9.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 6. Dezember 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 15. Dezember 2011 bis $13^{\underline{00}}$Uhr

Hausaufgabe 9.1: Kritischer Exponent 4 Punkte

Berechnen Sie den kritischen Exponenten β des Van der Waals Gases, der das Verhalten des Ordnungsparameters $v = v_{\text{fl}} - v_{\text{gas}}$ am kritischen Punkt bestimmt, $v \sim |t|^{\beta}$.

Hausaufgabe 9.2: Rushbrooke Relation 4 Punkte

Leiten Sie die Rushbrooke Relation

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \tag{1}$$

für die kritischen Exponenten α, β und γ aus der Skalenrelation

$$G(\lambda^a t, \lambda^b H) = \lambda G(t, H) \tag{2}$$

ab.

Hausaufgabe 9.3: Maxwell-Boltzmann-Verteilung 3 Punkte

Mit Hilfe der Maxwell-Boltzmann-Verteilung lässt sich die Geschwindigkeit der Moleküle eines idealen Gases beschreiben. Sie ist gegeben durch

$$n(v)\mathrm{d}v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v$$

mit $v = |\vec{v}|$.
Leiten Sie daraus die Energieverteilung in einem idealen Gas ab.
Berechnen Sie zudem

i) den wahrscheinlichsten Betrag der Geschwindigkeit,

ii) den Mittelwert des Geschwindigkeitsbetrags,

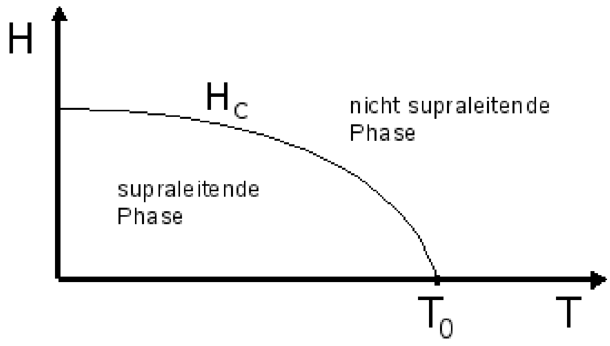
iii) und den Mittelwert von v^2.

Hausaufgabe 9.4: Typ I Supraleiter im äußeren Magnetfeld 4 Punkte

Ein Typ I - Supraleiter im äußeren Magnetfeld H ist dadurch gekennzeichnet, dass sich im supraleitenden Zustand eine Magnetisierung M einstellt, die auf

$$B = H + 4\pi M = 0$$

führt, während im normalleitenden Fall $M = 0$, d.h. $B = H$, angenommen werden kann. B ist das physikalische im Leiter herrschende Magnetfeld. Das Phasendiagramm zeigt, dass sich für $T < T_0$ die supraleitende Phase bis zu einem kritischen Magnetfeld $H_{\text{c}}(T)$ erstreckt. Für $H(T) > H_{\text{c}}$ bricht also der Zustand der Supraleitung wieder zusammen. Der Übergang zum normalleitenden Zustand erfolgt mit einer latenten Wärme Q. Dabei sei das Volumen $V = V_0$ des Systems fest.



a) Übertragen Sie den ersten Hauptsatz und die differentiellen Relationen der thermodynamischen Potentiale auf den vorliegenden Fall. D.h. p und V sind zu ersetzen durch H und $V_0 \cdot M$.
Hinweis: Bei einer Änderung von M im (festen) Volumen V_0 ist eine Arbeit $\delta A = HV_0 \mathrm{d}M$ zu leisten.

b) Leiten Sie aus der Gleichgewichtsbedingung für feste T und H die der Clausius-Clapeyron-Gleichung entsprechende Relation

$$\frac{\mathrm{d}H_\mathrm{c}}{\mathrm{d}T} = -4\pi \frac{Q}{TV_0 H_\mathrm{c}}$$

für die Steilheit der Grenzkurve $H_\mathrm{c}(T)$ ab.

c) Gewinnen Sie daraus durch Differentiation einen Ausdruck für den Sprung der spezifischen Wärme $c_\mathrm{sl} - c_\mathrm{nl}$ (sl $\widehat{=}$ supraleitende Phase; nl $\widehat{=}$ nicht supraleitende Phase). Wie hängt diese Größe bei $T = T_0$ mit der Ableitung der Grenzkurve zusammen?

Juri Ngo..., Philip Hebla 1

Aufgabe 9.3

$E = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2E}{m}$ $\quad dv = \ldots dE$

$n(E) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{3/2} \frac{2E}{m} \exp\left(-\frac{E}{k_BT}\right)$ f $\quad -1$

(i) $\frac{dn(v)}{dv} \overset{!}{=} 0 = \sqrt{\frac{2}{\pi m^2}} \left(\frac{m}{k_BT}\right)^{5/2} v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)(2k_BT - mv)$

$\Rightarrow v = 0$ oder $v = (\pm)\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$ ✓

(ii) $\bar{v} = \int_0^\infty v \cdot n(v)\, dv = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$ ✓

(iii) $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 n(v)\, dv = \frac{3k_BT}{m}$ ✓ $\quad \boxed{\frac{2}{3}}$

$\boxed{\Sigma = \frac{6}{15}}$

Aufgabe 9.4

a) $dU = \delta Q - p\,dV$

$p \to H \qquad V \to V_0 \cdot M$

$\Rightarrow dU = \delta Q - H V_0\, dM$ ✓

$\frac{\partial U}{\partial(V_0 M)} = -H_{mag} \qquad \frac{\partial F}{\partial(V_0 M)} = -H_{mag}$

$\frac{\partial H}{\partial H_{mag}} = V_0 M \qquad \frac{\partial G}{\partial H_{mag}} = V_0 M$

b) Gleichgewicht $\mu_1 = \mu_2$ ✓

$d\mu = dG \overset{!}{=} 0$ bei $N = 1$

$= \frac{\partial G}{\partial T} dT + \frac{\partial G}{\partial H_m} dH_m$

$= -\Delta S\, dT + V_0 \Delta M\, dH_m = 0 \Leftrightarrow \frac{dH_m}{dT} = \frac{\Delta S}{V_0 \Delta M}$ ✓

latente Wärme $Q = T \Delta S \Leftrightarrow \Delta S = \frac{Q}{T}$

Supraleiter: $B = H_m + 4\pi M = 0 \Leftrightarrow \Delta M = -\frac{H_m}{4\pi} + 0$

$\frac{dH}{dT} = -4\pi \frac{Q}{T V_0 H}$

für $H_c \to \frac{dH_c}{dT} = -4\pi \frac{Q}{T V_0 H_c}$ ✓

c) $c_{sp} = T \frac{\partial S}{\partial T}$

$$c_{sL} - c_{nL} = T \frac{\partial (S_s - S_n)}{\partial T}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = - \frac{V_0 H_c}{4\pi} \frac{dH_c}{dT}$$

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial T} = - \frac{V_0}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right]$$

$$\rightarrow c_{sL} - c_{nL} = - \frac{T V_0}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right]$$

bei $T = T_0$ ist $H_c = 0$

$$\Rightarrow c_{sL} - c_{nL} = - \frac{T V_0}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2$$

Es hängt quadratisch zusammen

$\boxed{\frac{4}{4}}$

22.12.11 TuS Blatt 9

$\boxed{A\ 9.1}$: red. Größen

$p = \bar{p} - 1 \quad , t = \bar{t} - 1 \quad , v = \bar{v} - 1$

Gesetz der korresp. Zustände: $\bar{p} = \frac{8}{3} \frac{\bar{T}}{\bar{v} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{\bar{v}^2} \Rightarrow (\bar{p} - \frac{3}{\bar{v}^2})(3\bar{v} - 1) = 8\bar{T}$ (*)

$\Rightarrow ((1+p) + 3(1+v)^{-2})(3(v+1) - 1) = 8(1+t)$

$\Leftrightarrow p(2 + 7v + 8v^2 + 3v^3) = -3v^3 + 8t(1 + 2v + v^2)$

$2p = 8t \Rightarrow p = 4t$

$4t(2 + 7v + 8v^2 + 3v^3) = -3v^3 + 8t(1 + 2v + v^2)$

$\Leftrightarrow v(v^2 + 8vt + 4t) = 0$

$v = 0$ oder $v = -4t \pm \sqrt{16t^2 - 4t}$

$T > T_c \Leftrightarrow t > 0 \Rightarrow v = 0$

$T < T_c \Leftrightarrow t < 0 \Rightarrow v^{\pm} = -4t \pm 2\sqrt{-t}\sqrt{1 - 4t} \approx \pm 2\sqrt{-t}$

$v_{fl} \sim v_G$

$v \sim |t|^{\beta} \sim v^+ - v^- \sim \underbrace{\sqrt{-t}}_{= (-t)^{+1/2}} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$\boxed{A\ 9.2}$: $\frac{\partial G(\lambda^a t, \lambda^b H)}{\partial(\lambda^a t)} \frac{\partial(\lambda^a t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial G(t, H)}{\partial t}$ mit $\frac{\partial G}{\partial t} = -S(t)$

$\Rightarrow S(\lambda^a t, \lambda^b H)\lambda^{a-1} = S(t, H)$

$H = 0$: $S(\lambda^a t, 0)\lambda^{a-1} = S(t, 0) \rightarrow$ wähle $\lambda = (\frac{1}{t})^{1/a}$

$\rightarrow S(1, 0)\, t^{\frac{1}{a} - 1} = S(t, 0) \sim t^{\frac{1}{a} - 1}$

$C_V \sim \frac{1}{T}\frac{\partial S}{\partial t} \sim t^{\overbrace{(\frac{1}{a} - 1) - 1}^{}}_{-\alpha}$ $\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{a} + 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2 - a}$

$\gamma = \frac{2b - 1}{a} \quad , \beta = \frac{1 - b}{a} \Leftrightarrow b = 1 - a\beta$

$\Rightarrow \gamma = \frac{1 - 2a\beta}{a} = \frac{1 - 2\frac{1}{2-\alpha}\beta}{\frac{1}{2-\alpha}} \Leftrightarrow \alpha + 2\beta + \gamma = 2$