普通高等教育“十三五”国家级规划教材

大 学 数 学
线 性 代 数

标准化作业

吉林大学公共数学教学与研究中心

2017.9

学院　　　　　　　　班级　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

第 一 章 作 业

（矩阵的运算与初等变换）

1、计算题

（1）$(1,\ -2,\ 3)\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$；

（2）$\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}(1,\ 0,\ 4)$；

（3）$(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；

（4）$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&-2&-1\\0&0&2&-3\\0&0&0&4\end{bmatrix}$.

2、计算下列方阵的幂:

（1）已知 $\boldsymbol{\alpha}$=（1，2，3），$\boldsymbol{\beta}$=（1，−1，2），$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{A}^4$;

（2）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$;

3、通过初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵:

（1）$\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\1 & -1 & 2 & -3\\1 & 3 & -4 & 4\end{bmatrix}$;

（2）$\begin{bmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\2 & -3 & 0 & 7 & -5\\3 & -2 & 5 & 8 & 0\\1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

4、用初等变换把下列矩阵化为标准形矩阵:

（1）$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$；

（2）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

5、利用初等矩阵计算:

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{11}$；

（2）已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}-a_{22} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}-a_{32} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{X}$.

6、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，求 a、b 的值.

7、设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶对称矩阵.

学院　　　　　　　　班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

第 二 章 作 业

（方阵的行列式）

1、填空题

（1）6 级排列 523614 的逆序数是________,它是________排列;

（2）6 级排列 654321 的逆序数是________,它是________排列;

（3）1~9 这九数的排列 $1274i56j9$ 为偶排列，则 $i=$________， $j=$________;

（4）一个 n 阶行列式 D 中的各行元素之和为零，则 $D=$__________;

（5）行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=$__________.

2、计算行列式 $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & x & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 展开式中 x^3 的系数.

3、计算下列各行列式的值:

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

（2） $$D=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix};$$

（3） $$D=\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

（4） $$D=\begin{vmatrix} 3+a & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3-a & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3+b & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3-b \end{vmatrix};$$

（5） $D=\begin{vmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & 2 & & \\ & \iddots & & & \\ 2016 & & & & \\ 0 & & & & 2017 \end{vmatrix}$.

（6） $D=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

4、设 4 阶行列式的第 2 列元素依次为 2、m、k、1，第 2 列元素的余子式依次为 1、−1、1、−1，第 4 列元素的代数余子式依次为 3、1、4、5，且行列式的值为 2，求 m、k 的值.

5、设 3 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\2\gamma_1\\3\gamma_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\gamma_1\\\gamma_{2,}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$， $\boldsymbol{\beta}$， γ_1， γ_2 均为 3 维行向量，且$|\boldsymbol{A}|=18$，$|\boldsymbol{B}|=2$，求$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

6、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|<0$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

学院　　　　　　　　　班级　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　学号

第 三 章 作 业

（可逆矩阵）

1、填空题

（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$______________；

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $R(\boldsymbol{A}^*)=$__________；

（3）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$_________，

$\left||2\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|=$______________；

（4）设实矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}=(a_{ij})\neq\boldsymbol{O}$，且 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$（$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式），则 $|\boldsymbol{A}|=$_________；

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{B}|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{B}\\(2\boldsymbol{A})^{-1}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}$ $=$____________.

（6）设矩阵 $\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ 等价，则 $a=$___________.

2、选择题

（1）设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$;　（B）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$;　（C）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$;　（D）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

（2）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则有（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;　（B）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$;

（C）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$;　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆.

（3）若对任意方阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵）能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，

则 $\boldsymbol{A}$ 满足（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$;　（B）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;　（C）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$;　（D）$|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

（4）已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零方阵，若有 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{B}$ 为单位矩阵;（B）$\boldsymbol{B}$ 为零方阵;（C）$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$;（D）不一定.

（5）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})$为同阶可逆方阵，则$(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=$（　　）.

（A）$\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$;　（B）$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;　（C）$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}$;　（D）$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则（　　）.

（A）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$;

（B）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$;

（C）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$;

（D）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

3、（1）求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -3 & -4\\ 1 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$的逆矩阵;

（2）求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&2&3\\0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\end{bmatrix}$的逆矩阵.

4、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{bmatrix}$，求解下列矩阵方程:

（1）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}$ ； (2) $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$.

5、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得矩阵 $\boldsymbol{B}$，试证:
（1）$\boldsymbol{B}$ 可逆;（2）求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

6、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 2 & 1 & 5 & -1\\2 & 0 & 3 & -1 & 3\\1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

7、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，且满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{A}^{-1}$，求 $\boldsymbol{B}^*$.

8、设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，试证$|\boldsymbol{AB}|=0$.

学院＿＿＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿

第 四 章 作 业

（线性方程组与向量组的线性相关性）

1、填空题

（1）设 $\boldsymbol{\beta}$=（3，－4），$\boldsymbol{\alpha}_1$=（1，2），$\boldsymbol{\alpha}_2$=（−1，3），则 $\boldsymbol{\beta}$ 表成 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿;

（2）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$=（1，1，0），$\boldsymbol{\alpha}_2$=（1，3，−1），$\boldsymbol{\alpha}_3$=（5，3，t）线性相关，则 t=＿＿＿＿＿＿;

（3）设线性方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$＿＿＿＿＿＿;

（4）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a+2,-2)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,3,4)^{\mathrm{T}}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $a=$＿＿＿＿＿;

（5）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零，且 R($\boldsymbol{A}$)=n−1，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为＿＿＿＿＿＿＿＿.

（6）设线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，且存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\lambda=$＿＿＿＿＿＿.

2、选择题

（1）设 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则正确的结论是（　　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；　　（D）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$；　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$；

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$；　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

（3）设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，且 $R(\boldsymbol{A})=n-3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$;　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$;

（C）$2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$;　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

（4）设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关;　　（B）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关;

（C）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;　　（D）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

（5）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量，k_1，k_2 是任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为（　　）.

（A）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;　　（B）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;

（C）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;　　（D）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

（6）设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则下面结论中正确的是（　　）.

（A）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有唯一解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解;

（B）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有唯一解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必无解;

（C）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 也有无穷多个解;

（D）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 也有无穷多个解.

3、设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且 R（$\boldsymbol{A}$）=3，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,9,4,9)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,1,7)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

4、求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 16x_5 = \end{cases}$$

5、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & 1 & p+2 & p \end{bmatrix}$，问当 p 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，在此时求出 $\boldsymbol{A}$ 的秩和列向量组的一个极大无关组，并把不是极大无关组的列用极大无关组线性表示.

6、设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 均为 3 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(I)证明存在非零向量$\boldsymbol{\xi}$，使得$\boldsymbol{\xi}$既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示;

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-3\\-4\\3\end{bmatrix}$时，求所有的既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可由$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的非零向量$\boldsymbol{\xi}$.

7、已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维的列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$， 如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

8、设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}，且 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，试证 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}，$\boldsymbol{\eta}^*$ 线性无关.

学院＿＿＿＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿

第 五 章 作 业

（方阵的特征值、特征向量与相似化简）

1、填空题

（1）$\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵($\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，$k$ 为正整数)，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值＿＿＿＿＿＿＿；

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=5$，则方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$的特征值是＿＿＿＿＿，特征向量是 ＿＿＿＿＿；

（3）设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似 $\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则$\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=$ ＿＿＿＿＿＿＿；

（4）若 λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的单根，则 $R(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=$ ＿＿＿＿ ；

（5）若 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 a，则 $4\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}$ 的一个特征值为＿＿＿＿＿；

（6）若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&5&t\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$只有一个线性无关的特征向量，则 $t=$＿＿＿＿＿.

2、选择题

（1） 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0，-1，1，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3$，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=$（　　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$；(C) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$；(D) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则（　　　）.

(A) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|$ ；　　(B) $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$ ；

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 与同一对角阵相似；　(D) 存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

（3）与矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 相似的矩阵是（　　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

（4） n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与某对角矩阵相似，则（　　　）.

(A) $R(\boldsymbol{A})=n$;　　　　(B) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值;

(C) $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵;　　　　(D) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

（5）设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 相似 $\boldsymbol{A}$，则 R（$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$）+$R$（$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$）=（　　　）.

(A) 2;　　(B) 3;　　(C) 4;　　(D) 5.

（6）已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值对应的特征向量是（　　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}$;　　(B) $\boldsymbol{\beta}$;　　(C) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;　　(D) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.

3、计算题

（1）设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$(a_1\neq 0,\ n>1)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量.

（2）设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1， -2，3，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}$，求:

① $\boldsymbol{B}$ 的特征值;

② $\boldsymbol{B}$ 是否可对角化，若可以，试写出其相似对角形矩阵;

③ 求 $|\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

（3）在实数域上，设 4 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值，且满足条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，求 $\boldsymbol{A}^*$的两个特征值.

（4）设有 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，且 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=5$，$|\boldsymbol{A}|=0$，试求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并判定 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角矩阵，若能，求出相似的对角矩阵.

（5）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$ 相似，

① 求 a，b;　　② 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

（6） 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,3)$，其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（7）设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 3，且 $R(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{\beta}=(-1，2，2)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$；（Ⅱ）计算 $\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^{10}$.

4、证明题

（1）设实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，试证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

（2）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

学院＿＿＿＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿

第 六 章 作 业

（二次型与对称矩阵）

1、 填空题

(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+3x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$ 的矩阵是

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，秩是＿＿＿＿＿ .

(2) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-2\boldsymbol{e}_3,3\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ .

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & \\ & \lambda_3 & \\ & & \lambda_1\end{bmatrix}$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{P}=$

＿＿＿＿＿＿＿＿.

(4) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2tx_1x_2+2x_1x_3$ 正定时，t 应满足的条件是＿＿＿＿＿＿ .

(5) 设 3 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，若令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下的标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2、 选择题

（1）实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是（　　　）.

(A) $R(\boldsymbol{A})=n$;　　　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数为零;

(C) $|\boldsymbol{A}|>0$;　　　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零.

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系为（　　　）.

(A) 合同且相似;　　　　　(B) 合同但不相似;

(C) 相似但不合同;　　　　(D) 既不相似也不合同.

（3）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$ 正定，则与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角矩阵为（　　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&10\end{bmatrix}$；(B) $\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&10\end{bmatrix}$；(C) $\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&7\end{bmatrix}$；(D) $\begin{bmatrix}6&&\\&7&\\&&-1\end{bmatrix}$.

（4）设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 正定，则 $\boldsymbol{B}=((-1)^{i+j}a_{ij})_{3\times3}$ 必为（　　　）.

(A) 负定矩阵；　(B) 正定矩阵；　(C) 半负定矩阵；　(D) 半正定矩阵.

（5）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实对称矩阵，二次型

$$f=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$$

为正定的充要条件是（　　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}|=0$;　　　（B）$|\boldsymbol{A}|\neq0$;　　　（C）$|\boldsymbol{A}|>0$;　　　（D）$|\boldsymbol{A}|<0$.

3、已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求 c.

4、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2+3x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2$.

(1) 求一个正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换;

(2) 用配方法将二次型化为标准形，并写出所用的可逆线性变换;

(3) 用合同变换法将二次型化为标准形，并写出所用的可逆线性变换.

5、求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+3x_3^2 + 2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ 的正、负惯性指数及符号差.

6、设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-x_3^2+8x_1x_2+2bx_1x_3+2cx_2x_3,$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

(1) 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形，并写出所用的正交变换；(2)判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是否合同.

7、证明题

（1）设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一实二次型，λ_1，λ_2，…，λ_n 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. 证明对于任一实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\lambda_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda_n \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|>2^n$.

（3）设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 为实矩阵，若 R（$\boldsymbol{A}$）$=n$，试证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

学院　　　　　　　　班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

第 七 章 作 业

（线性空间与线性变换）

1、下列集合对于给定的运算是否构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，如果是，找出一个基，并求维数.

（1）$\mathbf{V}_0=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)|\ x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$,对于通常向量的加法和数乘;

（2）$\mathbf{V}_1=\{\ \boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)|\ x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$,对于通常向量的加法和数乘;

（3）全体 n 阶实矩阵集合 $\mathbf{R}^{n\times n}$，定义

加法：$\forall \boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 　　　$\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$

数乘：按通常的矩阵数乘.

（4） $\boldsymbol{S}=\left\{\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & a\end{bmatrix}\ a，b\in\mathbf{R}\right\}$，对于通常矩阵的加法和数乘;

（5）$\mathbf{V}=\{\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0;\ \ x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$,对于通常向量的加法和数乘.

2、全体实反对称矩阵的集合 $\mathbf{W}$,对于通常矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间？为什么？

3、求线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中由向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

所生成的子空间的维数和一个基.

4、求数域 $\mathbf{F}$ 上三阶实对称矩阵在通常的矩阵的加法和数乘下构成的线性空间的基与维数.

5、设线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中一组基

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$在这组基下的坐标.

6. 已知 1，x，x^2，x^3 是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组基:

(1) 证明 1，$1+x$，$(1+x)^2$，$(1+x)^3$ 也是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组基;

(2) 求由基 1，x，x^2，x^3 到基 1，$1+x$，$(1+x)^2$，$(1+x)^3$ 的过渡矩阵;

(3) 求由基 1，$1+x$，$(1+x)^2$，$(1+x)^3$ 到基 1，x，x^2，x^3 的过渡矩阵;

(4) 求 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 对于基 1，$1+x$，$(1+x)^2$，$(1+x)^3$ 的坐标.

7、设 $\mathbf{R}^3$ 的两组基分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad 及\quad \boldsymbol{\varepsilon}_1^{'}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2^{'}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3^{'}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

求 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 分别在这两组基下的坐标.

8、 设有两组基

$\boldsymbol{\xi}_1 = (0，1，1)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (1，0，1)^T$，$\boldsymbol{\xi}_3 = (1，1，0)^T$;

$\boldsymbol{\eta}_1 = (1，0，0)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1，1，0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3 = (1，1，1)^T$.

求（1）由基 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ ，$\boldsymbol{\xi}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ ，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$;

（2）$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}_1 + 3\boldsymbol{\eta}_2 + 5\boldsymbol{\eta}_3$ 关于基 ξ_1，ξ_2 ，ξ_3 的坐标; $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\xi}_1 + 2\xi_2 + 3\boldsymbol{\xi}_3$ 关于基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ ，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的坐标.

9、验证

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

为 R^3 的一个基，并求向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}5\\0\\7\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-9\\-8\\-13\end{bmatrix}$$

在这组基下的坐标.

10. 设 $\mathbf{R}^3$ 中由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

(1) 若基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1，0，0)$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1，1，0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1，1，1)$ ，试求基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ ，$\boldsymbol{\beta}_3$;

(2) 若基 $\boldsymbol{\beta}_1=(0，1，1)$ ，$\boldsymbol{\beta}_2=(1，0，2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(2，1，0)$，试求基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3$.

《线性代数 A》模拟试卷

一、填空题（每小题 3 分、共计 18 分）

（1） 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$ 线性相关，则 t=_____.

（2） 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,5),\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{3},\frac{1}{5})$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{A}$ = _______.

（3） 设 $f=x_1^2+2tx_1x_2+4x_2^2+2x_3^2$ 为正定二次型，则 t 的取值范围是________.

（4） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|$ = 2，$|\boldsymbol{B}|$ = − 4，则 $\left|2\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\right|$ =__________.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$= _________.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的 i，j 两行对换后得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{AB}^{-1}|$= ________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共计 18 分）

（1）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则下面的结论正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$;　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　;　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　;　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

（2）设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，则下面结论正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，但能由 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示;

（B）$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也不能由 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示;

（C）$\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，但不能由 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示;

（D）$\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也能由 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量 k 为任意的常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　　）.

（A）$k\boldsymbol{\alpha}_1$;　（B）$k\boldsymbol{\alpha}_2$;　（C）$k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$;　（D）$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.

（4）设有 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|\boldsymbol{A}+3\mathbf{E}|=0$，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$，，$|\boldsymbol{A}|<0$，则（　　）为 $\boldsymbol{A}^*$的一个特征值.

（A） 4;　（B）-3;　（C）$\frac{4}{3}$;　（D）$\frac{3}{4}$.

（5）已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4&6\\1&2&3\\4&8&12\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}$ =（　　）.

（A）$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2$;　（B）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$;　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$;　（D）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$.

（6）设 4 阶行列式的第 2 列元素依次为 2、m、k、3，第 2 列元素的余子式依

次为 1、−1、1、−1，第 3 列元素的代数余子式依次为 3、1、4、2，且行列式的值为 1，则 m、k 的值为（　　　）.

（A）4、2;　　（B）−4、2;　　（C）4、−2;　　（D）−4、−2.

三、计算题（每小题 6 分，共计 36 分）

1、设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$, 且 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

2、验证 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并将 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}5\\0\\7\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-8\\-9\\-13\end{bmatrix}$ 用这个基线性表示.

3、已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & x\end{bmatrix}\text{与 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & y & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\text{相似，求 } x,y.$$

4、 设四元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,且 R（$\boldsymbol{A}$）= 3，已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其三个解向量，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\4\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

5、已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$4\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，求 k.

6、设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 2 & 1 & 5 & -1\\2 & 0 & 3 & -1 & 3\\1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

求 R($\boldsymbol{A}$)及 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组.

四、(12 分）已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$=（$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$），其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维的列向量，并且 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，而 $3\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

五、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ x & 2 & y \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

六、（6 分）设有 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，已知 $R(\boldsymbol{A})=2$. ①写出用正交变换将二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 化成的标准形（不需求出所用的正交变换）；②判断二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 的正定性；③令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，试判断 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的线性相关性.