Séquence 3

1ère partie :

Second degré

2e partie :

Probabilités (1)

1ère partie

Second degré

Sommaire

1 Pré-requis

A Définitions

Définitions

Etant donnés trois nombres réels *a*, *b* et *c*, avec $a \neq 0$, la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, est appelée **fonction polynôme de degré deux** ou encore **fonction du second degré.**

La quantité $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré** ou plus simplement **trinôme.**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée **équation du second degré.**

B Identités remarquables

Propriété

Quels que soient les nombres réels *a* et *b*, les égalités suivantes sont toujours vraies :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Il faut bien connaître ces trois identités remarquables et savoir les manipuler dans les deux sens.

Elles seront utilisées toutes les trois dans les transformations des trinômes du second degré et dans la résolution des équations du second degré, en particulier dans les transformations illustrées par les trois calculs qui suivent.

- On transforme $x^2 + 2x$ en reconnaissant qu'il s'agit du début d'un carré.

  En effet, on sait que : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, et donc on peut écrire : $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.

- On transforme $x^2 - 6x$ en reconnaissant qu'il s'agit du début d'un carré.

  En effet, on sait que : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, et donc on peut écrire : $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.

▶ Dans les deux cas précédents, le coefficient de x est un nombre entier qui est pair, on a pu alors l'utiliser facilement pour reconnaître le double produit d'une identité remarquable.

Voici maintenant le cas de x^2+5x.

On fait apparaître le double produit : $x^2+5x=x^2+2\times\frac{5}{2}x$, c'est donc ici le nombre $\frac{5}{2}$ qui va jouer le rôle de b dans la formule générale.

D'après l'identité remarquable :

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=x^2+2\times\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2+5x+\frac{25}{4},$$

on a : $x^2+5x=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$.

C Équations

Voici quelques exemples d'équations que vous devez savoir résoudre.

❶ Équations du 1er degré

▶ **Exemple 1**

Résoudre : $3x-4=0$.

Solution :

$$3x-4=0\Leftrightarrow 3x=4$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

L'ensemble S des solutions est

$S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

Résoudre : $-2x+5=4$.

Solution :

$$-2x+5=4\Leftrightarrow -2x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

L'ensemble S des solutions est

$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

❷ Équations produits

▶ **Exemple 2** Résoudre $(2x+3)(-4x+7)=0$.

Solution On applique d'abord la règle du produit nul :

$$(2x+3)(-4x+7)=0\Leftrightarrow 2x+3=0 \quad \text{ou} \quad -4x+7=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=-3 \quad \text{ou} \quad -4x=-7$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-3}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-7}{-4}=\frac{7}{4}.$$

L'ensemble S des solutions est $S=\left\{\frac{-3}{2};\frac{7}{4}\right\}$.

❸ Quelques équations du second degré de forme simple

▸ Exemple 3

Résoudre : $3x^2+4x=0.$

Solution :

$$3x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(3x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 3x+4=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{-4}{3}$$

L'ensemble S des solutions est

$S=\left\{0\,;\frac{-4}{3}\right\}.$

Résoudre : $x^2-3=0.$

Solution :

$$x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x-\sqrt{3}=0 \quad \text{ou} \quad x+\sqrt{3}=0$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{3} \qquad \text{ou} \quad x=-\sqrt{3}$$

L'ensemble S des solutions est

$S=\left\{\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\right\}.$

Remarque Dans les deux cas on s'est ramené à un produit nul.

❹ Sens de variation des fonctions

On rappelle plusieurs résultats sur le sens de variations de certaines fonctions.

Propriété

- La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- Soit x_0 un nombre réel, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x-x_0)^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;x_0]$ et croissante sur $[x_0\,;+\infty[$.
- Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel, les fonctions u et $u+k$ ont le même sens de variation sur I.
- Soit u une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel, alors
  - si $\lambda \geq 0$, les fonctions u et λu ont le même sens de variation sur I.
  - si $\lambda \leq 0$, les fonctions u et λu varient en sens contraire sur I.

❺ Tableaux de signes d'une expression factorisée Représentation graphique des fonctions Résolution graphique des équations, des inéquations

Ces notions ont été rappelées et utilisées dans les séquences précédentes.

❻ Fonctions polynômes de degré 2 dans le cours de Seconde

Dans le cours de Seconde, des propriétés des fonctions du second degré ont été conjecturées, puis admises.

Ces propriétés ont été démontrées dans la séquence 2, et d'autres seront revues et démontrées dans les chapitres de cette séquence.

2 Forme canonique, étude d'une fonction du second degré

A Activités

1. Activité 1

ABCD est un rectangle tel que $AB = 10$ et $AD = 6$.

Soit x un nombre de l'intervalle $[0 ; 6]$ et E, F, G, H, les points appartenant respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA] tels que $AE = BF = CG = DH = x$.

On appelle $a(x)$ l'aire du quadrilatère EFGH.

1. Exprimer $a(x)$ en fonction de x.
2. Vérifier que $a(x) = 2(x-4)^2 + 28$.
3. En déduire que la fonction a, définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par la relation précédente, admet un minimum pour une valeur de x que l'on précisera ; quelle est la valeur de ce minimum ?

2. Activité 2

Compléter les égalités suivantes en ne faisant figurer x que dans un carré de la forme $(x+a)^2$ ou $(x-a)^2$.

1. $x^2 + 6x + 9 = (...)^2$;
2. $x^2 + 6x = (...)^2 - ...$;
3. $x^2 + 6x - 8 = (...)^2 - ... - 8 = (...)^2 - ...$;
4. $x^2 - 7x = ...$;
5. $x^2 - 7x + 5 = (x - ...)^2 - ... + 5 = (x - ...)^2 - ...$;
6. $6x^2 + 9x = 6(...) = 6\left((x + ...)^2 - ...\right) = 6(x + ...)^2 - ...$;
7. $6x^2 + 9x - 1 = 6(x + ...)^2 - ...$.

3. Activité 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(x+1)^2-3$.

❶ Afficher la courbe représentant la fonction f sur votre calculatrice. Quelles conjectures peut-on faire sur les variations de la fonction f ?

❷ Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

B Cours

1. Forme canonique

Théorème 1

Tout trinôme du second degré ax^2+bx+c avec $a\neq 0$, peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$ où α et β sont des constantes réelles.

Démonstration

On utilise les identités remarquables pour transformer comme on l'a vu dans les activités :

Soit ax^2+bx+c avec $a\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.
\end{aligned}$$

Donc on a bien $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Remarque Il n'est pas nécessaire de retenir l'expression de β en fonction des coefficients a, b et c ; par contre il est indispensable de retenir le principe du calcul.

Vocabulaire La forme ax^2+bx+c s'appelle **la forme développée du trinôme.**

La forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ s'appelle **la forme canonique du trinôme.**

(L'adjectif *canonique* signifie en général conforme aux règles, ici canonique désigne, comme souvent en mathématiques, la meilleure forme ou la plus simple.)

▶ **Exemple 4** Mettre sous forme canonique le trinôme $3x^2-30x+83$.

Solution On suit la même démarche que dans le cas général :

$$\begin{aligned} 3x^2-30x+83 &= 3(x^2-10x)+83 \\ &= 3\left((x-5)^2-25\right)+83 \\ &= 3(x-5)^2-75+83 \\ &= 3(x-5)^2+8. \end{aligned}$$

Donc : $3x^2-30x+83=3(x-5)^2+8$.

2. Utilisation de la forme canonique pour démontrer des propriétés d'une fonction du second degré

La forme canonique est la meilleure forme (voir le commentaire de vocabulaire ci-dessus) pour démontrer des propriétés des fonctions du second degré admises en classe de Seconde.

Nous allons illustrer cela avec deux fonctions : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(x+1)^2-3$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\left(x-0,5\right)^2-1$.

▶ **Exemple 5**

❶ Afficher sur la calculatrice la représentation graphique des deux fonctions f et g dans un repère orthogonal, et faire des conjectures sur des propriétés de chacune de ces deux fonctions.

❷ Démontrer que chacune de deux fonctions possède un extremum, en donner la valeur ainsi que la valeur de x pour laquelle il est atteint.

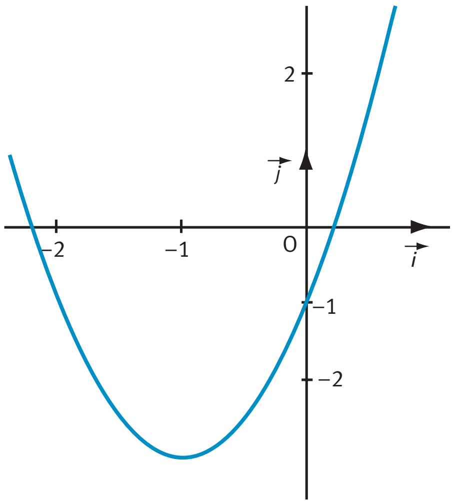
❸ Étudier le sens de variation de la fonction g (celui de la fonction f a été étudié dans l'activité 3).

❹ Montrer que chacune des représentations graphiques admet un axe de symétrie que l'on précisera.

Solution

❶ Représentation graphique de la fonction f.

Rappel : on appelle **parabole** la courbe représentative d'une fonction du second degré.



Conjectures :

- la fonction f semble avoir pour minimum -3 atteint pour $x=-1$;
- la fonction f semble être d'abord décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, puis être croissante sur $[-1\,;+\infty[$
- et enfin la courbe représentative de f semble avoir la droite d'équation $x=-1$ pour axe de symétrie.

❷ Pour démontrer que f a pour minimum -3, atteint pour $x=-1$, il suffit de prouver que, pour tout réel x, on a $f(x)\geq -3$ et que l'égalité est réalisée pour $x=-1$.

Or, pour tout réel x, on a : $(x+1)^2\geq 0$

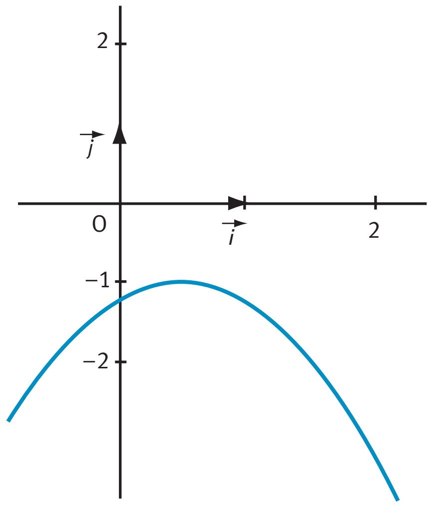
donc $2(x+1)^2\geq 0$

et donc $2(x+1)^2-3\geq -3$, soit $f(x)\geq -3$.

D'autre part, $f(-1)=(-1+1)^2-3=-3$.

Les deux conditions sont donc réalisées : la fonction f a donc pour minimum -3 atteint pour $x=-1$.

❶ Représentation graphique de la fonction g



Conjectures :

- la fonction g semble avoir pour maximum -1 atteint pour $x=0{,}5$;
- la fonction g semble être d'abord croissante sur $]-\infty\,;0{,}5]$, puis être décroissante sur $[0{,}5\,;+\infty[$
- et enfin la courbe représentative de g semble avoir la droite d'équation $x=0{,}5$ pour axe de symétrie.

❷ Pour démontrer que g a pour maximum -1, atteint pour $x=0{,}5$ il suffit de prouver que, pour tout réel x, on a $g(x)\leq -1$ et que l'égalité est réalisée pour $x=0{,}5$.

Or, pour tout réel x, on a : $(x-0{,}5)^2\geq 0$

donc $-(x-0{,}5)^2\leq 0$

et donc $-(x-0{,}5)^2-1\leq -1$, soit $g(x)\leq -1$.

D'autre part, $g(0{,}5)=-(0{,}5-0{,}5)^2-1=-1$.

Les deux conditions sont donc réalisées : la fonction g a donc pour minimum -1 atteint pour $x=0{,}5$.

3 Sens de variation

Le sens de variation de la fonction f a été étudié dans l'activité 3. On étudie de façon analogue le sens de variation de la fonction g.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-(x-0,5)^2-1$. On construit la fonction g par étape et on utilise les propriétés qui ont été rappelées sur les sens de variation.

On sait que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto(x-0,5)^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0,5]$ et croissante sur $[0,5\,;+\infty[$.

La multiplication par $\lambda = -1$ donne une nouvelle fonction qui varie en sens contraire de la précédente. Donc la fonction $x\mapsto-(x-0,5)^2$ est croissante sur $]-\infty\,;0,5]$ et décroissante sur $[0,5\,;+\infty[$.

Pour finir, on ajoute $k=-1$ ce qui donne la fonction g sans changer le sens de variation.

▶ On en déduit le tableau de variation de la fonction g.

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
$g(x)$		↗	-1	↘	

Remarque

On observe que, pour chaque fonction, le tableau de variation justifie l'existence d'un extremum.

4 Symétrie

Comme on l'a rappelé dans les pré-requis de la première séquence, pour montrer que la parabole d'équation $y=2(x+1)^2-3$ représentant la fonction f admet la droite d'équation $x=-1$ comme axe de symétrie, il suffit de prouver que :

- l'ensemble de définition D_f de f est symétrique par rapport à -1,
- pour tout nombre réel h tel que $a+h\in D_f$, $f(-1-h)=f(-1+h)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc la première condition est vérifiée, il suffit de prouver que pour tout réel h, $f(-1+h)=f(-1-h)$.

Or, $f(x)=2(x+1)^2-3$, donc, pour tout réel h, on a :

$f(-1+h)=2((-1+h)+1)^2-3=2h^2-3$ et

$f(-1-h)=2((-1-h)+1)^2-3=2(-h)^2-3=2h^2-3.$

On trouve bien $f(-1+h)=f(-1-h)$, la courbe représentative de f est bien symétrique par rapport à la droite d'équation $x=-1$.

Il en est exactement de même pour la parabole d'équation $y=-\left(x-0,5\right)^2-1$ représentant la fonction g : elle admet un axe de symétrie d'équation $x=0,5$.

En effet, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ donc la première condition est vérifiée.

Il suffit de prouver que pour tout réel h, $g(0,5+h)=g(0,5-h)$.

Or, $g(x)=-\left(x-0,5\right)^2-1$, donc, pour tout réel h, on a

$g(0,5+h)=-((0,5+h)-0,5)^2-1=-h^2-1$ et

$g(0,5-h)=-((0,5-h)-0,5)^2-1=-(-h)^2-1=-h^2-1.$

On a bien $g(0,5+h)=g(0,5-h)$ pour tout réel h, donc la courbe représentative de la fonction g est bien symétrique par rapport à la droite d'équation $x=0,5$.

Revenons au cas général. Nous ne referons pas les démonstrations qui sont analogues à celles faites pour f et pour g.

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 2

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ sous la forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a\neq 0$.

Le tableau de variation de la fonction f est :

- si $a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(\alpha)$	↗	

- si $a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	

Si l'on considère une fonction polynôme f du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ sous la forme développée $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$, on sait obtenir la forme canonique et $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$. Le tableau de variation de la fonction f est donc :

- si $a>0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	↗	

- si $a<0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	↘	

Propriété 1 : Symétrie

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, représentant une fonction polynôme f de degré deux, admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

Propriété 2 : Sommet

Le **sommet** de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, c'est le point d'intersection de la parabole avec son axe de symétrie.

3. Forme développée, forme factorisée, forme canonique : choisir la meilleure forme

Vocabulaire

On dit qu'un trinôme est écrit sous **forme factorisée** quand il est donné sous la forme d'un produit d'une constante et de polynômes du premier degré.

Par exemple $5(x-3)(x-1)$, $(7x+1{,}2)(x-4)$, $-2(x+8)^2$ sont trois trinômes du second degré factorisés.

Une propriété du chapitre 4 permettra de trouver la forme factorisée quand elle n'est pas donnée.

On va montrer sur un exemple l'utilisation des différentes formes pour calculer des images.

▶ **Exemple 6**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 16$ *(Forme A).*

❶ Vérifier que $f(x) = (x+3)^2 - 25$ *(Forme B)* et que $f(x) = (x-2)(x+8)$ *(Forme C).*

❷ Ces trois formes permettent de calculer immédiatement certaines images, par exemple la *Forme A* permet de savoir immédiatement que $f(0) = 0^2 + 6 \times 0 - 16 = -16$.

Donner deux autres exemples d'images se calculant très facilement avec la *Forme A* sans calculatrice.

Donner aussi deux exemples utilisant la *Forme B* et deux exemples utilisant la *Forme C.*

Solution

❶ On développe chacune des expressions pour retrouver $x^2 + 6x - 16$, c'est-à-dire $f(x)$.

On a $(x+3)^2 - 25 = x^2 + 6x + 9 - 25 = x^2 + 6x - 16 = f(x)$;

on a bien $(x+3)^2-25=f(x)$ *(Forme B)*.

On a $(x-2)(x+8)=x^2-2x+8x-16=x^2+6x-16=f(x)$;
on a bien $(x-2)(x+8)=f(x)$ *(Forme C)*.

Remarque Il s'agit de justifier que les expressions proposées sont des expressions de $f(x)$.

On rédige en enchaînant des égalités vraies et on ne reconnaît $f(x)$ qu'à la fin de chaque calcul, quand on retrouve l'expression initiale.

❷ On a : $f(x)=x^2+6x-16$ *(Forme A)* ; $f(x)=(x+3)^2-25$ *(Forme B)* ; $f(x)=(x-2)(x+8)$ *(Forme C)*.

- Avec la *Forme A*, on peut facilement calculer l'image de 1 et aussi celle de -1 :

  $f(1)=1^2+6\times1-16=-9$ et $f(-1)=(-1)^2+6\times(-1)-16=1-6-16=-21$.

- Avec la *Forme B*, on peut facilement calculer l'image de -3 et celle de 2 : $f(-3)=(-3+3)^2-25=-25$ et $f(2)=(2+3)^2-25=0$.

- Avec la *Forme C*, on peut calculer les images de 2, 12, 22,… , –8, –18… :

  $f(2)=(2-2)(2+8)=0$; $f(12)=(12-2)(12+8)=10\times20=200$ et

  $f(-8)=(-8-2)(-8+8)=0$.

  Remarquons que ces différentes formes permettent de déterminer d'autres images, mais cela dépend de l'aisance de chacun en calcul mental.

  Quand, dans un exercice, vous connaissez plusieurs expressions de $f(x)$, vous pouvez de même utiliser la forme qui vous semble la plus efficace pour obtenir chaque résultat : résolution d'équations, étude d'intersections, de positions…

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Mettre sous forme canonique chacun des trinômes suivants.

❶ x^2+4x+2 ;

❷ x^2-7x-8 ;

❸ $5x^2-10x+1$;

❹ $-3x^2+9x-1$;

❺ $0{,}5x^2-7x+3{,}5$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-12$ *(Forme A)*.

❶ Vérifier que $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}$ *(Forme B)* et que $f(x)=(x-3)(x+4)$ *(Forme C)*.

❷ Déterminer six valeurs de x pour lesquelles il est facile de calculer $f(x)$. Calculer leurs images en indiquant la forme utilisée.

❸ Résoudre chacune des équations suivantes en choisissant la forme qui permet cette résolution.

a) $f(x)=-12$; **b)** $f(x)=-\dfrac{49}{4}$; **c)** $f(x)=0$; **d)** $f(x)=-\dfrac{45}{4}$.

Exercice 3

Déterminer une fonction du second degré f telle que -2 et 3 soient les solutions de l'équation $f(x)=0$ et telle que $f(0)=-30$.

Exercice 4

Chaque case du tableau ci-dessous correspond à une fonction et à une proposition.

En utilisant la forme de l'expression qui définit chaque fonction et sans calculatrice, essayer de trouver si les propositions sont vraies ou fausses, ou encore si les informations sont insuffisantes pour répondre sans calculs compliqués. Indiquer dans chaque case V (vrai), F (faux) ou ? (si les informations sont insuffisantes).

Les fonctions f, g, h, k, l, m et n sont définies sur $\mathbb{R}$ par les égalités :

$f(x)=2(x-3)^2+5$; $g(x)=7x^2-3x+0,5$; $h(x)=4(x-5)(x-7)$;

$k(x)=-(x+7)^2-11$; $l(x)=-(x+8)^2$; $m(x)=(x+4)^2-1$; $n(x)=5x^2-6x$.

Fonction	f	g	h	k	l	m	n
❶ Le trinôme est toujours strictement positif							
❷ Le trinôme est toujours strictement négatif							
❸ L'équation $f(x)=0$ a deux solutions							
❹ L'équation $f(x)=0$ a une seule solution							
❺ L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution							
❻ On peut déterminer facilement l'abscisse du sommet de la parabole qui représente la fonction							
❼ On peut déterminer facilement l'ordonnée du sommet de la parabole qui représente la fonction							

Exercice 5

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3(x+7)^2-2$.
Donner les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f et le tableau de variation de la fonction f.

2. Même question avec la fonction g définie par $g(x)=-2(x+1,7)^2+5$.

Exercice 6

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-8x-15$.

Donner les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f et le tableau de variation de la fonction f.

2. Même question avec la fonction g définie par $g(x)=3x^2-30x+\sqrt{2}$.

3 Équation du second degré

A Activités

1. Activité 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

1. $x^2 - 5^2 = 0$
2. $x^2 - 7 = 0$
3. $(x-1)^2 - 13^2 = 0$
4. $(x-1)^2 - 5 = 0$
5. $0{,}5(x+2)^2 - 3 = 0$
6. $x^2 - 11x = 0$
7. $x^2 + 13{,}7 = 0.$

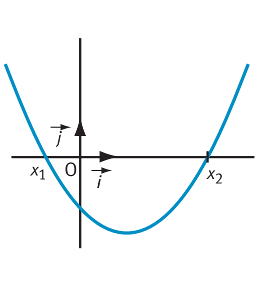
2. Activité 2

On considère une fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle y_S l'ordonnée du sommet de la parabole qui représente la fonction f.
Dans l'étude de la forme canonique, on a montré que $y_S = \beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.
La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée le discriminant du trinôme, on le note Δ, ainsi $\Delta = b^2 - 4ac$ et $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a}$ (Δ se lit « delta », c'est une lettre majuscule de l'alphabet grec qui correspond à D dans l'alphabet romain).
Donc $\Delta = (-4a)y_S$, on peut connaître le signe de Δ si on connaît le signe de $-4a$ et celui de y_S.

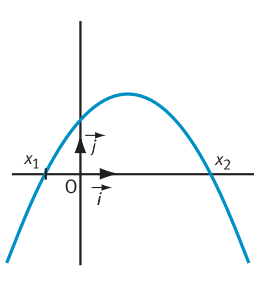
On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Dans chacun des six cas, on complète la colonne de droite en indiquant + si le nombre est strictement positif, en indiquant – si le nombre est strictement négatif et en indiquant la valeur 0 si le nombre est nul.

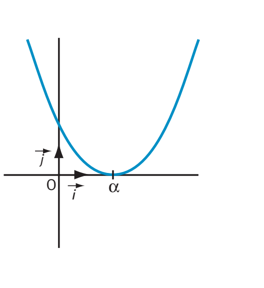
Les cases du premier cas sont remplies.



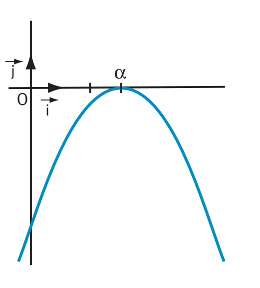
Signe de a :	+
Signe ou valeur de y_s :	–
Signe de $-4a$:	–
Signe ou valeur de Δ	+
Nombre de solutions :	2



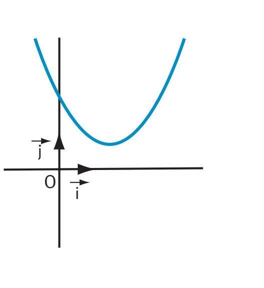
Signe de a :	
Signe ou valeur de y_s :	
Signe de $-4a$:	
Signe ou valeur de Δ	
Nombre de solutions :	



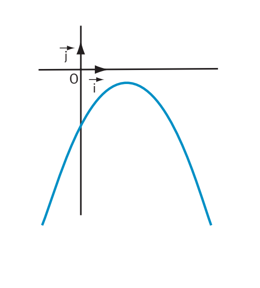
Signe de a :	
Signe ou valeur de y_s :	
Signe de $-4a$:	
Signe ou valeur de Δ	
Nombre de solutions :	



Signe de a :	
Signe ou valeur de y_s :	
Signe de $-4a$:	
Signe ou valeur de Δ	
Nombre de solutions :	



Signe de a :	
Signe ou valeur de y_s :	
Signe de $-4a$:	
Signe ou valeur de Δ	
Nombre de solutions :	



Signe de a :	
Signe ou valeur de y_s :	
Signe de $-4a$:	
Signe ou valeur de Δ	
Nombre de solutions :	

Quelle conjecture peut-on faire ?

B Cours

1. Discriminant d'un trinôme du second degré

Définition 1

Soit un trinôme du second degré : $ax^2 + bx + c$.

La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On la note Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque Cette quantité est appelée « discriminant » car c'est elle qui va permettre de différencier, de discriminer, les différents cas possibles dans la résolution des équations du second degré.

2. Résolution de l'équation du second degré

Toutes les résolutions d'équation se font dans $\mathbb{R}$.

On cherche à résoudre les équations du second degré, c'est-à-dire de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$.

Dans le chapitre 2, on a vu que ax^2+bx+c peut s'écrire sous la forme canonique $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$.

On a donc $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$,

soit aussi $ax^2+bx+c=a\left((x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Cette dernière transformation permet de constater que, suivant le signe de Δ, la parenthèse peut s'annuler ou non. En effet, il est clair que si le discriminant Δ est nul, la parenthèse s'annule pour $x=\alpha$. Et si le discriminant Δ est strictement négatif, la parenthèse est strictement positive et ne peut pas s'annuler. Il restera le troisième cas où Δ est strictement positif, on cherchera à factoriser le trinôme pour se ramener à un produit nul.

La résolution est donc faite en distinguant ces trois cas.

- Si $\Delta<0$, alors $-\dfrac{\Delta}{4a}>0$, donc $(x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$, donc $(x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\neq 0$; comme $ax^2+bx+c=a\left((x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ et que a n'est pas nul, le trinôme ne s'annule jamais : l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet **pas de solution** dans $\mathbb{R}$.

- Si $\Delta=0$, alors le trinôme s'écrit $a(x-\alpha)^2$, or a n'est pas nul, d'où l'équivalence : $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2=0$.

  L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet donc qu'**une seule solution** qui est α.

  On remarque que le trinôme s'écrit sous la **forme factorisée** : $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$.

- Si $\Delta>0$, alors $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ et on a :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[(x-\alpha)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[(x-\alpha)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]\\
&= a\left((x-\alpha)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x-\alpha)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= a\left[x-\left(\alpha+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\alpha-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$ax^2+bx+c=a\left[x-\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$
$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On remarque qu'on a obtenu un produit, une forme factorisée.

D'où l'équivalence : $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

Il s'agit d'un produit nul, donc : $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$

ou $x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0.$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet donc **deux solutions** : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Et la **forme factorisée** obtenue ci-dessus peut alors s'écrire :
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. C'est la forme factorisée du trinôme dont on a parlé au chapitre 2 ($\boxed{B}$3).

On peut résumer tout cela par le théorème suivant dont les résultats doivent être connus par cœur.

Théorème 3

Résolution de l'équation ax^2+bx+c

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
deux solutions : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une solution : $\alpha=\frac{-b}{2a}$	pas de solution

Remarque Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées **racines** du trinôme ax^2+bx+c.

On peut ainsi faire référence à ces nombres sans évoquer l'équation.

▶ Exemple 7 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^2-5x-3=0.$

Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-5)^2-4\times2\times(-3)\\&=25+24\\&=49\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Comme $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$, on a :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{2\times 2} = \frac{12}{4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{2\times 2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}.$$

$$S = \left\{3\,;\frac{-1}{2}\right\}.$$

▸ Exemple 8 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 1^2 - 4\times 1\times 1\\ &= 1-4\\ &= -3\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ donc cette équation n'admet pas de solution.

$S = \varnothing$

(rappelons que l'on appelle « ensemble vide » l'ensemble qui ne contient rien, ce qui est le cas ici pour l'ensemble des solutions ; on note cet ensemble $\varnothing$ ou $\{\ \}$).

▸ Exemple 9 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-12)^2 - 4\times 9\times 4\\ &= 144-144\\ &= 0\end{aligned}$$

$\Delta = 0$ donc cette équation admet une solution unique : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2\times 9} = \dfrac{2}{3}$.

$$S = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

C Exercices d'apprentissage

Exercice 7 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3 = 0$

2. $2x^2 - 12x + 18 = 0$

3. $-0,5x^2+3x-9,5=0$

4. $5x^2+12x+3=0.$

Exercice 8 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes sans calculer le discriminant du trinôme :

1. $x^2-25=0$

2. $3x^2-4x=0$

3. $x^2+9=0$

4. $x^2+4x+4=0$

5. $9x^2-4=0.$

Exercice 9 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $3x^2+5x=2x^2-2x+4$

2. $(2x+4)^2=3x+5.$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-9x+360$ et représentée graphiquement par la parabole (P).

1. Essayer d'afficher la parabole (P) sur l'écran de la calculatrice. Cette parabole semble-t-elle couper l'axe des abscisses ?

2. Répondre à la question précédente par un raisonnement simple.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole (P) avec l'axe des abscisses.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+22x+125$ et représentée graphiquement par la parabole (P). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole (P) avec la droite d'équation $y=5$.

Exercice 12 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+3x+3$ et $g(x)=5x^2+2x+1$, représentées graphiquement par les paraboles (P_1) et (P_2).

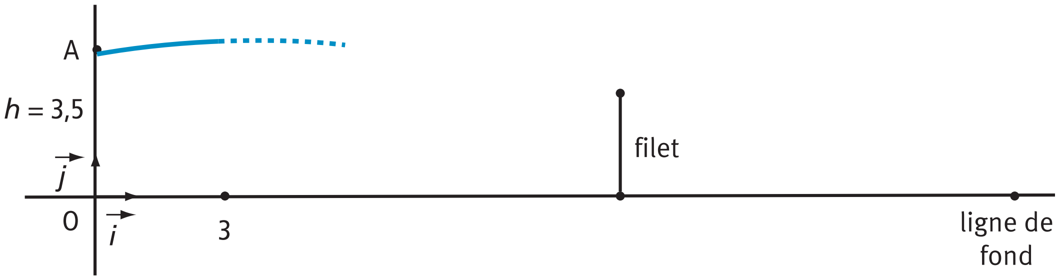
Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux paraboles.

Exercice 13 Déterminer les dimensions d'un rectangle de 180 cm de périmètre dont l'aire est égale à 1001 cm^2.

Exercice 14 Une partie de volley

Dans cet exercice, nous allons étudier un service.

Dans tout l'exercice, on assimilera la balle à un point matériel.



La hauteur du filet est $H = 2,43$ m.

Le filet est au centre du terrain, les lignes de fond de chaque camp sont à 9 m du filet.

Au volley-ball, le joueur qui effectue le service se place derrière la ligne de fond de son camp et frappe la balle à la hauteur h du sol.

Pour simplifier, on supposera que la trajectoire de la balle est située dans le plan de figure (orthogonal au filet) et on négligera la résistance de l'air.

Pour que le service soit bon, il faut que la balle passe au-dessus du filet et, sans être interceptée, touche le sol dans le camp adverse entre le filet et la ligne de fond.

Ici, le joueur se place à 12 m du filet, saute verticalement et frappe la balle au point A pour lequel $h = 3,5$ m. Au départ, la trajectoire de la balle fait un angle α avec l'horizontale avec $\alpha = 7°$ vers le haut. La vitesse initiale v_0 de la balle est $v_0 = 18$ m.s^{-1}.

Dans le repère indiqué sur la figure, d'après les lois de la physique, la trajectoire de la balle est régie par l'équation :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2(\cos(\alpha))^2}x^2 + \tan(\alpha)x + h,$$ on prendra $g = 10$ m.s^{-1}.

1. La balle passe-t-elle au-dessus du filet ?
2. Si la balle n'est pas interceptée, le service est-il bon ?

4 Factorisation et signe du trinôme

A Activité

1. Activité 1

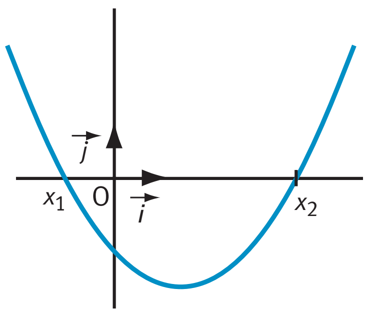
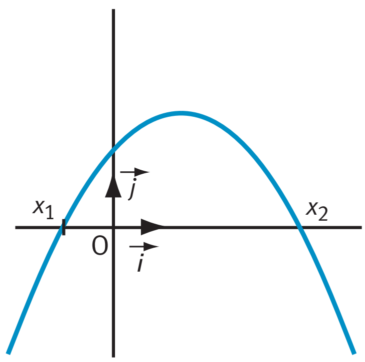
Soit f la fonction du second degré, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

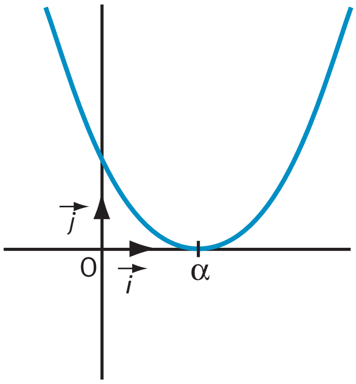
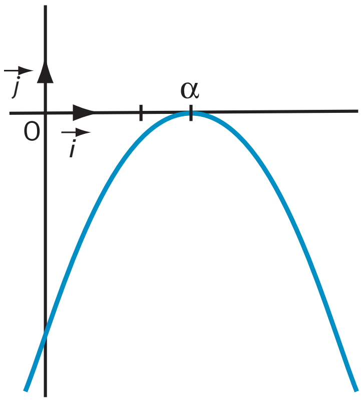
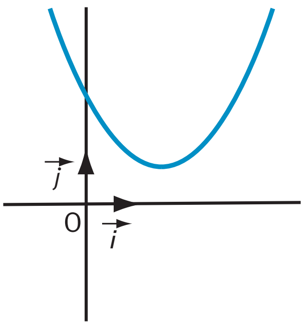
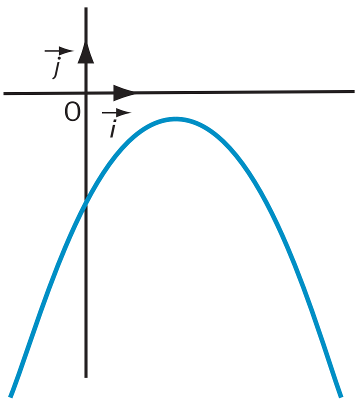
Dans les repères ci-dessous, on donne la parabole qui représente la fonction f dans les différents cas.

Le tableau suivant résume les différentes positions des paraboles, suivant le signe de a et les valeurs de Δ .

Dans chaque cas, on compare le signe du trinôme avec le signe de a, éventuellement dans un tableau de signe.

Le tableau est rempli pour la première situation, on vous propose de le compléter entièrement, puis de conjecturer une propriété sur le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

<table>
<tr><th colspan="2">La parabole (P) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
Si oui, quel est le nombre de point(s) d'intersection ?</th><th>Signe de a</th><th>Signe de Δ</th><th>Signe de $ax^2 + bx + c$ comparé au signe de a</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Oui
2 points d'intersection</td><td>$a > 0$</td><td>$\Delta > 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td>+   0   −   0   +</td></tr>
<tr><td>a</td><td>+   +   +</td></tr>
</table>
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ a le même signe que a sauf entre les racines.</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

 O α				
 α O				
 O				
 O				

B Cours

1. Factorisation du trinôme du second degré

Vocabulaire

On dit qu'un trinôme du second degré est factorisé quand il est écrit sous forme du produit d'une constante par deux polynômes du premier degré.

Dans la résolution de l'équation du second degré, on a pu faire des remarques au sujet de la factorisation du trinôme. Cette factorisation est liée au nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, c'est-à-dire au nombre de racines du trinôme ax^2+bx+c.

Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 4

Trinôme ax^2+bx+c

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Racines	deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine : $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$	pas de racine
Forme factorisée de ax^2+bx+c	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-\alpha)^2$	pas de factorisation

▶ **Exemple 10**

Lorsque c'est possible, factoriser les trinômes.

1. x^2+x+1 2. $3x^2+5x-6$ 3. $3x^2+24x+48$.

Solution

1. Pour le trinôme x^2+x+1, le discriminant Δ vaut
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=-3.$
Le discriminant est négatif, il n'y a pas de racine et on ne peut pas factoriser.

2. Pour le trinôme $3x^2+5x-6$, le discriminant Δ vaut
$\Delta=5^2-4\times3\times(-6)=25+72=97.$
Le discriminant est strictement positif, il y a deux racines, on peut factoriser le trinôme.
Les deux racines sont : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}$.

D'où : $3x^2+5x-6=3\left(x-\dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}\right)\left(x-\dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}\right)$.

❸ Pour le trinôme $3x^2+24x+48$, le discriminant Δ vaut

$\Delta=24^2-4\times 3\times 48=576-576=0$.

Le discriminant est nul, il y a une seule racine et on peut factoriser.

La seule racine est $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-24}{2\times 3}=-4$.

D'où : $3x^2+24x+48=3(x-(-4))^2=3(x+4)^2$.

Remarque Si on est familier avec les nombres, on peut s'apercevoir que les coefficients du trinôme sont des multiples de 3 et, après avoir factorisé par 3, on peut reconnaître une identité remarquable :

$3x^2+24x+48=3(x^2+8x+16)=3(x+4)^2$.

2. Signe du trinôme

Dans l'activité 1, on a obtenu le signe du trinôme en observant les courbes représentatives des fonctions du second degré dans les différents cas.

Les factorisations précédentes permettent de justifier ces observations.

Théorème 5

Le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines si elles existent.

Remarque Cette phrase est très courte et facile à mémoriser. Elle s'applique, sans inconvénient, au(x) cas éventuel(s) où le trinôme s'annule ; en effet, on rappelle que la phrase « ax^2+bx+c est positif » signifie « $ax^2+bx+c\geq 0$ ».

Démonstration On distingue trois cas suivant le signe de Δ.

▶ Si $\Delta<0$, le trinôme s'écrit $ax^2+bx+c=a\left((x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$. Comme Δ est négatif, la parenthèse est toujours positive, le produit par a donne un résultat qui est du signe de a.

▶ Si $\Delta=0$, on a $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$. Le carré est toujours positif, le produit par a donne encore un résultat qui est du signe de a.

Remarque Ceci concerne aussi le cas particulier où $x=\alpha$, le trinôme est alors nul.

▶Si $\Delta>0$, il y a deux racines et le trinôme s'écrit aussi sous forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$.

La forme factorisée permet d'étudier le signe du produit dans un tableau de signes (on appelle x_1 la plus petite des racines) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
a		signe de a		signe de a		signe de a	
Signe du produit : $a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a	

On obtient bien encore le signe de a sauf sur l'intervalle $]x_1\,;\,x_2[$ c'est-à-dire sauf entre les racines.

Cette propriété est utile, par exemple, dans la résolution d'inéquations, comme dans l'exercice donné en exemple ci-dessous.

▶ Exemple 11

1 Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+3x-1$.

2 Résoudre l'inéquation $-2x^2+3x-1<0$.

Solution

1 On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=3^2-4\times(-2)\times(-1)\\ &=9-8\\ &=1\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc le trinôme a deux racines, et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$ donc :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+1}{2\times(-2)}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\ \text{ et }\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-1}{2\times(-2)}=\frac{-4}{-4}=1.$$

Comme $a=-2$, a est négatif et, le trinôme étant du signe de a sauf entre les racines, on obtient :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$-\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❷ L'ensemble S des solutions de l'inéquation $-2x^2+3x-1<0$ est donc $S=\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

Remarque Dans la Partie 1 de la Séquence 6, un théorème essentiel amène à faire des études de signes et donc ce théorème sera alors bien utile.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 15 Sans utiliser de graphique ou de table de valeurs, déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

❶ Le trinôme $13x^2+7x+1$ est toujours positif.

❷ Le trinôme $-12x^2-7x-1$ est toujours négatif.

Exercice 16 Donner l'allure de la représentation graphique d'une fonction du second degré f qui vérifie les conditions suivantes :

- le trinôme a deux racines qui sont négatives,
- le signe de $f(x)$ est négatif entre les racines.

Dans les trois exercices qui suivent, on peut conjecturer les résultats en représentant des fonctions ; de même on peut contrôler les résultats.

Exercice 17 ❶ Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x lorsque f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+12x+18$.

❷ Même question avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2-4x+7$.

❸ Même question avec la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2x^2+12x-1$.

Exercice 18 ❶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^2-3x+4\geq 0$.

❷ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-3x^2+30x-75<0$.

❸ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $7x^2+2x+4<0$.

❹ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3x^2+x-4>0$.

Exercice 19 On définit, dans $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x)=2x^2-3x+4$ et on appelle (P_1) la parabole représentant cette fonction f.

❶ Étudier, suivant les valeurs de x, les positions relatives de la parabole (P_1) et de la droite (D) d'équation $y=5x+6$.

❷ Étudier, suivant les valeurs de x, les positions relatives de la parabole (P_1) et de la parabole (P_2) d'équation $y=3x^2+1$

5 Algorithmique

A Activité

L'algorithme qui suit calcule le discriminant Δ du trinôme ax^2+bx+c et indique le nombre de solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Langage « naturel »

Entrées : *a*, *b* et *c* (coefficients du trinôme ax^2+bx+c)

Traitement :

- « $\Delta =$ »
  Mettre b^2-4ac dans Δ
  Afficher Δ
- « Nombre de solutions : »
  Si $\Delta > 0$ alors afficher « 2 solutions »
  Si $\Delta = 0$ alors afficher « 1 solution »
  Sinon afficher « pas de solution »
  FinSi

Fin de l'algorithme

Remarque On peut remplacer le « sinon » par $\Delta < 0$.

Langage « calculatrice »

Texas Instrument

```
PROGRAM:SECONDD
:Input "A?",A
:Input "B?",B
:Input "C?",C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA=",D

:If D>0
:Then
:Disp "2 SOLUTIO
NS"
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOLUTIO
N"
:Else
:Disp "0 SOLUTIO
N"
:
```

Casio

```
======SECOND D======
"A"?→A↵
"B"?→B↵
"C"?→C↵
"DELTA"↵
B²-4AC→D◢
If D>0↵

Then "2 SOLUTIONS"↵
Else If D=0↵
Then "1 SOLUTION"↵
Else "0 SOLUTION"↵
IfEnd↵
```

B Exercice d'apprentissage

Exercice 20

❶ Écrire, en « langage naturel », un algorithme qui permet de :

- calculer le discriminant Δ associé au trinôme ax^2+bx+c
- donner les valeurs des solution éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ou indiquer « pas de solution » lorsqu'il n'y en a pas.

❷ Programmer cet algorithme sur la calculatrice ou un logiciel.

Remarque pour les calculatrices TI

Pour que les solutions soient affichées sous la forme exacte (et pas sous une forme décimale approchée) on termine par ►Frac chaque instruction qui fait afficher une solution (►Frac est une instruction du catalogue, à la lettre F).

❸ Faire fonctionner cet algorithme avec les équations de l'exercice 7.

6 Synthèse de la partie 1 de la séquence

A Définitions

Etant donnés trois nombres réels a, b et c, avec $a \neq 0$, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, est appelée fonction polynôme de degré deux ou encore fonction du second degré.

La quantité $ax^2 + bx + c$ est appelée trinôme du second degré ou plus simplement trinôme.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée équation du second degré.

B Trinôme du second degré

Théorème 1

Tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont tels que $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Remarque Il n'est pas nécessaire de retenir l'expression de β en fonction des coefficients a, b et c ; par contre il est indispensable de retenir le principe du calcul.

Vocabulaire La forme $ax^2 + bx + c$ s'appelle la forme développée du trinôme.

La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ s'appelle la forme canonique du trinôme.

Définition 1

La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée discriminant du trinôme, on le note Δ, soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriétés d'un trinôme

Le tableau suivant présente les résultats obtenus concernant les racines d'un trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ (c'est-à-dire les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$), sa factorisation et son signe.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$	pas de racine
Forme factorisée de ax^2+bx+c	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-\alpha)^2$	pas de factorisation
Signe de ax^2+bx+c	Signe de a sauf entre les racines	Signe de a et le trinôme s'annule pour $x=\alpha$	Signe de a et le trinôme ne s'annule jamais

À retenir Le signe du trinôme est le signe de a sauf entre les racines si elles existent.

C Propriétés d'une fonction du second degré

Soit une fonction polynôme f du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ sous la forme développée $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$.

Théorème 2

Le tableau de variation de la fonction f est :

- si $a>0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- si $a<0$

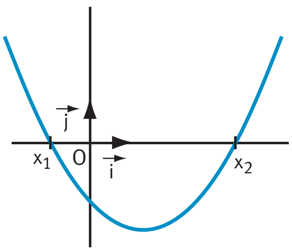
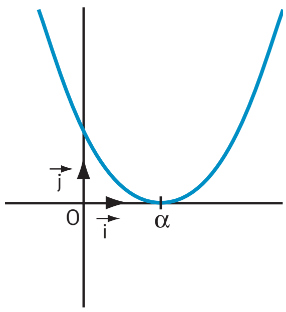
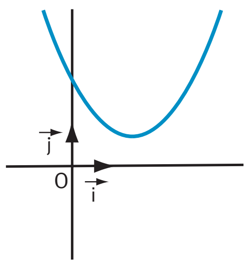
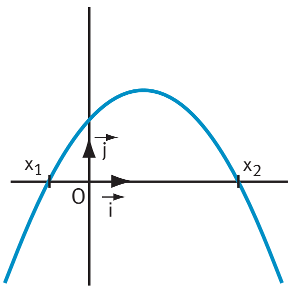
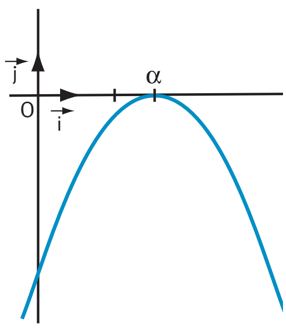
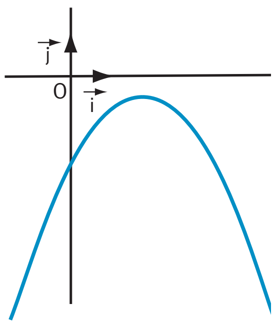
x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Symétrie La parabole représentant cette fonction polynôme de degré deux admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Sommet Le sommet de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$, c'est le point d'intersection de la parabole avec son axe de symétrie.

Les six figures ci-dessous sont les six positions possibles d'une parabole, représentant une fonction du second degré, par rapport à l'axe des abscisses.

Ces différents cas sont liés aux propriétés des trinômes qui sont rappelées dans les dernières lignes.

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><th>Allure graphique</th><th>Deux points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses :</th><th>Un point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses :</th><th>Pas de point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses :</th></tr>
<tr><td>Si $a > 0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Si $a < 0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Racines</td><td>Deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>Une racine : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$</td><td>Pas de racine</td></tr>
<tr><td>Signe de $ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a sauf entre les racines</td><td>Signe de a et le trinôme s'annule pour $x = \alpha$</td><td>Signe de a et le trinôme ne s'annule jamais</td></tr>
</table>

7 Exercices d'approfondissement

Exercice I

Dans chaque cas, déterminer l'équation d'une parabole (P) vérifiant les conditions données.

❶ La parabole (P) a pour sommet le point S de coordonnées (3 ; 2) et passe par le point A de coordonnées (4 ; 3).

❷ La parabole (P) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses –2 et 1, et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 6.

❸ La parabole (P) passe par l'origine et par les points B et C de coordonnées respectives (1 ; 1) et (3 ; 0).

Exercice II

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^4-5x^2+6=0$.

Cette équation n'est pas du second degré, mais on peut s'y ramener car la variable x n'apparaît qu'à la puissance deux ou quatre.

Les équations de cette forme sont appelées des équations bicarrées.
Pour les résoudre, on effectue un changement d'inconnue : on pose $X=x^2$.

❶ Que vaut X^2 ?

❷ Donner la nouvelle équation (E') qui est obtenue quand on fait le changement d'inconnue.

❸ Résoudre l'équation (E').

❹ Pour chaque solution X de l'équation (E'), déterminer les valeurs de x correspondantes. Conclure en donnant l'ensemble S des solutions de l'équation (E).

Exercice III

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation du troisième degré : $5x^3+3x^2-8x=0$.

Exercice IV

Le but de cet exercice est de résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $x^3-13x+12=0$.

Cette équation n'est pas du second degré, mais on peut s'y ramener en factorisant le polynôme.

❶ Calculer la valeur du polynôme pour $x=1$. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, on ait l'égalité : $x^3-13x+12=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

❷ Résoudre l'équation (E).

Exercice V

Factoriser et donner le tableau de signes du polynôme x^4-8x^2+12.

Exercice VI

❶ Donner le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{-2x+5}$.

❷ En déduire la résolution de l'inéquation $\dfrac{x^2+3x-4}{-2x+5}\geq 0$.

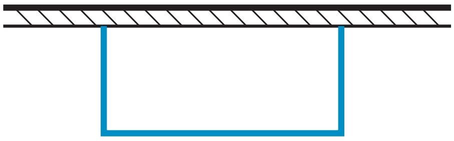
Exercice VII Un peu de logique…

On considère un trinôme du second degré ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$ et aussi $c \neq 0$.

Soit (P_1) la proposition : « si a et c sont de signes contraires, alors le trinôme possède deux racines distinctes ».

1. Démontrer que la proposition (P_1) est vraie.
2. Soit (P_2) la réciproque de la proposition (P_1). Enoncer la proposition (P_2). Est-ce que (P_2) est vraie ?
3. Soit (P_3) la contraposée de la proposition (P_1). Enoncer la proposition (P_3). Est-ce que (P_3) est vraie ?
4. Soit (P_4) la contraposée de la proposition (P_2). Enoncer la proposition (P_4). Est-ce que (P_4) est vraie ?

Exercice VIII Dans mon terrain, je souhaite entourer sur trois côtés une zone rectangulaire adossée à un mur. Je possède 50 m de grillage.



Quelle est l'aire maximale que je peux ainsi enclore pour protéger mes expériences de jardinage ?

Exercice IX Un avion part d'une ville A, arrive dans une ville B et revient immédiatement en A. Les villes A et B sont distantes de 840 km.

Pendant toute la durée du vol, le vent a soufflé uniformément dans la direction (AB) et dans le sens de A vers B.

On admet que la vitesse réelle de l'avion est alors égale à sa vitesse en air calme augmentée ou diminuée de la vitesse du vent.

Sachant que l'avion a mis, pour revenir, une demi-heure de plus que pour l'aller et que sa vitesse en air calme est 260 km.h^{-1}, déterminer la vitesse du vent.

Aide aux exercices d'approfondissement

Exercice I

On peut utiliser les différentes formes d'un trinôme du second degré.

Exercice V

On peut s'inspirer de l'exercice II.

Exercice IX

On cherche la vitesse du vent, on l'appelle v. On traduit l'information de l'énoncé sur la relation entre la durée de l'aller et celle du retour en utilisant l'égalité : longueur du trajet = vitesse × durée du trajet.

2e partie

Probabilités (1)

Sommaire

1 Pré-requis

A Les statistiques

Comme on l'a vu dans l'introduction de la partie « Statistiques » de la séquence précédente, les probabilités et les statistiques sont très liées.

Les nombreuses expériences qui sont analysées avec les outils des statistiques (voir la partie I de la séquence 2) montrent par exemple, qu'un dé normal, lancé un grand nombre de fois, tombe à peu près aussi souvent sur chacune de ses six faces.

Les probabilités nous donnent ensuite un modèle théorique, un monde idéal où les dés tombent avec une fréquence de 1/6 sur chaque face…

Si, dans une boîte il y a 9 boules rouges et 1 boule noire, et si on tire 1 boule, il y a deux issues « rouge » et « noire ». Mais quelques tirages et la série statistique obtenue nous persuaderont rapidement que ces deux issues se réalisent avec des fréquences bien différentes ! Dans un modèle probabiliste adapté à cette expérience, les probabilités des deux issues seront donc différentes.

Dans des situations plus complexes, il peut être utile de réaliser un grand nombre d'essais pour mieux comprendre ce qui se passe.

On réalise alors des expériences simulées : on peut lancer une pièce plusieurs fois pour simuler des naissances, on peut utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour simuler un lancer de pièce un millier de fois…

De telles **simulations** nous permettront de choisir un **modèle probabiliste adapté** et efficace pour étudier une expérience aléatoire.

B Définitions et vocabulaire des événements

▶ **Exemple**

Pour illustrer toute cette partie, nous prendrons l'exemple du lancement d'un dé cubique bien équilibré.

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle **plusieurs résultats sont possibles,** sans que l'on puisse prévoir celui qui se produira.

Les **résultats possibles** sont aussi appelées les **issues** ou les **éventualités**.

▸ **Exemple** Quand on lance un dé cubique, les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Vocabulaire On regroupe souvent toutes les **issues** d'une expérience aléatoire dans un même ensemble, que l'on appelle **l'univers** de l'expérience.

▸ **Exemple** L'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'univers de notre exemple.

Définition

On appelle **événement** d'une expérience aléatoire, un **ensemble d'issues** de cette expérience.

C'est donc un **sous-ensemble** de **l'univers**.

▸ **Exemple** « Obtenir un multiple de 3 » est un événement, notons le A, alors $A = \{3, 6\}$; de même « obtenir un nombre strictement inférieur à 5 » est un événement, notons le B, alors $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Remarque Dans tout le cours de Première, les expériences aléatoires auront un nombre fini d'issues.

Définition

Soit une expérience aléatoire, dont les issues sont notées $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (le nombre d'issues est noté n).

On appelle **événement certain** l'événement constitué de **toutes les issues** de l'expérience, c'est à dire **l'univers** : $E = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \}$.

On appelle **événement impossible** l'événement constitué d'**aucune issue** de l'expérience, c'est à dire **l'ensemble vide :** $\varnothing = \{ \}$.

On appelle **événement élémentaire** un événement constitué **d'une seule issue,** par exemple : $\{a_1\}$.

Définition

Soit A et B deux événements.

L'événement noté $\mathbf{A \cap B}$ (qui se lit **A intersection B,** qui s'écrit aussi **A et B**) contient toutes les issues qui sont en même temps dans A et dans B.

L'événement $\mathbf{A \cup B}$ (qui se lit **A union B,** qui s'écrit aussi **A ou B**) contient toutes les issues qui sont dans au moins un des deux événements.

Exemple Pour le lancement du dé et les événements A et B choisis ci-dessus, on a

$A \cap B = \{3,6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3\}$ et $A \cup B = \{3,6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Remarque On peut dire que l'événement **$A \cup B$** est l'événement qui contient toutes les issues qui appartiennent à **A ou** à **B**, mais, attention, ici le mot **« ou »** est **inclusif** (il n'est pas exclusif car on n'exclut pas les issues qui appartiennent simultanément aux deux événements).

Cas particulier On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément, ce qui se traduit par $A \cap B = \varnothing$.

Exemple Soit C l'événement « obtenir un nombre inférieur à 2 », on a alors C = {1, 2} ; les événements A et C sont incompatibles car $A \cap C = \{3, 6\} \cap \{1, 2\} = \varnothing$.

Définition

On appelle **événement contraire** de A, et on le note $\overline{A}$, l'événement constitué par toutes les issues de l'univers E qui n'appartiennent pas à A.

Exemple On a : A = {3, 6} et $\overline{A} = \{1,2,4,5\}$.

Remarque On a alors les deux propriétés : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.

Ces deux égalités traduisent le fait que l'événement A et son événement contraire $\overline{A}$ sont incompatibles et que leur union forme l'univers tout entier.

C Loi de probabilité

1. Cas général

On considère l'univers E d'une expérience aléatoire.

Définition

On dit qu'on a défini une loi de probabilité p sur E :

- si à chaque issue a_i on associe un nombre réel p_i tel que tous les nombres p_i vérifient :

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1,$$

- et si, à chaque événement A est associé le nombre $p(A)$ défini par $p(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$, c'est-à-dire que si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ alors $p(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.

Exemple Nous prenons toujours la même expérience aléatoire du lancement d'un dé cubique, nous choisissons de supposer que ce dé est bien équilibré, non truqué et nous associons à chacune des six issues le nombre $\frac{1}{6}$. Nous obtenons donc : $p(\text{A}) = p(\{3,6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$, $p(\text{B}) = p(\{1,2,3,4\}) = \frac{4}{6}$, $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\{3\}) = \frac{1}{6}$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = p\{(1,2,3,4,6\}) = \frac{5}{6}$.

Remarque Pour un événement élémentaire $\{a_i\}$, on obtient ainsi $p(\{a_i\}) = p_i$. On acceptera, dans ce cas particulier, la notation plus simple $p(a_i) = p_i$.

Propriété

Quels que soient les événements A et B, on a les propriétés suivantes :

- $0 \leq p(\text{A}) \leq 1$
- $p(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$
- $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B})$.

Exemple $p(\text{A}) = \frac{2}{6}$ et $p(\overline{\text{A}}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$; $p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; on retrouve ainsi $p(\text{A} \cup \text{B})$ qui a été déterminé ci-dessus à partir de $\text{A} \cup \text{B} = \{1,2,3,4,6\}$.

Cas particuliers On obtient la probabilité de l'événement certain et de l'événement impossible : $p(\text{E}) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$.

Et, dans le **cas particulier** de deux événements **A et B incompatibles,** c'est-à-dire tels que $\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$, on a alors : $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$.

2. Un cas particulier important : la loi équirépartie

Définition

La loi de probabilité pour laquelle tous les événements élémentaires ont des probabilités égales s'appelle la loi équirépartie. On dit aussi qu'il y a équiprobabilité.

Remarque C'est une loi très souvent utilisée.

Nous l'avons donc choisie pour notre exemple, nous rencontrerons aussi d'autres lois plus loin.

Propriété

Si, pour l'univers d'une expérience aléatoire ayant n issues, on a choisi la loi équirépartie alors :

- la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$,
- la probabilité d'un événement A est telle que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$,

ce qui souvent est exprimé aussi par $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Remarque Dans quels cas choisit-on la loi équirépartie ?

On l'utilise quand rien ne précise qu'une ou plusieurs issues sont plus « favorisées » que les autres.

Mais aussi certains mots indiquent que c'est la loi équirépartie qui est adaptée pour étudier l'expérience aléatoire : par exemple, on dira qu'un dé est « bien équilibré », « non pipé » (ce qui signifie « non truqué »), on dira que des boules sont « indiscernables au toucher », qu'on tire une carte dans un jeu « au hasard »…

Commentaire Dans certains cas, où il n'y a pas équiprobabilité, on se ramène à une situation où il y a équiprobabilité pour construire la loi de probabilité.

Exemple Dans une urne se trouvent dix boules, indiscernables au toucher. Neuf boules sont rouges et une est noire.

On tire une boule au hasard. Il y a donc seulement deux résultats possibles : la boule tirée est rouge ou bien elle est noire.

Comme on l'a dit plus haut, une simulation montre rapidement que les deux événements R « tirer une boule rouge » et N « tirer une boule noire » n'ont pas la même probabilité.

Pour déterminer ces probabilités, on peut imaginer que l'on différencie toutes les boules en les numérotant : la boule noire porte le numéro 1, les boules rouges sont numérotées de 2 à 10.

Le tirage d'une boule au hasard correspond maintenant à une situation où on peut utiliser la loi équirépartie, l'univers étant alors $\{N_1, R_2, R_3, \dots, R_{10}\}$.

On obtient ainsi $p(\mathrm{N}) = \frac{1}{10}$ et $p(\mathrm{R}) = \frac{9}{10}$, ce qui est cohérent avec les simulations.

D Méthodes

Différentes méthodes et techniques sont utilisées dans le cours de probabilité.

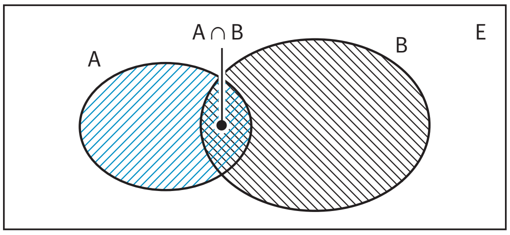
1. Références aux statistiques

On a déjà évoqué dans le A le rôle important des statistiques.

2. On peut utiliser des représentations : arbres, diagrammes, tableaux.

On donne ici quelques exemples de ces représentations.

Voici un diagramme pour illustrer l'intersection de deux événements A et B d'un univers E.



	A	$\overline{A}$
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Voici une autre façon de présenter deux événements et leurs événements contraires dans l'univers E.

Dans ce type de tableau, à la place des intersections on peut indiquer les probabilités des événements correspondants.

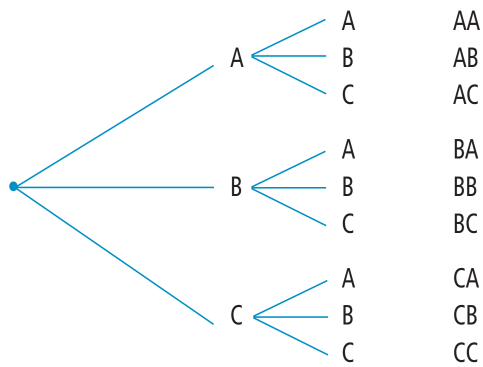
On a quelquefois besoin de visualiser tous les cas possibles.

Voici deux exemples :

- Avec un tableau pour illustrer l'événement « obtenir au moins un 6 quand on lance un dé rouge (R) et un dé bleu (B) ».

R \ B	1	2	3	4	5	6
1						•
2						•
3						•
4						•
5						•
6	•	•	•	•	•	•

- Avec un arbre (on dit parfois un « arbre des possibles ») pour voir toutes les issues de l'expérience suivante : on tire successivement deux lettres parmi les trois lettres A, B et C, en remettant la première lettre tirée avant de faire le second tirage.



2 Variable aléatoire, loi de probabilité

A Activités

1. Activité 1

Une expérience aléatoire se déroule en deux temps :

- on tire, au hasard, une boule dans un sac contenant trois boules rouges numérotées 0, 1, 2 ;
- puis on tire, au hasard, une boule dans un autre sac contenant quatre boules noires numérotées 1, 2, 3, 4.

Les issues de cette expérience aléatoire sont donc des couples de nombres.

Les tirages se font au hasard, on choisit donc la loi équirépartie.

1 À l'aide d'un tableau ou d'un arbre, déterminer tous les couples qui peuvent être obtenus.

On s'intéresse au produit des nombres de chaque couple. Déterminer tous les produits possibles et la probabilité d'obtenir chacun de ces résultats.

2 Les tirages sont maintenant utilisés pour un jeu : pour une mise de 1 €, on gagne 4 € si le produit est impair, sinon on ne gagne rien. Dans les deux cas, on perd la mise de 1 €.

Quels sont les gains possibles en tenant compte de l'argent dépensé pour la mise ?

Quel est la probabilité d'obtenir chacun de ces gains ?

2. Activité 2

Les questions 1 et 2 sont simples, elles préparent la question 3.

Cette activité peut servir de modèle pour d'autres simulations vues plus loin.

On lance deux pièces de 1 € bien équilibrées, et on compte le nombre de fois où on a obtenu Pile. Il y a donc trois résultats possibles : 0, 1, 2.

On a simulé 40 lancers sur le tableur Open Office.

ALEA.ENTRE.BORNES(0;1) donne aléatoirement 0 ou 1, on peut donc simuler le lancer d'une pièce, 0 correspondra à Face et 1 à Pile.

En faisant la somme ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)+ALEA.ENTRE.BORNES(0;1), on obtient la simulation du nombre de fois où on a obtenu Pile en lançant les deux pièces.

Et on a recopié le calcul de A1 dans toutes les autres cellules.

On a obtenu les résultats suivants (il suffit de faire CTRL+MAJ+F9 pour obtenir une autre simulation).

A1 | f(x) Σ = | =ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)+ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)

	A	B	C	D	E	F
1	1	1	2	0		
2	1	0	1	1		
3	1	1	0	1		
4	2	1	2	1		
5	2	1	2	1		
6	0	1	1	2		
7	1	1	0	0		
8	1	1	2	1		
9	1	1	0	1		
10	0	2	1	2		

❶ Compter la fréquence du nombre de fois où on a obtenu 0, puis 1, puis 2. On constate que le modèle de l'équiprobabilité n'est pas adapté.

❷ On est donc amené à différencier les deux pièces pour modéliser l'expérience. Pour cela on peut imaginer une marque de couleur sur chaque pièce, l'une verte, l'autre rouge par exemple.

À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, déterminer la probabilité d'obtenir 0, d'obtenir 1, d'obtenir 2.

❸ On étudie la situation analogue avec trois pièces de 1 € bien équilibrées.

Vous pouvez d'abord faire des simulations sur un tableur comme ci-dessus, ou sur votre calculatrice :

- avec une TI vous pouvez utiliser EntAlea(0 ; 1) que vous trouvez dans le catalogue ou dans Math puis Prob,
- ou avec une Casio avec RanInt#(0 ; 1) que vous trouvez dans OPTN puis PROB puis RAND puis Int ;
- on fait une somme de trois termes ; puis on appuie autant de fois qu'on le souhaite sur la touche Enter (ou EXE) de la calculatrice.

Il y a quatre résultats possibles : 0, 1, 2 et 3.

Déterminer la probabilité d'obtenir chacun d'eux.

B Cours

1. Définition d'une variable aléatoire

Soit une expérience aléatoire, dont les issues sont notées $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ et soit $E=\left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right\}$ l'univers de cette expérience aléatoire.

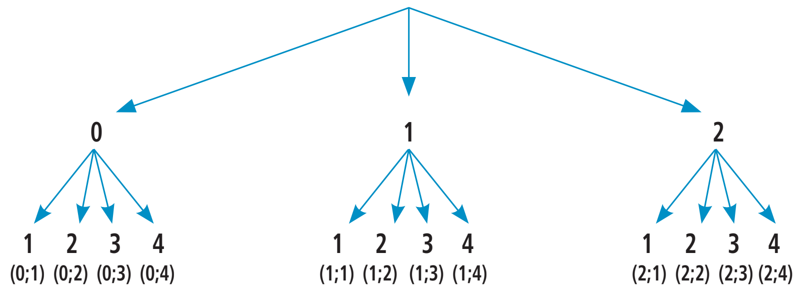
On a défini sur l'univers E une loi de probabilité p.

Définition 1

On dit qu'on définit une variable aléatoire sur l'ensemble E lorsqu'à chaque issue de E on associe un nombre réel.

▶ Exemple 1 Dans l'activité 1, on rappelle que :

- on tire, au hasard, une boule dans un sac contenant trois boules rouges numérotées 0, 1, 2 ;
- puis on tire, au hasard, une boule dans un autre sac contenant quatre boules noires numérotées 1, 2, 3, 4.



Valeurs de X	0	0	0	0	1	2	3	4	2	4	6	8
Valeurs de Y	–1	–1	–1	–1	3	–1	3	–1	–1	–1	–1	–1

Il y a douze éventualités que l'on peut écrire sous forme de couples, le premier numéro d'un couple correspondant à la boule rouge qui est tirée en premier, ainsi E = {(0 ; 1), (0 ; 2)…, (2 ; 4)}.

Dans la question 1) on associe à chacun de ces couples le produit des deux nombres.

On a fabriqué ainsi une variable aléatoire X telle que :

(0 ; 1) $\longrightarrow$0, (0 ; 2) $\longrightarrow$0 … (2 ; 4)$\longrightarrow$8.

Dans la question 2) on définit une seconde variable aléatoire Y qui vaut $4-1=3$ si le produit est impair et qui vaut $0-1=-1$ si le produit est pair. Ainsi par exemple, (1 ; 1) $\longrightarrow$3 et (1 ; 4)$\longrightarrow$–1.

Remarque Une variable aléatoire est donc une fonction de l'univers E vers l'ensemble $\mathbb{R}$. L'expression « variable aléatoire » n'est donc pas très bien choisie, mais c'est néanmoins celle qui est utilisée.

Notation Une variable aléatoire est notée par une lettre majuscule, très souvent on utilisera X.

L'ensemble des issues pour lesquelles la variable aléatoire X prend la valeur x_i est un événement, il sera noté $\left(X=x_i\right)$.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par :

- l'ensemble des valeurs $\left\{x_1, x_2, ..., x_r\right\}$ prises par la variable aléatoire,
- les probabilités $p\left(X=x_i\right)$ pour toutes les valeurs x_i prises par X.

Exemple 2 Dans l'exemple de l'activité 1, on nomme X la variable aléatoire définie ci-dessus par les produits.

L'ensemble des valeurs prises par X est donc {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}. Chaque couple est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{12}$.

Donc on a : $p(X=0)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $p(X=1)=\frac{1}{12}\ldots$et $p(X=8)=\frac{1}{12}$.

Remarque La loi de probabilité d'une variable aléatoire se donne souvent par un tableau.

Dans notre exemple, on obtient :

x_i	0	1	2	3	4	6	8
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Propriété 1

La réunion de tous les événements $(X=x_i)$ est égale à l'univers E et tous ces événements sont incompatibles, donc on a l'égalité : $p(X=x_1)+p(X=x_2)+...+p(X=x_r)=p(\text{E})=1$ c'est-à-dire aussi $\sum_{i=1}^{i=r} p(X=x_i)=1$.

Vérification Cette égalité permet de faire un **contrôle** dans le tableau d'une loi de probabilité : la somme des probabilités de la dernière ligne doit être égale à 1.

Pour cette raison, il est souvent commode de ne pas simplifier systématiquement les fractions pour calculer cette somme plus facilement.

Dans le cas de notre exemple, on obtient :

$$\frac{4}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}=1.$$

Exemple 3 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

On marque 10 points si on a tiré l'as de cœur, 5 points si on a tiré un autre as, 3 points si on a tiré une figure (Valet, Dame ou Roi) et aucun point dans tous les autres cas.

On définit ainsi une variable aléatoire X.

Donner la loi de probabilité de X.

Solution Les tirages se font « au hasard », on utilise donc la loi équirépartie, chaque carte a donc la probabilité $\frac{1}{32}$ d'être tirée.

On a donc :

$p(X=10)=p(\{\text{As Cœur}\})=\frac{1}{32}$,

$p(X=5)=p(\{\text{As Carreau, As Trèfle, As Pique}\})=\frac{3}{32}$, $\quad p(X=3)=\frac{3\times 4}{32}=\frac{12}{32}$

car il y a 3 figures dans chacune des quatre « couleurs » (cœur, carreau, trèfle, pique).

Et enfin $p(X=0)=\frac{16}{32}$ car il y a 4 cartes dans chaque couleur qui sont différentes d'une figure ou d'un as : 7, 8, 9 et 10.

x_i	0	3	5	10
$p(X=x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

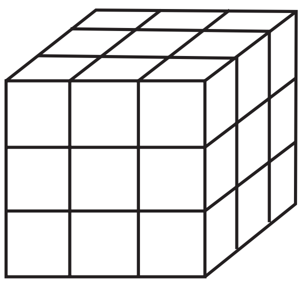
On vérifie que la somme des probabilités $p(X=x_i)$ vaut 1 :

$\frac{16}{32}+\frac{12}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{32}{32}=1.$

Remarque On aurait pu calculer la dernière probabilité en utilisant la somme des autres, car on sait que la somme totale vaut 1, donc la dernière probabilité est donnée par $1-\left(\frac{12}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}\right)$. Mais, en faisant ainsi, on ne pourra plus utiliser la somme totale pour contrôler la cohérence des valeurs trouvées.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1 On fabrique un gros cube en agglomérant 27 petits cubes (voir figure).



On peint en rouge toutes les faces du gros cube, puis on sépare de nouveau les 27 petits qui ont donc certaines de leurs faces peintes en rouge.

On tire au hasard un petit cube et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces peintes en rouge sur le petit cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Quelle est la probabilité que le petit cube tiré ait au moins une face peinte en rouge ?
3. Quelle est la probabilité que le petit cube tiré ait au plus deux faces rouges ?

Exercice 2 On donne une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau :

valeurs x_i	-3	-1	0	2	5	7
$p(X=x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,05	a

❶ Déterminer la valeur du nombre réel a.

❷ Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

$(X<0)$, $(X=-3)$ $(X\neq-3)$, $(X\leq 5)$, « X est un nombre pair » et « X est un nombre impair ».

Exercice 3 Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public : dans une urne se trouvent placées 2 boules rouges R1 et R2, 2 boules vertes V1 et V2 et une boule blanche B, ces boules sont indiscernables au toucher. Le joueur prend une première boule au hasard, puis sans la remettre dans l'urne, il tire une seconde boule.

À la fin de la partie, si la boule blanche a été tirée, le joueur gagne 10 € ; il perd dans les autres cas.

Pour faire une partie, le joueur paye 5 €.

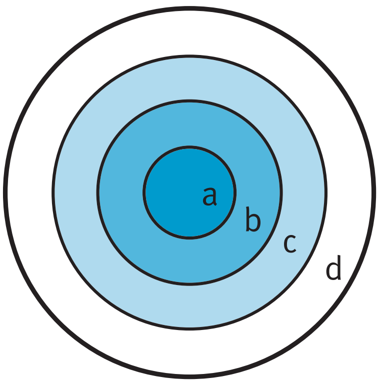
On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre le gain éventuel et le prix du jeu.

❶ Déterminer avec un arbre tous les cas possibles.

❷ Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

❸ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 Le dessin ci-contre représente une cible constituée de 4 cercles concentriques. Leurs rayons sont respectivement 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm et ils définissent 4 zones a, b, c, d.



Au tir, la probabilité d'atteindre la cible est $\frac{2}{3}$ et la probabilité d'atteindre chacune des zones, a, b, c, d est proportionnelle à son aire.

❶ Calculer la probabilité d'atteindre chacune des zones a, b, c, d.

❷ Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs 4, 3, 2, 1 quand on atteint les zones a, b, c, d respectivement et 0 quand on rate la cible. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 5 On lance deux dés tétraédriques, chacun des deux dés indique une des quatre valeurs 1, 2, 3, 4. On définit la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des deux résultats.

Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

(Comme c'est la face cachée qui nous intéresse et qu'on ne voit pas ce qui est inscrit dessus, certains dés sont numérotés comme le dé de la photo : ici on a obtenu 4, numéro indiqué juste au dessus du plan horizontal sur chacune des trois faces visibles par tous les observateurs.)

Exercice 6 Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3.

1. On tire au hasard une boule, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule. On considère la variable aléatoire X qui est égale à la somme des numéros obtenus. Donner sa loi de probabilité.

2. Même question lorsqu'on ne remet pas la première boule tirée, en appelant Y la nouvelle variable aléatoire.

Exercice 7 On lance un dé cubique deux fois de suite pour fabriquer un nombre X de deux chiffres : le chiffre des dizaines est le résultat du premier lancer, le chiffre des unités est le résultat du second lancer. On définit ainsi une variable aléatoire X.

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X, et donner sa loi de probabilité.

2. On définit une seconde variable aléatoire Y de la façon suivante :

- si la valeur de X est un nombre multiple de 11 ou un nombre strictement supérieur à 49, alors Y prend la valeur 10,
- si la valeur de X est un nombre multiple de 3 et inférieur à 20, alors Y prend la valeur 5,
- dans tous les autres cas, Y prend la valeur –1.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

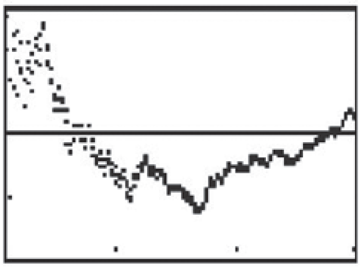
3 Espérance, écart-type d'une variable aléatoire

A Activités

Avant de donner les définitions probabilistes de ces nouvelles notions, nous vous proposons d'observer d'abord des séries statistiques qui sont crées par des simulations.

1. Activité 1

On rappelle un programme que vous avez probablement utilisé en classe de Seconde. Il permet de simuler N lancers d'une pièce et de visualiser l'évolution de la fréquence d'apparition de Pile :

Pour une calculatrice Texas	Copies d'écran d'une calculatrice Texas :	Pour une calculatrice Casio :
: EffDessin : Input "N=",N : 0→ Xmin : N→Xmax : 100→Xgrad : .4→Ymin : .6 →Ymax : .1→Ygrad : DessFonct 0.5 : 0→P : For (K,1,N) : EntAlea(0,1)→A : P+A→P : P/K→F : Pt-Aff(K,F) : End : Pause : Disp "Freq=",F :	  	"N="?→N ViewWindow 0,N,100,0.4,0.6,0.1 Graph Y=0.5 0→P For 1→I To N RanInt#(0,1)→A P+A→P P/I→F Plot I,F Next◢ "F=",F◢ Quand le graphique est terminé, on appuie encore deux fois sur EXE pour obtenir l'affichage de F=… Remarque : on connaît déjà F car F est la dernière ordonnée qui est affichée en bas du graphique.

Dans cette activité, on vous propose de vous inspirer de ce programme pour simuler avec votre calculatrice, un grand nombre de parties du jeu décrit ci-dessous.

On lance deux pièces de monnaie (une de 0,10 € et une de 0,50 € par exemple) et on compte le nombre de fois où on a obtenu Pile.

On gagne 4 € si on a obtenu deux fois Pile, on gagne 1 € si on a obtenu une fois Pile et on ne gagne rien si on a obtenu deux fois Face.

1 Écrire un programme pour simuler N expériences : il sera nécessaire de modifier la fenêtre (faire quelques essais pour la déterminer) et on peut remarquer que le gain pour une partie est égal au carré du nombre de fois où on a obtenu Pile, cela facilite la programmation.

On rappelle brièvement que, pour les calculatrices Texas, des instructions peuvent se trouver en appuyant de nouveau sur prgm, mais aussi dans maths, dans tests, dans var, dans catalogue.

Pour une calculatrice Casio : ViewWindow est obtenu par V-Window puis V.Win ; Graph Y= par Sketch GRPH Y= ; For To Next par PRGM puis COM ; RandInt par OPTN PROB RAND INT ; Plot par Sketch PLOT puis Plot ; ◢ par SHIFT VARS.

2 Observer les résultats donnés par la calculatrice pour différentes valeurs de N. Ces observations permettent de répondre à la question suivante : si, pour faire une partie, on doit payer la somme *m*, pour quelle valeur de *m* le jeu semble-t-il équitable ?

2. Activité 2

On vient de faire **une** simulation de **N expériences.**

Si on recommence le résultat sera différent, cela est dû à la fluctuation d'échantillonnage comme vous l'avez vu en classe de seconde.

Dans cette activité, on va recommencer **20 fois** la simulation de **N expériences.** On verra ainsi si le comportement observé pour N parties dans l'activité 1 semble bien être un comportement plus général.

On le fera pour trois valeurs différentes de N pour encore mieux observer le rôle joué par le nombre de répétitions de l'expérience.

On simule 10 expériences et on calcule le gain moyen lors de ces 10 expériences, donc ici N=10.

On a répété 20 fois la simulation des 10 expériences et on indique ci-dessous la série n°1 des 20 gains moyens :

Série n°1	1,5	1,7	2	1,9	1,7	1,9	1,7	2,1	1,2	1,4
	1,5	1,8	0,5	1,5	1,7	1,3	1,1	1,4	1,1	1,9

On simule de même 20 séries de 200 lancers (ici N=200) et voici la série n°2 des gains moyens :

Série n°2	1,395	1,545	1,550	1,400	1,605	1,210	1,580	1,650	1,470	1,475
	1,545	1,490	1,495	1,505	1,560	1,400	1,395	1,515	1,505	1,560

Et enfin, on simule 20 séries de 1000 lancers (ici N=1000) et on a obtenu la série n°3 des gains moyens :

Série n°3	1,523	1,476	1,576	1,451	1,414	1,466	1,491	1,519	1,429	1,507
	1,541	1,487	1,445	1,539	1,464	1,442	1,455	1,510	1,534	1,539

Les gains moyens semblent se rapprocher de 1,5.

❶ Pour préciser cette observation, faire sur une même figure les diagrammes en boîte de ces trois séries.

❷ Proposer une explication.

❸ Pour quelle valeur de la somme m le jeu vous paraît-il équitable ?

3. Activité 3

On lance trois pièces de monnaie. On gagne 4 € si on a obtenu trois résultats identiques, sinon on perd 2 €.

On a simulé 10 lancers et on a calculé le gain moyen pour ce groupe de 10 lancers.

On a répété 20 fois la simulation de 10 lancers et on indique ci-dessous la série n°1 des 20 gains moyens :

Série n°1	–1,4	1	0,4	–1,4	–0,2	–1,4	–0,2	–0,8	0,4	–1,4
	0,4	–0,8	–0,8	–0,2	–0,8	–0,2	–1,4	–0,8	–0,2	–1,4

On simule de même 20 séries de 200 lancers et voici la série n°2 des gains moyens :

Série n°2	–0,29	–0,47	–0,62	–0,53	–0,50	–0,74	–0,23	–0,47	–0,53	–0,38
	–0,65	–0,68	–0,65	–0,59	–0,47	–0,44	–0,38	–0,62	–0,50	–0,41

Et enfin, on simule 20 séries de 1000 lancers et on a obtenu la série n°3 des gains moyens :

Série n°3	–0,503	–0,476	–0,584	–0,512	–0,380	–0,494	–0,458	–0,566	–0,626	–0,446
	–0,476	–0,572	–0,524	–0,596	–0,458	–0,620	–0,422	–0,404	–0,440	–0,614

❶ De quelle valeur les gains moyens semblent-ils se rapprocher ?

❷ Pour préciser cette observation, faire sur une même figure les diagrammes en boîte de ces trois séries.

❸ Proposer une explication.

B Cours

1. Définitions de l'espérance et de l'écart-type d'une variable aléatoire

Soit $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ l'ensemble des gains possibles d'un jeu lié à une expérience aléatoire.

Quand on réalise une simulation de N parties, le gain x_1 est obtenu n_1 fois,…le gain x_r est obtenu n_r fois.

Le gain moyen est alors $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r}{N}$ ou encore $\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=r} \dfrac{n_ix_i}{N} = \sum_{i=1}^{i=r} f_ix_i.$

Dans les activités, on a observé que le gain moyen pour N parties d'un jeu semblait être très voisin d'une valeur fixe quand N est très grand.

Ceci est lié à la propriété déjà rencontrée : pour une expérience aléatoire, les fréquences f_i avec lesquelles on a obtenu les valeurs x_i en répétant N fois l'expérience se rapprochent de nombres fixes quand N devient grand.

Ces nombres sont les probabilités $p(\mathrm{X} = x_i)$, ce qui amène à donner la définition suivante.

Définition 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers E muni d'une loi de probabilité p.

Soit $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

L'espérance de la **variable aléatoire** X est le nombre, noté **E(X)**, défini par :

$$\mathrm{E}(X) = x_1p(X = x_1) + x_2p(X = x_2) + \ldots + x_rp(X = x_r) = \sum_{i=1}^{i=r} x_ip(X = x_i).$$

En notant p_i la probabilité $p(X = x_i)$, on obtient :

$$\mathrm{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_rp_r = \sum_{i=1}^{i=r} x_ip_i.$$

Remarque Le mot « espérance » correspond à l'observation faite sur les gains moyens quand on joue un très grand nombre de fois.

Si on joue N fois à un jeu dont le gain X a une espérance E(X), on peut « espérer » un gain total proche de $\mathrm{N} \times \mathrm{E}(X)$.

▸ Exemple 4 Reprenons la situation de l'activité 1.

On lance deux pièces, soit X le gain obtenu.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau :

x_i	0	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Et donc : $\mathrm{E}(X) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 1 \times \dfrac{2}{4} + 4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5.$

On trouve bien la valeur dont s'approchaient les gains moyens dans les simulations.

Mais, s'il faut payer la somme m pour jouer à ce jeu, cette dépense se déduit du gain du joueur. Donc, ici, quand $m = 1{,}5$ le jeu est équitable.

Par analogie avec les statistiques, on définit aussi la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

On note encore p_i les probabilités $p\left(X = x_i\right)$.

Définition 4

La variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X sont définis par :

$$\mathrm{V}(X) = (x_1 - \mathrm{E}(X))^2 p_1 + (x_2 - \mathrm{E}(X))^2 p_2 + \ldots + (x_r - \mathrm{E}(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=r} (x_i - \mathrm{E}(X))^2 p_i,$$

et $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Remarque Pour bien faire la différence avec la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s en statistique on utilise des notations différentes : E(X) et $\sigma(X)$.

Commentaire Comme en statistique l'écart-type $\sigma(X)$ sert à mesurer l'irrégularité des valeurs prises par la variable aléatoire X.

▶ Exemple 5 On reprend la situation de l'activité 3.

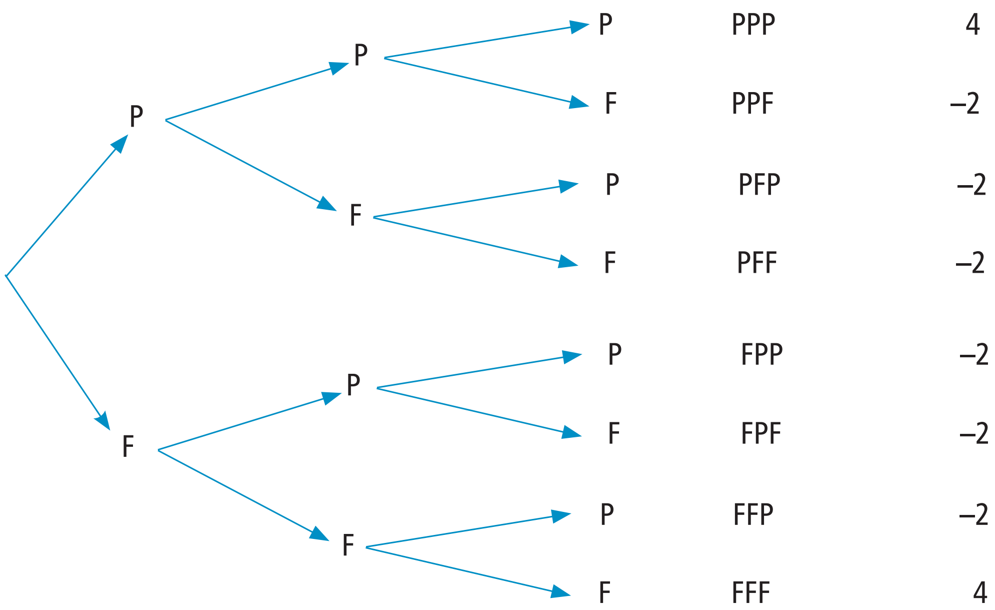
On lance trois pièces de monnaie non truquées (par exemple une pièce de 0,1 €, une pièce de 0,5 € et une pièce de 1 €).

❶ Décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire et définir une loi de probabilité adaptée.

❷ On gagne 4 € si on a obtenu trois résultats identiques, sinon on perd 2 €. On peut alors définir une variable aléatoire X correspondant au gain obtenu. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

❸ Calculer l'espérance E(X), la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$.

Solution ❶ Un arbre nous donne l'ensemble des résultats possibles pour lesquels on peut utiliser l'équiprobabilité. Il y a donc 8 résultats possibles, la probabilité de chaque événement élémentaire est donc égale à $\frac{1}{8}$.



❷ Pour chaque résultat possible, on a indiqué, à côté de l'arbre, la valeur prise par la variable aléatoire X. Les valeurs possibles sont –2 et 4.

On a $p(X=4)=p(\{\text{FFF},\text{PPP}\})=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$ et donc $p(X=-2)=1-p(X=4)=\dfrac{3}{4}$.

La loi de X est résumée dans le tableau :

x_i	-2	4
$p(X=x_i)$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

❸ On obtient : $\text{E}(X)=-2\times\dfrac{3}{4}+4\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{-2}{4}=-0{,}5$; on retrouve bien la valeur dont se rapprochaient les gains moyens.

On a aussi : $\text{V}(X)=(-2-(-0{,}5))^2\times\dfrac{3}{4}+(4-(-0{,}5))^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{27}{4}=6{,}75$ et donc $\sigma(X)=\sqrt{6{,}75}\approx 2{,}6$.

Remarque Par sa définition, l'écart-type n'est pas simple à calculer.

Dans la pratique, vous utiliserez une calculatrice ou un tableur (des explications sont données plus loin).

Pour la variance, on dispose, comme en statistique, d'une formule plus simple que celle de la définition, mais dans laquelle on ne voit plus la signification de la variance.

Elle est donnée ci-dessous : on remarque que l'espérance E(X) n'apparaît plus qu'une seule fois ce qui diminue les approximations.

Théorème 1

$$\text{V}(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=r} x_i^2 p_i\right)-(\text{E}(X))^2 \text{ et } \sigma(X)=\sqrt{\text{V}(X)}.$$

La démonstration de cette nouvelle égalité est proposée dans un exercice d'approfondissement.

Remarque La somme qui est dans la parenthèse peut s'interpréter comme l'espérance de la variable aléatoire X^2.

Cette égalité permet donc de dire :

la variance est égale à … l'espérance … des carrés … moins … le carré … de l'espérance.

▶ Exemple 6 Reprenons ainsi le calcul de la variance pour la variable aléatoire X de l'activité 3 :

$\mathrm{V}(X)=(-2)^2\times\frac{3}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-(-0,5)^2=7-0,25=6,75$ on retrouve bien le résultat précédent.

2. Propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart-type

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire.

On considère deux nombres réels a et b.

On a alors : $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ et $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$,

d'où $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$.

Démonstration Étudions d'abord l'espérance.

Soit $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

On considère une nouvelle variable aléatoire Y définie par $Y=aX+b$, qui prend les valeurs $y_1=ax_1+b$, $y_2=ax_2+b$, … , $y_r=ax_r+b$.

Si a est nul, toutes ces valeurs y_i sont égales, si a n'est pas nul elles sont toutes distinctes, comme le sont les valeurs x_i. On va donc étudier ces cas séparément, c'est un raisonnement par disjonction des cas.

▶ Si a n'est pas nul, d'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire, on a :

$\mathrm{E}(Y)=y_1p(Y=y_1)+y_2p(Y=y_2)+\ldots+y_rp(Y=y_r)$.

Or, comme a n'est pas nul, on a

$p(Y=y_i)=p(aX+b=ax_i+b)=p(aX=ax_i)=p(X=x_i)$ d'où :

$\mathrm{E}(Y)=(ax_1+b)p(X=x_1)+(ax_2+b)p(X=x_2)+\ldots+(ax_r+b)p(X=x_r)$ soit

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)=&\ ax_1p(X=x_1)+ax_2p(X=x_2)+\ldots+ax_rp(X=x_r)\\&+b(p(X=x_1)+p(X=x_2)+\ldots+p(X=x_r)).\end{aligned}$$

Or, on sait que : $p(X=x_1)+p(X=x_2)+\ldots+p(X=x_r)=1$, donc

$\mathrm{E}(Y)=a(x_1p(X=x_1)+x_2p(X=x_2)+\ldots+x_rp(X=x_r))+b$, d'où

$\mathrm{E}(Y)=a(\mathrm{E}(X)+b$, c'est-à-dire $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, ce qu'on voulait prouver.

▸ Si a est nul, $Y=aX+b$ est constante et vaut toujours b.

On a : $\mathrm{E}(Y)=bp(Y=b)=b\times 1=b$, ce qui était prévisible puisque l'espérance correspond à une moyenne et qu'ici la variable aléatoire est constante.

Or, dans ce cas, $a\mathrm{E}(X)+b=0\times\mathrm{E}(X)+b=b$. Donc $\mathrm{E}(Y)=a\mathrm{E}(X)+b$, donc l'égalité $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ est encore vraie dans ce cas particulier.

Pour la variance, rappelons la définition pour une variable aléatoire X.

$$\mathrm{V}(X)=(x_1-\mathrm{E}(X))^2p(X=x_1)+(x_2-\mathrm{E}(X))^2p(X=x_2)+\ldots$$
$$+(x_r-\mathrm{E}(X))^2p(X=x_r).$$

▸ Si a n'est pas nul, la variable aléatoire Y prend les valeurs distinctes $y_1=ax_1+b$, $y_2=ax_2+b$, $\ldots$, $y_r=ax_r+b$ et on a :

$$\mathrm{V}(Y)=(y_1-\mathrm{E}(Y))^2p(Y=y_1)+(y_2-\mathrm{E}(Y))^2p(Y=y_2)+\ldots$$
$$+(y_r-\mathrm{E}(Y))^2p(Y=y_r).$$

En remplaçant Y, y_1, y_2, $\ldots$,y_r par leurs expressions et en utilisant les égalités $p(Y=y_i)=p(X=x_i)$, on obtient :

$$\mathrm{V}(aX+b)=(ax_1+b-(a\mathrm{E}(X)+b))^2p(X=x_1)+(ax_2+b-(a\mathrm{E}(X)+b)^2p(X=x_2)$$
$$+\ldots+(ax_r+b-(a\mathrm{E}(X)+b))^2p(X=x_r).$$

D'où : $\mathrm{V}(aX+b)=(ax_1-(a\mathrm{E}(X))^2p(X=x_1)+(ax_2-(a\mathrm{E}(X))^2p(X=x_2)$

$$+\ldots+(ax_r-(a\mathrm{E}(X))^2p(X=x_r).$$

et donc :

$$\mathrm{V}(aX+b)=a^2[(x_1-\mathrm{E}(X))^2p(X=x_1)+(x_2-\mathrm{E}(X))^2p(X=x_2)$$
$$+\ldots+(x_r-\mathrm{E}(X))^2p(X=x_r)]$$

On obtient donc l'égalité attendue : $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$,

et par conséquent $\sigma(aX+b)=\sqrt{\mathrm{V}(aX+b)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}=|a|\sqrt{\mathrm{V}(X)}=|a|\sigma(X)$.

▸ Si a est nul, on a bien sûr $a^2\mathrm{V}(X)=0$.

Comme $aX+b=b$ et que, d'après ci-dessus $\mathrm{E}(b)=b$, on a :

$\mathrm{V}(aX+b)=(b-\mathrm{E}(b))^2p(0\times X+b=b)=0\times 1=0$ ce qui était prévisible puisqu'il n'y a aucune irrégularité, la variable aléatoire étant constante.

Dans ce cas très particulier, les égalités annoncées sont donc encore vérifiées.

Exemple 7 On a déterminé directement la mise m pour que le jeu de l'activité 1 soit équitable.

Reprenons cette détermination avec un nouveau point de vue, en utilisant la propriété précédente.

X désignant le gain du joueur, on a trouvé que $\mathrm{E}(X)=1{,}5$ et il est demandé la valeur de la mise m pour que le jeu soit équitable.

Si on désigne par Y la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique du joueur, on a $Y=X-m$.

Et donc, d'après la propriété précédente avec $a=1$ et $b=-m$, on a : $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X-m)=\mathrm{E}(X)-m=1{,}5-m$.

On obtient bien la valeur 1,5 pour le montant de la mise m qui rend nulle l'espérance de Y et donc le jeu équitable.

Vocabulaire On dit qu'un jeu est **équitable** quand l'espérance du gain du joueur est nulle.

Si on doit miser une somme m pour participer au jeu, la phrase précédente s'applique au gain algébrique du joueur, la mise m étant comptée négativement.

3. Calcul de l'espérance et de l'écart-type d'une variable aléatoire

Dans le cas où les valeurs prises par la variable aléatoire sont peu nombreuses, il n'est pas difficile de faire directement les calculs nécessaires pour l'espérance. Mais cela devient un peu plus délicat pour la variance et l'écart-type, et aussi pour l'espérance quand les valeurs sont nombreuses.

Heureusement il est possible d'utiliser les fonctionnalités d'une calculatrice ou d'un tableur.

a. Calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire à l'aide d'une calculatrice Casio GRAPH 25 ou d'une TI-82 Stats.fr.

On utilise les calculatrices comme pour une série statistique, il suffit d'indiquer les probabilités $p\left(X=x_i\right)$ à la place des effectifs n_i.

La somme de ces probabilités est indiquée à la place de l'effectif total, la calculatrice doit donc afficher $\mathrm{N}=1$.

Si la valeur affichée de N est différente de 1, c'est qu'il y a une erreur de frappe ou qu'il existe une erreur dans la loi de probabilité de la variable aléatoire.

Certaines calculatrices (un peu anciennes) n'acceptent peut-être pas les probabilités à la place des effectifs. Vous pouvez alors essayer de rentrer, à la place des effectifs, les probabilités multipliées par un nombre qui permet d'obtenir seulement des nombres entiers et la calculatrice travaillera comme elle le fait avec une série statistique.

L'espérance de la variable aléatoire est égale à la valeur indiquée pour $\bar{x}$, l'écart-type correspond à l'écart-type de la série statistique, il est égal à la valeur indiquée pour $x\sigma n$ pour les calculatrices Casio, σx pour les calculatrices TI.

b. Calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire à l'aide d'un tableur.

Les calculs sont analogues à ceux faits pour une série statistique.

Les détails sont donnés dans le chapitre de statistique ; on donne ici seulement l'écran suivant où la loi de la variable aléatoire X qui sert d'exemple est donnée par les deux colonnes de gauche.

D13 =SOMME(D2:D11)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	$p(X=x_i)$	$x_ip(X=x_i)$	$(x_i-E(X))^2p(X=x_i)$		deuxième	$x_i^2p(X=xi)$	
2	1	0,1	0,1	2,07025		méthode pou	0,1	
3	2	0,1	0,2	1,26025		l'écart-type :	0,4	
4	3	0,1	0,3	0,65025			0,9	
5	4	0,1	0,4	0,24025			1,6	
6	5	0,1	0,5	0,03025			2,5	
7	6	0,1	0,6	0,02025			3,6	
8	7	0,1	0,7	0,21025			4,9	
9	8	0,1	0,8	0,60025			6,4	
10	9	0,05	0,45	0,595125			4,05	
11	10	0,15	1,5	2,970375			15	
12		somme des	somme = E(X)=	somme = V(X) =			somme =	
13		probabilités = 1	5,55	8,6475			39,45	
14				écart-type = racine(variance) =			variance = [somme(x_i^2p(X=x_i)]-E(X)^2=	
15				2,940663191			8,6475	
16							écart-type = racine(variance) =	
17							2,940663191	

C Exercices d'apprentissage

Exercice 8

Pour vous entraîner, vous pouvez calculer l'espérance et l'écart-type des variables aléatoires des exercices 1 à 7 du chapitre précédent. Pour la variable aléatoire X de l'exercice 7, il est conseillé d'utiliser un tableur.

Exercice 9

Dans une urne sont placés 9 jetons marqués a, e, i, o, u, d, m, l et s.

❶ Un jeu consiste à tirer une lettre, la noter, la remettre dans l'urne et en tirer une seconde.

On gagne 4 € si le mot obtenu a un sens en français, on gagne 2 € si on a obtenu deux lettres identiques, sinon on perd 1€. Le jeu est-il équitable ? (Remarque : li est un mot de la langue française, ce mot désigne une unité chinoise de mesure de longueur.)

❷ On obtient un autre jeu si on ne remet pas le jeton après le premier tirage. Les gains possibles sont alors 4 € si le mot obtenu a un sens en français et sinon on perd k €. Déterminer k pour que ce nouveau jeu soit équitable (on donnera une valeur approchée de k au centime près).

Exercice 10 ❶ Une variable aléatoire X est telle que $E(X)=6$ et $\sigma(X)=2,5$.

Déterminer les deux nombres réels a et b, avec a positif, tels que la variable aléatoire Y définie par $Y=aX+b$ ait pour espérance 0 et pour écart-type 1.

❷ Même question en notant m l'espérance de X et σ son écart-type.

On dit alors que la nouvelle variable Y est centrée et réduite.

Exercice 11 On considère une variable aléatoire X dont la loi est indiquée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	x	10
$p_i = p(X=x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,3	

❶ Calculer la probabilité de l'événement (X=10).

❷ Déterminer le nombre réel x positif tel que la variance de la variable aléatoire X soit égale à 8,05.

❸ Calculer alors l'espérance de X.

Exercice 12 On considère un tétraèdre régulier ABCD. Un scarabée se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre, et uniquement sur les arêtes.

Son déplacement obéit aux règles suivantes :

- le temps de parcours d'une arête est une minute,
- à un sommet, il choisit au hasard l'une des trois arêtes,
- le scarabée part du sommet A.

❶ À l'aide d'un arbre, écrire tous les trajets possibles d'une durée de trois minutes.

❷ La variable aléatoire X associe à chacun des trajets précédents, le nombre de sommets différents visités par le scarabée, y compris la sommet A de départ.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 13 On lance 5 fois de suite une pièce non truquée. Soit X le nombre de fois où on a obtenu Pile.

❶ En utilisant un tableur ou une calculatrice, simuler 200 fois ce jeu et donner une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X.

❷ Simuler 20 fois des séries de 200 expériences, donner la médiane et l'intervalle interquartile de la série statistique des 20 estimations de l'espérance.

4 Répétitions d'expériences identiques

A Activités

Dans chacune des deux activités suivantes, on répète des expériences identiques.

Dans l'activité 1, on lance un dé dont les faces sont numérotées, on est dans une situation d'équiprobabilité ; puis on colore les faces et l'équiprobabilité initiale permet d'étudier cette nouvelle situation.

Dans l'activité 2, la démarche est un peu inversée. On dispose au départ de boules colorées ; puis, pour modéliser plus facilement la répétition du tirage d'une boule on numérote les boules.

1. Activité 1

On lance deux fois de suite un dé cubique bien équilibré, dont les faces sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

❶ Donner le principe d'un arbre mettant en évidence tous les résultats possibles.

❷ Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ?

❸ Les faces numérotées 1, 2, 3, sont maintenant peintes en rouge, les faces numérotées 4 et 5 sont peintes en vert et la face numérotée 6 est peinte en bleu.

En utilisant les numéros, quelles sont les issues formant l'événement RB (RB signifie qu'on a obtenu une face peinte en rouge au premier lancer, et la face peinte en bleu au deuxième) et quelle est la probabilité de l'événement RB ? Répondre aux questions analogues pour les événements RV, VR et VV.

❹ Si on lance une seule fois ce dé avec les faces peintes, quelle est la probabilité de l'événement R « obtenir une face rouge » ? De l'événement V « obtenir une face verte » ? De l'événement B « obtenir la face bleue » ?

Quelles observations pouvez-vous alors faire concernant les probabilités déterminées à la question ❷ ?

❺ Si on effectue trois lancers successifs, quelle valeur proposez-vous pour la probabilité de l'événement RBB ? Pour l'événement RVB ?

2. Activité 2

Dans une urne sont placées 5 boules indiscernables au toucher. Deux boules sont noires, les autres sont jaunes.

❶ On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité de l'événement N « obtenir une boule noire » ? De l'événement J « obtenir une boule jaune » ?

❷ On numérote 1 et 2 les deux boules noires, et on numérote 3, 4, 5 les trois boules jaunes.

On considère une nouvelle expérience : on tire une boule au hasard, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on fait un second tirage.

En utilisant la distinction permises par les numéros, quels sont les tirages correspondant à l'événement « obtenir deux boules noires », noté NN? Quelle est la probabilité de cet événement NN ?

De même, quels sont les tirages formant l'événement NJ (« obtenir une boule noire au premier tirage et une boule jaune au second tirage ») ? Quelle est la probabilité de cet événement ?

Répondre aux questions analogues pour les événements JN et JJ.

❸ Quelles observations pouvez-vous faire ?

Notation Sauf indications contraire, on notera, pour l'instant, la répétition d'expériences en juxtaposant dans l'ordre les résultats comme on l'a fait ci-dessus.

B Cours

Dans ce chapitre on étudie la répétition d'expériences identiques.

Les dés ou les pièces n'ont pas de « mémoire », les tirages de boules ou de jetons se font « avec remise » de l'objet tiré après chaque tirage …, une expérience ne dépend pas du résultat de l'expérience précédente, ainsi les expériences répétées sont identiques.

Propriété 3

On considère une expérience aléatoire ayant deux issues.

On répète n fois cette expérience de façon identique.

L'ensemble de ces expériences répétées constituent une nouvelle expérience aléatoire qui possède 2^n issues.

De même, si on répète n fois de façon identique une expérience aléatoire qui possède trois issues, la nouvelle expérience aléatoire aura 3^n issues.

Commentaire En effet, à chaque répétition d'une expérience aléatoire qui a deux issues, le nombre de branches de l'arbre est multiplié par 2.

Et, si on répète une expérience aléatoire qui a trois issues, le nombre de branches est multipliée par 3.

▶ **Exemple 8** On a déjà utilisé deux lancers successifs d'une pièce de monnaie : il y a 4 issues.

Pour trois lancers successifs, on a vu qu'il y a 8 issues, et on a bien $2^3 = 8$.

Quand on lance deux fois de suite le dé de l'activité 1 dont les faces sont peintes de trois couleurs, si on s'intéresse seulement aux couleurs obtenues lors des deux lancers successifs, il y a $3^2 = 9$ résultats possibles ; et, si on lance trois fois ce dé, il y en a $3^3 = 27$.

Propriété 4 (admise en Première S)

On considère une expérience aléatoire formée par la répétition de n expériences identiques ayant 2 issues.

On définit une loi de probabilité sur l'univers des 2^n issues de la façon suivante :

- la probabilité d'une liste de n résultats est le produit des probabilités de chacun des n résultats partiels qui la constituent.

On définit de même une loi de probabilité sur l'univers des 3^n issues si on répète n fois de façon identique une expérience aléatoire ayant 3 issues.

Remarques

1. Ce choix, cette modélisation, correspondent aux observations faites dans les activités et certains exercices précédents.

Mais, justifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité nécessite de prouver que les propriétés de la définition d'une loi de probabilité sont bien vérifiées. En particulier, la somme des probabilités des événements élémentaires doit être égale à 1, et la démonstration de cette égalité n'est pas réalisable en Première.

Conformément au programme, on admet donc ici cette propriété.

2. Dans la répétition d'expériences identiques, on va utiliser l'expression **« expériences identiques et indépendantes »** pour signifier qu'on fait le choix de la loi de probabilité décrite ci-dessus.

3. Vous verrez, en Terminale, que le mot indépendant possède un sens très précis qui sera alors défini. Bien sûr, l'utilisation ici du mot « indépendantes » est tout à fait cohérente avec cette future définition.

▶ Exemple 9

On reprend la situation de l'activité 2. Dans une urne sont placées 5 boules indiscernables au toucher. Deux boules sont noires, les autres sont jaunes.

1 On tire une boule au hasard.

On a vu que la probabilité de l'événement N « obtenir une boule noire » est $p(\text{N}) = \frac{2}{5}$ et que la probabilité de l'événement J « obtenir une boule jaune » est $p(\text{J}) = \frac{3}{5}$.

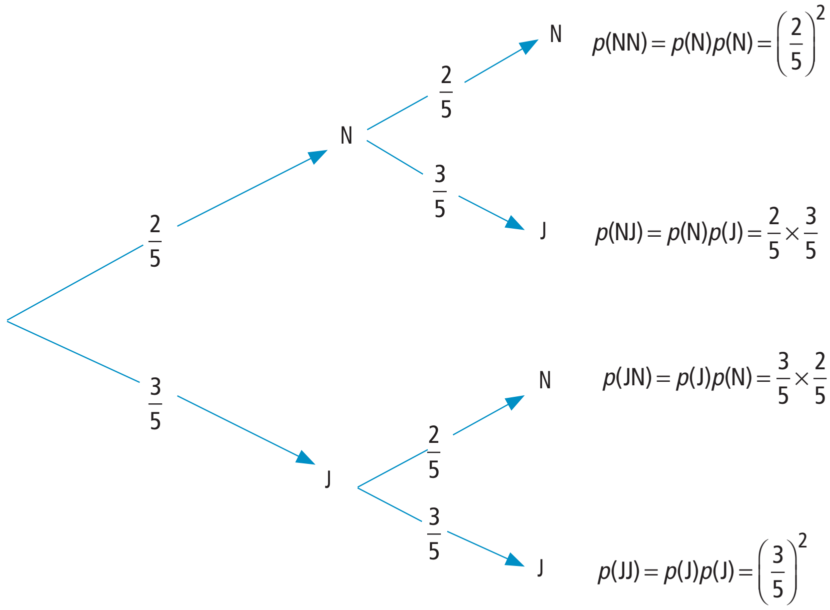
2 On effectue maintenant deux tirages successifs, la première boule tirée étant remise dans l'urne pour que le deuxième tirage soit bien identique au premier. Les événements sont notés comme précédemment NN, NJ, JN, JJ.

On a déterminé dans l'activité 2 les probabilités suivantes :

$$p(\text{NN}) = \frac{4}{25},\ p(\text{NJ}) = \frac{6}{25},\ p(\text{JN}) = \frac{6}{25} \text{ et } p(\text{JJ}) = \frac{9}{25}.$$

On a donc bien dans ce cas $p(\text{NN}) = p(\text{N})p(\text{N}) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$, $p(\text{NJ}) = p(\text{N})p(\text{J}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5}$, $p(\text{JN}) = p(\text{J})p(\text{N}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5}$ et $p(\text{JJ}) = p(\text{J})p(\text{J}) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$.

La propriété est illustrée par un « arbre pondéré » :



On remarque que, pour obtenir le résultat NN, on s'est déplacé sur deux branches ayant chacune pour probabilité $\dfrac{2}{5}$ et on a montré plus haut que la probabilité d'obtenir NN est $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$; il en est de même pour les autres résultats.

Propriété 5

Un **arbre pondéré,** où l'on indique sur chaque branche la probabilité d'obtenir chaque résultat partiel, permet d'utiliser très facilement la propriété précédente : il suffit de **multiplier les probabilités des branches successives pour obtenir la probabilité de chaque résultat global.**

Dans les cas où l'on répète des expériences identiques et indépendantes, on utilise ces arbres pondérés.

Il ne faut pas les **confondre** avec les arbres qui ont déjà été utilisés pour énumérer toutes les issues équiprobables d'une expérience, comme au début de l'activité 1. Ces arbres, qui mettent en évidence tous les résultats possibles dans les cas d'équiprobabilité, sont quelquefois appelés **« arbres des possibles »** ce qui permet de les différencier des **« arbres pondérés ».**

Généralisation On peut généraliser tout cela lors de la répétition d'une expérience aléatoire qui possède davantage d'issues.

Mais, en classe de Première S, on se limitera surtout aux cas où on répète une expérience qui a trois issues au maximum, comme dans l'activité 1.

Remarque Lancer ensemble deux pièces différentes est modélisé de la même façon que la succession de deux lancers d'une même pièce.

De façon analogue, lancer ensemble trois dés de couleurs différentes est modélisé comme trois lancers successifs d'un même dé.

Et, si des objets lancés simultanément sont identiques, on a vu que, pour modéliser l'expérience, pour trouver la loi de probabilité adaptée, il est utile de différencier les objets, par exemple en imaginant des marques de couleur.

▸ Exemple 10 Un carrefour muni d'un feu tricolore est situé sur le trajet d'un automobiliste. La probabilité qu'il rencontre le feu au vert est toujours égale à $\frac{2}{3}$. Si le feu n'est pas au vert l'automobiliste doit s'arrêter, la probabilité de l'arrêt est donc égale à $\frac{1}{3}$. L'automobiliste passe 4 fois par jour à ce carrefour.

Calculer la probabilité pour que, dans une journée :

a) il rencontre 4 fois le feu au vert,

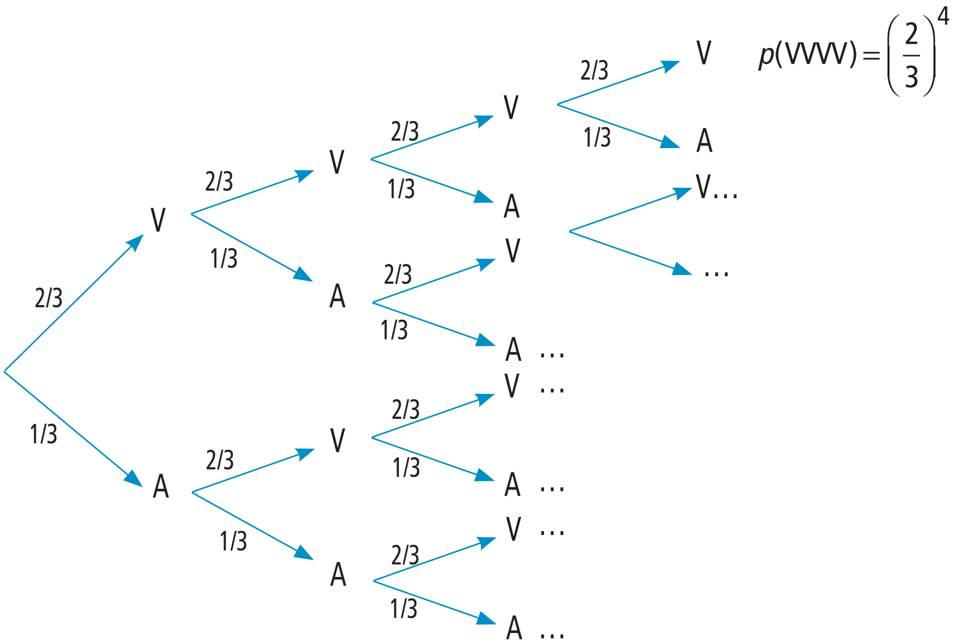
b) il s'arrête au moins une fois au feu,

c) il s'arrête exactement une fois au feu,

d) il s'arrête au plus une fois au feu.

Solution On répète 4 fois de façon identique une expérience aléatoire qui a deux issues : V « le feu est au vert » et A « l'automobiliste doit s'arrêter » (remarque : $A = \overline{V}$).

On représente la répétition de ces 4 expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré :



a) « L'automobiliste rencontre 4 fois le feu au vert » est l'événement VVVV et $p(\text{VVVV}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

b) « L'automobiliste s'arrête au moins une fois au feu » est l'événement contraire du précédent, sa probabilité est donc égale à $1 - p(\text{VVVV}) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

c) « L'automobiliste s'arrête exactement une fois au feu » est formé de la réunion des 4 événements AVVV, VAVV, VVAV, VVVA. Ces 4 événements ont des probabilités égale à la même valeur $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et ils ont incompatibles.

Il suffit donc d'ajouter ces probabilités et on trouve $4\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

d) « L'automobiliste s'arrête au plus une fois au feu» est égal à la réunion des deux événements « l'automobiliste s'arrête exactement une fois » et « le feu est au vert 4 fois ». Ces deux événements sont incompatibles, il suffit donc d'ajouter leurs probabilité qui ont été calculées aux questions c) et a).

La probabilité cherchée ici est donc égale à $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.

Remarques

1. Cet exemple est l'occasion d'attirer votre attention sur les événements qui sont définis à l'aide de l'expression « au moins une fois » comme dans la question b).

Il est très souvent beaucoup plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire que de regarder tout les cas qui forment l'événement étudié.

En effet, ici, si on n'utilise pas l'événement contraire, on détaille tous les cas : « l'automobiliste s'arrête au moins une fois » est l'événement formé par la réunion de tous les événements où l'automobiliste s'arrête exactement une fois, tous les cas où il s'arrête exactement deux fois, tous les cas où il s'arrête exactement trois fois et le cas où il s'arrête quatre fois. Ce qui ferait quatre calculs de probabilité.

2. Pour d'autres expressions comme « au moins deux fois », « au plus une fois »… on regarde quelle est la probabilité la plus simple à calculer : en décomposant l'événement ou en utilisant l'événement contraire.

3. Cet exercice peut être envisagé autrement en faisant intervenir une variable aléatoire.

Soit X le nombre d'arrêts au feu de l'automobiliste au cours d'une journée. Traduisons les événements des quatre questions en utilisant la variable aléatoire X (X ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2, 3, 4).

a) « L'automobiliste rencontre 4 fois le feu au vert » est l'événement $(X = 0)$.

b) « L'automobiliste s'arrête au moins une fois au feu » est l'événement $(X \geq 1)$.
Cet événement peut aussi s'écrire : $(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3) \cup (X = 4)$,
mais aussi $(X \geq 1) = \overline{(X = 0)}$ ce que nous avons utilisé pour trouver sa probabilité.

c) « L'automobiliste s'arrête exactement une fois au feu » est l'événement $(X=1)$.

d) « L'automobiliste s'arrête au plus une fois » est l'événement $(X \leq 1)$. Pour calculer sa probabilité on l'a décomposé en l'union de deux événements disjoints dont on connaissait les probabilités :

$(X \leq 1)=(X=0) \cup (X=1)$.

Petit à petit, vous vous familiariserez avec ces deux points de vue et vous pourrez passer de l'un à l'autre dans les exercices.

Notation Ci-dessus, on a noté, par exemple, AVVV l'événement « l'automobiliste s'arrête au premier feu et les trois derniers feu sont au vert ».

Dans ces expériences répétées, il y a d'autres notations possibles.

Par exemple, on note A_1 l'événement « l'automobiliste s'arrête au premier feu » et V_1 l'événement « le premier feu est au vert » et on note de même les événements analogues, l'indice indiquant la position du feu. L'événement « l'automobiliste s'arrête au premier feu et les trois derniers feux sont au vert » se note alors $A_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$. Cette notation est, dans certains cas, plus efficace. Pour vous habituer à la manipuler, les exercices 16 et 17 sont corrigés ainsi.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 14 ❶ On tire, au hasard, une carte dans un jeu de 32 cartes.

On dit qu'on a réussi si on a tiré une figure (Valet, Dame, Roi). On note R l'événement « tirer une figure ».

Quelle est la probabilité de l'événement R ?

❷ On répète cette expérience 3 fois, de façon identique, c'est-à-dire en remettant dans le jeu la carte tirée après chaque tirage.

a) Faire un arbre pondéré de cette répétition de 3 expériences identiques, chacune ayant deux issues : R et $\overline{R}$.

b) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de « réussites ». Compléter l'arbre pondéré en indiquant au bout de chaque branche la valeur prise par X. Déterminer $p(X=0)$ et $p(X>0)$.

c) Exprimer avec la variable aléatoire X les événements suivants : « réussir une fois », « réussir au moins une fois », « réussir toutes les fois », « échouer une fois », « échouer au plus une fois ».

d) Déterminer les probabilités des événements précédents (l'une d'elles a déjà été calculée).

❸ Reprendre les questions précédentes dans le cas où on répète n fois le tirage d'une carte de façon identique, c'est-à-dire avec remise.

Exercice 15 Les deux questions suivantes ont été posées par le Chevalier de Méré au temps de Pascal et Fermat, quand la théorie des probabilités était encore balbutiante.

❶ On lance quatre fois de suite un dé cubique. La probabilité d'obtenir au moins un six est-elle supérieure à 0,5 ?

❷ On lance 24 fois deux dés cubiques. La probabilité d'obtenir au moins un double-six est-elle supérieure à 0,5 ?

Exercice 16 Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon et le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Les tirs sont faits dans des conditions identiques, quand un ballon est crevé, un nouveau ballon apparaît pour le tir suivant.

❶ Le tireur joue deux fois, quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ? Quelle est la probabilité que le tireur ait crevé au moins un ballon ?

❷ Le tireur tire n fois, quelle est la probabilité que le ballon soit crevé seulement au n-ième tir ? Qu'il soit intact après le n-ième tir ? Quelle est la probabilité p_n que le tireur ait crevé au moins un ballon ? Quelle est la première valeur de l'entier n pour laquelle on a $p_n > 0{,}99$?

Exercice 17 On dispose de trois tétraèdres parfaitement équilibrés, un petit, un moyen et un grand.

Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres (on remarquera que, lorsqu'on lance un tétraèdre, une face est cachée et trois faces sont visibles).

Pour chacun de ces trois tétraèdres on notera B l'événement « la face bleue est cachée », J l'événement « la face jaune est cachée » et R l'événement « une face rouge est cachée »

❶ Faire un arbre pondéré adapté à cette expérience (indiquer au moins la moitié des branches).

❷ Déterminer la probabilité d'obtenir au moins trois faces rouges visibles sur l'ensemble des trois tétraèdres.

❸ Quelle est la probabilité de ne voir aucune face peinte en bleu ?

❹ Quelle est la probabilité de l'événement « les six faces rouges sont visibles » ?

5 Synthèse de la partie 2 de la séquence

A Variable aléatoire, loi de probabilité

Soit une expérience aléatoire et soit E l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.

On a défini sur l'univers E une loi de probabilité p.

1. Variable aléatoire

Définition 1

On dit qu'on définit une variable aléatoire sur l'ensemble E lorsqu'on associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Remarque Une variable aléatoire est donc une fonction de l'univers E vers l'ensemble $\mathbb{R}$.

Notation Une variable aléatoire est notée par une lettre majuscule, très souvent on utilisera X.
L'ensemble des issues pour lesquelles la variable aléatoire X prend la valeur x_i sera noté $\left(X = x_i\right)$.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par :

- l'ensemble des valeurs $\left\{x_1, x_2, ..., x_r\right\}$ prises par la variable aléatoire,
- les probabilités $p\left(X = x_i\right)$ pour toutes les valeurs x_i prises par X.

Remarque La loi de probabilité d'une variable aléatoire se donne souvent par un tableau où on indique les valeurs x_i prises par la variable aléatoire et les probabilités $p\left(X = x_i\right)$.

x_i					
$p\left(X = x_i\right)$					

Propriété 1

On a l'égalité $p(X=x_1)+p(X=x_2)+...+p(X=x_r)=p(\mathrm{E})=1$ c'est-à-dire aussi $\sum_{i=1}^{i=r} p(X=x_i)=1.$

Cette égalité sert souvent pour contrôler la cohérence d'une loi de probabilité.

B Espérance, écart-type

Définition 3

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre, noté **E(X)**, défini par :

$$\mathrm{E}(X)=x_1p(X=x_1)+x_2p(X=x_2)+\ldots+x_rp(X=x_r)=\sum_{i=1}^{i=r} x_ip(X=x_i).$$

En notant p_i la probabilité $p(X=x_i)$, on obtient :

$$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_rp_r=\sum_{i=1}^{i=r} x_ip_i.$$

Définition 4

La variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X sont définis par :

$$\mathrm{V}(X)=(x_1-\mathrm{E}(X))^2p_i+(x_2-\mathrm{E}(X))^2p_2+\ldots+(x_r-\mathrm{E}(X))^2p_r=\sum_{i=1}^{i=r}(x_i-\mathrm{E}(X))^2p_i,$$

et $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}.$

Théorème 1

On a aussi une autre expression de la variance : $\mathrm{V}(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=r} x_i^2p_i\right)-(\mathrm{E}(X))^2.$

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire et on considère deux nombres réels a et b.

On a alors :

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ et $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X),$

d'où $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X).$

Calcul de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire

Il faut savoir utiliser les fonctionnalités d'une calculatrice ou d'un tableur pour calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

Les procédures sont très proches de celles qui ont été vues en statistiques.

C Répétition d'expériences identiques

Propriété 3

On considère une expérience aléatoire ayant deux issues.

On répète n fois cette expérience de façon identique.

Ces expériences répétées constituent ensemble une nouvelle expérience aléatoire qui possède 2^n issues.

Propriété 4 (admise en Première S)

On considère une expérience aléatoire formée par la répétition de n expériences identiques ayant deux issues.

On définit une loi de probabilité sur l'univers des 2^n issues de la façon suivante :

- La probabilité d'une liste de n résultats est le produit des probabilités de chacun des n résultats partiels qui la constituent.
- On dit alors que les expériences répétées sont identiques et indépendantes.

Propriété 5

Un **arbre pondéré,** où l'on indique sur chaque branche la probabilité d'obtenir chaque résultat partiel, permet d'utiliser très facilement la propriété précédente : il suffit de **multiplier les probabilités des branches successives pour obtenir la probabilité de chaque résultat global.**

Généralisation

On peut généraliser tout cela lors de la répétition d'expériences aléatoires identiques qui possèdent davantage d'issues.

Mais, en classe de Première S, on se limitera surtout aux cas où on répète une expérience aléatoire qui a trois issues au maximum.

6 Exercices d'approfondisssement

Exercice I

Alice dispose d'un dé tétraédrique (comme celui de l'exercice 5) et Bob d'un dé octaédrique (comme ci-contre). Les deux dés sont bien équilibrés. Alice et Bob lancent chacun leur dé.

Le dé d'Alice détermine de façon équiprobable un nombre parmi 1, 2, 3, 4.

Le dé de Bob détermine de façon équiprobable un des huit nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Si le dé d'Alice indique un numéro strictement supérieur à celui indiqué par le dé de Bob, Bob donne 12 € à Alice. Si les numéros indiqués sont les mêmes la partie est nulle.

Si le dé d'Alice indique un numéro strictement inférieur à celui indiqué par le dé de Bob, Alice donne 3€ à Bob.

1. Ce jeu n'est pas équitable, qui est favorisé ?
2. Modifier ce jeu pour qu'il devienne équitable.

Exercice II

On rappelle que la variance d'une variable aléatoire X est définie par :

$$V(X)=(x_1-\mathrm{E}(X))^2p_1+(x_2-\mathrm{E}(X))^2p_2+\ldots+(x_r-\mathrm{E}(X))^2p_r=\sum_{i=1}^{i=r}(x_i-\mathrm{E}(X))^2p_i.$$

Démontrer l'égalité : $V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=r}x_i^2p_i\right)-\mathrm{E}(X))^2.$

Exercice III

Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu dans des circonstances identiques. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui gagne le plus de parties. Chaque partie est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, B gagne ou la partie est nulle.

À chaque partie, l'équipe A a une probabilité 0,5 de gagner, l'équipe B a une probabilité égale à 0,4 de gagner et la probabilité pour que la partie soit nulle vaut 0,1.

1. Dresser la liste des tournois sans vainqueur ; justifier qu'ils sont au nombre de 7.

Montrer que la probabilité pour que le tournoi soit sans vainqueur est égale à 0,121.

2. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.

3. Montrer que la probabilité pour que l'équipe A gagne le tournoi est 0,515. Quelle la probabilité pour que l'équipe B gagne le tournoi ?

Exercice IV Un candidat répond au hasard à un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) qui comprend quatre questions. Pour chaque question, il choisit au hasard une réponse parmi les trois qui lui sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

❶ De combien de façons peut-il remplir ce QCM ?

❷ La variable aléatoire X associe au questionnaire rempli par le candidat le nombre de ses réponses exactes.

a) Calculer $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=3)$.

b) Le candidat est reçu s'il a donné au moins trois réponses exactes. Calculer la probabilité qu'il soit reçu.

c) Calculer $p(X=2)$.

Exercice V On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés, un dé est bleu, l'autre est rouge.

Les faces du dé bleu sont indiquées normalement : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sur les faces du dé rouge sont marqués les nombres : –4, –3, –2, –1, 0, 1.

On lance les deux dés. On appelle b le résultat du dé bleu et c le résultat du dé rouge.

Soit Y la variable aléatoire qui, pour chaque lancer, prend pour valeur le nombre de solutions de l'équation $x^2+bx+c=0$.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y : on cherchera des raisonnements qui évitent d'étudier chacun des 36 cas possibles.

Exercice VI Dans une urne se trouvent dix boules indiscernables au toucher. Trois boules sont vertes, les autres sont noires.

On tire une boule au hasard, on regarde sa couleur puis on la remet dans l'urne. On procède ainsi à 5 tirages identiques.

Pour chaque suite de 5 tirages, la variable aléatoire X prend pour valeur le rang de la première boule verte qui apparaît. Par exemple, si on a obtenu NNNVN (la notation est analogue à celle du cours), la variable aléatoire X prend la valeur 4, de même si on a obtenu NNNVV, et si on a obtenu NNNNN, c'est-à-dire aucune boule verte, X prend la valeur 0.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et son espérance. ■