Formulario

Definizioni

$\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$	Rappresentazione di PIANO / SPAZIO sotto forma di COPPIE / TERNE di numeri reali ($\mathbb{R}$)
K : Scalare	Numero reale ($K \in \mathbb{R}$) da moltiplicare per un vettore
$\mathbb{N}$	Numeri naturali $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Numeri relativi $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Numeri razionali $\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	Numeri reali $\{p^2, \sqrt{p}\}$
$\mathbb{R}^n$: spazio n-uple	$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ essenzialmente la definizione/blueprint di un n-upla Simile alla rappr. di spazio/piano/vettori

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$	Insieme delle mat. reali $(m \times n)$
Vet. / colonna riga	Matrici $(1\times n) \sim$ vet. riga / $(m\times 1) \sim$ vet. colonna
Mat. conformabili	Una mat. A é conformabile con B se: $A_{m\times n}$, $B_{n\times K}$ (col. di A = row di B)
Eqz. lineare	Eqz. a multiple incognite di grado 1
Mat. simmetrica	Matrice trasposta di una mat. $A \in M_n(\mathbb{R})$ quadrata
Cammino	Successione di lati che congiunge due vertici
Versore	Vettore di norma 1
Sistemi equivalenti	Sistemi lineari con le stesse soluzioni

Mat. scalini

Una mat. si dice a scalini se il num. degli elementi nulli all'inizio di una riga è maggiore di quella precedente

---

Mat. scal. ridotta

Rref(A) =

Una mat. a scalini in cui ogni elemento conduttore (primo el. non nullo della riga) è 1 ed è l'unico elemento non nullo della riga

---

Sist. lin. omogeneo

Sistema lineare con tutti i termini noti uguali a 0

Dimensione di uno spazio vet.

Numero degli elementi v della base dello spazio

Vettori linearm. dipendenti e indipendenti:

Un insieme di vet. di un sp. vet. è formato da vet. linearmente indip. se:

Nessun vettore può essere espresso come comb. lineare dei restanti vettori:

$$V = v_1, \dots, v_n,\ x \in K \mid \overset{\text{NESSUNO}}{!\forall} v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i,\ v_i \neq v$$

escluso il vettore che cerchiamo

OPPURE

Il vet. nullo può essere espresso come comb. lin. dei vet. solo con coeff. tutti nulli:

$$V = v_1, \dots, v_n,\ x \in K \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \iff \forall x = 0$$

coeff nulli

Caratteristiche / Propietá

Vettori

$\vec{AB} \in \mathbb{R}^2 : (X_B - X_A , Y_B - Y_A)$ / $\vec{AB} \in \mathbb{R}^3 \cdot (X_B - X_A , Y_B - Y_A , Z_B - Z_A)$

OP.

Somma: $(a_1 + a_2) + (b_1 , b_2) = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2)$

Som. generale: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ϕ $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Molt. per scalare: $K(a , b) = (Ka , Kb)$

Molt. × scal. generale: $t\vec{AB} = \vec{AB'}$ /
se $t > 0$: $t\vec{AB} = \vec{AB'}$
se $t = -1$: $t\vec{AB} = \vec{BA}$
se $t < 0$: $t\vec{AB} = \vec{B'A}$

Prodotto scalare

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

Molt. tra vettori: $\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2)$

Prod. vettoriale:

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (\overbrace{v_2 w_3 - v_3 w_2}^{\text{elimina } 1} , \overbrace{v_3 w_1 - v_1 w_3}^{\text{elimina } 2} , \overbrace{v_1 w_2 - v_2 w_1}^{\text{elimina } 3})$$

Len. di $\vec{v}$: $|\vec{v}| = \begin{cases} \vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \end{cases}$ Pitagora

Cos dell' angolo fra 2 $\vec{v}$: $\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$ | $\cos\theta = 0$ se $v \perp w$

Area del parallelogramma di lato $\vec{v}, \vec{w}$:

$A = |v_1 w_2 - w_1 v_2|$: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$A = |\vec{v} \times \vec{w}|$: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

Vol del parallelepipedo di lati $\vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{u}$:

$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ / $h = |\vec{u}| \cdot |\cos\theta|$

Norma : $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ | $x \in \mathbb{R}^n$

→ se $\|v\| = 1$ allora $\vec{v}$ è un versore

→ len di x

Distanza: $d(x, y) = \|x - y\|$ | $x, y \in \mathbb{R}^n$

Normalizzazione: $v' = \frac{1}{\|v\|} v$ | v' versore di v

Mod. normalizz. per scalare: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ | $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

Proiezione ortogonale di un vet. su un altro:

$\underline{pr_y(x)} = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$ | $x, y \in \mathbb{R}^n$

↳ proiezione x su y

Combinazione lineare: $(v_1 \cdot k_1 + \cdots + v_n \cdot k_n)$ | $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ campo, $v_1, \ldots, v_n \in V$ sp. vet, V definito su $\mathbb{K}$

PROP.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathbb{R}^2$

Coincidenti: $\Leftrightarrow$ $A = B$ e $C = D$ $\vee$ $A \neq B$ e $C \neq D$ e $\overline{AB}$ stessa len, dir., vers. $\overline{CD}$

Elem. neutro: $\vec{0}$

Opposto: $\overrightarrow{AB}$ opposto $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ / $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Perpendicolari: $\Leftrightarrow$ $(x \cdot y) = 0$ $\vee$ $\|x + y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2$ identificazione del vettore

$c = (x \cdot y)/\|y\|^2$

$\vec{x} = \underbrace{cy}_{\text{seg. vet. base}} + \overbrace{(x - cy)}^{\text{vet. ortogonale}}$ | $\vec{y} \neq 0$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^{2 \cdot 3}$ } Creazione del vettore

Dipendenza lineare: se $\overbrace{\sum k_n v_n}^{\text{comb. lineare}} = 0$ e
- $\forall k$ NON necessariamente $= 0$
  ↳ lin. dip. ⇝ stessa retta
- lin. indip.: $\forall k$ necessariamente $= 0$

Disug. Cauchy-Shwartz: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \iff x, y$ linear. dip.

Rette

$\mathbb{R}^2$

$r \Rightarrow \underline{a x_1 + b y_1} = c$

$\not\equiv$

$\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

← inters. fra due piani

eliminando t

QP

Punto sulla retta:

$P \in \overrightarrow{P_1 P_2}$

$$P(x, y) = \begin{cases} x = x_1 + t\,\underline{(x_2 - x_1)}\,b \\ y = y_1 + t\,\underline{(y_2 - y_1)}\,a \end{cases}$$

Piano

$$\pi \Rightarrow ax + by + cz = d$$

eliminando s e t

OP

P è intersezione di due rette di π

Punto sul p. generale: $\overrightarrow{P_1P} = s\overrightarrow{P_1P_2} + t\overrightarrow{P_1P_3}$

comb. lineare di P_1P_2 e P_1P_3

Punto sul piano: $P \in \pi$

$$P(x, y, z) = \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s(z_2 - z_1) + (z_3 - z_1) \end{cases}$$

Retta perpen. al piano passante per l'origine: $r \perp \pi$

$$r = \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \qquad \pi = ax + by + cz = d$$

Gruppo

Insieme nel quale é definita un operazione "$*$" con propietá:

~ ASSOCIATIVA : $(a*b)*c = a*(b*c)$

~ EL. NEUTRO : $(a*\emptyset) = a$

~ EL. SIMMETRICO: $(a*a') = \emptyset$

~ COMMUTATIVA : $(a*b)=(b*a)$ opzionale,

lo rende un g. commutativo

Campo

Insieme $\mathbb{K}$ nel quale sono definite due op.: "+" e "x" con propietá:

- $(\mathbb{K}, +)$ é un gruppo commutativo con elem. neutro $\emptyset$
- $\mathbb{K}' = \mathbb{K} / \{\emptyset\}$, $(\mathbb{K}', \times)$ é un gruppo commutativo

  $\mathbb{K}$ tolto 1 el. neutro
- DISTRIBUTIVA: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

N-uple

Associazione di n numeri reali all'interno di spazi/insiemi

OP

Somma : $a+b=(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) \mid a,b \in \mathbb{R}^n$

Molt. scalare: $K\cdot a=(K\cdot a_1, \dots, K\cdot a_n) \mid a \in \mathbb{R}^n, K \in \mathbb{R}$

PROP

Elem. neutro: $\emptyset=(0_1, \dots, 0_n), \emptyset a=\emptyset \mid a, \emptyset \in \mathbb{R}^n$

Elem. opposto: $-a=(-a_1, \dots, -a_n), a+(-a)=\emptyset \mid a, -a \in \mathbb{R}^n$

Matrici

Siano $m, n \in \mathbb{R}$. Una mat. reale $(m \times n)$ è una tabella di dimensioni m_{row}, n_{col} di numeri reali.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \quad \Big| \quad A_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$ insieme di mat. reali $m \times n$

Matrici $(1 \times n)$ o $(m \times 1)$ si possono identificare come n-uple

vet. riga — vet. colonna

OP

Prodotto per scalare: $kA = [k a_{ij}] \mid A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{R}$

Prodotto fra mat.: $C = AB \mid A_{m \times n}, B_{n \times t}, C_{m \times t} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

mat. necessariamente conformab.

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^{n} a_{in} \cdot b_{nj} = (a_{i1} \cdot b_{1j}) + (a_{i2} \cdot b_{2j}) + \ldots + (a_{in} \cdot b_{nj})$$

c_{ij} = Prodotto scalare fra il vet. riga A_I e il vet. colonna B_J: $A_{1 \times n} \cdot B_{n \times 1} = (a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n)$

Somma fra mat.: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \mid A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

stessa dimens.

$C_{m\times n}, A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Combinazione lineare fra mat: $C_{m\times n} = s_1 A_1 + \cdots + s_n A_n$

$Ax = b \Rightarrow x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + x_3 A_{i3} = b_{m\times n}$ } Rappresentazione di sistema lineare

PROP

Matrice quadrata: $A_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$

Matrice opposta: $-A = (-1)A = [-a_{ij}]$

Matrice nulla: $0_{m\times n} = [\forall\, a_{ij} = 0]$ | $0 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Matrice identica: $I_{n\times n} = [\delta_{ij}]$, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$

se I conform. $A \Rightarrow I \cdot A = A$

se $k = 0$ in $A^k_{n\times n} = I_n$

Matrice invertibile: $A_{n\times n} \to$ invertibile se $A \cdot A^{-1} = I_{n\times n}$ (mat. inversa)

$(A^{-1} \cdot B^{-1}) = (A \cdot B)^{-1}$, Una mat. quadrata è invertibile solo se $rgA = n$

Matrice trasposta: $A^T_{n\times m} = [a_{ji}]$ trasposta di $A_{m\times n} = [a_{ij}]$

↳ inverti row e col

se $A_{n\times n}$ allora A^T è detta simmetrica

Somma ⇝ Commut. e Assoc. : $A+B=B+A \;/\; (A+B)+C=(C+B)+A$

Molt. per scal ⇝ Distr e Assoc: $\begin{cases} k(A+B)=kA+kB \\ (k_1 \cdot k_2)A = k_1(k_2 A) \end{cases}$

Prodotto di matrici:

Assoc e Distr rispetto alla somma:

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$k(AB) = (kA)B$$

<u>NON</u> Commutativo:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Sistemi lineari in forma matriciale

Sistemi di eqz. lineari (eqz. a multiple incognite di grado 1) rappresentati sotto forma di matrice per semplificarne la risoluzione

$$\underbrace{Ax = b}_{\text{sist. completo}} \quad \Big| \quad \underbrace{A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}}_{\text{mat. coefficenti}} \cdot \underbrace{x_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{vet. colonna} \\ \text{incognite}}} = \underbrace{b_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{vet. colonna} \\ \text{termini noti}}}$$

Usando le operazioni elementari sulla matrice si può semplificarla in una mat. equivalente per righe.

Questo processo è detto riduzione e porta la matrice in forma a scalini:

$A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[D_2(1/2)]{D_3(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-1)]{E_{13}(-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{mat. scalini}}$$

A b

OP

operazioni elementari

- Scambio di due righe: S_{ij} = scambio righe i e j
- Molt di una riga per uno scalare: $D_i(k)$ = riga $i \cdot k$ $\quad k \neq 0$
- Somma del risultato della 2nd op a un altra riga: $E_{ij}(k)$ = riga i + (riga $j \cdot k$) $\quad k \neq 0$

Riduzione a scalini ridotte: $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid Rref(A) = \underbrace{S_{m\times n}}_{\text{sc. rid.}}$

Rango di mat: $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid rg(A) = r$

Nullitá di mat: $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid null(A) = n - rg(A)$

PROP

Ogni op. elem. é reversibile:
$$\begin{cases} S_{ij} \leftrightarrow S_{ji} \\ D_i(k) \leftrightarrow D_i(\frac{1}{k}) \\ E_{ij}(k) \leftrightarrow E_{ij}(-k) \end{cases}$$

Var. libere e dipendent: : var. dipendenti = Var. in colonna con pivot
var. libere = Var. senza un pivot in colonna

Ogni mat. ha una Rref(): $\forall A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid \underbrace{\exists! \, Rref(A)}_{\text{esiste un unica rref()}}$

Rango di mat.: $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid rg(A) = $ n. pivot in $rref(A)$

Teorema di Rouché-Capelli (risolubilitá):

mat. coeff — mat. completa

$Ax=b$ é risolvibile $\iff \underline{rg(A)} = \underline{rg(A|b)}$

$Ax=b$ ha soluz $\begin{cases} \infty \Rightarrow rg(A) < n \\ 1 \Rightarrow rg(A) = n \end{cases}$

$A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Null.tá di mat.: $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ | null(A) = numero di col. in rref(A) senza pivot

Propietá notevole di un sistema omogeneo:

$$Ax=0,\ Ay=0 \Rightarrow A(x+y)=0 \quad e \quad A(cx)=0$$

Ogni combinazione lineare di elementi in sol(Ax=0) é ancora soluzione, quindi elemento di sol(Ax=0).
↳ spazio delle soluz

sol(Ax=0) = sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ / se sol(Ax=b) ⇝ traslato di sottospazio

null(A) = dimensione del sottospazio

Sol. di un sis. lineare attraverso un sis. omogeneo associato:

soluz. particolare di Ax=b ; $x_0 \in$ sol(Ax=0)

$$Sol(Ax=b)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=\underline{y}+\underline{x_0},\ Ax=0\}$$

Es.

sist. già ridotto

$$\begin{cases} x_1 = 3/2 - 1/3\,x_2 - 2/3\,x_3 \\ x_4 = 1/2 \end{cases} \rightarrow \quad x_2=x_3=0 : \quad y=(3/2,0,0,1/2)$$

sol. particolare

$$sol(Ax=0)=\{(-1/3\,x_2 - 2/3\,x_3,\ x_2,\ x_3,\ 0) \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{x_2v_1+x_3v_2 \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$$

$$v_1=(-1/3,1,0,0)$$

$$v_2=(-2/3,0,1,0)$$

soluz. di base (soluz. sist. omogeneo)

$$\boxed{x = y + x_2v_1 + x_3v_2 \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}}$$

Mat di op elementari: $PA = S \mid A, S \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ P \in M_m(\mathbb{R})$

S → mat. a scalini

P → mat. quadrata invertibile, ottenuta eseguendo op. elementari su una mat. I_m.

se $m=n$, S é ridotta e $rg(A)=n$

allora $S = rref(A) = I_n$, A é invertibile e $P = A^{-1}$

Soluz. di mat. invertibile: se A é invert. $\Rightarrow sol(Ax=b) \Rightarrow x = A^{-1}b$

↳ unica soluzione

Mat. inversa di una mat. quadrata:

$rref(A_{n\times n} \mid I_n) \iff rg\,A = n$ $\forall A_{n\times n}$ non é invert. se $rg(A) \neq n$

$\Downarrow$

$rref(A_n \mid I_n) = (I_n \mid B) = P(A \mid I_n) = (PA \mid PI_n)$ P invertibile

$PA = I_n$, $P = PI_n = B = A^{-1}$

Grafi

Un grafo "G" è un composto da un insieme "V" di vertici e una lista "E" di coppie di vertici, detti lati.

$$V=\{v_1, v_2, v_3\}, \quad E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1)\}$$

Se i lati sono coppie ordinate (con una direzione, dal primo all'ultimo, come vettori) si dice che è un grafo orientato.

Se un grafo è orientato lo si può descrivere attraverso la matrice di adiacenza:

$V=\{v_1, \dots, v_n\}$

i = v. di partenza
j = v. di arrivo

$A^{1}_{n\times n} = [a_{ij}] \mid a_{ij} =$ n. di lati che vanno da v_i a v_j

PROP

Potenza di mat. adiacenza:

A^{n} = mat. di adiacenza rispetto alla lunghezza del cammino indicato

n → lung. del cammino

Spazi vettoriali

Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è una struttura algebrica formata da un gruppo comutativo $(V,+)$ i cui elementi sono vettori e da una funzione $F: \mathbb{K} \times V \to V$ detto "scalare per vettore" soddisfacente le proprietà:

$\forall k_n \in \mathbb{K}, \forall v_n \in V$

- $k(v_1+v_2) = kv_1 + kv_2$
- $(k_1+k_2)v = k_1v + k_2v$
- $(k_1 k_2)v = k_1(k_2v)$
- $1v = v$

PROP

i coeff. $x_i \cdots x_n$ sono detti coordinate di v.

Base di sp.vet. : insieme di vet. $v_1, \dots, v_n \to v \in V$, $\forall v = \exists! \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$

Il numero degli elem. della base di V é detta dimensione di V

ogni v puó essere rappr. da un unica combinazione lineare all'interno dello spazio

Generatore di sp.vet. : insieme di vet. $v_1, \dots, v_m \to v \in V$, $\forall v = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot v_i$

Se esiste un generatore di V si dice che V é finitamente generato.

comb. lineare

Relazione fra Base e Generatore di sp.vet:

$\forall$ base di V $\overset{\text{é}}{\Rightarrow}$ insieme generatore
$\forall$ generatore di V $\overset{\text{non é}}{\not\Rightarrow}$ insieme base

i vet. di una base sono linearmente indip.

Applicazione di sp. vet. alle matrici:

Sia A una mat., le righe non nulle della mat. a scolini di A, di numero $r = rg(A)$ sono linearmente indip. in $\mathbb{K}^n$

S = scolini di A, $r = rg(A)$, $\forall c = 0 \mid c_1 S_1 + \ldots + c_r S_r = 0$

Quindi $S_1, \ldots, S_r$ formano una base dello spazio delle righe $\langle S_1, \ldots, S_m \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$ di S
↳ insieme di tutte le comb. lineari

$$rg(A) = \dim \langle S_1, \cdots, S_m \rangle \Big/ \begin{array}{l} \langle S_1, \cdots, S_m \rangle = \langle A_1, \cdot, A_m \rangle \\ \langle \quad \text{"} \quad \rangle \subseteq \langle \quad \text{"} \quad \rangle \\ \langle A_1, \cdots, A_m \rangle \subseteq \langle S_1, \cdots, S_m \rangle \end{array}$$

sp. righe coincidono
$\forall$ riga di S é comb lineare di righe di A

Vale l'inverso pk le op. elem. sono reversibili

Le righe sono indip. in $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ $rg(A) = m$

Lo spazio di righe e colonne di A hanno lo stesso $rg()$

$rg(A) = rg(A^T)$

Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vet. su $\mathbb{K}$, e sia W sottoinsieme di V, $W \neq \emptyset$.

W é sottospazio di V se è chiuso rispetto a somma di vet e prod per scal.

$\forall w, w' \in W, \forall k \in \mathbb{K}, \; w + w' \in W$ e $kw \in W$

Inoltre, ogni sottospazio di V ha il vet nullo di quest ultimo e per questo ogni sottospazio é a sua volta uno spazio vet. per le op. di V

PROP