2014—2015 学年第一学期《高等数学 AIII》试卷

2015 年 1 月 14 日

一	二	三	四	总 分

得 分

一、填空题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．Γ 为空间曲线：$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ z=\dfrac{t}{2}\ (0\le t\le 2\pi)$，则 $\dfrac{2}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ________。

2．Σ 为空间球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 则 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$ ________。

3．Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的下侧, 则 $\dfrac{2}{3}\iint\limits_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy=$ ________。

4．已知向量场 $\vec{A}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$，则 $\mathrm{rot}\vec{A}(x,y,z)=$ ________。

5．常微分方程 $\begin{cases} y'-\dfrac{1}{x}y=x \\ y(1)=1 \end{cases}$ 的解为 $y=$ ________。

得 分

二、选择题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 已知曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0, z\ge 0)$, Σ_1 为 Σ 在第一卦限内对应的部分, 则下列选项正确的是（　　　）。

(A) $\iint\limits_{\Sigma} zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$；　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$；　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$；

2．设数列$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ (n=1,2,\ldots)$无界，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛域为（　　　）。

（A）（-1，1]；　　　　（B）[0，2)；

（C）[-1，1)；　　　　（D）（0，2]；

3．下列选项正确的是（　　　）。

(A) 数值项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$收敛；

(B) 数值项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$可能发散；

(C) 数值项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$也发散；

(D) 数值项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$发散；

4．下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - x - 1$（$C_1, C_2, C_3$为任意常数）为通解的方程是（　　　）。

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = -x + 1$；　　(B)；$y''' + y'' + 4y' + 4y = -x^2 + x$；

(C)；$y''' - y'' + 4y' - 4y = 4x$；　　(D) $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2$

5．常微分方程$y'' + y = 3x^2 + 2\sin x$的特解形式可设为（　　　）。

(A) $y^* = x(ax^2 + bx + c) + (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$；

(B) $y^* = A\sin x + B\cos x + x(ax^2 + bx + c)$；

(C) $y^* = ax^3 + bx^2 + cx + d + (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$；

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + xA\sin x$；

得 分

三、计算题(共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分)

1．计算 $\int_L x^2 \mathrm{d}y - 3y\mathrm{d}x$，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(-1,1)$ 对应的一段曲线。

2．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{n!}$ 的敛散性。

3．求微分方程 $y'-2\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{y}{x}$ 的通解。

4．将函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展为 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}$ 的和。

得 分

四、计算题(共 4 小题，第 1、2、3 题各 9 分， 4 题 7 分，共 34 分)

1．求常微分方程 $y''' - 8y = 24xe^{2x}$ 的通解。

2．计算 $I = \oint_{\Gamma} y^2 \mathrm{d}x - x\mathrm{d}y - z^2 \mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $y + z = 2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线，从 z 轴的正向向负向看 Γ 取顺时针方向。

3．计算 $I=\int_{L}3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy$，其中 L 是第一象限从点 $O\left(0,0\right)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $A\left(2,0\right)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $B\left(0,2\right)$ 的曲线弧。

4．计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{\cos\left(\vec{r},\vec{n}\right)}{\left|\vec{r}\right|^2}dS$，其中 $M\left(x,y,z\right)$ 为简单封闭光滑闭曲面 Σ 上任意一点，$M_0\left(x_0,y_{0,}z_0\right)$ 为曲面 Σ 所围区域的内点，$\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$，$\vec{n}$ 为 Σ 上点 $M\left(x,y,z\right)$ 处的外法向量。