2014—2015 学年第一学期《高等数学 AIII》答案　2015 年 1 月 14 日

一、填空题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分) 1. $\underline{\ \pi\ }$. 2. $\underline{\ 4\pi\ }$. 3. $\underline{\ -1\ }$。4. $\underline{\ \vec{0}\ }$. 5. $\underline{\ x^2\ }$。

二、选择题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分) 1.（ A ）。2.（ B ）。3.（ D ）。4.（ C ）。5.（ C ）。

三、计算题(共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分)

1. 计算 $\int_L x^2 dy - 3y dx$，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(-1,1)$ 对应的一段曲线。

$$\widehat{AB}:\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} \quad x:1 \to -1 \quad \int_L x^2 dy - 3y dx = \int_1^{-1} x^2 dx^2 - 3x^2 dx = \int_1^{-1} (3x^3 - 3x^2) dx = 2$$

2．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{n!}$ 的敛散性.

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n \ln n}{n!}} = 0 < 1$，或 $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$

3．求微分方程 $y' - 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$ 的通解。

$u = \frac{y}{x}$ $y' = xu' + u$ 代入方程化简得 $x\frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}$

解得 $\frac{y}{x} = u = \left(\ln|x| + C\right)^2$

4．将函数 $f(x) = \cos^2 x$ 展为 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!}$ 的和。

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} = 2\cos^2 1 - 1$$

四、计算题(共 4 小题，第 1、2、3 题各 9 分， 4 题 7 分，共 34 分)

1．求常微分方程 $y''' - 8y = 24xe^{2x}$ 的通解。

解：$r^3 - 8 = (r-2)(r^2 + 2r + 4) = 0,\ r_1 = 2, r_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

设 $y^* = x(ax+b)e^{2x}$ 代入方程化简得 $(24ax + 12a + 12b)e^{2x} = 24xe^{2x}$，

解得 $a = 1,\ b = -1$ ，　则 $y^* = (x^2 - x)e^{2x}$

$$y = Y + y^* == C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x + (x^2 - x)e^{2x}$$

2．计算 $I=\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $y+z=2$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线，从 z 轴的正向向负向看 Γ 取顺时针方向.

设 $\Sigma: y+z=2. x^2+y^2\le 1$，取上侧 $\oint_r y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z=-\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & -x & -z^2\end{vmatrix}$

$$=\iint\limits_\Sigma(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\cdot 1^2=\pi.$$

3．计算 $I=\int\limits_L 3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy$，其中 L 是第一象限从点 $O\left(0,0\right)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $A\left(2,0\right)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $B\left(0,2\right)$ 的曲线弧。

$$I=\oint\limits_{L\cup\overline{BO}}+\int\limits_{\overline{OB}}=\iint\limits_D\left\{\left(x^3+x-2y\right)'_x-\left(3x^2y\right)'_y\right\}dxdy+\int_0^2-2ydy$$

$$=\iint\limits_D 1dxdy+\int_0^2-2ydy=\frac{\pi}{2}-4$$

4．计算 $I=\oiint\limits_\Sigma\dfrac{\cos\left(\vec{r},\vec{n}\right)}{\left|\vec{r}\right|^2}dS$，其中 $M\left(x,y,z\right)$ 为简单封闭光滑闭曲面 Σ 上一点，$M_0\left(x_0,y_{0,}z_0\right)$ 为曲面 Σ 的内点，$\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$，$\vec{n}$ 为 Σ 上点 $M\left(x,y,z\right)$ 处的外法向量。

解: 设 $\vec{n}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$，$\cos\left(\vec{r},\vec{n}\right)=\dfrac{\left(x-x_0\right)\cos\alpha+\left(y-y_0\right)\cos\beta+\left(z-z_0\right)\cos\gamma}{\left|\vec{r}\right|}$

$$I=\iint\limits_\Sigma\frac{\left(x-x_0\right)\cos\alpha+\left(y-y_0\right)\cos\beta+\left(z-z_0\right)\cos\gamma}{\left|\vec{r}\right|^3}dS=\iint\limits_\Sigma\frac{\left(x-x_0\right)dydz+\left(y-y_0\right)dzdx+\left(z-z_0\right)dxdy}{\left|\vec{r}\right|^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\left|\vec{r}\right|^2-3\left(x-x_0\right)^2}{\left|\vec{r}\right|^5},\ \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\left|\vec{r}\right|^2-3\left(y-y_0\right)^2}{\left|\vec{r}\right|^5},\ \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\left|\vec{r}\right|^2-3\left(z-z_0\right)^2}{\left|\vec{r}\right|^5}$$

$$I=\oiint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\oiint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV+\oiint\limits_{\Sigma_1^+}\frac{\left(x-x_0\right)dydz+\left(y-y_0\right)dzdx+\left(z-z_0\right)dxdy}{\left|\vec{r}\right|^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_1^+}\left(x-x_0\right)dydz+\left(y-y_0\right)dzdx+\left(z-z_0\right)dxdy=4\pi$$