

# **Der Operationsverstärker**

Paul Becker                      Alina Nasr-Esfahani  
(paul.becker@udo.edu)      (alina.esfahani@udo.edu)

Durchführung: 18.06.2018, 1. Abgabe: 08.06.2018

## Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Theorie</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1      | Ideale und reale Operationsverstärker . . . . .           | 2         |
| 1.2      | Schaltungen mit Operationsverstärker . . . . .            | 3         |
| 1.2.1    | Linearverstärker . . . . .                                | 3         |
| 1.2.2    | Elektrometerverstärker . . . . .                          | 3         |
| 1.2.3    | Amperemeter . . . . .                                     | 3         |
| 1.2.4    | Integrator und Differentiator . . . . .                   | 3         |
| 1.2.5    | Schmitt-Trigger . . . . .                                 | 4         |
| 1.2.6    | Signalgenerator . . . . .                                 | 4         |
| 1.2.7    | Erzeugung von gedämpften Sinusschwingungen . . . . .      | 5         |
| <b>2</b> | <b>Durchführung</b>                                       | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Auswertung</b>   | <b>5</b>  |
| 3.1      | Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers . . . . . | 5         |
| 3.2      | Umkehr-Integrator . . . . .                               | 7         |
| 3.3      | Umkehr-Differentiator . . . . .                           | 10        |
| 3.4      | Schmitt-Trigger . . . . .                                 | 13        |
| 3.5      | Dreiecksgenerator . . . . .                               | 13        |
| 3.6      | Gedämpften und ungedämpfte Schwingung . . . . .           | 14        |
| 3.7      | Beziehung zwischen Frequenz und Phase . . . . .           | 15        |
| <b>4</b> | <b>Diskussion</b>   | <b>16</b> |

# 1 Theorie

## 1.1 Ideale und reale Operationsverstärker

Ein Operationsverstärker ist ein gleichstromgekoppelter Differenzverstärker. Die Spannung am Ausgang  $U_A$  entspricht der Differenz der Eingangsspannungen  $U_P$  (am nicht invertierenden Eingang) sowie  $U_N$  (am invertierenden Eingang), die um den Verstärkungsfaktor  $V$  verstärkt wird.

$$U_A = V(U_P - U_N) \quad (1.1.1)$$

Das Schaltbild mit den entsprechenden Anschlüssen ist in ?? abgebildet. Die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers kann im Bereich der Betriebsspannungen variieren:

$$-U_B < U_A < U_B \quad (1.1.2)$$

Sollte  $U_A$  außerhalb des von den Betriebsspannungen definierten Bereich liegen, so nimmt die Ausgangsspannung den nächstliegenden Wert, also  $-U_B$  oder  $U_B$  an.

Um den Umgang mit realen Operationsverstärkern bei Berechnungen und in Schaltungen zu vereinfachen, wird das Modell des idealen Operationsverstärkers eingeführt: Der ideale Operationsverstärker zeichnet sich durch eine unendlich große Leerlaufverstärkung, einem unendlichen Eingangswiderstand, sowie einem verschwindenden Eingangswiderstand aus.

Für reale Operationsverstärker gibt es weitere Eigenschaften, die erläutert werden müssen: Sollte an beiden Eingängen die gleiche Spannung  $U_G$  anliegen, müsste theoretisch  $U_A = 0$  sein. Jedoch beobachtet man auf Grund der Unsymmetrien der beiden Kanäle eine Ausgangsspannung. Der Quotient aus  $U_G$  und  $U_A$  wird Gleichtaktverstärkung

$$V_G = \frac{\delta U_A}{\delta U_G} \quad (1.1.3)$$

genannt und ist ein Maß für die Abweichung vom idealen Operationsverstärker. Ferner gibt es Eingangsströme auf Grund der endlichen Eingangswiderstände. Somit ist es möglich den Eingangsruhestrom

$$I_B = \frac{1}{2}(I_P + I_N) \quad (1.1.4)$$

aus den Eingangsströmen  $I_P$  (nicht invertierter Eingang) und  $I_N$  (invertierter Eingang) zu berechnen.

Außerdem lässt sich der Offsetstrom definieren

$$I_0 = I_P - I_N. \quad (1.1.5)$$

Aus den definierten Größen lässt sich der Differenzeingangswiderstand  $r_D$  definieren:

$$r_D = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta U_P}{\delta I_P}, fr U_N = 0 \\ \frac{\delta U_N}{\delta I_N}, fr U_P = 0 \end{array} \right\}. \quad (1.1.6)$$

Auch ist für  $U_G = U_P = U_N$  und  $I_G = I_P + I_N$  der Gleichakteingangswiderstand

$$r_G = \frac{\delta U_G}{\delta I_G} \quad (1.1.7)$$

## 1.2 Schaltungen mit Operationsverstärker

### 1.2.1 Linearverstärker

Da der Operationsverstärker eine große Leerlaufverstärkung besitzt, kann er nur einen kleinen Eingangsspannungsbereich linear verstärken, bevor er an die Grenzen seiner Betriebsspannung stößt und in Sättigung geht. Um den Aussteuerungsbereich zu vergrößern, wird der Operationsverstärker gem. ?? mit einer Gegenkopplung erweitert, mit der das Verstärkungsverhältnis eingestellt werden kann.

Die Verstärkung des Linearverstärkers hat somit die Form

$$V' = -\frac{R_N}{R_1} \quad (1.2.1)$$

bzw. unter Berücksichtigung der Eigenschaften eines realen Operationsverstärkers

$$\frac{1}{V'} = -\frac{U_1}{U_A} = \frac{1}{V} + \frac{R_1}{R_N} \left(1 + \frac{1}{V}\right) \approx \frac{1}{V} + \frac{R_1}{R_N}. \quad (1.2.2)$$

### 1.2.2 Elektrometerverstärker

Bei Messungen mit hochohmigen Spannungsquellen ist es möglich, dass der geringe Eingangswiderstand des Linearverstärkers die Messung verfälscht. Die Elektrometerverschaltung gem. ?? besitzt diesen Nachteil nicht, da die Eingangsspannung direkt am invertierenden Eingang des Operationsverstärkers anliegt, was für einen hohen Eingangswiderstand sorgt. Hier berechnet sich der Verstärkungsfaktor gem.:

$$V' = \frac{U_A}{U_1} = \frac{R_N + R_1}{R_1}. \quad (1.2.3)$$

### 1.2.3 Amperemeter

Zur Messung von kleinen Strömen wird ein kleiner Eingangswiderstand benötigt. Dazu kann ein Amperemeter gem. ?? verwendet werden, bei dem die Ausgangsspannung proportional zum Eingangsstrom ist:

$$U_A = IR_N. \quad (1.2.4)$$

Der Eingangswiderstand der Schaltung ist

$$r_e = \frac{R_N}{V} \quad (1.2.5)$$

### 1.2.4 Integrator und Differentiator

Mit der in ?? dargestellten Schaltung wird die Eingangsspannung integriert:

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int U_1(t) dt \quad (1.2.6)$$

Beschreibt  $U_1$  eine Sinusspannung  $U_1 = U_0 \sin(\omega t)$ , so ist die Amplitude antiproportional zur Frequenz

$$U_A = \frac{U_0}{\omega RC} \cos(\omega t) \quad (1.2.7)$$

Das Gegenstück zum Integrator ist der Differentiator. Dieser wird gem ?? aufgebaut.

$$U_A = -RC \frac{dU_1}{dt} \quad (1.2.8)$$

Für den Fall, dass das Eingangssignal wieder als Sinusspannung vorliegt ergibt sich:

$$U_A = -\omega RC U_0 \cos(\omega t) \quad (1.2.9)$$

Somit ist die Amplitude der Ausgangsspannung proportional zur Frequenz

### 1.2.5 Schmitt-Trigger

Der Schmitt-Trigger wird gem. ?? verschaltet. Hier liegt ein Teil der Ausgangsspannung wieder am nicht-invertierten Eingang an. Dadurch steigt die Ausgangsspannung immer weiter an. Die Schaltung bekommt somit ein instabiles Verhalten. Der Schmitt-Trigger hat nur zwei Zustände, in denen seine Ausgangsspannung  $U_B$  beträgt, wenn die Eingangsspannung  $\frac{R_1}{R_P} U_B$  überschreitet oder  $-U_B$  wenn die Eingangsspannung  $-\frac{R_1}{R_P} U_B$  unterschreitet. Der Schmitt-Trigger ist daher ein nützliches Element für binäre Logik und Signalgeneratoren.

### 1.2.6 Signalgenerator

In ?? ist der Aufbau eines Signalgenerators gezeigt. Dieser besteht aus einem Schmitt-Trigger und einem Integrator. Der Integrator integriert die durch den Schmitt-Trigger erzeugten Rechteck-Spannungen, was zu einem Dreieck-Signal führt, wobei der Ausgang des Integrators gleichzeitig der Eingang des Schmitt-Triggers ist, sodass dieser regelmäßig an der Spitze des Dreieck-Signals den Zustand ändert.

Die Integration erfolgt folgendermaßen:

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int_0^{\frac{T}{2}} U_E(t') dt' = -\frac{1}{RC} U_B \frac{T}{2} \quad (1.2.10)$$

Da diese Spannung der Differenz zwischen den beiden Schwellenwerten des Schmitt-Triggers entspricht, ist

$$U_A = 2U_B \frac{R_1}{R_P} \quad (1.2.11)$$

Diese beiden Gleichung ergeben mit der Periodendauer  $T$  und der Frequenz  $f$ :

$$f = \frac{R_P}{4RCR_1} \quad (1.2.12)$$

### 1.2.7 Erzeugung von gedämpften Sinusschwingungen

Es wird ein Generator verwendet, der eine Sinusschwingung erzeugt, die mit einer abfallenden Exponentialfunktion überlagert ist. Die Schaltung ist in ?? dargestellt.

Die Schaltung besitzt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U_A}{dt^2} - \frac{\nu}{10RC} \frac{dU_A}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} U_A = 0 \quad (1.2.13)$$

mit der Lösung

$$U_A(t) = U_0 \exp\left(\frac{\nu t}{20RC}\right) \sin\left(\frac{t}{RC}\right) \quad (1.2.14)$$

Mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi RC \quad (1.2.15)$$

und der Abklingdauer

$$\tau = \frac{20RC}{\nu}. \quad (1.2.16)$$

## 2 Durchführung

Die Myonen, die gemessen werden sollen, entstehen größtenteils aus Pionzerfällen in der oberen Atmosphäre. Aufgrund ihrer relativistischen Energie erreichen sie den Erdboden. Durch Wechselwirkung mit Materie geben sie einen Teil ihrer kinetischen Energie ab. Bei Durchgang durch einen Szintillator in einem Edeltank regt die abgegebene Energie das Szintillatormaterial an, sodass bei der Rückkehr in den Grundzustand Photonen im kurzwelligeren sichtbaren bis UV-Bereich emittiert werden. Diese Photonen werden mit zwei Sekundärelektronenvervielfachern (SEV) detektiert, die an den Enden des Tanks angebracht sind. Niederenergetische Myonen können innerhalb des Detektionsvolumens in ein Elektron zerfallen, welches ebenfalls durch einen Lichtblitz ein Signal auslöst. Der zeitliche Abstand zwischen dem Myon- und dem Elektronsignal ist dann die Lebensdauer des Myons im Tank.

## 3 Auswertung

Ausgleichsrechnungen mit den dazugehörigen Fehlern werden mit dem `python`-Paket `SciPy` [1] erstellt, weitere Fehler werden mit dem `python`-Paket `uncertainties` [2] berechnet, welches eine automatische Gauß'sche Fehlerfortpflanzung bereitstellt.

### 3.1 Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers

Die Frequenzabhängigkeit des Linearverstärkers wird untersucht, indem die Verstärkung bei verschiedenen Frequenzen über mehrere Zehnerpotenzen gemessen wird. Dies wird für vier verschiedene Kombinationen von Widerständen durchgeführt. Eine doppelt-logarithmische Darstellung der Frequenzgänge ist in Abbildung 1 gezeigt. Die durchgezogene Linie stellt dabei jeweils den linearen Fit der Form

$$\log_{10} V' = A \cdot \log_{10} \nu + B \quad (3.1.1)$$

an den abfallenden Teil bei hohen Frequenzen dar, wobei  $V' = U_A/U_E$  ist. In Tabelle 1 werden die verwendeten Widerstände, die daraus resultierenden Fitparameter und die Grenzfrequenzen – also die Frequenz, bei der die Verstärkung auf  $V'/\sqrt{2}$  abgefallen ist – zusammengefasst. Das Verstärkung-Bandbreite-Produkt  $\nu_G V'$  ist ebenfalls eingetragen. Der Mittelwert des Verstärkung-Bandbreite-Produkts der vier gemessenen Widerstandskombinationen ist

$$\nu_G \bar{V}' = (833 \pm 37) \text{ Hz},$$

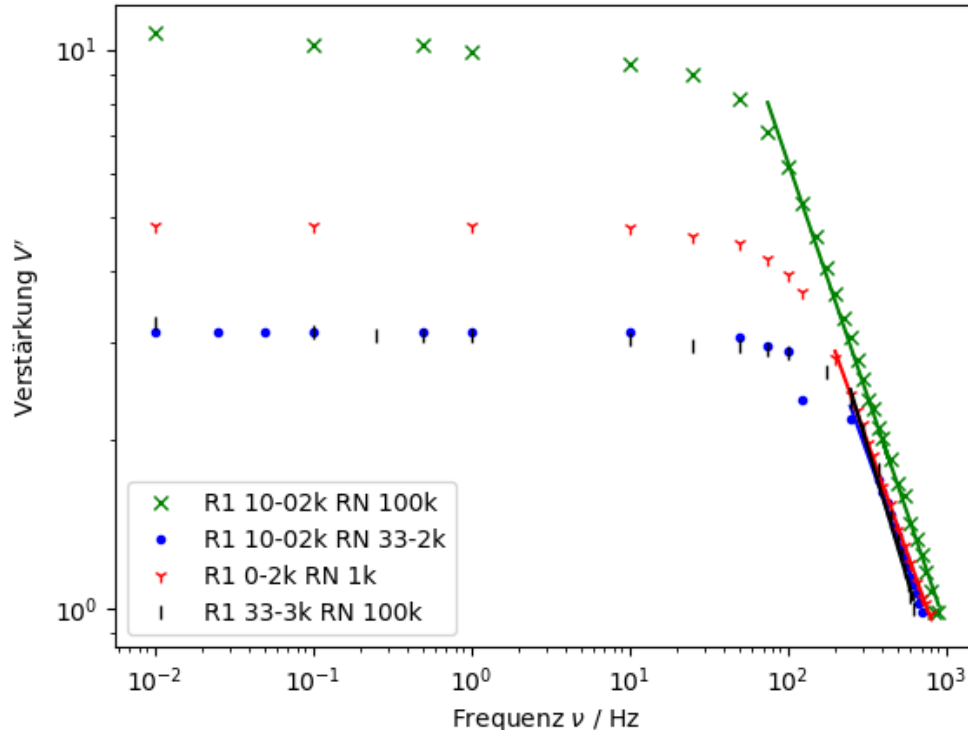
die Abweichungen der einzelnen Werte vom Mittelwert liegen zwischen 1.6% und 6.6%.

Mit Gleichung 1.2.2 kann aus  $V'$  und den beiden Widerständen  $R_1$  und  $R_N$  die Leerlaufverstärkung  $V$  mit

$$V = \frac{R_N + R_1}{\frac{R_N}{V'} - R_1} \quad (3.1.2)$$

abgeschätzt werden. Die entsprechenden Werte sind ebenfalls in Tabelle 1 eingetragen.

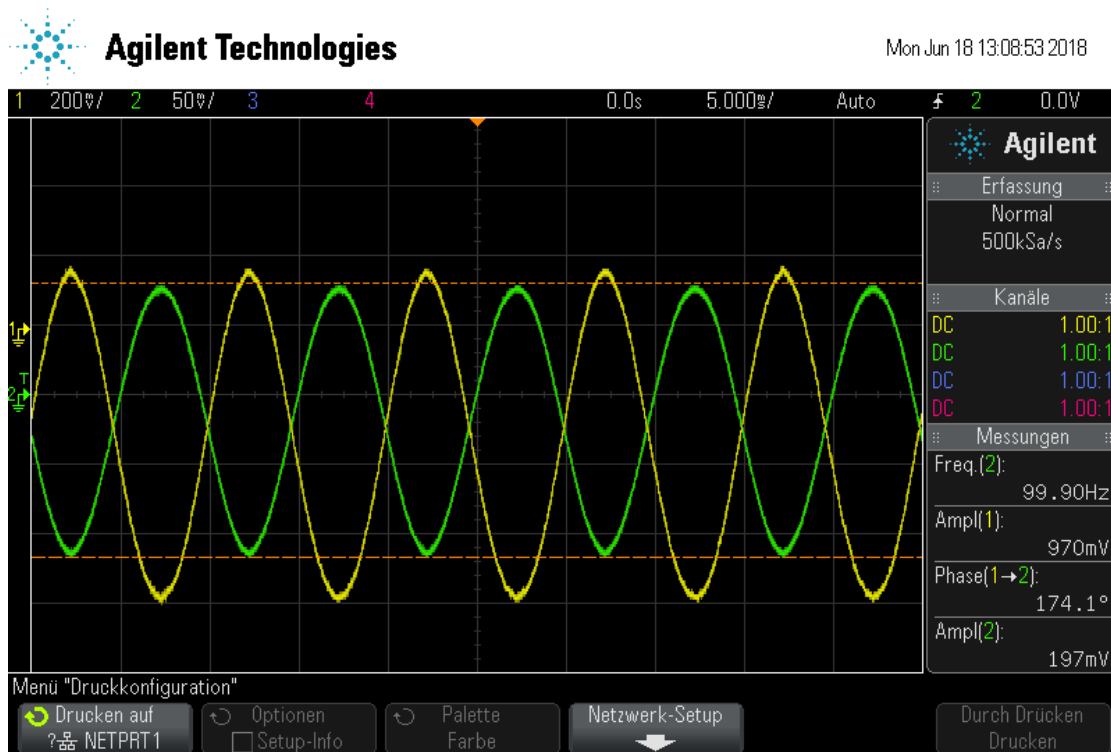
In Abbildung 2 werden beispielhaft ein Sinussignal als Eingangssignal (in grün) und das verstärkte Ausgangssignal (in gelb) als Oszilloskopaufnahme gezeigt. Da das Eingangssignal auf den invertierenden Eingang des Operationsverstärkers gegeben wird, beträgt die Phase zwischen Ein- und Ausgangssignal nahezu  $180^\circ$ , das Eingangssignal wird bei einer Frequenz von 99.90 Hz von 197 mV um einen Faktor von fast 2 auf 970 mV verstärkt.



**Abbildung 1:** Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers - bei kleinen Frequenzen ist die Verstärkung in etwa konstant, nimmt dann aber mit größer werdenden Frequenzen exponentiell ab.

**Tabelle 1:** blub

| $R_1/\text{k}\Omega$ | $R_N/\text{k}\Omega$ | A                | B               | $V'$  | $R_N/R_1$ | $\nu_G/\text{Hz}$ | $\nu_G V'/\text{Hz}$ | V       |
|----------------------|----------------------|------------------|-----------------|-------|-----------|-------------------|----------------------|---------|
| 10.02                | 100.0                | $-0.83 \pm 0.01$ | $2.47 \pm 0.03$ | 10.69 | 9.98      | 80.74             | 862                  | -165.33 |
| 10.02                | 33.2                 | $-0.80 \pm 0.02$ | $2.27 \pm 0.06$ | 3.13  | 3.31      | 262.07            | 820                  | 226.91  |
| 0.20                 | 1.0                  | $-0.79 \pm 0.01$ | $2.28 \pm 0.03$ | 4.85  | 5.00      | 160.60            | 778                  | 194.00  |
| 33.30                | 100.0                | $-0.94 \pm 0.04$ | $2.70 \pm 0.10$ | 3.25  | 3.00      | 269.00            | 873                  | -52.67  |



**Abbildung 2:** Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers - bei kleinen Frequenzen ist die Verstärkung in etwa konstant, nimmt dann aber mit größer werdenden Frequenzen exponentiell ab.

### 3.2 Umkehr-Integrator

Der Fit der Form

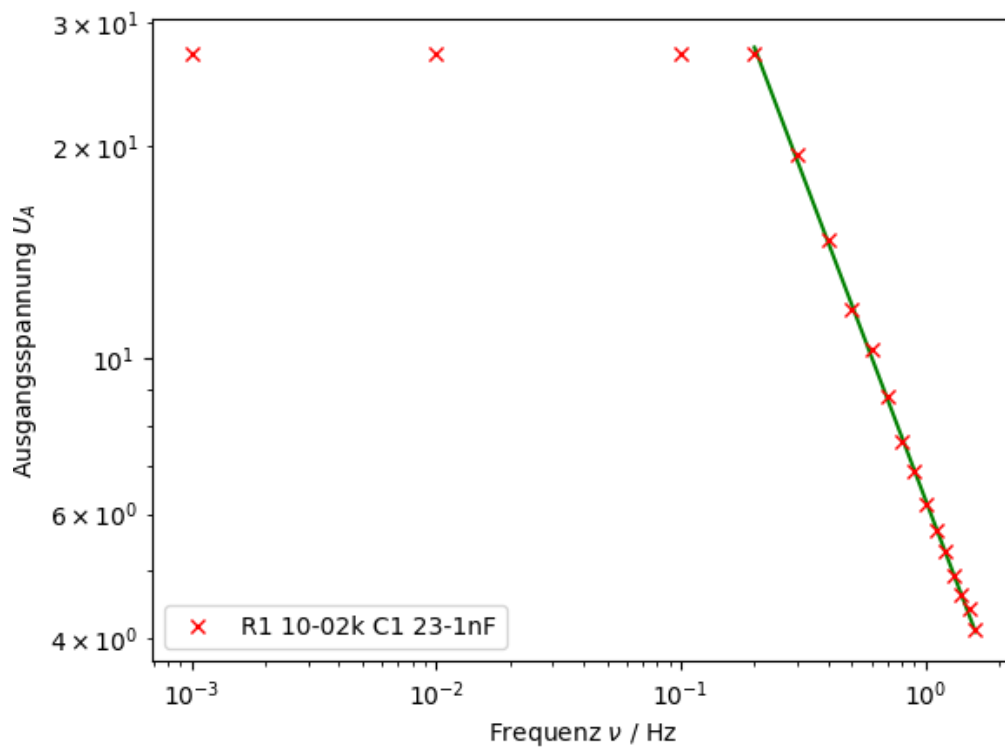
$$\log_{10} U_A = A \cdot \log_{10} \nu + B \quad (3.2.1)$$

liefert die Parameter

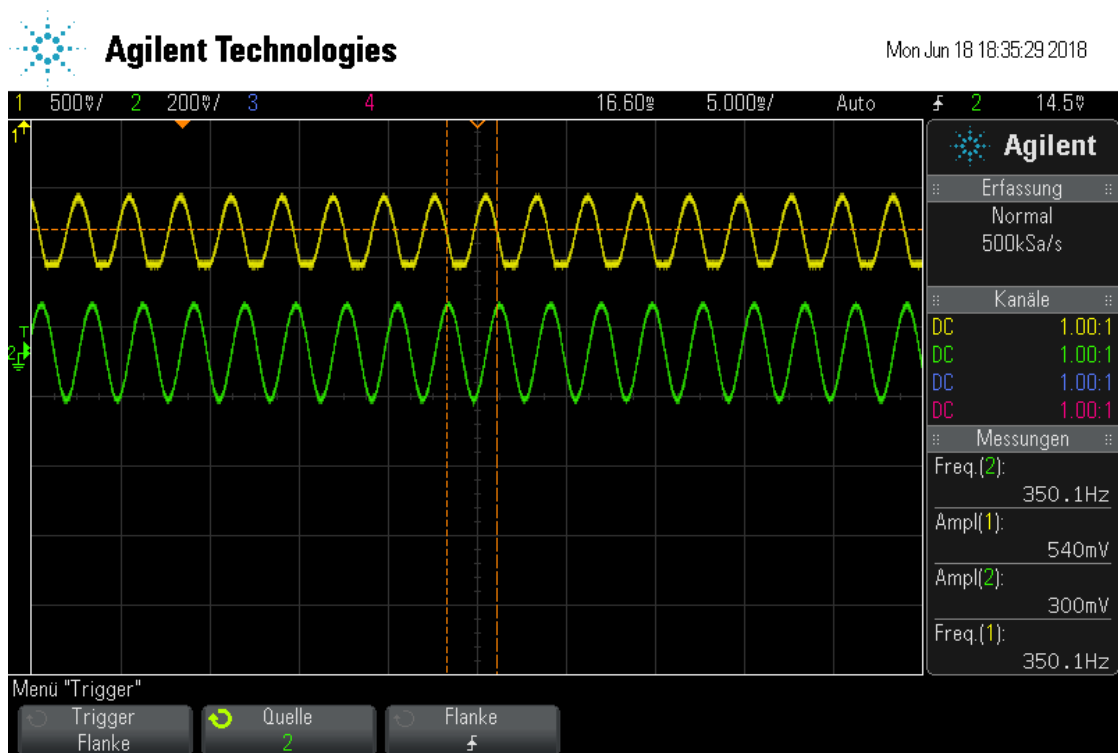
$$A = -0.920 \pm 0.006 \quad \text{und} \quad B = 0.798 \pm 0.002, \quad (3.2.2)$$

die Messwerte mit der linearen Ausgleichsgeraden ist in Abbildung 3 zu sehen. In Abbildung 4, Abbildung 5 und Abbildung 6 ist jeweils zu sehen, welches Ausgangssignal der Umkehr-Integrator liefert, wenn ein Sinus-, Rechteck- bzw. Dreieckssignal auf den Eingang gegeben wird.





**Abbildung 3:** In dem dargestellten Frequenzbereich fällt die Ausgangsspannung nach dem Umkehr-Integrator in der doppelt-logarithmischen Darstellung linear mit der Frequenz ab.



**Abbildung 4:** Der Umkehr-Integrator liefert bei einem Sinussignal einen Cosinus, also wieder einen Sinus mit einer Phasendrehung von  $90^\circ$  gegenüber dem Eingangssignal.

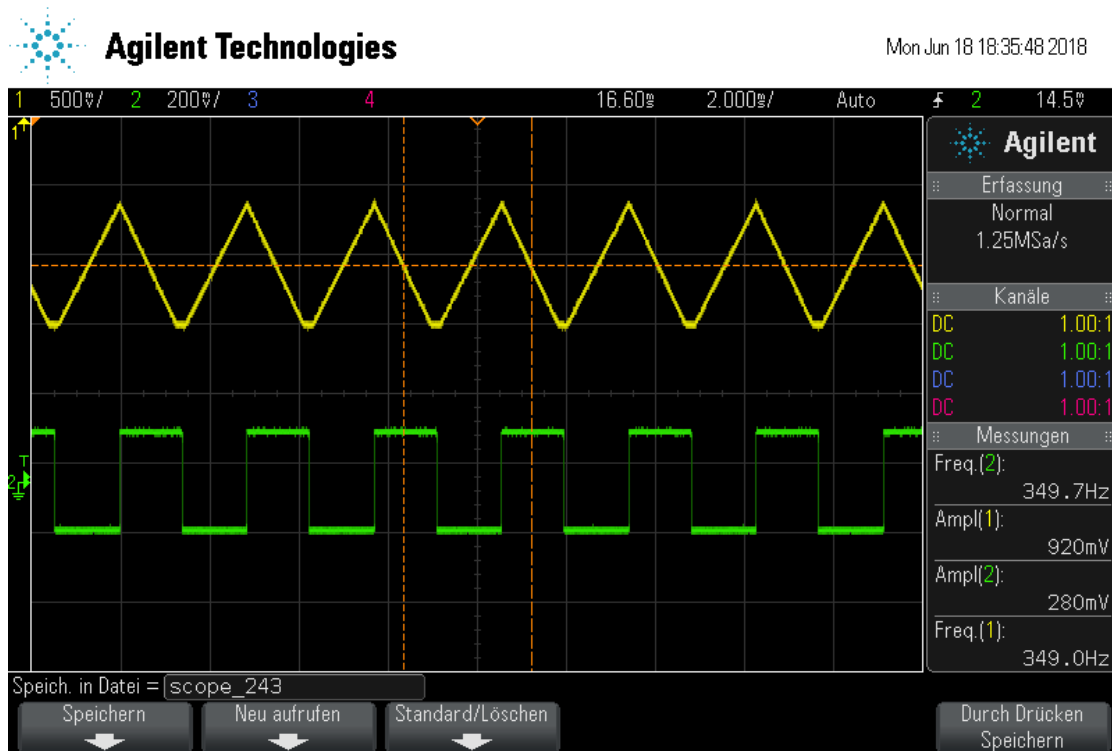


Abbildung 5: Der Umkehr-Integrator liefert bei einem Rechtecksignal ein Dreiecksignal.

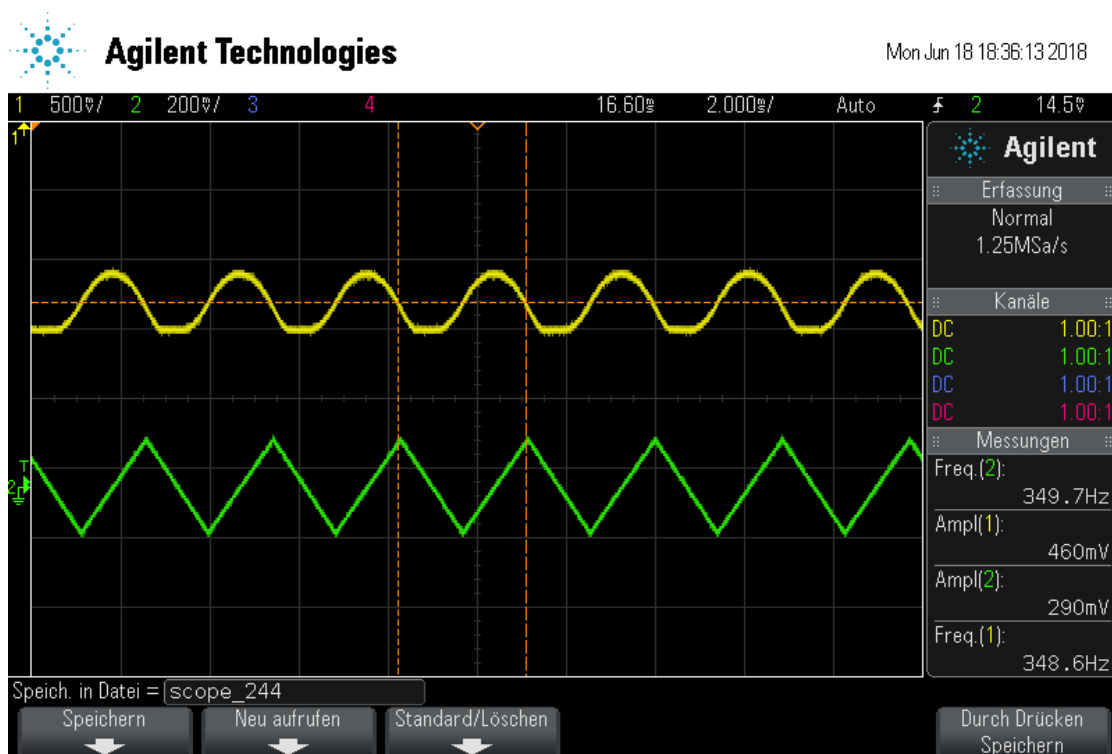


Abbildung 6: Der Umkehr-Integrator liefert bei einem Dreiecksignal näherungsweise eine Abfolge von Parabeln.

### 3.3 Umkehr-Differentiator

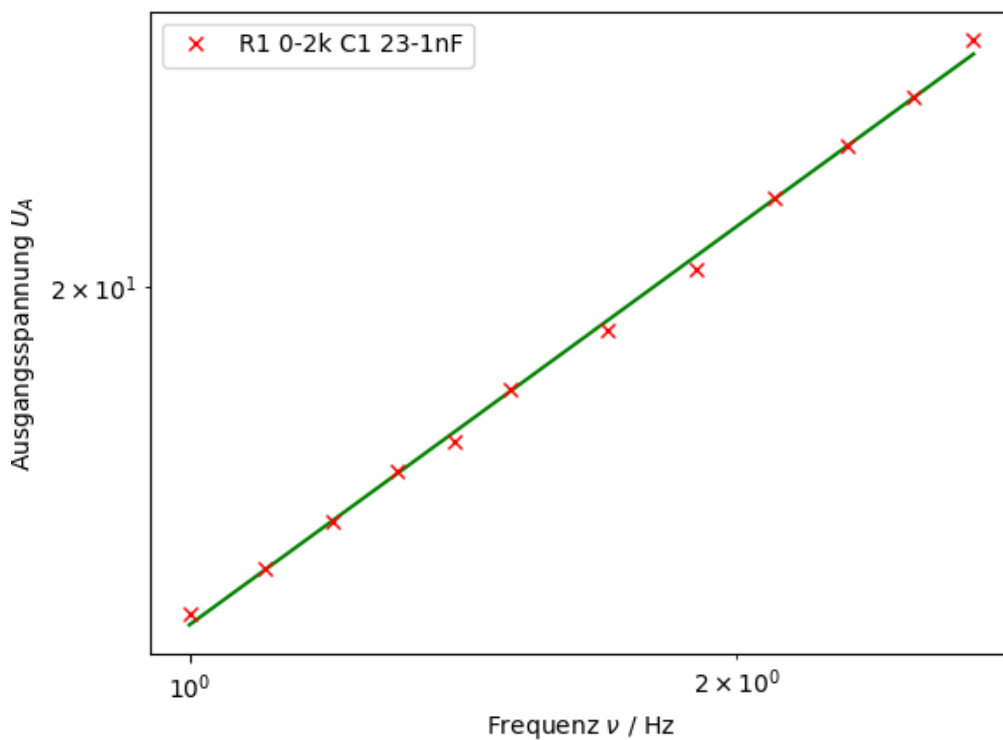
Der Fit der Form

$$\log_{10} U_A = A \cdot \log_{10} \nu + B \quad (3.3.1)$$

liefert die Parameter

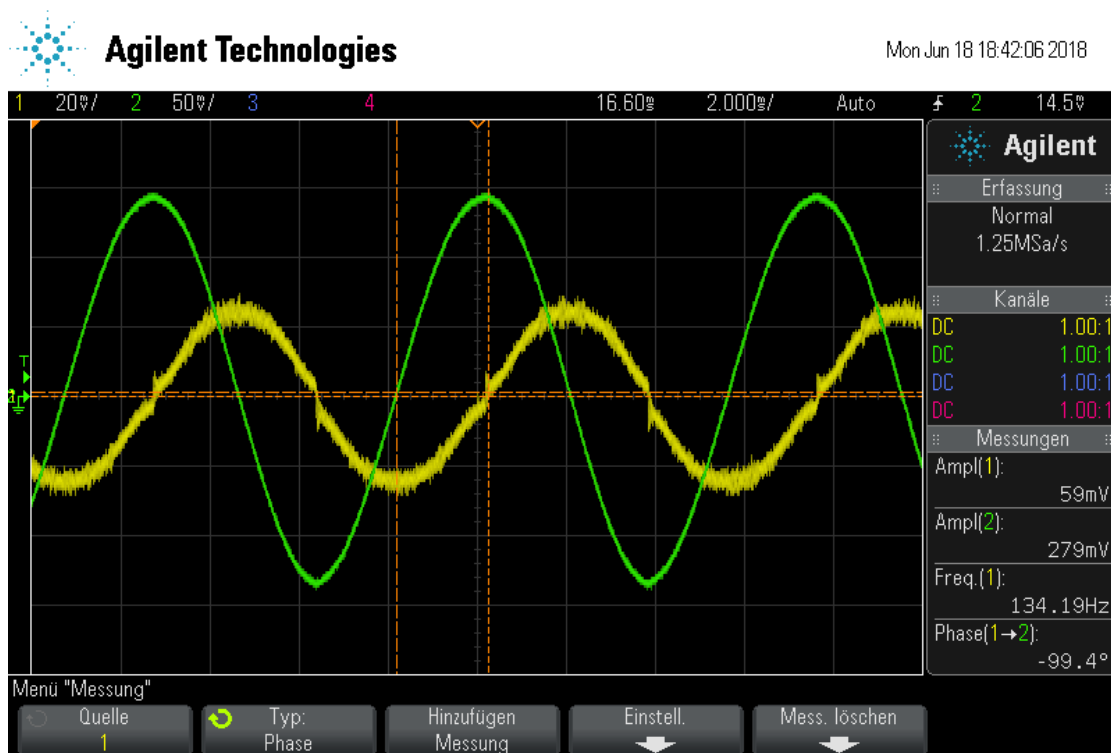
$$A = 0.76 \pm 0.01 \quad \text{und} \quad 1.108 \pm 0.003, \quad (3.3.2)$$

die Messwerte mit der linearen Ausgleichsgeraden ist in Abbildung 7 zu sehen. In Ab-

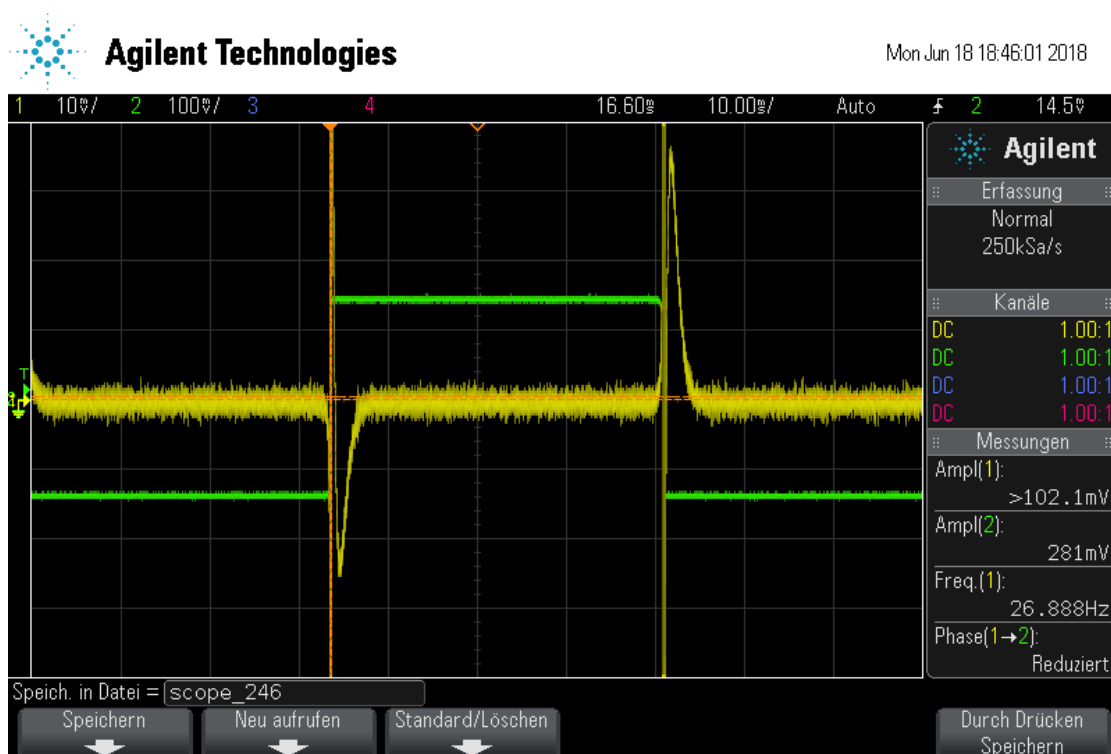


**Abbildung 7:** In dem dargestellten Frequenzbereich steigt die Ausgangsspannung nach dem Umkehr-Differentiator in der doppelt-logarithmischen Darstellung linear mit der Frequenz an.

bildung 8, Abbildung 9 und Abbildung 10 ist jeweils zu sehen, welches Ausgangssignal der Umkehr-Integrator liefert, wenn ein Sinus-, Rechteck- bzw. Dreiecksignal auf den Eingang gegeben wird.



**Abbildung 8:** Der Umkehr-Differentiator liefert bei einem Sinussignal einen Cosinus, also wieder einen Sinus mit einer Phasendrehung von  $90^\circ$  gegenüber dem Eingangssignal.



**Abbildung 9:** Der Umkehr-Differentiator liefert bei einem Rechtecksignal eine Abfolge von Delta-peaks.

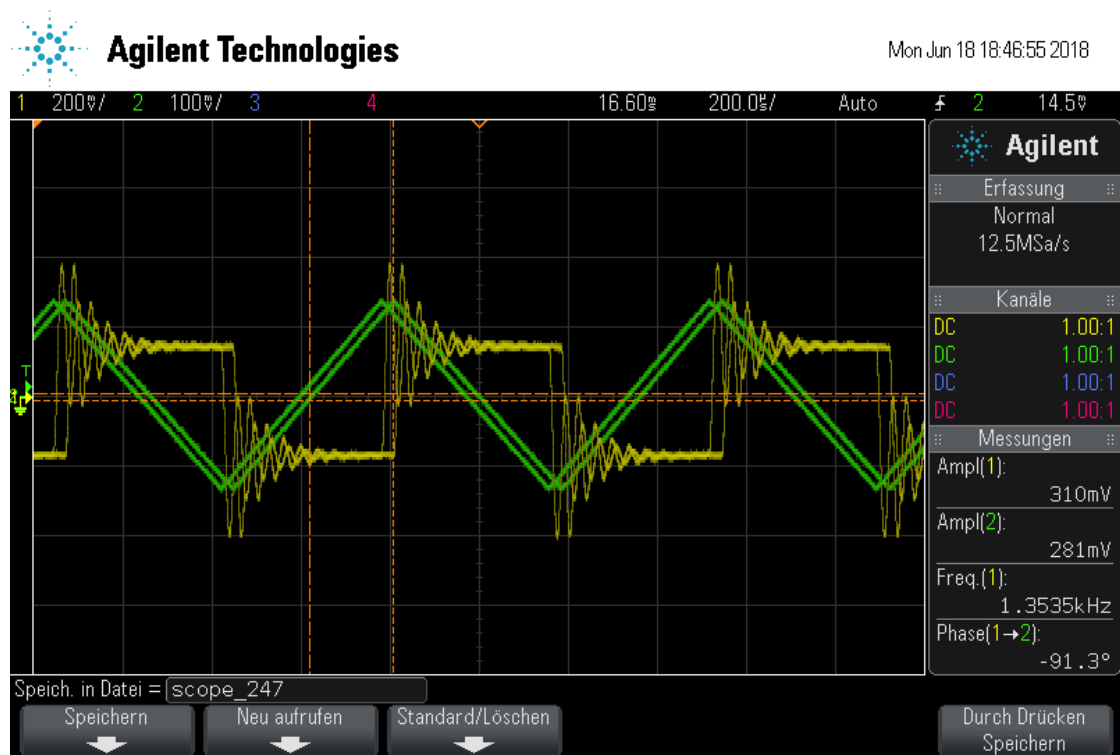


Abbildung 10: Der Umkehr-Differentiator liefert bei einem Dreiecksignal ein Rechtecksignal.

### 3.4 Schmitt-Trigger

Mit Hilfe der Schaltung in ?? wir ein Schmitt-Trigger implementiert. Es werden die Widerstände  $R_P = 10\text{ k}\Omega$  und  $R_1 = 0.2\text{ k}\Omega$  bei einer Frequenz von  $f = 1\text{ kHz}$  benutzt, die doppelte Betriebsspannung ist  $2U_B = 7.86\text{ V}$ . Mit

$$U_{\text{trig,theo}} = U_B \cdot \frac{R_1}{R_P} \quad (3.4.1)$$

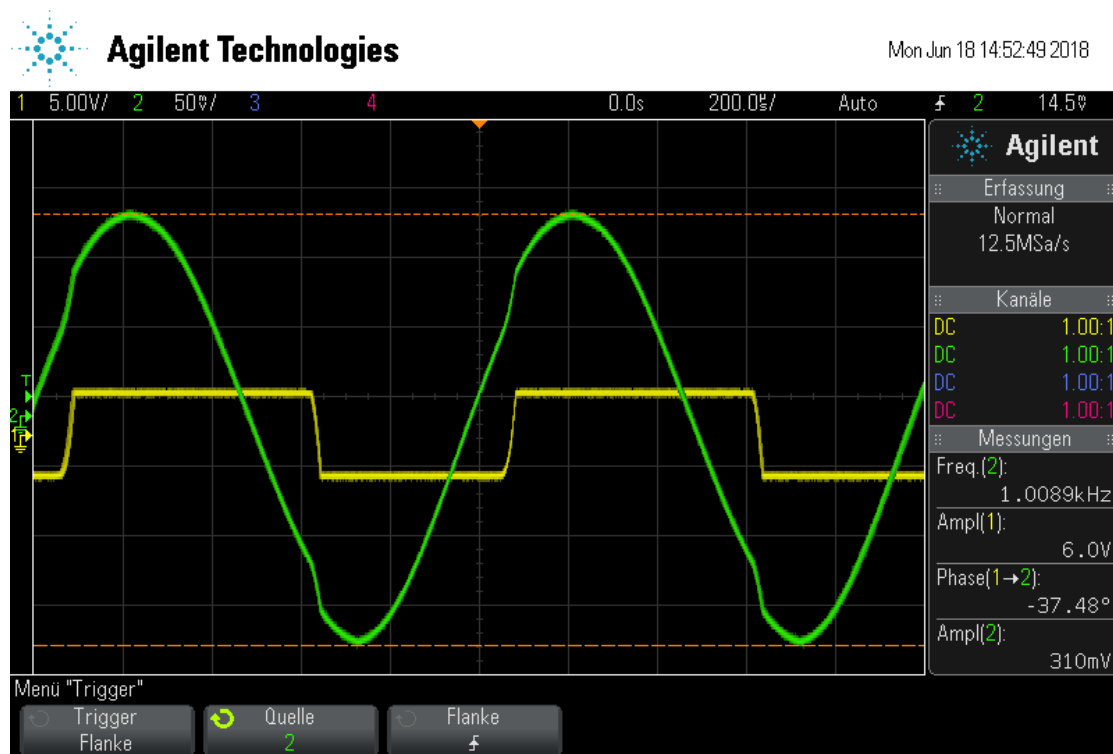
wird die theoretische Triggerschwelle als

$$U_{\text{trig,theo}} \approx 78.6\text{ mV}$$

berechnet. Der gemessene Wert ist

$$U_{\text{trig,exp}} \approx 82\text{ mV}.$$

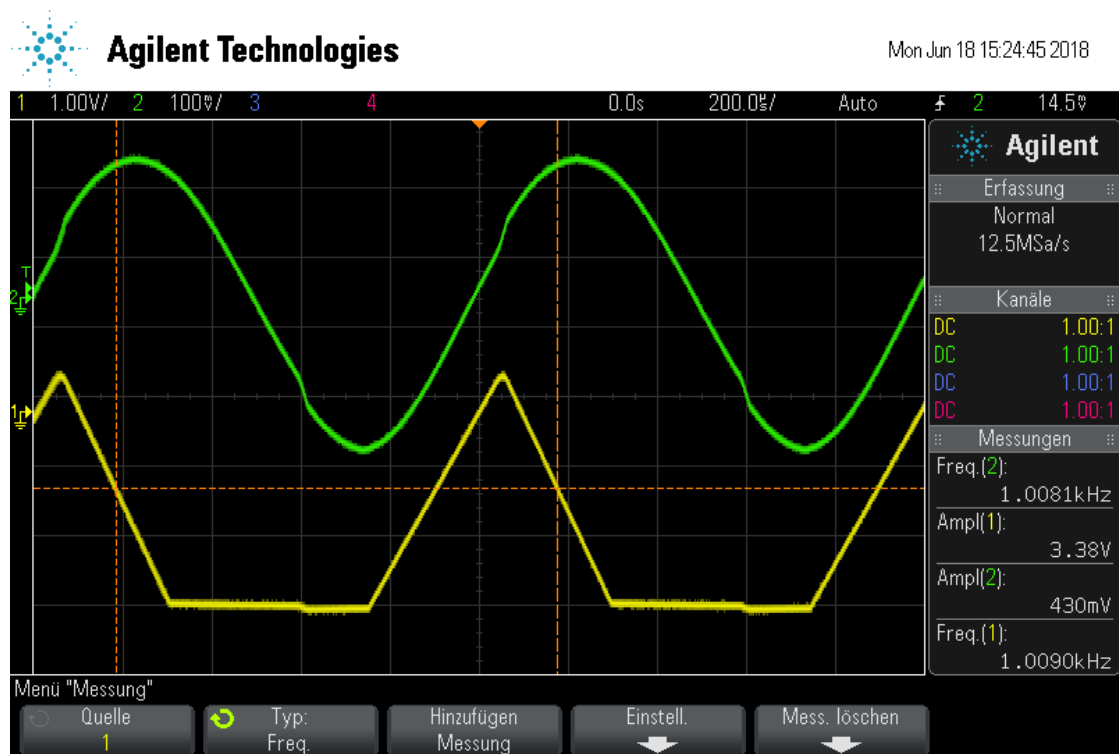
Die Abweichung zwischen theoretischem und experimentellen Wert beträgt 4.3%. Die entsprechende Oszilloskopaufnahme ist in Abbildung 11 zu sehen.



**Abbildung 11:** Durch den Schmitt-Trigger wird ein Ausgangssignal generiert, sobald das Eingangssignal die Triggerschwelle überschritten hat.

### 3.5 Dreiecksgenerator

Zunächst wird eine Sinusschwingung mit der Frequenz  $f_{\text{Sinus}} = 1\text{ kHz}$  auf einen Schmitt-Trigger gegeben. Bei einer Triggerschwelle von  $U_E = 165\text{ mV}$  entsteht ein Rechtecksignal. Ein Integrator macht daraus ein Dreiecksignal, welches bei der Triggerschwelle eine Amplitude von  $U_{\text{Dreieck}} = 2.09\text{ V}$  und ebenfalls eine Frequenz von  $f_{\text{Dreieck}} = 1\text{ kHz}$  hat. Abbildung 12 zeigt das Dreiecksignal bei einer höheren Eingangs- und Ausgangsspannung.



**Abbildung 12:** Mit Hilfe des Schmitt-Triggers wird aus einer Sinusschwingung (grün) zunächst ein Rechtecksignal generiert, aus welchem dann mit einem Integrator ein Dreiecksignal (gelb) gemacht wird.

### 3.6 Gedämpften und ungedämpfte Schwingung

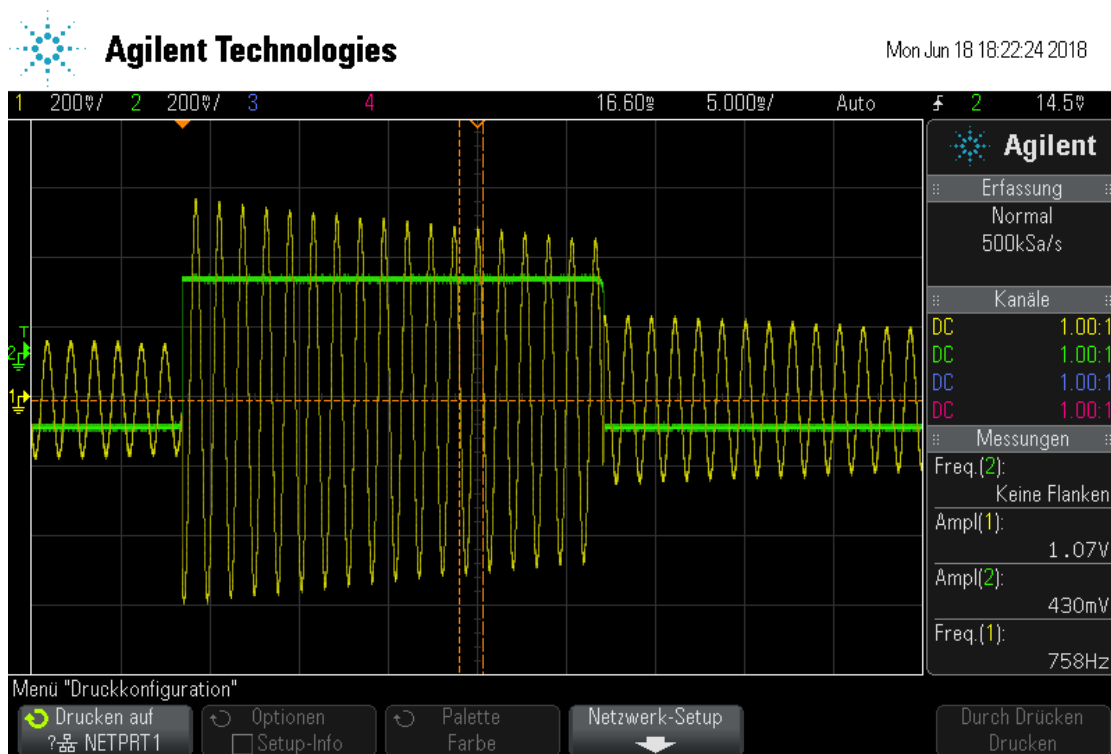


Abbildung 13: Die ungedämpfte Schwingung hat eine Frequenz von  $f = 758 \text{ Hz}$ .

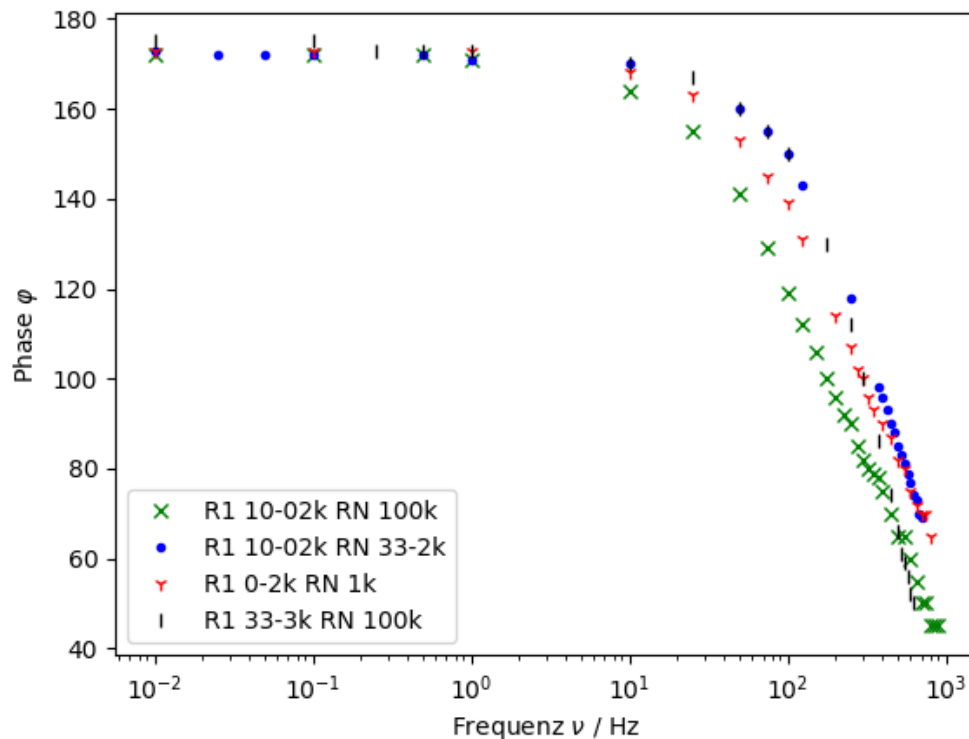
### 3.7 Beziehung zwischen Frequenz und Phase

Die Phase zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz hat einen ähnlichen Verlauf, wie die Verstärkung, sie ist in Abbildung 14. Zunächst ist die Phase konstant und nahezu  $180^\circ$ . Nach einer Frequenz von  $10 \text{ Hz}$  fällt die Phase ab. Das ist mit dem Einsetzen des Tiefpass-Verhaltens des Operationsverstärkers zu erklären; bei hohen Frequenzen sinkt die Verstärkung auf 1 ab. Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses verläuft gemäß

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_g}}, \quad (3.7.1)$$

das heißt, je näher die Frequenz gegen die Grenzfrequenz  $\omega_g$  geht, desto größer ist die Phasendrehung. Der Phasengang eines Operationsverstärkers folgt nicht dem Verlauf eines reinen Tiefpasses, sondern ist abhängig vom Inneren Aufbau, tendentiell lässt sich aber sagen, dass auch hier die Phasendrehung mit größerer Frequenz steigt.





**Abbildung 14:** Bis zu einer Frequenz von 10 Hz ist die Phase relativ konstant bei knapp 180°, danach fällt sie in der halblogarithmischen Darstellung nahezu linear ab.

## 4 Diskussion

Der experimentell bestimmte Wert für die Myonlebensdauer beträgt  $(2,330 \pm 0,002) \mu\text{s}$ . Dieser stimmt mit einem relativen Fehler von 5,6 %, gut mit dem Theoriewert [3] überein. Der Fehler lässt sich eventuell durch eine noch längere Messung reduzieren.

## Literatur

- [1] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. 2018. URL: <http://uncertainties-python-package.readthedocs.io/en/latest/#>.
- [3] C. Patrignani u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Chin. Phys. C* 40.10 (2016), S. 100001. DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.