3.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 25. Oktober 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 3. November 2011 bis 13$^{\underline{00}}$Uhr

Hausaufgabe 1: Thermodynamische Relation **4 Punkte**

Beweisen Sie, dass zwischen der adiabatischen ($\delta Q = 0$) und isothermen Kompressibilität

$$\kappa_{\text{ad}} := -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_{\text{ad}}, \quad \kappa_T := -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_T \tag{1}$$

die Relation

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_{\text{ad}}} = \frac{C_p}{C_V} \tag{2}$$

besteht, wobei C_p und C_V die Wärmekapazitäten sind.

Hausaufgabe 2: Wärmepumpe **4 Punkte**

Wir wollen eine Wärmepumpe durch einen Carnot-Prozess beschreiben. Aus dem Reservoir 1 (Erdboden) der Temperatur T_1 soll über einen Carnot-Prozess die Wärmemenge ΔQ_2 in ein Reservoir 2 (Heizung) der Temperatur T_2 gepumpt werden.
Die Bodentemperatur sei durch $T_1 = 5°$C gegeben und um das Haus bei diesen Temperaturen anständig zu heizen sei $T_2 = 45°$C. Berechnen Sie die Leistungszahl der Wärmepumpe, die durch das Verhältnis der abgegebenen Wärmemenge zur aufgewendeten Arbeit ΔW gegeben ist. Würde sich eine solche Wärmepumpe bei den handelsüblichen Strom- und Gaspreisen lohnen?

Hausaufgabe 3: Zweite Hauptsatz **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung besprochenen Sätze von Kelvin und Clausius äquivalent sind.
Hinweis: Beweisen Sie es durch Widerspruch.

Hausaufgabe 4: Beziehung zwischen c_p und α **4 Punkte**

Zeigen Sie die Beziehung

$$T\mathrm{d}S = c_p\mathrm{d}T - \alpha TV\mathrm{d}p. \tag{3}$$

Hier ist α der thermische Expansionskoeffizient, T die Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstanten Druck, V das Volumen und S die Entropie.

TuS Blatt 3

Philip Hebler,
Juri Nyrow

1	2	3	4	Σ
/	4	3	/	7

Aufgabe 3: Clausius (C) ⇔ Kelvin (K)

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: Es gibt eine Maschine $\bar{C}$, die Clausius (C) widerspricht. Diese Maschine wird an eine erlaubte Wärmekraftmaschine angekoppelt, die die Wärmemenge Q bei der höheren Temperatur benötigt. Man gibt Q an die zweite Maschine, die dafür Arbeit liefert und die Abwärme Q_2 an das kältere Reservoir abgibt. Diese Maschine $(\bar{K})$ ist jedoch nach Kelvin verboten.

⇒: Aus $\bar{C}$ folgt $\bar{K}$.

Zweite Annahme: Es gibt eine Maschine $(\bar{K})$, die man mit einem Kühlaggregat zusammenschaltet, das die Arbeit von $\bar{K}$ ausnutzt, um die Wärme Q_2 dem kälteren Reservoir zu entnehmen und $Q + Q_2$ an das wärmere Reservoir zu übertragen. Diese Maschine $(\bar{C})$ ist jedoch nach Clausius verboten.

⇒ Aus $\bar{K}$ folgt $\bar{C}$

Aus $\bar{C} \Rightarrow \bar{K}$ und $\bar{K} \Rightarrow \bar{C}$ folgt $K \Leftrightarrow C$ ③ □

Aufgabe 2:

$$N = \frac{Q_{warm}}{Q_{warm} - Q_{kalt}} \approx \frac{T_{warm}}{T_{warm} - T_{kalt}} = \frac{318\,K}{40\,K} = 7{,}95$$

D.h.: Steckt man 1 kWh elektrischer Energie rein, so erhält man 7,95 kWh Wärmeenergie.

1 kWh Gas: 6,6 cent ⇒ 6,6 cent · 7,95 = 52,47 cent

1 kWh el. Leistung: 22,6 cent ⇒ Wärmepumpe ~~...~~ lohnt sich!

④

10.11.11 TuS Blatt 3

A1 $\frac{\kappa_T}{\kappa_{ad.}} = \frac{C_p}{C_V}$ $\kappa_{ad} = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_{ad.}$, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T$

$C_x = T\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_x$

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_{ad}} = \frac{\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_T}{\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_{ad.}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T}{\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_{ad.}} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_{ad.}$$

$$C_p = T\frac{\partial S}{\partial T} = T\frac{\partial(S,p)}{\partial(T,p)}\frac{\partial(S,V)}{\partial(S,V)}\frac{\partial(T,U)}{\partial(T,U)}$$, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$= T\frac{\partial(S,p)\,\partial(S,V)\,\partial(T,V)}{\partial(S,V)\,\partial(T,V)\,\partial(T,p)} = T\frac{\partial p}{\partial V}\Big|_S \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T = C_V \underbrace{\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_S}_{=\frac{\kappa_T}{\kappa_{ad.}}}$$

$$\Rightarrow \frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_{ad.}}$$

A4 $TdS = C_p dT - \alpha TV dp$

$TdS = dU + pdV$, $\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p$, $C_p = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p + p\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p$

$dU = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p dT + \frac{\partial U}{\partial p}\Big|_T dp$ (Vollst. Dif. $dU \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial p}\Big|_T$)

dS vollständiges differential

$$dS = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p dT + \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\Big|_T dp + \frac{1}{T}p\,dV$$

$$= \left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p + \frac{1}{T}p\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p\right)dT + \left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\Big|_T + \frac{1}{T}p\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T\right)dp$$

vollst. Diff. $\Rightarrow -\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial p}\Big|_T - \frac{1}{T^2}p\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T = \frac{1}{T}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p$

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{T}C_p dT + \frac{1}{T}\left(-T\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p\right)dp = \frac{1}{T}C_p dT - \alpha V dp$$