GTI - Übungszettel 5

Johannes Rohloff, Kostas Sakellariou

20. Mai 2013

Aufgabe 1

a)

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache $\{w \in \{a, b, .., z\}^* \mid w = w^r\}$

Diese Grammatik lässt sich durch zwei Produktionen sehr einfach darstellen:

$$S \rightarrow ZSZ \mid Z$$
$$Z \rightarrow a \mid b \mid ... \mid z \mid \varepsilon$$

Hiermit sind alle Wörter produzierbar die der geforderten Eigenschaft entsprechen. Alle Annagramme haben gespiegelt, an der Mitte, die gleichen Buchstaben. Der einzige Buchstabe der dieser Regel nicht unterliegt ist der Buchstabe in der Mitte. Bei einer Graden zahl an Buchstaben ist dieser das leere Wort ε.

b)

Die gegebenen Produktionen erzeugen folgende Sprache: Die Sprache besteht zum einen aus beliebeigen folgen von a's und b's, wobei sich der erste und der letzte Buchstabe unterscheiden müssen. Diese Wörter können noch umrahmt sein von einer Reihe a's und b'. Diese sind dann an der Mitte des Wortes gespiegelt und in gleicher Reihenfolge.

Aufgabe 2

a)

Welche Sprache wird von der Grammatik $S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon$ erzeugt?

Die Sprache die beliebig viele Klammern umeinader enthällt und diese in belibiger Reihnfolge wiederholen kann. So sind z.B ()() oder (())() Worte der Sprache. Mann könnte die Sprache Formal ungefähr so beschreiben:
$\{[(^n)^n]^*\}$ wobei n für jede Wiederholung varieren darf.

Ist die Grammatik eindeutig?

Die Sprache ist nicht eindeutig. Es gibt für jedes Wort beliebig viele Ableitungsbäume. Diese können sich durch ein SS immer tiefer verzweigen, wobein das eine S auf ein ε geht. Zum Beispiel kann () durch

$$S \to (S_1)$$

mit

$$S_1 = \varepsilon$$

oder durch

$$S \to S_1 S_2$$

mit:

$$S_1 = ()$$
$$S_2 = \varepsilon$$

b)

Zeigen Sie, dass $S \to (S)S \mid \varepsilon$ diese Sprache eindeutig erzeugt.

Es ist leicht einsichtig, dass diese Produktion die gleiche Sprache erzeugt. Das erste (S) ist einfach nur der ersatz für SS und die Produktion $S \to (S)$.

Es bleibt zu zeigen das diese Sprache eindeutig ist:
Annahme: L nicht eindeutig.

$$\implies \exists w_1, w_2 \in L$$

mit

$$w_1 = w_2$$
$$w_1 = a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}$$
$$w_2 = a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}$$

es gilt nach Vor.

$$a_{1i} = a_{2i} \; \forall i \in \{1, .., n\}$$

Es gibt nur eine Produktion die Klammer erzuegen kann $S \rightarrow (S)$. Alle w müssen durch diese Prodkution erzeugt werden. Somit folgt ein Wiederspruch zur Annahme und die Aussage

Aufgabe 3

Folgende Grammtik beschreibt die Gewünschte Sprache:

$$
\begin{aligned}
S &\to B \\
B &\to B \uparrow M \mid (B) \uparrow M \mid B \uparrow (M) \mid M \\
M &\to P * M \mid (P) * M \mid P * (M) \mid P \\
P &\to Z + P \mid (Z) + P \mid Z + (P) \mid Z \\
Z &\to S \mid a
\end{aligned}
$$

Dabei gilt $a \in \{a, b, .., z\}$. Die Struktur der Grammtik erzwingt die geforderte Assoziativität.