第二节　线性规划问题的几何意义

2.1 凸集、凸组合与顶点

2.2 几何性质与定理

2.1　凸集、凸组合与顶点

一、凸集

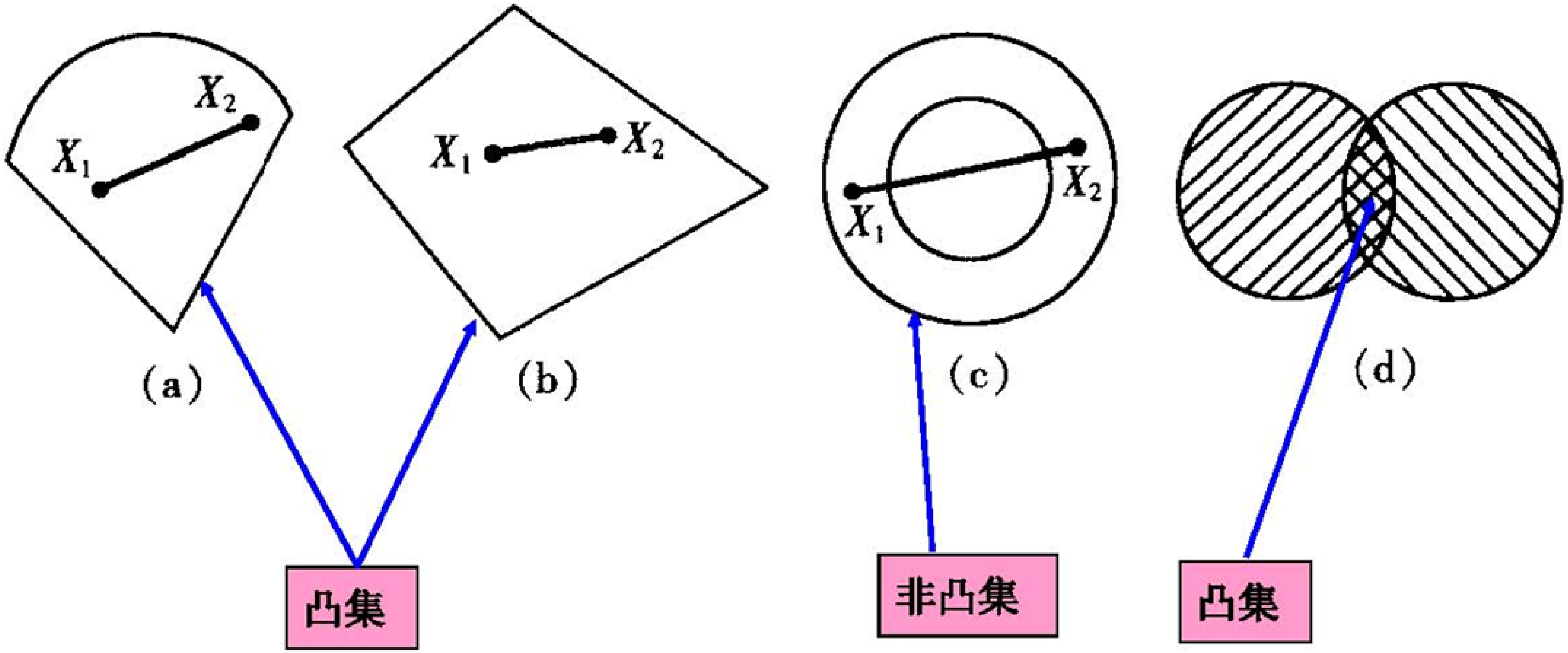
设K是n维欧氏空间$\mathbb{E}^n$的一个点集，若集合K内任意两点$\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)} \in K$的连线上的所有点仍然属于$K$，即

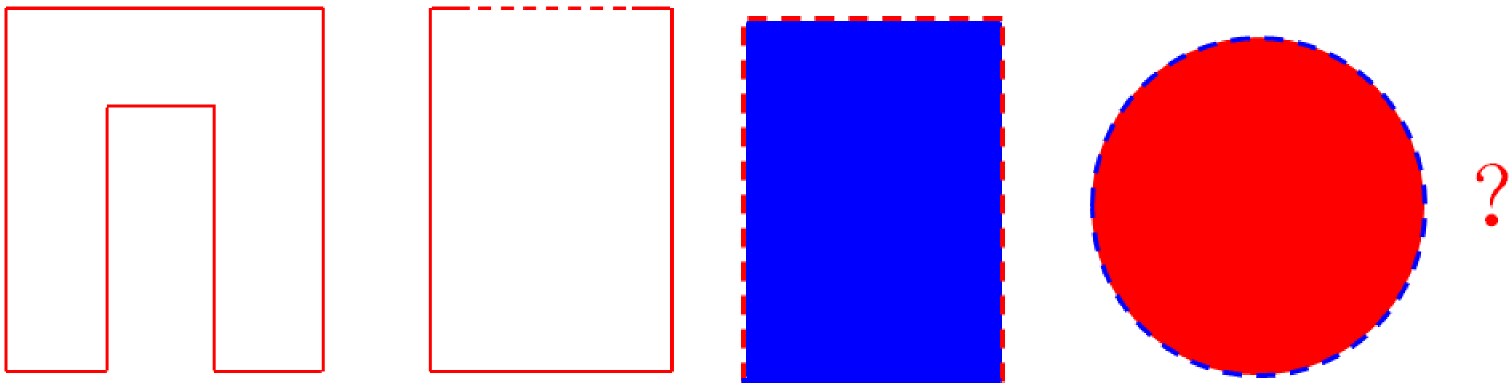
$$\alpha\mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(2)} \in K, (0 \le \alpha \le 1)$$

则称K为凸集。

从直观上讲，凸集没有凹入部分，其内部没有空洞。

任何两个凸集的交集是凸集，但是凸集的并集不一定是凸集。


X_1
X_2
(a)
(b)
(c)
(d)
凸集
非凸集
凸集


?

二、凸组合

设$\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\dots,\mathbf{x}^{(k)}$是$n$维欧氏空间$\mathbb{E}^n$中的$k$个点。若存在一组实数$\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k$，满足：$0\le\mu_i\le1$，且$\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$，使

$$\mathbf{x}=\mu_1\mathbf{x}^{(1)}+\mu_2\mathbf{x}^{(2)}+\cdots+\mu_k\mathbf{x}^{(k)}$$

则称$\mathbf{x}$为$\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\dots,\mathbf{x}^{(k)}$的凸组合。

当严格不等式：$0<\mu_i<1$成立时，称为严格凸组合。

三、顶点

设 K 是凸集，$\mathbf{x} \in K$；若 $\mathbf{x}$ 不能用 K 中不同的两点：$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in K$，做严格线性组合表示为

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbf{x}^{(2)}, (0 < \alpha < 1)$$

则称 $\mathbf{x}$ 为 K 的一个顶点（或极点）。

即，顶点 $\mathbf{x}$ 不可能是任意不同两点 $\mathbf{x}^{(1)}$ 和 $\mathbf{x}^{(2)}$ 的严格凸组合。[1]

[1] $\mathbf{x}^{(1)}$ 和 $\mathbf{x}^{(2)}$ 其中之一可以是 $\mathbf{x}$ 本身，但二者必须不同。

2.2 几何性质与定理

定理 1：若 LP 问题存在可行域，则其可行域

$$D=\{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$$

是凸集。

证明：根据凸集的定义，只要证明D中任意两点连线（凸组合）上的点仍然在D内即可。

设 $\mathbf{x}^{(1)}\geq\mathbf{0},\mathbf{x}^{(2)}\geq\mathbf{0}$ 是可行域D内的任意两点，且 $\mathbf{x}^{(1)}\neq\mathbf{x}^{(2)}$，则有

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{b}，\mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{b}$$

若 $\mathbf{x}$ 为$\mathbf{x}^{(1)}$，$\mathbf{x}^{(2)}$连线上的任意一点，则有

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(2)}, (0 \le \alpha \le 1)$$

将 $\mathbf{x}$ 代入约束方程，有

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}[\alpha\mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(2)}] = \alpha\mathbf{Ax}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{Ax}^{(2)} \\ &= \alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\mathbf{b} = \mathbf{b}\end{aligned}$$

同时，显然有$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$，故$\mathbf{x} \in D$。即，可行域集合$D$中任意两点$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$连线上的点（凸组合）仍然属于集合$D$。

根据凸集的定义，**LP** 问题的可行域 D是凸集。

引理 1：**LP** 问题可行解$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$为基可行解的充要条件是：$\mathbf{x}$正分量所对应的系数列向量线性独立。

（1）必要性（基可行解→线性独立）：根据基可行解的定义，必要性显然成立；

（2）充分性（线性独立→基可行解）：若所有正分量对应的列向量$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\dots,\mathbf{p}_k$线性独立，那么必然有$k\le m$。

若$k=m$，则刚好是一个基，对应就是基可行解；若$k<m$，则必可在其余列向量中选出$m-k$个（因为矩阵的秩为m）组成一个基矩阵，刚好就是一个（退化的）基可行解。

定理 2：**LP 问题的基可行解与其可行域的顶点一一对应**[2]。

证明，首先将定理 2 分解为两个方向：

（1）若x是可行域*D*的顶点→则x就是基可行解；

（2）若x是基可行解→则x就是可行域*D*的顶点。

对于（1），其等价的逆否命题为：若x不是基可行解，则它一定不是可行域*D*的顶点。

对于（2），其等价的逆否命题为：若x不是可行域*D*的顶点，则它一定不是基可行解。

---

[2] 基可行解是一个代数概念，顶点是一个几何概念。定理 2 完成了代数空间与几何空间的一一映射。

证明思路：通过分别证明上述两个等价的逆否命题而证明定理 2。

（1）若 $\mathbf{x}$ 不是基可行解，则它一定不是可行域 D 的顶点

不失一般性，设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，其前 k 个分量为正。$\mathbf{x}$ 应满足约束：

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbf{p}_j x_j+\sum_{j=k+1}^{n}\mathbf{p}_j x_j=\mathbf{b} \qquad （8）$$

根据引理 1，若 $\mathbf{x}$ 不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_k$ 应该线性相关，即存在一组不全为零的数 $\alpha_i, i=1,\ldots,k$，使得

$$\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{p}_k=\mathbf{0} \qquad （9）$$

用正数μ乘（9）式两端，有

$$\mu\alpha_1\mathbf{p}_1+\mu\alpha_2\mathbf{p}_2+\cdots+\mu\alpha_k\mathbf{p}_k=\mathbf{0}$$

再使用（8）式：$\sum_{j=1}^{k}\mathbf{p}_j x_j+\sum_{j=k+1}^{n}\mathbf{p}_j x_j=\mathbf{b}$，对上式相加和相减，得到

$$(x_1-\mu\alpha_1)\mathbf{p}_1+(x_2-\mu\alpha_2)\mathbf{p}_2+\cdots+(x_k-\mu\alpha_k)\mathbf{p}_k+\mathbf{p}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}+\cdots+\mathbf{p}_n\mathbf{x}_n=\mathbf{b}$$

$$(x_1+\mu\alpha_1)\mathbf{p}_1+(x_2+\mu\alpha_2)\mathbf{p}_2+\cdots+(x_k+\mu\alpha_k)\mathbf{p}_k+\mathbf{p}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}+\cdots+\mathbf{p}_n\mathbf{x}_n=\mathbf{b}$$

构造两个解$\mathbf{x}^{(1)}$、$\mathbf{x}^{(2)}$：

$$\mathbf{x}^{(1)}=[(x_1-\mu\alpha_1),(x_2-\mu\alpha_2),\dots,(x_k-\mu\alpha_k),x_{k+1},\dots,x_k]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}^{(2)}=[(x_1+\mu\alpha_1),(x_2+\mu\alpha_2),\dots,(x_k+\mu\alpha_k),x_{k+1},\dots,x_k]^{\mathrm{T}}$$

当 μ 充分小时，可保证 $x_i\pm\mu\alpha_i\geq 0$，即$\mathbf{x}^{(1)}$、$\mathbf{x}^{(2)}$是可行解，且显然有

$$\mathbf{x}=0.5\mathbf{x}^{(1)}+0.5\mathbf{x}^{(2)}$$

可见，$\mathbf{x}$ 能被表示成可行域上不同两点的严格凸组合，所以就不是可行域 D 的顶点。

综上，若$\mathbf{x}$不是基可行解，则它一定不是可行域 D 的顶点⟹等价于：若$\mathbf{x}$是顶点，则就是基可行解。

（2）若**x**不是顶点，则一定不是基可行解

因 **x** 不是可行域 D 的顶点，故在D中可找到不同的两点：

$\mathbf{x}^{(1)}=[x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)}]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{x}^{(2)}=[x_1^{(2)},x_2^{(2)},\dots,x_n^{(2)}]^{\mathrm{T}}$，使 $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}^{(1)}+(1-\alpha)\mathbf{x}^{(2)},(0<\alpha<1)$。

（反证）假设 **x** 是基可行解，其基向量为$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,...,\mathbf{p}_m$，则$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,...,\mathbf{p}_m$线性独立，且对非基本变量$x_j$，必有：

$$x_j=\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}=0 \text{ for } j>m$$

注意到，$0<\alpha,1-\alpha<1$，且$x_j^{(1)}\geq 0,x_j^{(2)}\geq 0$所以

$$x_j=x_j^{(1)}=x_j^{(2)}=0 \text{ for } j>m$$

又，$\mathbf{x}^{(1)}$、$\mathbf{x}^{(2)}$是可行域的点，所以有：

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}_j x_j^{(1)} = \mathbf{b} \quad 与 \quad \sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}_j x_j^{(2)} = \mathbf{b}$$

两式相减，得到：$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = \mathbf{0}$。

因$\mathbf{x}^{(1)} \neq \mathbf{x}^{(2)}$，故系数$(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})$不全为零，所以向量组$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_m$线性相关——这与假设：$\mathbf{x}$是基可行解（基向量应该线性独立）相矛盾。

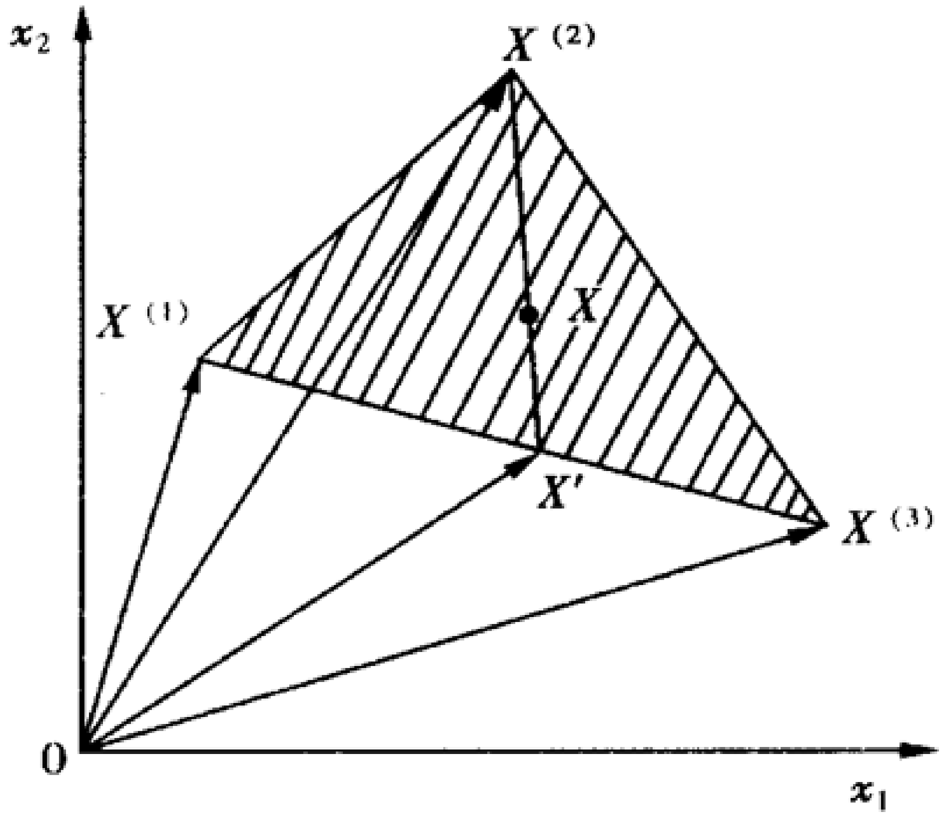
故若$\mathbf{x}$不是顶点，则就不是基可行解$\Longrightarrow$等价于：若$\mathbf{x}$是基可行解，则就是可行域顶点。

综合（1）和（2）可知：一个基可行解，必为可行域一个顶点；可行域一个顶点，必对应一个基可行解。

引理 2（凸集表示定理）：若K是有界凸集，则K内任何一点$\mathbf{x}\in K$可表示为K的顶点的凸组合。[3]

证明，略。

例：设$\mathbf{x}$是三角形中任一点；$\mathbf{x}^{(1)}$、$\mathbf{x}^{(2)}$和$\mathbf{x}^{(3)}$是三个顶点，试用三个顶点坐标表示$\mathbf{x}$。



解，任选一顶点$\mathbf{x}^{(2)}$，做连线$\mathbf{x}\mathbf{x}^{(2)}$，并延长交于$\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(3)}$连接线上一点$\mathbf{x}'$。

[3] 对于无界凸集，其内部任一点可表示为顶点与极方向的凸组合。

因$\mathbf{x}'$是$\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(3)}$连线上一点，故可用$\mathbf{x}^{(1)}$和$\mathbf{x}^{(3)}$线性组合表示：$\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(3)}$，$0 < \alpha < 1$。

又因$\mathbf{x}$是$\mathbf{x}'$与$\mathbf{x}^{(2)}$连线上一点，故有

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}，0 < \lambda < 1$$

将$\mathbf{x}'$的表达式代入上式得到

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \lambda[\alpha\mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(3)}] + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)} \\ &= \lambda\alpha\mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)} + \lambda(1-\alpha)\mathbf{x}^{(3)}\end{aligned}$$

令 $\mu_1 = \lambda\alpha$ ， $\mu_2 = 1-\lambda$ ， $\mu_3 = \lambda(1-\alpha)$ ； $\sum_{i=1}^{3}\mu_i = 1$ 且 $\mu_i \in (0,1)$，所以$\mathbf{x} = \mu_1\mathbf{x}^{(1)} + \mu_2\mathbf{x}^{(2)} + \mu_3\mathbf{x}^{(3)}$是三顶点的凸组合。

定理 3：若可行域有界，则 LP 问题的目标函数一定可在其可行域顶点上达到最优。

证明，以max 问题为例，设$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$是可行域顶点。

反证法，假设$\mathbf{x}^{(0)}$不是顶点，但目标函数在$\mathbf{x}^{(0)}$达到最优：

$$z^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^{(0)}$$

因$\mathbf{x}^{(0)}$不是顶点，根据引理 2，它可用可行域顶点的线性组合来表示，即：$\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}^{(i)}$，$\alpha_i > 0$，$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$，于是有

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{c}\mathbf{x}^{(i)} \qquad (10)$$

在所有的顶点中必然能找到某一个顶点$\mathbf{x}^{(\tau)}$，使$\mathbf{cx}^{(\tau)}$是所有$\mathbf{cx}^{(i)}$中最大者。用$\mathbf{x}^{(\tau)}$代替（10）式中的所有$\mathbf{x}^{(i)}$，有

$$\mathbf{cx}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{cx}^{(i)} \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{cx}^{(\tau)} = \mathbf{cx}^{(\tau)} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \mathbf{cx}^{(\tau)}$$

即

$$\mathbf{cx}^{(0)} \le \mathbf{cx}^{(\tau)}$$

根据假设，$\mathbf{cx}^{(0)}$是最大值，所以只能有：$\mathbf{cx}^{(0)} = \mathbf{cx}^{(\tau)}$，即目标函数必在某顶点处达到最大（优）值[4,5]。

进一步易知：若另一个点$\mathbf{x}^{(t)}$也达到了最大值，则$\mathbf{x}^{(t)}$和$\mathbf{x}^{(\tau)}$连线上的点，都是最优解，即 LP 有无穷多最优解。

[4] 有时目标函数可能在多个顶点处达到最大值。这时在这些顶点的凸组合上也达到最大值。称这种 LP 问题有无穷多个最优解。

[5] 若可行域为无界，则可能无最优解，也可能有最优解，若有也必定在某顶点上得到。

◆ 小结

（1）LP 问题所有可行解构成的集合是凸集（可能有界也可能无界），且存在有限个顶点；

（2）LP 问题的基可行解与可行域顶点一一对应；

（3）若 LP 问题有最优解，则必在某顶点上达到。

上述结论的重要意义在于：将几何直观（顶点）转换成了代数表示（基可行解），使代数运算成为可能。这是单纯形法求解线性规划问题的理论基础。