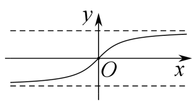
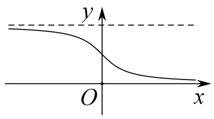
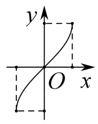
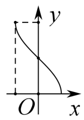
高等数学标准化作业答案勘误

第一次作业

(适用范围:课表上有高等数学 AI,BI 或 CI 的同学)

一、选择题

1.考点:反三角函数的基本特性

函数	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$
值域	$\boxed{(0,\pi)}$	$(0,\pi)$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$
图像				
性质	单调增加 奇函数	单调递减 关于$(0,\frac{\pi}{2})$对称	单调增加 奇函数	单调递减 关于$(0,\frac{\pi}{2})$对称

应将$\boxed{(0,\pi)}$修改为$\boxed{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

4.考点:裂项相消法求通项为 n 个因子相乘的数列的极限

由于$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$,

故$(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2})=(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})\cdots\cdots(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n})$

$=(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\boxed{\frac{4}{3}}\cdots\frac{n-1}{n})\cdot(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n+1}{n})=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$

于是,$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n})=\frac{1}{2}$.

综上,应选 C.

应将$\boxed{\frac{4}{3}}$修改为$\boxed{\frac{3}{4}}$.

二、解答题

2.解:(高等数学 CI)

当里程 x 在 100km 以内,$y=A$;

当里程 x 超过 100km,超出部分八折付费,故 $y=A+0.8A\cdot\dfrac{x-100}{100}$.

综上,$y=\begin{cases} A & ,x\le 100 \\ (\boxed{0.8x}+0.2)A, & x>100 \end{cases}$.

应将 $y=\begin{cases} A & ,x\le 100 \\ (\boxed{0.8x}+0.2)A, & x>100 \end{cases}$ 修改为 $y=\begin{cases} A & ,x\le 100 \\ (\boxed{0.008x}+0.2)A, & x>100 \end{cases}$.

第二次作业

(适用范围:课表上有高等数学 AI,BI 或 CI 的同学)

一、单选题

1. 考点:无穷小的比较和函数极限

备注:

(1)若β是α的高阶无穷小,则记 $\beta=o(\alpha)$;

(2)若β是α的同阶无穷小,则记 $\beta=O(\alpha)$;

(3)若β是α的$\boxed{\text{同阶}}$无穷小,则记 $\beta\sim\alpha$;

应将$\boxed{\text{同阶}}$修改为$\boxed{\text{等价}}$.

二、填空题

3.考点:分子/分母有理化法求函数极限(高等数学 AI)

$$\lim_{x\to\infty^+}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x}\boxed{-}\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}\boxed{-}\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}\boxed{-}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.$$

应整体修改为

$$\lim_{x\to\infty^+}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.$$

4.考点:函数在某点的极限和等价无穷小代换(高等数学 AI)

由于 $\sin x\sim x$,$\boxed{f(x)\sim 2x^2}(x\to 0)$,故当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{f(x)}{\sin x}$ 是$\boxed{2x}$的等价无穷小.

于是$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2}$.

应整体修改为

由于$\sin x\sim x, f(x)\sim 2x^3(x\to0)$,故当$x\to0$时,$\dfrac{f(x)}{\sin x}$是$2x^2$的等价无穷小.由于$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(x\to0)$,故$\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x)}{\sin x}$.

于是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\frac{f(x)}{\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot2x^2}{x}=1$.

三、解答题

1.解:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{ax^2}{\sqrt{1+0.5x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=a\lim_{x\to0^+}\frac{x^2(\sqrt{1+0.5x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}{1+0.5x\arcsin x-\cos x}=2a\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{\arcsin x}{2x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}=2a.$$

应整体修改为

由于$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax^2}{\sqrt{1+0.5x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}$

$$=a\lim_{x\to0^+}\frac{x^2(\sqrt{1+0.5x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}{1+0.5x\arcsin x-\cos x}=2a\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{\arcsin x}{2x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}=2a,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}[1-(1-\cos x)]^{-\frac{1}{1-\cos x}\cdot(-\frac{1-\cos x}{x^2})}=e^{\lim\limits_{x\to0^-}(-\frac{1-\cos x}{x^2})}$$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$,且$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在,

所以$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,即$2a=e^{-\frac{1}{2}}$.于是,$a=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

四、证明题

1.证明:（高等数学 AI 或 BI）

$f(x)$在开区间(a,b)内连续,$a<x_1<x_2<b$,$f(x)$在开区间$[x_1,x_2]$内连续,

则$f(x)$在开区间$[x_1,x_2]$存在最大值M,最小值m,

$m\le\dfrac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}\le M(t_1>0,t_2>0)$,由介值定理得证.

2.证明:（高等数学 CI）

$f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续, $a<x_1<x_2<b$, $f(x)$ 在开区间 $\left[x_1,x_2\right]$ 内连续,

则 $f(x)$ 在开区间 $\left[x_1,x_2\right]$ 存在最大值 M,最小值 m,

（1） $m\le\dfrac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}\le M(t_1>0,t_2>0)$,由介值定理得证.

上面两题应修改为

$f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续, $a<x_1<x_2<b$, $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 内连续,

则 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 存在最大值 M,最小值 m.

于是, $m\le\dfrac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}\le M(t_1>0,t_2>0)$.

由介值定理,存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}$.

综上,对任意的两个正数 t_1,t_2 都存在 $\xi\in(a,b)$,

使得 $t_1f(x_1)+t_2f(x_2)=(t_1+t_2)f(\xi)$.