2015—2016 学年第一学期《高等数学 AIII》试卷

2016 年 1 月 7 日

一	二	三	四	总　分

得 分

一、填空题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．设 Σ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{2}+y^2+z^2=1(z\geq 0)$，已知 Σ 的面积为 $\frac{A}{2}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+2z^2+xyz)\mathrm{d}S=$_______________。

2．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+3^n}x^n$ 的收敛半径为_______________。

3．常微分方程 $\begin{cases} xy'-y=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$ 的解为 $y=$_______________。

4．向量场 $\vec{A}(x,y,z)=\frac{1}{6}\left(x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}\right)$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\vec{A}(x,y,z)=$_______________。

5．设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=$ _______________。

得 分

二、选择题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．Σ 的方程为 $y^2+z^2=x^2\left(0\le x\le 1\right)$, Σ_1 为 Σ 在第一卦限内对应的部分, 则下列选项正确的是(　　　)。

(A) $\iint\limits_{\Sigma} zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$；　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS\neq 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$；　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$；

2．平面曲线 L：$|x|+|y|=1$，则 $\oint_L(|x|+|y|)\mathrm{d}s=$ (　　　)。

（A）$4\sqrt{2}$；　　（B）π；

（C）0；　　（D）以上都不对；

3． 设 $u_n\neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$ 单调, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ (　　　)。

（A） 发散;　　（B） 条件收敛;

（C）绝对收敛;　　（D） 收敛性根据条件不能确定;

4．下列微分方程中, 以 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x+x$ (C_1,C_2,C_3 为常数)为通解的是 (　　　)。

(A) $y'''+y''+4y'+4y=x$；　　(B)；$y'''+y''+4y'+4y=-x^2+x$；

(C)；$y'''-2y''+y'-2y=-2x+1$；　　(D) $y'''-2y''+y'-2y=-2x^2-x$；

5．下列选项错误的是(　　　)。

(A) 方程 $\left(x^3+1\right)\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xe^{3x}$ 为非齐次二阶线性微分方程;

(B) 微分方程 $x^2y''+4xy'+2y=0$ 的通解为 $Y=C_1\dfrac{1}{x}+C_2\dfrac{1}{x^2}$；

(C) 微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的特解形式可设为 $y^*=ax^2+bx+c+Ax\sin x+\left(Bx+C\right)\cos x$；

(D) 设 y_1,y_2,y_3 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的三个不同的解，则该方程的通解为 $Y=C_1\left(y_1-y_2\right)+C_2\left(y_2-y_3\right)$

得 分

三、计算题(每小题 10 分，共 40 分)

1．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 的敛散性.

2．计算 $\int_L \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $A(-1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 对应的一段。

3．求微分方程 $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ 的通解。

4．将 $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x - 2}$ 展为 x 的幂级数。

得 分

四、计算题(每小题 10 分，共 30 分)

1．求常微分方程 $y'''-4y''+4y'=xe^x$ 的通解。

2．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2z^2}{x^2+y^2}dydz+y^2\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}dzdx+\frac{z^3}{x^2+y^2}dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z^2=x^2+y^2\ \left(|z|\le 1\right)$ 的外侧。

3．求 1）已知$\vec{A}=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$，计算$div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)$。

2）证明空间的格林第二公式$\iiint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v \\ u & v\end{vmatrix}dxdydz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v\end{vmatrix}dS$，其中有界闭域$\Omega$的边界曲面为$\Sigma$，$\vec{n}$为曲面$\Sigma$的外法线，$u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$在$\Omega$上二阶偏导连续，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。