8.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 29. November 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 8. Dezember 2011 bis $13^{\underline{00}}$Uhr

Hausaufgabe 8.1: Clausius-Clapeyron Gleichung 3 Punkte

Leiten Sie aus der Clausius-Clapeyron Gleichung unter folgenden drei vereinfachenden Annahmen die Dampfdruckkurve $p(T)$, also die Grenzkurve für den Übergang flüssig-gasförmig, ab:

- Das Volumen der flüssigen Phase V_{fl} sei gegenüber V_{gas} vernachlässigbar.
- Die latente Wärme hängt nicht von der Temperatur ab, $Q_{\text{lat}}(T) = Q_{\text{lat}}$ =konst.
- Das Gas kann als ideal angenommen werden.

Hausaufgabe 8.2: Hochdimensionale Kartoffeln 6 Punkte

Betrachten Sie eine Hyperkugel mit Radius r in D Dimensionen. $S_D(d,r)$ sei der Rauminhalt einer Kugelschale zwischen den Radien $r-d$ und r und κ das Verhältnis dieses Rauminhalts zum Rauminhalt der gesamten Kugel $V_D(r)$, d.h. $\kappa = \frac{S_D(r,d)}{V_D(r)}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen der D-dimensionalen Hyperkugel mit Radius r durch

$$V_D(r) = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{D}{2}\right)} r^D \tag{1}$$

gegeben ist, wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{x-1}e^{-t}$ die sog. Gammafunktion ist und (u.a.) eine Verallgemeinerung der Fakultät darstellt, da z.B. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

HINWEIS: Um (1) zu zeigen, benutzen Sie, dass das D-dimensionale Gaussintegral zum einen faktorisiert, d.h.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_D e^{-x_1^2-\cdots-x_D^2} = \prod_{i=1}^{D} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_i e^{-x_i^2} \tag{2}$$

zum anderen aber auch mittels Kugelkoordinaten als

$$I = O_D \int_0^\infty \mathrm{d}y\; y^{D-1} e^{-y^2} \tag{3}$$

geschrieben werden kann, wobei O_D die Oberfläche der D-dimensionalen Einheitskugel ist.

(b) Skizzieren Sie $\kappa(D)$ für $d = r/2$ als Funktion von D.

(c) Wie dick bzw. dünn müßte man eine 3-, 4-, 10- oder 100-dimensionale Hyperkartoffel schälen, damit die geschälte Kartoffel noch 95% des gesamten ursprünglichen Kartoffelvolumens enthält? Benutzen Sie die "spherical potato approximation", d.h. gehen Sie von exakt kugelförmigen Hyperkartoffeln aus.

(d) Nach welchem Gesetz muss sich die relative Schalendicke $\delta = d/r$ als Funktion der Dimension ändern, damit κ für alle Dimensionen gleich ist? Diskutieren Sie insbesondere $\delta(D)$ für die Grenzfälle kleiner bzw. großer Dimension D.

(e) Wie groß ist also der Fehler, wenn Sie bei der Berechnung der Entropie des idealen Gases das Volumen $S_D(d,r)$ durch das Volumen $V_D(d)$ ersetzen?

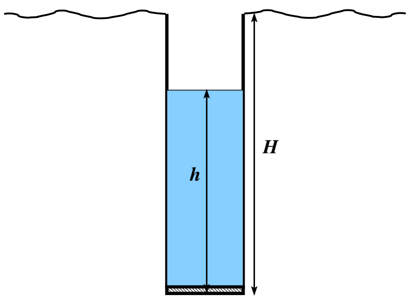
Hausaufgabe 8.3: Homogene Funktionen — 3 Punkte

Eine homogene Funktion $f(x, y)$ ist definiert durch $f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda)f(x, y)$. Zeigen Sie, dass $g(\lambda) = \lambda^p$ gilt, wobei p eine (hier unbestimmte) Konstante ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Relation $g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu)$.

Hausaufgabe 8.4: Osmotischer Druck: Meerwasserentsalzung — 3 Punkte

Zur Süßwassergewinnung wird ein langes Rohr bis auf eine Tiefe H ins Meerwasser abgesenkt und dort verankert. Das Rohr ist oben offen und wird am unteren Ende mit einer für Na^+ und Cl^- Ionen undurchlässigen semipermeablen Membran verschlossen (siehe Skizze). Nehmen sie an, dass das Salz vollständig dissoziiert ist. Die Salzkonzentration im Meerwasser beträgt $\rho_s = 35$g/l, die molare Masse $M_{\mathrm{NaCl}} = 58.44$g/mol, die Dichte das Süßwassers ist $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000$g/l und die Temperatur sei $T = 5°$C; wir betrachten diese Größen als unabhängig von der Tiefe.



(a) Berechnen Sie den osmotischen Druck der Membran.

(b) Bestimmen Sie die Steighöhe h des Süßwassers im Rohr. Wie tief muss man das Rohr mindestens versenken, damit überhaupt Wasser eindringt? Für welche Werte von H ist $h > H$?

TuS Blatt 8

Philip Hebler, Juri Nyrov

1	2	3	4	Σ
3	/	/	2	5

Aufgabe 8.1:

Clausius-Clapeyron: $\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{Lat}(T)}{T(V_{gas} - V_{Flüssig})}$

Vereinfachungen: 1: $V_{Flüssig} \ll V_{gas} \Rightarrow V_{Flüssig} \to 0$

2: $Q_{lat}(T) = Q_{lat} = const.$

3: ideales Gas: $V_{gas} = \frac{kT}{p}$ (Aus der Allg. Gasgleichung)

$\Rightarrow$ C-C: $\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{lat} \cdot p}{kT^2}$

$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{Q_{lat}}{k} \frac{dT}{T^2}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Q_{lat}}{k} \frac{1}{T}$

3

$\Leftrightarrow p(T) = p_0 e^{-\frac{Q_{lat}}{kT}}$

Aufgabe 8.4

a) Osmotische Druck: $\Pi = \frac{n}{V} R \cdot T = \frac{n}{V} \cdot N \cdot k_B T$

$n = m\,M \quad \varrho = \frac{V}{m} \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\varrho}{M}$

$\Rightarrow \Pi = \frac{\varrho}{M} \cdot N_A \cdot k_B \cdot T \cdot 2$, Faktor 2 weil sich die Teilchenzahl bei Dispersion verdoppelt

≈ 27 bar $= \Delta p$

b) Stelle Drücke für beide Zellen auf:

$p_{Meer} = p_0 + \varrho_{meer}\, g H = p_0 + (\varrho_{wasser} + \varrho_{salz})\, g H$

$p_{Rohr} = p_0 + \varrho_{wasser}\, g \cdot h$

$p_{Meer} - p_{Rohr} = \Delta p = \Pi$

$(\varrho_w - \varrho_s) g H - \varrho_w g h = \Pi$

$h = \frac{(\varrho_w - \varrho_s) g H - \Pi}{g \varrho_w} \overset{!}{>} 0$

$\Rightarrow H > \frac{\Pi}{(\varrho_w - \varrho_s) g} \approx 272$ m

~~h<H~~ $h > H$ 2

15.12.11 TUS Blatt 8

$\boxed{A\,8.2}$: a) z.z.: $V_D(r) = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(1+\frac{D}{2})} r^D$

$$I = \cancel{O_D} \underbrace{\prod_{i=1}^{D} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_i\, e^{-x_i^2}}_{=\sqrt{\pi}}}_{=\sqrt{\pi}^D = \pi^{D/2}} = O_D \underbrace{\int_0^\infty dy\, y^{D-1} e^{-y^2}}_{= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty du\, e^{\frac{D}{2}-1} e^{-u}}_{= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{D}{2})}} \quad , u = y^2$$

$$\Rightarrow O_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$$

$$V_D = O_D \int_0^R dr\, r^{D-1} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^r dy\, y^{D-1} = \frac{2\pi^{D/2}}{D\Gamma(\frac{D}{2})} r^D$$

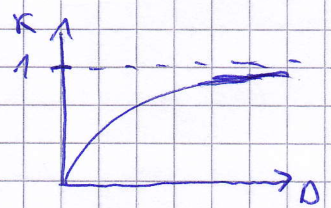
$$= \underline{\underline{\frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} r^D}} \quad , \left(\frac{2}{D\Gamma(\frac{D}{2})} = \frac{1}{\frac{D}{2}\Gamma(\frac{D}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} \right.$$

b) $S_D(d,r) =$ Volumen (Kugelschale $r-d, r$)

$$K = \frac{S_D(r,d)}{V_D(r)}$$

$K(D)$ für $d = \frac{r}{2}$

$$K = \frac{r^D - (r-\Delta)^2}{r^D} = 1 - (1 - \underbrace{\frac{d}{r}}_{\delta})^D \quad , d = \frac{r}{2} \rightarrow \delta = \frac{1}{2}$$



c) $1 - K = 0{,}95$

$\Rightarrow d = [1 - (0{,}95)^{\frac{1}{D}}]\, r$

$D = 3$: $d = 0{,}017\,r$

$D = 4$: $d = 0{,}0127\,r$

$D = 10$: $d = 0{,}005\,r$

$D = 100$: $d = 0{,}0005\,r$

d) $K = 1 - (1-\delta)^D \Leftrightarrow \delta = 1 - (1-K)^{\frac{1}{D}}$

$\cancel{K(1-D)}$

D groß: $\delta \rightarrow 0$, D klein: $\delta \rightarrow 1 - (1-K) = K$

$$\delta \approx \frac{S_D(r,d)}{V_D(r)}$$

e) $S = k_B \ln S_D(r,d) = k_B \ln(\kappa V_D(r)) = k_B \ln(\kappa V_D(r))$

$= \underbrace{k_B \ln V_D(r)}_{S \text{ mal } V_D(r)} + \underbrace{k_B \ln(\kappa)}_{=\text{Fehler der Entropie bei } S_D = \Delta S}$

$D = 10^{23}$, $\kappa \approx 1$

$\Delta S = k_B \ln(1) = 0$

Alternativ: $\dfrac{S_D(r,d) - V_D(d)}{V_D(d)} = \left(\dfrac{r}{d}\right)^D (1-(1-\frac{d}{r}))^D - 1$

$\boxed{A\,8.3}$: $f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda) f(x,y)$

$g(\lambda\mu) = g(\lambda) g(\mu)$

$f(\lambda\mu x, \lambda\mu y) = g(\lambda) f(\mu x, \mu y) = g(\lambda) g(\mu) f(x,y)$

$= g(\lambda,\mu) f(x,y)$

$f(L^n x, L^n y) = g(L^n) f(x,y) = g(L)^n f(x,y)$

$g(L^n) = g(L)^n$

Alternativ: $g(\lambda,\mu) = g(\lambda) g(\mu)$

$\dfrac{\partial g(\lambda\mu)}{\partial\mu} = \lambda g'(\lambda\mu) = g(\lambda) g'(\mu)$

Sei $\mu = 1 \Rightarrow \lambda g'(\lambda) = g'(1) g(\lambda)$

Wähle $g'(1) = p \Rightarrow \lambda g'(\lambda) = p\, g(\lambda)$

TdV $\Rightarrow \dfrac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \dfrac{p}{\lambda} \xRightarrow[\text{nach } \lambda]{\text{Int.}} \ln(g(\lambda)) + C = p \cdot \ln(\lambda) = \ln(\lambda^p)$

$\Leftrightarrow g(\lambda) e^C = \lambda^p \Leftrightarrow g(\lambda) = \lambda^p \cdot \underbrace{e^{-C}}_{=1} \Rightarrow C = 0$

$\lambda = 1$: $g'(1) = p e^{-C} \overset{!}{=} p \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow g(\lambda) = \lambda^p$ $\square$

$\boxed{A\,8.4}$ $p_1 = p_2 + \Delta p$, $p_1 = (\rho_{H_2O} + \rho_S) \cdot g \cdot H$, $p_2 = \rho_{H_2O}\, g\, h$

$\Rightarrow h = H\left(1 + \dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}}\right) - \dfrac{\Delta p}{g\rho_{H_2O}} = H\left(1 + \dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}}\right) - 2\dfrac{RT}{g M_{NaCl}} \cdot \dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}} = H \cdot 1{,}035 - 2{,}84\,m$

$\underline{h > H}$: $\Leftrightarrow H + H\dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}} - 2\dfrac{RT}{g M_{NaCl}} \dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}} > 0$

$\Leftrightarrow H\dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}} > 2\dfrac{RT}{g M_{NaCl}} \dfrac{\rho_S}{\rho_{H_2O}} \Leftrightarrow H > 2\dfrac{RT}{g M_{NaCl}} \Leftrightarrow H > 8068\ m$

$h \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 0 = H \cdot 1{,}035 - 2{,}84\,m$

$H = \dfrac{2{,}84\,m}{1{,}035}$