一、1. $\underline{\quad A \quad}$ 2. $\underline{\quad 3 \quad}$。3. $\underline{\quad x \quad}$。4. $\underline{\quad 1 \quad}$。5. $\underline{\quad 0 \quad}$。二、(C或D) (A) (B) (C) (D)

三、计算题(每小题 10 分，共 40 分)

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 的敛散性. $\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 或 $\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdots 8分=\frac{1}{2}<1$ --------------------------10 分

2. 计算 $\int_L \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $A(-1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 对应的一段曲线。

$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=x\\ y=x^3\end{cases}$ $x:-1\to -1$ $\int_L \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^2dx+x^3\mathrm{d}x^3\cdots 8分=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^2dx+3x^5\mathrm{d}x=1$ ------10 分

3. 求微分方程 $y'-2xy=2xe^{x^2}$ 的通解。$y'-2xy=0$，$Y=Ce^{x^2}$ ---6 分 $y=C(x)e^{x^2}=\left(x^2+C\right)e^{x^2}$ --10 分

4. 将 $f(x)=\frac{3x}{x^2-x-2}$ 展为 x 的幂级数。解：$\frac{3x}{(x-2)(x+1)}=x\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{1+x}\right)$

$=x\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+(1)^{n+1}\right)x^{n+1}$ --8 分 收敛域为 $|x|<1\cdots$10 分

四、计算题(每小题 10 分，共 30 分) 1. 求常微分方程 $y'''-4y''+4y'=xe^x$ 的通解。

解：$r^3-4r^2+4r=r(r-2)^2=0,\ Y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$ -------6 分

设 $y^*=(ax+b)e^x$ 得 $(ax+b-a)e^x=xe^x$， 解得 $a=1,\ b=1$， 则 $y^*=(x+1)e^x$

$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}+(x+1)e^x$ ------------10 分

2. 计算 $I=\iint_\Sigma \frac{x^2z^2}{x^2+y^2}dydz+y^2\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}dzdx+\frac{z^3}{x^2+y^2}dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z^2=x^2+y^2$ $(|z|\le 1)$ 的外侧。

解 ： $I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_{1上}}-\iint_{\Sigma_{2下}}=\iiint_\Omega(2x+2y+1)dV-\iint_{D_1}1dxdy+\iint_{D_2}(-1)dxdy$ 高 斯 ----7 分

$=\iiint_\Omega 1dV-2\iint_{D_1}1dxdy=-\frac{4\pi}{3}$ 计算--------10 分

3. 求 1）已知 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，计算 $div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)$。解：$div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\cdots=0$ ---4 分

2）证明空间的格林第二公式 $\iiint_\Omega\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}dS$，其中有界闭域 Ω 的边界曲面为 Σ，

$\vec{n}$ 为曲面 Σ 的外法线，$u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 在 Ω 上二阶偏导连续，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

证：$\iint_D\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}dS=\iint_D\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ u & v\end{vmatrix}\cos\alpha+\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ u & v\end{vmatrix}\cos\beta+\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ u & v\end{vmatrix}\cos\gamma\right)dS=\iiint_\Omega\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz$ ---6 分