普通高等教育“十一五”国家级规划教材

随 机 数 学

(B)

标准化作业简答

吉林大学公共数学中心

2017.08

第一次作业

一、填空题

1．应填$\frac{8}{15}$.

2．解：应填$\frac{5}{8}$.

3．应填 0.6.

分析：$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，

故$P(B)=1-P(A)=0.6.$

4．应填$\frac{1}{3}$.

5. 应填$\frac{17}{25}$.

6．应填$\frac{2}{3}$.

7．应填$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

二、选择题

1．(D)．2.（C)．3．(A)．4.（C)．5．(C)．6.（A）.7．(B)．

三、计算题

1．从 0，1，2，…，9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，求下列事件的概率：$A_1=$｛三个数字中不含 0 和 5｝；$A_2=$｛三个数字中不含 0 或 5｝；$A_3=$｛三个数字中含 0 但不含 5｝.

解：此题为古典概型，三个事件的基本事件总数都是C_{10}^3

（1）$P\left(A_1\right)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$.

（2）$P\left(A_2\right)=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$.

（3）$P\left(A_3\right)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$.

2．三个人独立地去破译一份密码，已知每个人能译出的概率分别为$\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，问三人

中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

解：设 A_i 表示事件“第 i 个人译出密码”，$i=1,2,3.B$ 表示事件“至少有一人译出密码”.

则 $P(B)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$.

3．随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}\,(a>0)$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

解：此为几何概型问题.

设 A 表示事件“原点与该点的连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$”.

则 $P(A)=\dfrac{\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}}{\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

4．仪器中有三个元件,它们损坏的概率都是 0.2,并且损坏与否相互独立.当一个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.25,当两个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.6,当三个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.95，当三个元件都不损坏时,仪器不发生故障.求：（1）仪器发生故障的概率；（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

解：设 A 表示事件“仪器出现故障”，

B_i 表示事件“有 i 个元件出现故障”，i=1，2，3.

（1） $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$，

$P(B_1)=3\times0.2\times0.8^2=0.384$， $P(B_2)=3\times0.2^2\times0.8=0.096$， $P(B_3)=0.2^3=0.008$.

所以 $P(A)=0.384\times0.25+0.096\times0.6+0.008\times0.95=0.1612$.

（2） $P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{0.096\times0.6}{0.1612}=0.3573$.

5．在 100 件产品中有 10 件次品；现在进行 5 次放回抽样检查，每次随机地抽取一件产品，求下列事件的概率：（1）抽到 2 件次品；（2）至少抽到 1 件次品.

解：设 A_i 表示取到 i 件次品，$i=0,1,2,3,4,5$.

（1） $P(A_2)=C_5^2\left(0.1\right)^2\left(1-0.1\right)^3\approx0.73$.

（2） $P(\overline{A_0})=1-\left(1-0.1\right)^5\approx0.41$.

四、证明题

1．设$0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，证明事件$A$与$B$相互独立.

证明：由定义证明.

$$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1 \Rightarrow P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

所以事件A与B相互独立.

2．设事件A的概率$P(A)=0$，证明A与任意事件都相互独立.

证明：设B为任意事件，显然$AB\subset A$，

从而$0\le P(AB)\le P(A)=0$，即$P(AB)=0$，

满足$P(AB)=P(A)P(B)$，

故A与任意事件都相互独立.

第二次作业

一、填空题

1．应填$\frac{11}{24}$．

2. 应填

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

3．应填$\frac{9}{64}$．

4．应填$\sqrt[3]{4}$．

5．应填$\frac{19}{27}$．

6. 应填0.2．

7. 应填$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$．

二、选择题

1.（B）． 2.（D）． 3.（A）. 4.（B）. 5.（D）. 6. （C）． 7.（C）.

三、计算题

1．一批产品由 9 个正品和 3 个次品组成，从这批产品中每次任取一个，取后不放回，直到取得正品为止．用 X 表示取到的次品个数，写出 X 的分布律和分布函数.

解：X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{3}{4}, & 0\le x<1, \\ \frac{21}{22}, & 1\le x<2, \\ \frac{119}{220}, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

2．设随机变量 X 的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

（1）求 $Y=-2X$ 的概率分布；（2）求 $Z=X^2$ 的概率分布．

解：倒表即可．

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10
Y	4	2	0	-2	-4	-6
Z	4	1	0	1	4	9

即

Y	-6	-4	-2	0	2	4
P	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.10

Z	0	1	4	9
P	0.25	0.40	0.25	0.10

3．设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ k(2-x), & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求：（1）k 的值；（2）X 的分布函数．

解：（1）由 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 k(2-x)dx=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}=1$，得 $k=1$．

（2）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，

当 $0\le x<1$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2$，

当 $1\le x<2$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 tdt+\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t=2x-\frac{1}{2}x^2-1$，

当 $x>2$ 时，$F(x)=1$．

4．设在一电路中，电阻两端的电压 (V) 服从 $N(120,4)$，今独立测量了 5 次，试确定有 2 次测定值落在区间 $[118,122]$ 之外的概率．

解：设随机变量 X 表示电阻两端的电压，事件 A 表示电压值落在区间 $[118,122]$ 之内，Y 表示 5 次测量中电压值落在区间 $[118,122]$ 之外的次数。

$$P(A)=P\{118\le X\le 122\}=\Phi(\frac{122-120}{2})-\Phi(\frac{118-120}{2})=\Phi(1)-\Phi(-1)=0.6826.$$

由已知 $Y \sim B(5,0.3174)$

$P\{Y=2\}=C_5^2\times 0.3174^2\times(1-0.3174)^3=0.32.$

5．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x<a,(a>0)\\ 1, & x\ge a,\end{cases}$

求：（1）常数 A 、 B .（2）随机变量 X 落在 $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ 内的概率.（3） X 的概率密度函数.

解：（1） $F(a+0)=A-\dfrac{\pi}{2}B=0, F(a-0)=A+\dfrac{\pi}{2}B=1$，得 $A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{1}{\pi}.$

（2） $P\left\{-\dfrac{a}{2}<X<\dfrac{a}{2}\right\}=F(\dfrac{a}{2})-F(-\dfrac{a}{2}-0)=\dfrac{1}{3}.$

（3） X 的概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, |x|<a,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$

6．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & 其\ 他,\end{cases}$$

且 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{5}{8}$, 求（1）常数 a,b 的值；（2） $P\left\{\dfrac{1}{4}<X\le\dfrac{1}{2}\right\}$.

解：（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}a+b$，

再由 $\dfrac{5}{8}=P\{X>\dfrac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{8}a+\dfrac{1}{2}b,$

解得 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$.

（2） $P\{\dfrac{1}{4}<X\le\dfrac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(x+\dfrac{1}{2})\mathrm{d}x=\dfrac{7}{32}.$

7. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$ 又设 $Y=\begin{cases}+1, X>0,\\ -1, X\le 0,\end{cases}$ 求：（1） Y 的分布律；（2）计算 $P\left\{Y>\dfrac{1}{2}\right\}$.

解：（1） $P\{Y=-1\}=P\{X\le 0\}=F_X(0)=\dfrac{1}{2}$, $P\{Y=1\}=1-P\{Y=-1\}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

分布律为

Y	-1	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

（2）$P\left\{Y > \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$.

8．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, \quad x \le 0, \end{cases}$$

求：随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度函数.

解：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y) = P\{Y \le y\}$.

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\left\{X^2 \le y\right\} = 0$，

当 $y \ge 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\left\{X^2 \le y\right\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$，

因此 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, y > 0, \\ 0, \qquad\qquad y < 0. \end{cases}$

四、证明题

1. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，证明：$Y = aX + b\ (a \ne 0)$ 仍然服从正态分布，并指出参数.

解：教材 59 页例题.

2. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda = 2$ 的指数分布，证明：$Y = 1 - e^{-2X}$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

解：设 $Y = 1 - e^{-2X}$ 的分布函数为 $F_Y(y)$, 取值范围为 $[0,1]$.

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$，

当 $0 \le y < 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\left\{1 - e^{-2X} \le y\right\} = F_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))$，

当 $y \ge 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$，

因此 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, 0 < y < 1, \\ 0, \quad \text{其 它}. \end{cases}$

第三次作业

一、填空题

1．$\max\{X,Y\}$ 的分布律为

$\max\{X,Y\}$	0	1
P	0.16	0.84

2. $P\{X=m\}=\dfrac{m}{2^{m+1}},m=1,2,\cdots$， $P\{Y=n\}=\dfrac{1}{2^n},n=1,2,\cdots$.

3．应填 0.

4．应填$1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

5．应填 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, x^2+y^2\le R^2,\\ 0,\quad 其\quad 它.\end{cases}$

6. 应填 3.

7. 应填 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-2)^2}{18}},-\infty<z<+\infty.$.

二、选择题

1.（B）． 2.（B）． 3.（A）． 4.（C）． 5.（C）． 6.（D）． 7.（B）．

三、计算题

1．设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个数字中等可能取值，随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，求 (X,Y) 的概率分布，并判断 X 和 Y 是否独立.

解：(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

可以验证 X 和 Y 不相互独立.

2. 设随机事件 A、B 满足 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=P(A|B)=\frac{1}{2}$, 令 $X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生,\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生,\end{cases}$ 求（1）(X,Y) 的概率分布；（2）$Z=X+Y$ 的概率分布.

解：（1）$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(AB)=\frac{1}{12}$，$P(A|B)=\frac{1}{2} \Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$，

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$，

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}$，$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}$.

（2）Z 可能取值为 0，1，2. $P\{Z=0\}=\frac{2}{3}, P\{Z=1\}=\frac{1}{4}, P\{Z=2\}=\frac{1}{12}$.

3．已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$（1）求系数 k；（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（3）判断 X 和 Y 是否相互独立；（4）计算概率 $P\{X<2|Y<1\}$；（5）求 $Z=\min\{X,Y\}$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$, 得 $k=2$.

（2）关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0,\end{cases}$ $f_Y(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$

从而 X 和 Y 是相互独立的，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$

（3）相互独立.

（4）$P\{X<2|Y<1\}=1-\mathrm{e}^{-4}$.

（5）$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3z}, z>0,\\ 0, \quad z\le 0.\end{cases}$ 所以 $f_Z(z)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3z}, z>0,\\ 0, \quad z\le 0.\end{cases}$

4. 设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，令 $X=\begin{cases}-1 & 若 U\le -1,\\ 1 & 若 U>-1,\end{cases}$

$Y=\begin{cases}-1 & 若U\le 1,\\ 1 & 若U>1,\end{cases}$ 求 (X,Y) 的联合分布律.

解：(X,Y) 可能取的值为（−1，−1），（−1，1），（1，−1），（1，1）

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1\}P\{U\le 1\}=\frac{1}{4}$，

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1\}P\{U>1\}=0$，

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1\}P\{U\le 1\}=\frac{1}{2}$，

$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1\}P\{U>1\}=\frac{1}{4}$.

5．设 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x,\\ 0, \quad 其它 \quad .\end{cases}$ 求 $Z=2X-Y$ 的概率密度.

解：设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，取值范围 $[0,2]$，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=z-\frac{1}{4}z^2$，

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

从而 $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z,0<z<2\\ 0,其他.\end{cases}$

6．在区间 $[0,1]$ 上随机地投掷两点，求这两点距离的概率密度。

解：设 X,Y 分别表示两个点的坐标，且有 X 与 Y 相互独立，令 $Z=|X-Y|$，

可得 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $z<0$ 或 $z>1$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $0\le z\le 1$ 时，$F_Z(z)=P\{|X-Y|\le z\}=1-2\int_0^1 dx\int_0^{x-z}dy$.

从而 $Z=|X-Y|$ 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z),0\le z\le 1\\ 0,其他.\end{cases}$

第四次作业

一、填空题

1．应填 $E(X) = -0.2$, $E(X^2) = 2.8$，,13.4.

2．应填 $D(2X - 3Y) = 4\sigma_1^2 + 3\sigma_2^2$.

3．应填 $E(Y^2) = 5$.

4．应填 13.

5．应填 $\dfrac{\pi}{6}(b^2 + ab + a^2)$.

6．应填 $D(Y) = \dfrac{8}{9}$.

7．. 应填 $E(X) = 1$， $D(X) = \dfrac{1}{2}$.

二、选择题

1．（C）． 2．（D）． 3．（B）．4． （B）．5．（A）． 6．（C）． 7．（C）．

三、计算题

1．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ cx + b, & 2 \le x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

已知 $E(X) = 2, P\{1 < X < 3\} = \dfrac{3}{4}$，求 a, b, c 的值.

解：由以下三个条件

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow 2a + 6c + 2b = 1,$

$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow 4a + 28c + 9b = 3,$

$P\{1 < X < 3\} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 ax\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (cx + b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 6a + 10c + 4b = 3,$

解得 $a = \dfrac{1}{4}, b = 1, c = -\dfrac{1}{4}$.

2．设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(x + y), & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{其　　它}, \end{cases}$

求 $E(X), E(Y), \mathrm{cov}(X, Y), \rho_{XY}$ 和 $D(X + Y)$.

解：$E(X)=E(Y)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$,

$E(X^2)=E(Y^2)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 x^2\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$，$D(X)=D(Y)=\frac{11}{36}$,

$E(XY)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 xy\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$,

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}$,

$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{11}$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{5}{9}$.

3．设二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数，且$E(X)=-0.2,P\{Y\le 0|X\le 0\}=0.5$，记$Z=X+Y$，求：（1）$a,b,c$的值；（2）$Z$的概率分布；（3）$P\{X=Z\}$.

解：（1）$a+0+0.2+0.1+b+0.2+0+0.1+c=1$

$$-1\times(a+0+0.2)+0\times(0.1+b+0.2)+1\times(0+0.1+c)=-0.2$$

$$P\{Y\le 0|X\le 0\}=\frac{P\{X\le 0,Y\le 0\}}{P\{X\le 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5$$

得$a=0.2,b=0.1,c=0.1$

（2）

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

（3）$P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0.2$

4．在数轴上的区间$[0,a]$内任意独立地选取两点M与N，求线段MN长度的数学期望.

解：设两点的坐标分别为X，Y，则（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2},0\le x,y\le a,\\ 0,\quad 其\quad 它.\end{cases}$$

所求$E(|X-Y|)=\int_0^a\int_0^a\dfrac{|x-y|}{a^2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{a}{3}$.

5．一民航送客车载有 20 名乘客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，假设每位旅客在各个车站下车的可能性相同，且各个旅客是否下车相互独立，求停车次数X的数学期望.

解：引入随机变量，令

$$X_i=\begin{cases}0,第\,i\,站不停,\\ 1,\quad 第\,i\,站停,\end{cases}i=1,2,\cdots,10.$$

从而$X=X_1+\cdots+X_{10}$，又$P\{X_i=0\}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20},P\{X_i=1\}=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$，

所以$E(X_i)=1-(0.9)^{20},E(X)=10\times\left[1-(0.9)^{20}\right]\approx 8.784$（次）.

6．假设由自动流水线加工的某种零件的内径X（毫米）服从正态分布$N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 为不合格品，其余为合格品；销售合格品获利，销售不合格品亏损，已知销售一个零件的利润T（元）与零件内径X的关系为

$$T=\begin{cases}-1,\quad X<10,\\ 20,\quad 10\le X\le 12,\\ -5,\quad X>12,\end{cases}.$$

问平均内径μ取何值时，销售一个零件的平均利润最大.

解：$ET=20\times P\{10\le X\le 12\}-P\{X<10\}-5P\{X>12\}$

$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\,ET}{\mathrm{d}\,\mu}=0,得\mu=11-\left(\ln\dfrac{25}{21}\right)^2\approx 10.9$（mm）

即平均内径μ取 10.9mm 时，销售一个零件的平均利润最大.

第五次作业

一、填空题

1．应填$\dfrac{1}{12}$.

2．应填 0.975.

3．应填$\dfrac{7}{2}$.

二、选择题

1．（B）.

2．（D）.

三、计算题

1．某保险公司多年的统计资料表明，在索赔客户中被盗索赔占 20%，以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔客户中因被盗向保险公司索赔的户数.（1）写出 X 的概率分布；（2）利用德莫佛—拉普拉斯定理，求被盗索赔客户不少 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

解：（1）索赔户为 X，则 $X \sim B(100,0.2)$，

（2）由 De Moivre-Laplace 极限定理

$$P\{14 \le X \le 30\} = P\left\{\frac{14-100\cdot 0.2}{\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}} \le \frac{X-100\cdot 0.2}{\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}} \le \frac{30-100\cdot 0.2}{\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}}\right\}$$

$$\approx \Phi(\frac{5}{2}) - \Phi(-\frac{3}{2}) \approx 0.927.$$

2. 设某种元件使用寿命（单位：小时）服从参数为 λ 的指数分布，其平均使用寿命为 40 小时，在使用中当一个元件损坏后立即更换另一个新的元件，如此继续下去. 已知每个元件的进价为 a 元，试求在年计划中应为购买此种元件作多少预算，才可以有 95%的把握保证一年够用（假定一年按照 2000 个工作小时计算）.

解：假设一年需要 n 个元件，则预算经费为 na 元.

设每个元件的寿命为 X_i, 则 n 个元件使用寿命为 $\sum_{i=1}^{n} X_i$,

由题意 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 2000\right\} \ge 0.95$, 又 $EX_i = \dfrac{1}{\lambda} = 40, DX_i = \dfrac{1}{\lambda^2} = 40^2$,

由独立同分布中心极限定理，$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(40n, 40^2 n\right)$,

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 2000\right\} = 1-\Phi\left(\frac{2000-40n}{40\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 \Rightarrow \frac{n-50}{\sqrt{n}} \ge 1.64 \Rightarrow n \ge 63.04,$$

故年预算至少应为$64a$元.

3．一条生产线的产品成箱包装，每箱的重量时随机的. 假设平均重 50 千克，标准差为 5 千克. 如果用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每量车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0. 977，（$\Phi(2)=0.977$.）

解：设X_i是装运的第i箱的重量，n是箱数，且$E(X_i)=50, \sqrt{D(X_i)}=5, i=1,2\cdots,n.$

$$P\{T_n \le 5000\} = P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}} \le \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}) > 0.977$$

解得$n<98.0199,$，即最多可以装 98 箱.

第六次作业

一、填空题

1．应填 $\overline{x}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}n_ix_i}{n}$， $s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2$， $s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})}$.

2．应填 $a=\dfrac{1}{20}$， $b=\dfrac{1}{100}$，2．

3．应填 $E(\overline{X})=mp$， $D(\overline{X})=\dfrac{mp(1-p)}{n}$.

4．应填 $t(n-1)$.

5．应填 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\lambda^n\,\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, x_i>0,\\ 0, \qquad x_i\le 0.\end{cases}$

二、选择题

1．（B）．2．（C）．3．（D）．4．（D）．5．（A）．

三、计算题

1．设 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$， $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$，试确定 σ 的值，使得 $P\left\{1<\bar{X}<3\right\}$ 最大.

解：由于 $\dfrac{\bar{X}-0}{\sigma/3}\sim N\left(0,1\right)$ ，因此

$$P\left\{1<\bar{X}<3\right\}=P\left\{\frac{3}{\sigma}<\frac{\bar{X}}{\sigma/3}<\frac{9}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{9}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)=g\left(\sigma\right)$$

$$g'\left(\sigma\right)=\varphi\left(\frac{9}{\sigma}\right)\left(-\frac{9}{\sigma^2}\right)-\varphi\left(\frac{3}{\sigma}\right)\left(-\frac{3}{\sigma^2}\right)$$

令 $g'\left(\sigma\right)=0$，解得 $\sigma=\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$

故当 $\sigma=\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时， $P\left\{1<\bar{X}<3\right\}$ 最大.

2．从正态总体 $N(20,3)$ 中分别抽取容量为 10 和 15 的两个相互独立样本，求样本均值之差的绝对值大于 0.3 的概率.

解：设样本均值为 $\overline{X},\overline{Y}$，则 $U=\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,0.5)$，

$$P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>0.3\right\}=1-P\left\{\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}-0\right|}{\sqrt{0.5}}\le\frac{0.3}{\sqrt{0.5}}\right\}=2-2\Phi(0.3\sqrt{2})\approx 0.6744.$$

3．设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是来自正态总体 $N(0, 0.2)$ 的样本，试求 k，使 $P\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i^2 < k\right\}=0.95$.

解：因为 $X_i \sim N(0,0.2), \dfrac{X_i}{\sqrt{0.2}} \sim N(0,1), \dfrac{X_i^{\,2}}{0.2} \sim \chi^2(1), \sum_{i=1}^{8}\dfrac{X_i^{\,2}}{0.2} \sim \chi^2(8)$.

所以 $P\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i^2 < k\right\}=P\left\{\chi^2(8)<\dfrac{k}{0.2}\right\}=0.95$,

查表得 $\dfrac{k}{0.2}=15.507$ ，即 $k=3.1014.$

4．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，样本均值为 $\overline{X}$ ，样本方差为 S^2 ， $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2), D(S^2).$

解： $E(\overline{X})=\mu; D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}; E(S^2)=\sigma^2,$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1), D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1),$$

从而 $D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}.$

5．设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\cos 2x, & 0<x<\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，求样本容量 n ，使 $P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\dfrac{\pi}{12}\}\ge\dfrac{15}{16}$.

解：先求 X 的分布函数，代入有

$$p=1-[1-F(\frac{\pi}{12})]^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\ge\frac{15}{16},$$

解得 $n\ge 4$ ，故 n 取 4.

6. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,1,2^2,3^2,0)$ ，判断 $F=\dfrac{9X^2}{4(Y-1)^2}$ 服从的概率分布.

解：由题意 $X \sim N(0,2), Y \sim N(1,9)$，且相互独立，

从而 $\dfrac{X}{2} \sim N(0,1), \dfrac{Y-1}{3} \sim N(0,1)$，

即 $\dfrac{X^2}{4} \sim \chi^2(1), \dfrac{(Y-1)^2}{9} \sim \chi^2(1)$，

由 F 分布的定义 $F = \dfrac{9X^2}{4(Y-1)^2} \sim F(1,1).$

第七次作业

一、填空题

1．应填 $\hat{\lambda}=\overline{X}$.

2．应填 $\hat{\theta}=2\overline{X}-2$.

3．应填 $\hat{\lambda}=\overline{X}$.

4．应填 $(-0.98,0.98)$.

5．35.

二、选择题

1．（B）．2．（C）．3．（D）．3．（C）．4．（A）．

三、计算题

1．设总体 X 具有概率分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，已知来自总体 X 的样本值为 1，2，1.求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解：$E(X)=-2\theta+3,\bar{x}=\dfrac{4}{3}$,令 $E(X)=\bar{x}$，解得 θ 的矩估计值为 $\widehat{\theta_1}=\dfrac{5}{6}$.

似然函数为 $L(\theta)=2\theta^5(1-\theta),\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$，

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$，

解得 θ 的最大似然值为 $\widehat{\theta_2}=\dfrac{5}{6}$.

2．设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值

解：似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i\ge\theta(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i\ge\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0$

又 $\theta\le x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$，故 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，$L(\theta)$ 取最大值，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

3．设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-(\dfrac{1}{x})^{\beta}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1.\end{cases}$$

其中参数 $\beta>1$ 是未知参数，又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的随机样本，（1）求 X 的概率密度函数 $f(x;\beta)$；（2）求参数 β 的矩估计量；（3）求参数 β 的最大似然估计量.

解：由题意

（1）$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1.\end{cases}$

（2）$EX=\int_1^{+\infty}x\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}\Rightarrow\widehat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

（3）设 $x_1,\cdots,x_n$ 为一组样本值，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1,\\ 0, \quad \text{其　他}.\end{cases} i=1,2,\cdots,n.$$

当 $x_i>1$ 时，$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln(x_1\cdots x_n)$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

得 β 的最大似然估计量为 $\widehat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

四、证明题

1．设总体 X 的均值 $\mu=E(X)$ 及方差 $\sigma^2=D(X)>0$ 都存在，μ 与 σ^2 均未知，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，试证明不论总体 X 服从什么分布，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 都是总体方差 $\sigma^2=D(X)$ 的无偏估计.

证明：教材 145~146 页.

2．设 X_1,X_2,X_3 是总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$ 存在，证明估计量

$$\widehat{\mu_1}=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3,\quad \widehat{\mu_2}=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3,\quad \widehat{\mu_3}=\frac{3}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{1}{5}X_3$$

都是总体 X 的均值 $E(X)$ 的无偏估计量；并判断哪一个估计量更有效.

证明：$E(\widehat{\mu_i})=\mu,D(\mu_1)=\frac{1}{2}\sigma^2,D(\mu_2)=\frac{3}{8}\sigma^2,D(\mu_3)=\frac{11}{25}\sigma^2$，

因为 $D(\mu_2)$ 最小，所以 $\widehat{\mu_2}=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$ 更有效.

3．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，统计量 $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$,证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

解：（1）$ET=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$，

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

第八次作业

一、填空题

1．应填$\dfrac{\sqrt{n-1}}{Q}(\overline{X}-\mu_0)$．

2．应填α．

3．应填$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n)$．

4．应填$|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$．

二、选择题

1．（B）．2．（C）．3．（C）．4．（B）．

三、计算题

1．某车间用一台包装机包装葡萄糖，包得的袋装葡萄糖的净重X（单位 kg）是一个随机变量，它服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，当机器工作正常时，其均值为 0.5kg，根据经验知标准差为0.015 kg（保持不变），某日开工后，为检验包装机的工作是否正常，从包装出的葡萄糖中随机地抽取 9 袋，称得净重为

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511　0.520　0.515　0.512

试在显著性水平$\alpha=0.05$下检验机器工作是否正常．

解：按题意需要检验

H_0： $\mu=0.5$，H_1： $\mu\neq 0.5$，

检验统计量$u=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{x}-0.5}{0.015/\sqrt{9}}\sim N(0,1)$，

拒绝域$W=\left\{|u|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\{|u|\geq 1.96\}$，

经计算$u=\dfrac{\overline{x}-0.5}{0.015/\sqrt{9}}=2.2>1.96$，

故拒绝原假设，即认为机器工作不正常．

2．设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程．

解：设这次考试的考生成绩为X，则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$．

H_0： $\mu=70$， H_1： $\mu\neq 70$，

检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

拒绝域 $W=\left\{|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\left\{|t|\geq t_{0.025}(35)=2.0301\right\}$，

经计算 $t=-1.4$，

故接受原假设，即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

3．设有甲，乙两种零件，彼此可以代用，但乙种零件比甲种零件制造简单，造价低，经过试验获得抗压强度（单位： $\mathrm{kg/cm^2}$ ）为

甲种零件：88，87，92，90，91，

乙种零件：89，89，90，84，88.

假设甲乙两种零件的抗压强度均服从正态分布，且方差相等，试问两种零件的抗压强度有无显著差异（取 $\alpha=0.05$ ）？

解：本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设

H_0： $\mu_1=\mu_2$， H_1： $\mu_1\neq\mu_2$，

检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-0}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

拒绝域 $W=\left\{|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}=\left\{|t|\geq t_{0.025}(8)=2.3060\right\}$，

经计算 $t=0.724$，

故接受原假设，即认为两种零件的抗压强度无显著差异.

4．某无线电厂生产的一种高频管，其中一项指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从一批产品中抽取 8 只，测得该指标数据如下：

66,　43,　70,　65,　55,　56,　60,　72,

（1）总体均值 $\mu=60$，检验 $\sigma^2=8^2$（取 $\alpha=0.05$ ）；

（2）总体均值 μ 未知时，检验 $\sigma^2=8^2$（取 $\alpha=0.05$ ）.

解：本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设

H_0： $\sigma^2=\sigma_0^2=8^2$， H_1： $\sigma^2\neq 8^2$，

（1）均值 $\mu = 60$ 时，检验统计量 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$，

拒绝域：

$$W = \left\{\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \cup \chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = \left\{\chi^2 \geq \chi^2_{0.025}(8) = 17.535 \cup \chi^2 \leq \chi^2_{0.975}(8) = 2.182\right\},$$

经计算 $\chi^2 = 10.3281$，

故接受原假设，即认为 $\sigma^2 = 8^2$.

（2）均值 μ 未知时，检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$，

拒绝域：

$$W = \left\{\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = \left\{\chi^2 \geq \chi^2_{0.025}(7) = 16.013 \cup \chi^2 \leq \chi^2_{0.975}(7) = 1.690\right\},$$

经计算 $\chi^2 = 10.2017$，

故接受原假设，即认为 $\sigma^2 = 8^2$.

综合练习一

一、填空题

1． 0.61． 2．$1/3$ ． 3．$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$ ． 4． $1/2e$． 5．$\dfrac{\sigma^2}{n}$．

6．$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

二、单项选择题

1．A 2．C 3．B 4．B 5．D 6．D

三、按照要求解答下列各题

1．解:（1）由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B_1)&=P(A_1)\cdot P(B_1\mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1\mid A_2)\\
&=0.7\times0.8+0.3\times0.2=0.62\\
P(B_2)&=0.7\times0.1+0.3\times0.7=0.28\\
P(B_3)&=0.7\times0.1+0.3\times0.1=0.1
\end{aligned}
$$

（2）由贝叶斯公式得

$$
P(A_2\mid B_3)=\frac{P(A_2)P(B_3\mid A_2)}{P(A_1)P(B_3\mid A_1)+P(A_2)P(B_3\mid A_2)}
$$

$$
=\frac{0.3\times0.1}{0.7\times0.1+0.3\times0.1}=0.3
$$

2． 解:（1）$F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$得，

$$
A+B(-\frac{\pi}{2})=0,A+B(\frac{\pi}{2})=1,\text{得}A=\frac{1}{2}，B=\frac{1}{\pi}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
&P(-1<x<1)=F(1)-F(-1)\\
&=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

（3）X 的概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty$

3． 解：（1）

$Y \backslash X$	-1	0	1	$P_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

（2）由 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律可知

$$p\{X=-1，Y=0\}=\frac{1}{4}，P\{X=-1\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

所以 X 和 Y 不相互独立。

4． 解：（1）由 $EX=1，DX=9，EY=0，DY=16$，

得 $EZ=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$，

$$DZ=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}Cov(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1+4-2=3$$

(2)
$$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3-3=0$$

所以 $\rho_{XY}=0$

（3）由于二维正态随机变量相关系数为零和相互独立两者是等价的结论，可知 X 与 Z 是相互独立的。

5．解：由于

$$\mu_1 = EX = \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

令 $\mu_1 = A_1$, 即

$$\text{解得}\theta\text{的矩估计量为}\hat{\theta} = \left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \theta^{\frac{n}{2}} (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\sqrt{\theta}-1}$$

取对数，得

$$\ln L(\theta) = \frac{\mathrm{n}}{2} \ln\theta + (\sqrt{\theta}\text{ - }1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\text{令} \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

$$\text{解得}\theta\text{的最大似然估计值为}\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i)^2},$$

$$\theta\text{的最大似然估计量为}\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i)^2}$$

四、按照要求解答下列各题

1． 解：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y) = P\{Y \le y\}$.

当 $y < 0$ 时， $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = 0$，

当 $y \ge 0$ 时， $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$，

因此 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

2．解： $D(\hat{\theta}_1) = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = 4\frac{D(X)}{n} = 4\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$，

记$Y=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,则$\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}Y$

由$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{ny^{n-1}}{\theta^n} & 0<y<\theta \\ 0 & 其他\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}E(Y)=\int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+1}\theta \\ E(Y^2)=\int_0^\theta y^2\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+2}\theta^2\end{cases}$

于是$D(\hat{\theta}_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}D(Y)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left[E(Y^2)-E^2(Y)\right]=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$.

因为$D(\hat{\theta}_2)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}<\frac{\theta^2}{3n}=D(\hat{\theta}_1)$,所以$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效

综合练习二

一、填空题

1. 0. 58；2. 0. 18 ；3. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-1}{2} & 1<y<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ；4. $\dfrac{1}{9}$ ；5. (4.71,5.69)；

6. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

二、单项选择题

1．B　2．C　3. A　4. C　5. D　6. D

三、解答下列各题

1. 解: (1)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) 设 B_i 为从甲箱中取出2件含有 i 件次品的事件（i=0, 1, 2），A 为从乙箱中任取一件是次品的事件，由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_0)\cdot P(B_0)+P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$=0+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}.$$

2. 解 (1) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

(2) $E(X)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-|x|}=0$，$E(X^2)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}=\int_{0}^{\infty}x^2e^{-x}dx=2$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2$.

3. 解 (1) 二维离散型随机变量 (X_1,X_2) 的联合概率分布为

X_1 \ X_2	0	1
0	0. 1	0.1
1	0. 8	0

(2) $E(X_1)=0.8$，$E(X_2)=0.1$，$E(X_1X_2)=0$，$D(X_1)=0.16$，$D(X_2)=0.09$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-0.08.$$

4. 解 $E(\overline{T}_1-\overline{T}_2)=0$，$D(\overline{T}_1-\overline{T}_2)=\frac{25}{20}+\frac{25}{12}=\frac{10}{3}$，$\overline{T}_1-\overline{T}_2\sim N(0,\frac{10}{3})$，

$$P\{|\overline{T}_1-\overline{T}_2|>1\}=1-P\{|\overline{T}_1-\overline{T}_2|\le 1\}=2-2\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}})=0.5824.$$

5. 解 由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，得

$$E(S^2)=\sigma^2=4,\ D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=4,$$

又因 $\overline{X}^2$ 与 $(S^2)^2$ 相互独立，$E(\overline{X})=1$，$D(\overline{X})=4/9$，从而

$$E[(\overline{X}S^2)^2]=E[\overline{X}^2]E[(S^2)^2]$$

$$=\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\}\{D(S^2)+[E(S^2)]^2\},$$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\left(\frac{2\sigma^4}{n-1}+\sigma^4\right)=\frac{260}{9}.$$

四、解答下列各题

1. 解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，有

$$C\int_0^1 dx\int_0^2 x\mathrm{d}y=C=1.$$

(2) $P\{X+Y>1\}=1-\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dx=\frac{5}{6}$

(3)因为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

显然，对任意实数 x 和 y，都有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 与 Y 相互独立.

2. 解(1) $E(X)=\int_0^1 x\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta+1}$ ......2 分

令 $E(X)=\overline{X}\Rightarrow\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{1-\overline{X}}{\overline{X}}$.

(2) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为一组样本值

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$， $0<x_1,\cdots,x_n<1$

取对数 $\ln L(\theta)=-n\ln\theta+\frac{1-\theta}{\theta}\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)$，

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$即$-\frac{n}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ，得 $\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$.

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$.