高等数学作业

答案

AIII

吉林大学公共数学教学与研究中心

2017 年 9 月

第一次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，则$\oint_L (x^2+y^2)^n \mathrm{d}s=$ (D　　)．

（A）$2\pi a^n$；　　（B）$2\pi a^{n+1}$；　　（C）$2\pi a^{2n}$；　　（D）$2\pi a^{2n+1}$．

2．设 Γ 为空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$,$(R>0)$，则$\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s=$ (C　).

（A）πR^3;　　（B）$\frac{1}{3}\pi R^3$;　　（C）$\frac{2}{3}\pi R^3$;　　（D）$\frac{4}{3}\pi R^3$.

3．设 Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 在 $0\le z\le 1$ 的部分，则 $\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S=$ (D　).

（A）$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；　　（B）$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；

（C）$\sqrt{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；　　（D）$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$．

4．设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，$\Sigma_1$ 是 Σ 在第一卦限中的部分，则有(C　　).

（A）$\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$；　　（B）$\iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$；

（C）$\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$；　　（D）$\iint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$．

二、填空题

1．设 C 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，　则$\oint_c (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ___$12a$___ ．

2. 设 Γ 为螺旋线$x=\cos t, y=\sin t, z=t(0\le t\le 2\pi)$，则$\int_\Gamma z\mathrm{d}s$ $\underline{=2\sqrt{2}\pi^2.}$

3. 设 L 为曲线$x^2+y^2=1$，则$\int_L |y|\mathrm{d}s=4$.

4．设 Σ 是平面$x+y+z=4$被圆柱面$x^2+y^2=1$截出的有限部分，则$\iint_\Sigma x\mathrm{d}S$=___0___ ．

5．设 Σ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1\,(z\ge 0)$，已知 Σ 的面积为 A，则

$\iint\limits_\Sigma (4x^2+9y^2+36z^2+xyz)\mathrm{d}S=\underline{36A}$.

三、计算题

1．计算$\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

解：

$L = L_1 + L_2 + L_3$

$L_1: y = 0,\quad 0 \le x \le a \qquad L_2: x^2 + y^2 = a^2$

$L_3: y = x, 0 \le x \le \dfrac{a}{2}$

$\int\limits_{L_1} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}s = \int_0^a \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^a - 1$

$\int\limits_{L_2} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}s = \int\limits_{L_2} e^a ds = \dfrac{\pi a}{4} e^a \ \dfrac{\pi a}{4}$

$\int\limits_{L_3} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \mathrm{e}^{\sqrt{2}x} \sqrt{2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^a - 1$

所以：原式=2（$e^a - 1$）+$\dfrac{\pi a}{4}\ e^a$.

2．求曲线 L：$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$在第一象限内的长度.

解:曲线 L 的参数方程为$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t(0 \le t \le 2\pi)$,从而$\mathrm{d}s = 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$,

$$s = \int_L \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}a.$$

3．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(xy + yz + zx)\mathrm{d}S$, 其中曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截得部分.

解：投影域 $D_{xy}: x^2 + y^2 = 2x$

由于曲面关于 xOz 平面对称，因此

$\int\limits_{\Sigma}(xy + yz + zx)\mathrm{d}S = \int\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}S =$

$\iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{2(x^2 + y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\cos\theta\mathrm{d}r = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta = 8\cdot\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}\sqrt{2} = \dfrac{64}{15}\sqrt{2}$.

4．求 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2 + y^2 + z^2}$，其中 Σ 是介于 $z = 0$ 与 $z = 4$ 之间的柱面 $x^2 + y^2 = 4$.

解；$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\iint\limits_{D_{yz}}\dfrac{1}{4 + z^2}\dfrac{2}{\sqrt{4 - y^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = 2\pi\arctan 2$.

四、应用题

1．求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积.

$A = 16A_1 = 16\iint\limits_{\Sigma_1} dS$

解： $= 16\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dxdy = 16R\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}}\dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}dy$

$= 16R^2$

2．求面密度 $\rho = 1$ 的均匀半球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (z \ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

$I_z = \iint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)\rho\ \mathrm{d}s$

$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$． $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$． $\mathrm{d}s=\dfrac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$I_z=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$
$$=2\pi a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^3 t\cdot\frac{a\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t$$
$$=2\pi a^4\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

第二次作业

学院___________班级__________姓名__________学号___________

一、单项选择题

1．设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 负向一周，则曲线积分

$$\oint_L(x^3-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-y^3)\mathrm{d}y=\text{（ B ）}.$$

（A）0；（B）$-\dfrac{\pi a^4}{2}$；（C）$-\pi a^4$；（D）πa^4．

2．设 L 是椭圆 $4x^2+y^2=8x$ 沿逆时针方向，则曲线积分

$$\oint_L \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\text{（ A ）}.$$

（A）2π；（B）π；（C）1；（D）0．

3. 设曲线积分$\int_L [f(x)-e^x]\sin y\,\mathrm{d}x-f(x)\cos y\,\mathrm{d}y$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0$，则$f(x)$等于（ B ）

（A）$\frac{e^{-x}-e^x}{2}$；（B）$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；（C）$\frac{e^{-x}-e^x}{2}-1$；（D）$1-\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4．已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$（ B ）正确．

（A）-1；（B）0；（C）2（D）1．

二、填空题

1．设 L 为圆周$x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，取逆时针方向，则$\int_L xdy-2ydx$=$\underline{\frac{3}{2}\pi}$

2．设 L 为封折线$|x|+|y|$=1，取逆时针方向，则$\int_L \frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$=____4____．

3．设 L 为 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t$ 从 x=0 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 一段弧，将 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型曲线积分为 $\underline{\int_L (P\cos x+Q\sin x)\mathrm{d}s}$．

4．设 L 为封闭折线 $|x|+|y|=1$ 沿顺时针方向，则 $\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=$ __0________.

三、计算题

1．计算 $\int_L y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(-1,1)$，再沿直线到 $C(0,2)$ 的曲线.

$$I=\left(\int_{AB}+\int_{\overline{BC}}\right)(y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$$

$$AB:\begin{cases}x=x\\ y=x^2\end{cases}\quad x:1\to -1\quad \mathrm{d}y=2x$$

$$\therefore \int_{\overline{AB}} y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\int_1^{-1}(x^4-x\cdot 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_0^1(x^4-2x^2)\mathrm{d}x=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{15}$$

$$\overline{BC}:\begin{cases}x=x\\ y=x+2\end{cases}\quad x:-1\to 0\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_{\overline{BC}} y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}(x+2)^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}x\cdot\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{7}{3}+\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$$

$$原=\frac{14}{15}+\frac{17}{6}=\frac{113}{30}$$

2．计算 $\int_L (2xy+3x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是沿摆线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 上从 $O(0，0)$ 到点 $A(\pi，2)$ 的一段.

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故此积分与路径无关. 取点 $B(\pi，0)$，则

$\int_L \quad =\int_{\overline{OB}} \quad +\int_{\overline{BA}} \quad =\int_0^{\pi}3x\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^2(\pi^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=3\pi+2\pi^2-\mathrm{e}^2-1$.

3． 计算 $\mathrm{I}=\int_{(00)}^{(1,1)}(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$. 如果 $(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，求出一个这样的 $u(x,y)$.

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x+y)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以此曲线积分与路径无关，且被积表达式是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分. 设 $O(0，0)$，$A(1，0)$，$B(1，1)$，则

$\mathrm{I}=\int_{\overline{OA}} \quad +\int_{\overline{AB}} \quad =\int_0^1\mathrm{d}x+\int_0^1-(1+y)^2\mathrm{d}y=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}$.

下面求一个 $u(x,y)$. xoy 平面为单连通区域，选择 $O(0，0)$ 为起点，(x,y) 为终点，积分路径为折线 OAB，则

$$u(x,y)=\int_{(00)}^{(x,y)}(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$$

$=\int_0^x\mathrm{d}x-\int_0^y(x+y)^2\mathrm{d}y=x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3$.

4．设力 $\boldsymbol{F}=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{y^2}$，证明力 F 在上半平面内所作的功与路径无关，并求从点 $A(1,2)$ 到

点 $B(2,1)$ 力 F 所作的功.

（1）证 $\omega=\int_{AB}-\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y$

$p=-\frac{1}{y},\theta=\frac{x}{y^2}$ 在 $y>0$ 有一阶连续偏导且 $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{y^2}=\frac{\partial\theta}{\partial x}$.

$\therefore F$ 在上半平面内所作的功与路径无关.

（2）取积分路径为折线 $A-C(1,1)-B$

则

$$\omega=\left(\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}\right)\left(-\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=\int_{\overline{AC}}\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y+\int_{\overline{CB}}-\frac{1}{y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_2^1\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+\int_1^2-1\mathrm{d}x=-\left[\frac{1}{y}\right]_2^1-1=-\frac{3}{2}.$$

5．计算 $I=\int_{AMB}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$，其中 AMB 在连结点 $A(\pi,2)$ 与 $B(3\pi,4)$ 的线段之下方的任意路线，且该路线与 AB 所围成的面积为 2，$\varphi(y)$ 具有连续的导数。

解：补上 $BC+CA$，记 $L=AMB+BC+CA$ ，L 为封闭曲线为正方向，D 是由 L 所围成的区域，设

$P=\varphi(y)\cos x-\pi y,\quad Q=\varphi'(y)\sin x-\pi$ 且 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\pi$ ，则

$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{CB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{AC}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

由 Green 公式，有

$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\pi(2+2\pi)$

$\int_{AC}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_2^4[\varphi'(y)\sin\pi-\pi]\mathrm{d}y=-2\pi$

$\int_{CB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\pi^{3\pi}[\varphi(4)\cos x-4\pi]\mathrm{d}x=-8\pi^2$

故 $I=-6\pi^2$

四．证明题

证明 $\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le\int_\Gamma\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\mathrm{d}s$，并由此估计 $\left|\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\right|$ 的上界。其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线并已取定方向

证：

$$\left|\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|=\left|\int_\gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\right|$$

$$\le\int_\gamma\left|(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\right|\mathrm{d}S$$

$$=\int_r\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot 1\cdot\cos\theta\mathrm{d}S\le\int_r\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\mathrm{d}S$$

$$\left|\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\right|\le\oint_\Gamma\sqrt{z^2+x^2+y^2}\mathrm{d}S=\oint_\Gamma a\mathrm{d}S=2\pi a^2$$

第三次作业

学院__________班级__________姓名__________学号__________

一、单项选择题

1．设 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 外侧，则曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{（A）}.$$

（A）0；　　（B）$4\pi a^2$；　　（C）πa^2；　　（D）$\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

2．已知封闭曲面Σ取外侧，若Σ所围立体的体积为 V，则 V=（ D ）

（A）$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（B）$\iint_{\Sigma} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（C）$\iint_{\Sigma} (x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x+y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（D）$\iint_{\Sigma} \frac{1}{3}(x+y+z)(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$.

3．设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，则曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\text{（ D ）}.$$

（A）0；　　（B）1；　　（C）2π；　　（D）4π.

4 设 $I=\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧，则 $I=$（A ）

（A）$-\dfrac{1}{2}\pi h^4$；　　（B）$-\pi h^4$；　　(C) $\dfrac{1}{2}\pi h^4$；　　（D）πh^4

二、填空题

1．设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$，法向量向外，则 $\oiint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{36\pi}$.

2．设曲面 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的下侧，则 $\iint_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$=$\underline{-\frac{2}{5}}$.

3．设向量场 $A=(z+\sin y)\vec{i}-(z-x\cos y)\vec{j}$，则 $\mathrm{rot}A=\underline{\vec{i}+\vec{j}}$.

4．设 Σ 是曲面 $\begin{cases} z=a, \\ x^2+y^2\le b^2 \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$=$\underline{\pi b^2.}$

5． 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则

$$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{（2-\sqrt{2}）\pi R^3.}$$

6．设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathbf{div}(\mathbf{grad}\,u)$= $\underline{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$.

三、计算题

1．计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 y\cos\gamma \mathrm{d}s$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的下半球面，法线朝上，γ 是法线正向与 z 轴正向的夹角.

解：设 D_{xy} 是 Σ 在 Oxy 面上的投影

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 y\cos\gamma \mathrm{d}s=\iint\limits_{\Sigma} x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left[f(x,y,z)+x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[2f(x,y,x)+y\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[f(x,y,z)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解：Σ 的法向量方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

原式$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{3}}(f+x-2f-y+f+z)\mathrm{d}s=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{3}}(x-y+z)\mathrm{d}s=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}$

也可用合一投影法解此题.

3．计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Sigma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$ 方向外侧

解：在椭球面内作辅助小球面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，方向内侧.

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}+\oiint_{\Sigma_1^-}$$

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$（有高斯公式）

$$\oiint_{\Sigma_1^-}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_1^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi$$

I=3

4．计算$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是$\mathrm{z}=0$，$x^2+y^2\le R^2$的下侧.

解：由于 Σ 是$\mathrm{z}=0$，$x^2+y^2\le R^2$的下侧为负向，又 D 在 xoy 平面上的投影域为 $x^2+y^2\le R^2$，则

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}R^4.$$

5．计算 $I=\oint_{\Gamma}-y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $y+z=2$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，Γ 取逆时针方向.

. 设 $\Sigma: y+z=2.\, x^2+y^2\le 1$，取上侧由 stokes 公式：

$$\oint_{\Gamma} -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} (1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} (1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \iint_{D_{xy}} 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$= \pi \cdot 1^2 = \pi .$$

6. 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \left[(x+y)^2 + z^2 + 2yz \right] \mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2 = 2x+2z$.

解：$I = \oiint_{\Sigma} \left[(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2yz \right] \mathrm{d}S$

$= \oiint_{\Sigma} (2x+2z)\,\mathrm{d}S + 2\oiint_{\Sigma} (x+z)y\mathrm{d}S = 2(\bar{x}+\bar{z})\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S$ （质心公式）+0（对称性）$=32\pi$.

第四次作业

学院___________班级__________姓名__________学号___________

一、单项选择题

1．设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正向级数，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$$

收敛是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的(　C　).

（A）充分非必要条件；　　（B）必要非充分条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既不是充分条件也不是必要条件.

2．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 (C　).

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散；　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 发散.

3．设 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_n|}{v_n} = 1$，考虑一下命题：

①若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；②若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 散；

③若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛；④若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

其中正确的是(　 D).

（A）①②；　　　　　　　　　（B）②③；

（C）③④；　　　　　　　　　（D）①④.

4．设 a 为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（ C　 ）.

（A）绝对收敛；　（B）条件收敛；　（C）发散；　（D）收敛性取决于 a 的值.

5．设 $a_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$，下列结论中正确的是（ A　 ）

（A）级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$都收敛　　（B）级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$都发散

（c）级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$都发散　（D）级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$收敛

6．下列级数中绝对收敛的是（ B　 ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$；　　　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{n+1}$；　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

二、填空题

1．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ =____8____.

2．级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}\sin\frac{\pi}{n}$$

当 a _>0 时收敛.

3．当 $a\in$（-1,1）时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$的收敛

三、计算题

1．判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+a^n}\ (a>0)$的敛散性

解：当$0<a\le 1$时　$\frac{1}{n+a^n}\ge\frac{1}{n+1}$

由比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+a^n}$ 发散

当$a>1$时　$\frac{1}{n+a^n}\le\frac{1}{a^n}$

由比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+a^n}$ 收敛

2．求级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2-1}{n^2}$$

的和．

解：因为$u_n=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}$,

所以$S_n=\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{3}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}\right)=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n}{n+1}$,

故

$$\mathrm{S}=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=-\ln 2.$$

3．设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？并说明理由．

$\because a_n>0$，且$\{a_n\}$单调减少．$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=a$（单调有界准则）

且$a>0$，否则$a=0$，则$\sum(-1)^n a_n$为交错级数，满足莱布尼兹判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛．

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$为正项级数，由根值判别法．

$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1$．$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛．

4．判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$的敛散性

解：交错级数但不满足莱布尼兹判别法条件，加括号成为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots$$

$v_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)<0$，且

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{-1}{\sqrt{2n(2n+1)}\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}\right)}$$

故$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots$收敛

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0$，从而原级数收敛。

5．判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$ 的敛散性（$a>0$）

解：记 $u_n=\dfrac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$， $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

当 $a<\mathrm{e}$ 时，收敛。当 $a>\mathrm{e}$ 时，收敛。

当 $a=\mathrm{e}$ 时， $u_{n+1}>u_n$ 故发散。

6．讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$$

的敛散性. 如果收敛，判断是条件收敛还是绝对收敛.

解：令$f(x)=\frac{1}{x-f(x)}$，则当$x>1$时，有$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1}{(x-\ln x)^2}<0$，

即$f(x)$单调减少，从而可知$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$单调递减，且当$n\to\infty$时，$u_n\to 0$，所以原级数收敛.

又因为$|u_n|=\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$，所以原级数非绝对收敛.

综上所述，原级数条件收敛.

四．证明题

1．若正项数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(2-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

解：记 $u_n=\ln\left(2-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$， $v_n=1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(2-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 的部分和 $s_n=\left(1-\dfrac{a_1}{a_2}\right)+\left(1-\dfrac{a_2}{a_3}\right)+\cdots+\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)\le\dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_2}$ 有上界

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛。 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(2-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

2．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 绝对收敛

解：$\left|\dfrac{a_n}{a_n+1}\right|\le\dfrac{|a_n|}{1-|a_n|}\le 2|a_n|$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 绝对收敛.

第五次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$的收敛半径（ D ）.

（A） $R=2$；（B） $R=\frac{1}{2}$；（C） $R=\sqrt{2}$；（D） $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2．已知函数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=0$处，该级数为（ C ）.

（A）发散；（B）条件收敛；（C）绝对收敛；（D）收敛性不定.

3．设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$的收敛半径是 R，则下列幂级数中收敛半径认为 R 的是(A).

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n x^n$；（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2 x^n$；（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n}$；（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2na_n x^{2n}$.

4．2^x展开为 x 的幂级数是 (C).

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$；（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$；（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 2)^n}{n!}$；（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 2)^n}{n}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在 x=1 处收敛于（ A ）

（A）$\frac{3}{2}$；（B）-1；（C）2；（D）1.

二、填空题

1．若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在$x=2$处条件收敛，则幂级数收敛半径为___2______.

2．设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为 2，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^{n+1}$的收敛区间__（-3，1）__

3．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ ＝__1__.

4．设函数$f(x)=x^2, x\in[0,1]$，而$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ $x\in(-\infty,+\infty)$，其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$，$n=0,1,\cdots$，则$s(-1)$的值为___1____.

三、计算题

1．设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}$，求（1）收敛域及其和函数；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}2^n$的和。

解：（1）收敛域为$(-\infty,+\infty)$

$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2}=x^2e^x$

（2）设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=xe^x-e^x+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}2^n = s(2) = e^2+1$$

2．将函数$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$展开成 x 的幂级数

解：因为

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}，x\in(-\infty，+\infty)$$

故

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}，x\in(-\infty，+\infty)$$

3．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$的收敛域.

解：缺偶次幂项．考察$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^{2n-1}}{3^n}\right|$（比值法）

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{x^{2n-1}}\right|=\frac{x^2}{3}$$

当$\frac{x^2}{3}<1$．即$|x|<\sqrt{3}$原级数绝对收敛

当$\frac{x^2}{3}>1$．即$|x|>\sqrt{3}$原级数发散．（$\because \lim_{n\to\infty}u_n(x)\not\to 0$）

$x=\sqrt{3}$级数为$\sum\frac{1}{\sqrt{3}}$发散

$x=-\sqrt{3}$级数为$\sum-\frac{1}{\sqrt{3}}$发散

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$收敛域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

4．设$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}，x\neq 0，\\ 1，x=0\end{cases}$，求$f^{(n)}(0)$.

解：当$x\neq 0$时，

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}，x\in(-\infty，+\infty)$$

令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}，x\in(-\infty，+\infty)$$

由和函数的连续性知

$$\lim_{x\to 0}S(x)=S(0)=1=f(0)$$

所以

$$f(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!}，x \in (-\infty，+\infty)$$

由展开式的唯一性得到$f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$，$(n = 0,1,2\cdots)$

5．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 在 $x=4$ 点展成幂级数

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{1}{(x-4)+1}-\frac{1}{(x-4)+2}=\frac{1}{1-[-(x-4)]}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{x-4}{2}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[-(x-4)]^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-4}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right](x-4)^n.\quad(3<x<5)$$

（$|-(x-4)|<1,\left|-\dfrac{x-4}{2}\right|<1$．解得$|x-4|<1$交集）

6．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数．

解：$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1.\quad\therefore R=1.$$

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad(-1,1)$

则 $\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$

$$\therefore s(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1,1)$$

$x=1$．$\sum_{n=1}^{\infty}n$．发散．$x=-1$．级数为$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(-1)^n$发散．

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(-1,1).$$

7．设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x<2,\end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的傅里叶级数与其和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和．

解：① 将 $f(x)$ 作周期延拓（如图）$2l=2,l=1$．（且$-1<x<0$时 $f(x)=0$）

② $a_0=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^1 x\cdot\mathrm{d}\sin n\pi x=\frac{1}{n\pi}\left[x\cdot\sin n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\sin n\pi x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{-1}{n^2\pi^2}\int_0^1\sin n\pi x\cdot\mathrm{d}n\pi x=\frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi x\right]_0^1$$

$$=\frac{-1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=\frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}\frac{-2}{n^2\pi^2}, & n\text{奇数}\\ 0, & n\text{偶数}\end{cases}$$

$$b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\cdot\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\int_0^1 x\cdot\mathrm{d}\cos n\pi x=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cdot\cos n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\cos n\pi x\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi},\quad n=1,2,\cdots$$

③ 当 $x\neq 2K+1,\quad K=0,\pm1,\cdots$ 时.

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$$

当 $x=2K+1, K=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

④ 令 $x=0,\ f(0)=0,\therefore 0=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ $\qquad\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

第六次作业

学院__________班级__________姓名__________学号__________

一、单项选择题

1. 微分方程 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ 的通解为（ D ）.

（A）$y=x(\mathrm{e}^x+C)$；（B）$y=y(\mathrm{e}^x+C)$；（C）$y=x(C-\mathrm{e}^x)$；（D）$y=y(C-\mathrm{e}^x)$.

2. 若 y_1,y_2 是方程 $y'+p(x)y=q(x)(q(x)\neq 0)$ 的两个解，要使 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是該方程的解，α,β 应满足关系式 (A).

（A）$\alpha+\beta=1$；（B）$\alpha+\beta=0$；（C）$\alpha\beta=1$；（D）$\alpha\beta=0$.

3. 设一曲线经过点 $M(4,3)$，且该曲线上任一点 N 处的切线在 y 轴上的截距等于原点到点 N 的距离，则此曲线方程是（ D ）.

（A）$x^2+y^2=25$；（B）$y=2+\frac{x^2}{16}$；（C）$(x+9)^2-(y-9)^2=25$；（D）$y=4-\frac{x^2}{16}$.

4．设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $\cos^2 xy'+y=\tan x$，且当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时 $y=0$ 。则当 $x=0$ 时 $y=$（　C　）

（A）$\dfrac{\pi}{4}$；（B）$-\dfrac{\pi}{4}$；（C）-1；（D）1.

二、填空题

1．过点 $(1,\mathrm{e}^2)$，且满足 $xy'=y\ln\frac{y}{x}$ 的曲线方程是 $\underline{y=x\mathrm{e}^{x+1}}$.

2．常微分方程 $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解是 $\underline{x^3+3x^2y^2+\dfrac{4}{3}y^3=C}$.

3．设 $f(x)$ 连续可微，且满足 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x$，则 $f(x)=\underline{\ln|x+1|}$.

4．若曲线积分 $\int_C yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 可导，则 $f(x)=\underline{Ce^x+2(x+1)}$.

三、计算题

1．求解微分方程 $xy'=y(\ln y-\ln x)$.

变形：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

代入原方程：$u+x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分：$\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$

$u=\mathrm{e}^{Cx+1}$

原方程通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$

2．已知 $f(x)$ 连续，且满足关系式 $\int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$.

解：因为 $\int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，原方程化为

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}f(x)+x$$

两边对 x 求导并整理得

$$f'(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{2}{x}$$

是一阶线性非齐次微分方程，利用通解公式得 $f(x)=x\left(\frac{2}{x}+C\right)=\mathrm{C}x+2$.

3．求解微分方程 $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{2\sin\dfrac{y}{2}} = -\cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$

通解 $C\left|\cot\dfrac{y}{2} - \csc\dfrac{y}{2}\right| = \mathrm{e}^{-2\sin\frac{x}{2}}$(C 为任意常数)

4．求微分方程 $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0$ 的通解．

解 令 $P = \dfrac{y}{x}$, $Q = y^3 + \ln x$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

$U(x,y) = \int_1^x 0\mathrm{d}x + \int_0^y \left(y^3 + \ln x\right)\mathrm{d}y = \dfrac{y^4}{4} + y\ln|x|$

通解 $\dfrac{y^4}{4} + y\ln|x| = C$

5．求解微分方程 $xy'\ln x\sin y + \cos y(1 - x\cos y) = 0$.

解：方程变形 $-x\ln x(\cos y)' + \cos y = x^2 c$

令 $z = \cos y$，得贝努利方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x\ln x}z = -\dfrac{1}{\ln x}z^2$

令 $u = z^{-1}$， 有 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{x\ln x}u = \dfrac{1}{\ln x}$

解得通解 $(x + C)\cos y = \ln$

第七次作业

学院__________班级__________姓名__________学号__________

一、单项选择题

1．设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是（D ）．

（A） $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$；

（B） $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$；

（C） $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$；

（D） $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

2．若 2 是微分方程 $y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{2x}$ 的特征方程的一个单根，则该微分方程必有一个特解 $y^* =$（B ）．

（A） $A\mathrm{e}^{2x}$； （B） $Ax\mathrm{e}^{2x}$； （C） $Ax^2\mathrm{e}^{2x}$； （D） $x\mathrm{e}^{2x}$.

3．微分方程$y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^x$的某一积分曲线$y = y(x)$在点（0，1）处的切线与曲线$y = x^2 - x + 1$在该点的切线重合，则 y=(C)．

（A）$e^{2x}-xe^x$；　　　　（B）$e^{2x}+xe^x$；

（C）$(1-2x)e^x$；　　　　（D）$(2x-1)e^x$.

4．求$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1)$为通解的一个二阶线性微分方程是（　A　）.

（A）$y''-2y'+2y=e^x$；　　　　（B）$y''+2y'+2y=e^x$；

（C）$y''-2y'-2y=e^x$；　　　　（D）$y''+2y'-2y=e^x$.

二、填空题

1．已知曲线$y=y(x)$上点 $M(0,1)$处的切线斜率为$\frac{1}{2}$，且$y(x)$满足方程$yy''+(y')^2=0$，则此曲线方程是$\underline{y^2=x+1}$.

2．微分方程 $2y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0$ 的通解为$\underline{c_1+c_2x+e^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{3}{2}x+c_4\sin\frac{3}{2}x\right)}$.

3．微分方程 $y''-y'=1$ 的通解 $y=\underline{c_1+c_2e^x-x}$.

4．以 $y=2e^x\cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数线性微分方程为$\underline{y''-2y'+10y=0}$.

5． $y''-5y'+6y=e^x\sin x+6$ 的一个特解形式为$\underline{y=e^x(a\cos x+b\sin x)+C}$.

三、计算题

1．求解微分方程　$y''+y'^2=1,\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1$.

解一：为可降阶Ⅱ．令 $y'=p(x)$．则 $y''=\frac{dp}{dx}$ 代入 $\frac{dp}{dx}+p^2=1$.

当 $p=\pm1$时，分离变量为$\frac{dp}{1-p^2}=dx$.

$p=1$时，$\frac{dp}{dx}=0$.　$\therefore p=1$即 $y'=1$也是解，满足 $y'\big|_{x=0}=1$.

积分 $y=x+C$.　$\because y\big|_{x=0}=0$.　$\therefore C=0$．∴原方程特解为 $y=x$.

解二：为可降阶Ⅲ．令 $y'=p(y)$．则 $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$ 代入 $p\frac{dp}{dy}+p^2=1$.

当 $p=\pm1$时，方程为$\frac{p}{1-p^2}dp=dy$.

$p=1$是解.（同上）

2．求微分方程 $y''-ay=0$ 的通解，其中 a 为常数.

解：特征方程 $r^2-a=0$

当 $a>0$ 时　通解为 $c_1e^{\sqrt{a}x}+c_2e^{-\sqrt{a}x}$

当 $a=0$ 时　通解为 c_1+c_2x

当 $a<0$ 时　通解为 $c_1\cos\sqrt{-a}x+c_2\sin\sqrt{-a}x$

3．求微分方程$x^2y''=(y')^2+2xy'$的通解.

解：令$y'=p$，则原方程化为 $x^2\frac{dp}{dx}=2xp+p^2$，即$\frac{dp}{dx}=\frac{2}{x}p+\frac{1}{x^2}p^2$，是伯努利方程. 再令$z=p^{-1}$，则有$\frac{dz}{dx}=-\frac{2}{x}z-\frac{1}{x^2}$，是一阶线性方程，解得

$$z=\frac{1}{x^2}(-x+C_1).$$

于是 $$y'=\frac{x^2}{-x+C_1}=-(C_1+x)-\frac{C_1^2}{x-C_1},$$

积分得 $$y=-\frac{1}{2}(x+C_1)^2-C_1^2\ln|x-C_1|+C_2.$$

4．求微分方程 $y''-y=\sin^2 x$ 的通解.

① 二阶常系数非齐次 $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. $f_1(x)=\dfrac{1}{2}$. $f_2(x)=-\dfrac{\cos 2x}{2}$.

特征方程：$r^2-1=0 \quad r=\pm 1$. $y''-y=0$ 通解 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$

② 显然 $y_1^*=-\dfrac{1}{2}$ 为 $y''-y=\dfrac{1}{2}$ 的特解.

对 $y''-y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x. \lambda=0. \omega=2. m=0. \because \lambda+i\omega=2i$ 不是特征根

$\therefore$ 设 $y_2^*=a\cos 2x+b\sin 2x$. $y_2^{*\prime}=-2a\sin 2x+2b\cos 2x$, $y_2^{*\prime\prime}=-4a\cos 2x-b\sin 2x$.

代入整理．$-5a\cos 2x-5b\sin 2x=-\dfrac{1}{2}\cos 2x. \therefore a=\dfrac{1}{10}, b=0.$

$y_2^*=\dfrac{1}{10}\cos 2x \quad \therefore y^*=y_1^*+y_2^*=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$.

③ 原方程通解为 $y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$.

（当 $\lambda+i\omega$ 不是特征方程根；$\lambda=0$；$m=0$．本题可设 $y_2^*=a\cos 2x$）

四、综合题

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解：由全微分方程充要条件 $\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$．有

$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$

即：$f''(x)+f(x)=x^2$ 为二阶常系数非齐次 I．$\lambda=0. m=2$.

记 $z=f(x)$ 特征方程：$r^2+1=0$ ．$r=\pm i \quad Z=C_1\cos x+C_2\sin x$.

$\because \lambda=0$ 不是特征根．$\therefore$ 设 $Z^*=\theta_2(x)=ax^2+bx+C$.

$z^{*\prime}=2ax. z^{*\prime\prime}=2a$ 代入 $2a+ax^2+bx+c=x^2$.

$a=1, b=0, c=-2. \quad \therefore z^*=x^2-2$.

$z = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2. \quad z' = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2x$.

将 $z\big|_{x=0} = 0. \quad z'\big|_{x=0} = 1$ 代入 $C_1 = 2, C_2 = 1$.

$\therefore f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$.

将 $f(x)$ 代入，原方程为：

$$(xy^2 - 2\cos x\cdot y - \sin x\cdot y + 2y)\mathrm{d}x + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2y)\mathrm{d}y = 0$$

通解为：$\dfrac{1}{2}x^2y^2 + 2xy + (-2\sin x + \cos x)y = C$.

综合练习题

学院__________班级__________姓名__________学号__________

一、单项选择题

1．设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的顺时针方向，则 $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y =$（ A）.

（A） $2\pi ab$　　（B） $-2\pi ab$　（C）0　　（D） 2π

2．设 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$，$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$，$r: x^2 + y^2 + z^2 = 1$，$x = 0(y \ge 0)$ 由（0，0，-1）到（0，0，1）则以下计算（　D　）错误.

（A）$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V = 0$　　（B）$\iint_\Sigma z\mathrm{d}s = 0$　　（C）$\int_r z\mathrm{d}s = 0$　　（D）$\int_r z\mathrm{d}y = 0$

3．设 $\sum a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是（　B　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（B）若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

（C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a = 0$；

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

4．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{4}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$　(　A　).

（A）当 $|x|<2$ 时绝对收敛；　　（B）当 $|x|>\dfrac{1}{4}$ 时绝对发散；

（C）当 $|x|<4$ 时绝对收敛；　　（D）当 $|x|>\dfrac{1}{2}$ 时绝对发散.

5．设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' + y' = \mathrm{e}^{\sin x}$ 的解，并且 $f'(x_0) = 0$，则 $f(x)$　(　C　).

（A）在点 x_0 的某邻域内单调增加；　（B）在点 x_0 的某邻域内单调减少；

（C）在点 x_0 处取极小值　　　　　　　　（D）在点 x_0 处取极大值.

二、填空题

1．L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L (x+y)^2 e^{x^2+y^2} ds = \underline{e\cdot\pi}$.

2．设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $0\le z\le 2$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \underline{2\pi}$.

3．设为 L 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds = \underline{\quad 12a \quad}$.

4．周期为 2 的函数 $f(x)$，它在一个周期内的表达式为 $f(x)=x, -1\le x\le 1$，设它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s\left(\dfrac{3}{2}\right) = \underline{\quad -1/2 \quad}$.

5．以 $y_1(x)=\sin x, y_2(x)=\cos x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程是 $\underline{y''+y=0}$.

6．曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_{\Sigma}(x+|y|)dS = \underline{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$.

三、计算题

1．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{z}dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 截得的有限部分.

解：$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{z}dS=\iint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{1}{z}dS$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, dS=\sqrt{2}dxdy$$

$D_{xy}: x^2+y^2\le 2x, y\ge 0$　即 $r=2\cos\theta, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore I=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{r}\cdot\sqrt{2}rdr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cdot 2\cos\theta d\theta=4\sqrt{2}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{2}$$

2．计算曲线积分 $\int_{ONA}(2x\sin y-y)dx+(x^2\cos y-1)dy$，其中 ONA 为连接点 O(0, 0) 和 $A(2,\dfrac{\pi}{2})$ 的任何路径，但与直线 OA 围成的图形 $ONAO$ 有定面积 π.

解：$p=2x\sin y-y, \theta=x^2\cos y-1$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=2x\cos y-1, \frac{\partial\theta}{\partial x}=2x\cos y$$

补充 AO（如图），则 $onAo$ 成闭曲线（正向）

由 Green 公式，$\oint_{onAo}(2x\sin y-y)dx+(x^2\cos y-1)dy=\iint\limits_{D}1dxdy=\pi$

而 $OA:\begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{\pi}{4}x \end{cases}$ $x: 0 \to 2$ $\mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_{OA}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = \int_0^2\left(2x\sin\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}x^2\cos\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$\because \frac{\pi}{4}\int_0^2 x^2\cos\frac{\pi}{4}x\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}\sin\frac{\pi}{4}x = \left[x^2\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^2 - \int_0^2\sin\frac{\pi}{4}x\cdot 2x\mathrm{d}x = 4 - \int_0^2 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}x\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_{OA}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = 4 - \int_0^2\frac{\pi}{4}x\mathrm{d}x - \int_0^2\frac{\pi}{4}\mathrm{d}x = 4 - \pi$$

$$\therefore \int_{OA}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = \pi - \int_{OA} = \pi + \int_{OA} = \pi + (4 - \pi) = 4$$

3．设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\ .$$

（Ⅰ）验证：$f''(u) + \dfrac{f'(u)}{u} = 0$；

（Ⅱ）若 $f(1) = 0,\ f'(1) = 1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解：（Ⅰ）由 $z = f(u), u = \sqrt{x^2 + y^2}$

得：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''\cdot\dfrac{y^2}{x^2 + y^2} + f'\cdot\dfrac{x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 则有：$f'' + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}f' = 0$

即：$f''(u) + \dfrac{f'(u)}{u} = 0$

（Ⅱ） 由（Ⅰ）及 $f'(1) = 1,\ f'(u) = \dfrac{1}{u}$

$\therefore f(u) = \ln u + C,$

由 $f(1) = 0,$ 得 C=0

因此 $f(u) = \ln u$

4．计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}\ (0 \le z \le 1)$ 的上侧.

解：取 $\sum_1$ 为 xOy 平面上被椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 $\sum$ 和 $\sum_1$ 围成的空间闭区域，根据高斯公式

$$I_1 = \iint\limits_{\sum + \sum_1} xydydx + 2zydzdx + 3xydxdy = \iiint\limits_{\Omega}(z + 2z + 0)dxdydz$$

$$= \int_0^1 3zdz \iint\limits_{x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 - z} dxdy = \int_0^1 6\pi z(1 - z)dz = \pi$$

又 $I_2 = \iint\limits_{\sum_1} xzdydx + 2zydzdx + 3xydxdy = -3\iint\limits_{x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1} xydxdy = 0$

所以 $I = I_1 - I_2 = \pi$

5．将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

解：$f'(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]-1=\frac{1}{1-x^4}-1$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^4\right)^n-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ \left(|x|<1\right)$

$\therefore\ \int_0^x\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}-1\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{4n}\mathrm{d}x$

即：$f\left(x\right)=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\left(|x|<1\right)$

6．已知齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y(x)=c_1x+c_2\mathrm{e}^x$ 求非齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ 的通解.

解：设所求方程解为：$y=C_1(x)x+C_2(x)e^x$

则有：$\begin{cases}C_1'(x)x+C_2'(x)e^x=0\\C_1'(x)+C_2'(x)e^x=(x-1)^2\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}C_1'(x)=1-x\\C_2'(x)=(x^2-x)e^{-x}\end{cases}$

积分，得：$C_1(x)=x-\frac{x^2}{2}+C_1$

$C_2(x)=-(x^2+x+1)e^{-x}+C_2$

$\therefore y=(x-\frac{x^2}{2}+C_1)x+[-(x^2+x+1)e^{-x}+C_2]e^x$

$=C_1x+C_2e^x-\frac{x^3}{2}-x-1$

7. 设 $u=u(r)$ 具有二阶导数。$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$$

求 $u(\sqrt{x^2+y^2})$ 的表达式。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=u'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=u''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2}+u'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

同理：$\frac{\partial u}{\partial y}=u'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=u''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2}+u'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

代入方程得：　$u''+u=r^2$

解该微分方程 通解为：

$u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$

即： $u(\sqrt{x^2+y^2})=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$

四、证明题

设 $a_n=\int_0^{\pi/4}(\tan x)^n\,\mathrm{d}\,x, n=1,2,3,\cdots$． 证明：对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

证明： $a_n>0$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 xdx-a_{n-2}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xd\tan x=\frac{1}{n-1}$$

$\therefore 0<a_n<\frac{1}{n-1}$ $\quad\therefore$ 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^r}$

$\therefore 0<\frac{a_n}{n^r}<\frac{1}{n^r(n-1)}$ 而 r>0 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r(n-1)}$ 收敛， $\therefore\sum\frac{a_n}{n^r}$ 收敛

综合模拟题（一）

学院___________班级__________姓名__________学号_____

一、单选题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 设 L 是光滑的，包含原点的正向闭曲线，则曲线积分 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$（ B ）.

(A) 0 ； (B) 2π ； (C) π ； (D) $-\pi$.

2. 设曲面 Σ 为 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的下侧，则 $\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（ B ）.

(A) $\frac{1}{6}$； (B) $-\frac{1}{6}$； (C) $\frac{1}{3}$； (D) $-\frac{1}{3}$.

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的收敛域是（ B ）.

(A)$[-1,1]$；　　(B) $(-1,1]$；　　(C) $[-1,1)$；　　(D)$(-1,1)$.

4. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（ A ）.

(A)发散；　　(B)条件收敛；

(C)绝对收敛；　　(D)收敛性与α取值有关，不能确定.

5. 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在$x=2$处收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$（ C ）.

(A)发散；　　(B)条件收敛；

(C)绝对收敛；　　(D)收敛性不能确定.

6.已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}$是二队常系数非齐次线性微分方程的两个解，则此方程为（ D ）.

(A) $y''-2y'+y=e^{2x}$；　　(B) $y''-y'-2y=xe^{2x}$；

(C) $y''-y=e^{2x}$；　　(D) $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 设半圆形曲线$x^2+y^2=R^2\left(y>0\right)$的线密度$\rho=1$. 则其对$y$轴的转动惯量为$\underline{\frac{\pi}{2}R^3}$.

2. 设Σ是yoz平面上的圆域$y^2+z^2\le 1$，则$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\underline{\frac{\pi}{2}}$.

3. 设Σ是平面$x+y+z=1$在第一卦限部分的上侧，则$I=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy$化成对面积积分为$I$=

$\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)+Q(x,y,z)+(x,y,z)\,ds}$.

4. 设向量场$\boldsymbol{A}=\{z,3x,2y\}$，则其旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

5. 微分方程$(6x+y)dx+xdy=0$的通解是$\underline{3x^2+xy=C\left(C\text{为任意常数}\right)}$.

6. 微分方程$yy''-y'^2=0$满足$y(0)=1,\ y'(0)=1$的解为$\underline{y=e^x}$.

三、计算题（共 5 道小题，每小题 8 分，满分 40 分）

1. 求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 上侧

解 ： Σ_1： $z=1\left(x^2+y^2\le 1\right)$ 取上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{-\Sigma}=-\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}V=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z=-\frac{3\pi}{2}$$

又 $\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{-\Sigma}\mathrm{d}\sigma=\pi$，故 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{3\pi}{2}+\pi=-\frac{\pi}{2}$

2.判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 该级数是正项级数

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^2}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi}{2},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 将函数 $f(x)=\frac{x}{x+2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解 $$f(x)=\frac{x}{x+2}=\frac{x-1}{3\left[1+\left(\frac{x-1}{3}\right)\right]}+\frac{1}{3\left[1+\left(\frac{x-1}{3}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$(-2<x<4)$$

4. 求微分方程 $xy'+y=xy^2\ln x$ 的通解.

解 显然 $y=0$ 是方程的解.

当 $y\ne 0$ 时，同除 xy^2,有 $y^{-2}y'+\frac{1}{xy}\ln x$, 令$z=\frac{1}{y}$,得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{x}-\ln x$. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{x}$ 的通解为 $z=Cx$，令 $z=C(x)x$ 为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{x}-\ln x$ 的解，解得

$$C(x)=-\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$$

故原方程的通解为$\frac{1}{y}=z=\left(-\frac{1}{2}\ln^2+C\right)x$，

即 $xy\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)=1.$ C 为任意常数

5. 将函数 $f(x)=\pi-x(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数.

解 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\mathrm{d}x=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

当 $x=\pi$ 时，$f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0=f(\pi)$，

因此 $f(x)$ 的余弦级数为 $f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\cos nx,\quad 0\le x\le\pi$

四、计算题（共 2 道小题，每小题 12 分，满分 24 分）

1. 求级数 $2\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ 的和

解 $2\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$=\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}\ .$$

考虑幂级数$2\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}x^{2n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}x^{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}}\right|=x^2$ ，

当 $x^2<1$时，$\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$收敛；当 $x^2>1$时，$\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$发散，故收敛半径为 $R=1$, 收敛区间（－1，1），收敛域（－1，1].

令 $s(x)\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$,当$x\in(-1,1)$时

$s'(x)\sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$.

$s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x$， 故$s(x)=\arctan x$.

由于$\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$在$x=1$处收敛，故 $s(x)$在 x=1 处左连续，从而

$s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\dfrac{\pi}{4}$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2n-1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=-\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)=1-\dfrac{\pi}{4}$.因此

$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n-1}=\dfrac{\pi}{4}-\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}-1$.

2.设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数， $f(0)=0$ ，$f'(x)=1$, 且对于 xoy 平面内任意一条正向光滑封闭曲线 $\oint_L\left[-\sin x-f(x)\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y=0$.求 $f(x)$.

解　令 $P(x,y)=\left[-\sin x-f(x)\right]y$, $Q(x,y)=f'(x)$.由已知 $\dfrac{\delta P}{\delta y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故

$-\sin x-f(x)=f''(x)$, 即 $f''(x)+f(x)=-\sin x$.

特征方程为 $\lambda^2=1$, 特征根 $\lambda=\pm i$， 由于 $\pm i$， 是特征根，故设特解

$y^*(x)=x(a\cos x+b\sin x)$, 代入方程解得 $a=\dfrac{1}{2},\ b=0$. 从而方程的通解为

$$y(x)=\frac{1}{2}x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

将定解条件代入，解得 $C_1=0,\ C_2=\dfrac{1}{2}$.

$$f(x)=\frac{x}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x.$$

综合模拟题（二）

学院__________班级__________姓名__________学号_____

一、选择题（共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 已知 Σ 为空间曲面 $x^2+y^2=z(0\le z\le1)$ 的上侧，则下列选项正确的是（B）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$;　　(B) $\iint\limits_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$;

(C) $\iint\limits_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=0$;　　(D) $\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$;

2. 设 $f(x)=\begin{cases}a(0<x\le\pi)\\ b(-\pi<x\le0)\end{cases}(0<a<b)$, $g(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 其中 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$ $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ 则（C）

(A) $f(0)=g(0)$;　　(B) $f(0)<g(0)$;

(C) $f(0)>g(0)$;　　(D) $f(0)$ 与 $g(0)$ 的大小关系不定;

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则下列级数必收敛的是（D）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{a_n}{n}$ ；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$

4. 设$y_1=y_1(x), y_2=y_2(x)$为非齐次线性微分方程$y'+p(x)y=f(x)$的两个不同的特解，则其通解可表示为（A）.

(A) $y=c(y_2-y_1)+y_1$　　(B) $y=c_1y_1+y_2$

(C) $y=c(y_2+y_1)+y_1$　　(D) $y=c(y_2-y_1)$

5. 微分方程$y''+y=x\sin x$的特解形式可设为（C）

(A) $y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$　　(B) $y^*=x(a\cos x+b\sin x)$

(C) $y^*=(ax^2+bx)\cos x+(cx^2+dx)\sin x$　　(D) $y^*=(ax+b)\sin x$.

二、填空题（共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 已知平面曲线$L:x^2+y^2=a^2(a>0)$,则$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ $\underline{2\pi a^2}$.

2. 已知 L 为平面区域$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ $(a>0, b>0)$的正向边界，则$\oint_L x\mathrm{d}y=$ $\underline{\pi ab}$.

3. 已知三元函数$u=u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,则$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=$ $\underline{6}$.

4. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$的收敛域为$\underline{(-1，1]}$.

5. 已知$(x^3+x^2y^3)\mathrm{d}x+(x^my^2+y^3)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程，m 为常数，则 m $\underline{3}$.

三、计算题(共 4 个小题，每小题 9 分，满分 36 分)

1. 计算曲线积分$\int_L zx\,\mathrm{d}x+zy\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$, 其中 L 为空间螺旋线$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at,(0\le t\le\pi)$, L 的方向为曲线上由$t=0$对应的点指向$t=\pi$对应点.

解$\int_L zx\,\mathrm{d}x+zy\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}(at)(a\cos t)\mathrm{d}a\cos t+(at)(a\sin t)\mathrm{d}a\sin t+a\sin t\mathrm{d}at$

$=\int_0^{\pi}-a^3t\cos t\sin t\mathrm{d}t+a^3t\sin t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t+a^2\sin t\,\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2a^2$

2. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!^2)}{(2n)!}$的敛散性.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\Bigg/\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(n+1\right)^2}{\left(2n+2\right)\left(2n+1\right)}=\dfrac{1}{2}<1$，故原级数收敛

3. 将 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ 展为 $\left(x-3\right)$ 的幂的级数.

解：$\dfrac{x}{x^2-3x+2}=\dfrac{x}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}=2\cdot\dfrac{1}{\left(x-3\right)+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)+1}$

$=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(x-3\right)^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{\left(x-3\right)^n}{2^n}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^n\left(x-3\right)\quad\left|x-3\right|<1$且$\left|\dfrac{x-3}{2}\right|<1$

而 $x-3=\pm1$时原式发散，故原式的收敛域为$\left|x-3\right|<1$

4. 求微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^x y^2$ 的通解.

解：设 $y^{-1}=u$, 则有 $-\dfrac{1}{y^2}y'=u'$ 原方程化为 $\dfrac{1}{y^2}y'+y^{-1}=\mathrm{e}^x$

即 $u'-u=-\mathrm{e}^x$，$\qquad y^{-1}=u=\left(-x+c\right)\mathrm{e}^x$

四、计算题（共 4 小题，第 1、2 题各 9 分，第 3、4 题各 8 分，满分 34 分）

1. 求常微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解：$r^2-5r+6=\left(r-2\right)\left(r-3\right)=0,\ y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$

设 $\quad y^*=x\left(ax+b\right)\mathrm{e}^{2x}$ 为原方程的解并代入方程

即 $y^*-5y^{*\prime}+6y^*=x\mathrm{e}^{2x}$

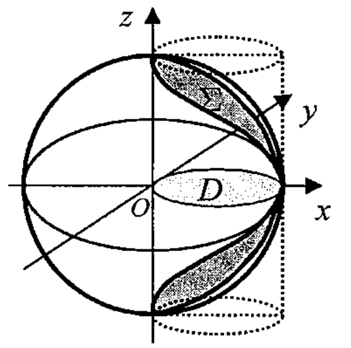
化简得 $\left(-2ax+2a-b\right)\mathrm{e}^{2x}=x\mathrm{e}^{2x}$

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-1$

则 $y^*=x\left(-\dfrac{1}{2}x-1\right)\mathrm{e}^{2x}$

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} C_2 e^{3x} + x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}$$

2. 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ (a > 0)$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax \ (a > 0)$ 所割下部分的曲面Σ的面积.



解： $S = \iint\limits_{\Sigma} dS = 2\iint\limits_{D} \sqrt{1 + Z_x'^2 + Z_y'^2}\, d\sigma$

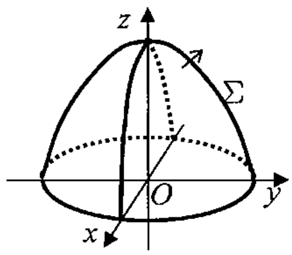
$$= 2\iint\limits_{D} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma$$

$$= 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr$$

$$= 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

3. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} xz dy dz + 2yz dz dx + 3xy dx dy$，其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 \quad \frac{y^2}{4}$ （$0 \le z$ 的上侧.

法一：记所加的辅助面 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 的下侧为 Σ_1^+，则由 Gauss 公式有



$$\iint\limits_{\Sigma} xz dy dz + 2yz dz dx + 3xy dx dy + \iint\limits_{\Sigma_1^+} xz dy dz + 2yz dz dx + 3xy dx dy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 3z dx dy dz$$

$$= \int_0^1 3z dz \iint\limits_{D_z} dx dy = \int_0^1 6\pi z(1 - z) dz = \pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1^+} xz dy dz + 2yz dz dx + 3xy dx dy = \iint\limits_{\Sigma_1^+} 3xy dx dy = 0$$

$$I = \iint\limits_{\Sigma} xz dy dz + 2yz dz dx + 3xy dx dy = \pi$$

法二：$\vec{n} = \left(2x, \frac{y}{2}, 1\right) \iint\limits_{\Sigma} xz dy dz + 2yz dz dx + 3xy dx dy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(xz \cdot 2x + 2yz \cdot \frac{y}{2} + 3xy \cdot 1\right) dx dy$ …5 分

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(xz \cdot 2x + 2yz \cdot \frac{y}{2}\right) dx dy = \iint\limits_{D_{xy}} (2x^2 + y^2)\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r^2(1 + \sin^2\theta)(1 - r^2) r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2\theta) d\theta \int_0^1 2r^2(1 - r^2) r dr = \pi$$

法三：$\iint\limits_{\Sigma} xz dy dz = 2\iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{1 - z - \frac{y^2}{4}} dy dz = 2\int_0^1 z dz \int_{-2\sqrt{1-z}}^{2\sqrt{1-z}} \sqrt{1 - z - \frac{y^2}{4}} dy = \frac{\pi}{3}$

$$\iint_{\Sigma} 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 4\iint_{D_{zx}} z\sqrt{4(1-z-x^2)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 8\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\sqrt{1-z-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_{\Sigma} 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad I = \iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 0 = \pi$$

4．利用 $y = x(0 \le x \le \pi)$ 与 $y = x^2(0 \le x \le \pi)$ 的 Fourier 展开式求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}(0 \le x \le \pi)$ 的和函数 $S(x)$．

解：分别对 $y = x(0 \le x \le \pi)$ 与 $y = x^2(0 \le x \le \pi)$ 进行偶延拓，设 x 的余弦展式为 $x = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，则有：$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi$，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = 2\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & n = 2, \\ \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \cdots)$，

由 Dirichlet 收敛条件知：$x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ (0 \le x \le \pi)$

设 x^2 的余弦展式为 $x^2 = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，则有：$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi^2}{3}$，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2},$$

由 Dirichlet 收敛条件知：$x^2 = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}(0 \le x \le \pi)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)x}{(2n)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} + \frac{3x^2 - \pi^2}{12} = \frac{6x^2 - 6\pi x + \pi^2}{24}\ (0 \le x \le \pi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \\ &= 2\cdot\frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} + \frac{3x^2 - \pi^2}{12} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}\ (0 \le x \le \pi)\end{aligned}$$