2. Klausur zur Thermodynamik und Statistik

WS 96/97

Freitag, 07. Februar 1997

$13^{\underline{00}}$ Uhr — $15^{\underline{00}}$ Uhr

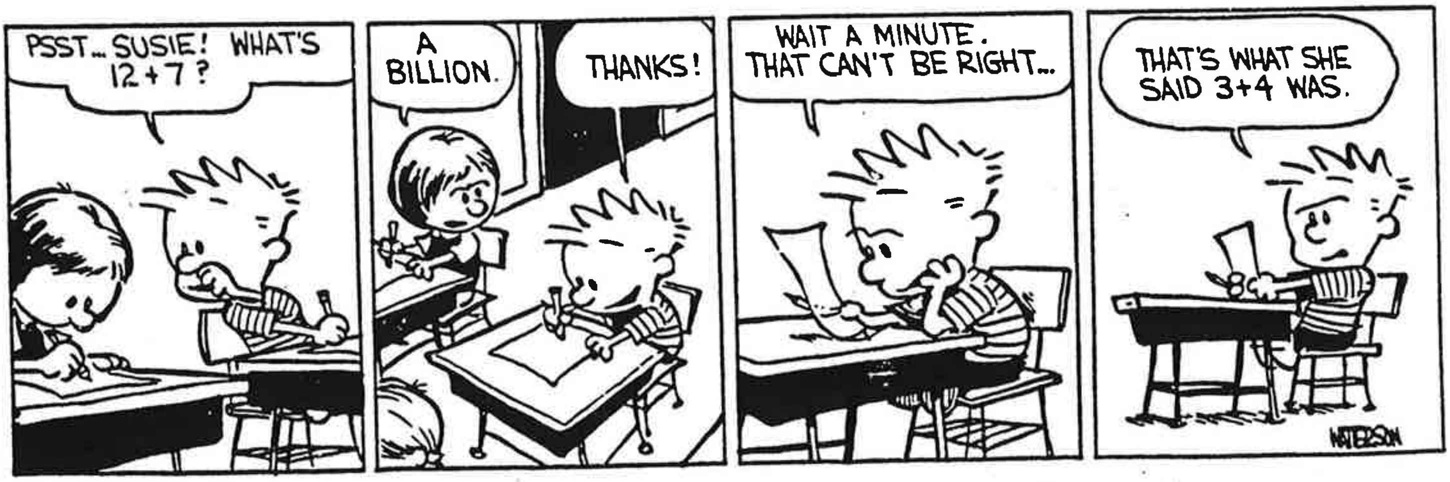
Name: [redacted] Vorname: [redacted] Übungsgruppe: [redacted]

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte	5	5	5	0	15

Bitte beachten Sie:

- 20 Punkte sind 100 %, mit 7 Punkten ist die Klausur bestanden.
- Es werden alle Aufgaben bewertet.

Viel Erfolg !



Prof Brandt

2. Klausur zur Thermodynamik und Statistik WS 94/95

06.02.1995, 10.15 – 12.00 Uhr

Name: Vorname: Übungsgruppe:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Bitte beachten Sie:

Nur die vier punktbesten, von Ihnen bearbeiteten Aufgaben werden bewertet.
16 Punkte entsprechen 100 %.
30 % genügen zum Bestehen.

Viel Erfolg !

Klausurbesprechung .

TuS 2. Klausur
WS 94/95
Prof. Brandt

[redacted]

2

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei ein klassisches, ideales, ultrarelativistisches Gas. Für die Energie des einzelnen Teilchens gilt dann

$$\varepsilon = c|\vec{p}|$$

Berechnen Sie die freie Energie, den Druck und die innere Energie, jeweils als Funktion von T, V und N.

Kanonische Zustandssumme:

$$Q_N(T,V) = \int \frac{d^{3N}p \, d^{3N}q}{h^{3N} N!} e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|}$$

$$= \frac{1}{h^{3N} N!} \left\{ V \int d^3p \, e^{-\beta c|\vec{p}|} \right\}^N$$

$$= \frac{1}{N!} \left\{ \frac{V}{h^3} \frac{1}{(\beta c)^3} 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dx \, x^2 e^{-x}}_{= \Gamma(3) = 2} \right\}^N$$

$$= \frac{1}{N!} \left\{ \frac{V}{(\beta c h)^3} 8\pi \right\}^N$$

$$A(T,V,N) = -kT \ln Q_N = -NkT \ln \left\{ \frac{8\pi V}{(\beta c h)^3} \right\} + kT \ln N!$$

$$U(T,V,N) = A + TS = A - T \frac{\partial A}{\partial T}\Big|_{V,N} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{A}{T} \right)\Big|_{V,N}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_N = 3NkT$$

$$p(T,V,N) = -\frac{\partial A}{\partial V}\Big|_{T,N} = \frac{NkT}{V}$$

wie ideales Gas!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Man betrachte ein System aus zwei Teilchen, die in jedem der drei Zustände mit Energien $0, \epsilon$ und 2ϵ sein können.
Berechnen Sie die Zustandssumme des Systems bei beliebiger Temperatur T und daraus dann die freie Energie für tiefe Temperaturen T, wenn die Teilchen jeweils Fermionen, Bosonen (alle im gleichen vorgegebenen Spinzustand) oder klassische, d.h. unterscheidbare, Teilchen sind.

$N=2$, kanonisch rechnen (d.h. $\mu = 0$)

allg. gilt $$Z = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta H} = \sum_{\{n_i\}} e^{-\beta \sum_i \varepsilon_i n_i} \qquad i = 1,2,3$$

i) Fermionen   betrachte mögl. Konfigurationen, Pauli-Prinzip

$$Z = e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}$$

$$A = -\frac{1}{\beta}\ln Z = \varepsilon - \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}\right)$$

$$\overset{\beta\to\infty}{=} \varepsilon - \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-2\beta\varepsilon}}{\beta}\right)$$

Entwicklung: $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ für $x \ll 1$

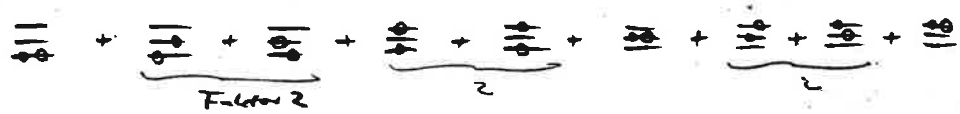
ii) Bosonen

$$Z = 1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}$$

$$A = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}\right)$$

$$\overset{\beta\to\infty}{=} -\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-2\beta\varepsilon}}{\beta}\right)$$

iii) unterscheidbare Teilchen



$$Z = 1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + 2e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}$$

$$A = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + 2e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}\right)$$

$$\overset{\beta\to\infty}{=} -\frac{2e^{-\beta\varepsilon}}{\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-2\beta\varepsilon}}{\beta}\right)$$

$\lim_{T\to 0}$ für ii) und iii): A wird exponentiell klein!

3

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Ein quantenmechanisches System besitze fünf normierte Energieeigenzustände $|\Psi_1>, |\Psi_2>, \ldots, |\Psi_5>$ mit den Energien $E_1 < E_2 < \ldots < E_5$. Es befinde sich zur Zeit $t = 0$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p < 1$ im Zustand $|\Psi_1>$ und $(1-p)$ im Zustand $|\Psi_2>$.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator und den Dichteoperator zur Zeit $t = 0$ explizit an.

b) Ist der Dichteoperator stationär?

c) Berechnen Sie $<H>$ und $<H^2>$.

d) Handelt es sich um einen reinen Zustand?

a) $\hat{H} = \sum_{i=1}^{5} |i\rangle E_i \langle i|$ oder $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & & & & 0 \\ & E_2 & & & \\ & & E_3 & & \\ & & & E_4 & \\ 0 & & & & E_5 \end{pmatrix}$

$\hat{\rho}(t=0) = p\,|1\rangle\langle 1| + (1-p)\,|2\rangle\langle 2|$ oder $\hat{\rho}(t=0) = \begin{pmatrix} p & & & & 0 \\ & 1-p & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

b) Ja, da $[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0$.

z.B. Matrixmultiplikation:

$$\hat{H}\hat{\rho} = \begin{pmatrix} E_1 & & & 0 \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & & & & 0 \\ & (1-p) & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 p & & & & 0 \\ & E_2(1-p) & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}\hat{H} = \begin{pmatrix} p & & & & 0 \\ & (1-p) & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & & & 0 \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 p & & & & 0 \\ & E_2(1-p) & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{H}\hat{\rho}$$

c) $\langle H \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{H}) = E_1 p + E_2(1-p)$ s. b)

$$\langle H^2 \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{H}^2) = Sp\left[\begin{pmatrix} p & & & & 0 \\ & (1-p) & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1^2 & & & 0 \\ & E_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_5^2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= Sp\begin{pmatrix} pE_1^2 & & & & 0 \\ & (1-p)E_2^2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = pE_1^2 + (1-p)E_2^2$$

d) nein, falls $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$

$$\hat{\rho}^2 = \begin{pmatrix} p^2 & & & & 0 \\ & (1-p)^2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$ nur für $p = 0$ oder $p = 1$.

4br.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für die spezifische Wärme gilt allgemein:

$$c_v \sim \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$$

Leiten Sie diesen Zusammenhang her. Sie können diese Aufgabe klassisch oder quantenmechanisch rechnen.

Es gilt: $\quad c_v = \frac{\partial U}{\partial T}$

$$U = \langle H \rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial \beta} Z$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Z$$

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Z - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta} Z\right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial \beta} Z\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta}\langle H \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} U = kT^2 c_v$$

✓

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben ist ein Sytem von Pseudobosonen mit der Dispersionsrelation $\epsilon \sim k^\alpha$ in d-Dimensionen. Berechnen Sie den Exponenten δ der Temperaturabhängigkeit von $c_v \sim T^\delta$.

innere Energie: Sei $\epsilon(\vec{k}) = ck^\alpha$

$$U = \sum_{\vec{k}} \frac{\epsilon(\vec{k})}{e^{\beta\epsilon(\vec{k})}-1} = \frac{L^d}{(2\pi)^d}\int d^dk \frac{\epsilon(\vec{k})}{e^{\beta\epsilon(\vec{k})}-1}$$

$$= \frac{L^d}{(2\pi)^d}\int d^dk \frac{ck^\alpha}{e^{\beta ck^\alpha}-1}$$

Substitution: $x := \beta c k^\alpha$, $\quad (\Leftrightarrow k = (\frac{x}{c\beta})^{1/\alpha})$

$$dx = \alpha\beta c k^{\alpha-1} dk$$

$$= \alpha \frac{x}{k} dk = \alpha x \left(\frac{c\beta}{x}\right)^{1/\alpha} dk$$

$$\Leftrightarrow \quad d^dk = d^dx \left(\frac{x}{c\beta}\right)^{d/\alpha} \frac{1}{(\alpha x)^d}$$

$$= \underbrace{\frac{L^d}{(2\pi)^d}\frac{1}{\alpha^d}\frac{1}{c^{d/\alpha}}}_{=:C_1} \int \frac{d^dx}{x^d}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{d}{\alpha}} \frac{\frac{x}{\beta}}{e^x-1}$$

$$= C_1 \int \frac{d^dx}{x^{d-1}} \frac{x^{d/\alpha}}{e^x-1} \cdot \frac{1}{\beta^{1+d/\alpha}}$$

$$\propto T^{1+d/\alpha}$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V \propto T^{\frac{d}{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\delta = \frac{d}{\alpha}}}$$

4

Aufgabe 6 (4 Punkte)

N nicht miteinander wechselwirkende klassische Teilchen befinden sich im Inneren einer Kugel (um den Ursprung) vom Radius R in einem Potential $U(\vec{r}) = \alpha|\vec{r}|^3$. Berechnen Sie

a) die klassische kanonische Zustandssumme $Q_N(T,V)$

b) die freie Energie $A(T,V,N)$

c) die spezifische Wärme c_V. Was ergibt sich für c_V bei $\alpha \to 0$; was für hohe und tiefe T?

a)

$$Q_N(T,V) = \int \frac{d^{3N}p\, d^{3N}q}{h^{3N} N!}\, e^{-\beta \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \alpha|q_i|^3\right)}$$

$$= \frac{1}{N!}\Big\{ \underbrace{\int \frac{d^3p}{h^3} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}}_{=\left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3/2}} \underbrace{\int_{\text{Kugel}} d^3q\, e^{-\beta\alpha q^3}}_{} \Big\}^N$$

$$4\pi \int_0^R dq\, q^2 e^{-\alpha\beta q^3}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\frac{1}{\alpha\beta}(-1)e^{-\alpha\beta q^3}\Big|_0^R$$

$$= \frac{4\pi}{3}\frac{1}{\alpha\beta}\left(1 - e^{-\alpha\beta R^3}\right)$$

$$= \frac{1}{N!}\left\{\left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3/2}\left(\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\alpha\beta}(1-e^{-\alpha\beta R^3})\right)\right\}^N$$

b)
$$A(T,V,N) = -\frac{1}{\beta}\ln Q_N(T,V)$$

$$= kT\ln N! - kTN\ln\left\{\left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3/2}\frac{4\pi}{3}\right\}$$
$$- kTN\ln\left\{\frac{1-e^{-\alpha\beta R^3}}{\alpha\beta}\right\}$$

c)
$$c_V = \frac{\partial u}{\partial T}\Big|_V, \qquad u = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Q_N(T,V)$$

$$u = -\frac{1}{Q_N}\frac{\partial}{\partial\beta}Q_N$$

$$= \frac{3}{2}\frac{N}{\beta} - \frac{\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1-e^{-\alpha\beta R^3}}{\alpha\beta}\right)^N}{\left(\frac{1-e^{-\alpha\beta R^3}}{\alpha\beta}\right)^N}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{N}{\beta} - N\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\alpha\beta\,\alpha R^3 e^{-\alpha\beta R^3} - \alpha(1-e^{-\alpha\beta R^3})}{1-e^{-\alpha\beta R^3}}$$

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta} + \frac{N}{\beta} - N\frac{\alpha R^3}{e^{\alpha\beta R^3}-1} = \frac{5}{2}NkT - N\frac{\alpha R^3}{e^{\alpha\beta R^3}-1}$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{5}{2}Nk - N\alpha R^3\,\frac{(-\alpha R^3 e^{\alpha\beta R^3})}{(e^{\alpha\beta R^3}-1)^2}\cdot\left(\frac{-1}{kT^2}\right)$$

$$C_V = \frac{5}{2}Nk - N\frac{(\alpha R^3)^2}{kT^2}\,\frac{1}{4\sinh^2\left(\frac{\alpha\beta R^3}{2}\right)}$$

$\underline{\alpha\to 0}$: $\sinh x \approx x$ für $x\to 0$

$$\curvearrowright \quad C_V = \frac{5}{2}Nk - \frac{N}{kT^2}\frac{(\alpha R^3)^2}{4\left(\frac{\alpha\beta R^3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{2}Nk$$ freie Teilchen ✓

$\underline{T \text{ klein}}$: $\beta\to\infty$: $\frac{1}{4\sinh^2 x} \approx e^{-x}$ für $x\to\infty$

$$\curvearrowright \quad C_V = \frac{5}{2}Nk - \underbrace{\frac{N}{kT^2}(\alpha R^3)^2 e^{-\alpha\beta R^3}}_{\text{exponentiell klein}}$$

$\underline{T \text{ groß}}$: $\beta\to 0$: $\frac{1}{4\sinh^2 x} \approx \frac{1}{4x^2}$ (wie $\alpha\to 0$)

$$\curvearrowright \quad C_V = \frac{5}{2}Nk - \frac{N}{kT^2}\frac{(\alpha R^3)^2}{4\left(\frac{\alpha\beta R^3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{2}Nk$$