1.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 11. Oktober 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 20. Oktober 2011 bis $13^{\underline{00}}$Uhr

Hausaufgabe 1: Expansionskoeffizient, Druckkoeffizient und Kompressibilität 5 Punkte

Berechnen Sie am Beispiel von Blei, wie man den Druck erhöhen muss, damit das Volumen bei einer Erwärmung um $\Delta T = 1\text{K}$ bei Raumtemperatur ($T = 293\text{K}$) konstant bleibt. Verwenden Sie für die Koeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p, \qquad \beta_\text{V} = \frac{1}{p}\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V, \qquad \kappa_\text{T} = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T$$

die in der Vorlesung gezeigte Beziehung

$$\kappa_\text{T} = \frac{\alpha}{p\beta_\text{V}}.$$

Der thermische Expansionskoeffizient und die Kompressibilität für Blei sind

$$\kappa_\text{T} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-5}\,\text{bar}^{-1} \qquad \alpha = 8,9\cdot 10^{-5}\frac{1}{\text{K}}.$$

Hausaufgabe 2: Partielle Ableitungen 5 Punkte

(a) Es sei $f(x,y,z) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = -1.$$

(b) Zeigen Sie den Zusammenhang zur vorhergehenden Aufgabe auf.

Präsenzaufgabe 1: Vollständige Differentiale

a) Welche der folgenden Differentiale sind vollständig? Geben Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion $f(x,y)$ an.

   (a) $df = y\,dx + x\,dy$
   (b) $df = y\,dx - x\,dy$
   (c) $df = xy\,dx + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\,dy$
   (d) $df = \frac{\sin(2x)}{y^2+\sin^2(x)+1}\,dx + \frac{2y}{y^2+\sin^2(x)+1}\,dy$

b) Bestimmen Sie eine Funktion $h(x,y)$ derart, dass das Differential

$$df = y\,h(x,y)\,dx - x\,h(x,y)\,dy$$

vollständig wird (Integrierender Faktor).

TUS Übung 1: Philip Hebler, Juri Nyrow

1	2	Σ
4	3	7

A1: $dp = \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V dT + \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_T \cancel{dV}^{\to 0}$

Wenn integrieren, dann auf beiden Seiten der Glg. −1P

$$= \beta_V p \, dT = \int_{293}^{294} \frac{\alpha}{\kappa_T} dT \qquad \Big| \; \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V = \frac{\alpha}{\kappa_T}$$

$$\rightarrow \quad \Delta p = \frac{\alpha}{\kappa_T}(1K) = 36{,}6 \text{ bar}$$

4

A2: a) $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow \exists z = z(x, y(x)) = \text{const.} \quad \Big| \frac{d}{dx}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z \quad \Big| \cdot \frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial z}\Big|_y \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y}_{=1} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z \frac{\partial x}{\partial z}\Big|_y \quad \Big| -1$$

wieso? −1

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z \frac{\partial x}{\partial z}\Big|_y$$

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y$$

b) Allg. Gasgleichung: $pV = Nk_B T$ hier ist kein Gas vorausgesetzt −1P

$$\Leftrightarrow pV - Nk_B T = 0 = f(p, V, T)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_T \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p \frac{\partial T}{\partial p}\Big|_V = -\frac{1}{V\kappa_T} \alpha V \frac{1}{\beta_V p} = -1$$

$$\Leftrightarrow \kappa_T = \frac{\alpha}{p\beta_V}$$

3

27.10.11 TuS - Übung Blatt 1

A2) : a) $f(x,y,z)=0 \leftrightarrow df=0$ z.z: $\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y = -1$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad (1)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dx = \frac{-f_y dy - f_z dz}{f_x} = -\frac{f_y}{f_x}dy - \frac{f_z}{f_x}dz$$

$$dy = -\frac{f_z dz - f_x dx}{f_y} = -\frac{f_z}{f_y}dx - \frac{f_x}{f_y}d\cancel{z}$$

$$dz = -\frac{f_x}{f_z}dx - \frac{f_y}{f_z}dy$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y = -\frac{f_y}{f_x}\left(-\frac{f_z}{f_y}\right)\left(-\frac{f_x}{f_z}\right) = -1$$

b) $f(V,p,T)=0$, $x \hat{=} V$, $y \hat{=} p$, $z \hat{=} T$

$$\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p = -1$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T = -\kappa_T V, \quad \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V = \beta_V p, \quad \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p = \frac{1}{\alpha V} \Rightarrow -\frac{\kappa_T V \beta_V p}{\alpha V} = -1$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\alpha}{\kappa_T \beta_V}$$

20.10.11 TuS Übung

Präsenzaufgaben Blatt 1:

A1) a) $f(x,y) = xy + c$, b) kein tot. Diff. c) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{6}y^3 + C$

d) $f(x,y) = \ln(y^2 + \sin^2(x) + 1)$

A2) $h(x,y) = \frac{a}{x^2} + b$

$$df = y\,h(x,y)\,dx - x\,h(x,y)\,dy$$

$$\cancel{\frac{df}{dx} = y\,h(x,y)\,dx \Rightarrow f =}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \Leftrightarrow h(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -h(x,y) - x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$

$$\Leftrightarrow y\frac{\partial h}{\partial y} + x\frac{\partial h}{\partial x} + 2h = 0 \qquad h = X(x)\,Y(y)$$

$$\Leftrightarrow yY'X + xX'Y + 2XY = 0$$

$$\Leftrightarrow y\frac{Y'}{Y} = -\frac{x}{X}X' - 2$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = c$$

$$\cancel{\Leftrightarrow y \ln(Y) =}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow Y =}$$

Alternativ

$$\frac{y}{h}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{x}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = -2 = \underbrace{\frac{\partial \ln h}{\partial \ln x}}_{=k} + \underbrace{\frac{\partial \ln h}{\partial \ln y}}_{=-2-k}$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial \ln x} = k \qquad \Big|\ \text{NR: } \frac{\partial g(u)}{\partial u} = k \Rightarrow g(u) = k \cdot u + a$$

$$\Leftrightarrow \ln h = k \ln x + a$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow f\,x^k y^{-2-k} = h_k(x,y)$$

$$h(x,y) = \sum_k f_k\, x^k y^{-2-k}$$