现代管理科学方法
（第6讲）

郭仁拥 博士/教授/博导

讲授内容

1. **旅行商问题（TSP）的描述**
2. **非对称旅行商问题的混合整数规划刻画**
3. **对称旅行商问题的混合整数规划刻画**

1. 旅行商问题（TSP）的描述

- **VRP（NRP）的一个特例**
  - 仓库数为1；车辆数为1
  - 无限车辆运送能力（忽略顾客的货物/商品需求量）
  - 目标：找出一条服务所有顾客的最小费用路径

TSP问题的解是一个最小费用Hamiltonian圈

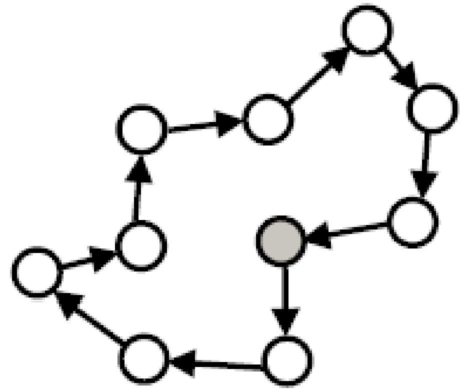
具有n个顶点的完全图：一个解≡序列$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列

可能解的数量是$(n-1)!$

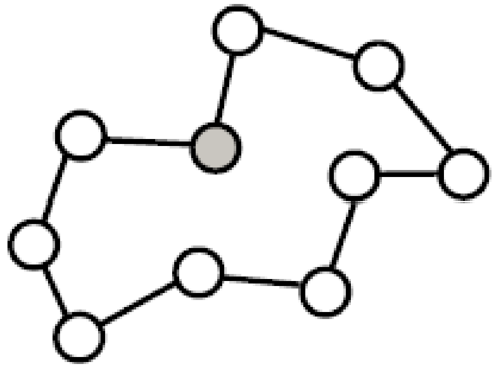
了解更多信息可访问：http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html

两类问题（费用矩阵的结构不同）：

- 非对称TSP：
  - 有向图 $G=(V,A)$
  - $\forall\ (i,j)\in A$，$c_{ij}\neq c_{ji}$ 或 $c_{ij}=c_{ji}$



- 对称TSP：
  - 无向图 $G=(V,E)$
  - $\forall\ (i,j)\in E$，$c_{ij}=c_{ji}$



TSP是一个强NP难题

如何求解？

- 确定算法 — 混合整数规划刻画；分支和切割方法等
- 启发式方法 —
  - 构造启发（Constructive heuristics）
  - 改进启发（Improvement heuristics）
  - 元启发（metaheuristics），例如，遗传算法、模拟退火算法、蚁群算法、粒子群算法、神经网络等

使用启发式算法的情形

- 问题规模较大，使用精确算法的计算时间太长
- 尽管问题规模不大，但需要有限时间求解
- 问题数据是近似的，没必要求解精确最优解
- 问题被扩展，很难设计精确求解算法
- 问题是动态的

- 混合整数规划（Mixed Integer Programming, MIP）刻画的研究为更好理解问题性质提供了启发性，用来计算问题解的下界
- 解下界给出了一个问题次优解质量的估计，是分支定界（或分支切割）方法的基础
- Z_{TSP}^{*} — 最优解；Z_{LB} — 下界；Z_{TSP} — 可行次优解
- $Z_{LB} \le Z_{TSP}^{*} \le Z_{TSP}$
- $(Z_{TSP} - Z_{LB}) / Z_{LB}$

2. 非对称旅行商问题的混合整数规划刻画

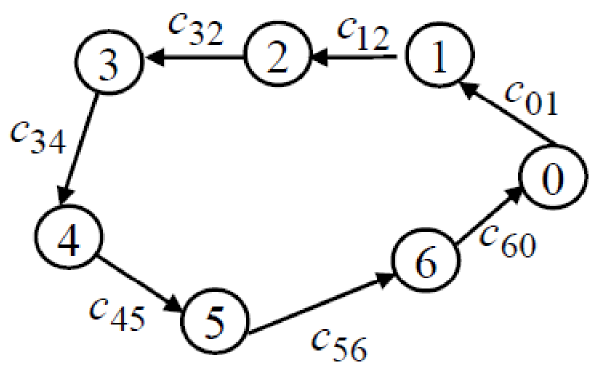
- 有向和完全图 $G' = (V, A')$

  $|V| = n$；$|A'| = n(n-1)$；$c_{ij} \neq c_{ji}$ 或 $c_{ij} = c_{ji}$

  问题解是一个最小费用Hamiltonian圈

- 变量：二进制变量 x_{ij}，$\forall\ (i, j) \in A'$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果顶点}i\text{和}j\text{被顺序相邻访问} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

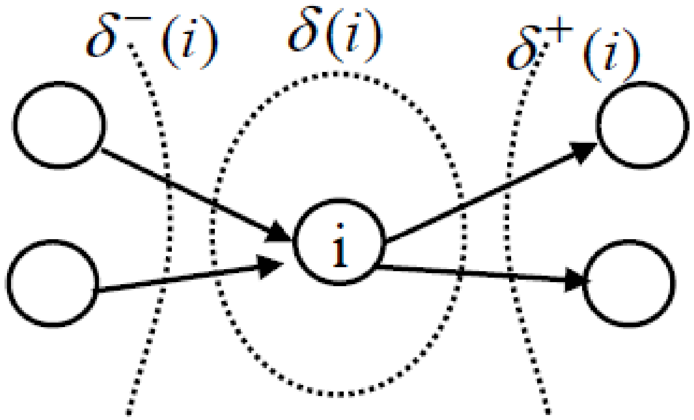


- 目标函数：$Z = \sum_{(i,j)\in A'} c_{ij} x_{ij}$

- 找到最小化 Z 的解：$Z^*_{ATSP} = \min \sum_{(i,j)\in A'} c_{ij} x_{ij}$

- 约束条件—度约束（Degree constraints）

  一个Hamiltonian圈中每个顶点被仅仅访问一次



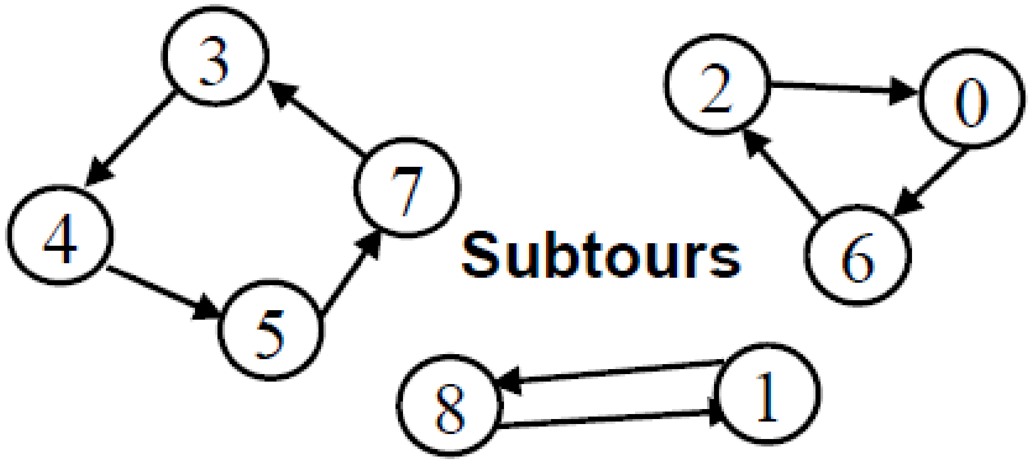
$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in V$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V$$

- 约束条件—子闭迹消去约束（Subtour elimination constraints, STE）

➢ 两类连通STE（指数阶基数）

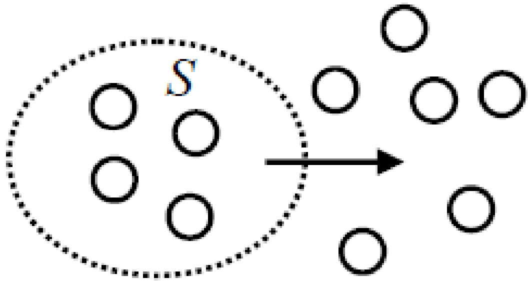
➢ 一类多项式阶基数STE



- 约束条件—STE—连通约束

对于任意一个包含至少两个顶点的顶点子集，连通约束被定义

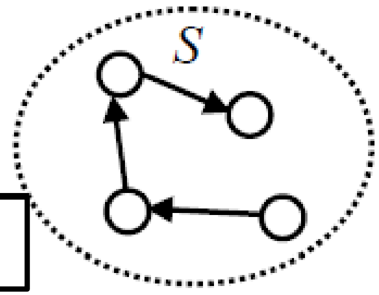
(I) $$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \ge 1 \quad \forall S\subset V, |S|\ge 2$$



$\delta(S)\ge 1$

或

(II) $$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \le |S|-1 \quad \forall S\subset V, |S|\ge 2$$



该方向必须满足度约束

约束I与II等价性的证明

$\forall S \subset V$，$|S| \geq 2$ 有 $\sum_{i\in S}\sum_{j\in V} x_{ij} = \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} + \sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij}$

由度约束条件得到 $\sum_{i\in S}\sum_{j\in V} x_{ij} = |S|$

因此，$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1 \Leftrightarrow |S| - \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} = \sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1$

$\Leftrightarrow \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leq S - 1$

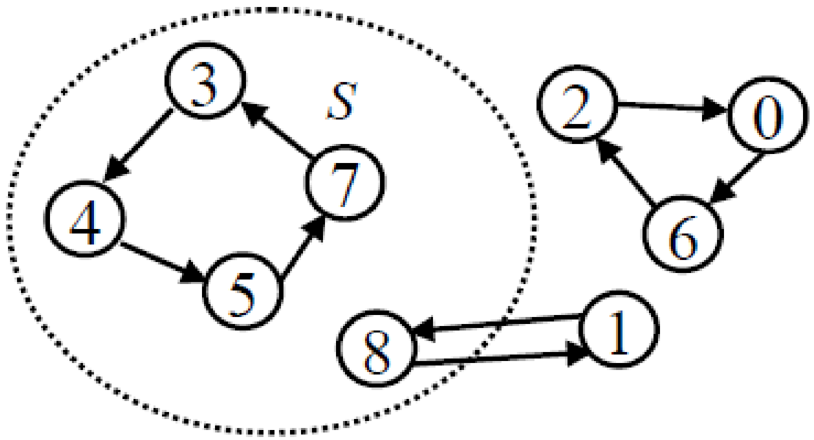
即约束I与II具有等价性

- 连通约束的缺点：

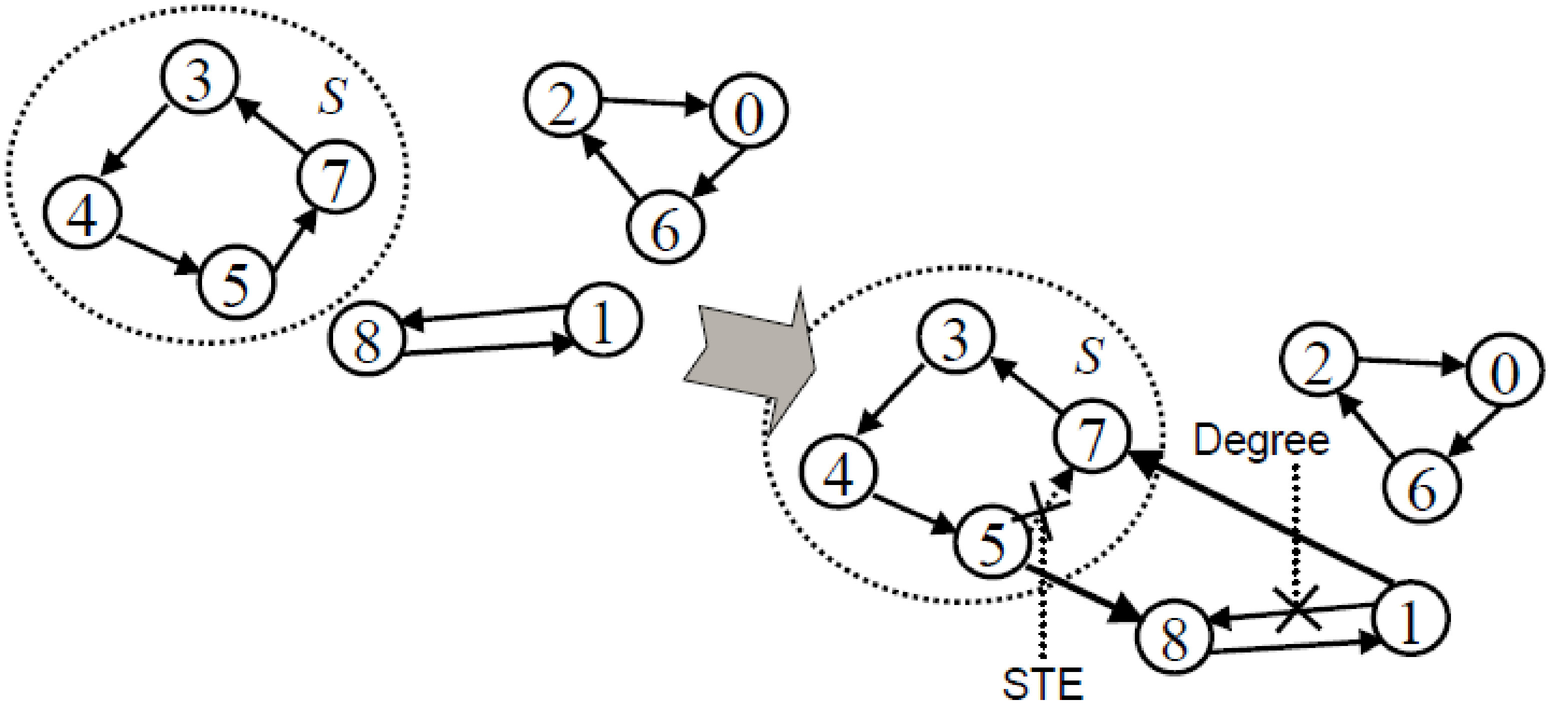
随着给定集合的子集数量增加，连通约束数量指数增加⇒

$O(2^{|V|})$

例子：一个满足连通约束的集合 S 的选择



例子：一个不满足连通约束的集合 S 的选择

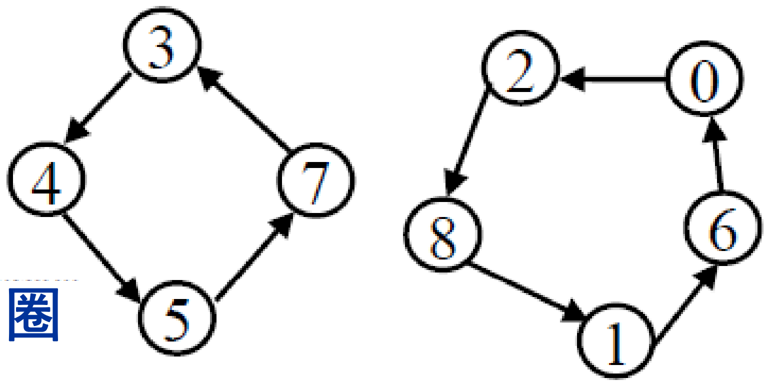


- 约束条件—STE—多项式基数约束
  - 引入实变量 u_i， $\forall\ i \in V \setminus \{0\}$， $u_i \geq 0$
  - $(n-1)(n-2) \Rightarrow O(n^2)$ 约束

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n-1,\quad \forall\ i,j \in V \setminus \{0\},\quad i \neq j$$

  - 这些约束如何起作用？它们消掉了任意不包含顶点0的闭圈

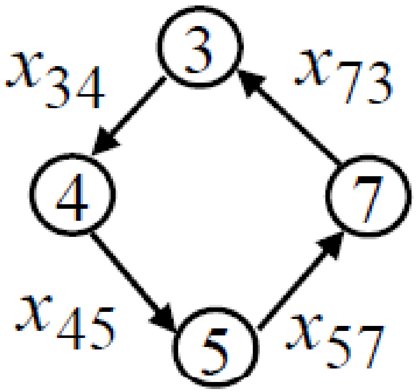
例子



不允许闭圈

允许闭圈

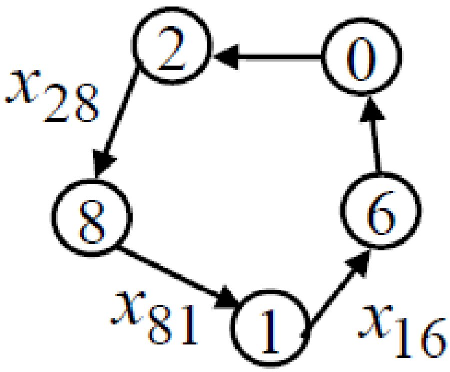
例子：不允许闭圈



$$u_3 - u_4 + 9 \cdot x_{34} \le 8$$
$$u_4 - u_5 + 9 \cdot x_{45} \le 8$$
$$u_5 - u_7 + 9 \cdot x_{57} \le 8$$
$$\underline{u_7 - u_3 + 9 \cdot x_{73} \le 8}$$
$$9 \cdot 4 \le 8 \cdot 4 \Rightarrow 1 \le 0$$

不成立

例子：允许闭圈



$$u_2 - u_8 + 9 \cdot x_{28} \le 8$$

$$u_8 - u_1 + 9 \cdot x_{81} \le 8$$

$$\underline{u_1 - u_6 + 9 \cdot x_{16} \le 8}$$

$$u_2 - u_6 + 9 \cdot 3 \le 8 \cdot 3 \Rightarrow u_6 - u_2 \ge 3$$

$$\Rightarrow e.g. \quad u_2 = 0, u_6 = 3$$

仅仅Hamiltonian闭圈被允许

分配给 u_i 的值表示该顶点被访问的顺序

● 问题解下界

求解如下分配问题（AP）—线性松弛；STE约束被去掉

$$\min \sum_{(i,j)\in A'} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i\in V\setminus\{j\}} x_{ij} = 1 \qquad j \in V$$

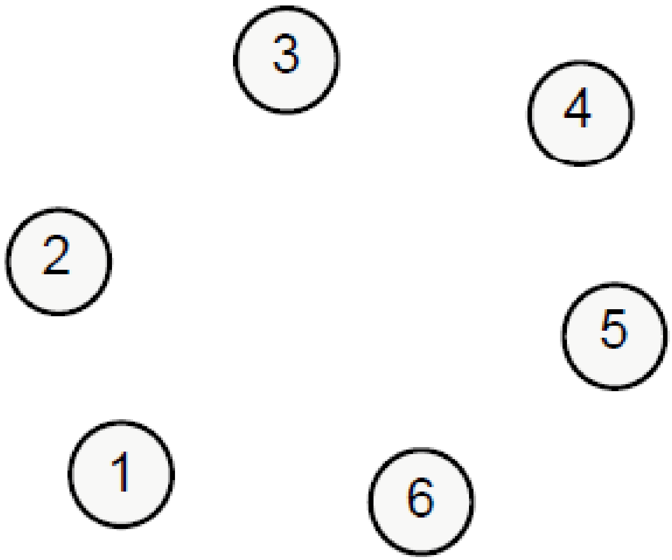
$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1 \qquad i \in V$$

$$0 \le x_{ij} \le 1$$

问题解是二进制的

对于强非对称费用矩阵，该解下界较接近最优解（<1%）

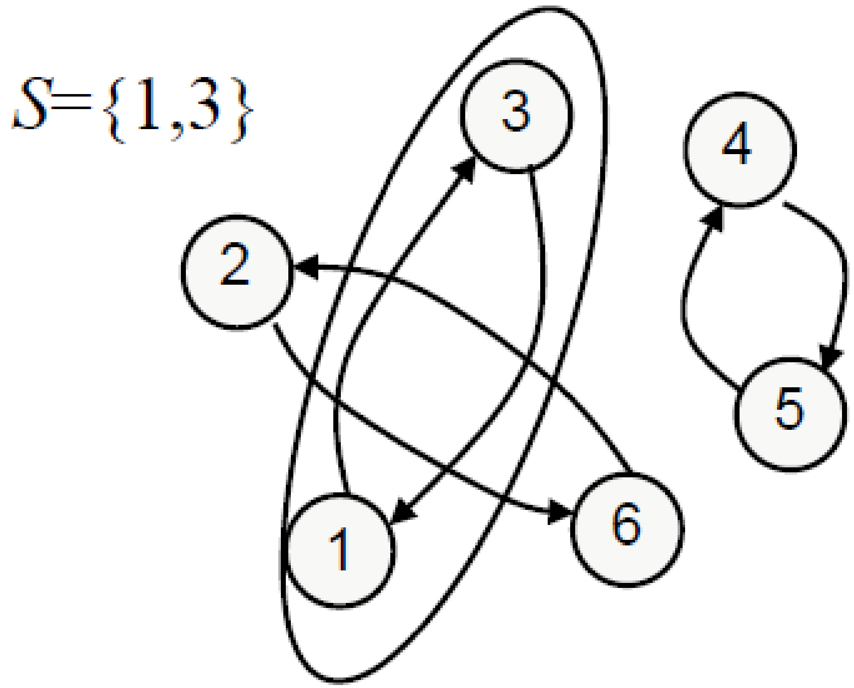
例子：一个完全图



对称费用矩阵

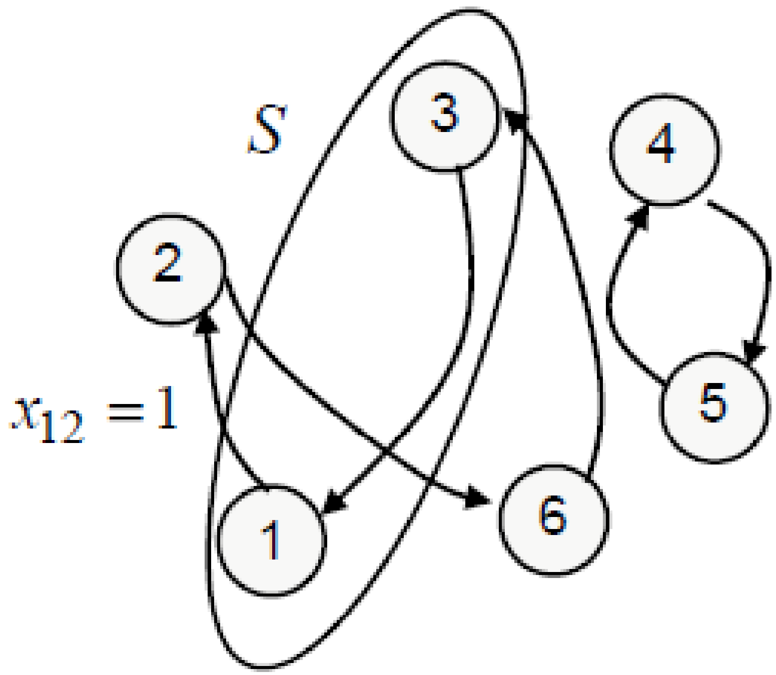
0	702	454	842	2396	1196
702	0	324	1093	2136	764
454	324	0	1137	2180	798
842	1093	1137	0	1616	1857
2396	2136	2180	1616	0	2900
1196	764	798	1857	2900	0

分配问题松弛（$Z_{AP}^{*}=5668$）



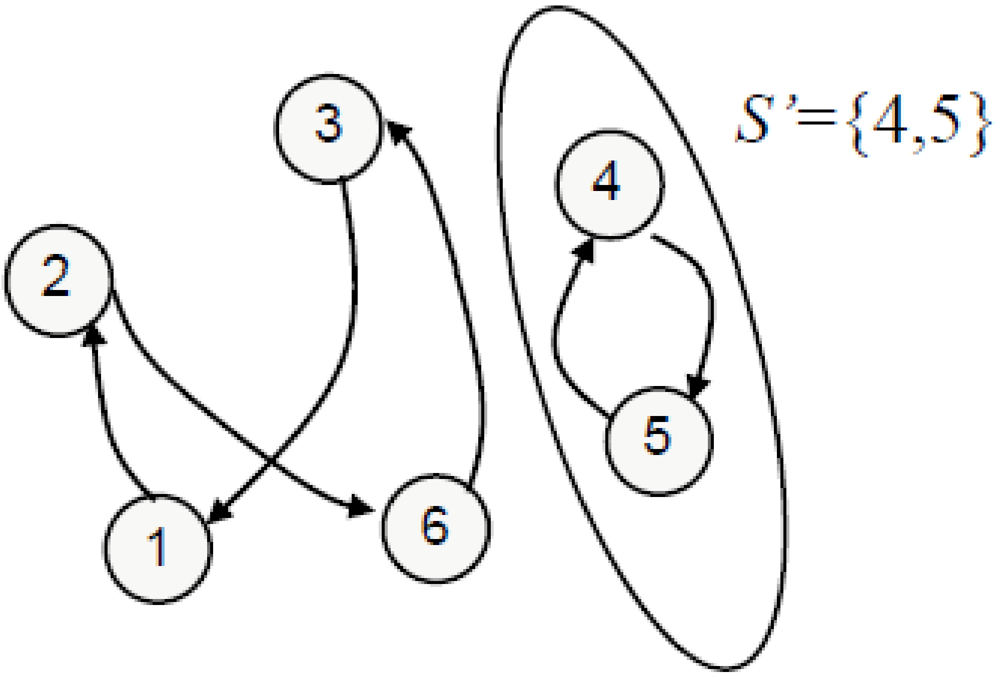
$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S}x_{ij}\geq 1 \Rightarrow x_{32}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{12}+x_{14}+x_{15}+x_{16}\geq 1$$

对 $S=\{1,3\}$ STE分割（$Z^*=5950$）



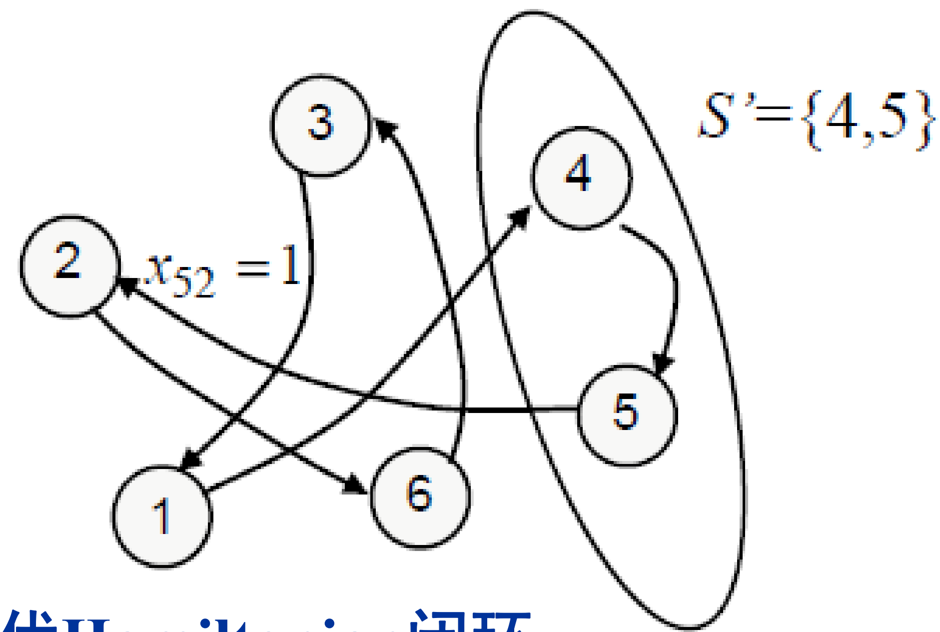
$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1 \Rightarrow x_{32}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{12}+x_{14}+x_{15}+x_{16} \geq 1$$

对 $S=\{1,3\}$ STE分割（$Z^*=5950$）



$$\sum_{i\in S'}\sum_{j\notin S'} x_{ij} \geq 1 \Rightarrow x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{46}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{56} \geq 1$$

对 $S=\{1,3\}$ 和 $S'=\{4,5\}$ STE分割（$Z^*=6610$）



最优Hamiltonian闭环

$$\sum_{i\in S'}\sum_{j\notin S'} x_{ij} \geq 1 \Rightarrow x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{46}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{56} \geq 1$$

3. 对称旅行商问题的混合整数规划刻画

- 无向完全图 $G' = (V, E')$

  $|V| = n$；$|E'| = n(n-1)$；$c_{ij} = c_{ji} = c_e$，$\forall\ e \in E'$

  问题解是一个最小费用Hamiltonian圈

  不要求旅行方向

- 变量：二进制变量 x_e，$\forall\ e \in E'$（每个边一个变量）

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{如果边}e\text{包含在解中} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

MIP刻画

$$\min Z_{STSP} = \sum_{e \in E'} c_e x_e$$

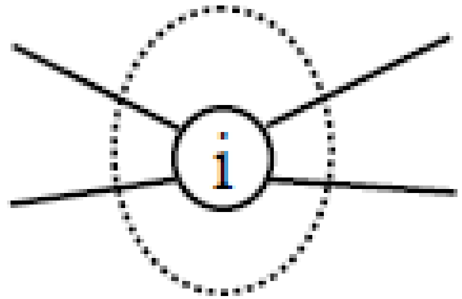
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 \quad i \in V$$ 度约束

$$x \in X_{STE}$$ 子闭迹约束

$$x_e \in B \quad \forall e \in E'$$

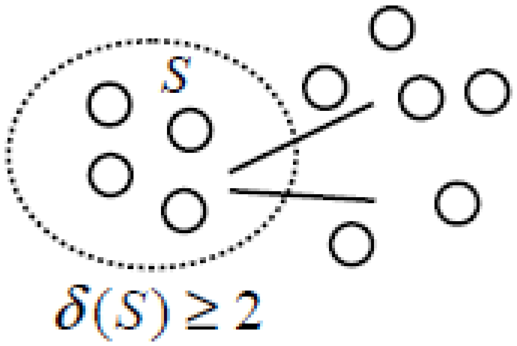
二进制约束

$\delta(i)$



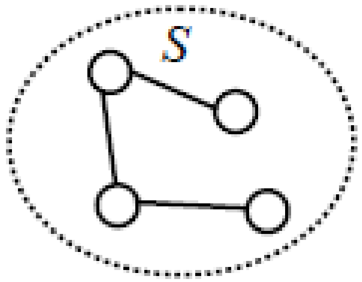
$$x \in X_{STE}$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2$$



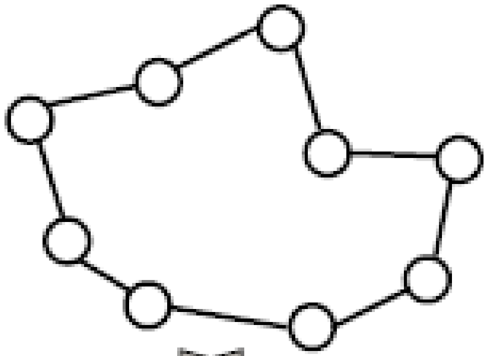
或 $\quad \forall S \subset V, 2 \leq |S| \leq \lceil |V|/2 \rceil$

$$\sum_{e \in \sigma(S)} x_e \leq |S| - 1$$

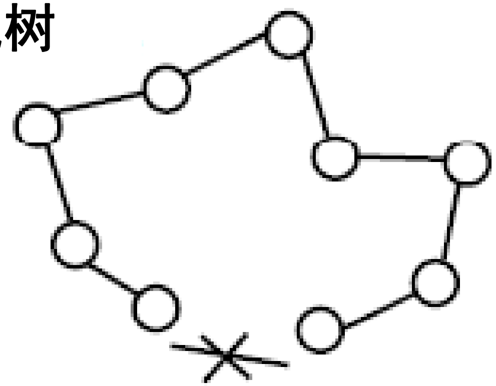


问题解下界：一个松弛

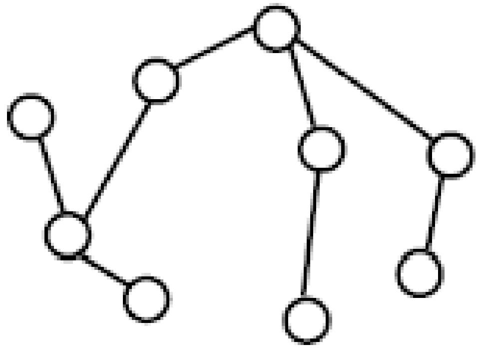
最小费用Hamiltonian圈



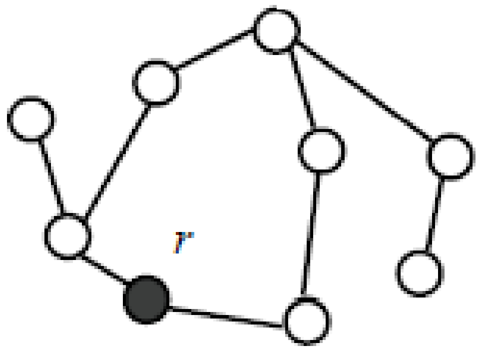
生成树



最小费用生成树（MST）

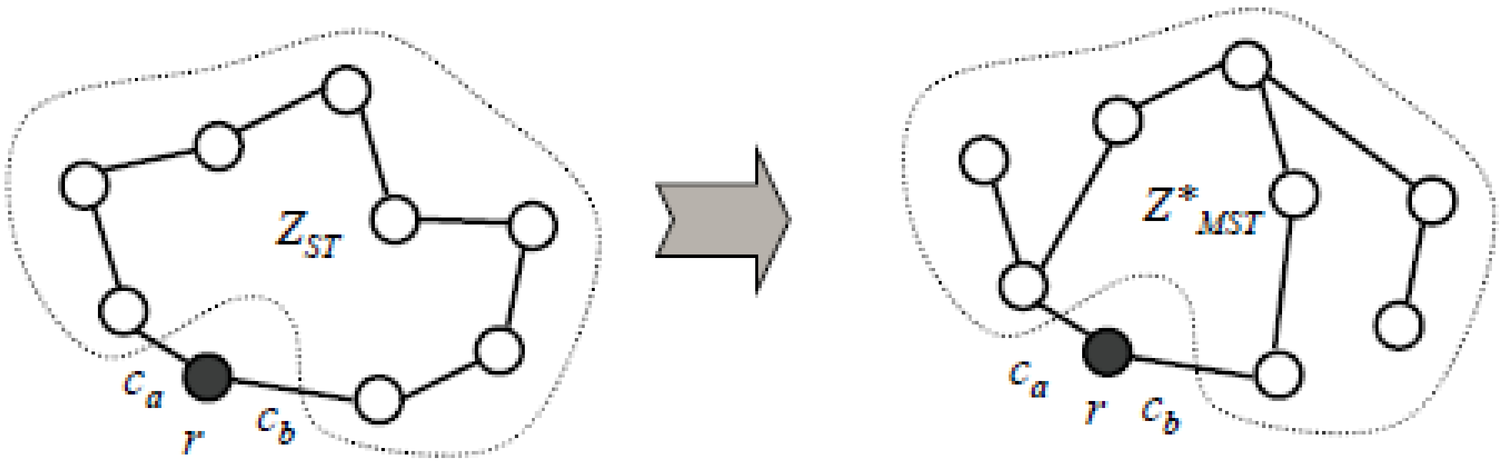


r-生成树



最小费用Hamiltonian圈是一个*r*-生成树

最小费用生成树（MST）



r-生成树

$Z^*_{STSP}=Z_{ST}+c_a+c_b$

$Z^*_{STSP}\geq Z^*_{MST}+c_a+c_b=Z_{r\text{-}ST}$

Z^*_{MST} 是 Z^*_{STSP} 的一个下界

$Z^*_{r\text{-}ST}$ 是 Z^*_{STSP} 的一个更好下界

Min r-ST的MIP刻画（r是任一顶点）

$$\min \sum_{e \in E'} c_e x_e$$

$$\sum_{e \in \delta(r)} x_e = 2$$

顶点 r 连着2条边

$$\sum_{e \in E' \setminus \delta(r)} x_e = n - 2$$

该约束可以被忽略

该约束定义了一个

由 $V \setminus \{r\}$ 生成树

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \quad \forall S \subset V \setminus \{r\}, |S| \geq 1$$

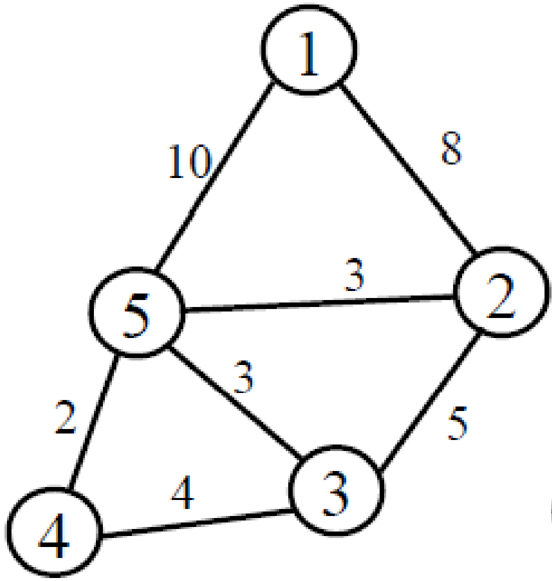
$$x_e \in B \quad \forall e \in E'$$

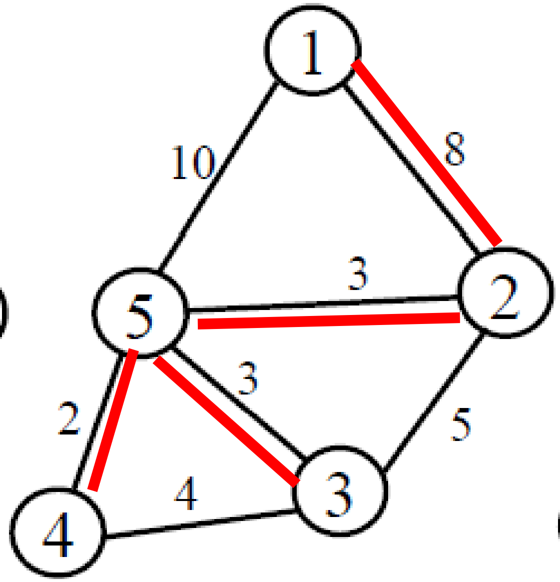
二进制约束

Min *r*-ST下界能被改进：

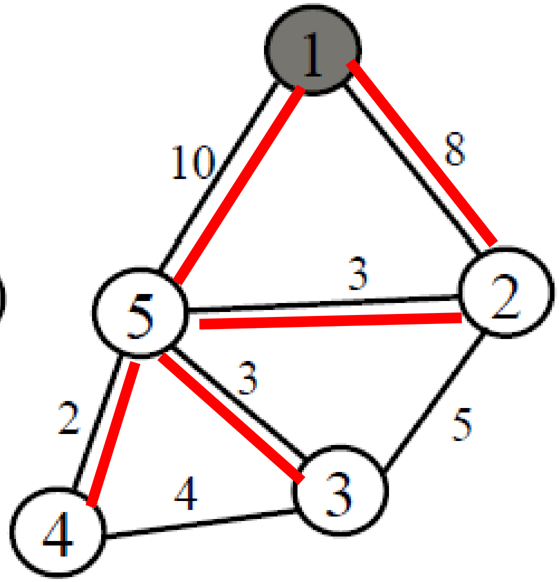
- 初始化 $Z_{LB} = -\infty$
- 对于每个 $i \in V$
  - 找出图 $G^i(V \setminus \{i\}, E^i)$ 的MST T^i，这里 $G^i(V \setminus \{i\}, E^i)$ 是 G' 中由顶点 $V \setminus \{i\}$ 构成的图
  - 找出Min *r*-ST，这里 $r = i$（将顶点 i 以及2个最小费用相连边添加到 T^i）；计算得到 $Z^*_{r\text{-}ST}$
  - 如果 $Z_{LB} < Z^*_{r\text{-}ST}$，则 $Z_{LB} = Z^*_{r\text{-}ST}$

一个例子





$Z^*_{MST}=16$



$Z_{1\text{-}ST}=26$

一个更好的下界：Held-Karp边界

- Min r-ST下界能被进一步改进（度约束的拉格朗日松弛）：
  - 每个顶点 i 有一个乘子 π_i
  - 费用变为 $c'_e = c_e + \pi_i + \pi_j$，这里 $e = (i, j) \in E'$

    每次旅行费用增加 $2\sum_{i\in V} \pi_i$

    最优 r-树费用变化是 $\sum_{i\in V} \delta_i \pi_i$，这里 δ_i 是 r-树中顶点 i 的度

- 则有 $Z_{STSP}^{*} + 2\sum_{i\in V}\pi_i \geq \min\left[Z_{r\text{-}ST} + \sum_{i\in V}\delta_i\pi_i\right]$

$$Z_{STSP}^{*} \geq \min\left[Z_{r\text{-}ST} + \sum_{i\in V}(\delta_i - 2)\pi_i\right] = w(\boldsymbol{\pi})$$

$Z_{STSP}^{*} \geq w^{*} = \max_{\boldsymbol{\pi}} w(\boldsymbol{\pi})$ 是最好的解下界

定界过程（子梯度优化）

1. $\pi_i = 0$，$i = 1,2,\cdots,n$；设置 $k = 0$， $w(\boldsymbol{\pi}) = 0$

2. 确定Min r-ST，设置 $w(\boldsymbol{\pi}) = \max\left\{w(\boldsymbol{\pi}), Z^*_{r\text{-}ST}(\boldsymbol{\pi})\right\}$

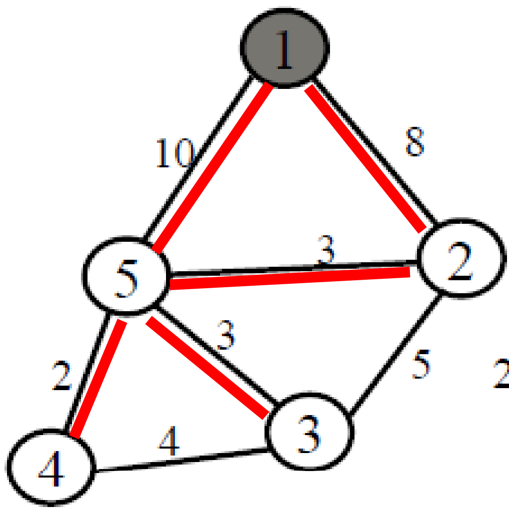
3. 确定 δ_i^k， $i = 1,2,\cdots,n$ （第 k 次迭代的顶点度）

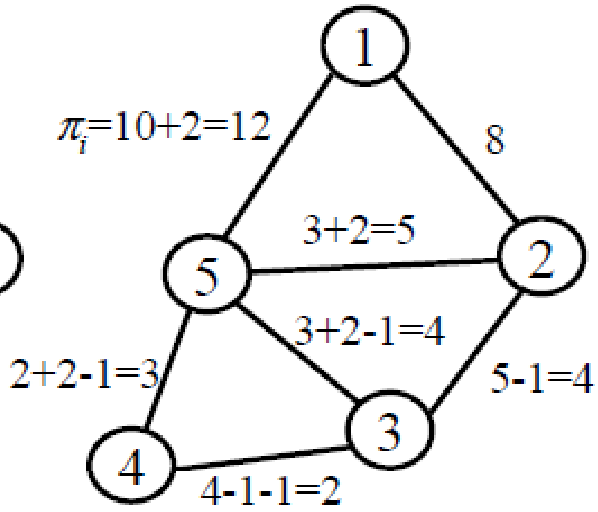
4. 如果 $\delta_i^k = 2$，对于 $i = 1,2,\cdots,n$，则 $Z^*_{STSP} = w(\boldsymbol{\pi})$，算法停止；否则，设置 $k = k+1$

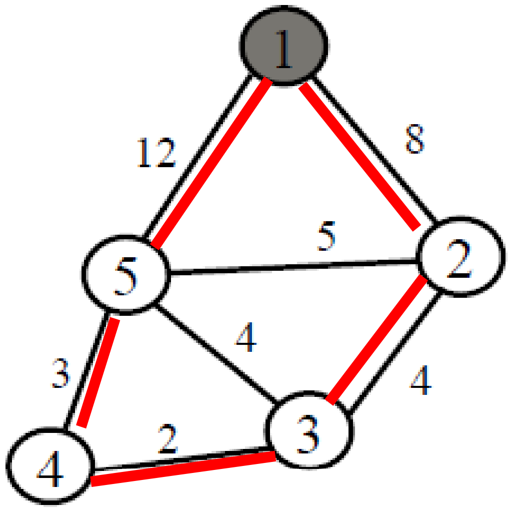
5. 如果 $k > k_{\max}$，则算法停止；否则，设置 $\pi_i = \pi_i + t_k(\delta_i^k - 2)$ 对于 $i = 1,2,\cdots,n$，转到第2步

$$t_k = \frac{\alpha(UB - w(\pi))}{\sum\limits_{i\in V}(\delta_i^k - 2)^2} \qquad 0 < \alpha \le 2 \quad \text{(a)}$$

一个例子







$\pi_i=0 \quad UB=30$

$Z^*_{1\text{-}ST}=26=w(\pi)$

$\delta^0=(2,2,1,1,4)$

$$t_0=\frac{2(30-26)}{1+1+4}\approx 1$$

$$\pi_i=\pi_i+t_0(\delta^0_i-2)$$

$Z^*_{1\text{-}ST}=29=w(\pi)$

$\delta^1=(2,2,2,2,2)$

$\Rightarrow Z^*_{STSP}=29$