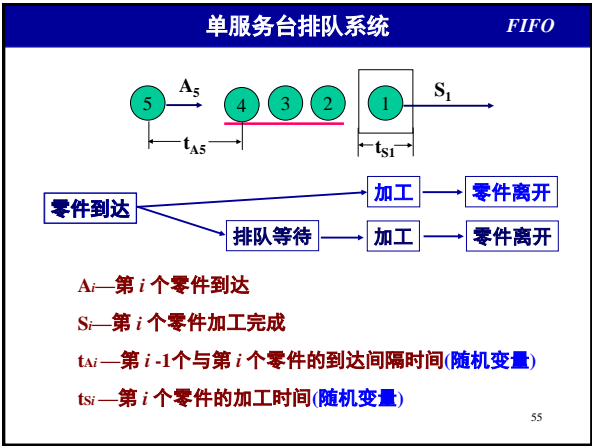
- 零件在系统中的平均与最大逗留时间
- 平均与最大队长

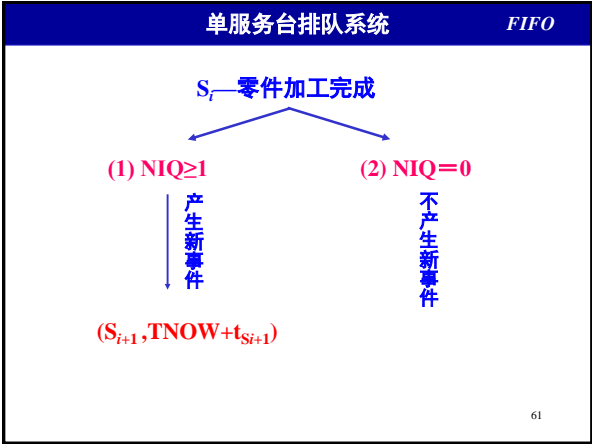
$$\frac{1}{60} \int_0^{60} Q(t) dt \quad \text{Max } Q(t)$$

- 设备平均利用率

$$\frac{1}{15} \int_0^{15} B(t) dt$$

54





单服务台排队系统

未来事件产生的逻辑关系

当前事件	系统状态	触发产生的新未来事件	随机数抽样组	未来事件时间
到达事件	闲	到达事件	A	$TNOW + A$
	忙	服务完成	S	$TNOW + S$
加工完成事件	队长 ≥ 1	到达事件	A	$TNOW + A$
	队长=0	服务完成	S	$TNOW + S$
		无	—	∞

62

第一章 离散系统仿真的基本原理

零件的到达间隔与加工时间

零件号	到达间隔时间	加工时间
1	0	6
2	4	7
3	6	4
4	5	8
5	3	5
6	7	6
7	4	7
8	2	4
9	4	5
10	8	6

63

未来事件表(FEL)

记 A_i —第*i*个零件到达 D_i —第*i*个零件加工完成
E—仿真终止事件(当 $TNOW=60$ 分停止仿真)

TNOW	当前事件	可能产生的新事件	FEL	系统状态	
				NIQ	Status
0	A_1	$(A_2, 4), (D_1, 6)$	$(A_2, 4), (D_1, 6), (E, 60)$	0	1
4	A_2	$(A_3, 10)$	$(D_1, 6), (A_3, 10), (E, 60)$	1	1
6	D_1	$(D_2, 13)$	$(A_3, 10), (D_2, 13), (E, 60)$	0	1
10	A_3	$(A_4, 15)$	$(D_2, 13), (A_4, 15), (E, 60)$	1	1

零件号	到达间隔时间	到达时间	加工时间	加工完成时间	等待时间
1	0	0	6	6	0
2	4	4	7	13	2
3	6	10	4	17	3
4	5	15	8	25	2
5	3	18	5	30	7
6	7	25	6	36	5

64

未来事件表(FEL)

TNOW	当前事件类型	可能产生的新事件	FEL	系统状态	
				NIQ	Status
0	A_1	$(A_2, 4), (D_1, 6)$	$(A_2, 4), (D_1, 6), (E, 60)$	0	1
4	A_2	$(A_3, 10)$	$(D_1, 6), (A_3, 10), (E, 60)$	1	1
6	D_1	$(D_2, 13)$	$(A_3, 10), (D_2, 13), (E, 60)$	0	1
10	A_3	$(A_4, 15)$	$(D_2, 13), (A_4, 15), (E, 60)$	1	1
13	D_2	$(D_3, 17)$	$(A_4, 15), (D_3, 17), (E, 60)$	0	1
15	A_4	$(A_5, 18)$	$(D_3, 17), (A_5, 18), (E, 60)$	1	1
17	D_3	$(D_4, 25)$	$(A_5, 18), (D_4, 25), (E, 60)$	0	1
18	A_5	$(A_6, 25)$	$(D_4, 25), (A_6, 25), (E, 60)$	1	1
25	D_4	$(D_5, 30)$	$(A_6, 25), (D_5, 30), (E, 60)$	0	1
25	A_6	$(A_7, 29)$	$(A_7, 29), (D_5, 30), (E, 60)$	1	1
29	A_7	$(A_8, 31)$	$(D_5, 30), (A_8, 31), (E, 60)$	2	1
30	D_5	$(D_6, 36)$	$(A_8, 31), (D_6, 36), (E, 60)$	1	65 1

65

第一章 离散系统仿真的基本原理

本章基本要求：

了解离散系统仿真的基本原理，理解随机离散事件、仿真时钟的推进模式、未来事件表、以及时钟推进/事件调度的仿真机制等重要概念。

66