Lezione 2 13/09/'23

$\boxed{\text{ESTREMI SUPERIORE ED INFERIORE}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

- Se A non è limitato sup. $\sup A = +\infty$
  Se A " " " inf. $\inf A = -\infty$

- Se A è limitato sup. $\sup A =$ minimo dei maggioranti
  Se A è " inf. $\inf A =$ massimo dei minoranti

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ "Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono sempre finiti o infiniti"

La dimostrazione si poggia sull'assioma di continuità

OSS:

1. Sup e Inf esistono sempre
2. Sono sempre unici
3. Se esiste $M = \max A$ allora è anche $M = \sup A$

   Se esiste $m = \min A$ allora è anche $m = \inf A$
4. $\sup A$ non è necessariamente un elemento di A (anche quando $\sup A$ è reale) Se succede che $\sup A \in A$ allora $\sup A \equiv \max A$.

Quanto osservato vale anche per $\inf A$ e $\min A$.

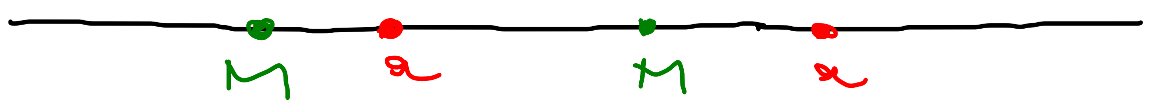
ESEMPI:

Insieme	Inf	Sup	min	max
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.
$\mathbb{Q}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$	0	N.E.
$(0,5)$	0	5	N.E.	N.E.
$(0,5) \cup \{9\}$	0	9	N.E.	9
$(0,5) \cup (9,11]$	0	11	N.E.	11
$\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 3\}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	N.E.	N.E.

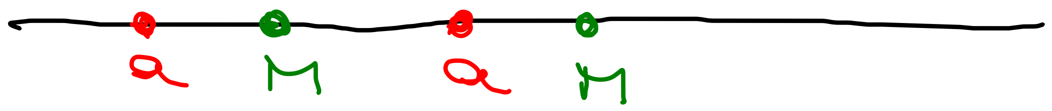
CARATTERIZZAZIONE ESTREMI SUP & INF

$A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

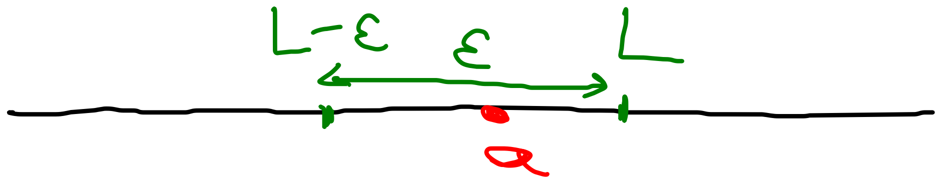
(1) $\sup A = +\infty$ se e solo se
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$ t.c. $a \geq M$



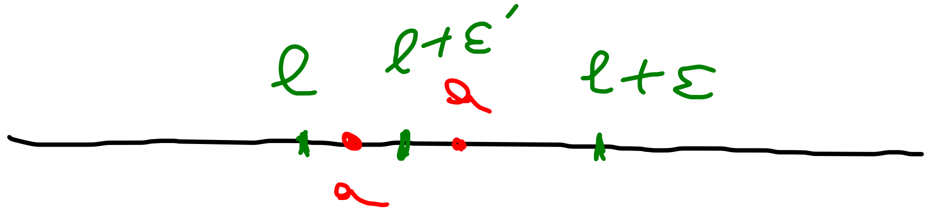
(2) $\inf A = -\infty$ se e solo se
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$ t.c. $a \leq M$



(3) $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se e solo se
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ tale che $a \geq L - \varepsilon$



(4) $\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$



$\boxed{\text{PRINCIPIO DI INDUZIONE}}$

Il principio di induzione riguarda proprietà dei numeri naturali $\mathbb{N}$
Sia P_n una proprietà che riguarda $\mathbb{N}$, ossia una affermazione che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che a seconda del valore di n può essere vera o falsa.

Esempi:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 > 7n + 2$$

$\boxed{\text{PRINCIPIO DI INDUZIONE}}$ Supponiamo che

PASSO BASE $\boxed{(i)}$ P_0 sia vera (ossia, se sostituisco $n=0$ in $P_n \Rightarrow$ è vera)

PASSO INDUTTIVO $\boxed{(ii)}$ se P_n è vera $\Rightarrow$ P_{n+1} è vera

Allora P_n è sempre vera, vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

VARIANTE POSSIBILE

Supponiamo che (i) P_{50} sia vera

(ii) P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} vera

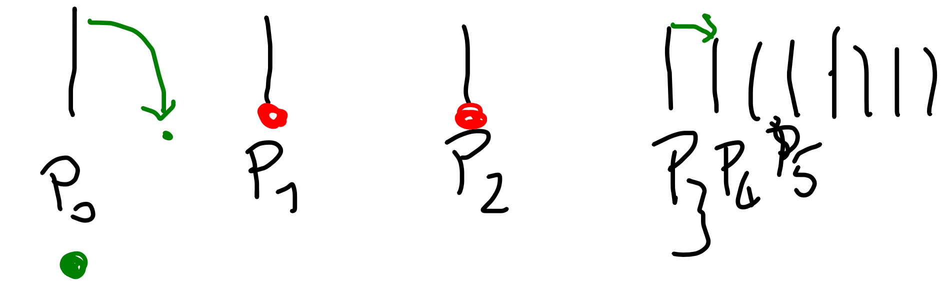
Allora P_n è vera $\forall\, n \geq 50$

VARIANTE PIÙ PERICOLOSA

Supponiamo

(i) P_0 sia vera

(ii) $\forall\, n \geq 3$ si ha se P_n è vera $\Rightarrow$ P_{n+1} è vera



ESEMPI

1. $$\underbrace{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}_{P_n} \quad \forall n\geq 1$$

PASSO BASE $\quad n=1 \quad 1=\frac{1\cdot 2}{2}$ ✓

PASSO INDUTTIVO

Ipotesi $\quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Tesi $\quad 1+2+3+\cdots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

dim!

$$\underbrace{1+2+3+4+\cdots+n+1}=\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\text{uso Ipotesi}}+n+1$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$=\frac{n(n+1)+2n+2}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

quindi la 1ª espressione è uguale all'ultima, cioè è vera la tesi

ESEMPIO 2

Dimostrare che $\underbrace{1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}_{P_n}$ $a \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n=0$ $1 = \frac{a-1}{a-1} = 1$ ✓

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi $1+a+a^2+\dots+a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

dim: $1+a+a^2+\dots+a^{n+1} = \underbrace{1+a+a^2+\dots+a^n}_{\text{uso ipotesi}}+a^{n+1}$

$$= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

$$= \frac{\cancel{a^{n+1}}-1+a^{n+2}-\cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$ ✓

il 1° elemento e l'ultimo sono uguali $\Rightarrow$ è vera la tesi.

ESEMPIO 3 Dimostrare che $n+7 < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Evito di fare il passo base ....

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$

Ipotesi $n+7 < n$

Tesi $n+8 < n+1$

dim! $n+8 = \underbrace{n+7}_{\text{uso ipotesi}} + 1 < n+1$ ✓

ESEMPIO 4 dimostrare $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

$\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n=1 \qquad 1^2 = 1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$ ✓

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$

Ipotesi $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi $1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

dim:

$$1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 = \underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}_{\text{uso ipotesi}}+(n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)\cdot\frac{2n^2+n+6n+6}{6}$$

$$= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

$$= (n+1)\,\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \quad \checkmark$$

il 1° membro è uguale all'ultimo, ossia la tesi è verificata.

ESEMPIO 5

Dimostrare che $2^n \geq n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P_n$

Passo base $\quad n=0 \qquad 1 \geq 0$

PASSO INDUTTIVO

Ipotesi: $\quad 2^n \geq n$

Tesi: $\quad 2^{n+1} \geq n+1$

dim: $\quad 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\uparrow \text{ uso ipotesi}}{\geq} 2 \cdot n \overset{?}{\geq} n+1$

La speranza è che $2n \geq n+1$ ma questo è vero $\iff n \geq 1$

Quindi siamo nella situazione in cui la P_0 è vera ma la speranza ci dice che la tesi è verificabile solo per $n \geq 1$ ovvero

NO!! ATTENZIONE! CUIDADO!

Devo verificare che P_1 è vera $\qquad$ **2° PASSO BASE** $\quad n=1 \quad P_1 \quad 2 \geq 1$

ESEMPIO 6 Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$4^n \geq 2^n + 3^n$$

Proviamo un po' di casi

$n=0$ $\quad 4^0 \geq 2^0 + 3^0$ FALSO

$n=1$ $\quad 4 \geq 2+3$ FALSO

$n=2$ $\quad 16 \geq 4+9=13$ VERO

$n=3$ $\quad 4^3 \geq 2^3+3^3$ $\quad 64 \geq 8+27=35$ VERO

Congettura : vero per $n \geq 2$

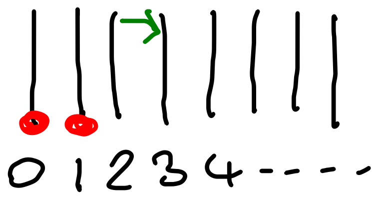
Provo a dimostrare per induzione :

PASSO BASE $\quad n=2 \quad 4^2 \geq 2^2+3^2$ ✓

PASSO INDUTTIVO $\quad$ Ipotesi $4^n \geq 2^n+3^n$ $\quad$ Tesi : $\boxed{4^{n+1} \geq 2^{n+1}+3^{n+1}}$

dim :
$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4(2^n+3^n) = \underbrace{4}_{\geq 2} \cdot 2^n + \underbrace{4}_{\geq 3} \cdot 3^n \geq 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = 2^{n+1}+3^{n+1}$$

uso ipotesi



FATTORIALE $\quad n! = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad 0! \overset{DEF}{=} 1$

TABELLINA $\quad 0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120$

$6! = 720 \qquad 7! = 5040 \quad \ldots$

RICORSIVITÀ $\quad (n+1)! = (n+1)\cdot n!$

ESEMPIO 7 $\quad$ Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ è vera $n! \geq 2^n$

Facciamo i casi semplici

$n=0$	$1 \geq 2^0 = 1$	VERA
$n=1$	$1 \geq 2$	FALSA
$n=2$	$2 \geq 4$	FALSA
$n=3$	$6 \geq 8$	FALSA
$n=4$	$24 \geq 16$	VERA

$n=5 \qquad 5! \geq 2^5 \implies 120 \geq 32$ VERA

Congettura: $n! \geq 2^n$ è vera per $n \geq 4$ e per $n=0$

$\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $\quad n=4 \qquad 4! \geq 2^4 \implies 24 \geq 16$ ✓

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ $\quad$ Ipotesi $n! \geq 2^n$ $\quad$ Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

dim!

$$(n+1)! = (n+1)\, n! \underbrace{\geq}_{\text{uso ipotesi}} (n+1)\, 2^n \underbrace{\overset{?}{\geq}}_{\text{SPERANZA}} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Speranza $n+1 \geq 2$, ma questo è vero per $n \geq 1$