BILAGA till Lab. MAGNETISKA FÄLT för EM 1.

Elektriska vektorberäkningar i MATLAB

En vektor i ett rektangulärt (kartesianskt) koordinatorsystem beskrivs i Matlab antingen med komposanterna i rader eller i kolumner. Här använder vi det senare:

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x \cdot \hat{x} + a_y \cdot \hat{y} + a_z \cdot \hat{z}$ som i Matlab skrivs a = [ax, ay, az];

$\hat{x}$ är en enhetsvektor längs x-axeln, osv.

Exempel:

a=[1,0,0]; % enhetsvektor längs x-axeln
b=[0,1,0]; % enhetsvektor längs y-axeln
c=a+b % vektoraddition ger ny vektor c = 1 1 0
norm(c) % ger vektorns storlek 1.4142, dvs. $\sqrt{2}$
d=dot(a,c) % skalärprodukt $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$
d=sum(a.*c) % alternativ beräkning av skalärprodukten
d=a*c' % ytterligare alternativ som motsvarar

$$\{a_x, a_y, a_z\} \cdot \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z$$

sqrt(dot(c,c)) % alternativ beräkning av en vektors storlek

e=cross(a,b) % kryssprodukt (vektorprodukt) ger e = 0 0 1, dvs
en vektor längs z-axeln. Jämför med ”högerhandsregeln”.

a=[1,0,0; 1,0,0]; % Matlabfunktionerna dot och cross hanterar flera vektorer
b=[0,1,0; 0,0,1]; % samtidigt om dessa lagras i olika rader i en matris, ej norm!
c=cross(a,b) % ger c = 0 0 1
0 -1 0

dot(a,a,2) % ger 1; 1 obs att parametern dim=2 måste anges i dot

Övning:

Beräkna kryssprodukten {1, 2, 3} × {4, 5, 6}:

```
a=[1,2,3];
b=[4,5,6];
c=cross(a,b)
```

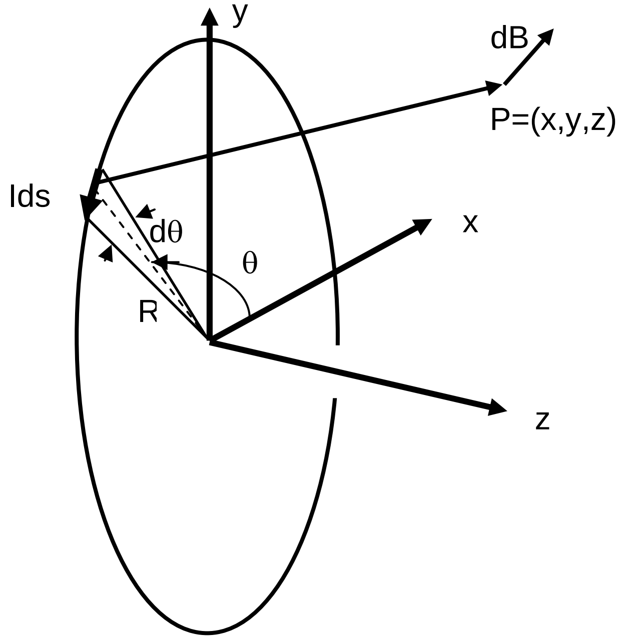
Jämför med determinantformeln

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)\hat{x} + (3 \cdot 4 - 1 \cdot 6)\hat{y} + (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)\hat{z}$$

Om vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är känd (φ) kan storleken av kryssprodukten beräknas enligt $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$. Vinkeln kan fås från skalärprodukten $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$:

```
cosfi=dot(a,b)/(norm(a)*norm(b));
fi=acos(cosfi);  % i radianer!
norm(a)*norm(b)*sin(fi)
norm(c)
```

Beräkningar av magnetfält från en strömslinga



Enligt Biot-Savarts lag ges bidraget $d\vec{B}$ till den magnetiska flödestätheten (B-fältets styrka) i positionen $\vec{r}$ från ett litet strömelement $Id\vec{s}$ av

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

PH F-3.3: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl \quad med \quad \vec{u}_T dl = d\vec{s}; \quad \vec{u}_r = \vec{r} / r$

Placera slingan i xy-planet med sitt centrum i origo. Positionen P har koordinaterna (x,y,z) och strömelementet $Id\vec{s}$ ligger för vinkeln θ i (R·cosθ, R·sinθ, 0) där R är slingan radie. Vektorn $\vec{r}$ från strömelementet till punkten P blir då $\vec{r} = (x - R\cos\theta, y - R\sin\theta, z - 0)$.

$d\vec{s}$ fås genom att differentiera (R·cosθ,R·sinθ,0): $d\vec{s} = d\theta \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)$ eller från ett geometriskt betraktande (t.ex. vid 0 och 90°).

För att beräkna totala fältet från hela slingan delas cirkeln upp i t.ex. 100 delvinkelsegment. Vinklarna 0 och 2π motsvarar samma cirkelsegment och endast en av dem skall tas med. En summering av bidragen motsvarar därefter en numerisk integrering med trapetsmetoden.

```
P=[0,0,1]; % Beräkningspunkt
R=1; I=1; Ntheta=100   % Slingdata
dtheta=2*pi/Ntheta;
theta=dtheta*[1:Ntheta]';  % 1-kolumnvektor, obs '
B=0;
for k=1:Ntheta
    r=[P(1)-R*cos(theta(k)), P(2)-R*sin(theta(k)), P(3)];
    ds=dtheta*[-R*sin(theta(k)), R*cos(theta(k)), 0];
    dB=I*cross(ds,r)/norm(r)^3;
    B=B+dB;
    end
B=B*1e-7  % med ”u0/4pi”
```

En bra regel är att testa sina algoritmer mot ett känt analytiskt uttryck.
för P=[0,0,1] på spolens axel fås B= [0, 0, 0.2221e-6] vilket stämmer med

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2IA}{r^3} = 10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 1^2}{(1^2 + 1^2)^{3/2}} = 10^{-7} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \text{(PH F-3.3)}$$

Prova gärna med olika antal integrationspunkter Ntheta för att uppskatta noggrannheten i den numeriska integrationen, speciellt för punkter utanför z-axeln.

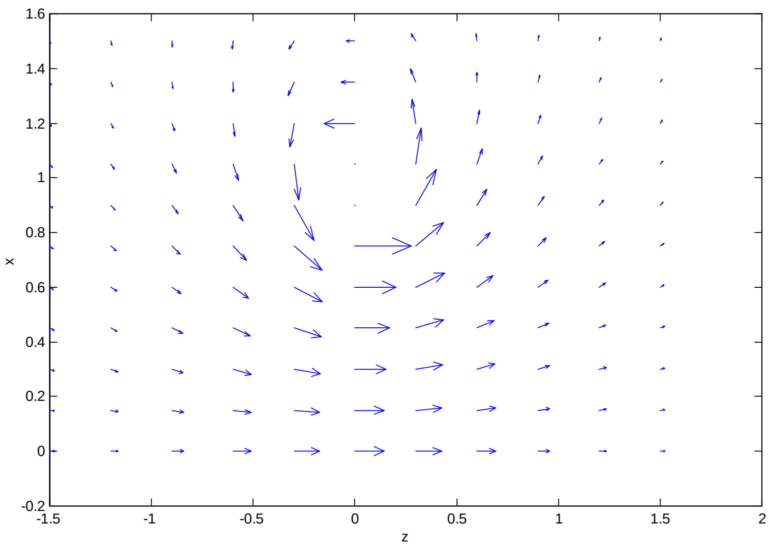
Snyggare och snabbare Matlab-kod fås utan for-loop:

```
r=[P(1)-R*cos(theta), P(2)-R*sin(theta), P(3)*ones(Ntheta,1)];
r3=dot(r,r,2).^1.5;  % r^3 för alla vektorer r
ds=dtheta*[-R*sin(theta), R*cos(theta), zeros(Ntheta,1)];
dB=I*cross(ds,r)./[r3, r3, r3];
B=1e-7*sum(dB)
```

Exempel: Beräkna fältet i ett rutnät i xz-planet och ritar upp vektorerna:

```
… Definiera spoldata  enl tidigare exempel ….

x=[    ]; % Beräkningspunkter, undvik punkter på själva slingan!
y=0;
z=[    ];

        fyll i beräkningar av B()  med hjälp av tidigare exempel.

        För grafikförslaget nedan antas resultatet B()  även ha delats upp
                i komposanter  Bx (iz,ix) och  Bz (iz,ix)

% grafikförslag

[X,Z]=meshgrid(x,z);
quiver(Z,X,Bz,Bx)
```

I grafen har de 2 närmsta punkterna till själva slingan nollställts för en tydligare graf:
Bx(6,7:8)=0;
Bz(6,7:8)=0;
innan quiver använts.



Observera att i själva laborationen mäts normalt enbart z-komponenten av B-fältet, och
 för x-värden som är mindre än spolens radie.

Beräkning med Excel

I andra programmeringsverktyg än Matlab finns normalt inte någon funktion för att beräkna kryssprodukten utan denna måste uttryckas explicit med hjälp av determinantformeln.

$d\vec{s} \times \vec{r} = d\theta \cdot \{-zR\cos\theta, \quad -zR\sin\theta, \quad R^2 - yR\sin\theta\}$ **Visa detta!**

Förslag på ”layout” i Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	data	**theta**	**rx**	**ry**	**r^3**	**(ds x r) x**	**(ds x r) y**	**(ds x r) z**	**dBx/I**	**dBy/I**	**dBz/I**
2	R	Formler i celler: (notera ”låsta” referenser med $)									
3	1	B2: =2*pi()/100									
4	I	B3: =B2+$B$2 osv…									
5	1	C2: =$A$7-$A$3*COS(B2)									
6	Px	D2: =$A$9-$A$3*SIN(B2)									
7	0	E2: =(C2^2+D2^2+$A$11^2)^1.5									
8	Py	F2: =-$B$2*$A$11*$A$3*COS(B2)									
9	0	G2: =-$B$2*$A$11*$A$3*SIN(B2)									
10	Pz=**rz**	H2: =$B$2*($A$3^2-$A$9*$A$3*SIN(B2))									
11	1	I2: =F2/E2									
12		J2: =G2/E2									
13	**Resultat**	K2: =H2/E2									
14	Bx	formlerna fylls ner t.o.m. rad 101, dvs. 100 rader									
15	8.05E-23	A15: =1E-7*A5*SUM(I:I)									
16	By										
17	4.04E-22	A17: =1E-7*A5*SUM(J:J)									
18	Bz										
19	2.22E-07	A19: =1E-7*A5*SUM(K:K)									