第五节　灵敏度分析

5.1 资源数量变化分析

5.2 价值系数变化分析

5.3 技术系数变化分析

问题：当**LP**问题中系数a_{ij}、b_i、c_j有一个或几个发生变化时，已求得的最优解会有什么变化；或者这些系数在什么范围内变化时，最优解或最优基保持不变。

当系数发生变化后，原来已得结果一般会发生变化。可用单纯形法从头计算，得到新最优解，但计算量大。

更好的做法：单纯形法迭代时，每次运算都和基变量系数矩阵**B**有关。可把发生变化的个别系数，经过一定计算后直接填入最终计算表中，并进行检查和分析。

当增广矩阵中的元素发生变化时，原问题和对偶问题会出现下述几种结果：

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	表中的解仍为最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表求解

以下均以最大化问题为例。

5.1 资源数量变化分析

设最优基的逆矩阵和最优解分别为

$$\mathbf{B}^{-1}=\{\bar{a}_{ij}\}_{m\times m}，\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_r,\ldots,\bar{b}_m)^{\mathrm{T}}$$

若右端项系数b_r发生变化：$b_r'=b_r+\Delta b_r$，其它系数不变。则最终表中原问题的解相应变化为

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}}'=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}),\ \ (\Delta\mathbf{b}=(0,\ldots,0,\Delta b_r,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}})$$

只要$\mathbf{x}_{\mathrm{B}}'\geq\mathbf{0}$，因为最终表中检验数不变，则最优基就不变。但最优解发生了变化，$\mathbf{x}_{\mathrm{B}}'$为新的最优解。

✧ 保证最优基不变的右端项可允许变化范围

$$\mathbf{x}'_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} + \mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{a}_{1r}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr}\Delta b_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 + \bar{a}_{1r}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{b}_i + \bar{a}_{ir}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \bar{a}_{mr}\Delta b_r \end{bmatrix}$$

若最优基不变，则要求单纯形最终表中**b**列的所有元素满足

$$\bar{b}_i + \bar{a}_{ir}\Delta b_r \geq 0 \rightarrow \bar{a}_{ir}\Delta b_r \geq -\bar{b}_i, i = 1,2, \dots, m$$

由此可得：

$$\text{if } \bar{a}_{ir} > 0, \text{then } \Delta b_r \geq -\bar{b}_i / \bar{a}_{ir}$$

$$\text{if } \bar{a}_{ir} < 0, \text{then } \Delta b_r \leq -\bar{b}_i / \bar{a}_{ir}$$

即，

$$\max_i \{-\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} | \bar{a}_{ir} > 0\} \leq \Delta b_r \leq \min_i \{-\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} | \bar{a}_{ir} < 0\}$$

例，为保证最优基不变，求第 1 章例 1 第 2 个约束条件b_2的变化范围Δb_2。

最终单纯形表中，$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{bmatrix}$，计算[1]：

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \Delta b_2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/4\\ 1/2\\ -1/8\end{bmatrix}\Delta b_2\geq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\Delta b_2\geq -4/(1/4)=-16\\ \rightarrow\ &\Delta b_2\geq -4/(1/2)=-8\\ &\Delta b_2\leq -2/(-1/8)=16\end{aligned}$$

Δb_2的变化范围：$[-8,16]$，b_2的变化范围：$[8,32]$。

---

[1] $\mathbf{B}^{-1}$所在单纯形表见教材第 41 页表 2-6.

思考，为保证最优基不变，求上例第 **1** 个右端项b_1和第 **2** 个右端项b_2的联合变化范围Δb_1、Δb_2。

最终单纯形表中，$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}$，有：

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

完成后续分析……

例 8，第 1 章例 1，若该厂又从其他处抽调 4 台时用于生产产品 I、II，求这时该厂的最优生产方案。

回顾原问题的最终单纯形表：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	$\boldsymbol{\theta}$
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}'$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0	
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1	
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0	
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0	

若资源变化，则在最终单纯形表中，新的右端项应是：

$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})=\mathbf{b}'+\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}$。

解，先计算$\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}$

将上述结果反映到最终表中：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$4+0=4$	1	0	0	0.25	0
0	x_5	$4-8=-4$	0	0	[-2]	0.5	1
3	x_2	$2+2=4$	0	1	0.5	-0.125	0
c_j-z_j			0	0	-1.5	-0.125	0

由于**b**列有负数，故用对偶单纯形法求新的最优解。

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_3	2	0	0	1	-0.25	-0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	-0.5	-0.75

该厂最优生产方案应改为生产 **4** 件产品 **I**，生产 **3** 件产品 **II**，获利：$z^* = 4 \times 2 + 3 \times 3 = 17$（元）。

$x_3 = 2$（松弛变量 > 0），即设备有 **2** 小时未被利用。

5.2 价值系数变化分析

（1）若c_j是非基变量x_j的系数，对应的检验数是

$$\sigma_j = c_j - \mathbf{c_B B^{-1} P}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$$

若c_j变成$c_j + \Delta c_j$之后，要保持最优基仍然不变，则要求最终表中检验数

$$\sigma_j' = c_j + \Delta c_j - \mathbf{c_B B^{-1} P}_j \le 0$$

那么，$c_j + \Delta c_j \le \mathbf{yP}_j$（$\mathbf{y} = \mathbf{c_B B^{-1}}$是单纯形乘子），即$\Delta c_j \le \mathbf{yP}_j - c_j$，才可保持原最优基不变(此时最优解也不变)。这确定了Δc_j的范围。

（2）若c_r是基变量x_r的系数，c_r变化将引起$\mathbf{c_B}$的变化。

$$\begin{aligned}(\mathbf{c_B}+\Delta\mathbf{c_B})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}&=\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}+(0,\ldots,\Delta c_r,\ldots,0)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\\&=\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}+\Delta c_r(a'_{r1},a'_{r2},\ldots,a'_{rn})\end{aligned}$$

当c_r变化Δc_r，最终表中检验数是

$$\sigma'_j=c_j-\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j-\Delta c_r a'_{rj}=\sigma_j-\Delta c_r a'_{rj},j=1,\ldots,n$$

若要求原最优解不变，则必须满足：$\sigma'_j\le 0$，即

$$\text{if } a'_{rj}<0\ then\ \Delta c_r\le\sigma_j/a'_{rj}$$

$$\text{if } a'_{rj}>0\ then\ \Delta c_r\ge\sigma_j/a'_{rj}$$

保证原最优基不变时，Δc_r可变化的范围：

$$\max_j\{\sigma_j/a'_{rj}|a'_{rj}>0\}\le\Delta c_r\le\min_j\{\sigma_j/a'_{rj}|a'_{rj}<0\}$$

例 9，第 1 章例 1，设基变量x_2系数c_2变化Δc_2，若要保持原最优解不变，请确定Δc_2的变化范围。

$c_j \rightarrow$			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	$-1.5-\frac{\Delta c_2}{2}$	$\frac{\Delta c_2}{8}-0.125$	0

$$-1.5-\frac{\Delta c_2}{2} \le 0,\quad \frac{\Delta c_2}{8}-0.125 \le 0$$

得：

$$-3 \le \Delta c_2 \le 1$$

即c_2可在[0,4]之间变化而不影响原最优解。

5.3 技术系数变化分析

例 10，分析在原计划中是否应该安排一种新产品。设第 1 章例 1 中除产品 I，II 外，还有一种新产品 III。已知产品 III 每件消耗两种原材料各为 6kg、3kg，设备 2 台时，获利 5 元。决策：是否应生产新产品 III，生产多少？

解，（1）高斯消元与增广矩阵迭代

设产品 III 的产量为 x_3'，对应的技术系数向量为 $\mathbf{P}_3' = (2,6,3)^{\mathrm{T}}$。

如果加入新产品，相当于原问题变成了：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3'$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + 2x_3' = 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad + 6x_3' = 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 + 3x_3' = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_3' \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法就是不断用高斯消元解方程组：就任何一个基矩阵**B**而言，当前单纯表系数矩阵的每一列都是原系数矩阵左乘$\mathbf{B}^{-1}$的结果。

产品 **III** 的决策变量x_3'在最终单纯形表中对应的列向量就应该是：

$$\mathbf{y}_3' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

若基矩阵不变，则最终表中x_3'的检验数为：

$$\sigma_3' = c_3' - \mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_3'$$
$$= 5 - (1.5,0.125,0)(2,6,3)^\mathrm{T} = 1.25 > 0$$

将上述计算结果填入到例 1 的最终单纯形表中：

原问题最终表

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0

加入新的列$\mathbf{y}_3'$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	5
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0	1.5
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1	[2]
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0	1.25

（2）可行基与检验数

由于**b**列仍然非负，因此当前基仍然是可行基。对于当前基而言，产品 **III** 的检验数为正，可入基。

计算知x_3'作为换入变量，x_5为换出变量：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	5
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	1	1	0	1.5	-0.125	-0.75	0
5	x_3'	2	0	0	-1	0.25	0.5	1
3	x_2	1.5	0	1	0.75	-0.1875	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	-0.25	-0.4375	-0.625	0

最优解： $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3' = 2$。

总利润为 16.5 元，比原计划增加了 2.5 元。

例 11，原产品的工艺结构发生变化。设原产品 **I** 的工艺结构有了改进，技术系数向量变为$\mathbf{P}_1' = (2,5,2)^{\mathrm{T}}$，每件利润 **4** 元。分析对原最优计划的影响。

解：若产品 **I** 改进了工艺结构，那么原来的 **LP** 问题第一列（蓝色列）就应变成新的列（红色列）：

$$\max z = 2x_1 \rightarrow 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 \rightarrow 5x_1 + x_4 = 16 \\ 0x_1 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_3' \geq 0 \end{cases}$$

原问题最终单纯形表的第一列，是原来的列$\mathbf{P}_1$左乘$\mathbf{B}^{-1}$的结果，即：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\-2 & 0.5 & 1\\0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}$：

原问题最终表 →

	$c_j \rightarrow$		2	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0

但在新问题中，高斯消元应该针对新的列：$\mathbf{P}_1' = (2,5,2)^{\mathrm{T}}$来进行。

而最终单纯形表，是其初始单纯形表的增广矩阵左乘

$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}$的结果，因此新 **LP** 问题在最终表中

对应的第一列就应是：$\mathbf{y}_1'=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1'$，即

$$\mathbf{y}_1'=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.25\\0.5\\0.375\end{bmatrix}$$

相应，新问题的当前“最终”单纯形表应该变成：

$c_j \rightarrow$			$2\rightarrow 4$	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2\rightarrow 4$	x_1	4	$1\rightarrow 1.25$	0	0	0.25	0
0	x_5	4	$0\rightarrow 0.5$	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	$0\rightarrow 0.375$	1	0.5	-0.125	0

上表整理为：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0.5	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0.375	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$							

显然，x_2和x_5各自提供了单位矩阵的一部分，考虑在增广矩阵中运用高斯消元，尝试将x_1的列变成$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，观察所得到的新的基$(\mathbf{P}_1', \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_2)$：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	2.4	0	0	-2	0.4	1
3	x_2	0.8	0	1	0.5	-0.2	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.2	0

很幸运：原问题及其对偶的解都是可行解，并且在此可行解下，二者目标函数值相等，因此都已是最优解。

所以，在新技术下，应生产产品 **I 3.2** 单位；生产产品 **II 0.8** 单位，可获利 **15.2** 元。

例 12，假设例 10 中产品Ⅰ的技术系数向量变为$\mathbf{P}_1' = (4,5,2)^{\mathrm{T}}$，利润仍为 4 元，则原最优计划有何变动?

解，类似例 10，在新技术下，产品x_1在最终单纯形表中对应的列仍然是$\mathbf{B}^{-1}$左乘的结果，即

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -3.5 \\ 1.375 \end{bmatrix}$$

因此，$\mathbf{P}_1'$伴随原增广矩阵左乘$\mathbf{B}^{-1}$之后，新问题的当前“最终”单纯形表为

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	-3.5	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	1.375	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$							

同样的，x_2和x_5的当前列各自提供了单位阵的一部分，考虑在增广矩阵中运用高斯消元，尝试将x_1的列变成$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，观察所得到的新的基 $(\mathbf{P}_1', \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_2)$ ：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	15.2	0	0	-2	1.2	1
3	x_2	-2.4	0	1	0.5	-0.4	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	0.4	0

很不幸：若以$(\mathbf{P}_1', \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_2)$为新的基，则原问题不可行，对偶问题也不可行，单纯形法无法进行下去（对偶单纯形也无法进行）。

考虑：单纯形表就是线性规划问题的等价表示，因此上述单纯形表等价于一个新的 **LP** 问题：

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0\ \ x_3 + 0.2x_4 + 0x_5 = \ \ 3.2 \\ 0x_1 + 0x_2 - 2\ \ x_3 + 1.2x_4 + 1x_5 = \ 15.2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0.5x_3 - 0.4x_4 + 0x_5 = -2.4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$(\mathbf{P}_1', \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_2)$为不可行基的原因在于$x_2$需要取$-2.4 < 0$，才能保证第三个约束成立。可将第三个约束等价变换为：

$$-x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 = 2.4$$

进一步，在第三个约束中引入一个人工变量x_6：

$$-x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 + x_6 = 2.4$$

则x_6对应的列向量为：

$$\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

显然，$(\mathbf{P}_1', \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$就是一个可行基。

但x_6是人工变量，需要用大**M**法排除，由此应求解下述**LP**问题：

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 - \mathrm{M}x_6$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0\quad x_3 + 0.2x_4 + 0x_5 + 0x_6 = \quad 3.2 \\ 0x_1 + 0x_2 - 2\quad x_3 + 1.2x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 15.2 \\ 0x_1 - 1x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 + 0x_5 + 1x_6 = \quad 2.4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

新的单纯形表为：

$c_j \to$			4	3	0	0	0	$-\mathrm{M}$
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1	3.2	1	0	0	0.2	0	0
0	x_5	15.2	0	0	-2	1.2	1	0
$-\mathrm{M}$	x_6	2.4	0	-1	-0.5	[0.4]	0	1
$c_j - z_j$			0	$3-\mathrm{M}$	$-0.5\mathrm{M}$	$-0.8+0.4\mathrm{M}$	0	0

x_4进基，人工变量x_6出基，继续迭代：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	$-M$
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1	2	1	0.5	0.25	0	0	0.5
0	x_5	8	0	[3]	-2	0	1	-3
0	x_4	6	0	-2.5	-0.5	1	0	2.5
$c_j - z_j$			0	1	-1	0	0	$-M+2$
$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
4	x_1	2/3	1	0	0.33	0	-0.33	
3	x_2	8/3	0	1	-0.167	0	0.33	
0	x_4	38/3	0	0	1.667	1	0.83	
$c_j - z_j$			0	0	-0.83	0	-0.33	

最大利润32/3元。