10.Übung zur Thermodynamik und Statistik WS2011/12

Ausgabe: 13. Dezember 2011 Priv.-Doz. Dr. U. Löw
Abgabe: 22. Dezember 2011 bis 13$\underline{00}$Uhr

Hausaufgabe 10.1: Bohr-van Leeuwen Theorem 4 Punkte

Beweisen Sie das *Bohr-van Leeuwen Theorem*, welches besagt, dass Magnetismus ein rein quantenmechanischer Effekt ist. Zeigen Sie dazu, dass die Magnetisierung eines klassischen Systems immer verschwindet, d.h.

$$\vec{M}_{\text{klass}} = -\frac{\partial F_{\text{klass}}}{\partial \vec{H}} = 0. \tag{1}$$

Hier ist H ein äußeres Magnetfeld und F_{klass} die klassische Freie Energie.

Hausaufgabe 10.2: Klassische Zustandssumme 5 Punkte

N nicht miteinander wechselwirkende klassische Teilchen der Masse m befinden sich im Inneren eines Zylinders in einem Potential

$$U(\vec{r}) = \alpha \left(x^2 + y^2\right) + \gamma |z|, \qquad \alpha, \gamma > 0. \tag{2}$$

Der Zylinder habe die Höhe $2h$, den Radius R und sei im Koordinatenursprung zentriert. Die Zylinderachse falle mit der z-Achse zusammen.

(a) Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme Z.

(b) Berechnen Sie die innere Energie U. Wie lautet diese im Grenzfall $\alpha, \gamma \to 0$?

(c) Berechenn Sie die spezifische Wärme C_V. Wie verhält sich diese für hohe bzw. tiefe Temperaturen T?

Hausaufgabe 10.3: Barometrische Höhenformel einer bösen Parallelwelt 4 Punkte

Betrachten Sie Teilchen der Masse m in dem Potential $V(z) = kz^2$. Diese befinden sich in einer Luftsäule mit Querschnitt L^2.

(a) Leiten Sie die Einteilchenzustandsumme Z_1 ab.

(b) Bestimmen Sie daraus die mittlere Gesamtenergie.

(c) Berechnen Sie die Dichte der Teilchen zwischen z und $z + \mathrm{d}z$.

Hausaufgabe 10.4: Gibbs Paradoxon 2 Punkte

Zeigen Sie, dass sich die Mischungsentropie des idealen Gases in der Thermodynamik nur dann richtig ergibt, wenn man in der mikrokanonischen Zustandssumme den Faktor $N!$ einführt.

TUS Blatt 10 Philip Hebler, Juri Nyrow

Aufgabe 10.3:

1	2	3	4	Σ
4	4	3	/	11

$$E(\vec r,\vec p) = \frac{\vec p^2}{2m} + kz^2$$

a) $$Z_1 = \int d^3r\, d^3p\, \frac{1}{h^3} e^{-\beta E} = \int d^3r\, d^3p\, \frac{1}{h^3} \exp\left(-\beta \frac{\vec p^2}{2m} - k\beta z^2\right)$$

$$= \int d^3r\, e^{-k\beta z^2} \int d^3p\, e^{-\frac{\vec p^2}{2m}\beta} \cdot \frac{1}{h^3}$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{\int_0^L dx \int_0^L dy}_{=L^2} \int_0^\infty dz\, e^{-k\beta z^2} \cdot \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\frac{1}{h^3}$$

$$= L^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta k}} \cdot \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{2} L^2 \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\pi^2}{\beta^2} =: \frac{C}{\beta^2}$$

b) $$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z_1) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\frac{C}{\beta^2}\right)$$

$$= -N\underbrace{\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln(C)}_{=0} - \ln(\beta^2)) = N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(\beta^2) = \frac{2N}{\beta} = 2Nk_BT$$

c) $$N(z)\,dz = \left(\int n(\vec r,\vec p)\, d^3p\, dx\, dy\right) dz \quad, n(\vec r,\vec p) = \frac{N}{Z_1}\frac{1}{h^3} e^{-\beta E}$$

$$= \frac{N}{Z_1} \underbrace{\int d^3p\, e^{-\beta \frac{\vec p^2}{2m}} \frac{1}{h^3}}_{\text{siehe a)}} \int_0^L dx \int_0^L dy\, e^{-\beta k z^2} dz$$

$$= \frac{N}{Z_1} L^2 \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3/2} e^{-\beta k z^2} dz$$

$$= \frac{N L^2 \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3/2} \sqrt{k}\,\beta^2}{\frac{1}{2}L^2 \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \pi^2} e^{-\beta k z^2} dz = 2N\sqrt{\frac{\beta k}{\pi}} e^{-\beta k z^2} dz$$

4

(*): ausführlicher: $\int d^3p\, e^{-\beta\frac{\vec p^2}{2m}} = \int dp_x dp_y dp_z\, e^{-\beta\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}}$

Mit $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} = 2\cdot\int_0^\infty e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ folgt:

$$\int d^3p\, e^{-\beta\frac{\vec p^2}{2m}} = \int_{-\infty}^\infty dp_x\, e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}} \cdot \int_{-\infty}^\infty dp_y\, e^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}} \int_{-\infty}^\infty dp_z\, e^{-\beta\frac{p_z^2}{2m}}$$

$$= \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}$$

Aufgabe 10.1:

$$H = \frac{1}{2m}\sum_i \left(\vec p_i + \frac{q}{c}\vec A(\vec r_i)\right)^2 + V(\vec r) \text{ mit } \vec B = \vec\nabla \times \vec A$$

$\Rightarrow$ klassische Zustandssumme: $Z \sim \int d^{3N}\vec p_i \int d^{3N}\vec r_i\, e^{-\beta H(\vec p_i + \frac{q}{c}\vec A(\vec r_i), \vec r_i)}$

Die Substitution $\vec p_i\,' = \vec p_i - \frac{q}{c}\vec A(\vec r_i)$ führt dann zu:

$Z \sim \int d^{3N}\vec p_i\,' \int d^{3N}\vec r_i\, e^{-\beta H(\vec p_i\,', \vec r_i)}$, was nicht mehr von $\vec A$ und somit auch nicht mehr von $\vec B$ und $\vec H$ ($\vec H \sim \vec B$) abhängt. 4

$$\Rightarrow \vec M_{klass} = -\frac{\partial F_{klass}}{\partial \vec H} = -\frac{\partial}{\partial \vec H}\left(-\frac{1}{\beta}\ln(Z)\right) = \frac{1}{\beta}\underbrace{\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \vec H}}_{=0} = 0$$

~~10.2~~ Aufgabe 10.2

a) $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V$

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\int e^{-\beta H} \, d^3\vec{p} \, d^3\vec{q} \right)^N$$

$$= \frac{1}{N!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{\vec{p}^2}{2m}} d^3\vec{p} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\beta \alpha r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi \int_{-h}^{h} e^{-\beta \gamma |z|} dz \right]^N$$

$$= \frac{1}{N!} \left[\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \cdot 2\pi \left(- \frac{e^{-\beta\alpha R^2} - 1}{2\beta\alpha} \right) \cdot \frac{2}{\beta\gamma} \left(1 - e^{-\beta\gamma h}\right) \right]^N$$

$$= \frac{1}{N!} \left[\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \frac{2\pi}{\alpha\gamma\beta^2} \left(1 - e^{-\beta\alpha R^2}\right)\left(1 - e^{-\beta\gamma h}\right) \right]^N$$ (✓)

(hier fehlen die Faktoren zwar, aber bei U sind die wieder da!)

b) $U = -\frac{\partial}{\partial\beta} (\ln(Z)) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$

$$= -N \left(-\frac{7}{2} \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha R^2}{e^{\beta\alpha R^2} - 1} + \frac{\gamma h}{e^{\beta\gamma h} - 1} \right)$$

$\alpha, \gamma \to 0$

$\Rightarrow$ mit de L'Hôpital $\quad U = \frac{7}{2} \frac{N}{\beta} - \frac{N}{\beta} - \frac{N}{\beta} = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} = \frac{3}{2} N k_B T$

c) $$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{7}{2} N k_B - N k_B \left(\frac{\alpha R^2}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\alpha R^2}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\alpha R^2}{k_B T}} - 1\right)^2} - N k_B \left(\frac{\gamma h}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\gamma h}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\gamma h}{k_B T}} - 1\right)^2}$$

$T \to \infty : \quad C_V = \frac{3}{2} N k_B$

$T \to 0 : \quad C_V = \frac{3}{2} N k_B$ f

−1

4

ThS Blatt 10 12.01.12

$\boxed{\text{A 10.2}}$

c) $T \to 0$ $(\beta \to \infty)$: $C_V = \frac{7}{2} N k_B$

$T \to \infty$ $(\beta \to 0)$: $C_V = \frac{3}{2} N k_B$