2.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 18. Oktober 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 27. Oktober 2011 bis $13^{\underline{00}}$Uhr

Hausaufgabe 1: Adiabatengleichung 3 Punkte

Die innere Energie von einem Mol einer bestimmten Substanz sei gegeben durch:

$$U = A\,p^2\,V$$

wobei A eine Konstante, p der Druck und V das Volumen ist.

Bestimmen Sie die Gleichung der Adiabaten in der p-V-Ebene.

Hausaufgabe 2: Adiabaten und Isobaren im V-T-Diagramm 3 Punkte

Welche Beziehung besteht zwischen der Steigung der Adiabaten und der Steigung der Isobaren im V-T-Diagramm?

Diskutieren Sie speziell den Fall von Blei, das die Molwärmen (d.h. spezifische Wärmen pro Mol Blei) $c_p = 6,4\,\frac{cal}{mol}$ und $c_V = 6,03\,\frac{cal}{mol}$ hat.

Hausaufgabe 3: Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit beim idealen Gas 9 Punkte

In dieser Aufgabe werden zwei sehr einfache Modelle eines idealen Gases untersucht. In beiden Modellen befinden sich N nichtwechselwirkenden Gasteilchen in einem würfelförmigen Behälter, der entlang der Koordinatenachsen ausgerichtet ist und die Kantenlänge L hat (Volumen $V = L^3$).

(a) Das einfachste Modell eines idealen Gases geht davon aus, dass sich die nichtwechselwirkenden Gasteilchen parallel zu den Wänden mit der gleichen festen Geschwindigkeit v bewegen. D.h. es bewegen sich jeweils $N/3$ der Teilchen entlang einer Koordinatenachse und werden an den Wänden elastisch reflektiert.

Wie ist der Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit der Teilchen? Bestimmen Sie dazu die mittlere Kraft auf eine Wand des Würfels aus dem Impulsübertrag pro Stoß eines Teilchen und der Anzahl der Stöße pro Zeit.

Wie ist die innere Energie in diesem Fall durch die kinetische Energie der Teilchen gegeben. Wie ist der Zusammenhang zwischen Druck und innerer Energie?

(b) Nun soll der etwas realistischere Fall eines Gases mit isotroper Geschwindigkeitsverteilung betrachtet werden. Das heißt, die Gasteilchen stoßen unter einem bestimmten Winkel θ und mit einem Impuls $|\vec{p}| = m\,v$ gegen die Wände des Behälters und werden reflektiert. Am Ende wird dann über alle möglichen Winkel integriert.

Leiten Sie auch für diesen Fall den Zusammenhang zwischen dem Druck und der Geschwindigkeit v der Gasteilchen her. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (a).

Zeigen Sie dazu, dass die Teilchenzahl pro Zeiteinheit Δt, die ein Flächenelement ΔA trifft, folgendermaßen aussieht:

$$\frac{\rho\,v\cos\theta}{4\,\pi}\,d\Omega\,\Delta A,$$

dabei ist $d\Omega$ das Raumwinkelelement.

TUS Blatt 2 Philip Hebler, Juri Nyrow

Aufgabe 1:

$dU + dW = \delta Q = 0$ – adiabatisch

$\Rightarrow dU = -dW = -p\,dV$

$dU = \frac{dU}{dp}\Big|_V dp + \frac{dU}{dV}\Big|_p dV$

$= 2ApV\,dp + Ap^2\,dV$

$\Rightarrow -p\,dV = 2ApV\,dp + Ap^2\,dV$

$\Leftrightarrow +2ApV\,dp = -(Ap^2 + p)\,dV$

$\Sigma = \frac{9}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{2A}{Ap+1}\,dp = -\frac{dV}{V}$

$\Rightarrow 2\int \frac{1}{2}\frac{2A}{Ap+1}\,dp = -\int \frac{dV}{V}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{Ap+1}{Ap_0+1}\right)^2\right) = -\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$

$V = V_0\left(\frac{Ap_0+1}{Ap+1}\right)^2$ ✓

$\frac{3}{3}$

Aufgabe 2:

$c_p = c_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T + p\right)\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p \quad , \quad c_p = \frac{\delta Q}{\partial T}\Big|_p$

$\Rightarrow \delta Q = c_V\,dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T + p\right)dV = 0 \qquad *$

$\Rightarrow \frac{dT}{dV}\Big|_{adi.} = -\frac{c_p - c_V}{\frac{\partial V}{\partial T}\big|_p \cdot c_V} = \frac{c_V - c_p}{c_V}\frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p = (1-\kappa)\frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p \quad , \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_V}$

Blei: $\frac{\frac{\partial T}{\partial V}\big|_{ad.}}{\frac{\partial T}{\partial V}\big|_p} = \frac{6{,}03 - 6{,}4}{6{,}03} \approx \underline{\underline{-0{,}061}}$ ✓

$\frac{3}{3}$

$*: \overset{=0}{\Leftrightarrow} \frac{dT}{dV} = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\big|_T + p\right)}{c_V} \overset{=\delta Q}{\Leftrightarrow} p + \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T = \frac{c_p - c_V}{\frac{\partial V}{\partial T}\big|_p} \qquad \left(c_p = \frac{\delta Q}{\partial T}\Big|_p\right)$

Aufgabe 3:

a) $\rho = \frac{N/6}{L^3} \quad , \quad N_{\text{würfel}} = \rho \cdot v \cdot \Delta t \cdot L^2 = \frac{NL^2 v \Delta t}{6L^3}$

(b) ?

$\text{Teilchenstrom} = \frac{N_{\text{würfel}}}{\Delta t \cdot L^2} = \frac{NL^2 v\Delta t}{6L^3 \Delta t L^2} = \frac{Nv}{6L^3}$

$\frac{3}{9}$

Druck = Teilchenstrom · Impulsübertrag

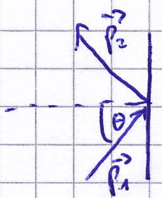
$p = \frac{Nv}{6L^3} \cdot 2mv = \frac{2Nmv^2}{6L^3} = \frac{2}{3}E_{kin}\frac{N}{V}$

$n = 3 \quad -1$

03.11.11 Blatt 2:

$\boxed{A3}$ a) $U = N \cdot E_{kin} \quad \Rightarrow U = \frac{3}{2} pV$

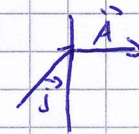
b) $\vec{j} = \frac{1}{2} \rho \vec{v}$, $dF = \frac{dN}{dt} \cdot dp = \vec{j} \cdot d\vec{A}\, dp$



$\Delta p = |\vec{p}_1| \cos\theta + |\vec{p}_2| \cos\theta = 2m |\vec{v}| \cos\theta$

$\frac{dN}{dt} \underbrace{\frac{d\Omega}{2\pi}}_{\text{weil halbe Kugel}} = \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{2} \rho v\, dA \cos\theta = B\, d\Omega\, dA \cos\theta$

mit $B = \frac{\rho v}{4\pi}$



$dF = B\, dA\, 2mv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \cos^2\theta = \frac{\rho v^2}{3} m\, dA$

$\Rightarrow p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} E_{kin}$