

2. Klausur zur Vorlesung Thermodynamik und Statistik

Prof. Dr. Götz S. Uhrig

WS 2007/08

8. Feb. 2008

15⁰⁰ Uhr – 17³⁰ Uhr

Name	Vorname	Studienfach	Semester	Übungsgruppe

Matrikel Nummer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Erreichbar	24	14	14	14	14	14	94
Erreicht							

Erlaubte Hilfsmittel: Keine!

Zum Bestehen der Klausur sind 31 Punkte sicherlich ausreichend.

Bitte die Blätter nicht auseinander nehmen! Die Rückseiten der Zettel dürfen auch beschrieben werden. Vergessen Sie nicht, in die obigen Felder Ihre persönlichen Daten einzutragen. Schreiben Sie bitte Ihren Namen rechts oben auf jeden einzelnen Zettel. Sollten Sie die Aufgaben nicht zusammenhängend bearbeiten können (z.B. wegen Platzmangel), so vermerken Sie dies an der Aufgabe und beschriften Sie das zusätzliche Blatt.

Bitte **leserlich** schreiben. Unleserliche Lösungen, oder solche, bei denen der Gedankengang nicht nachvollziehbar ist, können leider nicht bewertet werden!

Auf der Rückseite des Deckblattes finden Sie einige **nützliche Formeln**!

Viel Erfolg!

Im Folgenden finden Sie die eine oder andere nützliche Formel. Bedenken Sie aber, dass hier auch Angaben stehen können, die Sie eventuell gar nicht benötigen.

Nützliche Formeln

- Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \Gamma(n+1) = n!$$

- ζ -Funktion

$$\zeta(\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu}}$$

- verallgemeinerte ζ -Funktionen

$$\left. \begin{matrix} g_{\nu}(z) \\ f_{\nu}(z) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} \mp 1} dx$$

$$\frac{d}{dz} g_{\nu}(z) = \frac{1}{z} g_{\nu-1}(z) \quad g_{\nu}(1) = \zeta(\nu)$$

- Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

- Reihenentwicklungen

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \partial_x \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \partial_x \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \partial_x \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

Definitionen

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad \lambda_{\beta} = h \sqrt{\frac{\beta}{2\pi m}} \quad z = e^{\beta \mu}$$

Aufgabe 1: Kurzfragen**(24 Punkte)**

- a) Man kann Gase auf verschiedene Weisen sich ausdehnen lassen. Wie würden Sie ein Gas sich entspannen lassen, um es zu kühlen?

Funktioniert das bei allen Gasen?

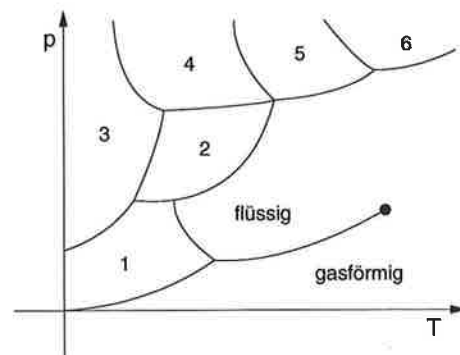
Erklären sie qualitativ, warum es funktioniert, wenn es funktioniert.

- b) Was versteht man unter makroskopischer Entartung?

Stellen Sie sich vor, es gäbe ein System mit perfekter makroskopischer Entartung. Wie könnten Sie ein solches System einsetzen und einen Widerspruch zum 3. Hauptsatz (Nernst'sches Theorem) erreichen?

- c) Was besagt die Gibbs'sche Phasenregel?

Ist das nebenstehende Phasendiagramm physikalisch möglich? (Begründen Sie Ihre Antwort.)



d) Wie lauten explizit die Fermi-, die Bose- und die Maxwellverteilung?

Bei welcher Temperatur gehen sie ineinander über?

Wann unterscheiden sie sich am meisten?

e) Geben Sie eine qualitative Begründung, warum eine verdünnte wässrige Lösung eines festen Stoffes einen tieferen Gefrierpunkt, aber einen höheren Siedepunkt hat!

Ist der quantitative Effekt größer bei einer 0,1 molaren Zuckerlösung oder bei einer 0,15 molaren Kochsalzlösung?

Begründen Sie Ihre Antwort.

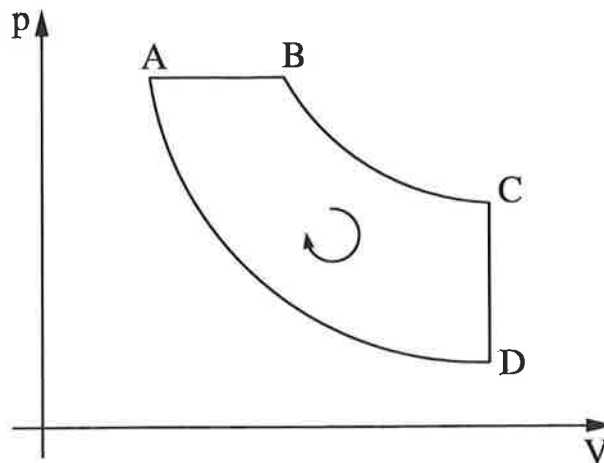
f) Was passiert mit den Längenskalen bei Annäherung an einen kontinuierlichen Phasenübergang?

Wieso können mikroskopisch sehr verschiedene Systeme bei einem solchen Phasenübergang dasselbe Verhalten, d.h. dieselben kritischen Exponenten, zeigen?

Was versteht man unter einer Skalenrelation?

Aufgabe 2: Diesel-Motor**(14 Punkte)**

Der dargestellte Kreisprozess beschreibt einen idealisierten Diesel-Motor und besteht aus einem isobaren, einem isochoren und zwei adiabatischen Teilprozessen. Der Kreisprozess werde mit einem idealen Gas (Adiabatenkoeffizient $\gamma = c_p/c_V$) als Arbeitssubstanz geführt.



- Geben Sie für jeden Teilprozess die aufgenommene Wärmemenge ΔQ und die vom System geleistete Arbeit ΔW an.
- Berechnen Sie den Wirkungsgrad η und stellen Sie diesen als Funktion des Adiabatenkoeffizienten γ und der Volumenverhältnisse V_A/V_C und V_B/V_C dar.

Aufgabe 3: Clausius-Clapeyron**(14 Punkte)**

- a) Wodurch unterscheiden sich Phasenübergänge erster von denen zweiter Ordnung?
b) Skizzieren Sie die Herleitung der Clausius-Clapeyron-Gleichung.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{\text{lat}}(T)}{T(V_{\text{gas}} - V_{\text{fl}})}$$

Welche Bedeutung hat q_{lat} ?

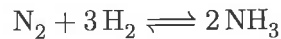
- c) Bestimmen Sie die Dampfdruckkurve $p(T)$ eines idealen Gases unter den Annahmen:
 $V_{\text{gas}} \gg V_{\text{fl}}$ und temperaturunabhängigen q_{lat} .
d) Zeigen Sie, dass die Steigung der Grenzlinie $p(T)$ bei einem Phasenübergang **zweiter Ordnung** durch

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\kappa_{T_1} - \kappa_{T_2}}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4: Massenwirkungsgesetz**(14 Punkte)**

- a) Geben Sie die allgemeinste Form des Massenwirkungsgesetzes in Formeln an. Erklären Sie alle darin vorkommenden Variablen.
- b) Spezialisieren Sie die allgemeine Form des Massenwirkungsgesetzes für den Fall idealer Gase. Erklären Sie auch hier alle Variablen.
- c) Betrachten Sie nun die Ammoniaksynthese aus Stickstoff und Wasserstoff gemäß dem Haber-Bosch-Verfahren. Alle beteiligten Stoffe sollen als ideale Gase angesehen werden.



- i) Stellen Sie das Massenwirkungsgesetz in den molaren Konzentrationen für diese Reaktion auf.
- ii) In einem Behälter mit dem Volumen $V = 5 \text{ l}$ hat sich zwischen Stickstoff (N_2), Wasserstoff (H_2) und Ammoniak (NH_3) ein chemisches Gleichgewicht eingestellt. Es liegen folgende Stoffmengen vor: $n(\text{N}_2) = 5 \text{ mol}$, $n(\text{H}_2) = 8 \text{ mol}$, $n(\text{NH}_3) = 0,5 \text{ mol}$. Berechnen Sie die Gleichgewichtskonstante K_c .
- Hinweis:* Gekürzte Zahlenbrüche reichen als Ergebnis aus.
- iii) In einem zweiten Experiment werden die gleichen Stoffmengen $n(\text{N}_2)$ und $n(\text{H}_2)$ in ein Volumen $V = 1 \text{ l}$ gegeben. Wieviel $n(\text{NH}_3)$ muss hinzugegeben werden, damit wiederum thermisches Gleichgewicht (bei gleicher Temperatur wie unter ii)) herrscht, ohne dass $n(\text{N}_2)$ und $n(\text{H}_2)$ sich ändern?

Aufgabe 5: Spezifische Wärme eines Halbleiters**(14 Punkte)**

Als einfaches Modell für einen Halbleiter betrachten Sie ein Fermionensystem mit dem chemischen Potential $\mu(T) = 0$ und der Zustandsdichte:

$$\rho(E) = \begin{cases} 0 & \text{für } |E| \leq \Delta/2 \\ c \Theta(E + U) & \text{für } |E| \geq \Delta/2 \text{ mit } U \gg \Delta \end{cases} \quad (1)$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der spezifische Wärme C_V im Grenzfall $k_B T \ll \Delta/2$.
Anleitung:

- a) Skizzieren Sie $\rho(E)$ und berechnen Sie das großkanonische Potential J . Benutzen Sie zur Berechnung von J folgende zwei, sich ausschließende Näherungen

$$\ln(1 + e^{-\beta E}) \approx e^{-\beta E} \quad (2)$$

$$\ln(1 + e^{-\beta E}) \approx -\beta E. \quad (3)$$

Geben sie an, für welche Werte von βE die Näherungen jeweils gelten.

- b) Bestimmen Sie nun die Entropie S und die spezifische Wärme C_V für $k_B T \ll \Delta/2$.

Aufgabe 6: Bose Gas in 2D**(14 Punkte)**

Wir betrachten N Bosonen in einem harmonischen Potential (Parabel-Potential) in zwei Dimensionen. Die entsprechende Zustandsdichte ist dann

$$\rho(\epsilon) = \begin{cases} \frac{V}{(\hbar\omega)^2} \epsilon, & \text{falls } \epsilon \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ so dass } N = \langle \hat{N} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{\rho(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}.$$

Die Funktionswerte $\zeta(2)$ und $\zeta(3)$ der ζ -Funktion müssen nicht weiter vereinfacht werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$n \cdot (\hbar\omega\beta)^2 = g_2(z)$$

für $T > T_c$ gilt.

b) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c für eine Bose-Einstein-Kondensation des Systems.

c) Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung ($p = \dots$) für $T \leq T_c$.

d) Berechnen Sie die spezifische Wärme $\frac{C_V}{Nk_B}$ für $T > T_c$.