1 — 2 TuS .

Aufgabe 1 : (5 Punkte) (5)

Berechnen Sie für das klassische ultrarelativistische Gas

$$\mathcal{H}(p,x) = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i| \tag{1}$$

die kanonische Zustandssumme in der Form

$$Z_{\substack{klassisch \\ kanonisch}} = (A\frac{V}{N}T^3)^N \tag{2}$$

wobei Sie in der Konstanten A alle unwesentlichen Faktoren unterbringen. Berechnen Sie aus dieser Form das thermodynamische Potential $\Phi_1(T,V,N) = F(T,V,N)$ und daraus die Entropie S und die Wärmekapazität

$$C_V = T(\frac{\partial S}{\partial T})_{V,N} \tag{3}$$

Tips: $\int_0^\infty dx\, x^2 \exp(-x) = 2$; $N! \approx (\frac{N}{e})^N$ (Stirling)

$$Z_{\substack{klass. \\ k.}} = \frac{1}{h^{3N}N!} \int d^{3N}p\, d^{3N}x\; e^{-\beta H(p,x)} \quad ✓$$

$$= \frac{1}{h^{3N}N!} \int d^{3N}p\, d^{3N}x\; e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|} \quad ✓$$

$$= \frac{1}{h^{3N}N!} \left(\int d^3x\right)^N \left(\int d^3p\, e^{-\beta c p}\right)^N \quad ✓$$

$$= \frac{V^N}{h^{3N}N!} \left(4\pi \int_0^\infty dp\; p^2 e^{-\beta c p}\right)^N \quad ✓$$

$$= \frac{V^N}{h^{3N}N!} \left(\frac{4\pi}{(\beta c)^3} \int_0^\infty du\; u^2 e^{-u}\right)^N \quad ✓ \qquad u = \beta c p, \quad du = \beta c\, dp$$

$$= \frac{V^N}{h^{3N}N!} \left(\frac{8\pi k^3}{c^3} T^3\right)^N \qquad \delta = \frac{8\pi k^3}{c^3}$$

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

$$\Rightarrow \quad Z_{\substack{klass \\ kan.}} = \left(\frac{e\delta}{h^{3N}} \frac{V}{N} T^3\right)^N$$

$$= \left(A \frac{V}{N} T^3\right)^N \qquad A = \frac{e\delta}{h^3} = \frac{8\pi k^3 e}{h^3 c^3} \quad ✓$$

Aufgabe 2 : (5 Punkte)

Berechnen Sie aus der klassisch kanonischen Zustandssumme

$$Z_{\substack{klassisch \\ kanonisch}} = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

die großkanonische und daraus das große thermodynamische Potential. Gewinnen Sie aus ihm die Zustandsgleichung und die Entropie in der Form $S(T, V, N)$. Um welches System handelt es sich?

$$Z_{gk} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_k(N) \qquad z = e^{\beta\mu}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}\left(\frac{zV}{\lambda^3}\right)^N$$

$$= \exp\left(\frac{zV}{\lambda^3}\right) \qquad 1P$$

$$\Omega(\beta, \beta\mu; V) = -\frac{1}{\beta}\ln Z_{gk} = -\frac{1}{\beta}\frac{zV}{\lambda^3} = -pV \qquad 1P$$

$$\Rightarrow \frac{pV}{kT} = \frac{zV}{\lambda^3}$$

$$\langle N\rangle = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \frac{1}{\beta}\frac{V}{\lambda^3}\frac{\partial z}{\partial\mu} \qquad z = e^{\beta\mu} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial\mu} = \beta e^{\beta\mu} = \beta z$$

$$= \frac{Vz}{\lambda^3}$$

1P 1P

$$\Rightarrow \frac{pV}{kT} = \langle N\rangle \Rightarrow \boxed{pV = NkT}$$

$\boxed{\text{klassisches, ideales Gas!}}$

$$\cancel{S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T} = k\frac{zV}{\lambda^3} + kT\frac{\partial}{\partial T}\frac{zV}{\lambda^3}}$$

$$\cancel{= k\frac{zV}{\lambda^3} + kTzV\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{\lambda^3}}$$

$$\cancel{= k\frac{zV}{\lambda^3} +}$$

$$\cancel{\lambda \sim T^{-1/2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^3} \sim T^{3/2}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{\lambda^3} = \frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{1}{\lambda^3}}$$

Aufgabe 3 : (5 Punkte)

a)
Beweisen Sie für die großkanonische Gesamtheit der Quantenstatistik

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial < \hat{N} >}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial N}{\partial \mu} =< \hat{N}^2 - < \hat{N} >^2 >$$

b)
Formen Sie noch die rechte Seite so um, daß $\frac{1}{\beta}\frac{\partial N}{\partial \mu} \geq 0$ ist!

c)
Berechnen Sie aus der großkanonischen Zustandssumme für das ideale Gas

$$Z_{gk} = \exp(\frac{zV}{\lambda^3})$$

die linke Seite der Formel aus a). Interpretieren Sie das Resultat!

$$\hat{\rho}_{gk} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Sp\ e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}$$

$$<\hat{N}> = \frac{Sp\,\hat{N} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Sp\ e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}$$

$$\frac{\partial<\hat{N}>}{\partial\mu} = \frac{1}{\beta}\left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial\mu} Sp\,\hat{N} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{\underbrace{Sp\,e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}_{Z_{gk}}} - \frac{Sp(\hat{N}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}Sp\,e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Z_{gk}^2}\right.$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu} Sp\, e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \beta\, Sp\,\hat{N} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$$ (Übung)

$$\frac{\partial}{\partial\mu} Sp\,\hat{N} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \beta\, Sp\,\hat{N}^2 e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$$

(unter der Voraussetzung $[\hat{H},\hat{N}]=0$

$$= \frac{Sp\,\hat{N}^2 e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Z_{gk}} - \frac{(Sp\,\hat{N}\,e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})^2}{Z_{gk}^2}$$

$Z\rho$

$$= <N^2> - <\hat{N}^2>$$

$$= <\hat{N}^2 - <\hat{N}^2>>$$

✓

Aufgabe 4 : (6 Punkte)

a)
Leiten Sie aus dem großkanonischen Potential $\Omega(T, \mu, V)$ und der Bedingung $S/N = const$ eine Isentropengleichung für ideale nichtrelativistische Bose- und Fermigase in der Form $VT^{\alpha} = const$ oder $pV^{\gamma} = const$ her, und zwar ohne lange Rechnung.
Hinweis: Bringen Sie zunächst Ω in die Form

$$\Omega = VT^{\delta} Fkt.(\mu/kT)$$

und berechnen Sie daraus S und N.
b)
Was änderst sich im Fall des ultrarelativistischen idealen Quantengases?

O. B. d. A. Spin $= 0$ (oder fest)

a)

$\Omega = -pV$,

Laut Vorlesung für nichtrelativistisches, ideales
Fermi: ~~Bosegas~~ : $pV = \frac{1}{\beta} \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$

Bose-gas : $pV = \frac{1}{\beta} \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$

$$\Rightarrow \Omega = -\frac{1}{\beta} V T^{+3/2} F(\beta\mu)$$

$$= -k T^{5/2} V F(\beta\mu)$$

wobei
$$F(\beta\mu) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{2m\pi k})^{3/2}}{h^3} f_{5/2}(e^{\beta\mu}) & \text{Fermi} \\ \frac{\sqrt{2m\pi k}^{3/2}}{h^3} g_{5/2}(e^{\beta\mu}) & \text{Bose} \end{cases}$$

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{5}{2} k T^{3/2} V F(\beta\mu) - \frac{k\mu}{T^2} T^{5/2} V F'(\beta\mu) \qquad \left(F'(\beta\mu) = \frac{\partial F(\beta\mu)}{\partial(\beta\mu)} \right)$$

$$= \frac{5}{2} k T^{3/2} V F(\beta\mu) - \mu T^{1/2} V F'(\beta\mu)$$

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = k T^{5/2} V \beta F'(\beta\mu) = T^{3/2} V F'(\beta\mu)$$

$\frac{S}{N} = \frac{5}{2} \frac{\beta}{f_{5/2}} \frac{1}{F'(\beta\mu)} - \frac{\mu}{T} \overset{!}{=} const.$

Aufgabe 5 : (7 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System, dessen Spektrum aus den Niveaus $E_+ = E_0 + CB$ und $E_- = E_0 - CB$ besteht.

a)

Berechnen und diskutieren Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten der beiden Zustände, die mittlere Anregungsenergie $\overline{E} - E_-$ und die spezifische Wärme als Funktion von T. Berücksichtigen Sie dabei auch den Fall negativer Temperaturen $T \leq 0$. Warum sind diese hier physikalisch möglich?

b)

Berechnen Sie (B = Magnetfeld) die Magnetisierung und die magnetische Suszeptibilität.

a)

$$Z_1 = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-}$$
$$= e^{-\beta E_0}\left(e^{-\beta CB} + e^{\beta CB}\right)$$
$$= 2e^{-\beta E_0}\cosh(\beta CB)$$

$$p_+ = \frac{e^{-\beta E_+}}{Z_1} = \frac{e^{-\beta CB}}{2\cosh(\beta CB)}.$$

$$p_- = \frac{e^{\beta CB}}{2\cosh(\beta CB)}$$

$T \to 0+ : \beta \to \infty$ $\quad \cosh(\beta CB) \approx \frac{1}{2} e^{\beta CB}$

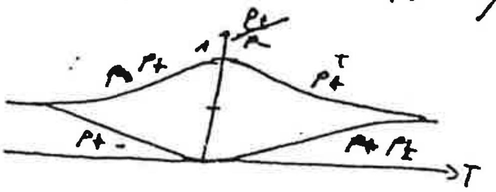
$\Rightarrow p_+ \to e^{-2\beta CB} \to 0$

$p_- \to 1$

$T \to \infty : \beta \to 0$ $\quad e^{\pm\beta CB} \approx 1$ $\quad \cosh \beta CB \approx 1$

$\Rightarrow p_+ = p_- = \frac{1}{2}$

$T \to 0- : \beta \to -\infty$ $\Rightarrow$ $p_- \to 0$, $p_+ \to 1$



Schön!

$$\overline{E} = E_+ p_+ + E_- p_-$$

$$= \frac{(E_0 + CB)\, e^{-\beta CB} + (E_0 - CB)\, e^{\beta CB}}{2\cosh(\beta CB)}$$

$$= \frac{E_0\left(e^{-\beta CB} + e^{\beta CB}\right) + CB\left(e^{-\beta CB} - e^{\beta CB}\right)}{2\cosh(\beta CB)}$$

$$= \frac{2E_0\cosh(\beta CB) - 2CB\sinh(\beta CB)}{2\cosh(\beta CB)} = E_0 - CB\tanh(\beta CB)$$

$$\overline{E} - E_- = CB\left(1 - \tanh(\beta CB)\right)$$