

Lösungen zu Blatt-02

Aufgabe 1

Zunächst lösen wir die z^2 Gleichung.

$$\begin{aligned}
 z^2 &= z + 1 && | - z^2 \\
 0 &= -z^2 + z + 1 && | * (-1) \\
 0 &= z^2 - z - 1 && | \text{Mitternachtsformel} \\
 z_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1 * (-1)}}{2} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

Unsere beiden Lösungen für z können wir nun für $\phi = x/y$ einsetzen.

$$\phi = \frac{y}{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nun formen wir $x/y = y/(x + y)$ so um, dass wir unser ϕ einsetzen können.

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{y}{x} = \frac{x + y}{y} \\
 &= \frac{x}{y} + \frac{y}{y} \\
 &= \frac{1}{\frac{y}{x}} + 1 \\
 \phi &= \frac{1}{\phi} + 1
 \end{aligned}$$

qed.

Aufgabe 2

Es gelten $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
 F_n ist die n -te Fibonacci Zahl.

$$\mathbb{Z} : F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

I.A.

für $n = 0$

$$F_0 = 0 = \frac{\phi^0 - \psi^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}}$$

für $n = 1$

$$F_1 = 1 = \frac{\phi^1 - \psi^1}{\sqrt{5}} = 1$$

I.V.

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

I.S.

$$n \rightarrow n + 1$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^n - \psi^n + \phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^n(1 + \frac{1}{\phi}) - \psi^n(1 + \frac{1}{\psi})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^n + \phi^n * \frac{1}{\phi} - \psi^n + \psi^n * \frac{1}{\psi}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^n + \phi^{n-1} - \psi^n + \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

qed.

Aufgabe 3