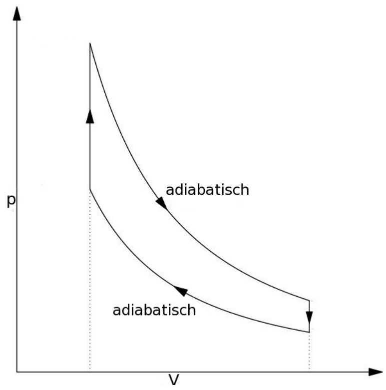
6.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 15. November 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 24. November 2011 bis $13^{\underline{00}}$Uhr

Hausaufgabe 6.1: Otto-Motor 3 Punkte



Der idealisierte Otto-Motor (Automotor) ist durch den in der Skizze dargestellen Kreisprozess definiert. Die Arbeitssubstanz sei ein ideales Gas mit konstantem c_p und c_V.

(a) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η des Otto-Motors als Funktion der Volumenverhältnisse und des Adiabatenexpomenten γ.

(b) Welchem Takt des realen Motors entspricht welche Linie im Diagramm?

Hausaufgabe 6.2: Potentiale des idealen Gases 5 Punkte

Die innere Energie U eines idealen Gases ist gegeben durch

$$U(S,V) = U_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{S-S_0}{C_V}\right) \quad \text{mit}\, \gamma = \frac{C_V - C_p}{C_V} \,\text{und}\, V_0, U_0, S_0 = \text{konstant.} \tag{1}$$

Berechnen Sie mittels Legendre-Transformationen die Enthalpie H, die Gibbs'sche freie Enthalpie G und die freie Energie F jeweils in ihren natürlichen Variablen.

Hausaufgabe 6.3: Thermodynamische Stabilität 4 Punkte

Gegeben seien die folgenden zweiten Ableitungen

$$\left.\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right|_V, \quad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right|_T, \quad \left.\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right|_P \quad \text{und} \quad \left.\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right|_S \tag{2}$$

der Entropie S, der freien Energie F, der Gibbs'schen Enthalpie G und der Enthalpie H in den jeweils natürlichen Variablen.

(a) Welche Vorzeichen haben diese Ableitungen im thermodynamischen Gleichgewicht?

(b) Führen Sie diese Ableitungen durch entsprechende Maxwell-Relationen auf geeignete thermodynamischen Koeffizienten zurück.

(c) Diskutieren Sie kurz, was im physikalischen Experiment vorginge, wenn die so erhaltenen Vorzeichen für die Koeffizienten nicht erfüllt wären.

Hausaufgabe 6.4: Gibbs'sche freie Enthalpie 3 Punkte

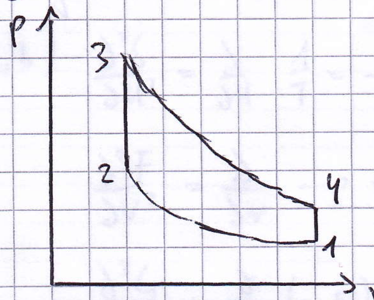
Zeigen Sie, dass die Gibbs'sche freie Enthalpie $G(T,p)$ eines Systems, das sich in einen Wärmebad bei Temperatur T befindet und dessen Druck p konstant gehalten wird, im Gleichgewichtszustands ein Minimum annimmt.

TuS Blatt 6 Philip Hebler, Juri Nyrow

$\boxed{\Sigma = \frac{8}{15}}$

Aufgabe 1:

a)



$1 \to 2$: $dW_1 = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV$ (Mit $dS = \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow p \cdot V^{\kappa} = \text{const.} = C_1$)

$$= -\int_{V_1}^{V_2} \frac{C_1}{V^{\kappa}}\,dV = -C_1 \left[\frac{1}{-\kappa+1} V^{-\kappa+1}\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{C_1}{\kappa-1}\left(\frac{1}{V_2^{\kappa-1}} - \frac{1}{V_1^{\kappa-1}}\right) = \frac{C_1}{\kappa-1}\left(\frac{1}{V_2^{\kappa-1}}\left(1 - \frac{V_2^{\kappa-1}}{V_1^{\kappa-1}}\right)\right)$$

$$= \frac{C_1}{(\kappa-1)V_2^{\kappa-1}}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}\right)$$

$3 \to 4$: Analog mit $C_2 \Rightarrow dW_2 = \frac{C_2}{(\kappa-1)V_2^{\kappa-1}}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}\right)$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{C_1 - C_2}{(\kappa-1) V_2^{\kappa-1}}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}\right) ✓$$

Aus $2 \to 3$ und $4 \to 1$ folgt: $dW = 0 \Rightarrow Q_1 = C_V(C_1 - C_2)$ f ?

Mit $\kappa = \frac{c_p}{c_V} \Rightarrow (\kappa-1)C_V = C_p - C_V$ folgt:

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q_1} = \frac{C_1 - C_2}{(\kappa-1)C_V(C_1 - C_2)}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}\right) = \cancel{\frac{1}{C_p - C_V}}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}\right)$$

b) Nach dem Ansaugen der Frischluft folgt:

$1 \to 2$: Wärmezufuhr durch Zünden f

$2 \to 3$: Verbrennen der Gasladung ✓ (−1)

$3 \to 4$: Arbeitstakt ✓

$4 \to 1$: Wärmeabfuhr durch Öffnen des Auslassventils f

$\boxed{\frac{2}{3}}$

TUS

Aufgabe: 6.3

a, b) $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U}\frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial U}\Big|_V = -\frac{1}{T^2 c_V} < 0$ für $c_V > 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V} - p = \frac{1}{V\kappa_T} > 0$ für $V, \kappa_T > 0$

$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T}(-S) = - \frac{\partial S}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial T} = -\frac{1}{T}c_p \cancel{>} 0$ für $T, c_p > 0$

$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p}V = -V\kappa_T < 0$ für $V, \kappa_T > 0$

c) die Extrema werden umgedreht, d.h. aus Minima werden Maxima und umgekehrt.

-1

Daraus folgt auch, dass sich die Vorzeichen der thermodynamischen Koeffizienten umdrehen würden

ja und was bedeutet das!

$\boxed{\frac{3}{4}}$

Aufgabe: 6.4

$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\Big|_p > 0$ laut Aufgabe 6.3

$\Rightarrow$ da die zweite Ableitung immer positiv ist, sind alle möglichen Extremstellen auch Minima

$\frac{3}{3}$

01.12.11 TuS Blatt 6

$\boxed{A1}$: b) $1 \to 2$: Verdichten | $3 \to 4$: Kraftakt

$2 \to 3$: Zündung | $4 \to 1$: Gaswechsel

a) $\eta = \frac{q_{zu} - q_{ab}}{q_{zu}} = 1 - \frac{q_{ab}}{q_{zu}}$, $q_{zu} = c_V(T_3 - T_2)$, $q_{ab} = c_V(T_4 - T_1)$

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}\right)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}, \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} \qquad V_a = V_2 = V_3, \quad V_b = V_1 = V_4$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \Leftrightarrow \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}\frac{T_3/T_2 - 1}{T_3/T_2 - 1} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

$\boxed{A2}$: $U(S,V) = U_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right)$

$$F(T,V) = U - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}_{T} S \qquad \Big| \; T = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{c_V} U_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right)$$

$$\hookrightarrow \exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right) = \frac{T c_V}{U_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$$

$$\Rightarrow S(T) = \ln\left(\frac{T c_V}{U_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}\right) \cdot c_V + S_0$$

$$= \cancel{U_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma}} \frac{T c_V}{\cancel{U_0}} \cancel{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}} - T S_0 - T c_V \underbrace{\ln\left(\frac{T c_V}{\cancel{U_0}}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}\right)}_{= \ln\left(\frac{T c_V}{\cancel{U_0}}\right) + \gamma \ln\left(\frac{V_0}{V}\right)}$$

$$G(T,p) = F - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial V}}_{-p} V \qquad \Big| \; -p = \frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\gamma c_V T}{V} \Rightarrow V(p) = -\frac{\gamma c_V T}{p}$$

$$G = c_V T - T S_0 - T c_V \ln(T c_V) - \gamma T c_V \ln\left(-\frac{V_0 p}{\gamma c_V T}\right)$$

$$H(S,p) = U - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial V}}_{-p} V \qquad \Big| \; \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{U_0}{V_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma-1} \gamma \exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right) = -p$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{p}{\gamma}\frac{V_0}{U_0}\exp\left(-\frac{S-S_0}{c_V}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_0 = V$$

$$\Rightarrow H = U_0 \left[\exp\left(-\frac{S-S_0}{c_V}\right)\frac{p}{\gamma}\frac{V_0}{U_0}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right) + p V_0 \left[-\frac{V_0}{U_0}\frac{p}{\gamma}\exp\left(-\frac{S-S_0}{c_V}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$= \frac{\gamma - 1}{\gamma} p V_0 \left[-p \frac{V_0}{U_0 \gamma} \exp\left(-\frac{S-S_0}{c_V}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\boxed{A3}$: a, b): $\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\Big|_p = -\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_p = -\frac{c_p}{T} \leq 0$

c) c_p, c_V darf kein anderes Vorzeichen haben, wäre sonst physikalisch nicht möglich