Segnali e Sistemi

SEGNALI e SISTEMI per le TELECOMUNICAZIONI

- SERIE di FOURIER: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$
- TRASFORMATA di FOURIER (e ANTITRASFORMATA): $X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \iff x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$

condizione sufficiente all'esistenza della Trasformata è che la funzione $x(t)$ abbia energia finita
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$
→ se vale ∃ t. di Fourier ed è invertibile

$$X(f) = Re\{X(f)\} + j\, Im\{X(f)\} = |X(f)|\, e^{j \angle X(f)}$$

- se il segnale $x(t)$ è reale allora $Re\{X(f)\}$ è una funzione pari mentre $Im\{X(f)\}$ è una funzione dispari

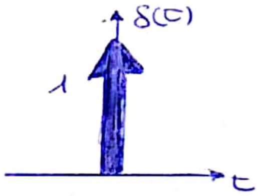
---

→ scalamento: $x(kt) \iff \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$ una dilatazione nel tempo corrisponde a una dilatazione in frequenza e viceversa

→ anticipo e ritardo: $x(t \pm \tau) \iff X(f) e^{\pm j2\pi f \tau}$ un anticipo o ritardo di un segnale altera solo la fase del relativo spettro

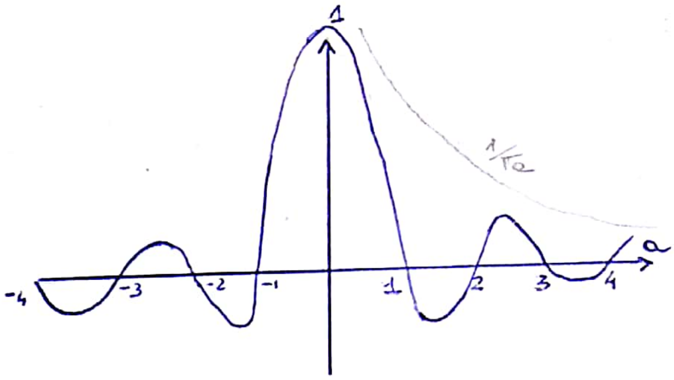
- CONVOLUZIONE e PRODOTTO:
$$x(t) * h(t) \iff X(f) H(f)$$
$$x(t) h(t) \iff X(f) * H(f)$$

- DELTA di DIRAC: la delta di Dirac può essere immaginata come un impulso centrato nell'origine, di durata infinitesima e altezza infinita, la cui area è complessivamente unitaria



  - PROPRIETÀ:
    1. $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$
    2. $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ → ottengo segnale anticipato o ritardato

- SINC:

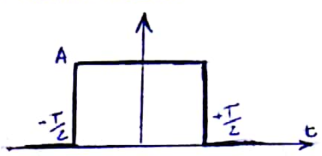


$\mathrm{sinc}\, a = \frac{\sin \pi a}{\pi a}$

→ si annulla per valori interi di a $(a \neq 0)$
→ nell'origine vale 1
→ inviluppo dei lobi si riduce come $\frac{1}{\pi a}$
→ il primo zero è in $f = f_0$
$\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{f_0}\right) \Rightarrow \frac{f}{f_0} = 1 \quad f = f_0\right]$

TRASFORMATE NOTEVOLI

- RETTANGOLO

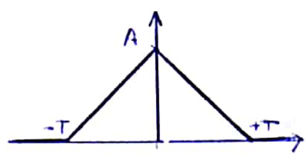


$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \iff T\,\mathrm{sinc}(fT)$$
$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \iff AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

- la Trasformata del rettangolo è una funzione puramente reale

- TRIANGOLO



$x(t) = A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \iff T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$
$$A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \iff AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- l'altezza della Trasformata nell'origine è pari all'area del triangolo

---

- IMPULSO
$$x(t) = \delta(t) \iff X(f) = 1$$
$$x(t) = 1 \cdot k \iff X(f) = k\delta(f)$$

- GRADINO
$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \iff X(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

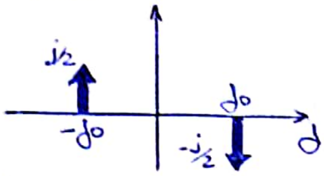
- SEGNO
$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \iff X(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

- TRENO di IMPULSI
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) \iff X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

→ un avvicinamento fra gli impulsi nel tempo comporta un allontanamento in frequenza e viceversa

- ESPONENZIALE
$$x(t) = e^{-at} u(t) \iff X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

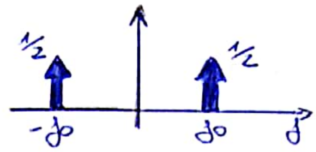
- SENO



- la trasformata del seno è puramente immaginaria, seno è una funzione dispari

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$$

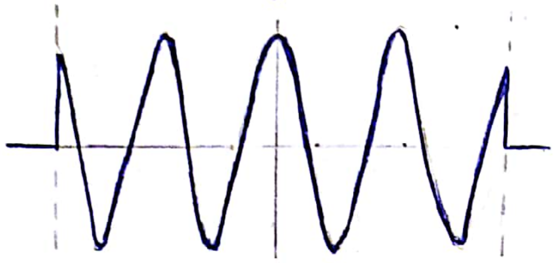
- COSENO



- la trasformata del coseno è puramente reale, coseno è una funzione pari

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

- COSENO FINESTRATO



$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\Leftrightarrow X(f) = \frac{T}{2}\left\{\mathrm{sinc}\left[(f-f_0)T\right] + \mathrm{sinc}\left[(f+f_0)T\right]\right\}$$

- SEGNALE IN BANDA-BASE: si definiscono segnali in banda-base quei segnali il cui spettro è concentrato attorno all'origine dell'asse frequenziale
  → LARGHEZZA di BANDA: estensione dello spettro dall'origine fino alla frequenza alla quale lo spettro si annulla o diventa di ampiezza trascurabile

- SEGNALE PASSA-BANDA: si definiscono segnali passa-banda quei segnali il cui spettro è concentrato attorno alla frequenza $\pm f_0$ e ha ampiezza trascurabile nell'origine
  → LARGHEZZA di BANDA: estensione dello spettro attorno ad f_0, misurata in base ai punti nei quali lo spettro si annulla o nei quali diventa di ampiezza trascurabile

[nota$_1$: non si può ridurre la durata di un segnale senza far crescere l'estensione della sua banda]

[nota$_2$: un segnale avente una durata limitata nel tempo ha uno spettro di estensione illimitata e viceversa (→ non si trova mai 'limitato - limitato')]

- SEGNALE PERIODICO: un segnale è detto periodico se, per qualsiasi valore di t, è verificata la condizione:

$$x(t + kT) = x(t) \qquad \forall k \text{ intero}$$

dove T è il periodo e la frequenza $f_0 = \frac{1}{T}$

- $\boxed{\text{SVILUPPO IN SERIE di FOURIER}}$

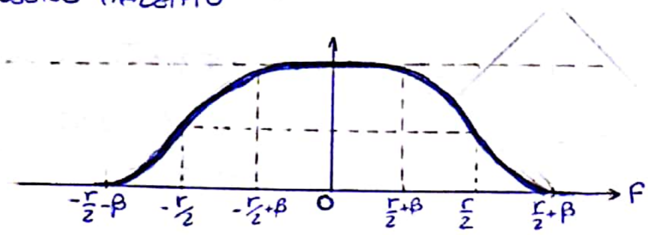
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk2\pi f_0 t} \qquad \text{con } \alpha_k = \frac{1}{T} X_T(kf_0)$$

- $\boxed{\text{TRASFORMATA di FOURIER di un SEGNALE PERIODICO}}$

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(kf_0)\,\delta(f-kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,\delta(f-kf_0)$$

lo spettro di un segnale periodico è a RIGHE, cioè formato da una successione di impulsi, di cui uno nell'origine, uno alla frequenza 'fondamentale' f_0 e gli altri alle frequenze armoniche (multipli interi di f_0).

- COSENO RIALZATO



$$G(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} = T & \text{per } |f| < \frac{r}{2} - \beta \\ \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{4\beta}\left(|f| - \frac{r}{2} + \beta\right) & \text{per } \frac{r}{2} - \beta \le |f| \le \frac{r}{2} + \beta \\ \emptyset & \text{per } |f| > \frac{r}{2} + \beta \end{cases}$$

- andamento nel tempo:

$$\boxed{g(t) = \frac{\cos(2\pi\beta t)}{1-(4\beta t)^2}\,\mathrm{sinc}(rt)}$$

[nota: per $\beta = \emptyset$ il coseno rialzato degenera nella $\mathrm{sinc}(rt)$
per $\beta = \frac{r}{2}$ si parla di coseno con 100% di roll-off
per $\beta = \frac{r}{4}$ si parla di coseno con 50% di roll-off]

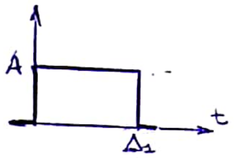
ESEMPI di CONVOLUZIONI

$C_{xy}(\tau) = x(t) * y(t)$ è data indifferentemente da $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(t)\,d\tau$ oppure $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t-\tau)\,d\tau$

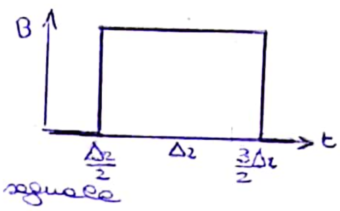
- essendo inoltre la convoluzione un operatore lineare si può semplificare il calcolo della convoluzione di segnali decomponibili nella somma di segnali più semplici
- METODO RISOLUTIVO

1. invertire l'asse di rappresentazione di uno dei due segnali $[x(t) \rightarrow x(-t)]$ oppure $[y(t) \rightarrow y(-t)]$
2. sul segnale il cui asse è stato invertito si opera una traslazione:
   - negativa quando avviene verso sinistra
   - positiva quando avviene verso destra
3. calcolare il prodotto tra il segnale traslato e quello non traslato
4. calcolare l'area del prodotto

- ESERCIZIO:



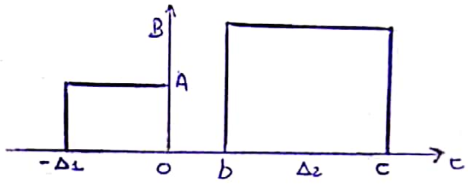
$x(t) = A\Pi\left(t - \frac{\Delta_1}{2}\right)$



$y(t) = B\Pi\left(\frac{t-\Delta_2}{\Delta_2}\right)$

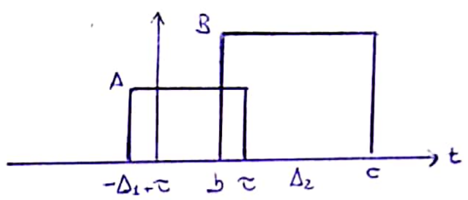
: $\Delta_2 > \Delta_1$

→ scegliamo di invertire l'asse del primo segnale



- fino a quando non ci sono intervalli di tempo in cui i due segnali sono contemporaneamente presenti la loro convoluzione è sempre nulla

$C_{xy}(\tau) = 0 \qquad \tau \leq b$

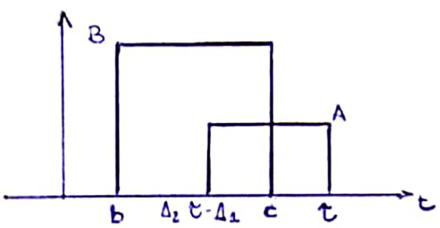


- per traslazioni positive e minore di Δ_1 dobbiamo calcolare l'integrale di convoluzione:

$$C_{xy}(\tau) = \int_b^{\tau} A\cdot B\,dt = A\cdot B(\tau - b) \qquad b \leq \tau \leq \Delta_1 + b$$

la convoluzione cresce linearmente raggiungendo per $\tau = \Delta_1$ il valore $A\cdot B\,\Delta_1$.

Per τ compreso tra $\Delta_1 + b$ e c il valore della convoluzione resta costante; indipendentemente dal valore di τ, infatti, la durata della sovrapposizione dei due segnali rimane Δ_1 e pertanto il valore della convoluzione resta $A\cdot B\cdot\Delta_1$



- per traslazioni comprese tra c e $(c+\Delta_1)$ dobbiamo calcolare l'integrale di convoluzione:

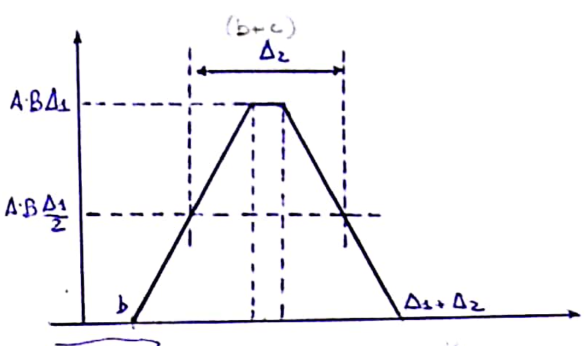
$$C_{xy}(\tau) = \int_{\tau-\Delta_1}^{c} A B\,dt = A\cdot B\,(c+\Delta_1-\tau) \qquad c \leq \tau \leq \Delta_1 + c$$

- infine per valori di τ maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla

Riassumendo abbiamo:

$$\begin{cases} C_{xy}(\tau) = 0 & \text{per } \tau \leq b \text{ e per } \tau > c+\Delta_1 \\ C_{xy}(\tau) = A\cdot B(\tau - b) & \text{per } b \leq \tau \leq \Delta_1 + b \\ C_{xy}(\tau) = A\cdot B\,\Delta_1 & \text{per } \Delta_1 + b \leq \tau \leq c \\ C_{xy}(\tau) = A\cdot B(c+\Delta_1-\tau) & \text{per } c \leq \tau \leq \Delta_1 + c \end{cases}$$

La convoluzione fra due rettangoli genera quindi un trapezio



- BASE MAGGIORE: corrisponde alla durata massima (in quanto la convoluzione non può essere più lunga della somma delle durate)

$\Delta_1 + c - b$

- BASE MINORE: differenza fra la durate dei due rettangoli

$\Delta_1 - c - b$

- ALTEZZA: prodotto delle altezze dei 2 rettangoli per la durata del rettangolo più breve: $A\cdot B\cdot\Delta_1$

• FILTRO: sistema LTI avente funzione di trasferimento tale da operare sul segnale un'elaborazione di tipo ben definito

→ 'FILTRO IDEALE': sistema LTI che consente il passaggio indisturbato delle componenti frequenziali del segnale di ingresso comprese in una certa banda, ed impedisce il passaggio di tutte le componenti frequenziali del segnale stesso non comprese in tale banda

$$H(f) = \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_d} & f_e \le |f| \le f_u \\ 0 \end{cases}$$

• f_e, f_u = freq. di taglio

dove K = guadagno, t_d = ritardo introdotto dal filtro.

$\boxed{\text{FASE}}$: è lineare dove il modulo non è nullo; produce un ritardo temporale del segnale di uscita ($-2\pi f t_d$ genera un ritardo di t_d)

$\boxed{\text{LARGHEZZA di BANDA}}$: per un filtro reale è definita come l'intervallo di freq. positive entro il quale la funzione di trasferimento $|H(f)_{dB}|$ non scende di circa 3 dB rispetto al suo massimo.
Una riduzione di 3dB comporta un dimezzamento del 'guadagno in potenza'. Mentre, essendo $g_P = g_A^2$, il 'guadagno in ampiezza' viene ridotto di $\sqrt{2}$ (→ le freq. taglio si misurano nei punti in cui la T(f) vale 70% del suo massimo)

• DECIBEL (dB)
il modulo della T(f) di un filtro fornisce una misura del guadagno alla varie frequenze (GUADAGNO IN AMPIEZZA).

$$\boxed{g_P = g_A^2}$$

la T(f) può anche essere espressa attraverso una scala logaritmica, rappresentandola in dB:
(decibel = rapporto segnale/disturbo):

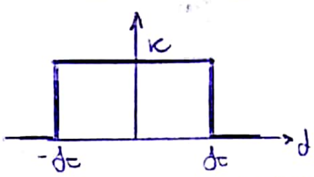
$$|H(f)|_{dB} = \underbrace{10 \log_{10}|H(f)|^2}_{g_A^2} = \underbrace{20 \log_{10}|H(f)|}_{g_P}$$

• dove $g_A = 10^{\frac{g_{dB}}{20}}$ e $g_P = 10^{\frac{g_{dB}}{10}}$

g_P	10^{-2}	1	10	100	1000	1000000
g_{dB}	-20	0	10	20	30	60

inoltre abbiamo che:
$g_{P1} \, g_{P2} = g_{dB_1} + g_{dB_2}$
$g_{P1}/g_{P2} = g_{dB_1}/g_{dB_2}$

• FILTRO PASSA-BASSO (LPF)



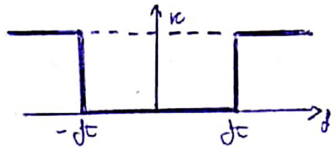
• consente il passaggio di tutte le freq. inferiori, in modulo, a f_c

$$H(f) = \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_d} & |f| \le f_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

→ larghezza di banda: f_c

[nota: lasciano passare solo le variazioni più lente]

• FILTRO PASSA-ALTO (HPF)



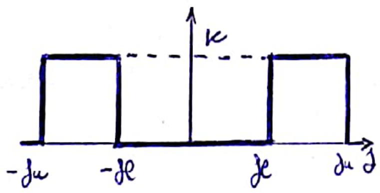
• consente il passaggio di tutte le frequenze superiori, in modulo, a f_c

$$H(f) = \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_d} & |f| \ge f_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

→ larghezza di banda: ∞

[nota: lasciano passare solo le variazioni più rapide]

• FILTRO PASSA-BANDA (BPF)



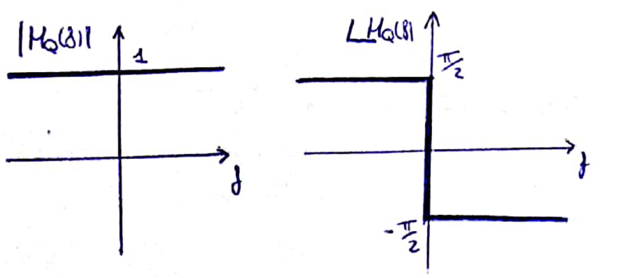
• consente il passaggio di tutte le frequenze comprese, in modulo, fra f_e e f_u

$$H(f) = \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_d} & f_e \le |f| \le f_u \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

→ larghezza di banda: $(f_u - f_e)$

[nota: lasciano passare solo le medie frequenze]

• FILTRO di HILBERT



• si definisce filtro di Hilbert o in quadratura un sistema LTI avente la seguente funzione di trasferimento:

$$H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f) = \begin{cases} -j & f>0 \\ +j & f<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & f>0 \\ e^{+j\frac{\pi}{2}} & f<0 \end{cases}$$

filtro non causale le cui risposta all'impulso tende all'infinito per t che tende a zero

• il filtro di Hilbert realizza la trasformata di Hilbert

$$\hat{X}(f) = H_Q(f) X(f)$$

[nota: seno e coseno in quadratura sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$ → $A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \Rightarrow A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$]

• ENERGIA di UN SEGNALE : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$, con $E_x \geq 0$

→ $\boxed{\text{TEOREMA di RAYLEIGH}}$: mette in relazione l'energia del segnale e il modulo della sua trasformata di Fourier

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|X(f)|^2}_{\text{densità spettrale di energia}} df$$

• calcolo di $|X(f)|^2$ per $f = f_0$

1. si fa transitare $x(t)$ in un BPF ideale, di ampiezza unitaria e fase nulla con banda fra $f_0 - \varepsilon$ e $f_0 + \varepsilon$
2. si trova quindi il segnale : $Y(f) = \begin{cases} X(f) & f_0 - \varepsilon \leq |f| \leq f_0 - \varepsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$
3. $E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = 2\int_{f_0 - \varepsilon}^{f_0 - \varepsilon} |X(f)|^2 df \simeq 4\varepsilon\,|X(f_0)|^2$

• POTENZA MEDIA di UN SEGNALE : $P_x = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt$

• un segnale avente energia finita, avrà potenza media nulla
• i segnali periodici hanno di solito energia illimitata e potenza media finita

• TEOREMA di PARSEVAL : la potenza media di un segnale periodico si può calcolare attraverso i coefficienti della sua serie di Fourier

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \qquad \text{con } \alpha_k = \frac{1}{T} X_T(kf_0)$$

• SPETTRO di DENSITÀ di ENERGIA : (energia limitata)

$$S_x(f) = |X(f)|^2 \quad [J/Hz]$$

[nota: se $x(t)$ è trasformato in $y(t)$ da un sistema LTI caratterizzato dalla funzione di trasferimento $H(f)$, è possibile calcolare lo spettro di densità di energia di $y(t)$ nel seguente modo:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$]

• SPETTRO di DENSITÀ di POTENZA : (energia illimitata) per un segnale periodico $x(t)$ di frequenza f :

$$G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]$$

[nota : se $x(t)$ è trasformato in $y(t)$ da un sistema LTI caratterizzato da $H(f)$, è possibile calcolare lo spettro di densità di potenza di $y(t)$ nel seguente modo:

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$]

• BANDA ENERGETICA : si definisce larghezza di banda la metà della misura dell'intervallo (o dell'unione degli intervalli) di frequenza in cui è contenuta una percentuale molto grande (es. 99%) dell'energia totale del segnale.

• FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE : (segnali deterministici di potenza) si dice che un segnale $v(t)$, in generale complesso ed anche non periodico, è un SEGNALE di POTENZA se ha potenza media finita e non nulla.

$$R_v(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t)\, v^*(t - \tau)\,dt$$

• $\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$:

$R_v(0) = P_v \qquad |R_v(\tau)| \leq R_v(0) \qquad R_v(-\tau) = R_v^*(\tau)$

• FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE : (segnali deterministici di energia) si dice che un segnale $w(t)$, in generale complesso, è un SEGNALE di ENERGIA se ha energia finita e non nulla

$$R_w(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, w^*(t - \tau)\,dt = w(\tau) * w^*(-\tau)$$

• $\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$:

$R_w(0) = E_w \qquad |R_w(\tau)| \leq R_w(0) \qquad R_w(-\tau) = R_w^*(\tau)$

• FUNZIONE di CROSSCORRELAZIONE : (segnali deterministici di energia)

$$R_{vw}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, w^*(t - \tau)\,dt = v(\tau) * w^*(-\tau)$$

• CRITERI di NYQUIST

1. 'Condizione di Nyquist' (o I^a condizione): condizione necessaria ad evitare ALIASING (sovrapposizione fra repliche dello spettro)

$$f_c \geq 2W \quad \text{dove } f = 2W \text{ è detta frequenza al limite di Nyquist}$$

→ Questa condizione ci permette di estrarre perfettamente il segnale $x(t)$ dal segnale $x_c(t)$ utilizzando un filtro ideale passa-basso con frequenza di taglio uguale a $f_c/2$ e guadagno di ampiezza T_c e fase nulla

2. 'II° condizione di Nyquist': condizione necessaria ma non sufficiente affinché non si verifichi ISI al campionatore

$$B_c \geq \frac{r}{2} \qquad B_c \geq \frac{1}{2T} \qquad T \geq \frac{1}{2B_c}$$

• dove B_c indica la larghezza di banda del canale

→ questa condizione impone quindi che la symbol rate r non superi $2B_c$: la sorgente deve essere cioè 'abbastanza lenta' rispetto al canale.

• TEOREMA di NYQUIST-SHANNON (o del CAMPIONAMENTO):

Un segnale $x(t)$ con spettro nullo per $|f| \geq W$ è perfettamente ricostruibile a partire dai suoi campioni $x(mT_c)$ se la frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$ è maggiore o uguale a $2W$

• CAMPIONAMENTO (ideale)

Tecnica che consiste nel convertire un segnale continuo nel tempo in un segnale discreto. Affinché l'operazione abbia senso è necessario che la sequenza dei campioni consenta la ricostruzione del segnale analogico originario.

→ $\boxed{\text{SEGNALE CAMPIONATO IDEALMENTE}}$: È un treno d'impulsi le cui aree sono uguali ai valori di $x(t)$ negli istanti di campionamento

$$x_c(t) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_c) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_c)\,\delta(t - mT_c)$$

lo spettro del segnale campionato contiene una sequenza di repliche dello spettro del segnale analogico a passi di $1/T_c$, scalate in ampiezza del fattore $1/T_c$

$$X_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left[f - \frac{k}{T_c}\right]$$

[nota: il fenomeno dell'ALIASING non consente di recuperare il segnale $X(f)$ a partire da $X_c(f)$]

[nota: per campionare correttamente un segnale sinusoidale bisogna che f_c sia pari ad almeno $2f_0 + 2E$

→ $\boxed{\text{RICOSTRUZIONE del SEGNALE}}$: per poter isolare la replica in banda base e per riportarla alla sua ampiezza originale il filtro ricostruttore ideale deve avere la seguente funzione di trasferimento:

$$H_{LPF}(f) = T_c\,\Pi(fT_c) \iff h_{LPF}(t) = \mathrm{sinc}(t/T_c)$$

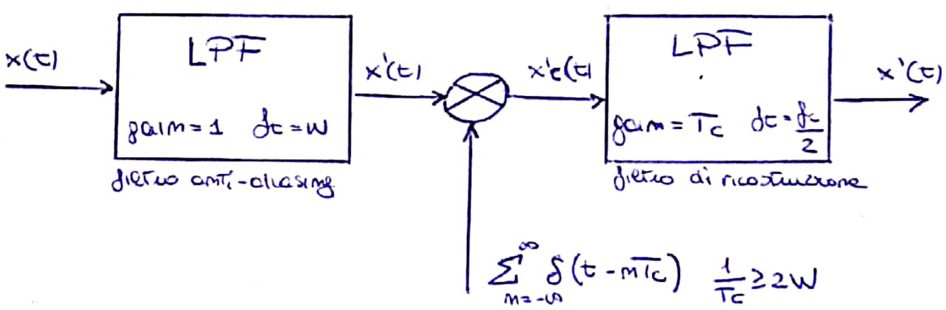
tale filtro viene detto anche FILTRO INTERPOLATORE.
Possiamo quindi notare che la ricostruzione del segnale avviene tramite infinite sinc:

$$x(t) = h_{LPF}(t) * x_c(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_c)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{t - mT_c}{T_c}\right]$$

BANDA di GUARDIA
Un filtro di questo tipo ricostruisce il segnale perfettamente solo se fra le repliche è stata lasciata una sufficiente BANDA di GUARDIA:

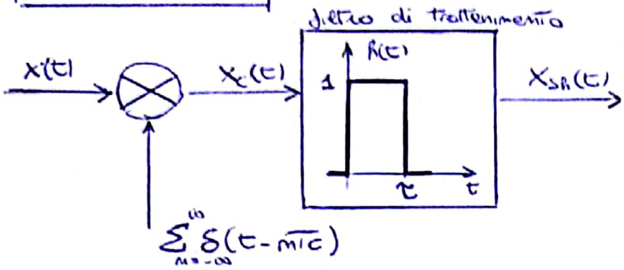
$$B_G = f_c - 2W$$

bisogna quindi che la frequenza di campionamento sia superiore a quella limite di Nyquist.



• TECNICHE di CAMPIONAMENTO REALE

→ SAMPLE and HOLD



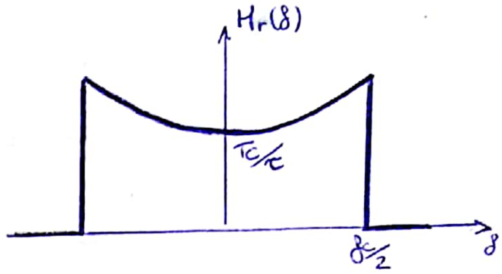
• il segnale $x(t)$ viene campionato (SAMPLE) ad ogni T_c e il suo valore viene mantenuto costante (HOLD) per un intervallo di tempo $\tau \le T_c$

$$x_{SH}(t) = \left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_c)\right] * \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$$

$$X_{SH}(f) = \frac{\tau}{T_c}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left[f-\frac{k}{T_c}\right]\right] \mathrm{sinc}(\tau f)\, e^{-j\pi f\tau}$$

il prodotto fra le repliche e la sinc comporta una distorsione della replica in banda base. Per ricostruire $x(t)$ bisognerà isolare la replica in banda base dalle altre e compensare la distorsione che essa ha ricevuto. Per fare ciò possiamo usare il seguente filtro:

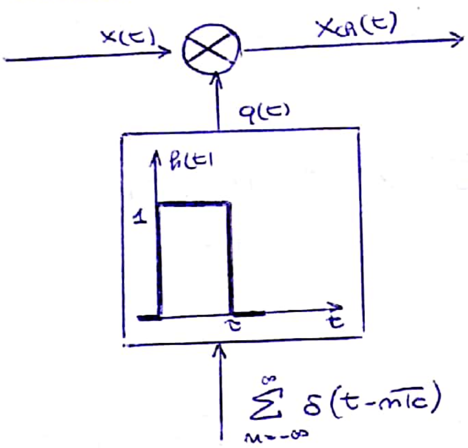
$$H_r(f) = \begin{cases} \dfrac{T_c}{\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)} & |f| \le \dfrac{f_c}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



si può quindi verificare che il segnale originario è perfettamente ricostruito a meno di un ritardo temporale:

$$X_{SH}(f) H_r(f) = X(f)\, e^{-j\pi f\tau}$$

→ CHOPPER



• il segnale in uscita dal CHOPPER ricopia quello originale $x(t)$ per un intervallo di durata τ (con $\tau < T_c$) ogni T_c e vale 0 il tempo rimanente.

$$x_{CH}(t) = x(t)\left[\Pi\left[\frac{t-\tau/2}{\tau}\right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_c)\right]$$

$$X_{CH}(f) = \frac{\tau}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left[\tau\frac{k}{T_c}\right] e^{-j\pi\frac{k}{T_c}\tau} X\left[f-\frac{k}{T_c}\right]$$

abbiamo quindi uno spettro composto da una serie di repliche, ciascuna con un'ampiezza dipendente dal relativo valore della funzione sinc.

• Per ricostruire il segnale è sufficiente un LPF ideale:

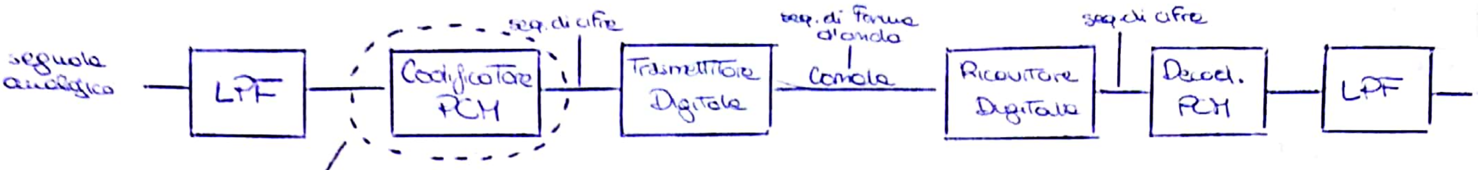
$$H_r(f) = \begin{cases} \dfrac{T_c}{\tau} & |f| \le \dfrac{f_c}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

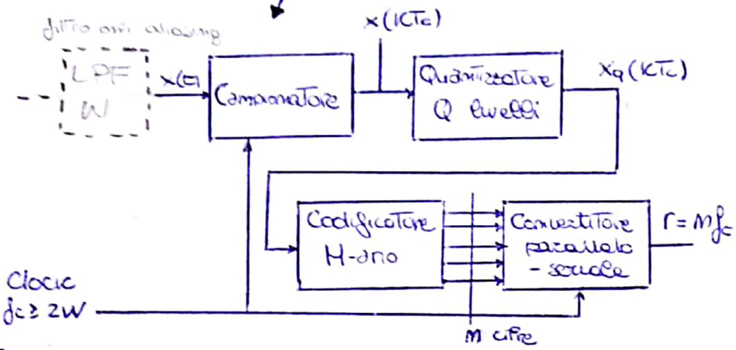
il segnale così ricostruito non presenta alcun ritardo temporale.

• PULSE CODE MODULATION (PCM)

La 'Pulse Code Modulation' è una tecnica per la codifica in forma digitale di segnali analogici. Per rappresentare numericamente (o digitalmente) un segnale analogico è richiesta la sua discretizzazione nel tempo e in ampiezza. La PCM converte forme d'onda analogiche in segnali digitali attraverso le seguenti operazioni:

1. campionamento (→ discretizzazione nel tempo)
2. quantizzazione (→ discretizzazione in ampiezza)
3. codifica





→ QUANTIZZAZIONE: il segnale analogico, dopo essere stato limitato in banda da un LPF (filtro anti-aliasing), viene campionato a frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$ ottenendo una sequenza di campioni $x(kT_c)$.
Il quantizzatore arrotonda il valore di ampiezza di un dato campione $x(kT_c)$, al valore più vicino fra quelli contenuti in un insieme finito di Q valori discreti (LIVELLI di QUANTIZZAZIONE).
Viene quindi generata la sequenza di campioni quantizzati $X_q(kT_c)$ • ε_k = ERRORE di QUANTIZZAZIONE

$$X_q(kT_c) = x(kT_c) + \varepsilon_k$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\max\{x(t)\} - \min\{x(t)\}}{Q}}$$

[nota: detto Δ passo di quantizzazione e supponendo che i livelli di quantizzazione siano equispaziati fra loro di Δ:

$$|\varepsilon_k| \leq \Delta/2 \quad \forall k$$

Tale errore caratterizzerà irrevocabilmente il segnale (minore Δ, maggiore sarà Q, minore sarà l'errore di quantizzazione.)]

→ CODIFICA M-ARIA: tale operazione è volta ad esprimere il livello di un campione tramite un numero in base M. Per ogni campione il codificatore pone in uscita 'm' cifre le quali sono in grado di esprimere il livello individuato fra i Q livelli possibili

$$Q \leq M^m \qquad m \geq \log_M Q$$

es: un caso classico è la 'CODIFICA BINARIA' in cui la M = 2, con possibili cifre {0, 1} (bit), e per la quale $Q \leq 2^m$ $\quad m \geq \log_2 Q$

Il codificatore è seguito da un blocco (convertitore parallelo/seriale) che, per ciascun campione, mette in sequenza (serie) le m cifre poste in uscita del codificatore in parallelo

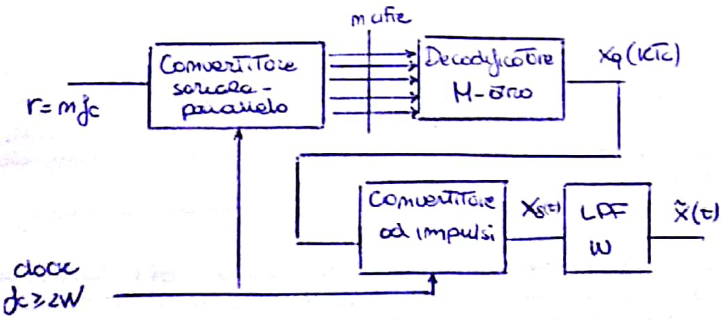
• SYMBOL RATE

i campioni si susseguono ad intervalli di Tc secondi e, per ogni campione, il convertitore parallelo/seriale dà in uscita 'm' cifre in serie; ogni cifra avrà durata pari a T_c/m (TEMPO di SIMBOLO)
Chiamato 'r' il numero di cifre al secondo in uscita del convertitore avremo:

(symbol rate) $\boxed{r = \frac{m}{T_c} = m f_c}$ $\quad \left[\frac{\text{cifre}}{s} = \frac{\text{cifre}}{\text{campione}} \times \frac{\text{campione}}{s}\right]$

nel caso binario essa viene chiamata 'bit rate' e viene indicata con il simbolo r_b $\left[\frac{\text{bit}}{s}\right]$; il tempo di simbolo viene anche detto TEMPO di BIT (T_b)

[nota: un aumento di Q, aumenta conseguentemente la 'symbol rate' che implica a sua volta un corrispondente aumento dello spazio occupato sui supporti di memorizzazione e nel caso di un sistema di trasmissione digitale, implica un aumento della BANDA necessaria sul canale per la trasmissione digitale]



→ DAC: (digital to analog converter) ciascun campione in uscita del decodificatore M-ario viene assegnato ad una delta di Dirac del convertitore a impulsi, generando il segnale:

$$X_\delta(t) = \sum_k x_q(kT_c)\,\delta(t - kT_c)$$

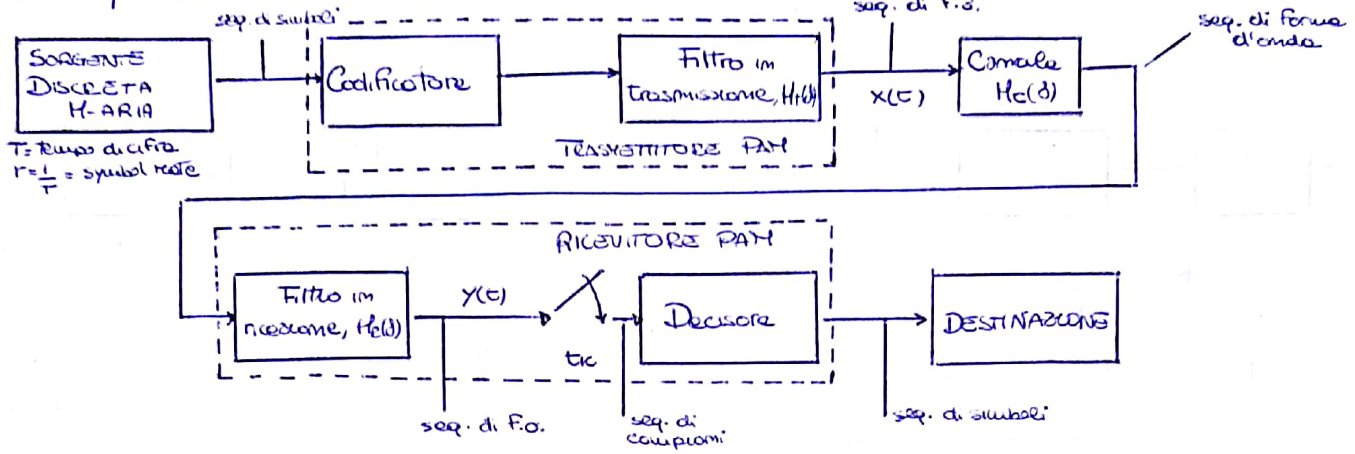
$$= \sum_k x(kT_c)\delta(t-kT_c) + \sum_k \varepsilon_k \delta(t - kT_c)$$

la seconda componente, dopo il filtraggio LPF, ci fornisce un termine di errore e(t):

$$\tilde{x}(t) = x(t) + e(t)$$

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

La 'Pulse Amplitude Modulation' (PAM) è una tecnica di trasmissione e ricezione digitale che associa forme d'onda (f.o.) ai simboli (o cifre) in uscita da una sorgente discreta per poterli rappresentare ed inviare su un canale. L'approccio PAM prevede che si associ a ciascun simbolo la stessa forma d'onda ('pulse') avente ampiezza che dipende dal simbolo stesso ('amplitude modulation'). In ricezione osservando l'ampiezza di una data f.o. nella sequenza si cerca di risalire al simbolo che essa rappresentava.



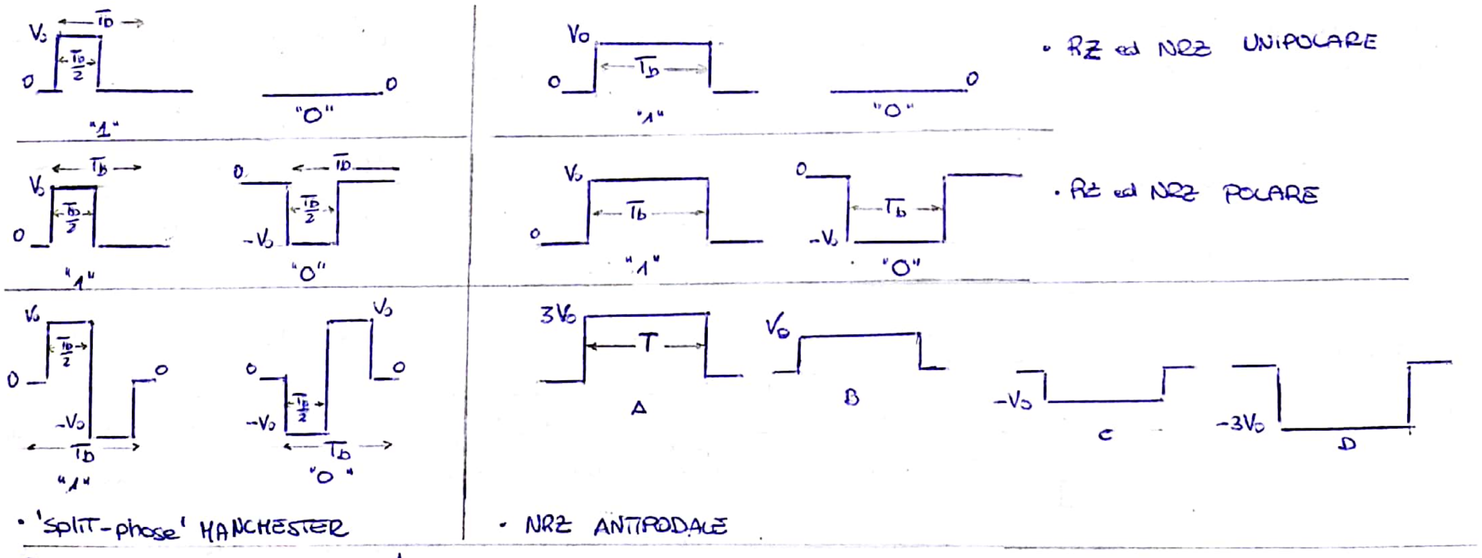
→ **TRASMETTITORE**: è costituito da un codificatore (associa a ciascun simbolo emesso dalla sorgente una f.o. ottenuta amplificando una f.o. base per un coefficiente) e da un filtro in trasmissione (modifica l'andamento della f.o base per ottimizzarla ai fini della trasmissione sul canale). Se $A_0, A_1, \dots, A_{M-1}$ sono le ampiezze associate agli M simboli di sorgente il segnale in uscita dal trasmettitore PAM è:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, g_{tx}(t - kT) \qquad \text{con } a_k \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$$

dove $g_{tx}(t)$ indica la f.o. base in uscita dal filtro in trasmissione.

→ **RICEVITORE**: ha l'obbiettivo di stimare la sequenza di simboli emessa dalla sorgente sulla base della sequenza di f.o. in uscita dal canale. E' composto dalla cascata di un filtro in ricezione, di un campionatore e di un decisore. Essendo LTI i filtri in trasmissione, ricezione ed il canale, anche il segnale $y(t)$ in ingresso al campionatore è una sequenza di f.o.
Il campionatore campiona $y(t)$ negli istanti $t_k = kT + \tau$ (k intero, $\tau \geq 0$), cioè con un passo di campionamento pari al tempo di cifra T e con un eventuale ritardo che ottimizzi gli istanti di campionamento. Sulla base dei campioni $y(t_k)$, il decisore stima il valore più probabile del k-esimo simbolo emesso dalla sorgente.

· FORMATI PAM con f.o. rettangolari



· PAM a 'banda illimitata'

L'occupazione di banda della trasmissione PAM sul canale dipende dalla "forma" e dalla "durata" della f.o. base $g_{tx}(t)$ in uscita dal trasmettitore e quindi in ingresso al canale stesso. Se $g_{tx}(t)$ ha durata finita allora necessariamente il suo spettro ha estensione illimitata, quindi solo un canale di banda illimitata consente la trasmissione di $g_{tx}(t)$ senza distorsioni (→ PAM a 'banda illimitata').
Possiamo però considerare un valore finito dell'occupazione di banda se ragioniamo in termini di BANDA ENERGETICA:

se la banda B_c del canale è molto maggiore della banda (energetica) del segnale PAM, consideriamo il canale a banda illimitata, intendendo con ciò che la distorsione causata dalla limitazione in banda del canale è trascurabile ai fini della corretta ricezione della sequenza di simboli emessa dalla sorgente.

→ si può dimostrare che se $g_{tx}(t)$ ha durata T allora la sua banda energetica è dell'ordine $r = \frac{1}{T}$

es: (Banda della PAM binario NRZ)

→ in generale per la trasmissione PAM di una sequenza binaria aleatoria qualsiasi, con formato NRZ, basta che il canale abbia banda passante pari almeno alla frequenza del primo zero (o lobo principale) della ssmc:

$$B_c \geq r_b$$

questo equivale ad assumere che la banda del segnale in trasmissione sia:

$\boxed{B_T \simeq r_b}$ che corrisponde alla banda energetica (92% dell'energia totale) del rettangolo di durata T_b

[nota: l'utilizzo di f.o di durata T diverse da quella rettangolare NRZ non consente in alcun modo di ridurre l'occupazione di banda.]

· PAM a 'BANDA STRETTA'

Nel caso si vogliano trasmettere f.o. diverse da quella rettangolare NRZ si può realizzare una tecnica di trasmissione PAM che occupi meno banda usando f.o. in trasmissione di durata maggiore di T nonostante questo implichi ISI. Di fatto non è essenziale osservare y(t) per tutta la durata del tempo di cifra corrispondente, basta osservare ciascuna f.o. in un istante opportuno che sia esente da ISI e che permetta di risalire all'ampiezza della f.o trasmessa.

La tecnica della 'PAM a BANDA STRETTA' utilizza f.o. base in ingresso al campionatore con valore nell'origine pari all'ampiezza voluta e che si annullano ogni T; il campionatore osserverà in istanti sincronizzati col tempo di cifra ($t_k = kT$ con k intero) l'ampiezza delle f.o. trasmesse in kT senza essere influenzato dalle f.o. inviate prima o dopo di essa.

Aspetto cruciale della PAM a banda stretta è la sincronizzazione: il ricevitore deve essere ben sincronizzato con il trasmettitore, in particolare gli ZERO-CROSSING di f.o successive nella sequenza che compone y(t) (istanti in cui tali f.o. si annullano) devono essere ben sincronizzati con gli istanti di campionamento e presentarsi a intervalli regolari pari al tempo di cifra T. A questo scopo viene inserito dopo il filtro in ricezione un EQUALIZZATORE utile a sincronizzare bene gli zero-crossing.

· INTERFERENZA INTERSIMBOLICA

se la banda del canale non è molto maggiore di r, la forma d'onda associata a ciascun simbolo sarà deformata in maniera non trascurabile

dominio del tempo

· CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE:

$$\boxed{g(kT) = \begin{cases} C \neq 0 & k=0 \\ 0 & k = \pm1, \pm2, \dots \ (k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \neq 0) \end{cases}}$$

· C è una costante arbitraria non nulla

tale condizione garantisce che tutti gli zero-crossing di g(t) siano sincronizzati con gli istanti di campionamento in ricezione.

dominio della frequenza

· CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE:

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} G(f - mr) = \text{costante}}$$

· 'costante' arbitraria e non nulla

affinché sia verificata la condizione di assenza di ISI, la somma delle repliche di G(f) traslate di multipli interi di r deve dare una costante non nulla

In entrambi i casi se C = 1 allora i campioni ottenuti in ricezione coincidono esattamente (in assenza di rumore) con i coefficienti delle f.o. trasmesse, cioè $y(t_k) = a_k$.

· CONDIZIONE NECESSARIA (ma non sufficiente):

$$\boxed{B_g \geq \frac{r}{2}}$$

, dove B_g indica la frequenza massima di G(f)

in particolare, essendo $G(f) = H_T(f) H_C(f) H_R(f) H_{eq}(f)$, nessuna delle quattro funzioni di trasferimento potrà "tagliare" prima di $r/2$.

[nota: in pratica non devono 'esserci buchi' tra una replica e la successiva]

· vedi II° condizione di Nyquist

· OCCUPAZIONE MINIMA di BANDA

Affinché la trasmissione PAM occupi la minima banda sul canale (ovvero $B_c = \frac{r}{2}$) la f.o al campionatore deve necessariamente non generare ISI e allo stesso tempo avere $B_g = \frac{r}{2}$. La f.o. che rispetta tali condizioni

$$\boxed{g(t) = C \operatorname{sinc}(rt)}$$

· PAM con MEMORIA

in entrambi i casi di PAM a banda illimitata e PAM a banda stretta, un aumento della symbol rate 'r_s' causa un aumento nell'occupazione di banda sul canale. Se la minima occupazione di banda è troppo grande rispetto alla banda effettivamente disponibile sul canale, si può adottare la tecnica 'PAM con MEMORIA'. Essa consiste nel rallentare la rate dei simboli che il sistema PAM deve trasmettere e si realizza come segue:

1. memorizzare (mediante un buffer) gruppi di simboli consecutivi in uscita dalla sorgente
2. associare ad ogni gruppo di simboli un solo simbolo
3. associare ad ogni simbolo ottenuto una f.o. e trasmetterla mediante PAM

In generale, accorpando k bit consecutivi in un simbolo 2^k-ario, si ottiene un tempo di cifra pari a k volte il tempo di bit ed una symbol rate pari ad $\frac{1}{k}$ della bit rate ($r = \frac{r_b}{k}$).

Per poter ricostruire i simboli in ricezione occorre distanziare sufficientemente le ampiezze PAM e molte ampiezze ben distanziate richiedono molta potenza in trasmissione.

PROBABILITÀ e VARIABILI ALEATORIE

segnali aleatori: insieme di possibili funzioni del tempo definito soltanto in termini statistici

→ **PROBABILITÀ**

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$

$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$

$Pr(A \cap B) = Pr(A, B)$
$Pr(A \cup B) = Pr(A + B)$

- PROBABILITÀ CONDIZIONATA: probabilità dell'evento A sapendo che si verifichi l'evento B

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(A,B)}{Pr(B)}$$

- TEOREMA di BAYES: $Pr(B/A) = \dfrac{Pr(B)\, Pr(A/B)}{Pr(A)}$

- PROBABILITÀ TOTALE: si supponga che lo spazio degli eventi Ω sia completamente coperto da N eventi B_i fra loro mutuamente esclusivi

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^{N} Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{N} Pr(B_i)\, Pr(A/B_i)$$

→ **EVENTI**

1. Eventi indipendenti: due eventi A e B sono indipendenti se il verificarsi dell'evento B non ha nessuna influenza sul verificarsi dell'evento A, e viceversa:
$$Pr(A/B) = Pr(A)$$
2. Eventi mutuamente esclusivi: due eventi A e B sono mutuamente esclusivi se $A \cap B = \emptyset$
N.B.: gli eventi mutuamente esclusivi NON sono indipendenti

→ **PROVE RIPETUTE**

- EQUAZIONE di BERNOULLI: $Pr(A \text{ si verifichi k volte in m prove}) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$

- APPROSSIMAZIONE GAUSSIANA: (se $mpq \gg 1$)
$$\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{\left[-\frac{(k-mp)^2}{2mpq}\right]} \qquad \to \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

- APPROSSIMAZIONE di POISSON: ($p \ll 1$ e $mp \simeq 1$)
$$\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \approx e^{-mp} \frac{(mp)^k}{k!}$$

variabile aleatoria: dato uno spazio degli eventi Ω, definita una corrispondenza che associ a ciascun risultato ω_i dell'esperimento un unico numero reale, chiamiamo tale corrispondenza VARIABILE ALEATORIA se viene soddisfatta la seguente condizione:

→ per qualsiasi valore X reale, l'insieme dei risultati dell'esperimento per i quali $x \le X$, è un evento (composto) a cui è possibile associare una probabilità. Tale insieme è indicato con $\{x \le X\}$

→ FUNZIONE di DISTRIBUZIONE: $F_x(X) = Pr\{x \le X\}$
(caratterizza completamente la variabile aleatoria)

- **TIPI di VARIABILE ALEATORIA**.
  - DISCRETA: se la sua funzione di distribuzione è costante a tratti
  - CONTINUA: se la sua funzione di distribuzione è ovunque continua
  - MISTA: se non appartiene a nessuna delle due classi definite sopra

nota: data una funzione di variabile aleatoria $y = g(x)$ il valore medio di y vale:
$\bar{y} = E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x)\, dx$
l'operatore expectation è un operatore lineare

→ FUNZIONE di DENSITÀ: $f_x(X) = \dfrac{dF_x(X)}{dX} \longleftrightarrow F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} f_x(\eta)\, d\eta$

→ VALORE MEDIO: rappresenta il valore baricentrico attorno al quale si distribuiscono i valori assunti dalla variabile aleatoria stessa.
$$\bar{x} = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} X f_x(X)\, dX$$

→ VARIANZA: permette di capire quanto (mediamente) i valori assunti dalla variabile aleatoria si allontanano dal valore medio:
$$\sigma_x^2 = E\{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2\} = E\{x^2\} - 2\bar{x}E\{x\} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

nota: il valore medio è MOMENTO ASSOLUTO di ordine 1, mentre la potenza è quello di ordine 2.
la varianza è il MOMENTO CENTRALE di ordine 2.

→ VALORE QUADRATICO MEDIO (o POTENZA): $E\{x^2\} = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f_x(X)\, dX$

nota: la radice quadrata della varianza σ_x è chiamata DEVIAZIONE STANDARD nota: se la densità di probabilità $f_x(x)$ è simmetrica rispetto alla linea verticale $X=A$, allora media e mediana coincidono con A

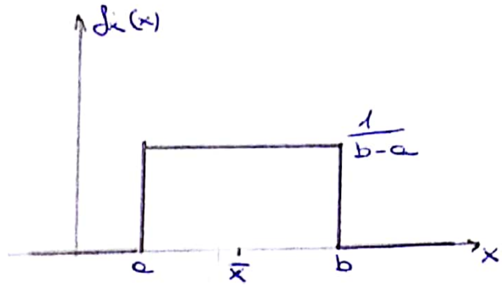
→ MEDIANA: è il più piccolo valore di M tale che $F_x(M)=0.5$, il valore M suddivide la funzione di densità di probabilità in due parti, entrambe con area sottesa pari a 0.5

→ MODA: il valore $X=X_M$ in corrispondenza del quale la funzione di densità di probabilità $f_x(x)$ assume il suo massimo.

- **DENSITÀ di PROBABILITÀ UNIFORME**

Una variabile aleatoria continua x è UNIFORME su un intervallo (a,b) se la sua densità di probabilità è costante su tale intervallo e si annulla al di fuori di esso:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a<X<b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \bar{x} = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_x^2 = \frac{c^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$



- **DENSITÀ di PROBABILITÀ GAUSSIANA**

Una variabile aleatoria continua x è GAUSSIANA se possiede la seguente densità di probabilità

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(X-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} = g_{\bar{x},\sigma_x^2}(X)$$

nota: per calcolare la primitiva della GAUSSIANA NORMALIZZATA si usano due funzioni:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2/2} \, d\xi \qquad erf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2/2} \, d\xi$$

- **DENSITÀ di PROBABILITÀ di POISSON**

Una variabile aleatoria x, discreta, ha distribuzione di Poisson con parametro 'a' se assume i valori $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ con probabilità $P_r(x=k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$:

$$f_x(X) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \delta(X-k)$$

- media: $\bar{x} = a$
- varianza: $\sigma_x^2 = a$

- **DENSITÀ di PROBABILITÀ di RAYLEIGH**

Consideriamo due var. aleatorie Gaussiane, 'a' e 'b', indipendenti fra loro, entrambe a media nulla e varianza σ^2. Ipotizzando che 'a' e 'b' siano la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso. La variabile x (modulo del numero complesso) sarà anch'essa aleatoria e avrà densità di probabilità di Rayleigh:

$$f_x(X) = \frac{X}{\sigma^2} e^{-X^2/2\sigma^2} u(X)$$

- media: $\bar{x} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- varianza: $\sigma_x^2 = \sigma\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$

- **DENSITÀ di PROBABILITÀ ESPONENZIALE**

Consideriamo 'a' e 'b' precedenti ma questa volta x è il quadrato del modulo. La nuova variabile x è aleatoria con densità di probabilità esponenziale

$$f_x(X) = \underbrace{\lambda}_{\frac{1}{2\sigma^2}} e^{-\lambda X} u(X)$$

- media: $\bar{x} = \frac{1}{\lambda} = 2\sigma^2$
- varianza: $\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 4\sigma^4$

→ DISUGUAGLIANZA di TCHEBYCHEFF: $P_r\{|x-\bar{x}| \geq \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2 \quad \forall \varepsilon > 0$

variabile aleatoria condizionata: talvolta il verificarsi dell'evento $x \leq X$ è condizionato al verificarsi di un altro evento B. In questi casi è utile conoscere la funzione distribuzione della variabile aleatoria x condizionata all'evento B

$$F_{x/B}(X/B) = P_r\{x \leq X/B\} = \frac{P_r\{x \leq X, B\}}{P_r(B)}$$

$$f_{x/B}(X/B) = \frac{dF_{x/B}(X/B)}{dX}$$

→ TEOREMA di BAYES: $P_r(A/x=X) = P_r(A) f_{x/A}(X/A)$

→ TEOREMA della PROBABILITÀ TOTALE: $P_r(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P_r(A/x=X) f_x(X) \, dX$

- **2 VARIABILI**

→ FUNZIONE DISTRIBUZIONE di PROBABILITÀ CONGIUNTA: $F_{xy}(X,Y) = P_r\{x \leq X, y \leq Y\}$

- funzioni distribuzione marginali:

$$F_x(X) = F_{xy}(X,\infty) = P_r\{x \leq X, y \leq \infty\} = P_r\{x \leq X\}$$

$$F_y(Y) = F_{xy}(\infty,Y) = P_r\{x \leq \infty, y \leq Y\} = P_r\{y \leq Y\}$$

• proprietà: $P_r\{x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\} = F_{xy}(x_2,y_2) - F_{xy}(x_1,y_2) - F_{xy}(x_2,y_1) + F_{xy}(x_1,y_1)$

→ FUNZIONE DENSITÀ di PROBABILITÀ CONGIUNTA: $f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y}$

• proprietà: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$f_{xy}(x,y) \ge 0 \quad \forall x,y$

• Funzioni densità marginali: $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$

$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx$

n.b: la funzione densità di probabilità congiunta permette di calcolare la probabilità che la coppia di variabili aleatorie assumano valori contenuti in una regione R

$$P_r\{(x,y) \in R\} = \iint_R f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

→ FUNZIONE DENSITÀ di PROBABILITÀ CONDIZIONATA: $f_{xy}(x/y) = \dfrac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$

→ TEOREMA di BAYES: $f_{x/y}(x/y) = \dfrac{f_x(x)\,f_{y/x}(y/x)}{f_y(y)}$

→ TEOREMA della PROBABILITÀ TOTALE: $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,f_{y/x}(y/x)\,dx$

→ FUNZIONI di DUE VARIABILI ALEATORIE: si considera la variabile aleatoria z generata da due variabili aleatorie x e y e dalla funzione $g(x,y)$, $z = g(x,y)$. Per un dato Z, chiamiamo D_z la regione del piano x,y tale che $g(x,y) \le Z$

$$F_z(Z) = P_r\{z \le Z\} = P_r\{(x,y) \in D_z\} = \iint_{D_z} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

→ SOMMA: se $z = x+y$ e se le due variabili x e y sono indipendenti allora:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)\,f_y(y)\,dy = f_x(z) * f_y(z)$$

→ MEDIA: $\bar{z} = E\{z\} = E\{g(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$

• $\boxed{\text{COVARIANZA}}$: $\mu_{xy} = E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})(y-\bar{y})\,f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$

n.b: se la covarianza è nulla, le due variabili aleatorie sono scorrelate

• $\boxed{\text{CORRELAZIONE}}$: → COEFFICIENTE di CORRELAZIONE: $\rho_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

• proprietà: $|\rho_{xy}| \le 1$

$\rho_{xy} = 0 \Leftrightarrow$ var. scorrelate

$|\rho_{xy}| = 1 \Leftrightarrow$ var. linearmente indipendenti

n.b [1]: due variabili aleatorie sono dette ortogonali se $E\{xy\} = 0$

n.b [2]: se due variabili aleatorie sono indipendenti, allora esse sono anche scorrelate. Non è vera l'implicazione inversa.

→ $\boxed{\text{VARIABILI CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE}}$:

Due variabili aleatorie x e y sono congiuntamente Gaussiane se la loro densità di probabilità è una Gaussiana bidimensionale

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy}\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

n.b [1]: se due variabili aleatorie sono congiuntamente Gaussiane, lo sono anche marginalmente. Non vale la relazione inversa

n.b [2]: variabili aleatorie Gaussiane scorrelate sono anche indipendenti, perché la densità congiunta è il prodotto di quelle marginali (essendo scorrelate $\rho_{xy} = 0$)

→ $\boxed{\text{TEOREMA del LIMITE CENTRALE}}$

Se le variabili indipendenti x_i sono di tipo continuo, per n che tende ad infinito, la densità di probabilità di x sarà Gaussiana, senza riguardo alla forma delle densità marginali

$$\lim_{n\to\infty} f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$$

• PROCESSI ALEATORI

processo aleatorio: corrispondenza che associa ad ogni possibile risultato dell'esperimento una funzione temporale detta realizzazione del processo stesso. Un processo aleatorio osservato ad un dato istante temporale collassa in una variabile aleatoria.

→ FUNZIONE DISTRIBUZIONE: $F_{x(t_1)}(X) = P_r\{x(t_1) \le X\}$

N.B: dipende anche dalla variabile temporale e viene chiamata 'funzione distribuzione di probabilità di primo ordine' del processo. Se tale funzione è nota per ogni possibile valore di t_1, si può affermare che la statistica di primo ordine del processo è conosciuta

→ FUNZIONE DISTRIBUZIONE CONGIUNTA: $F_{x(t_1)x(t_2)}(X_1, X_2) = P_r\{x(t_1) \le X_1, x(t_2) \le X_2\}$

N.B: è chiamata 'funzione distribuzione di probabilità del secondo ordine del processo'. Se tale funzione è nota per ogni possibile coppia di valori (t_1, t_2) si può affermare che la statistica di secondo ordine del processo è conosciuta.

La descrizione statistica di un processo è completa solo quando si conosca la sua statistica di ordine n, per ogni possibile valore di n e comunque si scelga la n-upla $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$

→ VALORE MEDIO: $\bar{x}(t^*) = E\{x(t^*)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X f_{x(t^*)}(X)\, dX$

→ VARIANZA: $\sigma_x^2(t) = E\{(x(t) - \bar{x}(t))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \bar{x}(t))^2 f_{x(t)}(X)\, dX$

$= E\{x^2(t)\} - \bar{x}^2(t) = P_x(t) - \bar{x}^2(t)$ • dove $P_x(t) = E\{x^2(t)\}$ è la POTENZA MEDIA ISTANTANEA

→ AUTOCORRELAZIONE: $R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 f_{x(t_1)x(t_2)}(X_1, X_2)\, dX_1 dX_2$

→ AUTOCOVARIANZA: $C_x(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \bar{x}(t_1)][x(t_2) - \bar{x}(t_2)]\} = R_x(t_1, t_2) - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [X_1 - \bar{x}(t_1)][X_2 - \bar{x}(t_2)] f_{x(t_1)x(t_2)}(X_1, X_2)\, dX_1 dX_2$

- coefficiente di correlazione: $\rho_{x(t_1)x(t_2)} = \dfrac{C_x(t_1, t_2)}{\sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}}$

$= \dfrac{R_x(t_1, t_2) - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)}{\sqrt{R_x(t_1, t_1) - \bar{x}^2(t_1)}\sqrt{R_x(t_2, t_2) - \bar{x}^2(t_2)}}$

• $\boxed{\text{PROCESSO SSS}}$: un processo aleatorio aleatorio si dice stazionario in senso stretto (SSS), se per qualsiasi ordine n, la funzione densità di probabilità valutata in $(t_1, \dots, t_n)$ è uguale alla funzione densità valutata in $(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$.
(N.B: deve valere per ogni possibile n-upla $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ e per ogni possibile scelta di τ)

• $\boxed{\text{PROCESSO SSL}}$: un processo aleatorio si dice stazionario in senso lato (SSL) se la sua funzione valore medio è costante e la sua autocorrelazione dipende solo dalla differenza $t_2 - t_1$:

$$\bar{x}(t) = \bar{x} \qquad R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$$

(N.B: un processo aleatorio SSS è anche SSL)

Vale inoltre: $R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{x(t - \frac{\tau}{2})x(t + \frac{\tau}{2})\}$

→ PROPRIETÀ dell'AUTOCORRELAZIONE:

1. $R_x(\tau)$ è una funzione pari: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
2. $R_x(\tau)$ in zero è la potenza del processo: $R_x(0) = E\{x^2(t)\} = P_x$
3. $R_x(\tau)$ è massima in modulo nell'origine: $R_x(0) \ge |R_x(\tau)|$
4. se $R_x(\tau)$ non contiene componenti periodiche: $\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = \bar{x}^2$

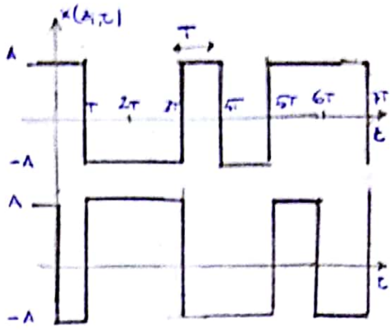
La funzione di autocorrelazione misura la rapidità di variazione del segnale aleatorio, permettendo di desumere entro quali intervalli temporali due valori del processo siano fra loro correlati, nonché l'entità di tale correlazione
L'autocorrelazione rappresenta la MEMORIA del processo

→ COEFFICIENTE di CORRELAZIONE: $\rho_{x(t)x(t+\tau)} = \dfrac{R_x(\tau) - \bar{x}^2}{R_x(0) - \bar{x}^2}$

• Processi Aleatori Notevoli

→ **Processo Binario Semicasuale**:

1. agli istanti $t_k = kT$, k intero, viene lanciata una moneta ideale
2. | testa: il segnale assume valore A per l'intervallo T con inizio t_k
   | croce: il segnale assume valore −A per l'intervallo T con inizio t_k
3. A e −A vengono assunti con egual probabilità e i risultati di lanci successivi della moneta ideale sono indipendenti fra loro (n.b.: $t=0$ coincide con un lancio della moneta ideale)



n.b: i valori A e −A vengono assunti con egual probab.

→ MEDIA: grazie all'equiprobabilità dei due valori assunti dal processo
$$\bar{x} = E\{x(t)\} = 0$$

→ AUTOCORRELAZIONE: $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\}$, $t_1 < t_2$

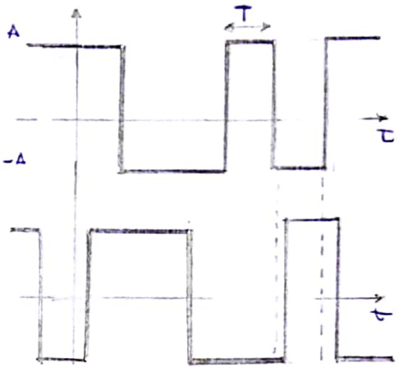
· t_1 e t_2 cadono nello stesso intervallo
· t_1 e t_2 non cadono nello stesso intervallo

1. $t_2 - t_1 > T$ → $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0$
2. $t_2 - t_1 \le T$ → $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_2)^2\} = A^2$
3. $t_2 - t_1 \le T$ → $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0$

n.b: l'autocorrelazione dipende anche dalla posizione assoluta di t_1
⇒ il processo esaminato non è SSL e quindi neanche SSS.

→ **Processo Binario Casuale**:

A differenza del processo binario semicasuale:
1. i lanci della moneta ideale avvengono ad intervalli
2. la distanza fra l'istante di lancio più vicino all'origine dei tempi e l'origine stessa è una variabile aleatoria uniforme distribuita fra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$



→ MEDIA: sempre grazie all'equiprobabilità dei due valori:
$$\bar{x} = E\{x(t)\} = 0$$

→ AUTOCORRELAZIONE: $R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}$
$= P_r(t\ e\ t+\tau \in SI)E\{x(t)x(t+\tau)/SI\} +$ (stesso intervallo)
$P_r(t\ e\ t+\tau \in DI)E\{x(t)x(t+\tau)/DI\}$ (diverso intervallo)

1. $\boxed{\tau > T}$ in questo caso t e t+τ cadono forzatamente in un diverso intervallo T. Quindi x(t) e x(t+τ) sono variabili aleatorie indipendenti.

$P_r(t\ e\ t+\tau \in SI) = 0$

$P_r(t\ e\ t+\tau \in DI) = 1$

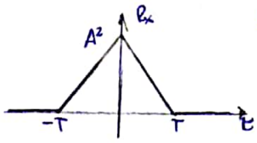
$R_x(\tau) = 0 \quad \forall \tau > T$ dato che $E\{x(t)x(t+\tau)/DI\} = 0$

$E\{x(t)\}E\{x(t+\tau)\} = \bar{x}^2$

2. $\boxed{0 \le \tau \le T}$ in questo caso t e t+τ possono cadere nello stesso intervallo o in diversi intervalli.

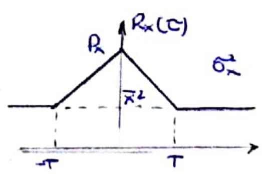
La probabilità che tali istanti cadano nello stesso intervallo è data da:
$$P_r(t\ e\ t+\tau \in SI) = \frac{T-\tau}{T} \rightarrow E\{x(t)x(t+\tau)/SI\} = E\{x^2(t)\} = R = A^2$$
di conseguenza essendo SI e DI mutuamente esclusivi e ricoprendo l'intero spazio degli eventi:
$$P_r(t\ e\ t+\tau \in DI) = 1 - P_r(t\ e\ t+\tau \in SI) = \frac{\tau}{T}$$
Concludiamo che:
$$R_x(\tau) = A^2\frac{T-\tau}{T} \quad \forall \tau \in [0,T]$$

Riassumendo:
$$R_x(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{altrove} \\ A^2\frac{T-\tau}{T} & |\tau| \le T \end{cases}$$



n.b: è un processo SSL

Possiamo inoltre notare che se i 2 valori assunti dal processo non fossero simmetrici o non fossero equiprobabili, il valor medio non sarà nullo e la potenza non sarà A^2.
Otterremo quindi:
$$R_x(\tau) = \begin{cases} R_x - \sigma_x^2\frac{|\tau|}{T} & |\tau| \le T \\ \bar{x}^2 & \text{altrove} \end{cases}$$



→ **PROCESSO MULTILIVELLO CASUALE**

è un processo aleatorio analogo al binario casuale tranne per il fatto che i valori discreti di ampiezza che esso assume (e mantiene per un intervallo T) sono in numero maggiore di 2, non necessariamente equiprobabili.

→ MEDIA : $\bar{x} = \sum_i P_i x_i$ → POTENZA : $P_x = \sum_i P_i x_i^2$

→ AUTOCORRELAZIONE : si ottiene la stessa eq. del processo binario casuale

→ **PROCESSO BINARIO CASUALE CONDIZIONATO**

consideriamo ora un processo binario casuale con valori equiprobabili supponendo, però, che il valore assunto in un dato intervallo T condizioni il valore che verrà assunto nell'intervallo T successivo. Questo effetto con memoria viene espresso tramite le seguenti probabilità condizionate:

$$P_r(A \text{ in } IC / A \text{ in } IP) = P_r(-A \text{ in } IC / -A \text{ in } IP) = 0.8$$

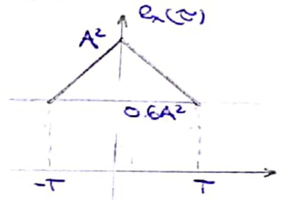
$$P_r(A \text{ in } \underset{\text{intervallo corrente}}{IC} / -A \text{ in } \underset{\text{intervallo precedente}}{IP}) = P_r(-A \text{ in } IC / A \text{ in } IP) = 0.2$$

→ AUTOCORRELAZIONE :

1. $\boxed{0 \le \tau \le T}$ continua a valere $E\{x(t)x(t+\tau)/SI\} = E\{x^2(t)\} = P_x = A^2$, mentre cambia il valore $E\{x(t)x(t+\tau)/DI\} = 0.6A^2$
Concludiamo quindi:

$$R_x(\tau) = \frac{T-\tau}{T}A^2 + \frac{\tau}{T}0.6A^2 = A^2\left(1 - 0.4\frac{\tau}{T}\right)$$

• nel processo binario condizionato in $\tau = T$ l'autocorrelazione non raggiunge il valore medio al quadrato e per effetto della memoria i campioni a distanza T mantengono una significativa correlazione fra loro.



2. $\boxed{T \le \tau \le 2T}$ t e t+τ si trovano sempre in intervalli diversi: possono trovarsi in intervalli adiacenti o intervalli non adiacenti

$$R_x(\tau) = P_r(t_e t+\tau \in IA) E\{x(t)x(t+\tau)/\underset{\text{intervalli adiacenti}}{IA}\} + P_r(t_e t+\tau \in IN) E\{x(t)x(t+\tau)/\underset{\text{intervalli non adiacenti}}{IN}\}$$

dove valgono i seguenti valori:

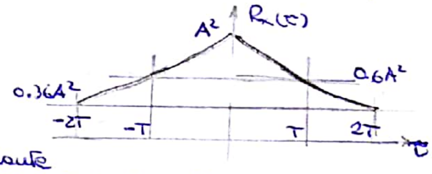
$$P_r(t_e t+\tau \in IA) = \frac{2T-\tau}{T}$$

$$P_r(t_e t+\tau \in IN) = \frac{\tau - T}{T}$$

$$E\{x(t)x(t+\tau)/IA\} = 0.6A^2$$

$$E\{x(t)x(t+\tau)/IN\} = 0.36A^2$$

$$\Rightarrow \quad R_x(\tau) = \frac{2T-\tau}{T}0.6A^2 + \frac{\tau - T}{T}0.36A^2 = A^2\left(0.84 - 0.24\frac{\tau}{T}\right)$$



Allontanandosi dall'origine, vi è una graduale riduzione dell'autocorrelazione cui corrisponde una riduzione del coefficiente di correlazione fra campioni che siano via via più lontani fra loro

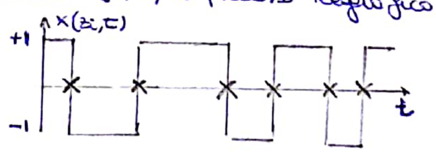
n.b: l'effetto memoria, dovuto al condizionamento dei valori, si riduce nel tempo.

→ **PROCESSO TELEGRAFICO SEMICASUALE**

legato alla distribuzione dei punti casuali di Poisson: $P_r[k \text{ punti in } (t_1,t_2)] = e^{-\overset{\text{densità dei punti}}{\lambda}(t_2-t_1)} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}$

Indicando con $m(t)$ il numero di punti nell'intervallo $(0,t)$ il processo Telegrafico $\{x(t)\}$ viene definito come segue:

$$\{x(t)\} = \begin{cases} 1 & \text{se } m(t) \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } m(t) \text{ è dispari} \end{cases}$$



→ MEDIA : $\bar{x}(t) = E\{x(t)\} = 1 \cdot P_r\{x(t) = 1\} - 1 \cdot P_r\{x(t) = -1\} = e^{-\lambda t}[\cosh(\lambda t) - \sinh(\lambda t)] = e^{-2\lambda t}$

n.b: il valore medio dipende dal tempo quindi il processo non è stazionario

→ AUTOCORRELAZIONE : $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = 1 \cdot P_r\{x(t_1) = 1, x(t_2) = 1\} + 1 \cdot P_r\{x(t_1) = -1, x(t_2) = -1\} + - 1 \cdot P_r\{x(t_1) = 1, x(t_2) = -1\} - 1 \cdot P_r\{x(t_1) = -1, x(t_2) = 1\} =$

$$= e^{\lambda t_1}[\cosh(\lambda t_1) + \sinh(\lambda t_1)] e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cosh[\lambda(t_2-t_1)] - e^{-\lambda t}[\cosh(\lambda t_1) + \sinh(\lambda t_1)] e^{-\lambda(t_2-t_1)} \sinh[\lambda(t_2-t_1)] = e^{-\lambda(t_2-t_1)}\{\cosh[\lambda(t_2-t_1)] - \sinh[\lambda(t_2-t_1)]\} = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$

→ **PROCESSO TELEGRAFICO CASUALE**

per ottenere un processo SSL si può moltiplicare $\{x(t)\}$ per una variabile aleatoria a, indipendente da $\{x(t)\}$, che assume con uguale probabilità i valori 1 e −1:

$$\{y(t)\} = a \cdot \{x(t)\}$$

→ MEDIA: $\bar{y}(t) = E\{y(t)\} = E\{a\} \cdot E\{x(t)\} = 0$

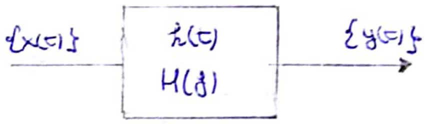
→ AUTOCORRELAZIONE: $R_y(t_1,t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = E\{a^2\} \cdot E\{x(t_1)x(t_2)\} = R_x(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$

n.b: la memoria si perde più velocemente se la densità di punti nell'unità di tempo grande

n.b: $\{y(t)\}$ è un processo SSL.

→ **FILTRAGGIO di UN PROCESSO ALEATORIO**

Consideriamo un sistema LTI caratterizzato dalla risposta all'impulso $h(t)$. Se il processo in ingresso al filtro è stazionario in senso lato, allora il processo in uscita è anch'esso stazionario in senso lato.
$\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ sono congiuntamente SSL.



→ MEDIA: $\bar{y} = E\{y(t)\} = \bar{x}H(0)$

→ CROSS-CORRELAZIONE: $R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$

→ AUTOCORRELAZIONE: $R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$

→ **SPETTRO di DENSITÀ di POTENZA**

le realizzazioni dei processi SSL non possono essere segnali a energia finita (il loro valore medio è costante su tutto l'asse temporale)

→ TEOREMA di WIENER–KHINTCHINE: permette di affermare che lo spettro di densità di potenza di un processo aleatorio SSL è dato dalla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$G_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$
$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)]$$

lo spettro di densità di potenza permette di conoscere la distribuzione media della potenza del processo sull'asse delle frequenze. La Potenza Media del processo aleatorio:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df$$

potenza delle componenti frequenziali del processo aleatorio comprese tra f_1 e f_2 → $2\int_{f_2}^{f_1} G_x(f)\,df$

Per quanto riguarda il filtraggio LTI, lo spettro di densità di potenza del processo aleatorio all'uscita può essere ricavato dalla seguente relazione

$$G_y(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2$$

n.b: lo spettro di densità di potenza è assai importante nel valutare l'occupazione di banda di un processo aleatorio.

→ **RUMORE BIANCO**

Un processo aleatorio stazionario viene chiamato RUMORE BIANCO se presenta queste caratteristiche

$$G_x(f) = N_0 \qquad R_x(t) = N_0\,\delta(t)$$

si definisce bianco in quanto essendo piatto il suo spettro di densità di potenza, il processo contiene tutte le componenti frequenziali in uguale misura, così come avviene per la luce bianca.
Il rumore bianco ha sempre valor medio nullo non essendovi impulsi nello spettro
La potenza di tale processo è infinita, in quanto $R_x(0) = \infty$.
Spesso il rumore bianco ha un'ulteriore caratteristica quella di essere GAUSSIANO

n.b: un processo non bianco può essere Gaussiano

→ **ERGODICITÀ**

Nei processi stazionari il valore medio non dipende dal tempo.

→ MEDIA TEMPORALE: $x_m(\xi_i) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(\xi_i,t)\,dt$

un processo si definisce ERGODICO nella MEDIA se:
- tutte le realizzazioni del processo hanno la stessa media temporale
- la media temporale coincide con il valore medio $\bar{x}$ ottenuto tramite la media d'insieme

l'ergodicità nella media significa che ogni realizzazione del processo in media si comporta come il processo nella sua globalità n.b: l'ergodicità è una condizione più restrittiva della stazionarietà

Un processo si può definire ERGODICO nell'AUTOCORRELAZIONE se per qualsiasi realizzazione z_i del processo stesso, è verificato la relazione:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(z_i,t)\,x(z_i,t+\tau)\,dt \qquad \forall z_i$$

↳ autocorrelazione statistica

MODULAZIONI ANALOGICHE

La modulazione consiste in un'alterazione di un segnale sinusoidale, detto PORTANTE, in accordo con la caratteristica del segnale che si desidera trasmettere, detto SEGNALE MODULANTE.
Esistono quindi due tipi di modulazioni:

- $\boxed{\text{MODULAZIONI LINEARI}}$: lo spettro del segnale modulante $x(t)$ viene traslato in frequenza senza subire alterazioni di forma. Il segnale modulato avrà dunque la seg. forma:

$$x_c(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t)$$

n.b: le modulazioni lineari non sono tempo invarianti

→ MODULAZIONE di AMPIEZZA (AM)

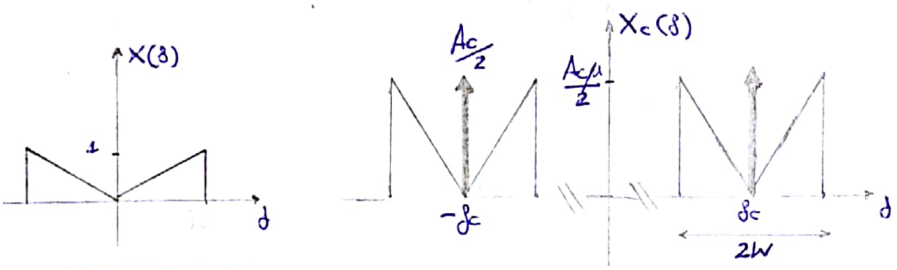
il segnale prodotto da una MODULAZIONE d'AMPIEZZA è il seguente:

$$x_c(t) = A_c\left[1+\mu x(t)\right]\cos(2\pi f_c t)$$

ampiezza della portante $A_c>0$

indice di modulazione $0<\mu\le 1$

n.b: $|x(t)|\le 1,\ \forall t$ se il segnale non rispetta questo vincolo bisogna provvedere a normalizzarlo prima della modulazione.



- banda occupata dal segnale modulato:

$$B_T = 2W$$

- $\boxed{\text{POTENZA del SEGNALE}}$

potenza della portante

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2\mu^2}{2}S_x \qquad S_x = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x^2(t)\,dt\ ,\ S_x\le 1$$

potenza dello spettro del segnale $x(t)$ traslato in $\pm f_c$

Poiché sia μ che S_x sono ≤ 1 si nota che oltre il 50 % della potenza S_T è consumata per la portante ⇒ SPRECO

n.b: avendo ipotizzato il segnale modulante a media temporale nulla $\left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\,dt = 0 \rightarrow \text{assenza di componente continua}\right)$ possiamo concludere che la AM non è adatta alla trasmissione di segnali con un significativo contenuto spettrale alle basse frequenze.

- $\boxed{\text{AM COME PROCESSO ALEATORIO}}$

essendo il messaggio $x(t)$ un segnale ignoto, il segnale $x_c(t)$ dovrebbe essere considerato un processo aleatorio:

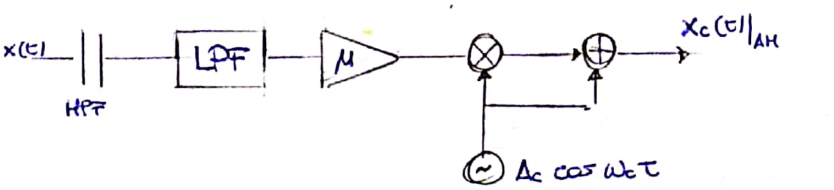
$$\{x_c(t)\} = A_c\left[1+\mu\{x(t)\}\right]\cos(2\pi f_c t+\varphi) = \{\tilde{x}(t)\}\cos(2\pi f_c t+\varphi)$$

dove la variabile aleatoria φ ha densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ e indica una relazione casuale fra il segnale modulante e la fase iniziale della portante

→ AUTOCORRELAZIONE: $R_{x_c}(\tau) = \left[\frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2\mu^2}{2}R_x(\tau)\right]\cos(2\pi f_c \tau)$

→ SPETTRO di DENSITÀ di POTENZA: $G_{x_c}(f) = \frac{A_c^2}{4}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right] + \frac{A_c^2\mu^2}{4}\left[G_x(f-f_c)+G_x(f+f_c)\right]$

- $\boxed{\text{MODULATORE e DEMODULAZIONE AM}}$



Nota: il condensatore posto in ingresso rappresenta in realtà un filtro passa-alto atto a eliminare la componente continua e le componenti frequenziali più prossime allo zero.

Supponiamo:
- il segnale modulante $x(t)$ abbia di per sé media nulla
- il canale non alteri sensibilmente il segnale modulato che transita in esso

- per recuperare $x(t)$ è sufficiente:
  - estrarre l'inviluppo del segnale modulato, cioè $A_c[1+\mu x(t)]$, tramite un circuito detto RIVELATORE D'INVILUPPO.
  - eliminare la componente continua, tramite un filtro passa-alto con f_c molto vicina a $\emptyset$

si ottiene così una copia scalata del messaggio originale.

nota: il rivelatore d'inviluppo non utilizza alcuna informazione riguardo al valore della frequenza di portante f_c

- MODULAZIONE AM con RUMORE

Se il rivelatore sincrono contiene un dispositivo che blocca la componente continua:

$$y_D(t) = A_c x(t) + m_i(t)$$

$A_c^2 S_x$

$$\begin{cases} S_R = \frac{1}{2}A_c^2(1+S_x) \\ S_D = \frac{2 S_x S_R}{1+S_x} \\ N_D = \overline{m_i}^2 \end{cases} \Rightarrow$$

- se $\mu = 1$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{1+S_x}\gamma$$

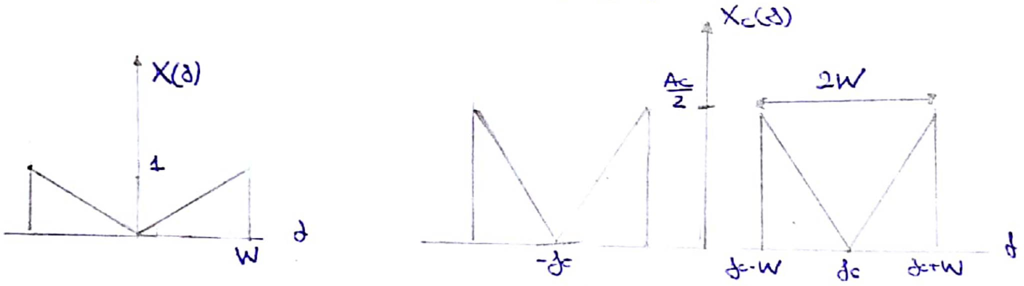
- se $\mu \neq 1$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\gamma \left(\leq \frac{\gamma}{2}\right)$$

→ MODULAZIONE a PORTANTE SOPPRESSA (DSB)

In questo caso lo spettro non presenta i due impulsi dovuti alla portante, per il resto il segnale modulato DSB ha la seguente equazione:

$$x_c(t) = A_c\, x(t) \cos(2\pi f_c t)$$



- la banda occupata è:

$$B_T = 2W$$

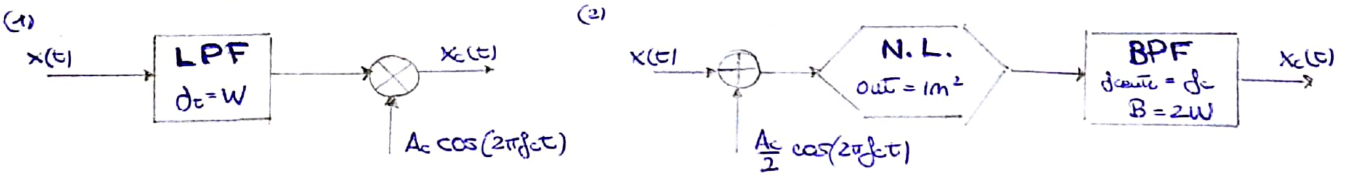
occorre comunque che $f_c > W$

- POTENZA del SEGNALE

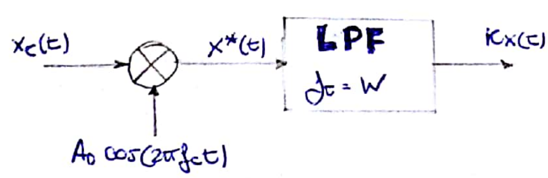
$$S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x$$

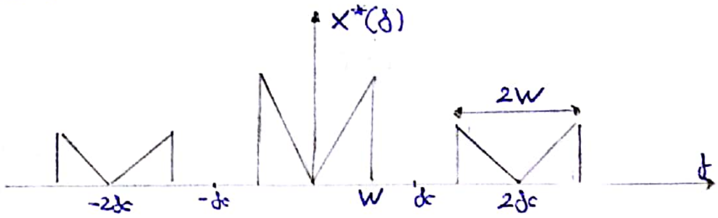
- tutta la potenza consumata è impiegata per trasmettere il messaggio, contenuto nelle repliche traslate in $\pm f_c$

- MODULAZIONE e DEMODULAZIONE DSB



Il primo ricalca l'equazione, la seconda invece evita l'uso del moltiplicatore e richiede un elevatore al quadrato, più semplice da realizzare.
Supponendo che il canale non alteri il segnale, per recuperare una copia scalata di $x(t)$ è necessario un DEMODULATORE COERENTE (o SINCRONO)





poiché è stato imposto che $f_c > W$ il filtro passa-basso non farà transitare il secondo addendo (cioè la DSB a $2f_c$). All'uscita del filtro troveremo una copia scalata del messaggio $\frac{A_0 A_c x(t)}{2}$

N.B.! Il demodulatore coerente non è facile da realizzare, infatti l'oscillatore interno al ricevitore (oscillatore locale) deve generare una sinusoide che abbia la stessa frequenza e la stessa fase iniziale di quella in $X_c(t)$.
Per ottenere un'oscillazione locale perfettamente agganciata in frequenza e fase con quella del segnale modulato che viene ricevuto, istante per istante, si utilizza spesso un phase-lock loop (PLL) accoppiato con un oscillatore controllato in tensione (VCO)

• **MODULAZIONE DSB con RUMORE**

il demodulatore isola la componente in fase: elimina la componente in quadratura a $2f_c$ e il filtro a destinazione limita la banda a W (in banda base)

$$y_D = A_c\, x(t) + n_i(t)$$

$$\begin{cases} S_D = A_c^2 S_x = 2S_R \\ S_R = \frac{1}{2} A_c^2 S_x \\ N_D = \overline{n_i^2} = 2W\eta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = 2\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{2S_R}{2W\eta} = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma$$

nota: la modulazione DSB con rivelatore sincrono raggiunge la max efficienza per le modulaz. lineari in termini di rapporto

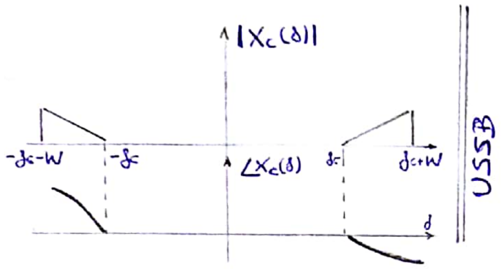
→ MODULAZIONE a BANDA LATERALE UNICA (SSB)

Nota la simmetria della trasformata di Fourier di un segnale reale, modulo e fase dello spettro di un segnale DSB, al fine di poter ricostruire $x(t)$ è sufficiente trasmettere un segnale avente il seguente spettro:

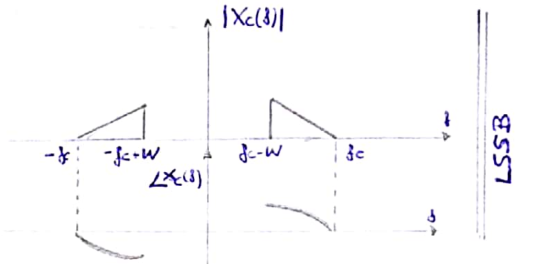
la otteniamo tramite un filtro in quadratura

$$x_c(t) = \frac{A_c}{2} x(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

dove $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t)$ è la trasformata di Hilbert di $x(t)$.



• trasmettiamo solo la 'upper side-band', realizzando una modulazione USSB (upper single side-band)



• trasmettiamo solo la lower side-band, realizzando una modulazione LSSB (lower single side-band)

• la banda occupata è sempre $B_T = W$
  - → USSB: $[f_c, f_c+W]$
  - → LSSB: $[f_c-W, f_c]$

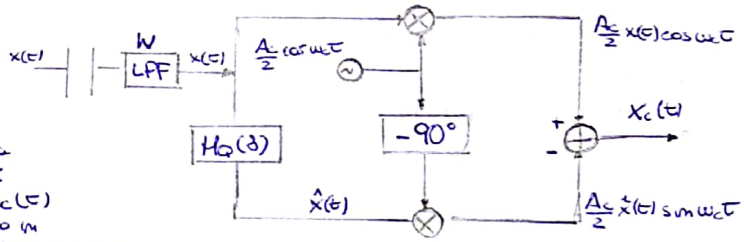
• **POTENZA del SEGNALE**

tale segnale possiede la metà delle bande laterali rispetto a quello modulato DSB e le bande laterali hanno la stessa altezza di quelle del segnale DSB, la potenza trasmessa sarà di conseguenza metà di quella trasmessa dalla DSB:

$$S_T = \frac{A_c^2}{4} S_x$$

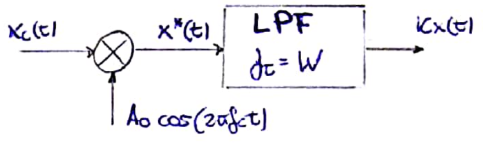
• **MODULATORI SSB con FILTRO**

Si può generare il segnale USSB partendo dal segnale DSB e usando il filtro passa-alto o passa-banda. Il segnale LSSB può, invece, essere generato da un filtro passa-basso o da un diverso passa-banda.
Poiché spesso il valore di $f_c \gg W$, i filtri passa-banda necessari ad ottenere tale segnale SSB presentano una banda frazionaria $W/f_c \ll 0.01$, la realizzabilità di tali filtri è problematica. Si preferisce quindi generare $x_c(t)$ direttamente dalla sua equazione utilizzando un "filtro in quadratura" per creare la trasformata di Hilbert del messaggio.



nota: la SSB è una modulazione non adatta alla trasmissione della componente continua e delle bassissime frequenze. se presenti esse devono essere rimosse prima che il segnale sia modulato

• **DEMODULAZIONE di SEGNALI SSB**



• Il demodulatore coerente usato per la DSB va bene anche per la SSB. Il secondo e terzo addendo sono centrati in $\pm 2f_c$ con banda 2W: saranno eliminati dal LPF. All'uscita del LPF vi sarà solo il primo addendo che è una copia scalata del messaggio.

nota: le necessità di sincronizzazione in frequenza e fase sono più rilassate rispetto al caso di DSB.

→ VANTAGGI e SVANTAGGI DSB e SSB

	DSB	SSB	ENTRAMBE
VANTAGGI	• banda occupata piuttosto contenuta (2W) • possibilità di trasmettere la componente continua	• banda occupata molto contenuta (W)	• nessuno spreco di potenza per la portante. • robustezza rispetto al rumore del canale migliore dell'AM
SVANTAGGI		• impossibilità di trasmettere la componente continua	• richiedono il demodulatore coerente, non facile da realizzare e piuttosto caro. • elevata sensibilità alle variazioni di attenuazione del canale (fading)

Scanned by CamScanner

• **MODULAZIONE SSB con RUMORE**

$$y_D = \frac{1}{2} A_c x(t) + m_i(t)$$

$$\begin{cases} S_R = \frac{1}{4} A_c^2 S_x \\ S_D = \frac{1}{4} A_c^2 S_x = S_R \\ N_D = \overline{m_i^2} = N_R \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = \left(\frac{S}{N}\right)_R = \gamma$$

→ MODULAZIONE a BANDA LATERALE VESTIGIALE (VSB)

Quando il contenuto alle bassissime frequenze è significativo e si vuole risparmiare banda occupata, invece della SSB conviene usare la VSB in cui un segnale modulato DSB viene filtrato attraverso un particolare FILTRO VESTIGIALE: tale filtro consente la trasmissione pressoché inalterata di una banda laterale, mentre della restante trasmette solo una traccia o vestigia. La sua funzione di trasferimento relativa è $\frac{1}{2}$ in f_c e ha simmetria dispari attorno a f_c

- **BANDA OCCUPATA**: $B_T = W + \beta$, con $\beta \ll W$
- **POTENZA**: $\frac{A_c^2}{4} S_x < S_T < \frac{A_c^2}{2} S_x$

→ **VSB + C**

In certi casi il filtro vestigiale viene applicato ad un segnale modulato AM. Ne risulta una modulazione VSB+C (VSB plus carrier) in cui la portante non è completamente soppressa. Tale tecnica permette di utilizzare il demodulatore d'inviluppo per rivelare il messaggio, introducendo distorsioni piuttosto contenute del messaggio, accettabili in svariate applicazioni.

• **MODULAZIONE VSB con RUMORE**:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \gamma$$

SCHEMA RIASSUNTIVO MODULAZIONI LINEARI

In generale un segnale modulato linearmente in AM, DSB o SSB può essere scritto come:

$$x_c(t) = \underbrace{[K_c + K_\mu x(t)]}_{x_i(t) \text{ componente in fase}} \cos \omega_c t - \underbrace{K_\mu x_s(t)}_{x_q(t) \text{ componente in quadratura}} \sin \omega_c t$$

$$\text{AM} \begin{cases} K_c = A_c \\ K_\mu = A_c \mu \\ x_s(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{DSB} \begin{cases} K_c = 0 \\ K_\mu = A_c \\ x_s(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{USSB} \begin{cases} K_c = 0 \\ K_\mu = \frac{A_c}{2} \\ x_s(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$$

Per quanto riguarda il RIVELATORE SINCRONO:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \begin{cases} \gamma \cdot \dfrac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} & \text{AM } (0 \le \mu \le 1) \\ \gamma = \dfrac{S_R}{\eta W} & \text{DSB, SSB, VSB} \end{cases}$$

• **MODULAZIONI ANGOLARI**: lo spettro del segnale modulante $x(t)$ viene traslato in frequenza e il suo spettro è pesantemente alterato nella forma e, in generale, assai allargato.

$x(t)$ agisce solo sulla fase istantanea $\varphi(t)$, della portante:

$$x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] = A_c \cos[\theta(t)]$$

angolo totale istantaneo

n.b: le modulazioni angolari non sono né tempo invarianti, né lineari.

A seconda del modo in cui il messaggio $x(t)$ influenza l'angolo totale si distingue fra modulazioni di frequenza (FM) e modulazione di fase (PM).

n.b: i segnali modulati hanno un'ampiezza dell'oscillazione A_c che non varia nel tempo.

→ **POTENZA e SPETTRO**: per segnali FM e PM la potenza trasmessa non dipende dal messaggio. Essendo costante l'ampiezza dell'oscillazione, l'informazione del messaggio è contenuta negli attraversamenti per lo zero, detti ZERO CROSSING. Le modulazioni angolari sono trasformazioni non lineari e, nel traslare lo spettro del segnale a cavallo di $\pm f_c$ ne provocano una completa deformazione che ne produce a sua volta un allargamento dello stesso. L'occupazione di banda sarà quindi superiore a quella delle modulazioni lineari e dipenderà dai parametri φ_Δ e f_Δ. L'incremento dell'occupazione di banda è ripagato da una maggiore robustezza al rumore e al FADING.

nota: $x_c(t)$ può essere anche scritto come (modulazione ESPONENZIALE):

$$x_c(t) = Re\{A_c e^{j\theta(t)}\}$$

→ MODULAZIONE di FASE (PM)

Nella modulazione PM la fase istantanea $\varphi(t)$ e il messaggio sono direttamente proporzionali

$$x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \underbrace{\varphi_\Delta x(t)}_{\varphi(t)}] \qquad \begin{cases} |\varphi_\Delta| \leq \pi \\ |x(t)| \leq 1 \end{cases}$$

dove φ_Δ è detta DEVIAZIONE di FASE e non deve eccedere π radianti. Il segnale deve inoltre rispettare la normalizzazione a uno.

- $\boxed{\text{FREQUENZA ISTANTANEA}}$: derivando l'angolo totale istantaneo si ottiene la FREQUENZA ISTANTANEA dell'oscillazione

$$f_{ist}(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{\varphi_\Delta}{2\pi}\dot{x}(t)$$

- $\boxed{\text{POTENZA}}$: $S_T = \frac{1}{2}A_c^2$

- $\boxed{\text{DEMODULAZIONE}}$: è sufficiente aggiungere in coda al DEMODULATORE FM un FILTRO d'INTEGRAZIONE per poter ottenere una copia scalata di $x(t)$

- $\boxed{\text{PM con RUMORE PICCOLO}}$:

$$y(t) = \varphi_\Delta x(t) + \psi^*(t) \qquad \psi^*(t) = \frac{A_n \sin \varphi_n(t)}{A_c} = \frac{n_q(t)}{\sqrt{2S_R}}$$

$$\begin{cases} S_D = \varphi_\Delta^2 S_x \\ N_D = \dfrac{\eta W}{S_R} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = \varphi_\Delta^2 S_x \frac{S_R}{\eta W} = \varphi_\Delta^2 S_x \gamma$$

Nota: può essere $> \gamma$, infatti se $\varphi_\Delta \leq \pi$ e $S_x \leq 1$ avremo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \leq \pi^2 \gamma \approx 10\gamma$$

- $\boxed{\text{BANDA OCCUPATA}}$: $B_T \simeq 2(\varphi_\Delta + 1)W$, con $|\varphi_\Delta| \leq \pi$

→ MODULAZIONE di FREQUENZA (FM)

Nella modulazione FM la fase istantanea $\varphi(t)$ e il messaggio sono legati attraverso una relazione integrale:

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \underbrace{2\pi f_\Delta \int_{t_0}^{t} x(\eta)\,d\eta}_{\varphi(t)}\right] \qquad \begin{cases} W < f_\Delta < f_c \\ |x(t)| \leq 1 \end{cases}$$

dove f_Δ è detta DEVIAZIONE IN FREQUENZA, W è la banda del messaggio e t_0 è l'istante iniziale tale che $\varphi(t_0) = 0$
Anche in questo caso il segnale modulante $x(t)$ deve rispettare la normalizzazione a uno.
Un parametro importante è il RAPPORTO di DEVIAZIONE: $D = \frac{f_\Delta}{W}$

- $\boxed{\text{FREQUENZA ISTANTANEA}}$: $f_{ist}(t) = f_c + f_\Delta x(t)$
- $\boxed{\text{POTENZA}}$: $S_T = \frac{1}{2}A_c^2$
- $\boxed{\text{BANDA OCCUPATA}}$:
  - $B_T \simeq 2(D+2)W$ con $2 \leq D \leq 10$
  - $B_T \simeq 2(D+1)W$ con $D > 10$ (approssimazione di Carson)

- $\boxed{\text{DEMODULAZIONE}}$:

nel caso della FM, l'estrazione di inviluppo permette di recuperare il segnale:

$$\dot{x}_c(t) = A_c[2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t)]\sin[2\pi f_c t + \varphi(t) \pm \pi]$$

$\Rightarrow A_c[2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t)]$, se $f_\Delta < f_c$ e se il messaggio è normalizzato, la quantità fra parentesi quadre è sempre positiva, non possono verificarsi inversioni di fase e quindi la rivelazione d'inviluppo lavora correttamente.

Dopo è sufficiente un filtro atto a bloccare la componente continua (cioè, $A_c 2\pi f_c$) per ottenere una copia scalata di $x(t)$.

→ SOFT LIMITER: è un blocco non lineare che serve a rimuovere eventuali modulazioni di ampiezza che siano state prodotte sul segnale $x_c(t)$ a causa del FADING di canale (attenuazione del canale con variazione aleatoria nel tempo) e che andrebbero ad alterare il risultato della demodulazione.

- $\boxed{\text{FM con RUMORE PICCOLO}}$:

$y(t) =$

$$\begin{cases} S_D = f_\Delta^2 S_x \\ N_D = \dfrac{\eta W^3}{3S_R} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{f_\Delta^2 S_x}{\eta W^3} 3S_R = 3\left(\frac{f_\Delta}{W}\right)^2 \cdot S_x \frac{S_R}{\eta W} = 3D^2 S_x \gamma$$

→ VANTAGGI e SVANTAGGI PM e FM

VANTAGGI	SVANTAGGI
• elevata robustezza al rumore, molto superiore rispetto alle modulazioni lineari • notevole insensibilità al FADING di canale • trasmissione ad ampiezza costante e complessità circuitale moderata • possibilità di trasmettere la componente continua	• cospicua occupazione di banda, molto maggiore di 2W (→ ripagato da una migliore robustezza al rumore)