Séquence 2

1$^{\text{ère}}$ partie :

Statistiques

2$^{\text{e}}$ partie :

Étude des fonctions

1ère partie

Statistiques

Sommaire

Introduction
1. Pré-requis
2. Médiane, quartiles, diagrammes en boîte
3. Moyenne, écart-type
4. Synthèse de la partie 1 de la séquence
5. Exercices d'approfondissement

Introduction

« Etude méthodique des faits sociaux par des procédés numériques (classements, dénombrements, inventaires chiffrés, recensements) destinée à renseigner les gouvernements » : ceci est la définition du mot **« statistique »** dans le dictionnaire Petit Robert.

Dès l'Antiquité (à Sumer, en Mésopotamie, en Egypte…), des gouvernements ont effectivement utilisé des « séries statistiques » pour être mieux renseignés sur leurs Etats et les gérer en conséquence.

Peu après 1750, on commence à faire des représentations graphiques, la moyenne et la médiane sont de plus en plus utilisées pour **résumer et décrire une série statistique.**

Les physiciens, et depuis longtemps les astronomes, doivent tenir compte de séries de mesures pour un même phénomène, les variations étant en partie aléatoires. À partir des observations statistiques, les économistes tentent de faire des prévisions **en essayant de maîtriser l'incertitude.**

Un chapitre des mathématiques va répondre à ces besoins car les mathématiciens ont commencé (1650) à créer des outils pour étudier les phénomènes aléatoires : les **probabilités**.

On dit qu'un phénomène est **aléatoire** lorsqu'il est incertain, lié au hasard , lorsqu'il n'est pas déterminé, lorsqu'il n'est pas sûr.

On lance un dé, on lance une pièce, quoi de plus **imprévisibles** que les résultats obtenus ?

Mais, si on répète un grand nombre de fois le lancer d'une pièce bien équilibrée, par exemple, on observe que la pièce est tombée à peu près autant de fois sur Pile que sur Face Les fréquences des deux résultats sont très voisines de 0,5… **on peut donc prévoir le comportement des fréquences quand le nombre de répétitions est très grand**.

Dans notre environnement quotidien (météo, sondages…), professionnel (cabinets d'assurance, de gestion, laboratoires d'analyses médicales, contrôles qualité dans l'industrie), universitaire (physique, chimie, biologie, psychologie, économie, archéologie…), dans tous ces domaines, les statistiques et les probabilités interviennent.

Il est indispensable au citoyen d'aujourd'hui de comprendre ce que sont les statistiques pour savoir ce que veulent réellement dire les informations qu'il reçoit.

Et il est souhaitable qu'un élève de la série S connaisse et sache utiliser les notions de base des statistiques et de calcul des probabilités.

En première S, le cours consacrée à **l'aléatoire**, au hasard, comporte **trois parties**.

❶ Dans la première partie, étudiée dans cette séquence, il s'agit de **statistiques descriptives**. On va s'attacher à résumer des séries statistiques par des nombres significatifs pour permettre l'utilisation et la comparaison de ces séries.

On précisera et on complètera les notions étudiées les années précédentes, en particulier ce qui concerne la dispersion d'une série statistique.

Pour les explications, les exemples qui ont été choisis comportent peu de données. Dans la réalité du travail des statisticiens, il s'agit d'étudier des séries statistiques pour lesquelles les données sont beaucoup plus nombreuses et les outils informatiques permettent de le faire.

❷ Dans la deuxième partie, située un peu plus loin dans le cours, vous étudierez (dans deux séquences) ce qui concerne le modèle théorique des **probabilités,** qui est construit en lien avec les faits observés en statistiques.

❸ Et, vers la fin de l'année, dans la troisième partie, vous pourrez approfondir ce qui a été vu en classe de Seconde sur l'**échantillonnage**.

La théorie des probabilités permettra, à partir d'observation statistiques sur les échantillons, de donner quelques exemples simples de prises de décisions.

Partout les moyens informatiques, **calculatrices et tableurs,** seront très souvent utilisés pour **calculer** ou pour faire des **simulations.**

1 Pré-requis

A Vocabulaire

Une série statistique porte sur un caractère (taille, poids, sport pratiqué…)

Nous étudierons ici uniquement des séries statistiques à **caractère quantitatif**, par exemple la taille des élèves d'une classe (mais pas le sport pratiqué qui est un caractère qualitatif).

On dit qu'une série statistique est à **caractère quantitatif discret** quand les valeurs prises par le caractère sont des nombres isolés (par exemple le nombre de frères et sœurs).

Et on dit qu'une série statistique est à **caractère quantitatif continu** quand on connaît seulement les effectifs des termes de la série appartenant à des intervalles (par exemple la taille des élèves d'une classe).

B Effectifs, fréquences, fréquences cumulées croissantes

Deux exemples vont rappeler ces notions.

▶ **Exemple 1**

Pour une classe de 30 élèves, on connaît le nombre de frères et sœurs de chaque élève.

Il s'agit d'une série statistique à caractère discret.

On obtient le tableau suivant :

Nombre de frères et sœurs x_i	0	1	2	3	4	5
Effectif n_i	4	12	*8*	3	2	1
Effectif cumulé croissant	4	*16*	24	27	29	30
Fréquence f_i (valeur approchée)	0,13	0,40	0,27	0,10	0,07	0,02
Fréquence cumulée croissante (valeur approchée)	0,13	0,53	0,80	0,90	0,97	1

Par exemple, l'effectif cumulé 24 obtenu pour $x_i = 2$ signifie que 24 élèves ont 2 frères et sœurs au maximum. Ce nombre 24 est obtenu en ajoutant les deux nombres écrit en bleu et en italiques dans le tableau : 16 l'effectif cumulé précédent et 8 l'effectif correspond à $x_i = 2$.

Toutes les fréquences sont obtenues en divisant les effectifs par l'effectif total qui est égal à 30, on obtient toujours un nombre compris entre 0 et 1.

Les fréquences peuvent aussi être exprimées en pourcentage : par exemple 13% correspond à 0,13. Dans les activités et les exercices nous utiliserons les deux formes.

Ces fréquences sont souvent des valeurs approchées, sans que cela soit précisé.

▶ Exemple 2 On a relevé dans un hypermarché les montants des achats (en €) effectués par 125 clients.

Il s'agit d'une série statistique à caractère continu.

On obtient le tableau suivant :

Montant des achats (en €) x_i	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Effectif n_i	35	41	*30*	12	5	2
Effectif cumulé croissant	35	*76*	106	118	123	125
Fréquence	0,28	0,32	0,24	0,10	0,04	0,02
Fréquence cumulée croissante	0,28	0,60	0,84	0,94	0,98	1

Exemple : le troisième effectif cumulé est 106, il signifie que les montants des achats de 106 clients sont dans l'intervalle [0 ; 60[c'est-à-dire strictement inférieurs à 60 €.

Courbe des fréquences cumulées croissantes

Pour expliquer cette construction, utilisons l'exemple 2.

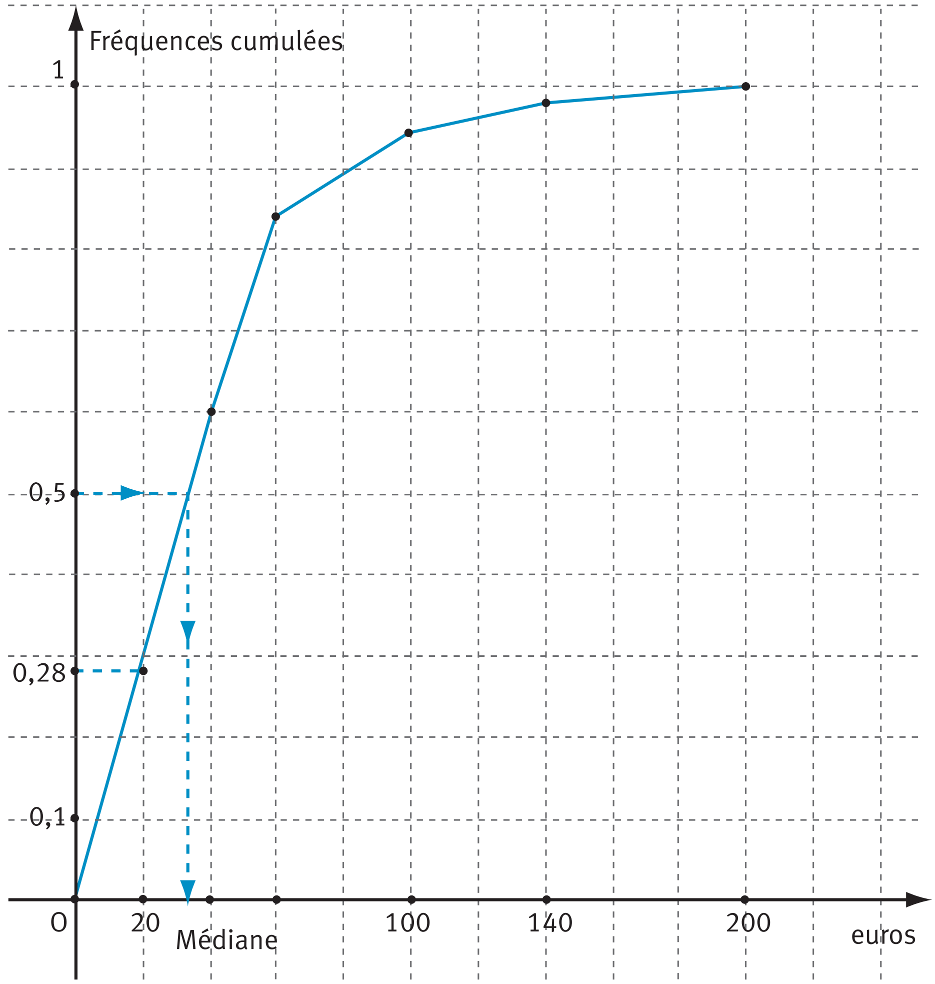
Dans ces graphiques, on indique en abscisse les valeurs du caractère : ici de 0 à 200. Et on indique les fréquences cumulées en ordonnée.

On place les points de coordonnées (20 ; 0,28), (40 ; 0,60), (60 ; 0,84), … (200 ; 1) qui correspondent aux informations suivantes : 28% des achats sont strictement inférieurs à 20 €, 60% des achats sont strictement inférieurs à 40 €, etc.

On complète ces points par un premier point d'abscisse 0 (la plus petite valeur du caractère) et d'ordonnée 0 (0% des achats sont strictement inférieurs à 0 €).

On joint alors les points par des segments de droite, la courbe obtenue est appelée **courbe des fréquences cumulées croissantes.**

On obtient le graphique ci-après.



Remarque Ce choix (de relier les points par des segments de droite) revient à considérer que les valeurs du caractère sont régulièrement distribuées à l'intérieur de chaque classe.

Dans notre exemple, on peut imaginer que c'est assez vraisemblable sauf pour les deux classes extrêmes : ce n'est certainement pas vrai pour la dernière classe [140 ; 200] dont l'effectif est 2, et, dans la première classe [0 ; 20[, on peut penser qu'il y a très peu d'achats inférieurs à 5 €.

C'est pourquoi ces graphiques devront être utilisés avec précaution.

C Paramètres numériques

Vous avez déjà utilisé quelques nombres qui permettent de résumer une série statistique.

1. La médiane

Les valeurs du caractère d'une série statistique étant rangées par ordre croissant, on définit **la médiane**. C'est un nombre tel qu'il y a autant de valeurs de la série qui lui sont inférieures que de valeurs qui lui sont supérieures. Plusieurs définitions plus précises sont possibles.

Celle qui sera utilisée dans ce cours, conformément au programme, est la suivante :

Définition

- Si l'effectif N de la série est un nombre impair, $N = 2n+1$, la médiane de la série est la valeur centrale du caractère, celle qui est numérotée $n+1$.
- Si l'effectif N de la série est un nombre pair, $N = 2n$, la médiane est le nombre égal à la demi-sommes des deux valeurs centrales, celles qui sont numérotées n et $n+1$.

Dans l'exemple des frères et sœurs des élèves, l'effectif total est égal à 30 ; la médiane est donc la demi-somme des 15$^{\text{ème}}$ et 16$^{\text{ème}}$ valeurs, elle est donc égale à 1.

Remarque Dans le cas où l'effectif de la série statistique est un nombre pair, la médiane n'est pas toujours une valeur de la série statistique.

Pour une série à caractère continu, on pourra seulement définir **la classe médiane**.

Dans l'exemple 2, l'effectif total est égal à 125 ; la médiane est donc la valeur du caractère du 63$^{\text{ème}}$ terme ; les effectifs cumulés croissants nous montrent que ce terme est dans la classe [20 ; 40[: c'est la classe médiane de la série statistique.

2. Moyenne d'une série statistique

Supposons donnée une série statistique à caractère quantitatif discret.

On note N l'effectif total, x_i les valeurs du caractère, n_i les effectifs et f_i les fréquences correspondants.

Définition

La moyenne de la série, est le nombre $\overline{x}$ défini par :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{N} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_px_p,$$

ou encore $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=p} n_ix_i}{N} = \sum_{i=1}^{i=p} f_ix_i.$

Remarques ❶ Dans l'exemple des frères et sœurs des élèves, on trouve que la moyenne vaut $\frac{5}{3}$, donc environ 1,7. En moyenne, un élève de la classe a donc 1,7 frère et sœur. Il ne faut pas s'étonner de ce résultat bizarre ; en effet, la moyenne n'est pas nécessairement une valeur du caractère de la série statistique (ici 0, 1, 2…).

❷ Dans l'exemple des achats dans un magasin, qui est celui d'une série continue, on fait des calculs analogues en utilisant les centres des classes et on trouve que la moyenne vaut 39,84 €.

❸ Complément sur la notation Σ.

La lettre majuscule grecque Σ, qui se lit « sigma » correspond à la lettre S, initiale de « somme ».

On utilise cette notation quand on veut écrire de façon abrégée une somme dont les termes sont construits de manière identique, par exemple la somme $1^2+2^2+...+11^2+12^2$, où déjà les pointillés signifient que l'on continue à ajouter les carrés des entiers successifs.

Dans ce cas, on écrira : $1^2+2^2+...+11^2+12^2=\sum_{i=1}^{i=12} i^2$ la lettre i désigne un entier, qui prendra successivement toutes les valeurs à partir de 1 jusqu'à 12, et on fait la somme des carrés de ces entiers.

Pour vous habituer à cette notation, vous pouvez vérifier que $\sum_{i=4}^{i=7} i^2=126$ et que $\sum_{k=0}^{k=5}\sqrt{k}\approx 8,382$.

On utilise beaucoup cette notation dans des cas où le dernier terme de la somme dépend de la variable n, par exemple : $1^2+2^2+...+n^2=\sum_{i=1}^{i=n} i^2$.

▸ **Exemple 3** ❶ Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{k=4}(2k-1)$ et $\sum_{i=3}^{i=8} i$.

❷ Exprimer les deux sommes suivantes en utilisant le symbole Σ :

$$A=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{8} \text{ et } B=1+4+...+(n+1)^2.$$

Solution

❶ $\sum_{k=1}^{k=4}(2k-1)=1+3+5+7=16$ et $\sum_{i=3}^{i=8} i=3+4+5+6+7+8=33.$

❷ $A=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{8}=\sum_{i=1}^{i=8}\frac{1}{i}$

$$B=1+4+...+(n+1)^2=\sum_{k=0}^{k=n}(k+1)^2$$

ou aussi $B=1+4+...+(n+1)^2=\sum_{k=1}^{k=n+1}k^2.$

2 Médiane, quartiles, diagramme en boîte

A Activités

1. Médiane, quartiles, déciles d'une série à caractère discret

On a demandé à 50 personnes prenant l'autobus, le nombre de fois où chacune de ces personnes a utilisé ce type de transport pendant la semaine écoulée.

Voici les résultats :

Nombre de voyages en autobus : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif n_i	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3
Effectif cumulé croissant										
Fréquence en %										
Fréquence cumulée croissante en %										

1. Compléter les lignes du tableau.
2. Déterminer la médiane.
3. Quelle est la plus petite valeur q du caractère pour laquelle au moins 25% des valeurs ont une valeur inférieure à q ? Même question avec 75%.
4. Mêmes questions avec 10% et 90%.

2. Avec deux séries à caractère continu

On reprend le magasin de l'exemple du chapitre 1, on l'appelle le magasin A.

On rappelle les données :

Montant des achats (en €) x_i	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Effectif n_i	35	41	30	12	5	2
Effectif cumulé croissant	35	76	106	118	123	125
Fréquence f_i	0,28	0,32	0,24	0,10	0,04	0,02
Fréquence cumulée croissante	0,28	0,60	0,84	0,94	0,98	1

On a vu que la classe médiane est la classe [20 ; 40].

On considère un deuxième magasin, le magasin B, où on a enregistré le montant des achats de 194 clients.

❶ Compléter le tableau suivant pour le magasin B.

Montant des achats (en €) x_i	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Effectif n_i	29	43	47	38	27	10
Effectif cumulé croissant						
Fréquence f_i						
Fréquence cumulée croissante						

❷ Quelle est la classe médiane pour le magasin B ?

❸ Construire, sur un même graphique, les deux courbes des fréquences cumulées croissantes.

❹ En utilisant les points des deux courbes d'ordonnée 0,5, d'ordonnée 0,25 et d'ordonnée 0,75, comparer les deux séries statistiques.

B Cours

1. Quartiles, écart interquartile

On cherche ici à déterminer des nombres qui partagent la série statistique (dont les valeurs sont rangées par ordre croissant) en quatre groupes de même effectif environ.

On utilise la médiane et deux nombres appelés le premier et le troisième quartile.

Pour ne pas avoir à distinguer encore plus de cas que pour la médiane, on choisit les deux définitions suivantes.

Elles semblent d'abord un peu désagréables, mais la pratique permet de se familiariser avec leur utilisation. D'ailleurs l'essentiel est de retenir l'idée de base et de savoir déterminer ces quartiles avec une calculatrice ou un tableur.

Définition 1

- **Premier quartile Q_1** : c'est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des données soient inférieures à Q_1.
- **Troisième quartile Q_3** : c'est la plus petite des valeurs de la série telle qu'au moins 75% des données soient inférieures à Q_3.

Rappel

« inférieur » correspond à $\leq$

Dans certains cas, on peut trouver facilement ces deux valeurs. Et un moyen toujours efficace de les trouver est d'utiliser les fréquences cumulées croissantes. On verra plus loin comment utiliser une calculatrice ou un tableur.

▶ **Exemple 4** Dans l'activité 1 sur le nombre des trajets en autobus, on a obtenu :

Nombre de voyages en autobus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif cumulé croissant	3	6	11	18	24	33	38	42	47	50
Fréquence cumulée croissante en %	6%	12%	22%	36%	48%	66%	76%	84%	94%	100%

La médiane est égale à la demi-somme des vingt-cinquième et vingt-sixième terme, ces termes sont égaux à 6, la médiane est donc égale à 6.

La ligne des fréquences cumulées croissantes nous montre que le premier quartile est égal à 4 et le troisième quartile est égal à 7.

Remarque Et le deuxième quartile ?

Une définition analogue avec 50% donne le deuxième quartile.

On retrouve la médiane si l'effectif N de la série est impair.

Mais on ne retrouve pas la médiane si l'effectif N de la série est pair. En effet, si $N = 2n$, d'après la définition qui est choisie ici pour la médiane, la médiane est la demi-somme des termes de la série de rang n et de rang $n+1$. Si ces termes ont des valeurs différentes, le résultat n'est pas une valeur de la série contrairement au deuxième quartile.

Au lycée le choix a été fait d'utiliser la médiane, définie comme cela a été rappelé dans les pré-requis, et de ne pas utiliser le deuxième quartile.

Les premier et troisième quartiles permettent de mieux savoir comment est répartie la série statistique autour de la médiane.

On définit alors un nouveau nombre pour caractériser la dispersion de la série : l'écart interquartile.

Définition 2

- L'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ est appelé **l'intervalle interquartile** de la série statistique.
- Le nombre $Q_3 - Q_1$ est appelé **l'écart interquartile** de la série statistique.

▶ **Exemple 5** Dans l'activité 1, l'intervalle interquartile est l'intervalle [4 ; 7], l'écart interquartile est égal à 3.

La moitié des personnes interrogées ont donc fait un nombre de voyages compris entre 4 et 7.

La médiane est au « centre » de la série, les valeurs sont réparties de part et d'autre de la médiane.

La moitié de ces valeurs se trouvent dans l'intervalle interquartile : l'amplitude de cet intervalle (c'est-à-dire l'écart interquartile) indique la dispersion plus ou moins grande des valeurs autour de la médiane.

La **médiane** est un **indicateur de position**, **l'écart interquartile** est un **indicateur de dispersion**.

Résumé d'une série statistique.

On peut ainsi alors **résumer** une série statistique par le couple **(médiane ; écart interquartile).**

▶ **Exemple 6** Dans l'activité 1, on résume la série statistique en donnant sa médiane qui vaut 6 et l'écart interquartile qui vaut 3.

Commentaire Quand on résume une série statistique par le couple (médiane ; écart interquartile), la médiane et les quartiles ne dépendent pas des valeurs des termes extrêmes.

En effet, les valeurs des termes extrêmes peuvent changer un peu sans modifier la médiane et les quartiles.

Pour exprimer cela on dit que la **médiane** est un indicateur **« robuste ».**

Pour étudier l'évolution des salaires, on peut choisir de regarder comment progresse le salaire médian et le salaire correspondant au premier quartile, car ces renseignements ne sont pas dépendants des cas particuliers extrêmes.

De même, dans une classe, on peut observer l'évolution des résultats des élèves en regardant la progression de la médiane et du premier quartile des séries statistiques formées par les notes. On utilise ainsi des indicateurs qui ne sont pas influencés par les valeurs des notes les meilleures et les plus basses.

2. Déciles, écart inter-décile d'une série statistique

De façon analogue à ce qui précède, on peut chercher à déterminer des nombres qui partagent la série statistique (dont les valeurs sont rangées par ordre croissant) en dix groupes de même effectif environ.

Ces nombres sont appelés les déciles de la série statistique.

Nous utiliserons seulement le premier et le dernier.

Définition 3

- **Premier décile D_1** : c'est le plus petit élément des valeurs de la série tel qu'au moins 10% des données soient inférieures à D_1.
- **Neuvième décile D_9**: c'est le plus petit élément des valeurs de la série tel qu'au moins 90% des données soient inférieures à D_9.
- L'intervalle $[D_1 ; D_9]$ est appelé **l'intervalle inter-décile** de la série statistique.
- Le nombre $D_9 - D_1$ est appelé **l'écart inter-décile** de la série statistique.

▸ **Exemple 7** Dans l'activité 1, la ligne des fréquences cumulées croissantes nous permet de lire les déciles.

Nombre de voyages en autobus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence cumulée croissante en %	6	12	22	36	48	66	76	84	94	100

Le premier décile est égal à 2, le neuvième décile est égal à 9, l'intervalle inter-décile est l'intervalle [2 ; 9] et l'écart inter-décile est égal à 9 – 2, c'est-à-dire 7.

3. Diagrammes en boîte

Il est très utile de représenter graphiquement une série statistique.

Un seul coup d'œil permet de recueillir beaucoup d'informations, ce qui est en particulier très commode quand on compare des séries statistiques.

On a dit plus haut que l'on peut résumer une série statistique par le couple **(médiane ; écart interquartile).**

On visualise cela par un **diagramme en boîte,** appelé parfois « **boîte à moustaches** » ou « **boîte à pattes** ».

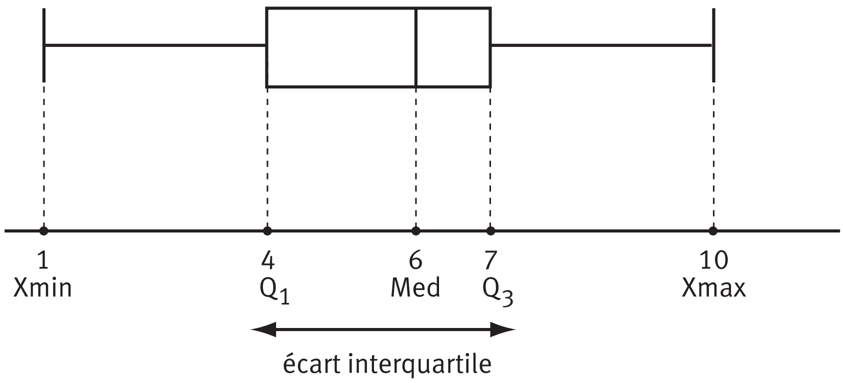
Les diagrammes suivants illustrent les constructions les plus fréquentes pour ce type de graphique.

Ils correspondent à l'exemple des trajets d'autobus de l'activité 1.

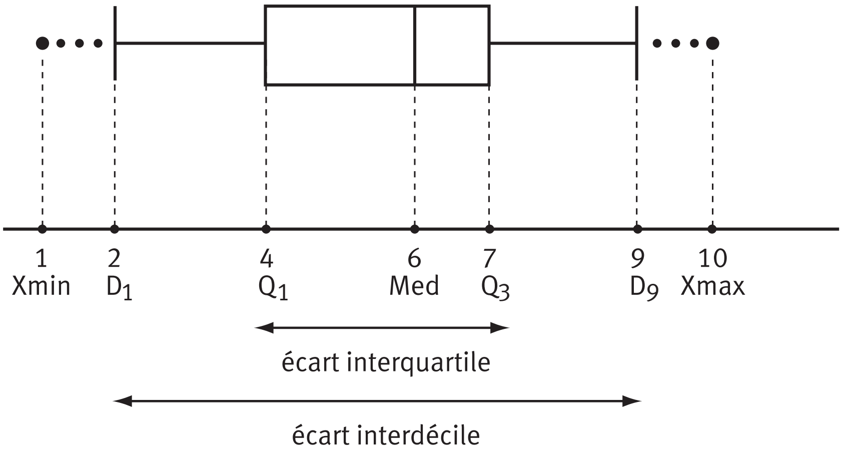
On utilise un axe gradué (ici, il est horizontal, il peut être vertical).

On dessine un rectangle (la boîte) limité par les quartiles, on indique la médiane.

À partir du rectangle, vers l'extérieur, on construit deux segments (les moustaches, les pattes) dont les autres extrémités correspondent aux valeurs extrêmes de la série.



On peut aussi indiquer le premier et le neuvième décile :



Remarque Sur ce deuxième graphique, on peut lire beaucoup d'informations : 7 paramètres de la série statistique sont lisibles ainsi que l'écart interquartile et l'écart interdécile.

4. Cas des séries à caractère continu

Pour ce type de série statistique il est délicat d'utiliser les notions de médiane et de quartiles car on n'a pas d'information sur la répartition des valeurs à l'intérieur de chaque classe.

a. En utilisant les fréquences cumulées croissantes

Les fréquences cumulées croissantes permettent de repérer dans quelle classe se situe la médiane, c'est-à-dire dans quelle classe on franchit la fréquence cumulée égale à 50%.

Définition 4

La première classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante dépasse 50% s'appelle la **classe médiane.**

▸ Exemple 8 Dans le cas du magasin A, on a vu que la médiane appartient à l'intervalle [20 ; 40], cet intervalle forme donc la classe médiane.

b. En utilisant la courbe des fréquences cumulées

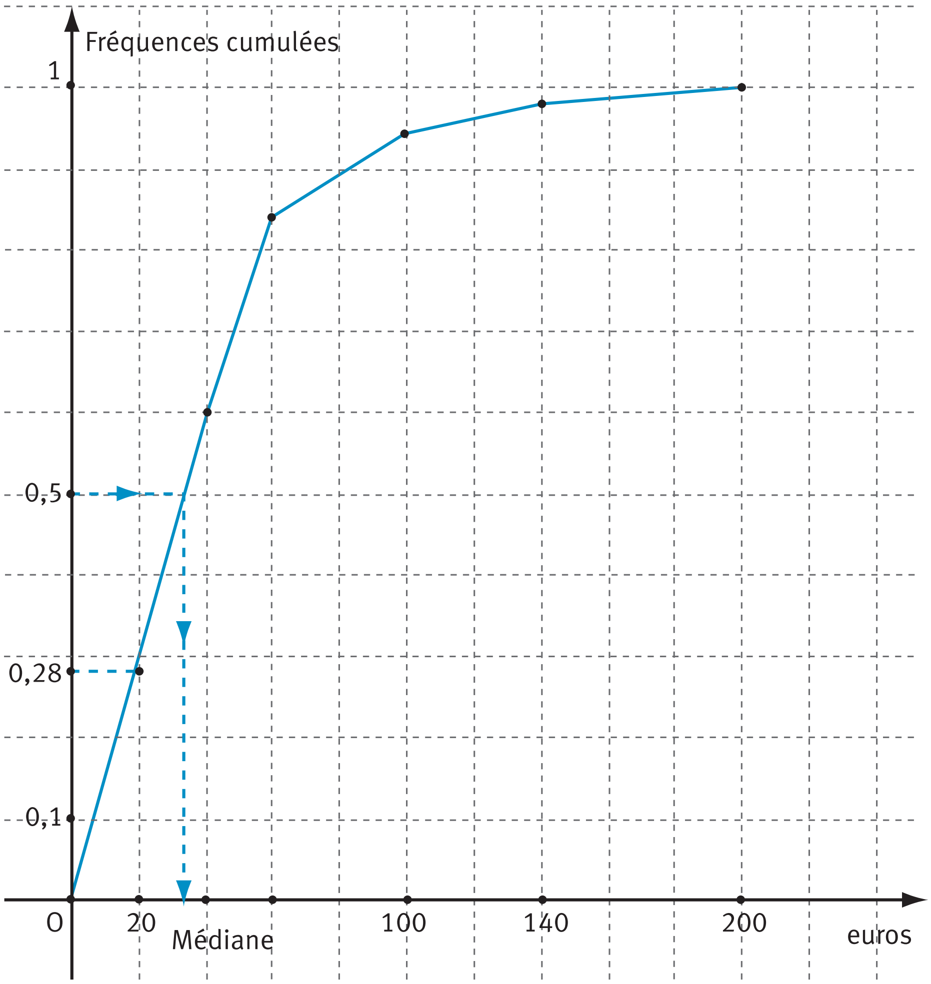
Dans les cas où on peut supposer que la répartition dans la classe médiane est régulière, homogène, on peut trouver graphiquement un nombre qui pourra être considéré comme une valeur approchée de la médiane.

Dans la courbe des fréquences cumulées, les fréquences cumulées sont lues sur l'axe des ordonnées.

On considère donc l'ordonnée 0,5, c'est-à-dire aussi 50%.

Puis on lit l'abscisse du point correspondant de la courbe, c'est cette abscisse qui fournit une valeur approchée de la médiane.

▶ **Exemple 9** Dans le cas du magasin A, on obtient ainsi :



On lit donc que la médiane vaut à peu près 32 €.

5. Avec une calculatrice ou un tableur

Les calculs faits dans le cours sont développés pour vous permettre de **comprendre** les notions.

Mais dans la pratique, y compris dans les exercices et les devoirs (sauf avis contraire), vous effectuerez ces calculs à l'aide de votre calculatrice ou d'un ordinateur.

On s'intéresse ici à la détermination de la médiane et des quartiles d'une série statistique.

Les définitions de ces trois paramètres ne sont pas définitivement fixées : en effet certains cours choisissent de toujours identifier la médiane et le deuxième quartile, d'autres, au contraire choisissent pour les quartiles des définitions analogues à celle que nous avons donnée ici pour la médiane (dans ce cas, les quartiles ne sont pas toujours des valeurs de la série statistique).

Les définitions que nous avons données sont les définitions précisées dans le programme officiel.

Mais il ne faut pas vous inquiéter si votre calculatrice ou le tableur que vous utilisez donnent des résultats différents. Les différences sont toujours minimes et les professeurs tiennent compte de ces différentes réponses possibles.

Ces paramètres servent à résumer la série statistique et une légère différence est peu gênante, surtout dans la pratique réelle des statistiques où les effectifs sont importants.

Dans un devoir, il est conseillé d'indiquer la calculatrice ou le tableur que vous avez utilisé, et les professeurs tiennent compte de ces différentes réponses possibles.

Remarques

1) La plupart des calculatrices et des tableurs sont programmés pour ordonner les données d'une série statistiques pour déterminer la médiane et les quartiles, il n'est donc pas nécessaire de rentrer les termes par ordre croissant.

2) On peut utiliser les calculatrices pour obtenir la médiane et les quartiles. Mais, si on a observé que les définitions utilisées par la calculatrice ne sont pas tout à fait les mêmes que celles du cours, on utilise la calculatrice seulement pour trier la liste des données par ordre croissant.
Avec une Casio, quand les listes sont affichées on appuie sur F6, puis F1 (Tool) et F1 (SRT.A).

Avec une TI, on utilise l'instruction SortA(qui se trouve dans $\boxed{\text{2}^{\text{nd}}}$ List OPS.

▶ Exemple 10

Les écrans correspondent à la série statistique de l'activité 1 :

Nombre de voyages en autobus : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3

a. Avec une calculatrice Casio 25+

Les procédures sont identiques ou très voisines pour les autres modèles de Casio.

Remarque

Si on connaît seulement les fréquences, la calculatrice ne pourra peut-être pas donner la médiane, les quartile et le diagramme en boîte.

Pour les obtenir, il suffit d'utiliser pour les effectifs les nombres obtenus en multipliant toutes les fréquences par le même nombre : 100 si toutes les fréquences ne comportent que deux chiffres après la virgules (0,15, c'est-à-dire aussi 15%, sera remplacé par 15) ou par 1000 si les fréquences comportent trois chiffres après la virgule (0,152 c'est-à-dire 15,2%, ou encore 152‰, sera remplacé par 152).

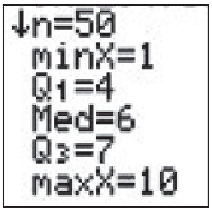
Saisie On saisit les données.

Dans le menu général, on sélectionne l'icône STAT (ou LIST). Sur l'écran apparaît alors l'éditeur de listes.

On saisit les valeurs x_i du caractère dans une liste, List 1 par exemple, et les effectifs correspondants dans une autre liste, List 2 par exemple.

Calculs En bas de l'éditeur de listes se trouve un menu déroulant horizontal.

On active le sous-menu CALC puis SET.



Sur la ligne **1Var Xlist** on indique List 1, et sur la ligne **1Var Freq** on indique List 2, pour indiquer les valeurs puis les effectifs.

Taper alors EXIT. Sélectionner enfin le menu 1VAR.

Des paramètres de la série statistique apparaissent à l'écran ;

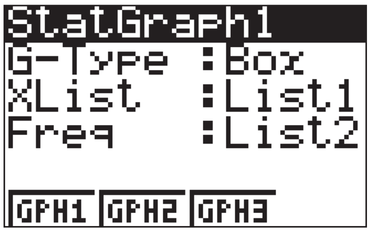
parmi eux, en utilisant la touche ↓, on trouve la médiane **Med**

et les quartiles $\mathbf{Q_1}$ et $\mathbf{Q_3}$.

Graphique On peut aussi faire apparaître un diagramme en boîte.

Dans l'éditeur de listes on active le sous-menu GRPH, puis le menu SET et GRPH1.

On indique alors sur la ligne **G-Type** le type de graphique qui est souhaité, en validant l'option MedBox du menu horizontal du bas de l'écran, puis on complète la ligne **XList** avec List 1, pour indiquer la liste des valeurs, et la ligne **Frequency** avec List 2, pour indiquer la liste des effectifs.



On valide l'écran.

On affiche alors le graphique en validant GRPH, puis GRPH1.

Pour visualiser l'axe horizontal et ses graduations il faut éventuellement adapter la fenêtre.

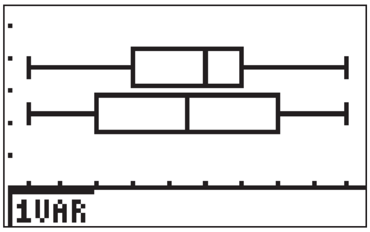
Remarque On peut afficher deux diagrammes en boîte simultanément.

Par exemple ici, on a rentré en List 3 les mêmes valeurs x_i qu'en List 1, puis on a mis partout l'effectif $n_i = 1$ en List 4.

Sur l'écran dont l'image est donnée ci-dessus, on active GRPH2, on choisit successivement MedBox List 3 et List 4 .

Après EXIT on choisit SEL qui permet de choisir les deux graphiques en sélectionnant ON pour GPH1 et pour GPH2.

Et en fin DRAW permet d'obtenir l'écran ci-contre.



b. Avec une TI 82Stats.fr

Les procédures sont identiques ou très voisines pour les autres modèles TI.

Remarque Si on connaît seulement les fréquences, il suffit de rentrer les fréquences à la place des effectifs et la calculatrice donne les résultats attendus.

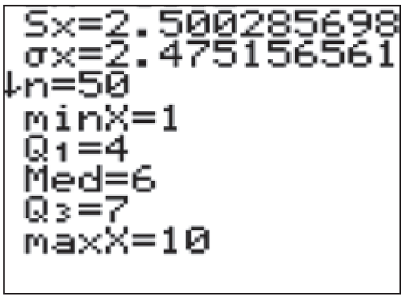
Saisie Il faut d'abord saisir les données

Appuyer sur la touche stats, puis choisir le menu EDIT, suivi de entrer.

On tape chaque valeur du caractère x_i dans une liste, par exemple L1, et chaque effectif ou fréquence n_i dans une autre liste, par exemple L2, et on termine par entrer.

Calculs Appuyer de nouveau sur la touche stats, puis choisir le menu CALC, suivi de entrer.

Sur l'écran apparaît alors l'indication **Stats 1-Var.**



Taper alors L1 , L2 pour indiquer, dans l'ordre, la liste des valeurs et celle des effectifs (attention : pour obtenir L1, il faut taper sur les touches 2nde, puis 1 et après la virgule on fait de même pour L2).

Appuyer sur entrer.

Des paramètres de la série statistique apparaissent à l'écran, parmi eux, en utilisant la touche ↓, on trouve la médiane **Med** et les quartiles **Q_1** et **Q_3**.

Graphiques On peut représenter une série statistique par un diagramme en boîte après avoir saisi les données.

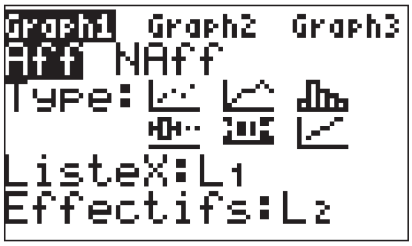
Appuyer sur la touche graph stats, (touche 2nde de la touche *f (x)*), puis sur entrer (ce qui sélectionne le dessin n°1 : **Graph1**).

On place le curseur sur **ON** ou (**Aff**) que l'on valide par entrer puis sur le type de graphique (ou) que l'on valide par entrer (remarque : il y a ici deux types de diagramme en boîte, on choisira plutôt le même que sur l'écran ci-après, au milieu de la deuxième ligne).

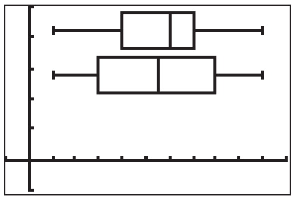
On renseigne alors la ligne **ListeX** avec L1 (touche 2nde puis 1), pour indiquer la liste des valeurs, et la ligne **Effectifs** avec L2 , pour indiquer la liste des effectifs.

On affiche alors le graphique en appuyant sur la touche graphe.

Pour visualiser l'axe horizontal et ses graduations il faut éventuellement adapter la fenêtre.



Remarque Il est possible d'afficher simultanément deux diagrammes en boîte en utilisant aussi **Graph2 :** on procède de la même manière que pour Graph1 en choisissant **On** (ou **Aff**) et en précisant les listes concernées.



Par exemple ici, on a rentré List 3 les mêmes valeurs x_i qu'en List 1, puis on a mis partout l'effectif $n_i = 1$ en List 4.

c. Avec un tableur

Pour déterminer la médiane et les quartiles, on utilise les fonctions statistiques présentes dans la plupart des tableurs lorsque **la série est donnée par une seule colonne**, c'est-à-dire **que tous les effectifs sont égaux à 1.**

Si tous les effectifs ne sont pas égaux à 1, il n'est pas possible d'utiliser directement les fonctionnalités d'un tableur pour déterminer la médiane et les quartiles.

= =QUARTILE(C3:C12;1)

C	D	E
Valeurs de la série	Médiane	Q1
12	18,5	16,25
15		
16		Q3
17		20,75
18		
19		
20		
21		
23		
24		

Voici l'exemple d'une série statistique où tous les effectifs sont égaux à 1.

On sélectionne la plage de cellule concernée.

Pour les quartiles, on doit préciser 1 ou 3 en respectant la syntaxe du logiciel.

Pour le premier quartile de cette série statistique de 10 termes, on devrait trouver le troisième terme, c'est-à-dire 16.

Ici $Q_1 = 16{,}25$. Il s'agit d'OpenOffice et on observe que ce quartile n'est pas une valeur de la série statistique, ce logiciel n'utilise pas la même définition que le cours.

On rappelle que c'est peu gênant dans la pratique réelle des statistiques où les effectifs sont importants.

d. Effet d'une transformation affine des données sur la médiane et l'écart interquartile

Pour comparer des séries statistiques, il est parfois nécessaire de changer d'unité, par exemple on transforme des mètres en centimètres en multipliant toutes les données par 100.

On peut aussi être amené à changer toutes les valeurs d'une série, par exemple un professeur peut décider, pour un devoir, d'ajouter un point à toutes les copies.

On étudie ici comment changent la médiane, les quartiles et l'écart interquartile quand les données sont transformées ainsi.

Si a est un nombre positif, comme dans un changement d'unité, si on applique à toutes les données la transformation affine $x \to ax+b$, alors toutes les valeurs de la série statistiques sont transformées par une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre est conservé. Donc les images sont rangées dans le même ordre que les valeurs de départ, la nouvelle médiane et les nouveaux quartiles sont les transformés des paramètres de la série initiale.

L'écart interquartile est multiplié par a car :

$\mathrm{Q'}_3 - \mathrm{Q'}_1 = (a\mathrm{Q}_3 + b) - (a\mathrm{Q}_1 + b) = a(\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1).$

Propriété 1

Soit une série statistique, sa médiane étant notée m_e et l'écart interquartile étant noté E. Si on applique à toutes les données la transformation affine $x \to ax+b$ où **a est un nombre positif**, les paramètres de la nouvelle série sont :

$m'_e = am_e + b,\ \mathrm{Q'}_1 = a\mathrm{Q}_1 + b,\ \mathrm{Q'}_3 = a\mathrm{Q}_3 + b,\ E' = aE.$

▶ **Exemple 11**

Une station météo située en Grande-Bretagne a enregistré les températures maximales tous les jours du mois d'août 2010.

On obtient les renseignements suivants (tm désigne la plus petite valeur et tM désigne la plus grande) :

tm	D_1	Q_1	me	Q_3	D_9	tM
59	64	68	71	73	77	79

Mais il s'agit de degrés Fahrenheit !

On demande de donner ces résultats en degrés Celsius.

Indication : si x_F est la mesure d'une température en degrés Fahrenheit et y_C la mesure de la même température en degrés Celsius on a la relation :

$$y_C = \frac{5}{9}(x_F - 32) = \frac{5}{9}x_F - \frac{160}{9}.$$

Donner le tableau des résultats en degrés Celsius (on donnera des valeurs arrondies à 0,1 près).

Réponse

t'm	D'_1	Q'_1	m'e	Q'_3	D'_9	t'M
15	17,8	20	21,7	22,8	25	26,2

Remarque Si on note les écarts interquartiles E et E', on a $E' = \frac{5}{9}E$.

L'écart interquartile valait $E = Q_3 - Q_1 = 5$, d'où $E' = \frac{5}{9} \times 5$ qui a pour valeur approchée 2,8 ce qu'on obtient aussi par le tableau ci-dessus.

C Exercices d'apprentissage

Pour ces exercices, il est vivement conseillé d'utiliser une calculatrice ou un tableur.

Exercice 1

Une pharmacie de garde a enregistré le nombre d'appels reçus pendant 1000 nuits entre 20h et 6h du matin. Les résultats sont les suivants :

Nombre d'appels x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de nuits n_i	14	70	155	185	205	150	115	65	30	5	1	5

Déterminer la médiane et les quartiles de cette série, puis faire un diagramme en boîte.

Exercice 2

Deux sauteurs à la perche ont relevé leurs performances lors de leurs 25 derniers sauts.

1er sauteur

Hauteur	4,70	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,20
Nombre de sauts	1	1	1	3	12	4	1	1	1

2^{e} sauteur

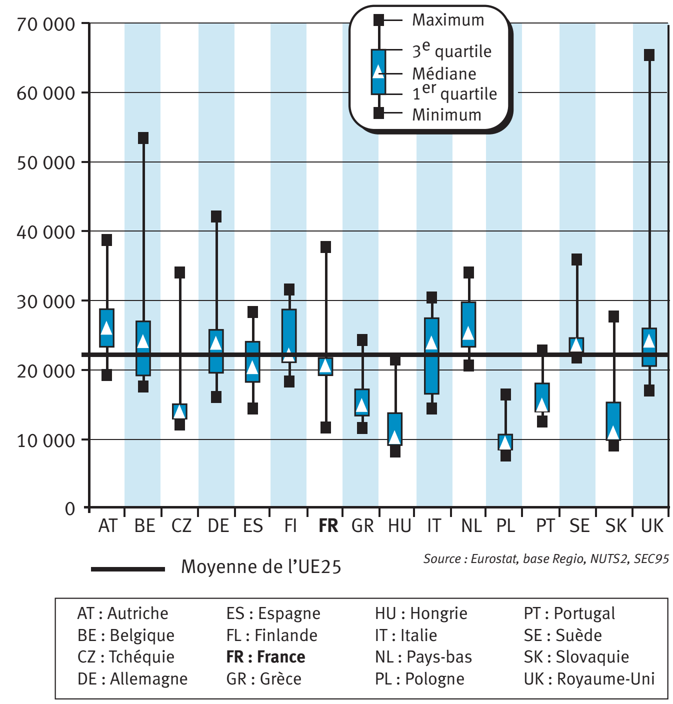
Hauteur	4,60	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
Nombre de sauts	3	2	2	3	2	2	1	3	2	1	1	3

Déterminer la médiane et les quartiles de chacune de ces deux séries.

Construire les deux diagrammes en boîte et comparer l'ensemble des performances des deux sportifs.

Exercice 3

Dans le numéro 97-98 de la revue Economie Lorraine on trouve le graphique ci-dessous, construit à partir de données Eurostat de la Communauté européenne pour l'année 2004.



Ce graphique concerne le PIB (Produit Intérieur Brut) par habitant en SPA (standards de pouvoir d'achat, c'est-à-dire une référence commune qui élimine les différences de prix entre les pays, permettant des comparaisons significatives).

Pour chaque pays on a représenté un diagramme en boîte construit à partir des régions (par exemple le diagramme de la France est construit à partir des PIB moyens des 26 régions).

❶ Dans quel pays se trouve la région ayant le PIB par habitant le plus élevé ? Le moins élevé ?

❷ Dans quel pays l'écart interquartile est-il le plus grand ? Le plus petit ?

❸ Donner deux propriétés particulières au diagramme de la France.

❹ Quelle est la propriété commune des diagrammes de la Belgique, de l'Allemagne, de l'Italie et de la Suède ?

Exercice 4

D'après l'INSEE, les revenus annuels (en milliers d'euros) des salariés en 2007 se répartissent suivant le tableau ci-dessous qui donne les valeurs des déciles des deux séries :

Déciles	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
Femmes	1,8	5	8,7	12	14,5	16,6	19,1	22,6	28,9
Hommes	2,8	8,2	13,2	15,6	17,7	20	23,1	27,8	37,2

❶ Les déciles permettent de déterminer des classes. Pour les femmes, donner le tableau indiquant ces classes et les fréquences correspondantes.

❷ Représenter dans un même repère les courbes des fréquences cumulées croissantes (on prendra, pour les deux séries, 1 pour valeur minimale et 45 pour valeur maximale).

Quelle courbe est « à gauche de l'autre », « au dessus de l'autre » ? Quelle signification cela a-t-il ?

❸ Déterminer graphiquement des valeurs approchées des quartiles des deux séries, et construire les diagrammes en boîte des deux séries.

3 Moyenne, écart-type

A Activités

1. Activité 1

Pendant la semaine du 13 au 17 septembre 2010, on a relevé les températures minimales et les températures maximales à Brest (d'après les données de Météo-France).

Date	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
Température minimale en °C	8,8	12,2	13,5	12,7	8,5	7,7	5,2
Température maximale en °C	19,5	19,9	18,6	17,8	18	17,3	18,1

Les températures maximales semblent plus « régulières » que les températures minimales.

Le but de cette activité est d'introduire une nouvelle caractéristique d'une série statistique pour mesurer sa dispersion autour de la moyenne. On pourra alors comparer la « régularité » de deux séries.

Dans les quatre premières questions, on considère seulement les températures minimales.

❶ Calculer la température minimale moyenne $\overline{x}$.

❷ Dans le tableau suivant on indique les différences avec la moyenne (on dit aussi l'« écart à la moyenne »).

Température minimale en °C : x_i	8,8	12,2	13,5	12,7	8,5	7,7	5,2
Ecart : $x_i - \overline{x}$							

Qu'observe-t-on quand on calcule la moyenne de ces différences ?

❸ Ce qui précède amène à ne considérer que des quantités positives.

Pour cela, on peut utiliser les valeurs absolues ou les carrés. Les carrés, moins naturels, ont cependant été choisis car les propriétés mathématiques sont ensuite beaucoup plus intéressantes.

Température minimale en °C : x_i	8,8	12,2	13,5	12,7	8,5	7,7	5,2
Ecart : $x_i - \overline{x}$							
Carré de l'écart à la moyenne : $(x_i - \overline{x})^2$							

Compléter ce tableau, puis calculer la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $\bar{x}$.

Le nombre obtenu s'appelle **la variance** de la série statistique, on le note V.

❹ Pour compenser l'utilisation des carrés et se ramener à une quantité représentant une grandeur de même nature que les termes de la série statistique, on calcule maintenant la racine carrée de la variance V.

Ce nouveau nombre s'appelle **l'écart-type** de la série statistique, on le note s.

Calculer l'écart-type s de la série statistique des températures minimales.

❺ Calculer la variance V' et l'écart-type s' de la série statistique des températures maximales.

Comparer les deux écarts-types s et s'.

2. Activité 2

On reprend l'exemple du nombre des voyages en autobus.

Nombre de voyages en autobus : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif : n_i	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3
Carré de l'écart à la moyenne : $(x_i - \bar{x})^2$										

Déterminer la moyenne $\bar{x}$, puis compléter la dernière ligne du tableau.

Calculer ensuite l'écart-type ; attention : ici, les effectifs ne sont pas tous égaux à 1 comme dans l'activité précédente.

3. Activité 3

Avec une série à caractère continu : on reprend l'exemple du magasin A (chapitre 1, exemple 2).

Montant des achats (en €)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Effectif : n_i	35	41	30	12	5	2
Carré de l'écart à la moyenne						

En utilisant les centres des classes, déterminer la moyenne puis compléter le tableau.

Déterminer ensuite l'écart-type de cette série statistique.

B Cours

1. La moyenne et ses propriétés

a. Rappel de la définition

Supposons donnée une série statistique à caractère quantitatif discret.

On note N l'effectif total, x_i les valeurs du caractère et n_i les effectifs correspondants.

Si on considère une série statistique à caractère quantitatif continu, on appliquera alors tout ce qui est défini pour une série discrète en utilisant le centre de chaque classe et l'effectif correspondant.

Définition 5

La moyenne $\overline{x}$ de la série est le nombre défini par :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}}{\boldsymbol{N}}.$$

On peut aussi écrire $\overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\boldsymbol{n_i x_i}}{\boldsymbol{N}} = \sum_{i=1}^{i=p} \boldsymbol{f_i x_i}.$

Remarque La somme $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p$ est égale à la somme de toutes les valeurs de la série (puisque x_1 est compté n_1 fois, etc.).

Et, en multipliant par N, on obtient une égalité qui est très importante dans le paragraphe suivant.

À savoir

$\boldsymbol{N\,\overline{x} = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}.$

Cette égalité signifie que **la moyenne multipliée par l'effectif** est égale **à la somme des valeurs de la série.**

b. Calcul de la moyenne d'une série à partir des moyennes de deux sous-groupes

La remarque précédente permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Si une population d'effectif total N est partagée en deux sous-groupes, l'un d'effectif P pour lequel la moyenne est $\overline{x'}$, et l'autre d'effectif Q pour lequel la moyenne est $\overline{x''}$, la moyenne $\overline{x}$ de la population entière est donnée par l'égalité :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{P\overline{x'}+Q\overline{x''}}}{\boldsymbol{P+Q}}.$$

Démonstration La moyenne $\overline{x}$ de la série est égale au quotient :

$\dfrac{\textit{somme de toutes les valeurs de la série}}{\textit{effectif total}}.$

Pour le premier sous-groupe la somme des valeurs vaut $P\overline{x'}$, pour le second elle vaut $Q\overline{x''}$, donc pour la série entière la somme de toutes les valeurs est égale à $P\overline{x'}+Q\overline{x''}$.

Et l'effectif total est égal bien sûr à $P+Q$, on obtient ainsi le résultat annoncé.

Remarque On peut exprimer cette égalité en utilisant les fréquences : $\overline{x} = f'\overline{x'}+f''\overline{x''}$.

En effet, N étant l'effectif total, on a $P+Q=N$, la fréquence du premier groupe est $f'=\dfrac{P}{P+Q}$ et la fréquence du second groupe est $f''=\dfrac{Q}{P+Q}$.

On a donc : $\overline{x}=\dfrac{P\overline{x'}+Q\overline{x''}}{P+Q}=\dfrac{P}{P+Q}\overline{x'}+\dfrac{Q}{P+Q}\overline{x''}=f'\overline{x'}+f''\overline{x''}.$

▶ **Exemple 12** Une entreprise est installée sur deux sites.

Sur le premier site, la moyenne des salaires est égale à 1600 € et 35 personnes y travaillent.

Sur le second site, la moyenne des salaires est égale à 1900 € et 21 personnes y travaillent.

Le théorème précédent permet de calculer la moyenne des salaires sur l'ensemble des deux sites.

Les données sont donc : $P=35$, $\overline{x'}=1600$, $Q=21$, $\overline{x''}=1900$.

La moyenne $\overline{x}$ de la série est donnée par :

$$\overline{x}=\frac{35\times 1600+21\times 1900}{35+21}=1712{,}5.$$

La moyenne des salaires dans cette entreprise est donc égale à 1712,5 €.

c. Effet de structure

▶ **Exemple 13** On appelle A l'entreprise de l'exemple précédent.

Supposons qu'une seconde entreprise B soit aussi sur deux sites.

Dans le premier, la moyenne des salaires est 1650 € et, dans le deuxième, la moyenne est 1950 €.

On est tenté de penser que la moyenne $\overline{y}$ des salaires dans l'entreprise B est supérieure à la moyenne des salaires dans l'entreprise A.

Pour le vérifier, il est nécessaire de compléter les données concernant l'entreprise B : le salaire moyen est 1650 € pour un effectif de 50 personnes, et le salaire moyen est 1950 € pour un effectif de 10 personnes.

On a alors : $\overline{y} = \dfrac{50 \times 1650 + 10 \times 1950}{50 + 10} = 1700.$

Le salaire moyen est donc 1700 € dans l'entreprise B, il est inférieur à celui de l'entreprise A !

Ce paradoxe s'explique par la comparaison des effectifs : dans l'entreprise B, les effectifs des groupes sont 50 et 10 (le premier groupe est donc cinq fois plus nombreux que le second), alors que dans l'entreprise A les effectifs des groupes sont 35 et 21 (l'effectif du premier groupe est inférieur au double du second).

Les effectifs ne sont pas répartis de la même façon dans les deux entreprises.

Définition 6

Dans l'expression $\overline{x} = \dfrac{P\overline{x'} + Q\overline{x''}}{P+Q} = f'\overline{x'} + f''\overline{x''}$, il est possible que $\overline{x}$ diminue alors que $\overline{x'}$ et $\overline{x''}$ augmentent car la valeur du quotient dépend aussi des changements des valeurs des effectifs P et Q (et donc des fréquences) : ce résultat paradoxal s'appelle un **effet de structure**.

2. Ecart-type

On donne ici un indicateur numérique mesurant la dispersion d'une série statistique autour de sa moyenne. On généralise ce qui a été fait dans les activités.

Définition 7

La variance de la série statistique est définie par :

$$\boldsymbol{V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i(x_i-\overline{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i(x_i-\overline{x})^2}.$$

L'écart type $\boldsymbol{s}$ de la série est défini par : $\boldsymbol{s = \sqrt{V}}$.

Commentaire La variance est égale à : la moyenne des carrés des écarts à la moyenne de la série.

L'écart-type est donc égal à : **la racine carrée … de la moyenne … des carrés … des écarts à la moyenne de la série.**

Propriété 2

La **variance** et l'**écart-type** sont nécessairement des **nombres positifs.**

Remarque On a utilisé des carrés, puis pour « compenser » on a pris la racine carrée du résultat. On obtient l'**écart-type** qui est un donc un paramètre représentant bien une même grandeur (euros, centimètres…) que les valeurs du caractère.

S'il donne une bonne indication sur la dispersion de la série, il n'est malheureusement pas interprétable ou représentable aussi facilement que les quartiles et l'écart interquartile.

Dans la suite du cours de statistiques-probabilité vous constaterez que l'écart-type est un indicateur très utilisé car il possède de très nombreuses propriétés mathématiques au delà des statistiques descriptives.

(Les quartiles et l'écart interquartile sont eux plus faciles à comprendre mais on ne les utilisera qu'en statistique descriptive.)

Résumé d'une série statistique

On peut ainsi alors **résumer** une série statistique par le couple **(moyenne ; écart-type).**

▶ **Exemple 14** Dans l'exemple de l'activité 1, la série des températures minimales à Brest a pour moyenne 9,8°C et pour écart-type environ 2,8°C.

Remarque Par sa définition, l'écart-type n'est pas simple à calculer.

Dans la pratique, vous utiliserez une calculatrice ou un tableur (des explications sont données plus loin).

On dispose, pour calculer la variance, d'une formule plus simple que celle de la définition, mais dans laquelle on ne voit plus la signification de la variance.

Elle est donnée ci-dessous : on remarque que la moyenne $\overline{x}$ n'apparaît plus qu'une seule fois ce qui diminue les approximations.

Théorème 2

$$V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2 \text{ et } s = \sqrt{V}.$$

La démonstration de cette nouvelle égalité est proposée dans un exercice d'approfondissement.

Remarque Cette égalité permet de dire que :

la variance est égale à … la moyenne … des carrés … moins … le carré … de la moyenne.

3. Détermination de la moyenne et de l’écart-type d’une série avec une calculatrice ou un tableur

a. Calculer la moyenne et l’écart-type d’une série statistique à l’aide d’une calculatrice Casio Graph 25 ou d’une TI-82 Stats.fr.

La liste des paramètres de la série statistique est obtenue comme on l’a vu dans le chapitre sur la médiane et l’écart interquartile.

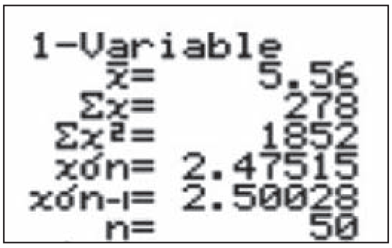
Si on connaît seulement les fréquences, il suffit de les indiquer à la place des effectifs. La moyenne $\overline{x}$ est facile à lire. Il faut faire plus attention pour bien lire l’écart-type.

En effet, les mêmes tableaux sont utilisés ailleurs en statistique et un autre paramètre (que nous n’utiliserons pas) apparaît et il risque d’être confondu avec l’écart-type qui nous intéresse ici.

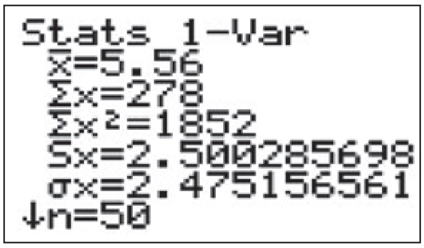
Il y a deux valeurs très proches qui sont nommées $x\sigma n$ et $x\sigma n-1$ ou encore σx et Sx (ou sx sur d’autres modèles de calculatrice).

L’écart-type est la plus petite de ces deux valeurs, $\boldsymbol{x\sigma n}$ pour la calculatrice Casio utilisée ici, $\boldsymbol{\sigma x}$ pour la calculatrice TI.

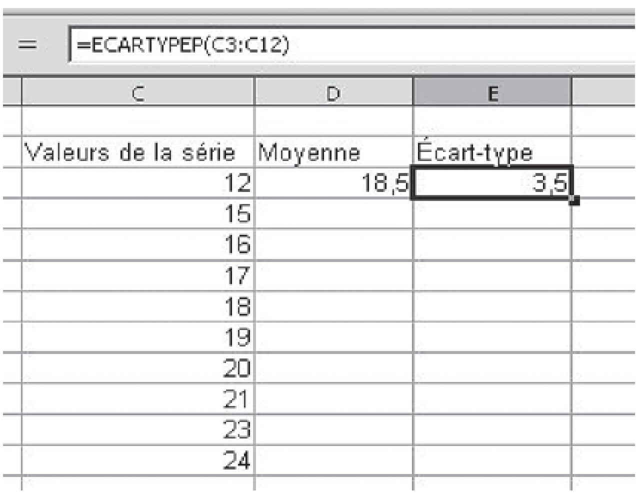
Casio :



TI :



b. Calculer la moyenne et l’écart-type d’une série statistique à l’aide d’un tableur



C	D	E
Valeurs de la série	Moyenne	Écart-type
12	18,5	3,5
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
23		
24		

▸ **Premier cas**

Lorsque toutes les valeurs de la série sont énumérées dans une colonne, c’est-à-dire lorsque **tous les effectifs sont égaux à 1**, on utilise les fonctions statistiques présentes dans la plupart des tableurs.

Comme pour les calculatrices, il faut faire attention : l’écart-type dont nous avons besoins est celui d’une population (et non pas d’un échantillon).

Ici, avec OpenOffice, on choisira ECARTTYPEP.

▸ Deuxième cas

Les effectifs ne sont pas tous égaux à 1, les valeurs sont présentées avec leur effectif (ou fréquence) dans deux colonnes, il faut faire les calculs intermédiaires avec le tableur.

Moyenne	Ecart-type
On calcule dans la colonne C les produits des valeurs (colonne A) par leur effectif (colonne B) en écrivant dans la cellule C2 : =A2*B2 , et en « étirant » la formule vers le bas jusqu'à la dernière valeur. Dans deux cellules libres (par exemple B13 et C13), on calcule les sommes des colonnes B et C (effectif total et somme de toutes les valeurs) en écrivant : =SOMME(B2:B11) et =SOMME(C2:C11). La moyenne s'obtient alors en divisant la somme des valeurs par l'effectif total, en écrivant dans une cellule libre (par exemple C15) : =C13/B13.	On calcule les produits $n_i(x_i - \overline{x})^2$ dans la colonne D en écrivant dans la cellule D2 : =B2*(A2-C15)^2, et en « étirant » la formule vers le bas jusqu'à la dernière valeur. Le symbole $ sert à « figer » la valeur « 15 » car la cellule C15 est celle qui contient la moyenne. Dans une cellule libre (par exemple D13), on calcule la somme de la colonne D en écrivant : =SOMME(D2:D11). Dans une cellule libre (par exemple D15), la variance s'obtient alors en écrivant =D13/B13. L'écart type s'obtient alors en écrivant dans une cellule libre (D17) : =RACINE(D15). Deuxième méthode : pour limiter le nombre d'approximations dues à la moyenne, on peut utiliser l'égalité $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \overline{x}^2$ (cellule G15).

G15 f_x =G13/B13-PUISSANCE(C15;2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	n_i	n_ix_i	$n_i(x_i\text{-moy})^2$		deuxième	$n_ix_i^2$	
2	1	3	3	62,3808		méthode pou	3	
3	2	3	6	38,0208		l'écart-type :	12	
4	3	5	15	32,768			45	
5	4	7	28	17,0352			112	
6	5	6	30	1,8816			150	
7	6	9	54	1,7424			324	
8	7	5	35	10,368			245	
9	8	4	32	23,8144			256	
10	9	5	45	59,168			405	
11	10	3	30	59,1408			300	
12		N =	somme(n_ix_i)	somme($n_i(x_i\text{-moy})^2$)			somme($n_ix_i^2$)	
13		50	278	306,32			1852	
14			moyenne =	variance = [somme($n_i(x_i\text{-moy})^2$)]/N =			variance = [somme($n_ix_i^2$)]/N-moy^2 =	
15			5,56	6,1264			6,1264	
16				écart-type = racine(variance) =			écart-type = racine(variance) =	
17				2,475156561			2,475156561	
18								

c. Effet d'une transformation affine des données sur la moyenne et l'écart-type

Propriété 3

Soit une série statistique, de moyenne $\overline{x}$ et d'écart-type s.

Si on applique à toutes les données la transformation affine $x \to ax+b$, les paramètres $\overline{x'}$ et s' de la nouvelle série sont : $\overline{x'} = a\overline{x}+b$ et $s' = |a|s$.

Démonstration Les effectifs n'ont pas changé on a donc :

$$\overline{x'} = \frac{n_1(\boldsymbol{a}x_1+\boldsymbol{b})+n_2(\boldsymbol{a}x_2+\boldsymbol{b})+\ldots+n_p(\boldsymbol{a}x_p+\boldsymbol{b})}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$$

$$\overline{x'} = \frac{\boldsymbol{a}(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p)+(n_1\boldsymbol{b}+n_2\boldsymbol{b}+\ldots+n_p\boldsymbol{b})}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$$

$$\overline{x'} = \boldsymbol{a}\frac{(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p)}{n_1+n_2+\ldots+n_p}+\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_p)}{n_1+n_2+\ldots+n_p}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\overline{x}+\boldsymbol{b}.$$

On a bien obtenu la valeur annoncée.

Et pour l'écart-type, calculons d'abord la nouvelle variance V' :

$$V' = \frac{n_1(ax_1+b-(a\overline{x}+b))^2+n_2(ax_2+b-(a\overline{x}+b))^2+\ldots+n_p(ax_p+b-(a\overline{x}+b))^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$$

$$V' = \frac{n_1a^2(x_1-\overline{x})^2+n_2a^2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_pa^2(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$$

$$V' = a^2\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$$

$V' = a^2V$ et donc finalement $s' = \sqrt{a^2V} = |a|s$, ce qu'on souhaitait prouver.

▶ **Exemple 15** Reprenons l'exemple du chapitre 2 des températures d'une station météo située en Grande-Bretagne.

La série des températures maximales relevées tous les jours du mois d'août a pour moyenne $\overline{x} = 72\,°F$ et pour écart-type $s = 7{,}5°F$.

Quelle est la moyenne $\overline{x'}$ de la série statistique des températures maximales exprimées en degrés Celsius ? Quel est son écart-type s' ?

On rappelle que si x_F est la mesure d'une température en degrés Fahrenheit et y_C la mesure de la même température en degrés Celsius on a la relation :
$y_C = \frac{5}{9}(x_F - 32) = \frac{5}{9}x_F - \frac{160}{9}$.

Réponse En appliquant les égalités de la propriété on obtient :

$$\overline{x}' = \frac{5}{9}(72 - 32) = \frac{200}{9} \approx 22{,}2^\circ C \quad \text{et} \quad s' = \frac{5}{9} \times 7{,}5 \approx 4{,}2^\circ F.$$

C Exercices d'apprentissage

Exercice 5

Un élève a 12 de moyenne aux quatre premiers devoirs de l'année.

1. Si le cinquième devoir est noté 15, quelle sera sa nouvelle moyenne ?

2. Quelle est la note minimale du cinquième devoir pour que la moyenne aux cinq devoirs soit au minimum égale à 13 ?

Exercice 6

Dans une chaîne de magasins de vêtements, 60 % de ses magasins sont destinés aux hommes et 40 % sont destinés aux femmes.

Le chiffre d'affaires moyen des magasins pour homme est de 1,1 million d'euros, celui des magasins pour femme de 1,4 million d'euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires moyen par magasin dans cette chaîne.

2. Le chiffre d'affaires de chaque magasin augmente de 5 %.
Quel est le nouveau chiffre d'affaires moyen par magasin de cette chaîne ?

3. Le chiffre d'affaires de chaque magasin pour homme augmente de 5 % et celui de chaque magasin pour femme de 7 %.
a) Sans faire de calcul, dire si le chiffre d'affaires moyen augmente de 6 %, de plus de 6 % ou de moins de 6 %.
b) Calculer le nouveau chiffre d'affaires moyen par magasin de cette chaîne. Quel est le pourcentage d'augmentation de ce chiffre d'affaires moyen ?

Exercice 7

1. Une salle de spectacle a vendu pour une soirée 150 places à 12 € et 100 places à 10 €, quel est le prix moyen d'une place ?

2. Donner un exemple montrant un effet de structure. Pour cela on suppose que, pour une autre soirée, les deux prix augmentent de 1 € : les places seront donc vendues 13€ et 11 €. Chercher deux nombres entiers a et b non nuls tels que, si a places à 13 € ont été vendues ainsi que b places à 11 €, alors le prix moyen d'une place pour le second spectacle est inférieur au prix moyen d'une place pour le premier spectacle.

Exercice 8

On reprend la situation de l'exercice 2 du chapitre 3.

Deux sauteurs à la perche ont relevé leurs performances au cours des derniers mois.

1^{er} sauteur

Hauteur	4,70	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,20
Nombre de sauts	1	1	1	3	12	4	1	1	1

2^{e} sauteur

Hauteur	4,60	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
Nombre de sauts	3	2	2	3	2	2	1	3	2	1	1	3

1. Déterminer maintenant la moyenne et l'écart-type de chaque série.
2. Comparer l'ensemble des performances des deux sportifs en utilisant ces deux indicateurs.

Exercice 9

On reprend les données de l'exercice 1 du chapitre 2.

Une pharmacie de garde a enregistré le nombre d'appels reçus pendant 1000 nuits entre 20h et 6h du matin. Les résultats sont les suivants :

Nombre d'appels x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de nuits n_i	14	70	155	185	205	150	115	65	30	5	1	5

1. Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.
2. Déterminer le nombre de nuits pour lesquelles le nombre d'appels appartient à l'intervalle $[\bar{x}-s\,;\bar{x}+s]$; quelle est la fréquence correspondante ?
3. Même question avec l'intervalle $[\bar{x}-2s\,;\bar{x}+2s]$.

4 Synthèse de la partie 1 de la séquence

On peut résumer une série statistique en déterminant **une mesure de tendance centrale** et **la caractéristique de dispersion associée.**

Deux possibilités ont été étudiées : la médiane avec l'écart interquartile et la moyenne avec l'écart-type.

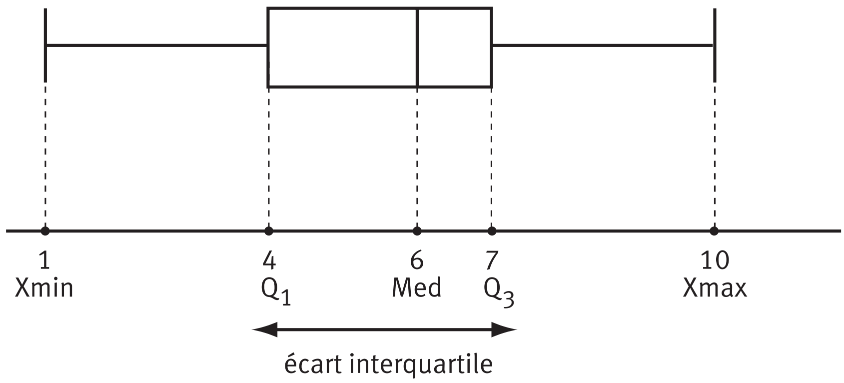
❶ La médiane et les quartiles partagent la série statistique en quatre groupes de même effectif environ.

Ces paramètres sont assez simples à expliquer à des non-statisticiens.

Ils ne changent pas si les valeurs extrêmes sont un peu modifiées, on dit qu'ils sont « robustes ».

La médiane, les quartiles, l'écart interquartile permettent ainsi de décrire assez simplement une série statistique.

La représentation graphique par un diagramme en boîte donne immédiatement sur une image 5 (ou 7) paramètres, ce qui favorise les comparaisons.



❷ On peut aussi résumer une série statistique par **sa moyenne et son écart-type.**

Pour une série statistique, la moyenne $\overline{x}$ est définie par l'égalité

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{N}, \text{ et l'écart-type } s \text{ est défini par } s = \sqrt{V}$$

avec $V = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N}$,

ou encore $V = \dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$

Ces deux paramètres sont moins simples que les précédents, mais ils sont très utiles.

- Si on connaît les effectifs P et Q et les moyennes partielles de deux sous-groupes de la série, on peut en déduire la moyenne de la série entière car $\overline{x} = \dfrac{P\overline{x'} + Q\overline{x''}}{P+Q}$.
- La relation précédente permet d'expliquer les étonnants effets de structure.
- La moyenne et l'écart-type ont des propriétés mathématiques très riches, ce qui les rend indispensables dans l'étude ultérieure des statistiques.

❸ Une transformation affine des données ($x \to ax+b$) a le même effet sur les deux mesures de tendance centrale : la médiane et la moyenne sont transformées comme tous les termes de la série.

Les deux mesures de dispersion, l'écart interquartile et l'écart-type, changent aussi toutes les deux de la même façon, les deux nouveaux écarts sont obtenus en multipliant les écarts initiaux par $|a|$.

❹ Dans la pratique, **il est indispensable de savoir déterminer la médiane, les quartiles, la moyenne et l'écart-type d'une série statistique avec une calculatrice ou avec un tableur.**

5 Exercices d'approfondissement

Pour ces exercices, il est vivement conseillé d'utiliser une calculatrice ou un tableur.

Exercice I

❶ Voici la liste des notes obtenues par une classe au premier trimestre.

10 – 15 – 18 – 5 – 11 – 6 – 9 – 12 – 12 – 17 – 4 – 7 – 10 – 8 - 9 –14 – 16 – 7 – 11 –15 – 11 – 10.

Déterminer la médiane, les quartiles, puis la moyenne et l'écart-type.

❷ Même question pour le second trimestre pour lequel les notes sont :

11 – 14 – 15 – 5 – 11 – 9 – 10 – 13 – 12 – 15 – 5 – 8 – 10 – 8 – 9 – 13 – 14 – 8 –13 – 13 –10 –11.

❸ En utilisant les paramètres de position et les paramètres de dispersion qui ont été déterminés, comparer les deux séries statistiques.

Exercice II

Le tableau ci-dessous donne, pour l'année 2008, le nombre de médecins généralistes et le nombre de médecins spécialistes pour 100 000 habitants (données de l'INSEE).

Région	Nombre de médecins généralistes pour 100 000 hab.	Nombre de médecins spécialistes pour 100 000 hab.	Région	Nombre de médecins généralistes pour 100 000 hab.	Nombre de médecins spécialistes pour 100 000 hab.
Alsace	169	184	Midi-Pyrénées	173	179
Aquitaine	171	178	Nord-Pas-de-Calais	165	138
Auvergne	159	138	Basse-Normandie	143	138
Bourgogne	152	134	Haute-Normandie	141	132
Bretagne	157	179	Pays de la Loire	142	136
Centre	135	131	Picardie	140	116
Champagne-Ardennes	152	131	Poitou-Charentes	159	133
Corse	165	153	Provence-Alpes-Côte d'Azur	188	218
Franche-Comté	158	137	Rhône-Alpes	161	172
Ile-de France	175	230	Guadeloupe	139	114
Languedoc-Roussillon	176	185	Guyane	99	71
Limousin	177	159	Martinique	138	121
Lorraine	154	151	La Réunion	149	123

Comparer ces deux séries en déterminant pour chacune la moyenne et l'écart-type, puis en faisant les deux diagrammes en boîte.

Exercice III

Voici un tableau obtenu à partir des données de l'INSEE.

Faire de même qu'à l'exercice précédent avec la série des données de 1995 et avec celle de 2009.

Pourcentage de femmes élues au Parlement dans quelques pays du monde								
Pays	**1995**	**2009**	**Pays**	**1995**	**2009**	**Pays**	**1995**	**2009**
Afrique du Sud	25	45	Espagne	16	36	Pays-Bas	31	41
Algérie	7	8	États-Unis	11	17	Pologne	13	20
Allemagne	26	33	Finlande	34	42	Portugal	9	28
Argentine	22	42	**France**	**6**	**18**	République tchèque	10	16
Australie	10	27	Grèce	6	17	Royaume-Uni	10	20
Autriche	24	28	Hongrie	11	11	Russie	13	14
Belgique	12	35	Inde	8	11	Rwanda	4	56
Brésil	7	9	Irlande	13	13	Sénégal	12	22
Cameroun	12	14	Italie	15	21	Suède	40	47
Canada	18	22	Japon	3	11	Suisse	18	29
Chine	21	21	Lituanie	7	18	Tunisie	7	28
Corée du Sud	2	14	Luxembourg	20	20	Turquie	2	9
Cuba	23	43	Malte	2	9	Viêt Nam	19	26
Danemark	33	38	Mexique	14	28			
						Monde	**12**	**19**

Exercice IV

❶ On considère la série statistique donnée par le tableau :

Valeur x_i	2	3	4	7
Effectif n_i	1	1	1	2

On définit la fonction f sur l'intervalle [0 ; 7] par :

$$f(x)=\frac{1}{5}\left(|x-2|+|x-3|+|x-4|+2|x-7|\right).$$

Dans la séquence 1, vous avez étudié la fonction « valeur absolue ». On rappelle que $|x-2|$ est égal à la distance du nombre x au nombre 2, $f(x)$ est donc la distance moyenne du nombre x aux termes de la série statistique, on dit aussi l'écart absolu moyen.

En utilisant votre calculatrice, chercher si cette fonction semble posséder un minimum, et si oui, pour quelle(s) valeurs(s).

❷ Même question pour la série donnée par :

Valeur x_i	2	3	4	7
Effectif n_i	2	1	1	2

Et pour la fonction g définie sur [0 ; 7] par :

$$g(x)=\frac{1}{6}\left(2|x-2|+|x-3|+|x-4|+2|x-7|\right).$$

❸ On a rappelé qu'on peut interpréter le nombre $f(x)$ comme l'écart absolu moyen entre le nombre x et tous les termes de la première série ; de même $g(x)$ est l'écart absolu moyen entre le nombre x et les termes de la deuxième série.

Quelle observation pouvez-vous faire sur les valeurs de x pour lesquelles les minima semblent atteints ?

Exercice V

La variance d'une série statistique est définie dans le cours par l'égalité :

$$V=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+...+n_p(x_p-\overline{x})^2}{N}.$$

Démontrer que la variance V vérifie aussi l'égalité :

$$V=\frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+...+n_px_p^2}{N}-\overline{x}^2.$$

Exercice VI

Dans un lycée, on a rendu les copies d'un contrôle commun aux élèves des trois classes de Première S.

Pour chacune des classes on a déterminé les paramètres suivants (m désigne la médiane) :

$1S_A$: l'effectif est N=30 et

$x_{min}=2,\ Q_1=8,\ m=11,\ Q_3=13,\ x_{max}=18,\ \overline{x}=11,5$ et $s=3,5.$

$1S_B$: l'effectif est N'=28 et

$x'_{min}=5,\ Q'_1=9,5,\ m'=12,\ Q'_3=13,\ x'_{max}=15,\ \overline{x'}=12,3$ et $s'=2,7.$

$1S_C$: l'effectif est N"=33 et

$x''_{min}=4,\ Q''_1=7,\ m''=10,\ Q''_3=15,\ x''_{max}=17,\ \overline{x''}=12$ et $s''=4,1.$

On veut faire un bilan général pour l'ensemble des élèves de ces trois classes.

Quel(s) indicateur(s) numérique(s) peut-on déduire des données précédentes ?

2e partie

Étude des fonctions

Sommaire

1. Pré-requis
2. Somme, produit de deux fonctions
3. Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$
4. Synthèse de la partie 2 de la séquence
5. Exercices d'approfondissement

1 Pré-requis

A Quelques algorithmes

Les élèves qui ne sont pas encore tout à fait familiarisés avec les algorithmes pourront passer, dans une première lecture, les deux exemples suivants.

▶ Exemple 1 Écrire un algorithme dont les entrées sont :

A, B : entiers naturels (A<B),

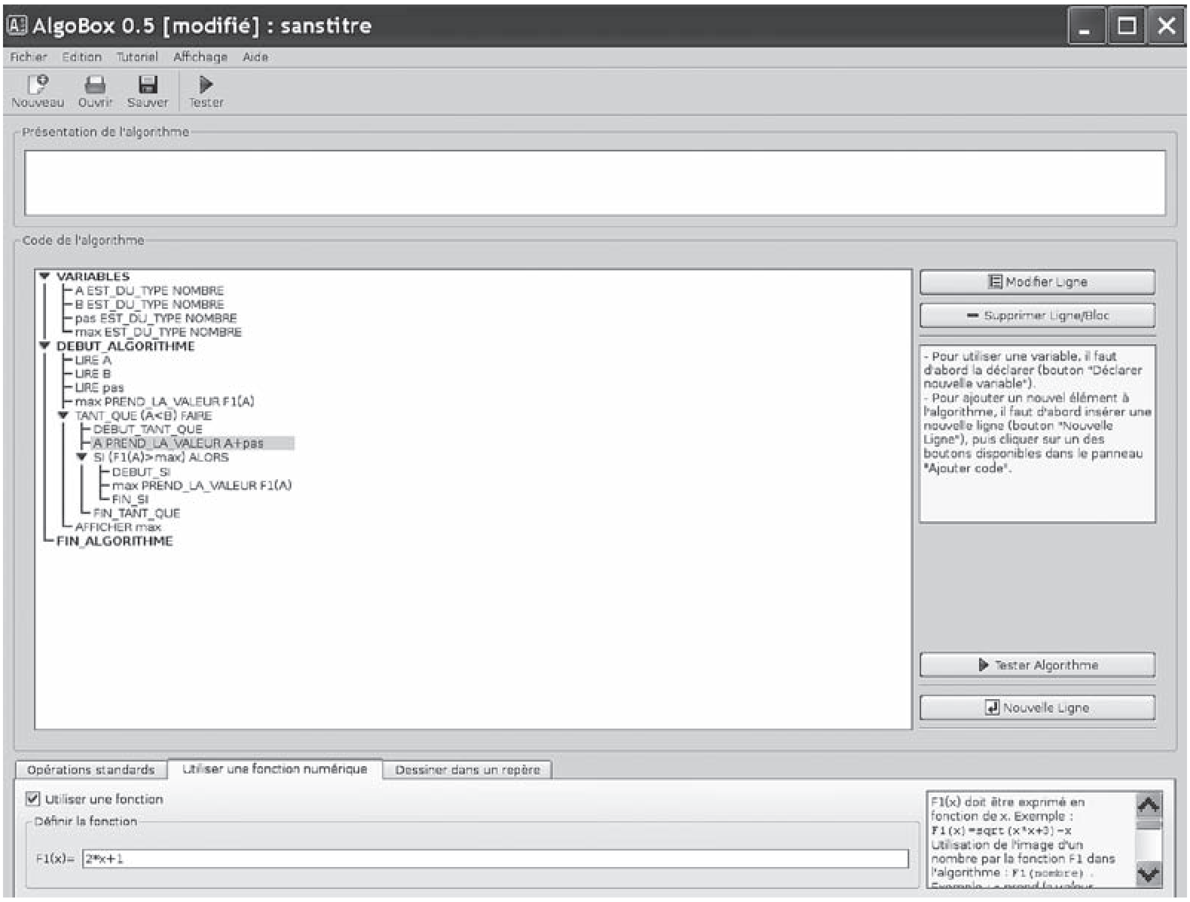
Pas : un nombre réel (comme 0,1 ; 0,01 …)

F1 : une fonction définie sur [AB]

Et la sortie Max : la plus grande des valeurs : F1(A), F1(A+h), F1(A+2h), F1(A+3h), …, F1(B).

Cet algorithme nous donne donc, si la fonction est suffisamment régulière, une valeur approchée du maximum de la fonction sur un intervalle.

Solution Cette copie d'écran nous montre une mise en œuvre de l'algorithme sur le logiciel *Algobox*.



Exemple 2 On considère l'algorithme suivant.

> Rappels (langage *Algobox*)
>
> Condition « != » : ≠
>
> Condition « = = » : =

```
VARIABLES
A EST_DU_TYPE NOMBRE
B EST_DU_TYPE NOMBRE
h EST_DU_TYPE NOMBRE
t EST_DU_TYPE NOMBRE
m EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE A
LIRE B
LIRE h
m PREND_LA_VALEUR 1
S PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (A<B) FAIRE
DEBUT_TANT_QUE
SI (F1(A+h)<F1(A)) ALORS
DEBUT_SI
t PREND_LA_VALEUR –1
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
t PREND_LA_VALEUR 1
FIN_SINON
SI (t!=m) ALORS
DEBUT_SI
S PREND_LA_VALEUR 0
FIN_SI
A PREND_LA_VALEUR A+h
FIN_TANT_QUE
SI (S==1) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER «oui»
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER «non»
FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Boucle "Tant que"

❶ On suppose que : $F1(x) = x^2$ (soit pow(x,2) pour *Algobox*). Faire fonctionner « à la main » l'algorithme à l'aide du tableau suivant pour :

a) A = –1, B = 1 et h = 0,5.

b) A = 0, B = 1 et h = 0,5.

	A	B	h	t	m	S	(A<B)?	(F1(A+h)<F1(A)) ?	(t ≠m)?	(S=1) ?
Entrée										

❷ On suppose que A = 0, B = 1 et h = 0,01.

a) Pour une certaine fonction F1, on a obtenu S = 0. F1 est-elle croissante ?

b) On obtient S=1 en sortie de l'algorithme. Quelle propriété de la fonction F1, peut-on alors conjecturer ?

c) Comment changer l'algorithme, pour qu'il nous donne « oui » si la fonction semble décroissante et « non » dans le cas contraire ?

Solution **1 a)**

	A	B	h	t	m	S	(A<B)?	(F1(A+h)<F1(A)) ?	(t ≠ m)?	(S=1) ?
Entrée	–1	1	0,5							
					1	1	Oui			
								Oui		
				–1					Oui	
						0				
	–0,5						Oui			
								Oui		
				–1					Oui	
						0				
	0						Oui			
								Non		
				1					Non	
	0,5						Oui			
								Non		
				1					Non	
	1						Non			
										Non

Sortie : affichage de « Non ».

b)

	A	B	h	t	m	S	(A<B)?	(F1(A+h)<F1(A)) ?	(t ≠ m)?	(S=1) ?
Entrée	0	1	0,5							
					1	1	Oui			
								Non		
				1					Non	
	0,5						Oui			
								Non		
				1					Non	
	1						Non			
										Oui

Sortie : affichage de « oui ».

2 a) La variable S devient 0, si à un moment la variable t prend une valeur différente de m, c'est-à-dire si t =–1 (puisque t ne peut prendre que 2 valeurs –1 et 1). A ce moment-là, on a : F1(A+0,01)<F1(A). La fonction F1 n'est donc pas croissante. En effet, si F1 est croissante sur [0 ; 1], alors pour tous a, b de [0 ; 1], si $a \le b$ alors $F1(a) \le F1(b)$ et donc pour tout A de [0 ; 0,99], $F1(A) \le F1(A+0{,}01)$ puisque $A \le A+0{,}01$.

b) On a : S = 1 en sortie de l'algorithme donc la variable t n'a pris que la valeur 1 (m = 1). On a donc :

$F1(0{,}01) \ge F1(0)$ (étape 1, A=0),

$F1(0{,}02) \ge F1(0{,}01)$ (étape 2, A=0,01),

$F1(0{,}03) \ge F1(0{,}02)$ (étape 3, A=0,02),

$F1(0{,}04) \ge F1(0{,}03)$ (étape 4, A=0,03),

.

.

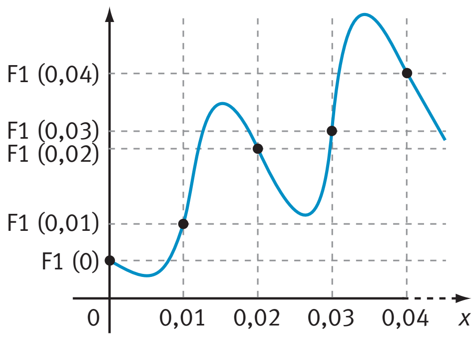
.

$F1(1) \ge F1(0{,}99)$ (étape 100, A=0,99).

On peut donc penser (mais ce n'est pas certain, voir figure ci-contre) que :

pour tous a, b de [0 ; 1] tels que $b \ge a$, $F1(b) \ge F1(a)$.

Cela laisse penser que : F1 est croissante sur [0 ; 1].



c) Il suffit de remplacer la ligne 12 « m prend la valeur 1 » par « m prend la valeur –1 ».

B Rappels fonctions trinômes du second degré

1. Fonctions polynômes

Définition

Une fonction monôme de degré n est une fonction de la forme : $x \mapsto ax^n$ où a est un réel non nul et n un entier naturel.

Une fonction polynôme de degré n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une relation du type : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_n \ne 0$ (une fonction polynômes est donc une somme de monômes dont le plus grand degré est n).

Remarque
(Soyons rigoureux !)

On parle de fonction f, mais il n'est pas rigoureux de parler de fonction $f(x)$ ($f(x)$

est l'image du réel x par la fonction f). On peut aussi écrire $x \mapsto f(x)$ (lire : la fonction qui à x associe $f(x)$).

Exemples Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ et $g(x) = x^5 - \sqrt{2}\,x^3$ sont des fonctions polynômes.

Attention à l'écriture d'expressions mathématiques faisant intervenir racine, puissance, quotient, …. Ici, par exemple, il ne faut pas confondre $\sqrt{2}x^3$ *et* $\sqrt{2x^3}$ *ou* $\sqrt{2x}^3$ *qui est égal à* $\left(\sqrt{2x}\right)^3$.

On admet que les fonctions inverse et racine carrée ne sont pas des fonctions polynômes.

Les fonctions affines de coefficient directeur non nul sont des fonctions polynômes de degré 1 et les fonctions constantes non nulles sont des fonctions polynômes de degré 0.

2. Fonctions trinômes du second degré

Définition

Une fonction trinôme du second degré est une fonction polynôme de degré 2.

Remarques On parle de trinôme car, pour ces fonctions, $f(x)$ est la somme d'au plus 3 monômes (ax^2, bx et c).

Les fonctions affines ne sont pas des fonctions trinômes du second degré.

On admet en seconde les résultats suivants (certain d'entre eux seront démontrés à la séquence 3).

Propriétés

Soient f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$) et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

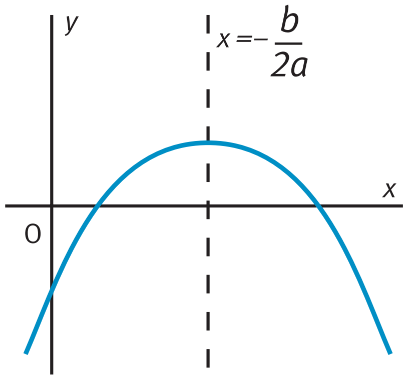
- $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.
- si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left]-\infty\,; -\dfrac{b}{2a}\right[$ et f est croissante sur $\left]-\dfrac{b}{2a}\,; +\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	

Propriétés

▶ Si $a < 0$, alors f est croissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et f est décroissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\dfrac{b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	↗ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ ↘



Démonstration Démontrons le 1er point de la première propriété (la symétrie). Le 2e point sera évoqué lors de la séquence second degré.

Notons $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Pour tout h réel, $x_0 - h$ et $x_0 + h$ appartiennent à l'ensemble de définition de f et :

$$\begin{aligned} f(x_0-h) &= a\left(x_0-h\right)^2+b\left(x_0-h\right)+c = ax_0^2-2ax_0h+ah^2+bx_0-bh+c \\ &= ax_0^2+bx_0+c-2ax_0h+ah^2-bh \\ &= f\left(x_0\right)-h(2ax_0+b)+ah^2 \\ &= f\left(x_0\right)+ah^2 \end{aligned}$$

En effet, de $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, on déduit : $2ax_0+b = 2a\times\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+b = -b+b = 0.$

De même, on a : $f(x_0+h) = f\left(x_0\right)+ah^2$.

Ainsi pour tout réel h : $f(x_0+h) = f\left(x_0-h\right)$.

La droite d'équation $x = x_0$ (soit $x = -\dfrac{b}{2a}$) est donc bien axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

▶ **Exemple 3** Soient f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2-4x+3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la parabole $\mathscr{C}$.

Solution f est une fonction trinôme du second degré : $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a=2$, $b=-4$ et $c=3$. On a : $-\dfrac{b}{2a} = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ admet donc comme axe de symétrie la droite d'équation : $x=1$.

▶ **Exemple 4** La fonction f est une fonction trinôme du second degré définie par : $f(x) = x^2+bx+c$ (b, c réels). On suppose que $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ coupe la droite d'équation $y = 3$ aux points d'abscisses -1 et 5. Déterminer b et c.

Solution On a : $f(x)=x^2+bx+c$. On a : $f(-1)=f(5)=3$ donc :

$1-b+c=25+5b+c=3$. On en déduit le système $\begin{cases} -b+c=2 \\ 5b+c=-22 \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} -b+c=2 & (1) \\ 5b+c=-22 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b+c=2 \\ 6b=-24 & \big((2)-(1)\big) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=b+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Ainsi $b=-4$, $c=-2$ et f est définie par : $f(x)=x^2-4x-2$.

3. Sens de variations des fonctions $x \mapsto (x-x_0)^2$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$)

On a le théorème suivant.

Théorème

Soient x_0 de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-x_0)^2$. On a :

- f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,x_0\right]$ et
- f est strictement croissante sur $\left[x_0\,;\,+\infty\right[$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration

- Soient a et b tels que : $x_0 \le a < b$. On a donc : $0 \le (a-x_0) < (b-x_0)$. De plus, la fonction carré est strictement croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$ donc $(a-x_0)^2 < (b-x_0)^2$ soit $f(a)<f(b)$. Ceci prouve que f est strictement croissante sur $\left[x_0\,;+\infty\right[$.
- Soient a et b tels que : $a<b\le x_0$. On a donc : $(a-x_0)<(b-x_0)\le 0$. De plus, la fonction carré est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$ donc $(a-x_0)^2 > (b-x_0)^2$ soit $f(a)>f(b)$. Ceci prouve que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;x_0\right]$.

Exemple 5 Dresser le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)^2$.

Solution D'après le théorème précédent, f est décroissante sur $\left]-\infty\,;1\right]$ et croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$. On en déduit le tableau de variation suivant $(f(1)=0)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

C Rappels fonctions homographiques

1. Fonctions rationnelles

Définition

Une fonction rationnelle est une fonction f définie par une relation du type : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions polynômes. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels privé des solutions de l'équation $v(x)=0$.

Exemples

Les fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{3x^4+2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x^3}$ sont des fonctions rationnelles (les ensembles de définition respectifs de f et g sont $\mathbb{R}$ (car pour tout x, $3x^4+2>0$) et $\mathbb{R}^*$).

Les fonctions polynômes $(v(x)=1)$ et la fonction inverse $(u(x)=1$ et $v(x)=x)$ sont des fonctions rationnelles.

On admet que la fonction racine carrée n'est pas une fonction rationnelle.

2. Fonctions homographiques

Définition

Une fonction homographique est une fonction définie, pour tout réel n'annulant pas le dénominateur, par une relation de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (où a, b, c et $d \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$).

Remarque

- La définition précédente n'est pas forcément la définition d'une fonction homographique rencontrée dans l'enseignement supérieur mais c'est celle que l'on retient au lycée.
- L'ensemble de définition d'une fonction homographique est de la forme $\mathbb{R}\setminus\{h\}$ où h vérifie $ch+d=0$, c'est-à-dire : $h=-\dfrac{d}{c}$.

3. Sens de variations des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x-h}$ (où $h \in \mathbb{R}$)

On a le théorème suivant.

Théorème

Soit h de $\mathbb{R}$ La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{h\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-h}$. On a :

- f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;h[$ et
- f est strictement décroissante sur $]h\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	h	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

Démonstration

- Soient a et b tels que : $a < b < h$. On a donc : $(a-h) < (b-h) < 0$. De plus, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\dfrac{1}{a-h} > \dfrac{1}{b-h}$ soit $f(a) > f(b)$. Ceci prouve que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;h[$.
- Soient a et b tels que : $h < a < b$. On a donc : $0 < (a-h) < (b-h)$. De plus, la fonction inverse est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{a-h} > \dfrac{1}{b-h}$ soit $f(a) > f(b)$. Ceci prouve que f est strictement décroissante sur $]h\,;+\infty[$.

Remarque

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ est décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ ainsi que sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ mais n'est pas décroissante sur l'ensemble (ce n'est pas un intervalle !) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

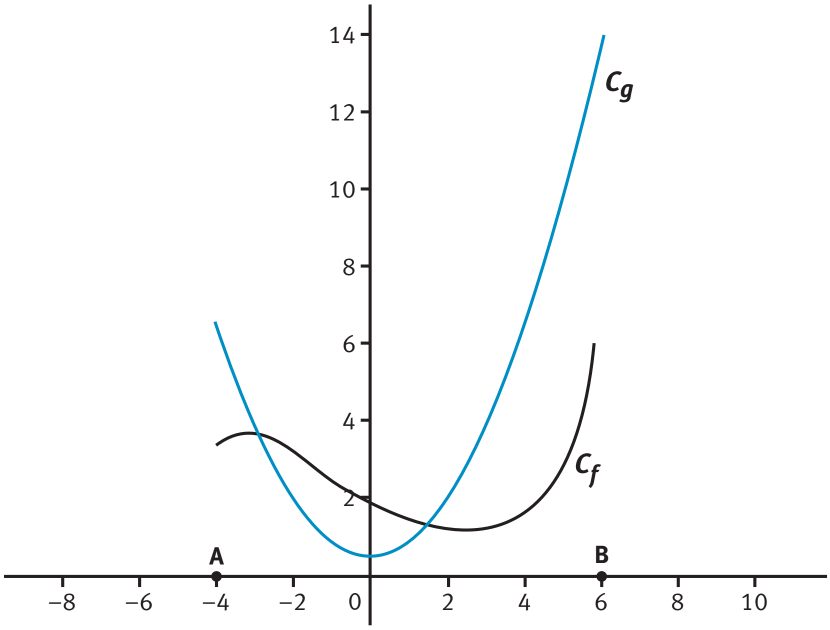
En effet, si f était décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on aurait pour tous a, b de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

Or si : $a = 0$ *et* $b = 2$, on a : $a < b$ et $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, donc $f(a) < f(b)$.

Pour cette raison, on ne parle de croissance, de décroissance ou de monotonie d'une fonction que sur un **intervalle.**

2 Somme, produit de deux fonctions

A Activité



Sur la figure *GeoGebra* sont tracées les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g définies sur [–4 ; 6]. Les points A et B sont définis par leurs coordonnées respectives (–4 ; 0) et (6 ; 0).

Placer un point M sur [AB]. On note x son abscisse. Les points P et Q sont les points d'abscisse x de, respectivement, C_f et C_g.

La fonction h est la fonction définie sur [–4 ; 6] par : $h(x)=f(x)+g(x)$. On note C la courbe représentative de h.

❶ Construire le point N de C d'abscisse x.

❷ Construire la courbe C, c'est-à-dire le lieu de N quand M décrit [AB].

❸ Déterminer par lecture graphique les sens de variations de f, g et h sur

a) I = [–4 ; –3] **b)** I = [–3 ; 0] **c)** I = [0 ; 1] **d)** I = [1 ; 3] **e)** I = [3 ; 6].

❹ À l'aide de cet exemple et d'autres exemples, cocher les bonnes réponses.

a) Si f et g sont toutes deux croissantes sur I, alors h est croissante sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ On ne peut pas répondre

b) Si f et g sont toutes deux décroissantes sur I alors h est décroissante sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ On ne peut pas répondre

c) Si f est croissante et g décroissante sur I alors h est croissante sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ On ne peut pas répondre

B Cours

1. Définition

Définition 1

- Soient f et g deux fonctions définies sur D inclus dans $\mathbb{R}$. La fonction somme de f et g est la fonction notée $(f+g)$ définie sur D par : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ pour tout x de D.
- Soient f et g deux fonctions définies sur D inclus dans $\mathbb{R}$. La fonction produit de f et g est la fonction notée $(f\times g)$ définie sur D par : $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$ pour tout x de D.

2. Sens de variation

Propriété 1

Soient f et g définies sur un intervalle I.

- Si f et g sont (strictement) croissantes sur I alors $(f+g)$ est (strictement) croissante sur I.
- Si f et g sont (strictement) décroissantes sur I alors $(f+g)$ est (strictement) décroissante sur I.

Démonstration Supposons f et g strictement croissantes sur I.

Soient a et b de I tels que : $a<b$. Les fonctions f et g étant strictement croissantes sur I, on a : $f(a)<f(b)$ et $g(a)<g(b)$. On en déduit : $f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$ soit $(f+g)(a)<(f+g)(b)$ ce qui prouve que la fonction $f+g$ est strictement croissante sur I.

Les autres démonstrations sont similaires.

Remarque Il n'y a pas de propriétés analogues pour le produit de deux fonctions comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6 Soit $I=[1\,;3]$.

On considère les fonctions h, k et p définies sur $I=[1\,;3]$ par :

$h(x)=x^2$, $k(x)=x-2$ et $p(x)=-\dfrac{1}{x}$.

❶ Étudier les sens de variation de h, k, p et $p^2(=p\times p)$.

❷ Trouver deux fonctions f et g strictement croissantes sur I telles que :

a) $f\times g$ est strictement croissante sur I.

b) $f\times g$ est strictement décroissante sur I.

c) $f\times g$ est constante sur I.

d) $f\times g$ n'est pas strictement monotone sur I.

Solution ❶ La fonction h est la fonction carré (référence), elle est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et donc sur I.

La fonction k est une fonction affine de coefficient directeur $1>0$ donc k est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur I.

Pour tous a, b de I tels que $a<b$, on a successivement :

$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc sur I ;

$-\dfrac{1}{a}<-\dfrac{1}{b}$ (la fonction $x\mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$).

Autrement dit : $p(a)<p(b)$. La fonction p est donc croissante sur I.

La fonction p^2 est définie par : $p^2(x)=\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}$. Cette fonction est décroissante sur I. En effet, si a et b sont deux éléments de I tels que $a<b$, on a $a^2<b^2$ (fonction carré croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc sur I) et $\dfrac{1}{a^2}>\dfrac{1}{b^2}$ (fonction inverse décroissante sur $]0\,;+\infty[$).

❷ On a :

a) $f : x\mapsto x$ est strictement croissante sur $[1\,;3]$ (coefficient directeur $1>0$) et la fonction $f\times f=f^2 : x\mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[1\,;3]$ (fonction de référence).

b) D'après ❶, la fonction p est strictement croissante sur $[1\,;3]$ et $p\times p=p^2$ est strictement décroissante sur $[1\,;3]$.

c) Les fonctions p et f sont strictement croissantes sur $[1\,;3]$ et pour tout x de $[1\,;3]$, $(p\times f)(x)=p(x)\times f(x)=x\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{-x}{x}=-1$ donc $p\times f$ est constante.

d) La fonction k est strictement croissante sur $[1\,;3]$ et pour tout x de $[1\,;3]$, $(k\times k)(x)=(x-2)^2$. On a : $(k\times k)(1)=1$, $(k\times k)(2)=0$ et $(k\times k)(3)=1$ ce qui prouve que $(k\times k)$ n'est pas monotone.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Pour chacune des fonctions f, g, h et k définies ci-dessous sur un intervalle I, préciser si elle est

a) strictement croissante sur I ;

b) strictement décroissante sur I ;

c) n'est pas strictement monotone sur I.

$f(x)=x^2+x+1,\ \ \mathrm{I}=\left[0\,;+\infty\right[$

$g(x)=\left(x+1\right)^2+\dfrac{1}{x},\ \ \mathrm{I}=[-10\,;-1]$

$h(x)=x^2+\dfrac{1}{x},\ \ \mathrm{I}=[0{,}1\,;10]$

$k(x)=\dfrac{1}{x-3},\ \ \mathrm{I}=\left]-\infty\,;0\right[$

Exercice 2 *On admet que la fonction cube est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x+520$.

❶ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution entière.

❷ Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

❸ En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 3 Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$.

❶ Montrer que la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=-\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

❷ En déduire le sens de variation de f.

❸ Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

3 Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$

A Activités

1. Courbes associées 1

Soit f définie sur [–2 ; 2] par : $f(x)=x^3-3x+1$.

❶ Représenter f à l'aide du logiciel *GeoGebra* (*ou, à défaut, à l'aide d'une calculatrice).*

❷ Dresser le tableau de variation de f (aucune justification n'est demandée).

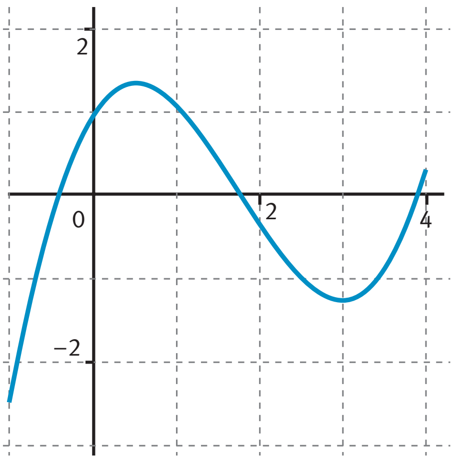
❸ Créer un curseur a. Représenter alors la fonction g définie sur [–2 ; 2] par : $g(x)=f(x)+a$. Faire varier a. Dresser le tableau de variation de g selon les valeurs de a.

❹ Créer un curseur k. Représenter alors la fonction h définie sur [–2 ; 2] par : $h(x)=k.f(x)$. Faire varier k. Dresser le tableau de variation de h selon les valeurs de k.

❺ Peut-on trouver a et k tels que u définie sur [–2 ; 2] par : $u(x)=k.f(x)+a$, admette le tableau de variation suivant.

x	–2		–1		1		2
$f(x)$	–1	↗	1	↘	–1	↗	1

2. Courbes associées 2



Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [–1 ; 4].

Construire sur ce graphique les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur [–1 ; 4] par :

$f_1(x)=1+f(x)$

$f_2(x)=-f(x)$

$f_3(x)=2\,f(x)$

$f_4(x)=x+f(x)$

B Cours

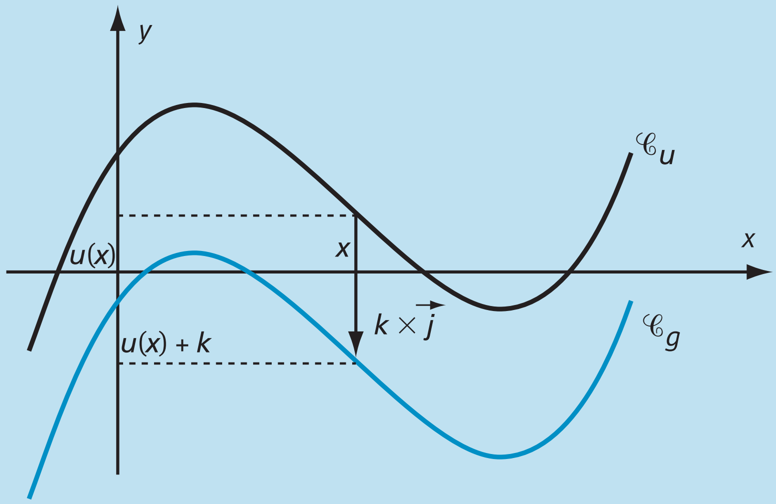
Soient u une fonction définie sur un ensemble D inclus dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1. Sens de variation de $u+k$

Soient k un réel, g la fonction définie sur un intervalle I par : $g(x)=u(x)+k$ et $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans $\left(0\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Propriété 2

La courbe $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $k.\vec{j}=k.\overrightarrow{OJ}$.



Démonstration

Pour justifier que la courbe $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $k.\vec{j}$, on va montrer que :

- si M est un point de $\mathscr{C}$, alors $t_{k.\vec{j}}$(M) (l'image de M par la translation de vecteur $k.\vec{j}$) appartient à $\mathscr{C}'$;
- si M' est un point de $\mathscr{C}'$, alors il existe un point M de $\mathscr{C}$ tel que : $\mathrm{M}'=t_{k.\vec{j}}(\mathrm{M})$.

Montrons la 1$^{\text{ère}}$ étape

Soit M un point de $\mathscr{C}$. Les coordonnées de M sont donc de la forme $(x\,;u(x))$.

Les coordonnées de $\mathrm{M}'=t_{k.\vec{j}}(\mathrm{M})$ sont donc : $\left(x+x_{k.\vec{j}}\,;y+y_{k.\vec{j}}\right)$ soit $\left(x+0\,;u(x)+k\right)$ ou encore $\left(x\,;g(x)\right)$ ce qui nous prouve que M' est bien un point de $\mathscr{C}'$.

Montrons la 2^e^ étape

Soit $M'\left(x\,;\,g(x)\right)$ un point de $\mathscr{C}'$. Comme précédemment, on montre que :

$M' = t_{k.\vec{j}}(M)$ où $M(x\,;\,u(x))$.

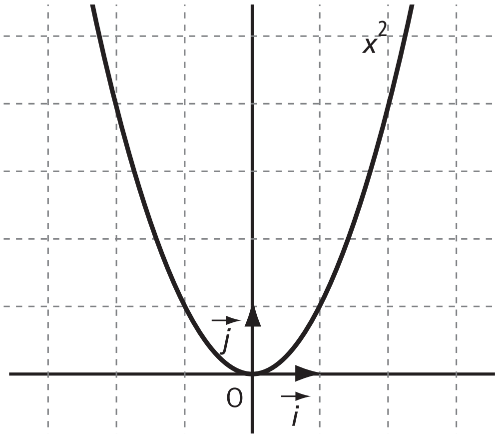
Ainsi il existe un point M de $\mathscr{C}$ tel que $M' = t_{k.\vec{j}}(M)$ ce qui prouve la 2e étape.

La 1ère étape a montré que l'image de $\mathscr{C}$ est incluse dans $\mathscr{C}'$.

La 2e étape était nécessaire pour montrer que l'on obtient bien la courbe $\mathscr{C}'$ en entier.

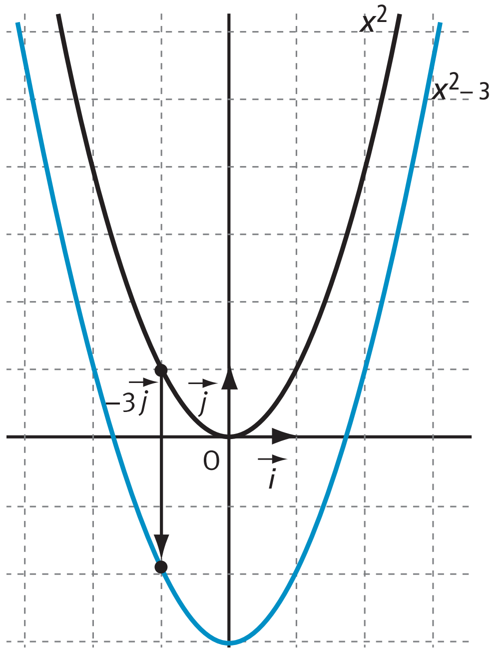
▶ **Exemple 7**

On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction carré. Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3$.



Solution

La courbe représentant f est l'image de la courbe représentant la fonction carré par la translation de vecteur $-3\vec{j}$.



Graphiquement, on déduit de ce qui précède la propriété suivante.

Propriété 3

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, et k un réel.

Les fonctions u et $u + k$ ont les mêmes sens de variation sur I.

Démonstration

Supposons, par exemple, u croissante sur I.

Soient a et b de I tels que $a < b$. La fonction u étant croissante sur I, on a : $u(a) \leq u(b)$ et donc $u(a)+k \leq u(b)+k$, soit $g(a) \leq g(b)$.

La fonction g est donc croissante sur I.

Les autres cas sont analogues.

▸ **Exemple 8**

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$.

❶ Montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=a+\dfrac{1}{x-2}$.

❷ Dresser le tableau de variation de f sur [–1 ; 1].

Solution

❶ Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$$a+\frac{1}{x-2}=\frac{a(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}=\frac{a(x-2)+1}{x-2}=\frac{ax-2a+1}{x-2}.$$

On a l'égalité attendue si $a=3$ et $-2a+1=-5$, donc si $a=3$. Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$.

❷ Le tableau de variation de $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ (fonction de référence) sur [–1 ; 1] est le suivant.

x	–1	1
$x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$	$-\dfrac{1}{3}$ ↘	–1

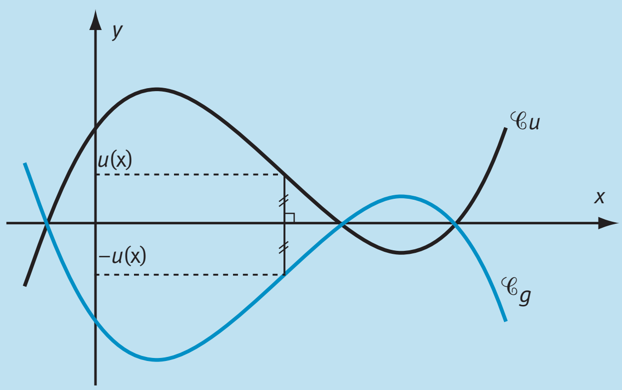
❸ Donc la fonction f est, elle aussi, strictement décroissante sur [–1 ; 1].

2. Sens de variation de λu

a. Cas 1 : $\lambda = -1$ $\quad g = -u$

Propriété 4

La courbe $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie d'axe (Ox).



Démonstration Il s'agit de montrer que :

- si M est un point de $\mathscr{C}$ alors $S_{(Ox)}$ (M), l'image de M par la la symétrie d'axe (Ox), appartient à $\mathscr{C}'$;
- si M' est un point de $\mathscr{C}'$alors il existe un point M de $\mathscr{C}$ tel que : $M' = S_{(Ox)}(M)$.

Montrons la 1re étape

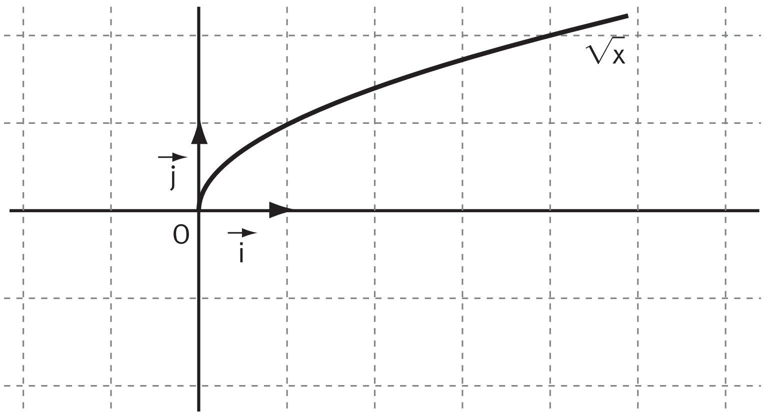
Soit M un point de $\mathscr{C}$. Les coordonnées de M sont donc de la forme $\big(x\,;u(x)\big)$ (x est l'abscisse de M).

Les coordonnées de $M' = S_{(Ox)}(M)$ sont donc : $\big(x\,;-u(x)\big)$ soit $\big(x\,;g(x)\big)$ ce qui nous prouve que M' est bien un point de $\mathscr{C}'$.

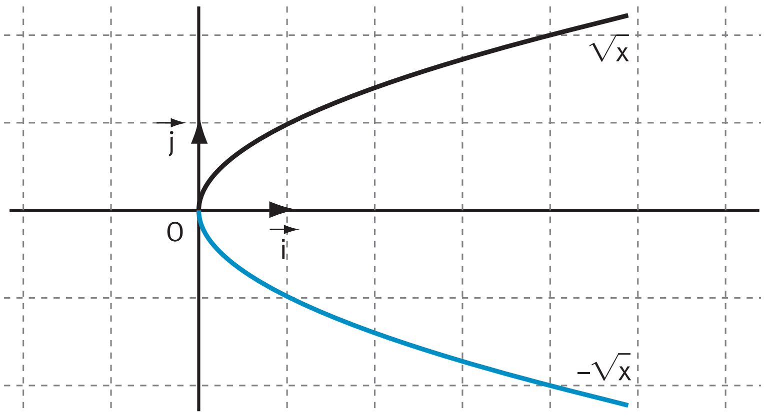
Montrons la 2e étape

Soit $M'\big(x\,;g(x)\big)$ un point de $\mathscr{C}'$. Comme précédemment, on montre que : $M' = S_{(Ox)}(M)$ où $M\big(x\,;u(x)\big)$. Ainsi il existe un point M de $\mathscr{C}$ tel que : $M' = S_{(Ox)}(M)$ ce qui prouve la 2e étape.

▶ Exemple 9 Ci-dessous est représentée la courbe représentative de la fonction racine carrée. Représenter la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto -\sqrt{x}$.



Solution Les 2 courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Graphiquement, on déduit de ce qui précède la propriété suivante.

Propriété 5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Les fonctions u et $-u$ ont des sens de variation contraires sur I.

Démonstration Supposons, par exemple, u croissante sur I.

Soient a et b de I tels que $a < b$. la fonction u étant croissante sur I, on a : $u(a) \le u(b)$ et donc $-u(a) \ge -u(b)$ soit $g(a) \ge g(b)$.

Donc g est décroissante sur I.

b. Cas 2 : λ réel non nul

Remarque Ici aussi, une transformation permet de passer de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$, cette transformation (c'est une affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport λ !) n'est pas étudiée au lycée. On peut retenir simplement qu'à partir d'un point de $\mathscr{C}$, on obtient un point de $\mathscr{C}'$ en multipliant l'ordonnée par λ.

Graphiquement, on déduit de ce qui précède la propriété suivante.

Propriété 6

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

- Si $\lambda > 0$, les fonctions u et λu ont les mêmes sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$, les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

Démonstration

- Supposons $\lambda > 0$.

Supposons, par exemple, u croissante sur I.

Soient a et b de I tels que $a < b$. La fonction u étant croissante sur I, on a : $u(a) \le u(b)$ et donc $\lambda u(a) \le \lambda u(b)$ ($\lambda > 0$) soit $g(a) \le g(b)$.

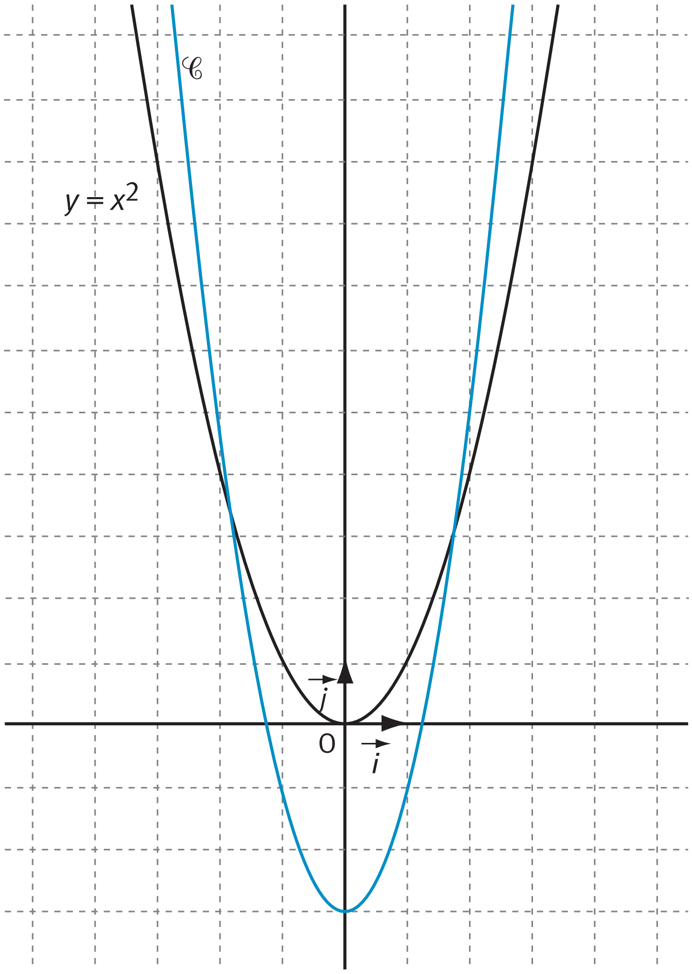
Donc g est croissante sur I.

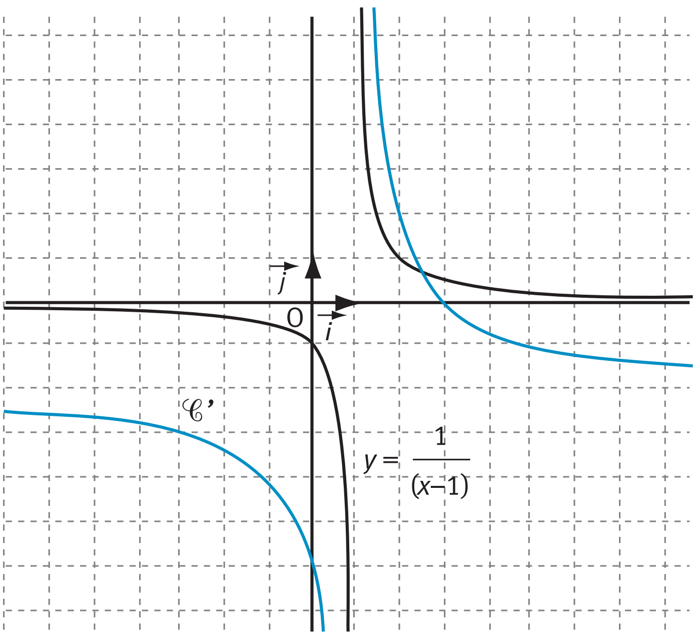
- Supposons $\lambda < 0$ et posons $\lambda' = -\lambda$ ($\lambda' > 0$).

Si u croissante sur I (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) alors d'après le 1er point ($\lambda' u$) est croissante sur I (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) et ($-\lambda' u$) soit g est décroissante sur I (resp. strictement décroissante, croissante, strictement croissante).

Exemple 10 Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ en bleu représentent respectivement les fonctions f et g telles que, pour tout réel x de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$),

$$f(x) = kx^2 + a \text{ et } g(x) = a' + \frac{k'}{x-1}.$$





Déterminer a, k puis a' et k'.

Solution La fonction f.

On a : $f(0)=-3$ donc $k\times 0^2+a=-3$ donc $a=-3$.

On a : $f(1)=-1$ donc $k\times 1^2-3=-1$ donc $k=2$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-3$.

La fonction g.

On a : $g(0)=-6$ donc $a+\dfrac{k}{0-1}=-6$ donc $a-k=-6$. (i)

On a : $g(2)=2$ donc $a+\dfrac{k}{2-1}=2$ donc $a+k=2$. (ii)

On en déduit ((i)+(ii)) : $2a=-4$ soit $a=-2$ et ((ii)-(i)) : $2k=8$ soit $k=4$.

Ainsi pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g(x)=-2+4\times\dfrac{1}{x-1}=-2+\dfrac{4}{x-1}$.

3. Sens de variation de $\sqrt{u}$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et ne prenant que des valeurs positives (ou nulles). On peut donc définir une fonction g sur I par : $g(x)=\sqrt{u(x)}$ (on note : $g=\sqrt{u}$).

On a la propriété suivante.

Propriété 7

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs positives.

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes sens de variation sur I.

Démonstration Montrons par exemple que si u est croissante sur I alors il en est de même de $\sqrt{u}$ (les autres démonstrations sont analogues).

On suppose donc u croissante sur I. Soient a et b deux éléments de I tels que : $a<b$.

La fonction u étant croissante sur I et à valeurs positives, on a : $0\le u(a)\le u(b)$. De plus, la fonction racine carrée étant (strictement) croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a : $\sqrt{u(a)}\le\sqrt{u(b)}$ soit $g(a)\le g(b)$. La fonction g est donc bien croissante sur I.

▶ **Exemple 11** Déterminer le sens de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+2}$.

Solution À partir du tableau de variation de la fonction carré (fonction de référence), on obtient successivement.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2+2		$\searrow$	3	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt{x^2+2}$		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	

4. Sens de variation de $\dfrac{1}{u}$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, ne s'annulant pas et gardant un signe constant. Ainsi, on peut définir une fonction g sur I par : $g(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ (on note : $g = \dfrac{1}{u}$).

On a la propriété suivante.

Propriété 8

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, gardant un signe constant et ne s'annulant pas sur I.

Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires sur I.

Démonstration

Montrons par exemple que si u est croissante sur I alors g est décroissante sur I (les autres démonstrations sont analogues).

On suppose donc u croissante sur I. Soient a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.

La fonction u étant croissante sur I, on a : $u(a) \le u(b)$. De plus, la fonction u garde un signe constant sur I et la fonction inverse est (strictement) décroissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et sur $\left]-\infty\,;0\right]$, donc on a : $\dfrac{1}{u(a)} \ge \dfrac{1}{u(b)}$ soit $g(a) \ge g(b)$. La fonction g est donc bien décroissante sur I.

Exemple 12 Déterminer le sens de variation de f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$.

Solution À partir du tableau de variation de la fonction racine carrée (fonction de référence), on obtient successivement.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}+2$	2	$\nearrow$	

x	0	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

C Exercices d'apprentissage

Exercice 4 Dresser le tableau de variation de f définie sur I par :

1. $f(x)=1+\dfrac{1}{x+3}$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$
2. $f(x)=-1-\dfrac{2}{x+4}$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}\backslash\{-4\}$
3. $f(x)=-\dfrac{1}{3x+1}$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

Exercice 5 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)^2+1$.

1. Étudier le sens de variation de f.

Soit g définie par : $g(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

❷ Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ (*on pourra remarquer que :* $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$).

❸ Déterminer le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Étudier le sens de variation de f sur I dans les cas suivants.

❶ $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$, $\mathrm{I}=\left[0\,;+\infty\right[$.

❷ $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$, $\mathrm{I}=\left]0\,;+\infty\right[$.

❸ $f(x)=\sqrt{2x^2-3}$, $\mathrm{I}=\left[2\,;+\infty\right[$.

❹ $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

4 Synthèse de la séquence

A Somme, produit de deux fonctions

Définition 1

- Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$. La fonction somme de f et g est la fonction, notée $(f+g)$, définie sur D par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$. La fonction produit de f et g est la fonction, notée $(f \times g)$, définie sur D par : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

Propriété 1

Soient f et g définie sur un intervalle I.

- Si f et g sont (strictement) croissantes sur I alors $(f+g)$ est (strictement) croissante sur I.
- Si f et g sont (strictement) décroissantes sur I alors $(f+g)$ est (strictement) décroissante sur I.

B Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$

Propriété 2

Soient k un réel, g la fonction définie sur I par : $g(x) = u(x)+k$ et $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $k.\vec{j} = k.\overrightarrow{OJ}$.

Propriété 3

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, et k un réel.

Les fonctions u et $u+k$ ont les mêmes sens de variation sur I.

Soient λ un réel, g la fonction définie sur I par : $g(x) = \lambda u(x)$ (on note $g = \lambda u$).

Propriété 6

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

- Si $\lambda > 0$, les fonctions u et λu ont les mêmes sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$, les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et ne prenant que des valeurs positives (ou nulles). On peut donc définir une fonction g sur I par : $g(x) = \sqrt{u(x)}$ (on note : $g = \sqrt{u}$).

Propriété 7

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs positives.

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes sens de variation sur I.

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, ne s'annulant pas et gardant un signe constant. Ainsi, on peut définir une fonction g sur I par : $g(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ (on note : $g = \dfrac{1}{u}$).

Propriété 8

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I.

Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires sur I.

5 Exercices d'approfondissement

Exercice I

Un robinet A remplit une cuve en 10 minutes ; un robinet B remplit cette même cuve en « x » minutes. On suppose les débits constants.

On les ouvre en même temps.

❶ Montrer que le temps de remplissage, en minutes, de la cuve en fonction de x est :

$$10-\frac{100}{x+10}.$$

❷ Montrer que la fonction f qui à x associe le temps de remplissage est une fonction croissante.

❸ Soit D la droite d'équation $y = 10$. Expliquer pourquoi la courbe représentative de f se situe sous cette droite.

❹ Tracer cette droite D et la courbe représentative de f dans un même repère.

Exercice II

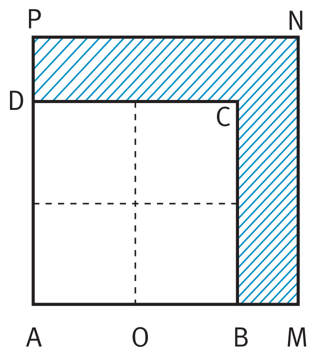
❶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$.

a) En exprimant $f(x)$ sous la forme d'une somme de trois fonctions, étudier les variations de f.

b) Montrer que le point I de coordonnées (0 ; 2) est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

c) Construire la courbe représentative de la fonction f.

❷ On considère la figure ci-contre.



ABCD est un carré de côté 2, O est le milieu de [AB], M est un point de la demi-droite [AB) tel que OM > OB et AMNP est un carré.

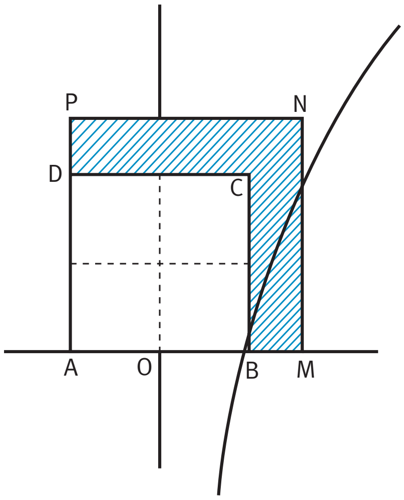
On pose OM = x.

a) Exprimer l'aire de la partie hachurée en fonction de x.

b) On appelle $\ell(x)$ la deuxième dimension d'un rectangle ayant une aire égale à celle de la partie hachurée, la première dimension étant x.

Expliciter $\ell(x)$ en fonction de x. Quel est le sens de variation de ℓ ?

c) On a fait apparaître sur la figure ci-après une partie de la courbe représentative de f définie en ❶. Construire sur ce dessin un rectangle satisfaisant aux conditions du ❷ b.



Exercice III Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x|x|$.

❶ Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$.

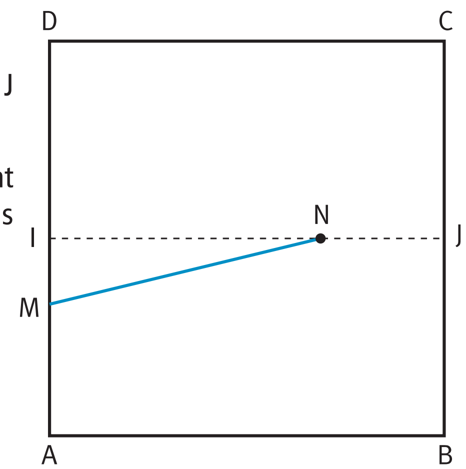
❷ Conclure.

Exercice IV ABCD est un carré de côté 4.

I désigne le milieu du segment [AD] et J est le milieu du segment [BC].

M et N sont des points respectivement situés sur les segments [AD] et [IJ] tels que AM = JN.

On pose AM = x.



❶ Démontrer que $IM^2 = (x-2)^2$ (il y a deux cas à considérer).

❷ Montrer que $MN^2 = 2\,[(x-3)^2 + 1]$

❸ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités pour le repère : 1 cm en abscisse ; 0,25 cm en ordonnée).

Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

c) Tracer cette courbe.

❹ Représenter la fonction $x \mapsto MN^2$ sur le graphique précédent ; pour quel réel x, la distance MN est-elle minimale ?

Exercice V Soit f et g définies sur $\left[-1\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{1+x}$ et $g(x)=1+\dfrac{x}{2}$.

❶ Étudier les sens de variation de f et g. En déduire le sens de variation de $f+g$.

❷ Montrer que pour tout x de $\left[-1\,;+\infty\right[$: $f(x)-g(x)=\dfrac{-x^2}{4\left[\sqrt{1+x}+1+\dfrac{x}{2}\right]}$.

❸ En déduire les positions relatives des courbes représentant f et g.

❹ Montrer que, pour tout x de $\left[-1\,;+\infty\right[$, $\left|f(x)-g(x)\right|\le 2x^2$.
En déduire (sans calculatrice !) une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02}$.

Aide aux exercices d'approfondissement

Exercice I

❶ Notons V le volume de la cuve. En 1 minute, le robinet A fournit le volume $\dfrac{V}{10}$ et le robinet B le volume $\dfrac{V}{x}$. Les deux robinets ensemble produisent donc en 1 minute le volume $V\times\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice V

❷ On pourra utiliser : $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$.

■