2 TuS

**Aufgabe 1 ( 3 Punkte )**

Gegeben sei die Einteilchenzustandsdichte eines Systems wechselwirkungsfreier Fermionen: $N(\varepsilon)=c\varepsilon^{\alpha}\Theta(\varepsilon)$. Zeigen Sie, daß dann die innere Energie U proportional zu p~~/~~V ist und bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor.

$$\mathfrak{z} = \mathrm{Sp}\; e^{-\beta(H-\mu N)} \qquad \ln \mathfrak{z} = \ln \mathrm{Sp}\; e^{-\beta H_t}$$

$$u = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \mathfrak{z} \Big|_z = U$$

$$-\frac{1}{\beta} \ln \mathfrak{z} = \Omega = -pV$$

$$\mathfrak{z} = \prod_k (1+e^{-\beta\varepsilon_k} z) \qquad \Omega = -\frac{1}{\beta}\sum_i \ln(1+e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)})$$

$$\ln \mathfrak{z} = \sum_k \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_k} z) \qquad = -\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} N(\varepsilon) \ln(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})\,d\varepsilon$$

$$= V\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_k} z) \qquad N(\varepsilon) = c\varepsilon^{\alpha}\Theta(\varepsilon)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta}\right)^{d/2} f(z,V,\beta) \qquad \text{wie sieht } \varepsilon_k \text{ aus?}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \mathfrak{z}\Big|_z \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{d/\alpha} f(z,V)$$

$$= -\frac{d}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{d}{\alpha}+1} f(z,V) \qquad \frac{1P}{1}$$

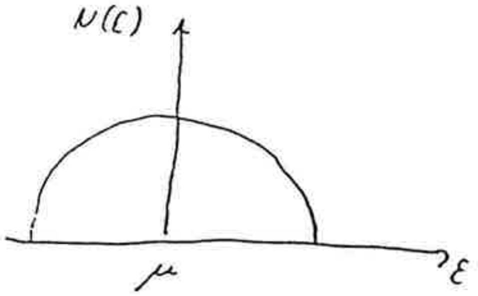
$$= -\frac{d}{\alpha}\,\frac{1}{\beta}\underbrace{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{d/\alpha} f(z,V)}_{\ln \mathfrak{z}}$$

$$U = \frac{d}{\alpha}\,\frac{1}{\beta}\ln \mathfrak{z} = \frac{d}{\alpha}\,pV \qquad \text{q.e.d.}$$

für d Dimensionen

**Aufgabe 2 ( 3 Punkte )**

Gegegben sei eine spiegelsymmetrische Zustandsdichte $N(\varepsilon)$ eines idealen Fermionensystems.
Man zeige: Liegt für T=0 das chemische Potential $\mu(T,N)$ auf der Symmetrieachse von $N(\varepsilon)$ (s. Abb.), so liegt es dort auch für alle Temperaturen größer als Null.




Herleitung $\mu(T,N)$

Zustandsdichte: $N(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^2} \int d^2k \; \delta(\varepsilon - \varepsilon_k)$

$$= \frac{V}{(2\pi)^2} \, 2\pi \int k\,dk \; \delta(\varepsilon - \varepsilon_k)$$

$$= \frac{V}{2\pi} m \underbrace{\int_0^\infty dk^2 \; \delta(2m\varepsilon - k^2)}_{=\Theta(\varepsilon)}$$

$$N(\varepsilon) = \frac{mV}{2\pi} \Theta(\varepsilon)$$

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{mV}{2\pi} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} z^{-1} + 1} \qquad z = e^{\beta\mu}$$

$$x = e^{\beta\varepsilon} \qquad dx = \beta e^{\beta\varepsilon} d\varepsilon$$

$$d\varepsilon = \frac{1}{\beta x} dx$$

$$\langle N \rangle = \frac{mV}{2\pi\beta} \int_1^\infty dx \, \frac{1}{x} \frac{1}{x z^{-1} + 1}$$

nur in 2 Dimensionen

$$\int dx \, \frac{1}{x} \frac{1}{x z^{-1} + 1} = \int dx \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x + z} \right)$$

$$= \ln x - \ln(x + z)$$

**Aufgabe 3 ( 5 Punkte )**

Die Rotationsenergieniveaus eines 2-atomigen Moleküls haben die Form:

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I}\, l(l+1) \quad , \quad l = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

und sind $(2l+1)$-fach entartet ($I$ = Trägheitsmoment = const.).

Zeigen Sie :

a) Für $T \to 0$ ($kT \ll \hbar^2/2I$) ist der Beitrag dieser Rotationsniveaus zur spezifischen Wärme

$$C_{rot} = 3k \left( \frac{\hbar^2}{I} \right)^2 \beta^2 \exp(-\beta\hbar^2/I) \quad .$$

b) Für $T \to \infty$ ($kT \gg \hbar^2/2I$) ist $C_{rot} = k$ .
( Hinweis: Für $T \to \infty$ kann man die $l$-Summe in der Zustandssumme in ein Integral umformen).

**Aufgabe 4 ( 4 Punkte )**

Betrachten Sie ein System von Pseudobosonen (Magnonen) mit der Dispersionsrelation

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = a\, k^2 + b\, h$$

mit den Konstanten a und b und dem äußeren Magnetfeld h ( a, b, h > 0 ).

Die Magnetisierung des Systems sei gegeben durch:

$$m(T,h) = 1 - 2\, n(T,h) \; .$$

wobei $n(T,h) = \langle N \rangle / V$ die Dichte der Magnonen ist.

Zeigen Sie, daß

$$m(T,h) - m(T,0) = \text{const.} \cdot \sqrt{h} \quad \text{für kleine } h.$$

Hinweis: Es gilt

$$g_{3/2}(z) = \zeta(3/2) - 2\sqrt{-\pi \ln(z)} \quad \text{für } z \to 1.$$

O

**Aufgabe 5 ( 4 Punkte )**

Bestimmen Sie die Dichteverteilung eines idealen Gases, das in einem Zylinder mit dem Radius R und der Länge L eingeschlossen ist und zusammen mit diesem als Ganzes mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ (konstant) rotiert.

Berechnen Sie außerdem die Energie dieses Gases sowohl im mitrotierenden als auch im ruhenden Koordinatensystem. Das ganze System ist dabei als rein klassisch zu betrachten.

Hinweis:
Die Energien im ruhenden und mitbewegten Koordinatensystem sind durch folgende Beziehung miteinander verknüpft:

$$E_{ruh} = E_{rot} + \underset{\sim}{L}\,\Omega \,.$$

Dabei bezeichnet $\underset{\sim}{L}$ den Drehimpuls des Gases als Ganzes.

8

$$\vec{L}_{\delta} = \sum_{\text{Teilchen}} \vec{L} \quad m_i\, \Omega\, r_i^2$$

Falscher Ansatz!

Für alle $m_i = m$

$$\vec{L}_{\delta} = L \cdot 2\pi\, \Omega \int_0^R dr\, r^3\, e^{\beta m \Omega^2 r^2}$$

$$= L\, 2\pi\, \Omega \left\{ r^3 e^{\beta m \Omega^2 r^2} \Big|_0^R - \int_0^R dr \frac{r}{\beta m \Omega^2} e^{\beta m \Omega^2 r^2} \right\}$$

$$= L\, 2\pi\, \Omega \left\{ R^3 e^{\beta m \Omega^2 R^2} - \frac{1}{\beta m \Omega^2} \left[ \frac{1}{2\beta m \Omega^2} e^{\beta m \Omega^2 r^2} \right]_0^R \right\}$$

$$= L\, 2\pi\, \Omega \left\{ R^3 e^{\beta m \Omega^2 R^2} - \frac{1}{2(\beta m \Omega^2)^2} e^{\beta m \Omega^2 R^2} + \frac{1}{2(\beta m \Omega^2)} \right\}$$

6

**Aufgabe 6 ( 4 Punkte )**

Der "Spin up" - Zustand eines Spin-1/2-Teilchens sei durch den Vektor $\binom{1}{0}$ charakterisiert, der "Spin down"-Zustand durch $\binom{0}{1}$. Der Hamiltonoperator des Teilchens in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ in z-Richtung ist gegeben durch:

$$H = -\gamma\, B_z s_z ,$$

der Spinvektor durch:

$$S = (s_x, s_y, s_z) = \hbar/2 \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

Zur Zeit $t=0$ sei der Dichteoperator gegeben durch:

$$\rho(0) = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie bitte die Erwartungswerte $\langle s_x \rangle$, $\langle s_y \rangle$ und $\langle s_z \rangle$ als Funktionen der Zeit.

$$\Rightarrow \quad \rho(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} e^{i\gamma|\vec{B}|t} \\ -\frac{1}{2} e^{-i\gamma|\vec{B}|t} & 1 \end{pmatrix}$$

$$-i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\hat{H}\ \hat{\rho}(t)]$$

$$= -\gamma B_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho(0)} + \gamma B_z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma B_z \left( -\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \gamma B_z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

X

1P

$$\rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma B_z \frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(t) = \rho(0) \begin{pmatrix} 1 & e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma B_z} \\ e^{\frac{i}{\hbar}\gamma B_z} & 1 \end{pmatrix}$$

X

$$\langle \hat{A} \rangle = S_p(\rho \hat{A})$$

$$\langle s_x \rangle = S_p(\rho\, s_x) = S_p\left( \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma B_z} \\ e^{\frac{i}{\hbar}\gamma B_z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$