

Der Operationsverstärker

Paul Becker Alina Nasr-Esfahani
(paul.becker@udo.edu) (alina.esfahani@udo.edu)

Durchführung: 18.06.2018, 1. Abgabe: 16.07.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Ideale und reale Operationsverstärker	2
1.2	Schaltungen mit Operationsverstärker	3
1.2.1	Linearverstärker	3
1.2.2	Elektrometerverstärker	3
1.2.3	Amperemeter	5
1.2.4	Integrator und Differentiator	5
1.2.5	Schmitt-Trigger	7
1.2.6	Signalgenerator	7
1.2.7	Erzeugung von gedämpften Sinusschwingungen	8
2	Durchführung	8
3	Auswertung	9
3.1	Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers	9
3.2	Umkehr-Integrator	11
3.3	Umkehr-Differentiator	14
3.4	Schmitt-Trigger	17
3.5	Dreiecksgenerator	17
3.6	Gedämpften und ungedämpfte Schwingung	18
3.7	Beziehung zwischen Frequenz und Phase	20
4	Diskussion	20

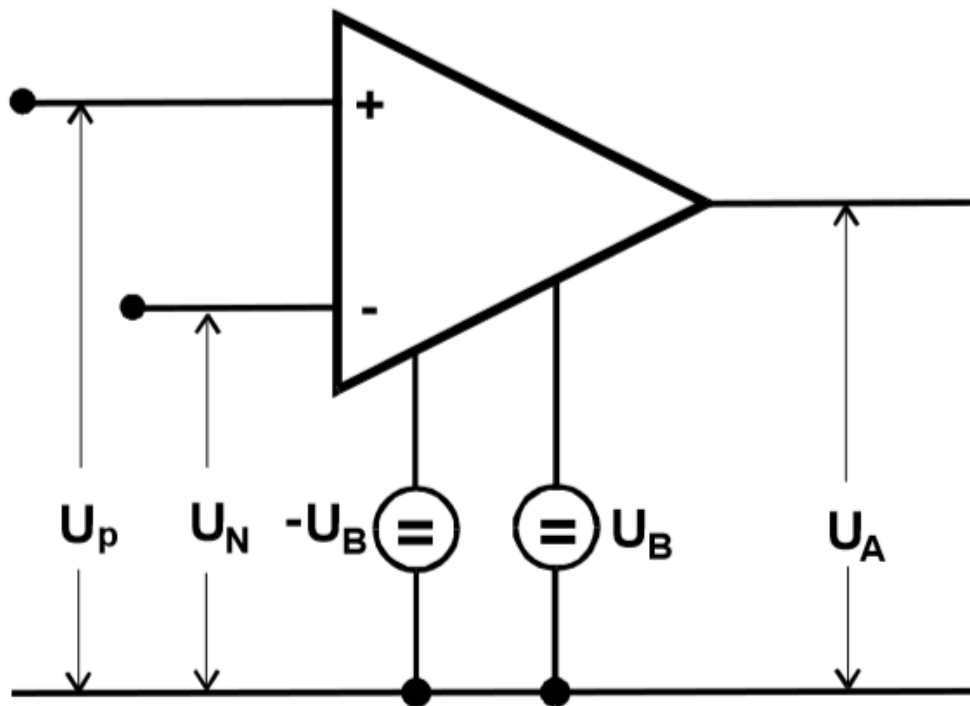


Abbildung 1: Schaltbild eines Operationsverstärkers

1 Theorie

1.1 Ideale und reale Operationsverstärker

Ein Operationsverstärker ist ein gleichstromgekoppelter Differenzverstärker. Die Spannung am Ausgang U_A entspricht der Differenz der Eingangsspannungen U_P (am nicht invertierenden Eingang) sowie U_N (am invertierenden Eingang), die um den Verstärkungsfaktor V verstärkt wird.

$$U_A = V(U_P - U_N) \quad (1.1.1)$$

Das Schaltbild mit den entsprechenden Anschlüssen ist in 1 abgebildet. Die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers kann im Bereich der Betriebsspannungen variieren:

$$-U_B < U_A < U_B \quad (1.1.2)$$

Sollte U_A außerhalb des von den Betriebsspannungen definierten Bereich liegen, so nimmt die Ausgangsspannung den nächstliegenden Wert, also $-U_B$ oder U_B an.

Um den Umgang mit realen Operationsverstärkern bei Berechnungen und in Schaltungen zu vereinfachen, wird das Modell des idealen Operationsverstärkers eingeführt: Der ideale Operationsverstärker zeichnet sich durch eine unendlich große Leerlaufverstärkung, einem unendlichen Eingangswiderstand, sowie einem verschwindenden Eingangswiderstand aus.

Für reale Operationsverstärker gibt es weitere Eigenschaften, die erläutert werden müssen: Sollte an beiden Eingängen die gleiche Spannung U_G anliegen, müsste theoretisch $U_A = 0$ sein. Jedoch beobachtet man auf Grund der Unsymmetrien der beiden

Kanäle eine Ausgangsspannung. Der Quotient aus U_G und U_A wird Gleichtaktverstärkung

$$V_G = \frac{\delta U_A}{\delta U_G} \quad (1.1.3)$$

genannt und ist ein Maß für die Abweichung vom idealen Operationsverstärker. Ferner gibt es Eingangsströme auf Grund der endlichen Eingangswiderstände. Somit ist es möglich den Eingangsruhestrom

$$I_B = \frac{1}{2}(I_P + I_N) \quad (1.1.4)$$

aus den Eingangsströmen I_P (nicht invertierter Eingang) und I_N (invertierter Eingang) zu berechnen.

Außerdem lässt sich der Offsetstrom definieren

$$I_0 = I_P - I_N. \quad (1.1.5)$$

Aus den definierten Größen lässt sich der Differenzeingangswiderstand r_D definieren:

$$r_D = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta U_P}{\delta I_P}, fr U_N = 0 \\ \frac{\delta U_N}{\delta I_N}, fr U_P = 0 \end{array} \right\}. \quad (1.1.6)$$

Auch ist für $U_G = U_P = U_N$ und $I_G = I_P + I_N$ der Gleichakteingangswiderstand

$$r_G = \frac{\delta U_G}{\delta I_G} \quad (1.1.7)$$

1.2 Schaltungen mit Operationsverstärker

1.2.1 Linearverstärker

Da der Operationsverstärker eine große Leerlaufverstärkung besitzt, kann er nur einen kleinen Eingangsspannungsbereich linear verstärken, bevor er an die Grenzen seiner Betriebsspannung stößt und in Sättigung geht. Um den Aussteuerungsbereich zu vergrößern, wird der Operationsverstärker gem. 2 mit einer Gegenkopplung erweitert, mit der das Verstärkungsverhältnis eingestellt werden kann.

Die Verstärkung des Linearverstärkers hat somit die Form

$$V' = -\frac{R_N}{R_1} \quad (1.2.1)$$

bzw. unter Berücksichtigung der Eigenschaften eines realen Operationsverstärkers

$$\frac{1}{V'} = -\frac{U_1}{U_A} = \frac{1}{V} + \frac{R_1}{R_N} \left(1 + \frac{1}{V}\right) \approx \frac{1}{V} + \frac{R_1}{R_N}. \quad (1.2.2)$$

1.2.2 Elektrometerverstärker

Bei Messungen mit hochohmigen Spannungsquellen ist es möglich, dass der geringe Eingangswiderstand des Linearverstärkers die Messung verfälscht. Die Elektrometerverschaltung gem. 3 besitzt diesen Nachteil nicht, da die Eingangsspannung direkt am invertierenden Eingang des Operationsverstärkers anliegt, was für einen hohen Eingangswiderstand sorgt. Hier berechnet sich der Verstärkungsfaktor gem.:

$$V' = \frac{U_A}{U_1} = \frac{R_N + R_1}{R_1}. \quad (1.2.3)$$

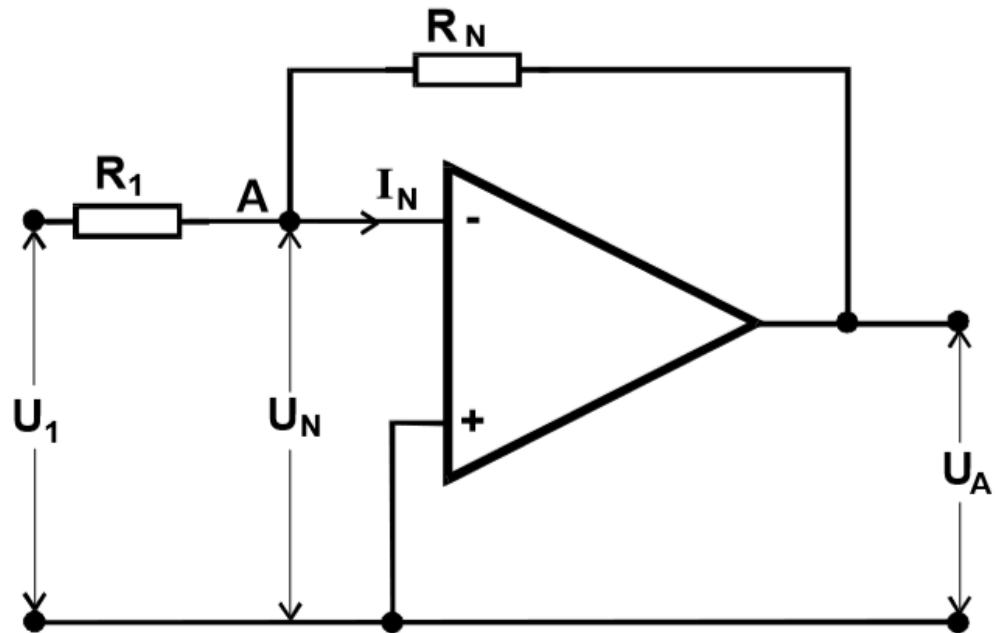


Abbildung 2: Schaltbild eines Operationsverstärkers

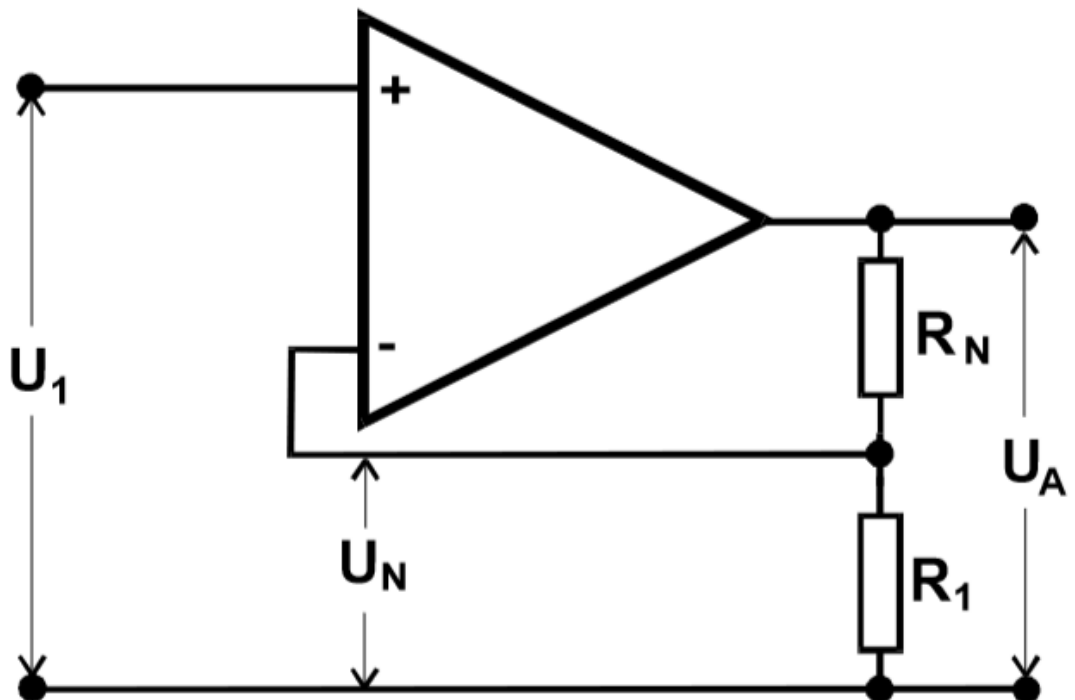


Abbildung 3: Schaltbild eines Operationsverstärkers

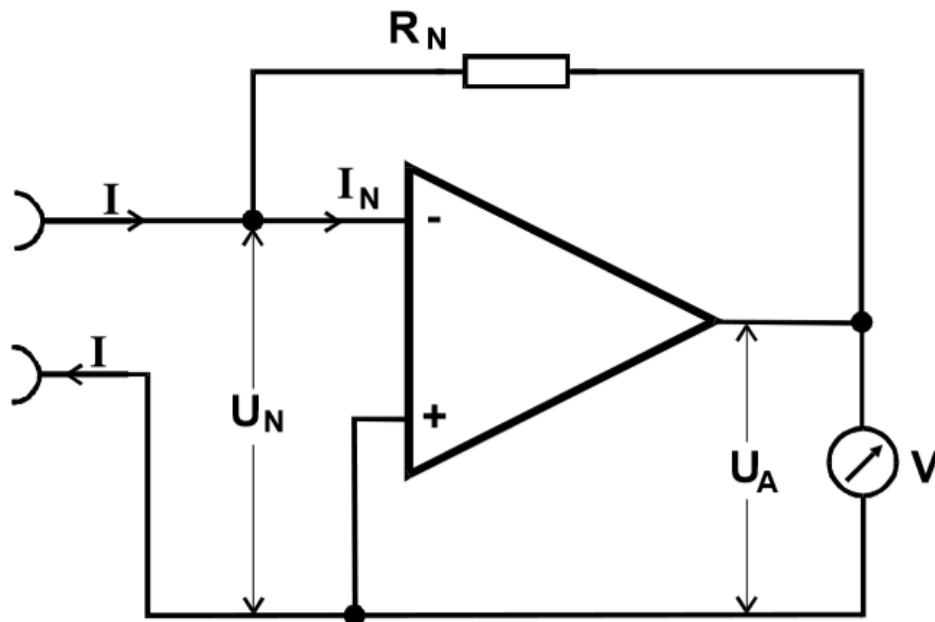


Abbildung 4: Schaltbild eines Operationsverstärkers

1.2.3 Amperemeter

Zur Messung von kleinen Strömen wird ein kleiner Eingangswiderstand benötigt. Dazu kann ein Amperemeter gem ?? verwendet werden, bei dem die Ausgangsspannung proportional zum Eingangsstrom ist:

$$U_A = IR_N. \quad (1.2.4)$$

Der Eingangswiderstand der Schaltung ist

$$r_e = \frac{R_N}{V} \quad (1.2.5)$$

1.2.4 Integrator und Differentiator

Mit der in 5 dargestellten Schaltung wird die Eingangsspannung integriert:

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int U_1(t) dt \quad (1.2.6)$$

Beschreibt U_1 eine Sinusspannung $U_1 = U_0 \sin(\omega t)$, so ist die Amplitude antiproportional zur Frequenz

$$U_A = \frac{U_0}{\omega RC} \cos(\omega t) \quad (1.2.7)$$

Das Gegenstück zum Integrator ist der Differentiator. Dieser wird gem 6 aufgebaut.

$$U_A = -RC \frac{dU_1}{dt} \quad (1.2.8)$$

Für den Fall, dass das Eingangssignal wieder als Sinusspannung vorliegt ergibt sich:

$$U_A = -\omega RC U_0 \cos(\omega t) \quad (1.2.9)$$

Somit ist die Amplitude der Ausgangsspannung proportional zur Frequenz

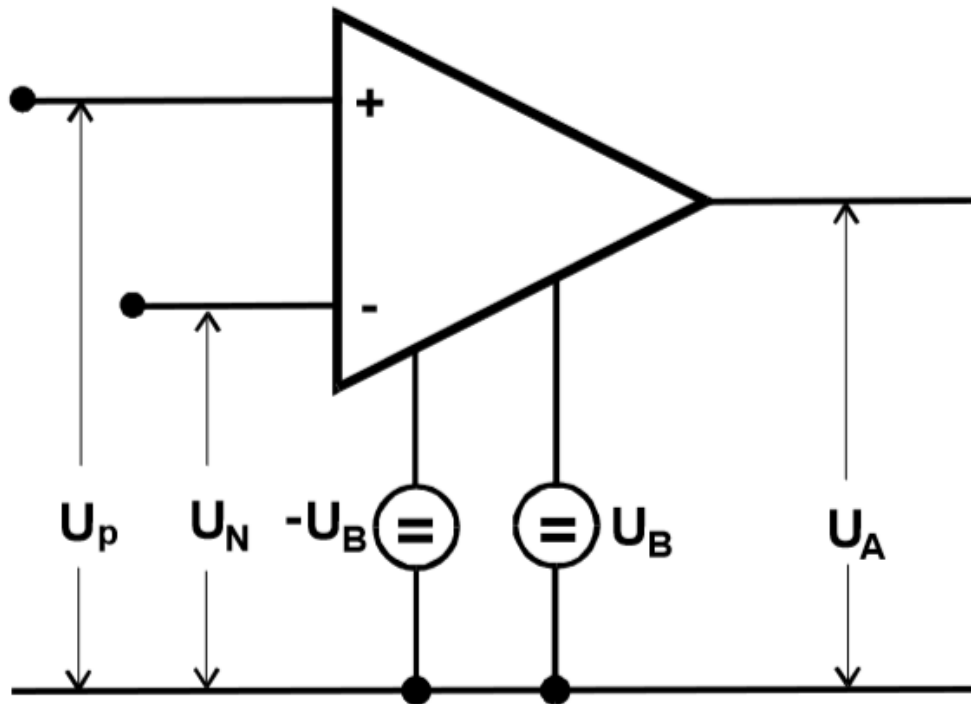


Abbildung 5: Schaltbild eines Operationsverstärkers

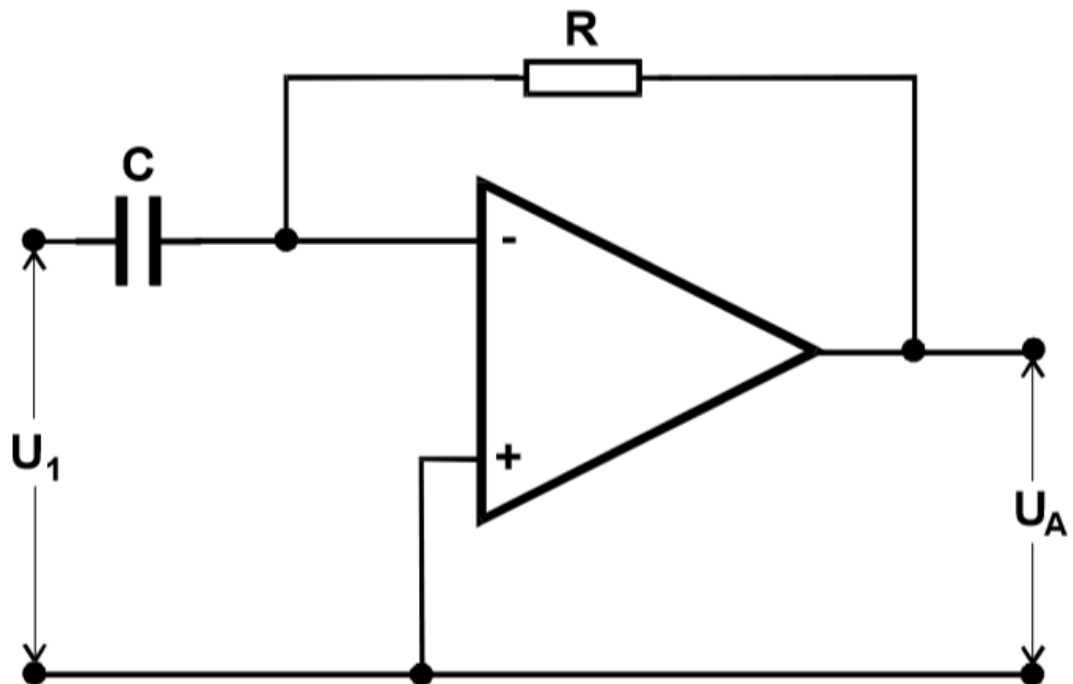


Abbildung 6: Schaltbild eines Operationsverstärkers

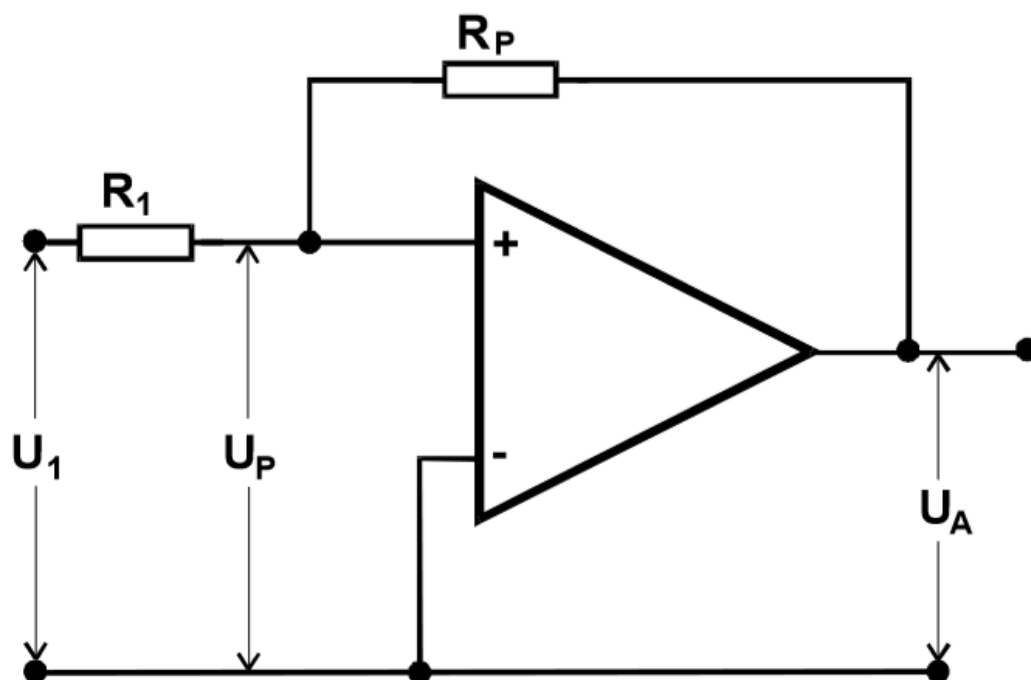


Abbildung 7: Schaltbild eines Operationsverstärkers

1.2.5 Schmitt-Trigger

Der Schmitt-Trigger wird gem. 7 verschaltet. Hier liegt ein Teil der Ausgangsspannung wieder am nicht-invertierten Eingang an. Dadurch steigt die Ausgangsspannung immer weiter an. Die Schaltung bekommt somit ein instabiles Verhalten. Der Schmitt-Trigger hat nur zwei Zustände, in denen seine Ausgangsspannung U_B beträgt, wenn die Eingangsspannung $\frac{R_1}{R_P} U_B$ überschreitet oder $-U_B$ wenn die Eingangsspannung $-\frac{R_1}{R_P} U_B$ unterschreitet. Der Schmitt-Trigger ist daher ein nützliches Element für binäre Logik und Signalgeneratoren.

1.2.6 Signalgenerator

In 8 ist der Aufbau eines Signalgenerators gezeigt. Dieser besteht aus einem Schmitt-Trigger und einem Integrator. Der Integrator integriert die durch den Schmitt-Trigger erzeugten Rechteck-Spannungen, was zu einem Dreieck-Signal führt, wobei der Ausgang des Integrators gleichzeitig der Eingang des Schmitt-Triggers ist, sodass dieser regelmäßig an der Spitze des Dreieck-Signals den Zustand ändert.

Die Integration erfolgt folgendermaßen:

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int_0^{\frac{T}{2}} U_E(t') dt' = -\frac{1}{RC} U_B \frac{T}{2} \quad (1.2.10)$$

Da diese Spannung der Differenz zwischen den beiden Schwellenwerten des Schmitt-Triggers entspricht, ist

$$U_A = 2U_B \frac{R_1}{R_P} \quad (1.2.11)$$

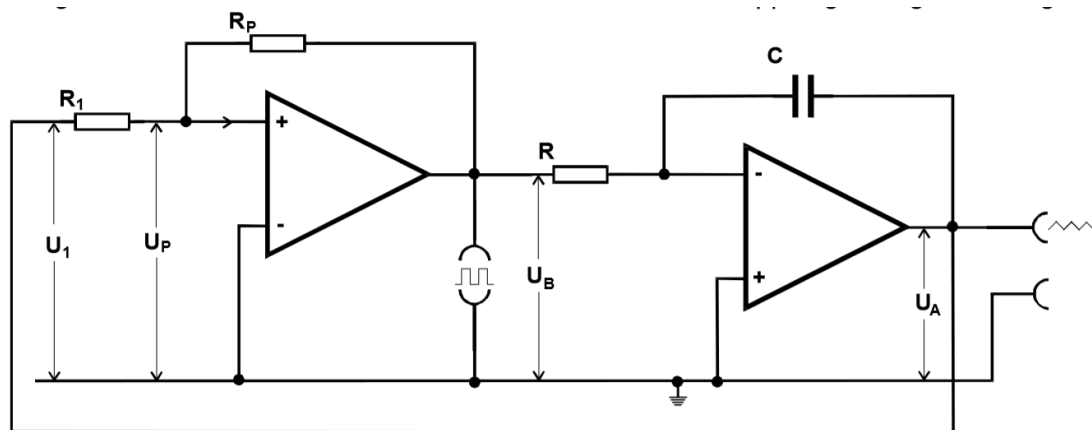


Abbildung 8: Schaltbild eines Operationsverstärkers

Diese beiden Gleichung ergeben mit der Periodendauer T und der Frequenz f :

$$f = \frac{R_P}{4RCR_1} \quad (1.2.12)$$

1.2.7 Erzeugung von gedämpften Sinusschwingungen

Es wird ein Generator verwendet, der eine Sinusschwingung erzeugt, die mit einer abfallenden Exponentialfunktion überlagert ist. Die Schaltung ist in 9 dargestellt.

Die Schaltung besitzt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U_A}{dt^2} - \frac{\nu}{10RC} \frac{dU_A}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} U_A = 0 \quad (1.2.13)$$

mit der Lösung

$$U_A(t) = U_0 \exp\left(\frac{\nu t}{20RC}\right) \sin\left(\frac{t}{RC}\right) \quad (1.2.14)$$

Mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi RC \quad (1.2.15)$$

und der Abklingdauer

$$\tau = \frac{20RC}{\nu}. \quad (1.2.16)$$

2 Durchführung

Die Myonen, die gemessen werden sollen, entstehen größtenteils aus Pionzerfällen in der oberen Atmosphäre. Aufgrund ihrer relativistischen Energie erreichen sie den Erdboden. Durch Wechselwirkung mit Materie geben sie einen Teil ihrer kinetischen Energie ab. Bei Durchgang durch einen Szintillator in einem Edeltank regt die abgegebene Energie das Szintillatormaterial an, sodass bei der Rückkehr in den Grundzustand Photonen im kurzwelligen sichtbaren bis UV-Bereich emittiert werden. Diese Photonen werden mit zwei Sekundärelektronenvervielfachern (SEV) detektiert, die an den Enden des Tanks angebracht sind. Niederenergetische Myonen können innerhalb des Detektionsvolumen

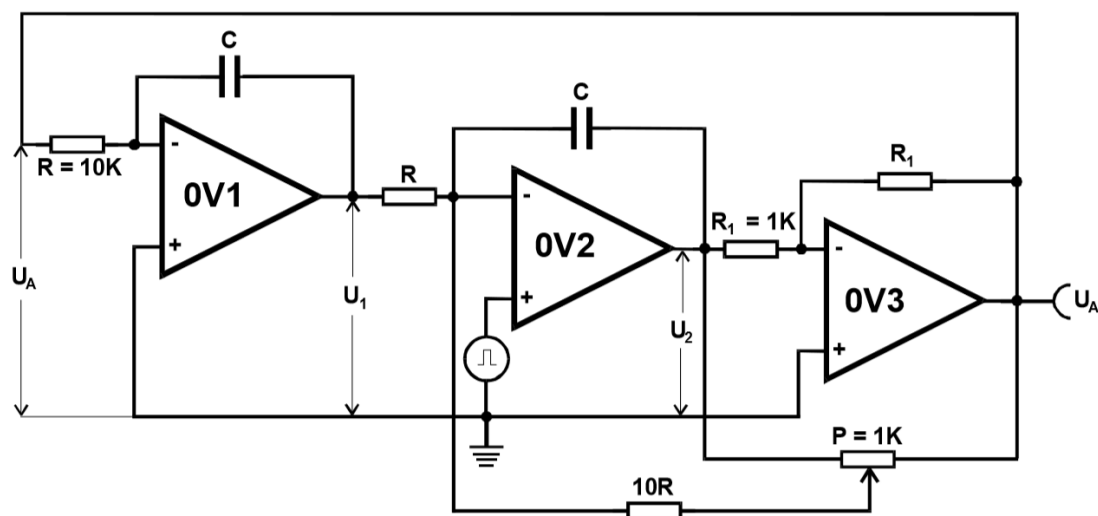


Abbildung 9: Schaltbild eines Operationsverstärkers

in ein Elektron zerfallen, welches ebenfalls durch einen Lichtblitz ein Signal auslöst. Der zeitliche Abstand zwischen dem Myon- und dem Elektronsignal ist dann die Lebensdauer des Myons im Tank.

3 Auswertung

Ausgleichsrechnungen mit den dazugehörigen Fehlern werden mit dem python-Paket SciPy [1] erstellt, weitere Fehler werden mit dem python-Paket uncertainties [2] berechnet, welches eine automatische Gauß'sche Fehlerfortpflanzung bereitstellt.

3.1 Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers

Die Frequenzabhängigkeit des Linearverstärkers wird untersucht, indem die Verstärkung bei verschiedenen Frequenzen über mehrere Zehnerpotenzen gemessen wird. Dies wird für vier verschiedene Kombinationen von Widerständen durchgeführt. Eine doppelt-logarithmische Darstellung der Frequenzgänge ist in Abbildung 10 gezeigt. Die durchgezogene Linie stellt dabei jeweils den linearen Fit der Form

$$\log_{10} V' = A \cdot \log_{10} \nu + B \quad (3.1.1)$$

an den abfallenden Teil bei hohen Frequenzen dar, wobei $V' = U_A/U_E$ ist. In Tabelle 1 werden die verwendeten Widerstände, die daraus resultierenden Fitparameter und die Grenzfrequenzen – also die Frequenz, bei der die Verstärkung auf $V'/\sqrt{2}$ abgefallen ist – zusammengefasst. Das Verstärkung-Bandbreite-Produkt $\nu_G V'$ ist ebenfalls eingetragen. Der Mittelwert des Verstärkung-Bandbreite-Produkts der vier gemessenen Widerstandskombinationen ist

$$\bar{\nu}_G V' = (833 \pm 37) \text{ Hz},$$

die Abweichungen der einzelnen Werte vom Mittelwert liegen zwischen 1.6% und 6.6%. Mit Gleichung 1.2.2 kann aus V' und den beiden Widerständen R_1 und R_N die Leerlaufverstärkung V mit

$$V = \frac{R_N + R_1}{\frac{R_N}{V'} - R_1} \quad (3.1.2)$$

abgeschätzt werden. Die entsprechenden Werte sind ebenfalls in Tabelle 1 eingetragen.

In Abbildung 11 werden beispielhaft ein Sinussignal als Eingangssignal (in grün) und das verstärkte Ausgangssignal (in gelb) als Oszilloskopaufnahme gezeigt. Da das Eingangssignal auf den invertierenden Eingang des Operationsverstärkers gegeben wird, beträgt die Phase zwischen Ein- und Ausgangssignal nahezu 180° , das Eingangssignal wird bei einer Frequenz von 99.90 Hz von 197 mV um einen Faktor von fast 2 auf 970 mV verstärkt.

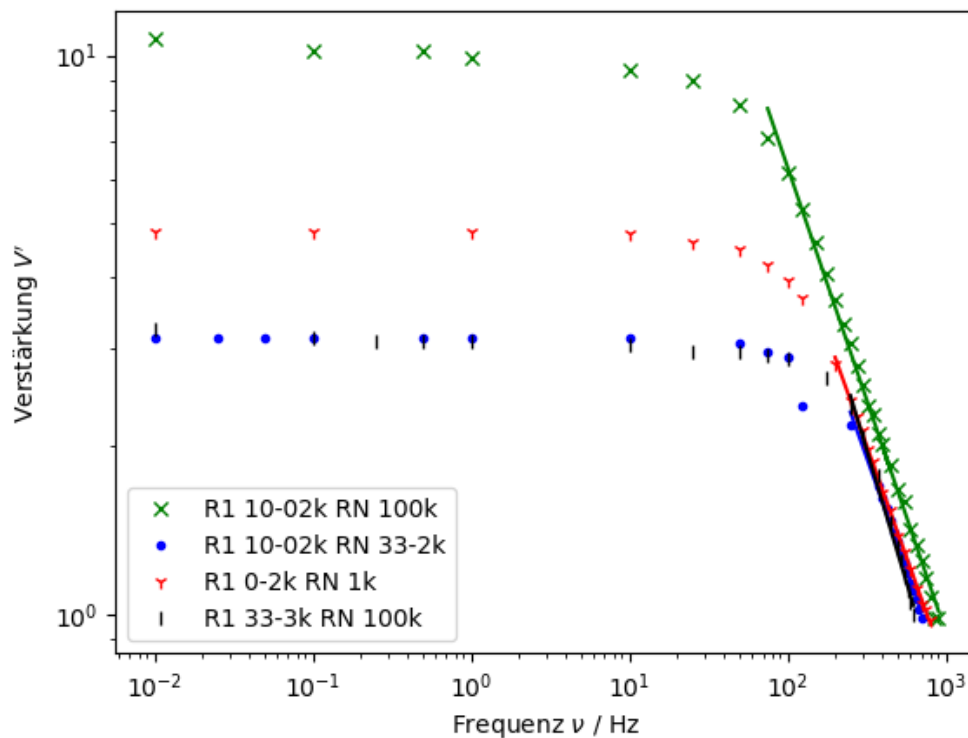


Abbildung 10: Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers - bei kleinen Frequenzen ist die Verstärkung in etwa konstant, nimmt dann aber mit größer werdenden Frequenzen exponentiell ab.

Tabelle 1: Zusammenfassung der Messergebnisse des Linearverstärkers.

$R_1/\text{k}\Omega$	$R_N/\text{k}\Omega$	A	B	V'	R_N/R_1	ν_G/Hz	$\nu_G V'/\text{Hz}$	V
10.02	100.0	-0.83 ± 0.01	2.47 ± 0.03	10.69	9.98	80.74	862	-165.33
10.02	33.2	-0.80 ± 0.02	2.27 ± 0.06	3.13	3.31	262.07	820	226.91
0.20	1.0	-0.79 ± 0.01	2.28 ± 0.03	4.85	5.00	160.60	778	194.00
33.30	100.0	-0.94 ± 0.04	2.70 ± 0.10	3.25	3.00	269.00	873	-52.67

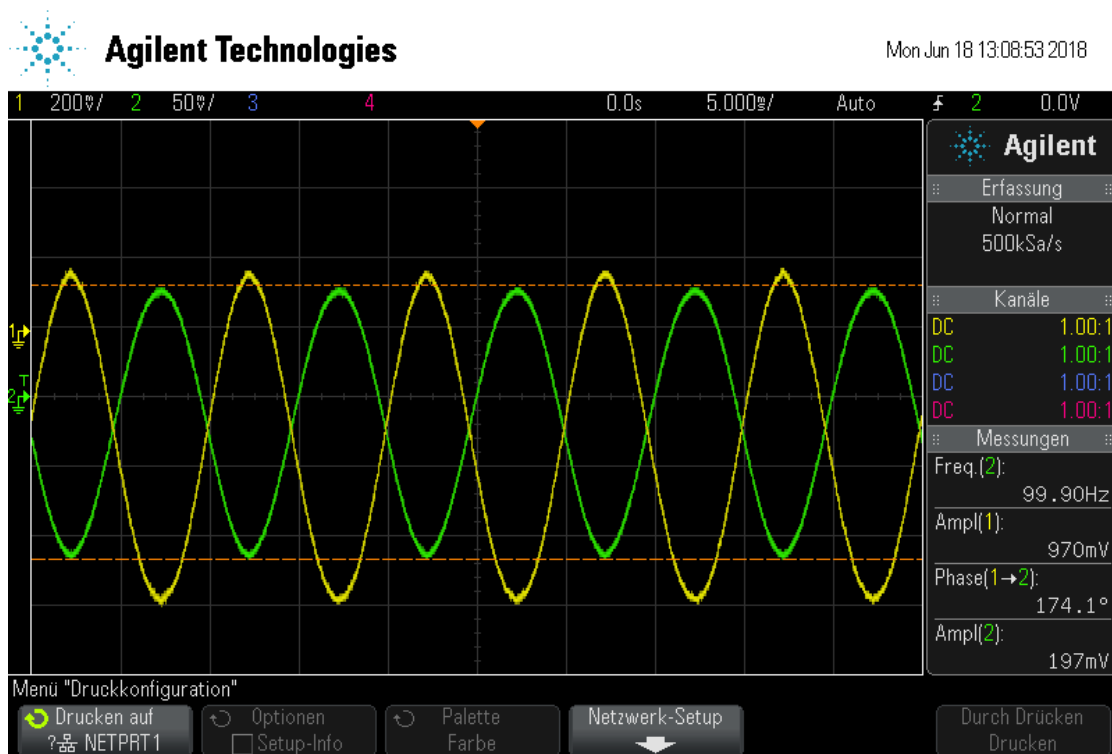


Abbildung 11: Frequenzgang eines gegengekoppelten Verstärkers - bei kleinen Frequenzen ist die Verstärkung in etwa konstant, nimmt dann aber mit größer werdenden Frequenzen exponentiell ab.

3.2 Umkehr-Integrator

Der Fit der Form

$$\log_{10} U_A = A \cdot \log_{10} \nu + B \quad (3.2.1)$$

liefert die Parameter

$$A = -0.920 \pm 0.006 \quad \text{und} \quad B = 0.798 \pm 0.002, \quad (3.2.2)$$

die Messwerte mit der linearen Ausgleichsgeraden ist in Abbildung 12 zu sehen. In Abbildung 13, Abbildung 14 und Abbildung 15 ist jeweils zu sehen, welches Ausgangssignal der Umkehr-Integrator liefert, wenn ein Sinus-, Rechteck- bzw. Dreieckssignal auf den Eingang gegeben wird.

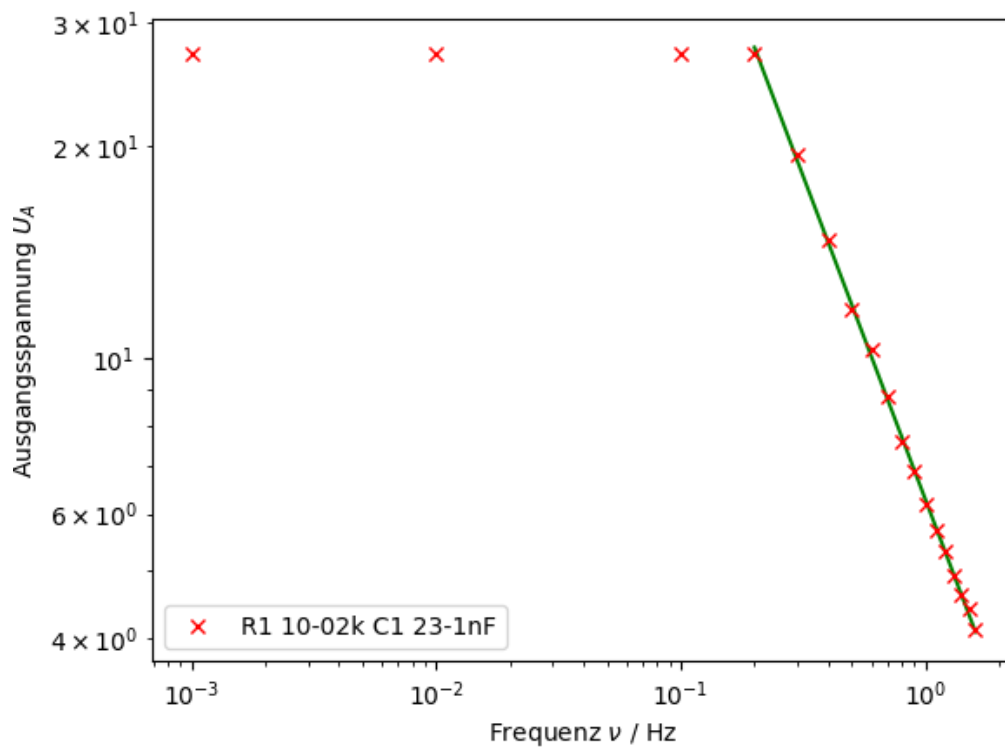


Abbildung 12: In dem dargestellten Frequenzbereich fällt die Ausgangsspannung nach dem Umkehr-Integrator in der doppelt-logarithmischen Darstellung linear mit der Frequenz ab.

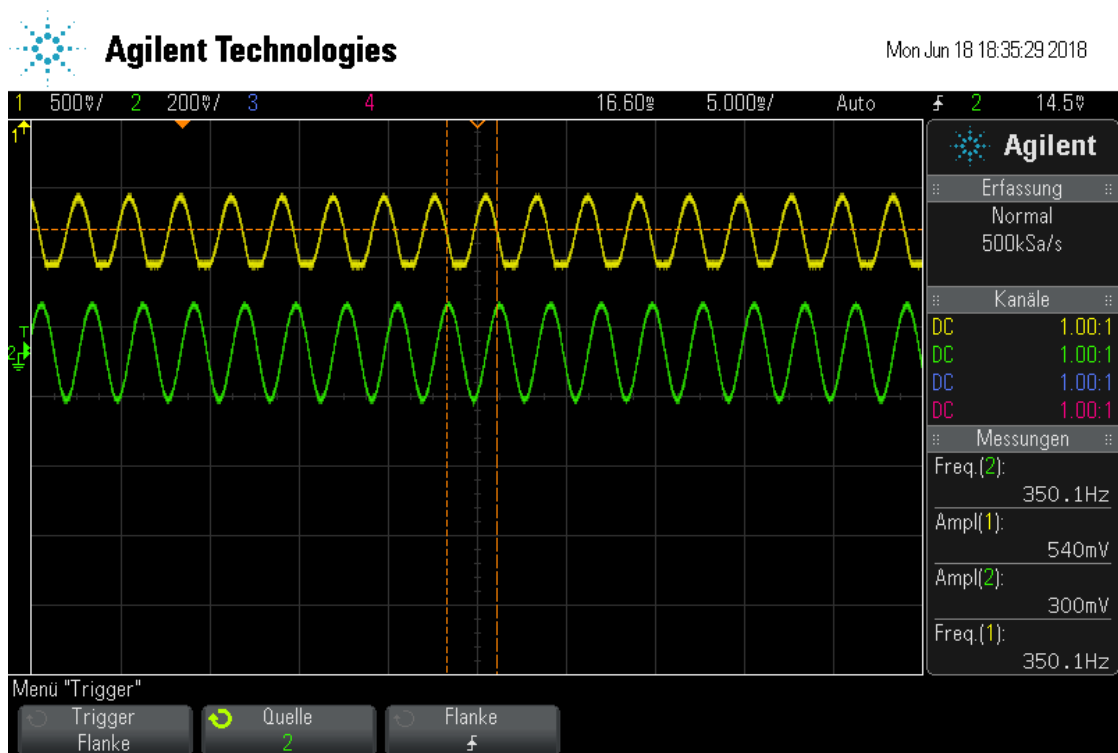


Abbildung 13: Der Umkehr-Integrator liefert bei einem Sinussignal einen Cosinus, also wieder einen Sinus mit einer Phasendrehung von 90° gegenüber dem Eingangssignal.

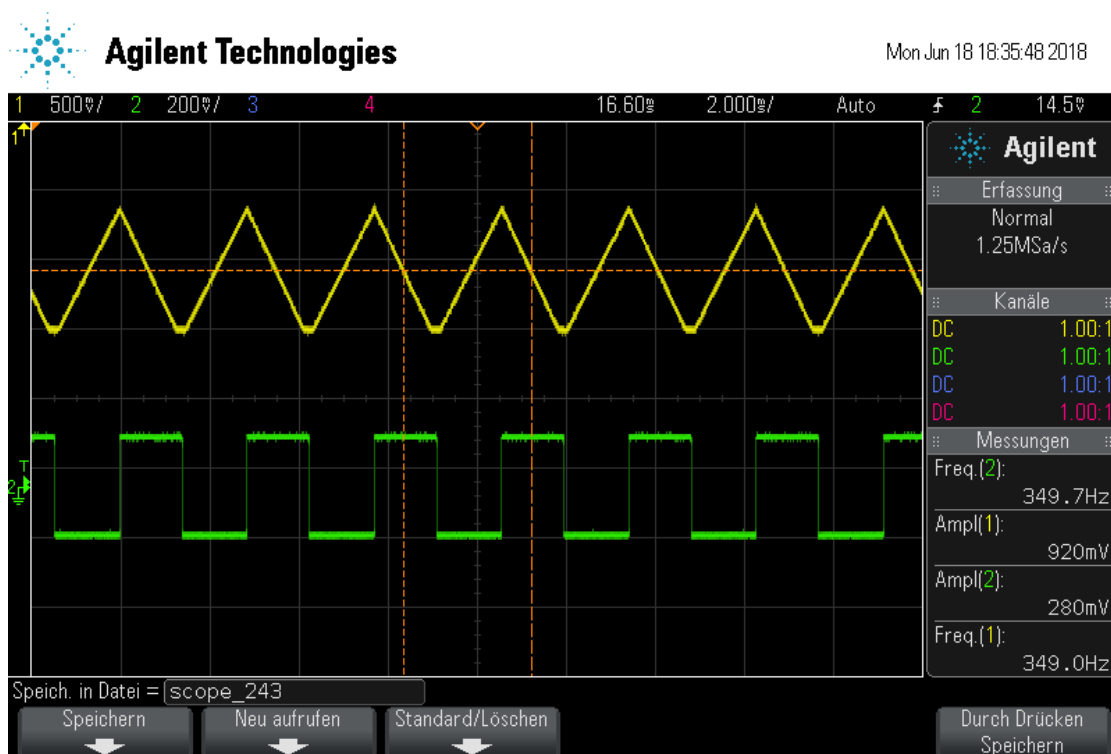


Abbildung 14: Der Umkehr-Integrator liefert bei einem Rechtecksignal ein Dreiecksignal.

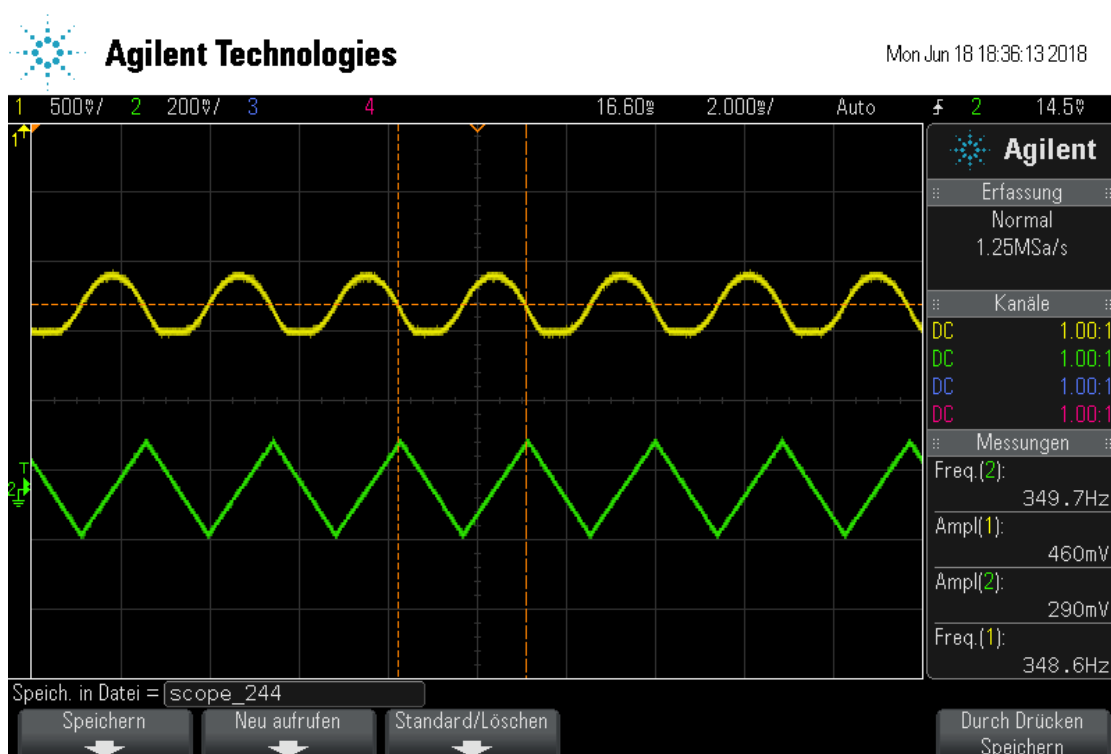


Abbildung 15: Der Umkehr-Integrator liefert bei einem Dreiecksignal näherungsweise eine Abfolge von Parabeln.

3.3 Umkehr-Differentiator

Der Fit der Form

$$\log_{10} U_A = A \cdot \log_{10} \nu + B \quad (3.3.1)$$

liefert die Parameter

$$A = 0.76 \pm 0.01 \quad \text{und} \quad 1.108 \pm 0.003, \quad (3.3.2)$$

die Messwerte mit der linearen Ausgleichsgeraden ist in Abbildung 16 zu sehen. In Ab-

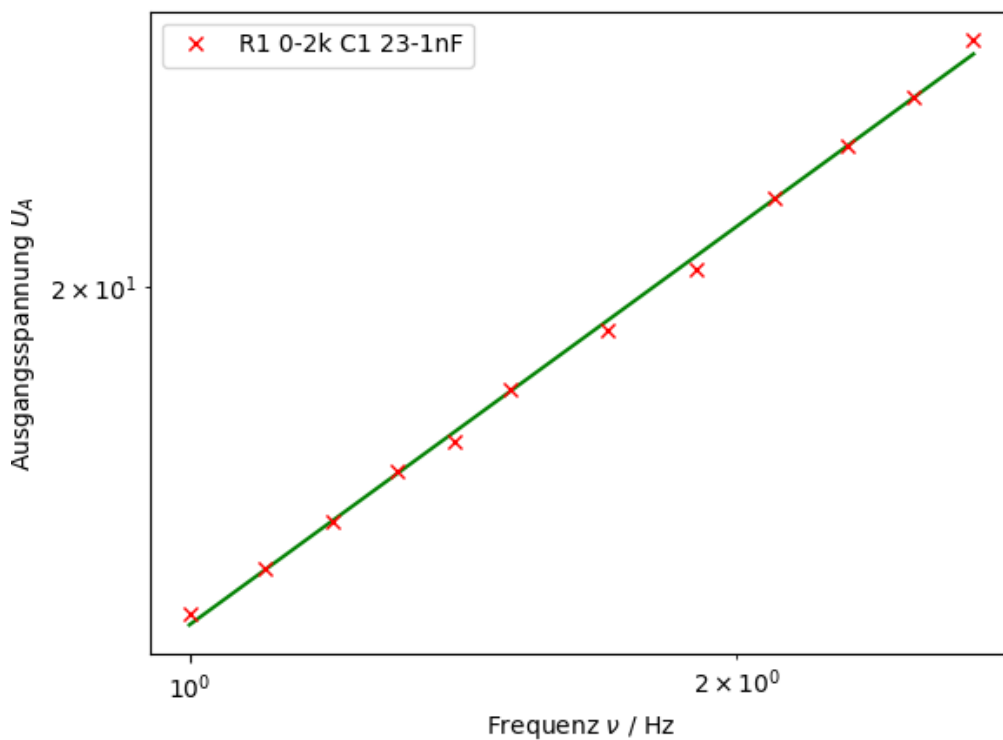


Abbildung 16: In dem dargestellten Frequenzbereich steigt die Ausgangsspannung nach dem Umkehr-Differentiator in der doppelt-logarithmischen Darstellung linear mit der Frequenz an.

Abbildung 17, Abbildung 18 und Abbildung 19 ist jeweils zu sehen, welches Ausgangssignal der Umkehr-Integrator liefert, wenn ein Sinus-, Rechteck- bzw. Dreieckssignal auf den Eingang gegeben wird.

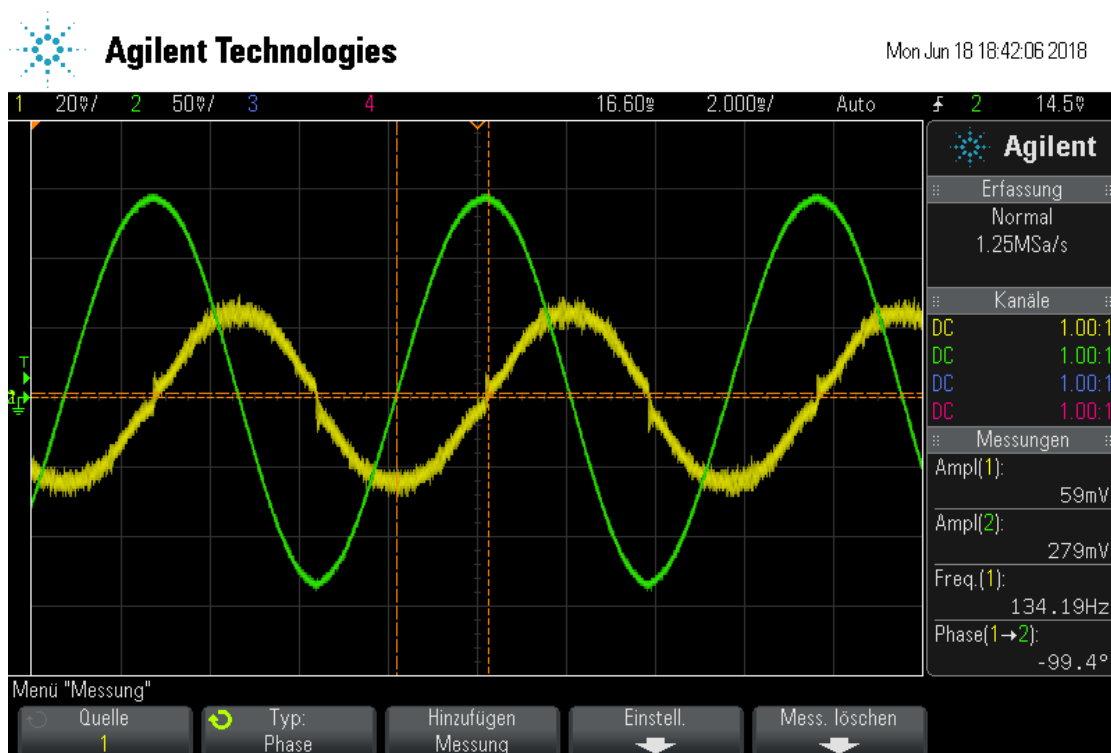


Abbildung 17: Der Umkehr-Differentiator liefert bei einem Sinussignal einen Cosinus, also wieder einen Sinus mit einer Phasendrehung von 90° gegenüber dem Eingangssignal.

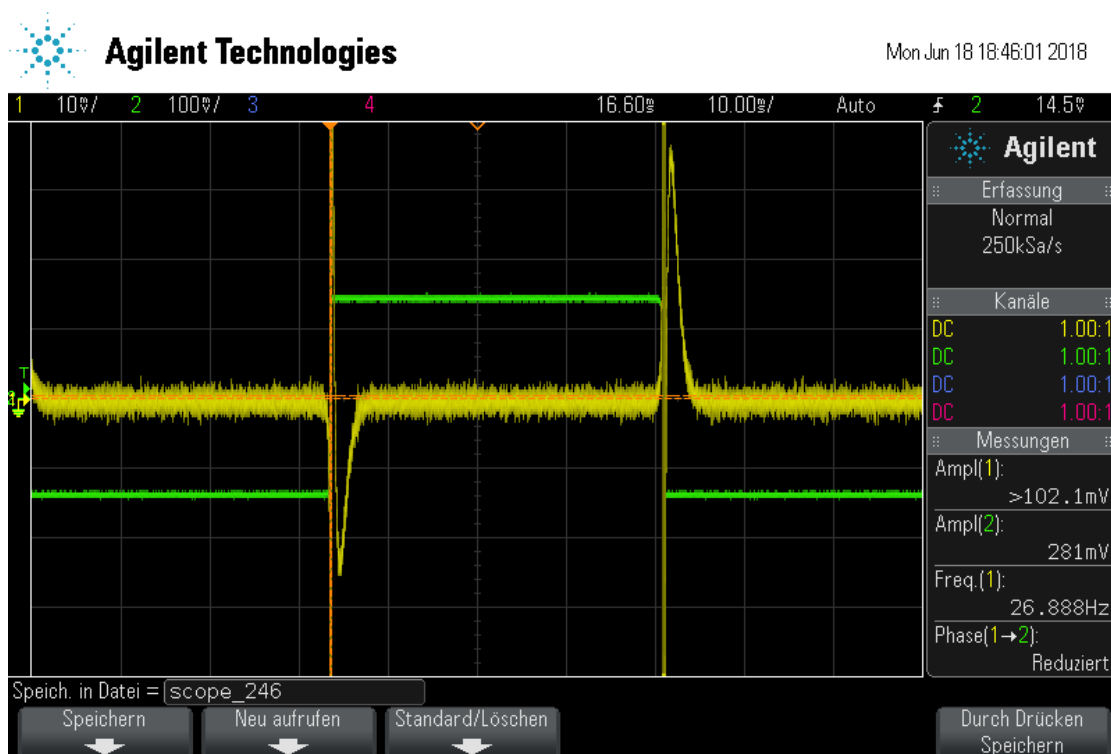


Abbildung 18: Der Umkehr-Differentiator liefert bei einem Rechtecksignal eine Abfolge von Deltapeaks.

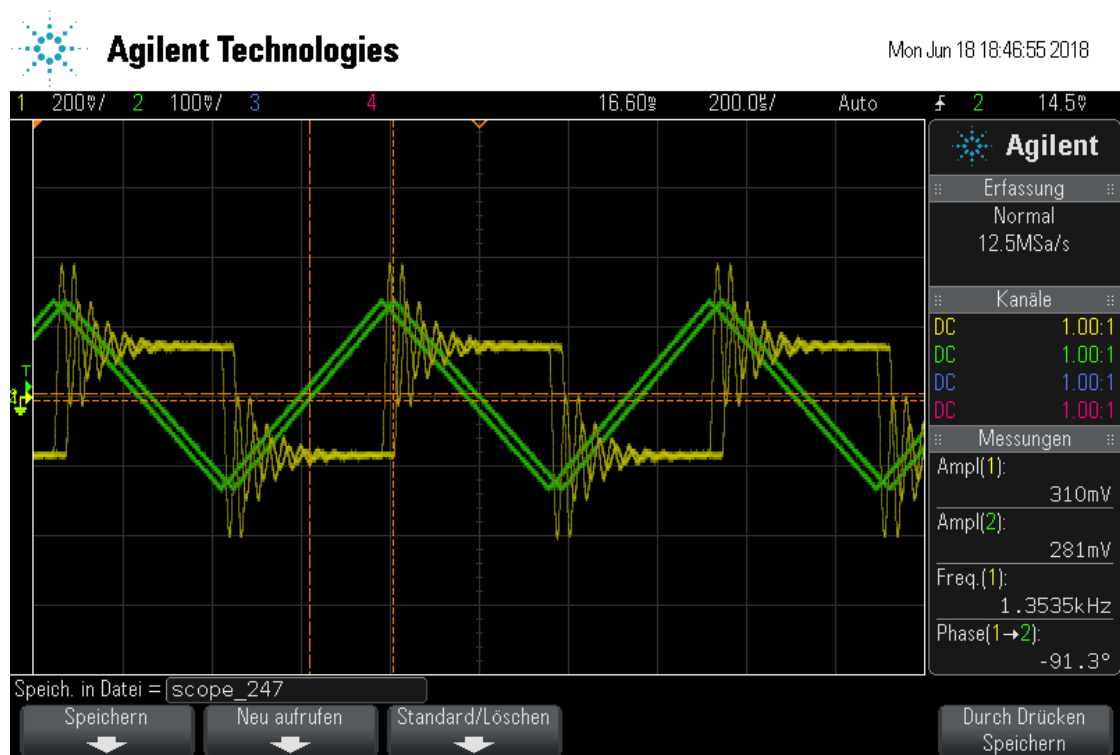


Abbildung 19: Der Umkehr-Differentiator liefert bei einem Dreiecksignal ein Rechtecksignal.

3.4 Schmitt-Trigger

Mit Hilfe der Schaltung in Abbildung 7 wird ein Schmitt-Trigger implementiert. Es werden die Widerstände $R_P = 10\text{ k}\Omega$ und $R_1 = 0.2\text{ k}\Omega$ bei einer Frequenz von $f = 1\text{ kHz}$ benutzt, die doppelte Betriebsspannung ist $2U_B = 7.86\text{ V}$. Mit

$$U_{\text{trig,theo}} = U_B \cdot \frac{R_1}{R_P} \quad (3.4.1)$$

wird die theoretische Triggerschwelle als

$$U_{\text{trig,theo}} \approx 78.6\text{ mV}$$

berechnet. Der gemessene Wert ist

$$U_{\text{trig,exp}} \approx 82\text{ mV}.$$

Die Abweichung zwischen theoretischem und experimentellen Wert beträgt 4.3%. Die entsprechende Oszilloskopaufnahme ist in Abbildung 20 zu sehen.

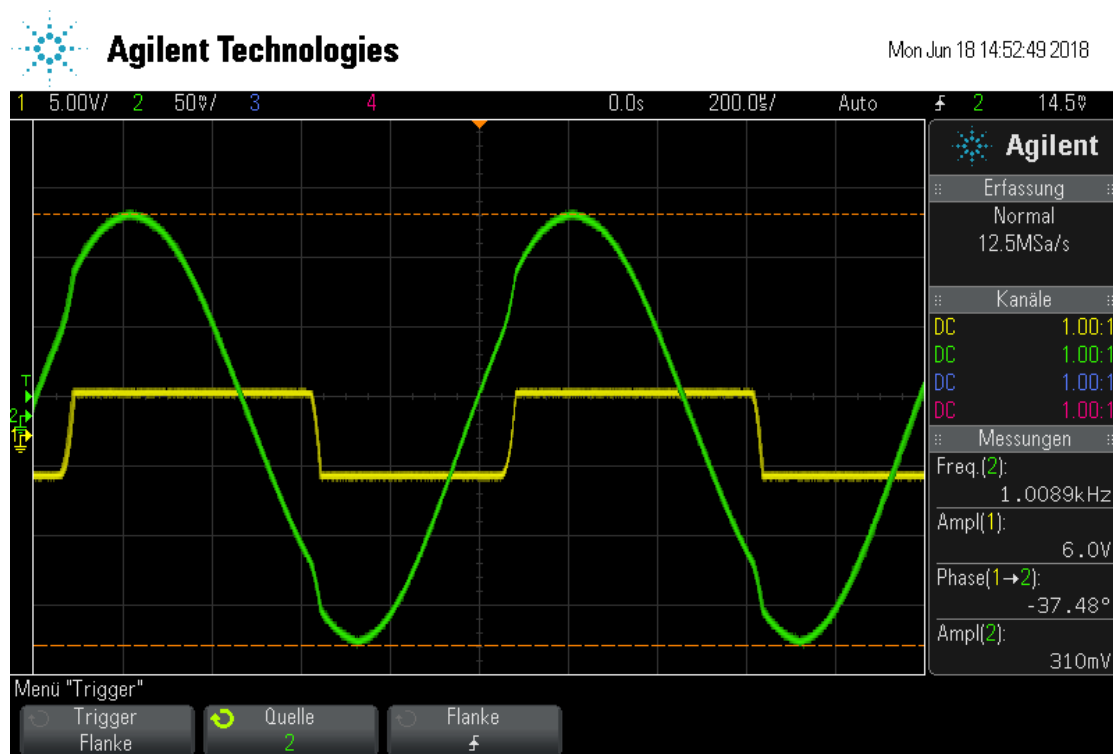


Abbildung 20: Durch den Schmitt-Trigger wird ein Ausgangssignal generiert, sobald das Eingangssignal die Triggerschwelle überschritten hat.

3.5 Dreiecksgenerator

Zunächst wird eine Sinusschwingung mit der Frequenz $f_{\text{Sinus}} = 1\text{ kHz}$ auf einen Schmitt-Trigger gegeben. Bei einer Triggerschwelle von $U_E = 165\text{ mV}$ entsteht ein Rechtecksignal. Ein Integrator macht daraus ein Dreiecksignal, welches bei der Triggerschwelle eine Amplitude von $U_{\text{Dreieck}} = 2.09\text{ V}$ und ebenfalls eine Frequenz von $f_{\text{Dreieck}} = 1\text{ kHz}$ hat. Abbildung 21 zeigt das Dreiecksignal bei einer höheren Eingangs- und Ausgangsspannung.

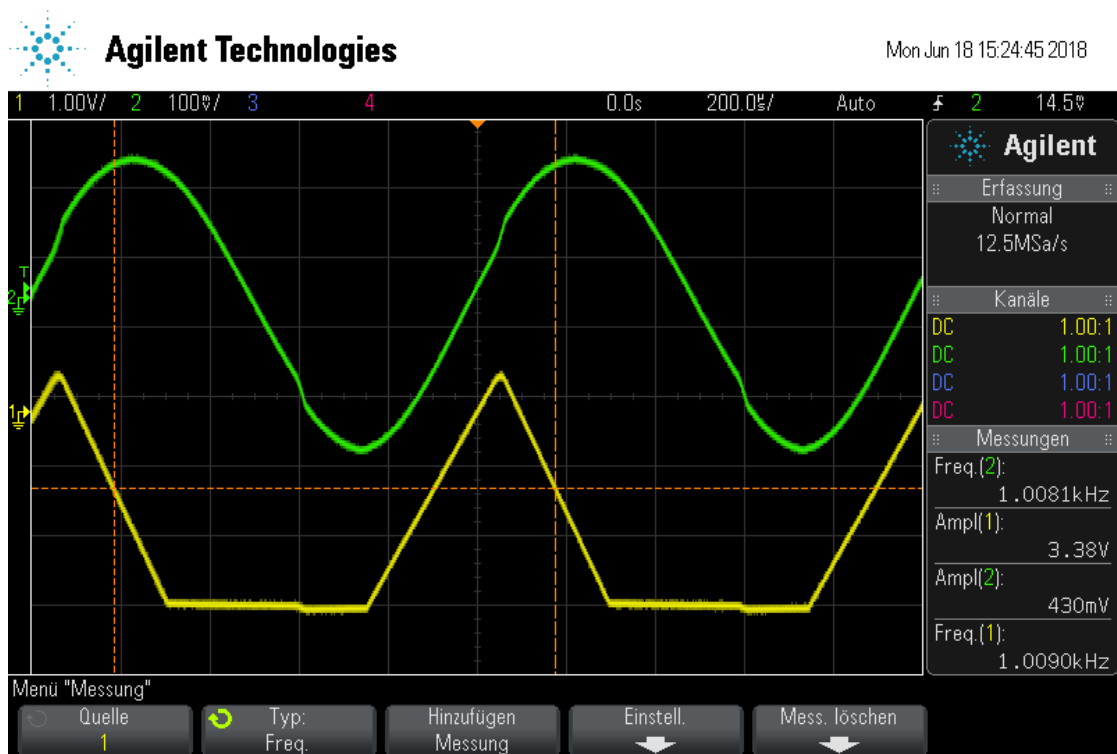


Abbildung 21: Mit Hilfe des Schmitt-Triggers wird aus einer Sinusschwingung (grün) zunächst ein Rechtecksignal generiert, aus welchem dann mit einem Integrator ein Dreieckssignal (gelb) gemacht wird.

3.6 Gedämpften und ungedämpfte Schwingung

In Abbildung 22 ist die ungedämpfte Schwingung mit einer charakteristischen Frequenz von $f = 758 \text{ Hz}$ dargestellt. Die Amplitude bleibt nahezu konstant.

Theoretisch ergibt sich bei der gedämpften Schwingung nach $f = 1/2\pi RC$ und $\tau = 20RC$ eine Schwingungsfrequenz von

$$f_{\text{theo}} = 796 \text{ Hz}$$

und eine Abklingdauer von

$$\tau = 0.004.$$

Eine lineare Ausgleichsrechnung der Form

$$\log_{10} U = At + B, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{\tau} \quad (3.6.1)$$

ergibt die Fitparameter

$$A = -110 \pm 5, \quad \text{also} \quad \tau = 0.009 \quad \text{und} \quad B = -0.22 \pm 0.05.$$

Die Ausgleichsrechnung zusammen mit den Messwerten ist in Abbildung 23 zu sehen.

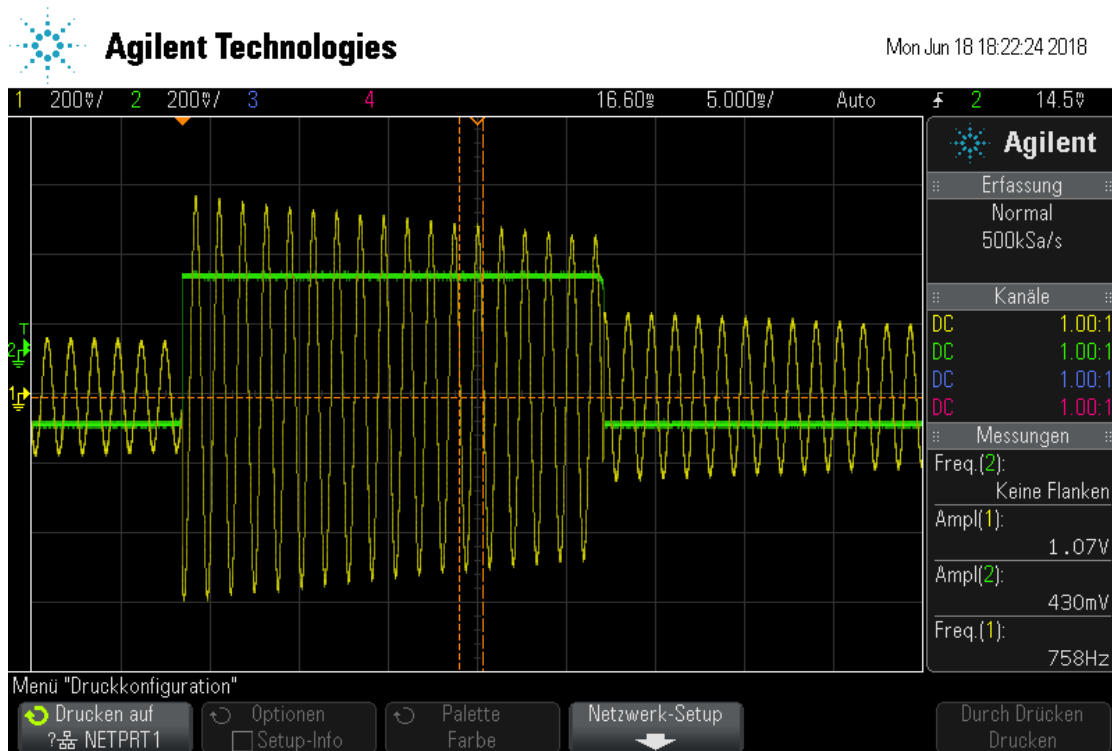


Abbildung 22: Die ungedämpfte Schwingung hat eine Frequenz von $f = 758 \text{ Hz}$.

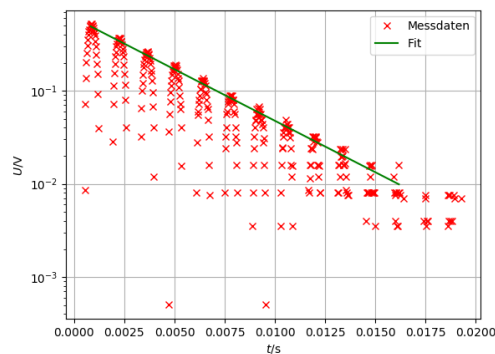


Abbildung 23: Die gedämpfte Schwingung klingt mit der Zeitkonstanten τ ab.

3.7 Beziehung zwischen Frequenz und Phase

Die Phase zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz hat einen ähnlichen Verlauf, wie die Verstärkung, sie ist in Abbildung 24. Zunächst ist die Phase konstant und nahezu 180° . Nach einer Frequenz von 10 Hz fällt die Phase ab. Das ist mit dem Einsetzen des Tiefpass-Verhaltens des Operationsverstärkers zu erklären; bei hohen Frequenzen sinkt die Verstärkung auf 1 ab. Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses verläuft gemäß

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_g}}, \quad (3.7.1)$$

das heißt, je näher die Frequenz gegen die Grenzfrequenz ω_g geht, desto größer ist die Phasendrehung. Der Phasengang eines Operationsverstärkers folgt nicht dem Verlauf eines reinen Tiefpasses, sondern ist abhängig vom Inneren Aufbau, tendentiell lässt sich aber sagen, dass auch hier die Phasendrehung mit größerer Frequenz steigt.

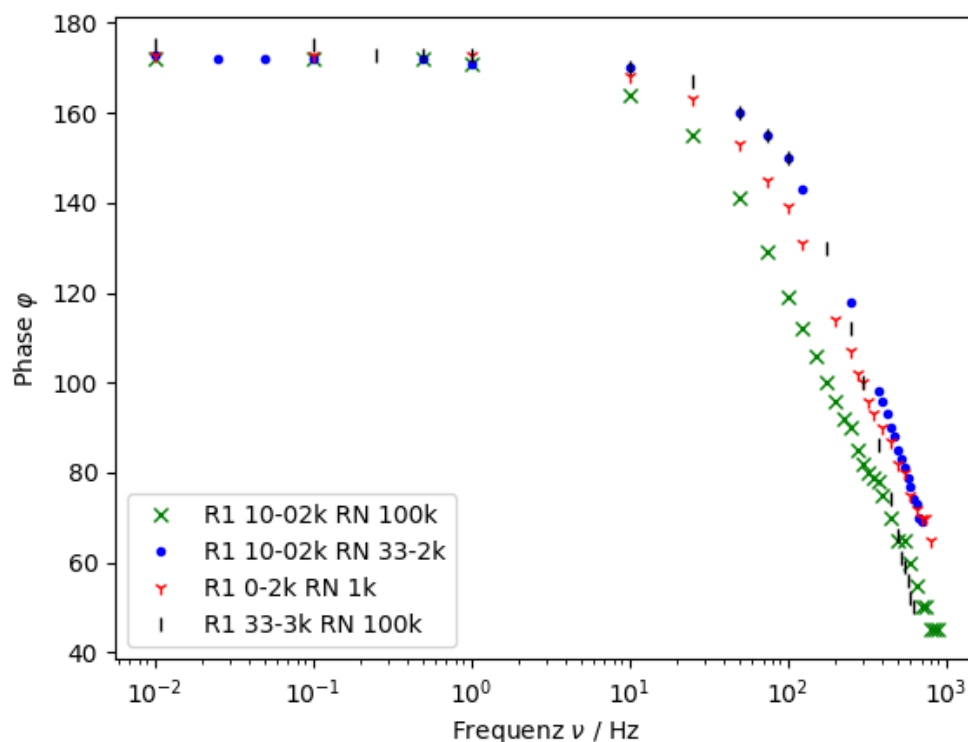


Abbildung 24: Bis zu einer Frequenz von 10 Hz ist die Phase relativ konstant bei knapp 180° , danach fällt sie in der halblogarithmischen Darstellung nahezu linear ab.

4 Diskussion

Alle Fehler sind unter 10%, also unterhalb der Fehlertoleranz der elektronischen Bauteile. Fehlerquellen sind dennoch möglich, so besitzen die Ausgleichsrechnungen die angegebenen Fehler. Zum Anderen entstehen Abweichungen durch ohmsche Verluste und

Ablesefehler. Bei den generierten Dreieck- und Rechtecksignalen sind zudem die Überschwinger, die aus dem Gibbschen Phänomen resultieren, zu erkennen. In Abbildung 19 scheint es bei der Oszilloskopaufnahme außerdem zu Reflexionen gekommen zu sein.

Bei der Abklingdauer der gedämpften Schwingung ist eine weitere bedeutende Fehlerquelle, dass die Kapazitäten der Kondensatoren nicht exakt übereinstimmen.

Literatur

- [1] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. 2018. URL: <http://uncertainties-python-package.readthedocs.io/en/latest/#>.