2. Klausur TDS
[redacted]

8 SEITEN

Aufgabe 1: (4 Punkte)

N wechselwirkungsfreie klassische (unterscheidbare) Teilchen der Masse m befinden sich innerhalb eines würfelförmigen Behälters (Volumen $V=a^3$, Mittelpunkt als Ursprung) in einem Potential $U(\vec{r})=C.(x+y+z)$. Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme und daraus die freie Energie A(T, V), die Entropie S(T, V) und die innere Energie U(T, V).

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + C\cdot\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i+z_i)$$

unterscheidbar!

$$Q_N = \int \frac{d^{3N}p\, d^{3N}q}{h^{3N} \cancel{N!}} e^{-\beta\mathcal{H}} = \frac{1}{h^{3N}N!} \int_{\infty^{3N}} d^{3N}p\, e^{-\beta\sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}} \int_{V^N} d^{3N}q\, e^{-\beta C\sum_i (x_i+y_i+z_i)}$$

$$= \frac{1}{h^{3N}N!}\left(\int_{\infty^3} d^3p_i\, e^{-\beta\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}}\right)^N \cdot \left(\int_V d^3q_i\, e^{-\beta C(x_i+y_i+z_i)}\right)^N$$

$$= \frac{1}{h^{3N}N!}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)^{3N} \cdot \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dq\, e^{-\beta C q}\right)^{3N}$$

Zur Ausrechnung des ersten Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} = \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \quad 1. \qquad x = \sqrt{\frac{\beta}{2m}}\, p$$

Zum zweiten Integral:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-\beta C q}\, dq = -\frac{1}{\beta C}\left[e^{-\beta C q}\right]_{q=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{2}{\beta C} \sinh\left(\frac{\beta C a}{2}\right)$$

Also: $$Q_N = \frac{1}{h^{3N}N!}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3N}{2}} \cdot \left(\frac{2}{\beta C}\right)^{3N} \sinh^{3N}\left(\frac{\beta C a}{2}\right)$$

$$\boxed{Q_N = \frac{1}{N!}\left(\frac{8m\pi}{\beta^3 C^2 h^2}\sinh^2\left(\frac{\beta C a}{2}\right)\right)^{\frac{3N}{2}}} \quad 1. \text{ s.o.}$$

$$\cancel{A = -kT\ln Q_N = -kT\ln\left(\frac{1}{N!}\left(\frac{4m\pi k^3T^3}{C h^2}\sinh^2\left(\frac{C V^{1/3}}{2kT}\right)\right)^{\frac{3N}{2}}\right)}$$

$$\cancel{= \ldots -\frac{3N}{2}kT\ln\left(\frac{4m\pi k^3T^3}{C h^2}\right) - 3NkT\ln\left(\sinh\left(\frac{CV^{\frac{1}{3}}}{2kT}\right)\right)}$$

$$\cancel{= +kTN\ln N - kTN - \frac{3N}{2}kT\ln\left(\frac{4m\pi k^3T^3}{C h^2}\right) - 3NkT\ln\left(\sinh\left(\frac{CV^{\frac{1}{3}}}{2kT}\right)\right)}$$

~~(Stirling-Formel)~~

$$A = -kT\ln Q_N = \ldots$$

2. Klausur TUS
[redacted]

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Berechnen Sie für ein klassisches ideales Gas den Mittelwert des reziproken Geschwindigkeitsbetrages eines Moleküls, $<\frac{1}{v}>$

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Rightarrow |\vec{v}| = v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\langle \frac{1}{v} \rangle = \cancel{Sp(\varrho \frac{1}{v})} \quad \frac{\int_0^\infty \frac{1}{v}\varrho\, dE}{\int_0^\infty \varrho\, dE} \quad f. \qquad \varrho = e^{-\beta E}$$

$e^{-E/kT}$ × Phasenraumvolumen! ; nicht × dE! $\quad f(\vec{v})\, d^3v = C \cdot e^{-\beta\frac{m}{2}v^2} d^3v \sim C\cdot e^{-\frac{m}{2\beta}v^2}\cdot v^2 dv$

$\sim E \quad \sim \frac{dE}{\sqrt{E}}$

$$\int_0^\infty \varrho\, dE = \int_0^\infty e^{-\beta E}\sqrt{E}\, dE = -\frac{1}{\beta}\left[e^{-\beta E}\right]_0^\infty = \frac{1}{\beta} = kT \quad // f.$$

f.

$$\int_0^\infty \frac{1}{v}\varrho\, dE = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^\infty E^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta E}\, dE$$

Setze: $x = \sqrt{\beta E}$

$dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{E}}\, dE$

$\Rightarrow \frac{dE}{\sqrt{E}} = dx$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{m\pi}{2\beta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \frac{1}{v} \rangle = \sqrt{\frac{m\pi}{2\beta}} \cdot \beta = \sqrt{\frac{m\pi\beta}{2}}} \quad // f.$$

1P.

2. Klausur TUS

[redacted]

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben sei ein System von N unterscheidbaren wechselwirkungsfreien Teilchen, von denen jedes sich in einem von 2 Energieniveaus $E_0=0$ oder $E_1>0$ befinden kann. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, die freie Energie A(T), die Entropie S(T), die innere Energie U(T) und die spezifische Wärme $c_v(T)$.

E_1

E_0

$$Q_N = Sp\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\right) = \sum_{\{n_i=0,1\}} \langle n_1,n_2,\dots,n_N | e^{-\beta\mathcal{H}} | n_1,n_2,\dots,n_N\rangle$$

$$= \sum_{\{n_i=0,1\}} \underbrace{|\langle n_1,n_2,\dots,n_N | n_1',n_2',n_3',\dots,n_N'\rangle|^2}_{1 \text{ für } n_i=n_i',\ \text{sonst Null (Zustände stehen orthogonal)}} e^{-\beta \sum_i E_{n_i}}$$

$$= \sum_{\{n_i=0,1\}} e^{-\beta\sum_i E_{n_i}} = \sum_{n_1=0,1}\sum_{n_2=0,1}\dots\sum_{n_N=0,1} e^{-\beta\sum_i E_{n_i}}$$

$$= \prod_{i=1}^{N}\sum_{n_i=0,1} e^{-\beta E_{n_i}} = \prod_{i=1}^{N}\left(e^{-\beta E_0}+e^{-\beta E_1}\right)$$

$$\boxed{Q_N = \left(1+e^{-\beta E_1}\right)^N}$$ ✓ ... so gefällt's mir ☺

$$A(T) = -kT \ln Q_N = -NkT \ln\left(1+e^{-\beta E_1}\right) \checkmark \qquad \beta=\beta(T)=\frac{1}{kT}$$

$$S(T) = -\frac{\partial A(T)}{\partial T} = +Nk\ln\left(1+e^{-\beta E_1}\right) + NkT\cdot\frac{e^{-\beta E_1}}{1+e^{-\beta E_1}}\cdot\frac{E_1}{kT^2}$$

$$= +Nk\ln\left(1+e^{-\beta E_1}\right) + \frac{NE_1}{T}\cdot\frac{1}{e^{\beta E_1}+1} \checkmark$$

den hast Du leider übersehen ...

$$U(T) = A(T) + T\,S(T) = \frac{NE_1}{\cancel{T}}\cdot\frac{1}{e^{\beta E_1}+1} \quad (\checkmark)$$

$$c_v(T) = \frac{\partial U(T)}{\partial T} = \cancel{-\frac{NE_1}{T^2}\,\frac{1}{e^{\beta E_1}+1}} + \frac{NE_1}{T}\cdot\frac{e^{\beta E_1}}{(e^{\beta E_1}+1)^2}\cdot\frac{1}{kT^2}$$

$$= \cancel{-\frac{NE_1}{T^2}\,\frac{1}{e^{\beta E_1}+1}} + \frac{NE_1}{4kT^{\cancel{3}}_{2}}\,\frac{1}{\cosh^2\frac{\beta E_1}{2}}$$

... macht aber nichts, trotzdem 5 Pkt.

2. Klausur – TUS

[redacted]

3

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Magnonen sind Pseudobosonen mit Dispersions~~raltion~~relation $E(k)=c.k^2$. Die Teilchenzahl ist keine Erhaltungsgröße. Zeigen Sie, daß in 3 Dimensionen bei festem Volumen und tiefen Temperaturen T für die spezifische Wärme gilt: $c_V \sim T^{3/2}$

$$\cancel{U = \langle E \rangle = \int E(k)\, e^{-\beta E(k)}\, d}$$

$$\frac{U}{V} = \frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k},\vec{\xi}} E(k)\langle n_k \rangle = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k},\vec{\xi}} \frac{E(k)}{e^{+\beta E(k)}-1} \quad ✓$$

Übergang zu kontinuierlich:

$$\frac{U}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{ck^2}{e^{\beta ck^2}-1} \quad ✓$$

→ Polarkoordinaten $4\pi k^2 dk$ und Substitution $x^2 := \beta c k^2$ hätten's hier auch schon getan (was soll's.).

Für tiefe Temperaturen wird $\beta \to \infty$:

$$\frac{U}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{ck^2 e^{-\beta ck^2}}{1-e^{-\beta ck^2}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} ck^2 e^{-\beta ck^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta ck^2}\right)^n$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} ck^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\beta ck^2}\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} cx^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x^2}\right)^n\right)}_{\text{hängt nicht mehr von der Temperatur ab!}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{\beta c})^5}$$

Substitution: $x = \sqrt{\beta c}\, k$

$$d^3k = \frac{1}{(\sqrt{\beta c})^3} d^3x$$

$$k^2 = \frac{1}{\beta c} x^2 \quad ✓$$

$$\frac{U}{V} \sim T^{5/2} \Rightarrow c_V = \frac{\partial U}{\partial T} \sim T^{3/2} \qquad \text{q.e.d.}$$

(V = const!)

P4!

2. Klausur TUS
[redacted]

T.i.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß für ein wechselwirkungsfreies Fermi- oder Bose-System gilt

$$\langle n_k \, n_{k'} \rangle = \langle n_k \rangle \cdot \langle n_{k'} \rangle \qquad \text{für } k \neq k' \; .$$

(n_k Besetzungszahl des Einteilchenzustandes mit Quantenzahl k)

$Z = \prod_i \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}$ ist die Zustandssumme. Daraus:

$$\langle n_k \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_k} = \prod_i \sum_{\{n_i\}} n_k e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \cdot \frac{1}{Z} \quad ✓$$

$$\cancel{\langle n_k n_{k'} \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_{k'}} = \prod_i \sum_{n_i}{}' n_k n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}}$$

~~Behauptung ist also:~~

$$\cancel{\prod_i \sum_{n_i}{}' n_k e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \prod_j \sum_{n_j}{}' n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_j-\mu)n_j}}$$

$$\cancel{\overset{!}{=} \prod_i \sum_{n_i}{}' n_k n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}}$$

$$\cancel{\prod_i \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{k'}} \langle n_k \rangle = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{k'}} \left(\frac{1}{Z}\right) \cdot \prod_i \sum_{\{n_i\}} n_k e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}$$

?

$$+ \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{k'}} \prod_i \sum_{n_i} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}$$

$$\overset{?}{=} -\frac{1}{Z^2} \cdot \langle n_{k'} \rangle \cdot \langle n_k \rangle \cdot Z^2 + \frac{1}{Z} \langle n_k n_{k'} \rangle \cdot Z$$

$$\neq \; \langle n_k n_{k'} \rangle - \langle n_{k'} \rangle \cdot \langle n_k \rangle \qquad (\cdot (-\beta \cdot)$$

Behauptung ist also:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{k'}} \langle n_k \rangle \overset{!}{=} 0 \qquad \text{für } k \neq k'$$

2. Klausur TUS

[redacted]

3

Aufgabe 6: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß für ein (spinloses) Fermisystem mit linearer Disperisonsrelation $\varepsilon_k = c.k$ in 3 Dimensionen $U = 3.p.V$ gilt

b) Berechnen Sie den Druck p dieser in ein festes Volumen V eingeschlossenen Fermionen für Temperatur T=0 (bei vorgegebener Dichte $n = N/V$)

$$\frac{U}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{c\cdot k}{e^{\beta ck}+1} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{c\cdot k e^{-\beta ck}}{1+e^{-\beta ck}}$$

~~Substitution: $z = 1+e^{-\beta ck} \to dz$~~

$$= \int \frac{k^2 dk\, d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{c\cdot k e^{-\beta ck}}{1+e^{-\beta ck}} \checkmark$$

$d\Omega$: Raumwinkel im k-Raum

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{ck^3 e^{-\beta ck}}{1+e^{-\beta ck}} dk$$

$$\cancel{= -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\int k^2 (1+e^{-\beta ck}) dk}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\int k^2 \ln(1+e^{-\beta ck}) dk}$$

Entwicklung für $e^{-\beta ck}$ β ~~klein~~ groß ! Braucht nicht ausgerechnet zu werden!

$$\frac{U}{V} = -\frac{1}{2\pi^2} \int ck^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-\beta ck})^n dk$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int ck^2 (e^{-\beta ck})^n dk$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int ck^2 e^{-\beta ckn} dk \qquad x = \beta ckn$$

$$dx = \beta cn \cdot dk$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{c}{(\beta cn)^3} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \qquad k^2 = \frac{x^2}{(\beta cn)^2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{c\cdot 2!}{(\beta cn)^3}$$

$$= -\frac{2c}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\beta c}\right)^3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^3}\right)}_{} \quad \ldots ?$$

das könnte ein Ausdruck wie $3\pi^2$ sein

Zum Beweis benutze ich dies allerdings sowieso, statt dessen direkt:

$$\langle n_k n_{k'} \rangle = \frac{1}{Z} \prod_i \sum_{n_i} n_k n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} .$$

$$= \frac{1}{Z} \prod_{\substack{i \\ i\neq k \\ i \neq k'}} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \cdot \sum_{n_k} n_k e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)n_k} \sum_{n_{k'}} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{Z} \prod_{\substack{i \\ i\neq k \\ i \neq k'}} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \prod_{\substack{i \\ i\neq k}} n_k e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)n_k}}$$

$$= \frac{1}{Z} \prod_{\substack{i \\ i\neq k \\ i \neq k'}} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \cdot \frac{\prod_i \sum_{n_i} n_k e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}}{\prod_{\substack{i \\ i\neq k}} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}} \cdot \sum_{n_{k'}} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}$$

$$\cancel{= \langle n_k \rangle \sum_{n_{k'}} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}}$$

$$= \frac{1}{Z} \cdot \frac{\prod_{i(\neq k, \neq k')} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}}{\prod_{i(\neq k)} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}} \cdot \underbrace{\prod_i \sum_{n_i} n_k e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}}_{\langle n_k \rangle \cdot Z} \cdot \sum_{n_{k'}} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}$$

$$= \langle n_k \rangle \cdot \frac{1}{\sum_{n_{k'}} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}} \sum_{n_{k'}} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}$$

$$= \langle n_k \rangle \cdot \frac{\prod_{i(i\neq k')} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \cdot \sum_{n_{k'}} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}}{\prod_{i(i\neq k')} \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} \cdot \sum_{n_{k'}} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}}$$

$$= \langle n_k \rangle \cdot \frac{\prod_i \sum_{n_i} n_{k'} e^{-\beta(\varepsilon_{k'}-\mu)n_{k'}}}{\prod_i \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}} = \langle n_k \rangle \cdot \langle n_{k'} \rangle \qquad \text{q.e.d.}$$

Diese Umwandlungen sind nur möglich für wechselwirkungsfreie Teilchen, da nur dort die Produkte auseinandergezogen werden können:

$$E(\{n_i\}) \longrightarrow \varepsilon_k(n_k)$$

4P