2. Klausur Thermo & Statistik 1996/97

Prof. Keiter

6 Seiten mit Musterlösung

Aufgabe 1: (Klassische Zustandssumme) (5 Punkte)

N nicht miteinander wechselwirkende klassische Teilchen befinden sich im Inneren einer Kugel (um den Ursprung) mit dem Radius R in einem Potential $U(\vec{r}) = \alpha\, |\vec{r}|^3$.

(a) Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme Z.

(b) Berechnen Sie die innere Energie U.
Wie lautet diese für die Grenzfälle (i) $R \to \infty$ und (ii) $\alpha \to 0$?
Wie verhält sich die innere Energie U für hohe Temperaturen T?

(c) Berechnen Sie die spezifische Wärme C_v. Wie verhält sich diese für hohe bzw. tiefe Temperaturen T?

Aufgabe 2: (Dreiniveausystem) (5 Punkte)

Ein quantenmechanisches System besitze drei Energieniveaus, $E = 0$ und $E = \pm\varepsilon$ und befinde sich im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Das Energieniveau $E = 0$ sei zweifach entartet. Berechnen Sie in Abhängigkeit von T den Mittelwert der Energie und die Entropie. Berechnen Sie für beide Größen den Grenzwert für $T \to \infty$, für die mittlere Energie auch den Grenzwert für $T \to 0$.

Aufgabe 3: (Dichteoperator) (5 Punkte)

Ein quantenmechanisches System besitze drei normierte Energieeigenzustände $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$, $|\Psi_3\rangle$ mit den Energien E_1, E_2, E_3. Es befinde sich zur Zeit $t = 0$ mit den Wahrscheinlichkeiten p_i in den Zuständen $|\Psi_i\rangle$, mit $p_1 = p < 1$ und $p_3 = 0$.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator und den Dichteoperator zur Zeit $t = 0$ explizit (als Matrix) an.
Was muß für p_2 gelten ?

(b) Ist der Dichteoperator stationär ?

(c) Berechnen Sie $\langle \hat{H} \rangle$ und $\langle \hat{H}^2 \rangle$.

(d) Handelt es sich um einen reinen Zustand ?

Aufgabe 4: (Freie Fermionen) (5 Punkte)

Berechnen Sie für ein dreidimensionales Gas von freien Fermionen mit Spin s die Kompressibilität bei $T = 0$, ausgedrückt durch die Teilchendichte $\varrho = N/V$ ...

(a) ... für nicht relativistische Teilchen.

(b) ... für extrem relativistische Teilchen.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Druck.

Musterlösung Klausur

Aufgabe 1:

Nicht wechselwirkende Teilchen falls alle in Kugel

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \alpha |\vec{r}_i|^3 \right) \qquad \infty \text{ sonst}$$

a) $$Z_{\text{w.kan.}} = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N}p \, d^{3N}q \; e^{-\beta H}$$

$$= \frac{1}{N! h^{3N}} \left[\int d^3p \, e^{-\beta \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}} \int_{|r|<R} d^3r \, e^{-\beta\alpha|\vec{r}|^3} \right]^N$$

$$= \frac{1}{N! h^{3N}} \left((2\pi m k_B T)^{3/2} \underbrace{4\pi \int_0^R dr\, r^2 e^{-\beta\alpha r^3}}_{\frac{4\pi}{3}\int_0^{R^3} dx\, e^{-\beta\alpha x}} \right)^N$$

$(3r^2\, dr = dx \quad r^3 = x)$

$$= \frac{1}{N! h^{3N}} \left((2\pi m k_B T)^{3/2} \frac{4\pi}{3\beta\alpha} \left(1 - e^{-\beta\alpha R^3}\right) \right)^N$$

b) $$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_{\text{kan}} = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \left[-\frac{5}{2} \ln\beta + \ln(1 - e^{-\beta\alpha R^3}) \right.$$

$$= \frac{5}{2} N k_B T - N \frac{\alpha R^3 e^{-\beta\alpha R^3}}{1 - e^{-\beta\alpha R^3}} = \frac{5}{2} N k_B T - N \frac{\alpha R^3}{e^{\beta\alpha R^3} - 1}$$

$R \to \infty \qquad U = \frac{5}{2} N k_B T$

$\alpha \to 0 \qquad e^{\beta\alpha R^3} - 1 \simeq \beta\alpha R^3$

$\Rightarrow U \to \frac{3}{2} N k_B T$ Idealgas

Thoch $\beta\alpha R^3 \ll 1$ s. $\alpha \to 0$

c) $$c_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{5}{2} N k_B + N\alpha R^3 \frac{\alpha R^3 e^{\beta\alpha R^3}}{(e^{\beta\alpha R^3} - 1)^2} \left(-\frac{1}{k_B T^2} \right.$$

$$= \frac{5}{2} N k_B - N k_B \frac{(\beta\alpha R^3)^2 e^{\beta\alpha R^3}}{(e^{\beta\alpha R^3} - 1)^2}$$

hohe T: β klein $\quad e^{\alpha\beta R^3} \simeq 1 + \beta\alpha R^3 \Rightarrow c_V = \frac{3}{2} k_B N$

tiefe T: $\quad c_V = \frac{5}{2} N k_B$

ufgabe 2:

$$\begin{array}{ll} \text{———} & \varepsilon \\ \text{——— ———} & 0 \\ \text{———} & -\varepsilon \end{array}$$

$$Z = e^{\beta\varepsilon} + 2e^{\beta\cdot 0} + e^{-\beta\varepsilon} = 2(1+\cosh\beta\varepsilon)$$

$$\langle H\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\frac{\varepsilon\sinh\beta\varepsilon}{1+\cosh\beta\varepsilon}$$

T groß: $\beta\varepsilon \ll 1$

$$\langle H\rangle = -\frac{\varepsilon\cdot\beta\varepsilon}{2} \to 0$$

x klein:

$\sinh x \approx x$

$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$

$e^{\pm x} = 1 \pm x$

T tief:

$$\langle H\rangle = -\varepsilon\,\frac{\frac{1}{2}e^{\beta\varepsilon}}{\cancel{1+}\frac{1}{2}e^{\beta\varepsilon}} = -\varepsilon$$

Grundzustand

x groß!

$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{1}{2}e^{x}$

Entropie aus $F = -kT\ln Z$; $\quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}$

$$F = -k_B T\ln[2(1+\cosh\beta\varepsilon)]$$

$$S = k_B\ln[\dots] + k_B T\,\frac{\sinh\beta\varepsilon}{1+\cosh\beta\varepsilon}\,\varepsilon\left(-\frac{1}{k_B T^2}\right)$$

$$= k_B\ln[\dots] - \frac{1}{T}\,\frac{\varepsilon\sinh\beta\varepsilon}{1+\cosh\beta\varepsilon}$$

$$= -\frac{F}{T} + \frac{1}{T}\langle H\rangle$$

$T\to\infty \qquad S = k_B\ln 4$

Aufgabe: 3

(a) $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}(0) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

100%

$p_1 < 1$ d.h. $p_1 + p_2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{p_2 = 1 - p_1}$

$0 < p_2 \leq 1$ $\quad$ p_2 darf auch Null werden, d.h. $p_1 = 0$ ist erlaubt (kein Beinbruch)

$\hat{S}(0) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}(0) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Liouville-gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = [\hat{H}, \hat{S}] = \hat{H}\hat{S} - \hat{S}\hat{H}$

$\hat{H}\hat{S} = \begin{pmatrix} E_1 p_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2(1-p_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}\hat{H} \Rightarrow 0$, da nur Diagonalelemente $\neq 0$

$\Rightarrow \hat{S}$ ist stationär $\hat{S}(0) = \hat{S}(t)$

(c) $\langle \hat{H} \rangle = Sp(\hat{S}\hat{H}) = Sp \begin{pmatrix} E_1 p_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2(1-p_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= E_1 p_1 + E_2(1-p_1)$

$\langle \hat{H}^2 \rangle = Sp\left(\hat{S} \begin{pmatrix} E_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3^2 \end{pmatrix}\right) = Sp \begin{pmatrix} E_1^2 p_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^2(1-p_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= E_1^2 p_1 + E_2^2 (1-p_1)$

(d) reiner Zustand: $Sp\,\hat{S}^2 \overset{!}{=} Sp\,\hat{S}$ $\quad Sp\,\hat{S}^2 = Sp \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$= p_1^2 + (1-p_1)^2 = p_1^2 + 1 - 2p_1 + p_1^2 = 1 - 2p_1 + p$

$Sp\,\hat{S} = p_1 + 1 - p_1 = 1$

$\Rightarrow$ Es handelt um einen unreinen Zustand

Aufgabe 4:

$$\varkappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T$$

p aus $\quad -pV = \Omega = -k_B T \ln Z_{gk}$

$$Z_{gk} = \prod_p \left(1 + \exp(-\beta(\varepsilon_p - \mu))\right)$$

$$-pV = -k_B T \sum_p \ln(1 + \exp(\ldots))$$

$$= -k_B T \underbrace{(2s+1)}_{g} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \, \ln(1+\exp(-\beta(\varepsilon_p-\mu$$

$$T=0 \qquad \ln(1+\exp(-\beta(\varepsilon_p-\mu))) \xrightarrow{\beta\to\infty} \begin{cases} 0 & \varepsilon_p > \mu \\ -\beta(\varepsilon_p-\mu) & \varepsilon_p < \mu \end{cases}$$

$$\mu \to \varepsilon_F$$

$$P_{Druck} = \frac{g\,\cancel{k_B T}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{|p|<p_F} d^3p \, \cancel{\beta}(\varepsilon_F - \varepsilon_p)$$

$$= \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} dp\, p^2 (\varepsilon_F - \varepsilon_p)$$

b) $\varepsilon = c|\vec{p}|$ $\qquad$ a) $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$

$$\text{a)}\ P_{Druck} = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\frac{1}{2m}\int_0^{p_F} dp\, p^2 (p_F^2 - p^2)$$

$$= \frac{g}{4m\pi^2\hbar^3}\left(\frac{p_F^5}{3} - \frac{p_F^5}{5}\right) = \frac{g}{30m\pi^2\hbar^3} p_F^5$$

$$\text{b)}\ P_{Druck} = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} c \int_0^{p_F} dp\, p^2 (p_F - p)$$

$$= \frac{gc}{2\pi^2\hbar^3}\left(\frac{p_F^4}{3} - \frac{p_F^4}{4}\right) = \frac{gc}{24\pi^2\hbar^3} p_F^4$$

$$p_F = \ldots\ \rho^{1/3}$$

$T_{Druck} \sim S^{\gamma}$

$$\varkappa = -\frac{1}{V} \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T = -\frac{1}{V}\left(\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T\right)^{-1} = -\frac{1}{V}\left(-\gamma \frac{1}{V} P_D\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\gamma P_{Druck}}$$

a) $\varkappa_T = \frac{3}{5 P_{Druck}}$

b) $\varkappa_T = \frac{3}{4 P_{Druck}}$