第二章
随机变量与分布

第四节

常用离散分布

Overview

二项分布

2.4.1 二项分布的定义

记为 $X \sim b(n, p)$.

二项分布

2.4.1 二项分布的定义

记为 $X \sim b(n, p)$.

- X 为 n 重伯努里试验中“成功”的次数

2.4.1 二项分布的定义

记为 $X \sim b(n, p)$.

- X 为 n 重伯努里试验中“成功”的次数

  $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}, k = 0, 1, ..., n$$

2.4.1 二项分布的定义

记为 $X \sim b(n, p)$.

- X 为 n 重伯努里试验中“成功”的次数
  $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{(n-k)}, k = 0, 1, ..., n$
- 当 $n = 1$ 时, 称 $b(1, p)$ 为 $0 - 1$ 分布.

二项分布

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次, 每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次, 每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

- 试验次数为 $n =$

二项分布

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次, 每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

- 试验次数为 $n = 4$

二项分布

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次, 每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

- 试验次数为 $n = 4$
- “成功”即取得合格品的概率为 $p =$

二项分布

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次, 每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

- 试验次数为 $n = 4$
- "成功" 即取得合格品的概率为 $p = 0.8$
- 所以, $X \sim b(4, 0.8)$

二项分布

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次,
每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

- 试验次数为 $n = 4$
- "成功"即取得合格品的概率为 $p = 0.8$
- 所以, $X \sim b(4, 0.8)$

思考: 若 Y 为不合格品件数,$Y \sim ?$

二项分布

习题：一批产品的合格率为 0.8, 有放回地抽取 4 次, 每次一件, 则取得合格品件数 X 服从二项分布.

- 试验次数为 $n = 4$
- “成功”即取得合格品的概率为 $p = 0.8$
- 所以, $X \sim b(4, 0.8)$

思考: 若 Y 为不合格品件数,$Y \sim ?$

$$Y \sim b(4, 0.2)$$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2, p), Y \sim b(4, p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p), Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p), Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) =$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2, p)$, $Y \sim b(4, p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p)$, $Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$

所以 $1/9 = P(X = 0)$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2, p)$, $Y \sim b(4, p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$

所以 $1/9 = P(X = 0) = (1-p)^2$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p), Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:
(1) 求 p
由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$
所以 $1/9 = P(X = 0) = (1-p)^2$
从而解得:$p = 2/3$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p), Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:
(1) 求 p
由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$
所以 $1/9 = P(X = 0) = (1-p)^2$
从而解得:$p = 2/3$
(2)求 $P(Y \geq 1)$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p), Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$, 知 $P(X = 0) = 1/9$

所以 $1/9 = P(X = 0) = (1-p)^2$

从而解得:$p = 2/3$

(2)求 $P(Y \geq 1)$

由此得:

$P(Y \geq 1) \quad =$

二项分布

例 2.4.1

设 $X \sim b(2, p), Y \sim b(4, p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$

所以 $1/9 = P(X = 0) = (1 - p)^2$

从而解得:$p = 2/3$

(2)求 $P(Y \geq 1)$

由此得:

$$P(Y \geq 1) \quad = 1 - P(Y = 0)$$

例 2.4.1

设 $X \sim b(2,p), Y \sim b(4,p)$, 已知 $P(X \geq 1) = 8/9$, 求 $P(Y \geq 1)$

解:

(1) 求 p

由 $P(X \geq 1) = 8/9$，知 $P(X = 0) = 1/9$

所以 $1/9 = P(X = 0) = (1-p)^2$

从而解得:$p = 2/3$

(2)求 $P(Y \geq 1)$

由此得:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - (1-p)^4 = 80/81 \end{aligned}$$

泊松分布

泊松分布的定义

泊松分布

泊松分布的定义

若随机变量 X 的概率分布为

泊松分布

泊松分布的定义

若随机变量 X 的概率分布为
$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$

泊松分布

泊松分布的定义

若随机变量 X 的概率分布为
$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$
则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布,

泊松分布

泊松分布的定义

若随机变量 X 的概率分布为

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,...$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$.

定理 2.4.1 二项分布的泊松近似

在 n 重伯努里试验中，记 p_n 为一次试验中成功的概率.
若 $np_n \to \lambda$, 则

定理 2.4.1 二项分布的泊松近似

在 n 重伯努里试验中，记 p_n 为一次试验中成功的概率.
若 $np_n \to \lambda$, 则

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_n^k (1 - p_n)^{(n-k)} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

超几何分布的定义

$$P(X=k)=\frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}},$$

超几何分布的定义

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{记为 } X \sim h(n,N,M).$$

超几何分布的定义

$$P(X=k)=\frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \text{ 记为 } X \sim h(n,N,M).$$

超几何分布对应于不返回抽样模型

超几何分布

超几何分布的定义

$$P(X=k)=\frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \text{ 记为 } X \sim h(n,N,M).$$

超几何分布对应于不返回抽样模型

- N 个产品中有 M 个不合格品

超几何分布的定义

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\text{ 记为 } X\sim h(n,N,M).$$

超几何分布对应于不返回抽样模型

- N 个产品中有 M 个不合格品
- 从中抽取 n 个，不合格品的个数为 X

几何分布

几何分布

$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p. k = 1, 2, ...,$

几何分布

$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p. k=1,2,...,$ 记为 $X \sim Ge(p)$

几何分布

$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.k=1,2,...,$ 记为 $X\sim Ge(p)$

几何分布

几何分布

$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.k=1,2,...,$ 记为 $X\sim Ge(p)$

注意点

几何分布

$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.k=1,2,...,$ 记为 $X\sim Ge(p)$

注意点

- X 为独立重复的伯努里试验中,“首次成功”时的试验次数.

几何分布

几何分布

$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.k=1,2,...,$ 记为 $X\sim Ge(p)$

注意点

- X 为独立重复的伯努里试验中,"首次成功"时的试验次数.
- 几何分布具有无记忆性，即

几何分布

$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.k=1,2,...,$ 记为 $X\sim Ge(p)$

注意点

- X 为独立重复的伯努里试验中,“首次成功”时的试验次数.
- 几何分布具有无记忆性，即
  $P(X>m+n|X>m)=P(X>n)$

几何分布

负二项分布 (巴斯卡分布)

几何分布

负二项分布 (巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\left(\begin{array}{c} k-1 \\ r-1 \end{array}\right)(1-p)^{k-r}p^{r}, k=r,r+1,\ldots$$

负二项分布 (巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r, k=r,r+1,\ldots$$

记为 $X \sim Nb(r,p)$.

负二项分布 (巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix}(1-p)^{k-r}p^r, k=r, r+1, \ldots$$

记为 $X \sim Nb(r,p)$.

- X 为独立重复的伯努里试验中，“第 r 次成功”时的试验次数.

几何分布

注意点

1. 二项随机变量是独立 $0-1$ 随机变量之和.

几何分布

注意点

1. 二项随机变量是独立 $0-1$ 随机变量之和.
2. 负二项随机变量是独立几何随机变量之和.

常用离散分布的数学期望

几何分布

常用离散分布的数学期望

- $0-1$ 分布的数学期望 $= p$

几何分布

常用离散分布的数学期望

- $0-1$ 分布的数学期望 $= p$
- 二项分布 $b(n,p)$ 的数学期望 $= np$

几何分布

常用离散分布的数学期望

- $0-1$ 分布的数学期望 $= p$
- 二项分布 $b(n, p)$ 的数学期望 $= np$
- 几何分布 $Ge(p)$ 的数学期望 $= 1/p$

几何分布

常用离散分布的数学期望

- $0-1$ 分布的数学期望 $= p$
- 二项分布 $b(n,p)$ 的数学期望 $= np$
- 几何分布 $Ge(p)$ 的数学期望 $= 1/p$
- 泊松分布 $P(\lambda)$ 的数学期望 $= \lambda$

几何分布

常用离散分布的方差

几何分布

常用离散分布的方差

- $0-1$ 分布的方差 $= p(1-p)$

几何分布

常用离散分布的方差

- $0-1$ 分布的方差 $= p(1-p)$
- 二项分布 $b(n,p)$ 的方差 $= np(1-p)$

常用离散分布的方差

- $0-1$ 分布的方差 $= p(1-p)$
- 二项分布 $b(n, p)$ 的方差 $= np(1-p)$
- 几何分布 $Ge(p)$ 的方差 $= (1-p)/p^2$

几何分布

常用离散分布的方差

- $0-1$ 分布的方差 $=p(1-p)$
- 二项分布 $b(n,p)$ 的方差 $=np(1-p)$
- 几何分布 $Ge(p)$ 的方差 $=(1-p)/p^2$
- 泊松分布 $P(\lambda)$ 的方差 $=\lambda$

作业

书 P104: 2 3 5 6 7 11 14 18