博弈论简单应用之二：拍卖中的博弈论思想

（对应第9章）

拍卖（auction）

- 卖方拍卖，买方招标
- 组织拍卖的原因？
  - 不清楚“对方”的底价
- 规则？应对？

将拍卖看成一种博弈

- 拍卖作为一种博弈
  - 参与人：参加拍卖的人（买和卖）
  - 策略：出价
  - 回报：对物品的估值-支付价格，或者0（不成交）
    - 对卖方来说就是得到的支付价格，或者0
- 用博弈论思想分析问题的基本着眼点
  - 均衡，即在该状态下所有参与者的策略互为最佳应对，任何个人都没有理性的动机来改变自己的策略
- “均衡”概念在拍卖中如何体现？

单件物品拍卖的典型形式

	拍卖方式	成交规则	支付价格	是否知道他人出价	应用场景
增价拍卖	竞买者逐步加价，直到最后只剩下一个投标人为止	出价最高者得到拍卖品	最高的报价	是	古董和艺术品的拍卖
降价拍卖	出售者从一个较高价格开始逐步降价，直到有人愿意购买	出价最高者得到拍卖品	最高的出价	是	农产品的交易（例如荷兰的鲜花）
首价密封拍卖	在某一个约定的时间同时公开所有投标人的报价	最高（竞买时）最低（竞卖时）	最高或最低的报价	不	政府公共工程的建设招标
次价密封拍卖	在某一个约定的时间同时公开所有投标人的报价	最高（竞买时）最低（竞卖时）	次高或次低的报价	不	互联网门户和搜索引擎公司用于出售网页上的广告位

何时拍卖适宜

- 已知估值
  - 买卖双方知道彼此对一件商品的估值
    - 这种情况下拍卖是没必要的，假设一个卖方希望出售他认为价值为x的商品，所有 潜在的买家对这个商品的最高估值为一个更大的数值y。在这种情况下，销售这个商品将 产生一个y-x的盈余，其取值范围取决于较低的估值(x)和较高的估值(y)
  - 卖方知道所有买方对这件商品的真实估值
    - 估值为y的买方就会购买这件商品，全部盈余都归于卖方。换句话说，卖方根本不需要拍卖，只要宣布正确的价格，就可 以合理地获得最大利益。
- 未知估值
  - 买方对商品拥有独立和私密的估值这种情况
  - 共同价值

不同拍卖形式间的关系

- 降价拍卖和首价拍卖
  - 当卖方从最初的高价逐步降低价格，除非有竞拍者愿意接受 并支付当前价格，否则大家都不会有什么行动。当拍卖进行时，竞标者除了知道还没有人接 受当前价格之外，并不了解其他任何信息。每一个竞标者i都会有一个愿意接受商品的价格b_i 。这样看，降价拍卖过程与首价密封投标拍卖是等同的：这个价格b_i的作用与竞标者i的竞标价相同，出价最高的竞标者获得商品，所支付的价格也是这个最高的竞标价。
- 增价拍卖和次价拍卖
  - 随着卖方逐步提高价格，竞标者相继退出。拍卖的赢家就是留到最后的一个竞标者，他所支付的价格是倒数第二个竞标者退出时的价格。这就是次价密封报价拍卖所使用的规则，区别就在于在增价拍卖中买卖双方有实时互动，而密封报价拍卖则是每个买方提交密封报价。卖家拿到并同时打开以确定胜者。

一个课堂实验

- 两组学生，分别参与两个同样物品的拍卖
- 5个学生一组
  - A组：实验首价密封拍卖
  - B组：实验次价密封拍卖
- 过程
  - 展示待拍卖物品
  - 请每个人私密写下自己对该物品的估值，v
  - 请每个人私密写下自己的出价，b
  - 同时展示每个人的出价
  - 按照A，B对应的拍卖规则，确定中标人员和支付价格，完成交易

问题：两组实验结果，哪一组的｜v－b｜较大？

形式化地考虑次价密封拍卖问题

- 一件物品，竞拍者为参与者，
- 不同的人对它的价值有不同的认识（即底价，最多愿意花的钱），v_1，v_2，…，v_k ，即vi为竞拍者i对商品的真是估值.
- 每个人提出一个竞拍价，$b_1 > b_2 > \cdots, > b_k$
- 次价拍卖规则：出价最高者得到购买权，但只需支付（b中）第二高的出价，即

  v_1-b_2 就是出价最高的参与人得到的收益

  （如果有并列出价情况，对竞拍者进行排列，排位前的获胜）
- 你会如何出价？

结论：按照自己的估值出价最优！
在一个密封投标次价拍卖中，每个竞拍者i的占优策略是选择一个竞拍价bi=vi。

为什么说那就是“最优”

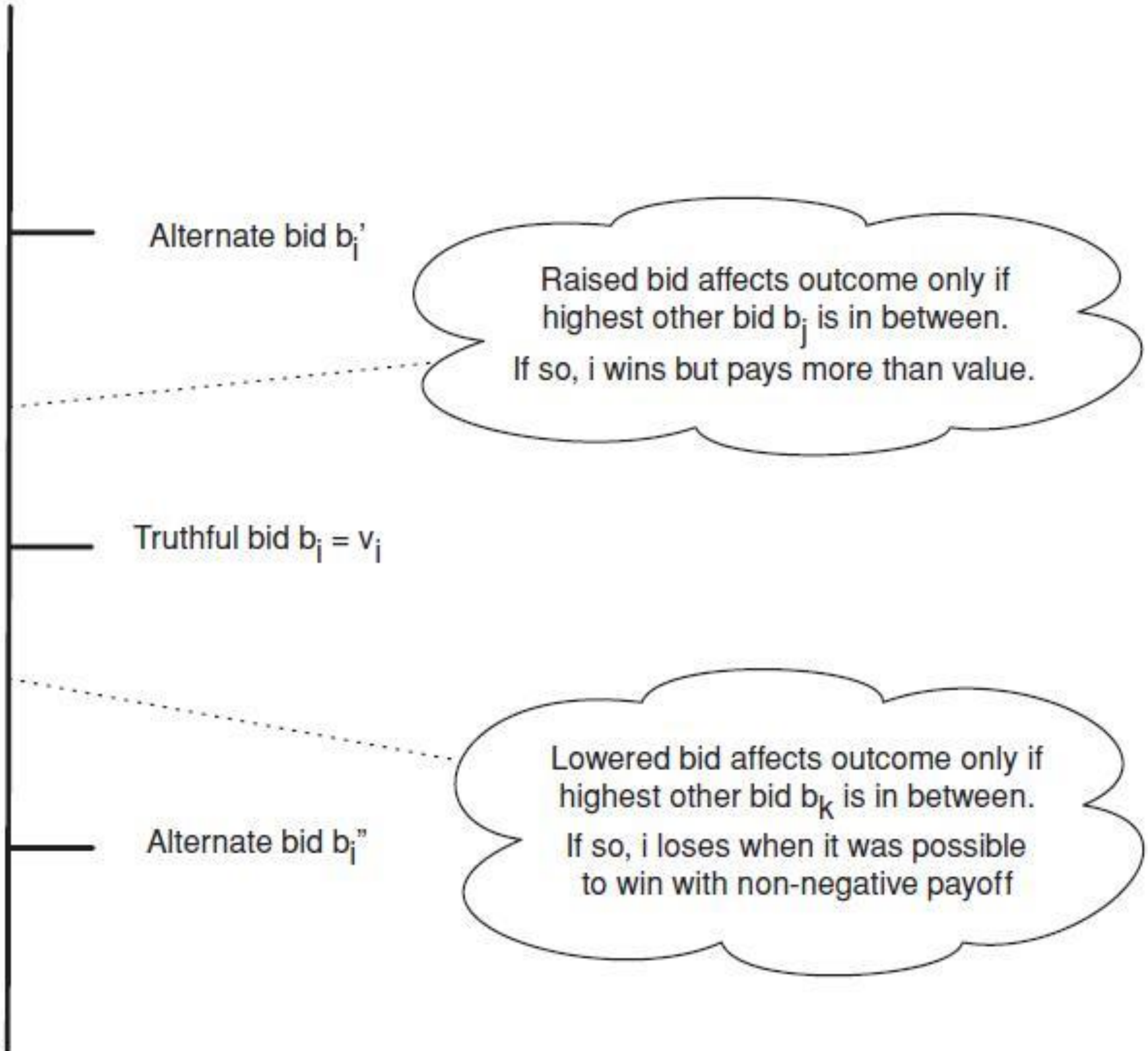
要证明断言： 需要展示当竞拍者i出价为$b_i=v_i$时, 无论他人采用什么策略,都不会改善他的回报. 两种情况存在: i提高其竞拍价,以及i降低其竞拍价.两种情况的关键点是: i的竞标价只会影响到i能否获胜, 而不会影响到i获胜时所支付的价格.获胜者支付的价格完全取决于其它的竞标价,即其它竞标价格中最高值决定.当i改变其竞标价时,其它出价都不变,如果因此而改变了i的输赢结果,才会影响到i的回报.图9.1示意这种情况.

一个竞拍者，在看到其他人报价的情形下，要改变报价，只有两种可能的理由

（1）从不中标状态变为中标，而且以不高于自己的估值得到拍品。为第一句话，他需要提高报价，超过比自己报价高的。

（2）保持中标状态，但支付的价格更低。为第二句话，他需要降低报价，低于比自己报价低的。

问题是，若他当前报价就是估值，如果提高到超过另一人，能中标，但支付的就是另一人的报价，高于自己的估值了；而如果低于另一人的报价，则会失去中标的资格。所以,最佳应对是:自己的真实估值为最优策略.



Alternate bid b_i'
Raised bid affects outcome only if highest other bid b_j is in between.
If so, i wins but pays more than value.
Truthful bid $b_i = v_i$
Lowered bid affects outcome only if highest other bid b_k is in between.
If so, i loses when it was possible to win with non-negative payoff
Alternate bid b_i"

证明:

- 第一，假定竞拍者i选择另一个出价$b_i'>v_i$, 而不是v_i。那么，只有当i以v_i出价没有获胜，以b_i' 赢得拍卖的情况下，才会对i的回报产生影响。要使这种情况出现，其他出价中最高的b_j必须在b_i和b_i'之间。在这种情况下，i的回报变化最多为$v_i-b_j<=0$，所以出价b_i'的变化并不能改善i的回报。
- 接下来，假定i选择一个出价bi"<vi。只有当i会以vi赢得拍卖却以bi" 输掉拍卖的时候，才会对i的回报有影响。变化之前，vi是中标价，次高出价bk在vi和bi" 之间。在这种情况下，i在变化之前的回报为vi-bk>=0，而在变化之后则为0(因为i没有获胜），所以同样的这个变化对i的回报没有改善。
- 以上核心观点是：次价拍卖中，竞拍价只能决定能否获胜，不能决定获胜后所支付的价格.

首价拍卖和其它形式的拍卖

按估值出价，回报总是为0！

- 首价拍卖的定义:
  - 如果bi不是中标价, 那么i的汇报为0.如果bi是中标价, 那么i的回报为vi-bi.
- 需要注意的是: 真实估价不再是你的占优策略. 为什么?
- 因为: 真实估价出价;如果没有获胜,回报为0,如果获胜,回报还是0.

如果你的出价最高，赢得了交易，你其实有可能稍微降低一点你的出价（即支付价）还能够赢得交易，从而得到较大回报。

因此，可以理解在首价密封拍卖中人们倾向于较低出价。对比起来，次价密封拍卖告诉人们：偏离估值出价没有意义。因此，我们可以说：“次价支付规则”鼓励真实报价。

首价拍卖和其它形式的拍卖

- 全支付拍卖:
- 每个竞拍者提交出价,出价高者获得商品, 无论输赢,所有的竞拍者都得支付他们的报价. 形式化描述为:
- 如果bi不是中标价, 那么i的汇报为-bi.如果bi是中标价, 那么i的回报为vi-bi.
  - 和赌场下注一个意思: 真实案例是政治竞选. 获胜之前都的投入,而投入的如果输了,也没有回报,反而投入的就突入了;而获胜的一方将获得回报;
  - 工程项目的的竞标也有类似的情况. 竞标前需要设计, 以赢的标书.
  - 和首价拍卖一下,竞标者一般回以低于真实估值的价格出标.

公共价值和赢家诅咒

- 注意:到目前为止,我们讨论的竞拍者对拍卖品的估值都是独立的:每个竞拍者都知道自己对商品的估值,而不知道其他竞拍者对商品的估值.这在多数情况下是讲的通的.但如果你拍的物品是为了再次卖出,情况就不一样了.
- 如果再次卖出,商品应该是按照公共价值出售---但这个价格未必自己是知道的.
- 每个竞拍者i对共同价值可能有私有信息,导致一个估计vi,每个竞拍者的估值会有些偏差,通常这些估值不是相互独立的;
- 设真实价值为v,而每个竞拍者i的估值为vi,则vi=v+xi,xi是一个均值为0的随机数,代表i的估算误差.
- 如果公共价值商品以次价拍卖卖出.竞拍者i以vi出价就不是i一个占优策略.因为,假设有很多竞拍者,每个人都以真实估值出价来竞拍,那么拍卖的结果是,赢家不仅能获得商品,还能了解到真实的估值信息----该商品的最高估值.这可能是一个过高的估值,赢家以第二高的价格(他支付的价格)获得拍品,可能也是过高的估值.这样,在此出售的时候以公共价值出售就要损失.
- 这就称作为赢家诅咒.历史上多次发生.实际出价竞拍中,次价拍卖出价要低些,而首价拍卖的出价更低.

首价拍卖中的均衡出价

- 假定有两个竞拍者，每个人对商 品有一个独立私密的估值，均匀分布在0和1之间例两人都知道这个情况。竞拍者的策略以函数s(v) =b描述，反映了真实估值v与非负出价b的关系。我们对竞拍者使用的策 略作以下假设：
  - s(•)是一个严格递增的可导函数；具体地，当两个竞拍者有不同估值时，他们的出价也不同。
  - 对所有v，满足s(v)<=v：竞拍者可以降低出价，但永远不会以高于真实估值的价格出价。注意，所有的出价都是非负数，因此，s(0) =0
- 这两个假设可描述的策略范围非常广泛. 如真是估价出价策略可用s(v)=v来表示,而一个因此c<1来表示降低出价函数s(v)=cv，也可以更复杂的表示如$s(v)=v^2$.
- 1. 两个竞拍者的均衡：启示原则
  - 假如两个竞拍者知道他们互相竞争，并且知道每 个人都有一个在区间[0,1]随机分布的私密估值，那么每个竞拍者以其真实估值的一半出价 就会达到均衡。假如另一个竞拍者也用真实估值的一半来出价，那么你也这么做就是一个 最优行为。
  - 推导两人参加的均衡
  - 很多竞拍者的均衡
  - 一般分布

两个竞拍者的均衡：启示原则

- 基于假设（1），真实估值高的人出价也会高。假如竞拍者i有个估值vi，那么它高于其他竞争者的估值的概率在区间[0,1]，即为vi。因此，i会以概率vi 赢得竞拍。假如i真的赢了，i获得的回报即为 $v_i - s(v_i)$ 所以i的期望回报是 $g(v_i) = v_i(v_i - s(v_i))$
- 假如i的竞争者也使用策略s(•)，那么i不应该使用高于s(1)的出价，因为i可以以出价s(1)赢得竞拍且以出价s(1)要比任何更高出价b>s(1)获得更高的回报。所以i的任何可能偏差，应在s(0)=0和s(1)之间。因此，为了竞拍的目的，他可以用这种偏差模拟一个替代策略，假设其真实估值为vi’而不是vi，然后将vi’代入函数s(•)。这是基于启示原则方法的一个特殊例子；为了我们的目的，出价策略函数的偏差可被视作竞拍者i根据相同的策略s(•)使用不同真实估值产生的偏差。由这个启示原则，我们可以写出i不想偏离策略s(•)的条件：

$$v_i(v_i - s(v_i)) \geq v(v_i - s(v))$$

- 对于函数s（•），所有“假”的估值都在0到1之间。
- 存在满足这个特性的函数吗？

推导两人参加的均衡

- 为了使s(•)满足 $v_i(v_i - s(v_i)) \geq v(v_i - s(v))$ 它必须有以下特性：对于任何真实估值vi，期 望回报函数g(v) = v(v – s(v))可通过设定v = v i , 达到最大。因此，vi应该满足g'(vi) =0,　g'是g (.)对v的一阶导数。

$$g'(v) = v_i - s(v) - vs'(v)$$

$$s'(v_i) = 1 - \frac{s(v_i)}{v_i}$$

- 所以解为：$s(v_i) = v_i/2.$
- **这就刚才的结论：** 假如两个竞拍者知道他们互相竞争，并且知道每 个人都有一个在区间[0,1]随机分布的私密估值，那么每个竞拍者以其真实估值的一半出价 就会达到均衡。假如另一个竞拍者也用真实估值的一半来出价，那么你也这么做就是一个 最优行为。
- 注意：这里没有确定一个占优策略，而只是一个均衡。分析一个竞拍者的最优策略时，利用了每个竞拍者对另一个人的出价策略的期望，在一个均衡中，这些期望是准确的。但如果其他竞拍者出于其他原因使用了非均衡策略，那么竞拍者也应该使用其他出价策略以求最佳应对。

有很多竞争者的均衡

- 现在假设有n个竞拍者，n大于2。仍然假定竞拍者i的真实估值是独立的，在0和1 之间随机分布。
- 期望回报的基本公式有变化，竞拍者i的期望回报为 $G(v_i) = v_i^{n-1}(v_i - s(v_i))$
- 由启示原则：$v_i^{n-1}(v_i - s(v_i)) \geq v^{n-1}(v_i - s(v))$
- 据此，我们可用类似于两个竞拍者例子的微分方程式，来推导出价函数的形式。期望回报函数 $G(v) = v^{n-1}(v_i - s(v))$ 在v = v i 的时候最大，设导数 $G'(v_i) = 0$，并利用导数G的乘法法则，可得
- $$(n-1)v^{n-2}v_i - (n-1)v^{n-2}s(v_i) - v_i^{n-1}s'(v_i) = 0$$
- 解得 $s'(v_i) = (n-1)\left(1 - \frac{s(v_i)}{v_i}\right)$，所以 $s(v_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)v_i$
- 因此，如果每一个竞拍者以一个因子(n-1)/n降低其出价，则不论其他人怎么做，这都 是个最优行为。注意，当n=2, 这就是我们的两个竞拍者策略。这个策略的形式突出了一 个我们前面讨论的在首价竞拍中策略出价的重要原则：**随着竞拍者数量增加，你应该 选择较积极的策略，出价降低得少些，以便赢得拍卖。**

一般分布

- 除了考虑有更多竞拍者的例子，还可放宽竞拍者的估值是由一个区间均匀分布的假设。 假设每个竞拍者有在非负实数的概率分布中得出的估值，我们用累积分布函数F(.)来代表这个概率分布：对于任何x来说，值F(•)是从该分布中取得一个不超过x的数的概率.假定F可导.
- 拥有真是估值vi的竞拍者i赢得拍卖的概率是没有其他竞拍者有更大真实估值的概率.所以,它等于$F(v_i)^{n-1}$.因此,
- vi期望回报为：$F(v_i)^{n-1}(v_i - s(v_i))$
- 竞拍者不想偏离这个策略的条件变为：$F(v_i)^{n-1}(v_i - s(v_i)) \geq F(v)^{n-1}(v_i - s(v))$
- 类似的分析过程，最后可以得到结果

$$s'(v_i) = (n-1)\left(\frac{f(v_i)v_i - f(v_i)s(v_i)}{F(v_i)}\right)$$

- 注意:对[0,1]区间均匀分布来说,积累分布函数F(v)=v,密度分布函数f(v)=1,带入上式,即的前述方程.

卖方的收入

- 比较首价拍卖和次价拍卖中卖方的收入:
- 我们知道: 一个次价拍卖中,卖方会收到较少的收入,因为他只收第二高的价格;另方面, 首价拍卖中,竞拍者降低出价,同样也减少了卖家的收入.
- 如何解释: 假定有n个竞拍者,他们对商品的估值都是独立均匀分布在区间[0,1],因为卖方的收入基于最高及次高出价的值, 我们需要知道这些取值的期望,但需要复杂的证明.我们可以用简单解释这些期望得到的结果.
- 假定n个数均匀独立地分布在区间[0,1]之间，从小到大排序这几个数。在这个排列里排在位置k的期望值是$\frac{k}{n+1}$.
- 假如卖家进行次价拍卖，竞拍者遵循他们的占优策略真实出价，卖家的期望收入就是次高估值的期望。因为它是在n个随机值的排序中位于n-1上的值，期望值就是(n- 1)/(n+ 1)。另一方面，假如卖家用首价拍卖，那么在均衡中，我们期望赢家以(n-1)/n乘以其真实估值的值来出价。其真实估值的期望是n/(n+l)(因为它是从单位区间独立获取 n个数中的最大值），那么卖家的期望收人为：$\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n-1}{n+1}$
- 两种拍卖方式为卖家提供的期望收入完全一样
- 收入等价：当竞拍者遵循均衡策略时，且他们的估值是独立任意分布，则一个卖家采用不同的拍卖类型获得的收入都是相同的。

收入等价的讨论

- 当竞拍者遵从均衡策略时,且他们的估值是独立均匀分布的,则卖家采用不同的策略获得的收入是相同个的,文献[256]有一个证明.
- 从这里的讨论可以很容易看出，对卖家来说，承诺一个买卖机制的能力是多么有价值。比如说，一个卖家使用次价拍卖，假如竞拍者真实出价，卖家并不像承诺的那样卖出商品，那么卖家就了解到竞拍者的估值，并且可用这个有利条件与他们讨价还价。最糟糕的是，卖家能以相当于次高出价的价格卖出商品（拥有最高估值的竞拍者知道假如他拒绝以此价格交易，那么以次高出价的竞拍者就会接受交易）。但卖家能在协商中做得更好，因此，就整体竞拍而言，竟拍者将承担相当于原本承诺的次价拍卖价格的损失。假如竞拍者担心这种情况可能已出现，那么他们会认为以真实出价不再是最优做法，则卖家得到多少就不是很明朗

底价

- 在一个卖家应如何选择拍卖形式的讨论中，假设卖家必须卖掉商品
- 假如卖家选择留着商品不卖掉它 ，假设卖家对商品的估值为u>=0即卖家留着商品而不卖掉所得的回报。
  - 假如u>0，那么卖家就不能使用一个简单的首价拍卖或者次价拍卖。在任何一种情况中，赢家出价可能比u少，那么卖家就不想卖出商品。假如在确定了首价拍卖或次价拍卖后，卖家拒绝卖出商品，那么他就没有履行诺言.
- 对卖家来说，在举行拍卖之前先公布底价r会比较好。如何推出次价拍卖中底价的最优值 ？
- 假如对卖家来说商品价值为u，那么很明显他应该设为r>=u，事实上为使卖家期望收入能最大化，底价通常是严格大于u的。 为什么?
- 假如一个次价拍卖只有一个竞拍者，他的估值均匀分布在区间[0,1]之间，并且有一个对商品估值为u=0的卖家．由于只有一个竞拍者，没有低价的次价拍卖会以0的价格将商品卖出．如果卖家把商品低价设为r>0，那么有一个1-r概率，竞拍者的出价高于r，商品会以r的价格卖给竞拍者．有r的概率，竞拍者的出价低于r，此时卖家留着商品，获得u=0的收益.

底价

- 因此，卖家的期望收入为r(1-r)，并且当r=1/2时达到最大。假如卖家的估值u大于零，那么他的期望收人是r(1-r)+ru(因此当商品没有卖出时，他获得的收入为u)，并且当r=(1+u)/2时达到最大。
- 所以当有一个竞拍者，最优底价对卖家来说是商品的估值和竞拍者的最大可能估值的中间值。基于更复杂的分析，可以确定在多个竞拍者的次价拍卖中的最优底价，以及我们曾经推论的基于均衡出价策略的首价拍卖的底价。

全支付拍卖中的均衡出价

- 回忆一下，权支付拍卖中赢家获得商品，但输家也要付出他们的出价（政治竞选）
- 有n个竞拍者，每个人随机独立均匀分布在区间[0, 1]的估值. 找到一个估值函数s(•)，如果所有竞拍者使用s(•)时，那使用s (•)就是最优策略.
- 加入竞拍者i没有赢得拍卖，i的期望回报是负值. 计算如下：

$$v_i^{n-1}(v_i - s(v_i)) + (1 - v_i^{n-1})(-s(v_i)),$$

- 第一项对应假如i赢得竞拍的回报，第二项对应如果i输掉竞拍的回报. 正如我们前面考虑采用的一个假的估值，对应函数s(•)表示一个偏离的出价策略；那么假如s(•)是一个竞拍者使用的均衡选择，则

$$v_i^{n-1}(v_i - s(v_i)) + (1 - v_i^{n-1})(-s(v_i)) \geq v^{n-1}(v_i - s(v)) + (1 - v^{n-1})(-s(v))$$

- v的取值范围在[0, 1]之间. 期望回报是无论输赢都需支付的一个固定价格s(v)以及假如i赢得拍卖的估值vi组成. 化简上式，得

全支付拍卖中的均衡出价

$$v_i^n - s(v_i) \geq v^{n-1}v_i - s(v).$$

- 将右边写成一个函数, $g(v) = v^{n-1}v_i - s(v),$
- 令, g′(vi)=0， 通过一下微分方程 $s'(v_i) = (n-1)v_i^{n-1},$
- 得到 $s(v) = \left(\frac{n-1}{n}\right) v_i^n$
- 因为vi<1, 所以n增大将导致s(v)减少. 这证明了全支付拍卖中, 当竞拍者人数增加时， 竞拍者应该大大减少他们的出价.
- 从一个竞拍者卖家的获得的收入:

$$\int_0^1 s(v)\,dv = \left(\frac{n-1}{n}\right)\int_0^1 v^n\,dv = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

- 卖家的总收入: $n\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}.$
- 再次证明卖家收入等价的原则.

拍卖是一个丰富的话题

- 教材第9章，尤其是其深度学习材料部分对拍卖有进一步的论述，包括在首价拍卖中的最佳出价策略，十分引人入胜
- 在第15章，针对互联网上广告位的营销，我们还会进一步讨论拍卖问题