Séquence 8

1ère partie :

Suites (2)

2e partie :

Échantillonnage

1ère partie

Suites numériques (2)

Sommaire

1 Pré-requis

A Suite

Voir la séquence 5.

B Utilisation du tableur

Voir la séquence 5.

2 Suites arithmétiques et géométriques : somme de termes consécutifs

A Activités

Activité 1

On pose $S_n = 1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k$.

❶ Calculer S_5 et S_6.

❷ Ecrivons S_n sur deux lignes dans un sens et dans l'autre :

$S_n = n+n-1+n-2\ldots\ldots+3+2+1$

Additionner ces deux lignes de manière « astucieuse » pour exprimer $2S_n$ à l'aide de n. (on pourra remarquer que les sommes verticales sont toutes égales) En déduire une expression de S_n .

❸ Calculer la somme des 100 premiers nombres entiers non nuls ; des (n-1) premiers nombres entiers non nuls ; des $2n$ premiers nombres entiers non nuls.

Activité 2

il était une fois

Il y a bien longtemps, dans un lointain pays d'Orient, un Empereur (ou un Calife, c'est selon) voulait récompenser ses deux plus fidèles serviteurs : son général en chef qui revenait vainqueur de sa dernière campagne militaire, et son conseiller culturel qui venait de lui présenter un nouveau jeu, les échecs.

– « Vous qui venez de me présenter un jeu que vous prétendez subtil, montrez-moi votre subtilité en m'indiquant, sur votre échiquier, comment je peux vous récompenser ».

– « C'est simple, répondit modestement le conseiller, mettez un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains à chaque case. Je me contenterai de ramasser les grains de l'échiquier ».

Ravi de la modestie de cette demande, l'Empereur (ou Calife) se tourna vers son général en chef.

– « Et vous, général, comment utiliseriez-vous cet échiquier pour votre récompense ? »

– « Par respect pour votre conseiller, je vous demanderais aussi un grain de blé sur la première case, mais ensuite mon tempérament m'impose plus de brutalité.

Mettez mille et un grains sur la deuxième case, deux mille et un grains sur la troisième et ainsi de suite en ajoutant mille grains à chaque case. Je me satisferai des grains sur l'échiquier. »

– « Je n'en attendais pas moins de vous » conclut l'Empereur (ou Calife).

Mais il prit vite conscience, en satisfaisant les demandes, que la subtilité de son conseiller était aussi d'une redoutable efficacité.

Comptes

Commençons par calculer le nombre total de grains sur la première ligne de l'échiquier (pour chaque cas), c'est à dire sur les 8 premières cases.
Le général a : 1+1 001+2 001+3 001+4 001+5 001+6 001+7 001 = 28 008 grains.
Le conseiller a : 1+2+4+8+16+32+64+128 = 255 grains.

Calculez vous-même le nombre total de grains sur les deux premières lignes de l'échiquier (pour chaque cas), c'est à dire sur les 16 premières cases.
Le général a : 1+1 001+2 001+…+14 001+15 001 = … … grains.
Le conseiller a : 1+2+…+16 384+32 768 = … … grains.

Calculez encore vous-même le nombre total de grains sur les trois premières lignes de l'échiquier (pour chaque cas), c'est à dire sur les 24 premières cases.
Le général a : 1 + 1 001 + 2 001 + … + 22 001 + 23 001 = … … grains.
Le conseiller a : 1 + 2 + … + 4 194 304 + 8 388 608 = … … … grains.

On pourrait poursuivre ainsi le calcul jusqu'à la 64ème case, mais nous allons voir, et c'est l'un des objectifs de ce chapitre, qu'il y a une méthode rapide de calcul de telles sommes.

Pour le général (donc pour une suite arithmétique), remarquons, pour la première ligne de l'échiquier, qu'en réunissant la 1ère et la 8ème cases, on a le même nombre de grains (1 + 7 001 = 7 002) qu'en réunissant la 2ème et la 7ème cases (1 001 + 6 001 = 7 002), la 3ème et la 6ème, la 4ème et la 5ème.
Le nombre total de grains sur la première ligne de l'échiquier peut alors se calculer ainsi :
nb de grain sur la 1ère case + nb de la 2ème + nb de la 3ème + nb de la 4ème + nb de la 5ème + nb de la 6ème + nb de la 7ème + nb de la 8ème =
(nb de grain sur la 1ère case + nb de la 8ème) + (nb de la 2ème + nb de la 7ème) + (nb de la 3ème + nb de la 6ème) + (nb de la 4ème + nb de la 5ème) =
7002 + 7002 + 7002 + 7002 =
$4 \times 7002 = 28\,008$.
On retrouve bien le résultat trouvé précédemment.

La même remarque peut s'appliquer pour les deux premières lignes de l'échiquier : en réunissant la 1ère et la 16ème cases, on a le même nombre de grains (1 + 15 001 = 15 002) qu'en réunissant la 2ème et la 15ème cases, la 3ème et la 14ème, la 4ème et la 13ème, … etc. jusqu'à la 8ème et la 9ème.
Calculez alors vous-même le nombre total de grains sur les deux premières lignes de l'échiquier :
nb de grain sur la 1ère case + nb de la 2ème + … … + nb de la 15ème + nb de la 16ème =
(nb de la 1ère case + nb de la 16ème) + (nb de la 2ème + nb de la 15ème) + …
… + (nb de la 8ème + nb de la 9ème) =
15 002 + 15 002 + … + 15 002 =
$\ldots \times 15\,002 = \ldots\ldots$

Retrouvez-vous le résultat précédent ?

Faites la même remarque pour les trois premières lignes de l'échiquier : en réunissant la 1ère et la … … cases, on a le même nombre de grains (1 + … … = … …) qu'en réunissant la 2ème et la … … cases, la 3ème et la … …, … etc. jusqu'à la …ème et la …ème.

Calculez alors vous-même le nombre total de grains sur les trois premières lignes de l'échiquier :

nb de grain sur la 1ère case + nb de la 2ème + … … + nb de la 24ème =
(nb de la 1ère case + nb de la …ème) + (nb de la 2ème + nb de la …ème) + …
… + (nb de la …ème + nb de la …ème) =
… … + … … + … + … … =
… $\times$ … … = … …

Retrouvez-vous le résultat précédent ?

On peut directement faire la même remarque pour l'échiquier entier : en réunissant la 1ère et la 64ème cases, on a le même nombre de grains (1 + 63 001 = 63 002) qu'en réunissant la 2ème et la 63ème cases, la 3ème et la 62ème, … etc. jusqu'à la 32ème et la 33ème.

Le nombre total de grains sur l'échiquier peut alors se calculer ainsi :

nb de grain sur la 1ère case + nb de la 2ème + … … + nb de la 64ème =
(nb de la 1ère case + nb de la 64ème) + (nb de la 2ème + nb de la 63ème) + …
… + (nb de la 32ème + nb de la 33ème) =
63 002 + 63 002 + … + 63 002 =
32 $\times$ 63 002 = 2 016 064 grains.

Au total, le général en chef récupèrera 2 016 064 grains sur l'échiquier.

Pour le conseiller (donc pour une suite géométrique), le phénomène n'est pas le même. On peut vérifier qu'en réunissant la 1ère et la 8ème cases (1 + 128 = 129), on n'a pas le même nombre de grains qu'en réunissant la 2ème et la 7ème cases (2 + 64 = 66).

Mais une autre remarque va nous permettre quand même de calculer le nombre total de grains sur la première ligne de l'échiquier, les deux premières lignes, les trois premières, sur l'échiquier entier.

On a vu que le nombre total de grains sur la première ligne (les 8 premières cases) est de 255.

On peut remarquer que c'est égal à : (nb de grains sur la 9ème case) – 1.

De même, on a vu que le nombre total de grains sur les deux premières lignes (les 16 premières cases) est de 65 535.

On peut remarquer que c'est égal à : (nb de grains sur la 17ème case) – 1.

Vérifiez qu'on a le même phénomène pour le nombre total de grains sur les trois premières lignes.

En admettant que le phénomène soit toujours valable, calculez le nombre total de grains sur l'échiquier entier.

On vérifie ainsi la subtilité du conseiller qui au total aura environ $1{,}8 \times 10^{19}$ grains (environ 9×10^{11} t ce qui est probablement supérieur à la quantité totale de blé produite par la Terre depuis la naissance de l'humanité).

B Cours

1. Somme de *n* termes consécutifs d'une suite arithmétique

Rappel Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $1+2+\ ...\ +n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Soient (u_n) la suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r et N un entier naturel.

On cherche à évaluer la somme S_N des N premiers termes de la suite (u_n) :

$S_N=\sum_{k=0}^{N-1} u_k=u_0+u_1+...+u_{N-1}$ (si le 1er terme de la somme est le terme de rang 0 alors le N-ième terme de la somme est le terme de rang (N-1)).

On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n=u_0+nr$ donc :

$$S_N=u_0+(u_0+1\times r)+(u_0+2\times r)+...+\left[u_0+(N-1)\times r\right]$$

$$=\underbrace{u_0+u_0+...+u_0}_{N \text{ fois } u_0}+\left(1+2+...+(N-1)\right)\times r$$

$$=Nu_0+\frac{(N-1)\left[(N-1)+1\right]}{2}\times r$$

$$=Nu_0+\frac{(N-1)N}{2}\times r$$

(formule $\sum_{k=1}^{n} k$ appliqué à $n=N$–1).

On déduit de cela, la propriété suivante.

Propriété 1

Soient (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0, N un entier naturel et S_N la somme des N premiers termes de la suite (u_n) : $S_N=\sum_{k=0}^{N-1} u_k=u_0+u_1+...+u_{N-1}$

Alors : $S_N=N\times\frac{u_0+u_{N-1}}{2}$

Autrement dit : $S=\text{Nombre de termes}\times\frac{1^{\text{er}}\text{ terme}+\text{dernier terme}}{2}$.

Démonstration On a :

$$N\times\frac{u_0+u_{N-1}}{2}=N\times\frac{u_0+\left[u_0+(N-1)\times r\right]}{2}=N\times\frac{2u_0+(N-1)\times r}{2}=$$

$$=Nu_0+\frac{N(N-1)}{2}\times r.$$

On trouve bien S_N ce qui prouve que : $S_N = N \times \dfrac{u_0 + u_{N-1}}{2}$.

▸ Exemple 1 Calculer la somme des n premiers nombres impairs.

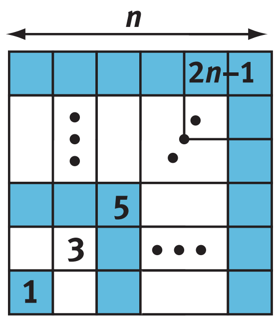
Solution

La suite des entiers naturels impairs est 1 ; 3 ; 5 ; … c'est une suite arithmétique de raison 2 et de 1^er^ terme $u_1 = 1$. Le n-ième terme est donc $u_n = u_1 + 2(n-1) = 2n-1$ (si le 1^er^ terme de la suite est le terme d'indice 1, le n-ième est le terme d'indice n).

On cherche donc : $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$. On a (somme des n premiers termes d'une suite arithmétique) :

$$S_n = n\times\frac{u_1+u_n}{2} = n\times\frac{1+(2n-1)}{2} = n\times\frac{2n}{2} = n^2.$$

Le dessin ci-contre illustre bien cette formule.



n^2 carrés

2. Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique

Soient (u_n) la suite géométrique de 1^er^ terme u_0 et de raison q et N un entier naturel.

On cherche à évaluer la somme S_N des N premiers termes de la suite (u_n) :

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{N-1}.$$

On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ donc :

$$S_N = u_0 + (u_0\times q^1) + (u_0 \times q^2) + \ldots + \left[u_0 \times q^{N-1}\right]$$

$$= u_0 \times \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1}\right)$$

On déduit de cela, la propriété suivante.

Propriété 2

Soient (u_n) la suite géométrique de 1^er^ terme u_0, N un entier naturel et S_N la somme des N premiers termes de la suite (u_n) : $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{N-1}$.

- Si $q = 1$ alors $S_N = N \times u_0$
- Si $q \neq 1$ alors $S_N = u_0 \times \dfrac{1-q^N}{1-q}$. Autrement dit : $S = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.

Démonstration On a : $S_N = u_0 \times \left(1+q+q^2+...+q^{N-1}\right)$.

De plus, on sait que :

$$1+q+q^2+...+q^n = n+1 \text{ si } q=1$$
$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ sinon}$$

Ce qui prouve bien la propriété.

Remarque On a aussi $1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (si $q \neq 1$).

Exemple 2 Calculer $S = \sum_{k=0}^{10} 2^k = 1+2+2^2+...+2^{10}$.

Solution

On a : $S = 1+2+2^2+...+2^{10} = \frac{2^{11}-1}{2-1} = 2047.$

Remarque De nouvelles identités remarquables.

Pour tout q de $\mathbb{R}$, $q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+...+q+1) = (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^k$

Par exemple, $q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$ ou $q^4-1=(q-1)(q^3+q^2+q+1)$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8=0.$

Solution

1 n'est pas solution de cette équation. Pour tout $x \neq 1$,

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8 = x \times \frac{x^8-1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \times \left(x^4-1\right) \times \left(x^4+1\right)$$
$$= \frac{x}{x-1} \times \left(x^2-1\right) \times \left(x^2+1\right) \times \left(x^4+1\right)$$
$$= x \times \left(x+1\right) \times \left(x^2+1\right) \times \left(x^4+1\right)$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout réel x (y compris pour 1).

On a alors :

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8=0 \Leftrightarrow x(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)+0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x+1=0 \text{ ou } x^2+1=0 \text{ ou } x^4+1=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

(un carré étant toujours positif ou nul, pour tout réel x, $x^2+1\geq 1>0$ et $x^4+1>0$ donc $x^2+1\neq 0$ et $x^4+1\neq 0$).

L'ensemble des solutions de l'équation $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8=0$ est donc $S=\{-1\,;\,0\}$.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de 1er terme $u_0=a$.

1. On suppose que $a=1$ et $r=3$. Calculer $\sum_{k=0}^{20} u_k = u_0+u_1+...+u_{20}$.
2. On suppose que $a=-1$ et $r=\frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=1}^{25} u_k = u_1+...+u_{20}$.
3. On suppose que $a=\frac{1}{3}$ et $r=-\frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=7}^{21} u_k = u_7+u_8+...+u_{21}$.
4. On suppose que $a=2$ et $\sum_{k=0}^{200} u_k = u_0+u_1+...+u_{200} = -4623$. Calculer r.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer 25 entiers naturels consécutifs dont la somme est 1000.
2. Calculer $S = 17 + 21 + 25 + \ldots + 201$.
3. Calculer la somme des multiples de 7 compris entre 1500 et 2000.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de 1er terme $u_0=a$.

1. On suppose que $a=1$ et $q=3$. Calculer $\sum_{k=0}^{8} u_k = u_0+u_1+...+u_8$.
2. On suppose que $a=-1$ et $q=\frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=1}^{11} u_k = u_1+...+u_{11}$.
3. On suppose que $a=\frac{1}{3}$ et $r=-\frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=6}^{11} u_k = u_6+u_7+...+u_{11}$.

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

❶ Calculer $S = 1 + 3 + 9 + \ldots + 729$.

❷ Calculer $S = 2 + 10 + 50 + 250 + \ldots + 31\,250$.

Exercice 5 Une population de bactéries en culture augmente de t % par jour. On note P cette population au premier jour de l'expérience.

❶ Exprimer en fonction de P et t l'effectif P_1 de cette population au bout d'un jour, l'effectif de P_2 au bout de deux jours.

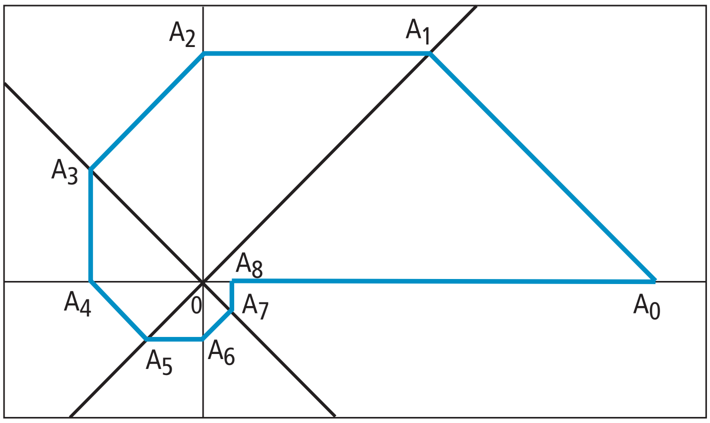
❷ Donner un encadrement à 10^{-2} près de t à l'aide de la calculatrice sachant que la population a doublé en une semaine.

Exercice 6 Les 4 droites de la figure ci-contre sont sécantes en O et définissent 8 angles de 45°. Le point A_0 est tel que $OA_0 = 1$ et les triangles OA_nA_{n+1} sont isocèles et rectangles en A_{n+1}.

❶ On pose $u_n = OA_n$; montrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

❷ Calculer la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots\ldots A_8$.

❸ Quelle est l'aire du polygone $A_0A_1A_2 \ldots\ldots A_8$?



3 Notion de limite de suite

La notion de limite de suite sera étudiée en terminale. Le programme de 1ère présente une approche de cette notion.
Pour cette raison, ce chapitre est essentiellement constitué d'activités et les résultats qui y sont mis en évidence ne sont pas exigibles.

A Les suites $\left(n^2\right), \left(\sqrt{n}\right), \left(n^3\right), \left(\dfrac{1}{n}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Activité 1 Remplir le tableau ci-dessous qui donne les valeurs des « suites de référence » :

N	100	1000	10^6	10^{10}
$\sqrt{n}$				
n^2				
n^3				

Quelle semble être la limite de $(\sqrt{n}), (n^2), (n^3)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Déterminer N tel que pour tout $n \geq N$, $\sqrt{n} \geq 10^3$; $\sqrt{n} \geq 10^{10}$; $\sqrt{n} \geq 10^{30}$.
Faire de même pour les deux autres suites.

Activité 2 ❶ Remplir le tableau ci-dessous qui donne les valeurs des « suites de référence » :

N	100	1000	10^6	10^{10}
$\dfrac{1}{n}$				
$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$				
$\dfrac{1}{n^2}$				
$\dfrac{1}{n^3}$				

❷ Quelle semble être la limite de $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Déterminer N tel que pour tout

$n \geq N, 0 \leq \frac{1}{n} \leq 10^{-3}$; $0 \leq \frac{1}{n} \leq 10^{-18}$; $0 \leq \frac{1}{n} \leq 10^{-30}$.

Faire de même pour les trois autres suites.

3. Synthèse (résultats non exigibles)

Propriété 3

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2\right) = +\infty \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n}\right) = +\infty$

Autrement dit, que le réel A soit aussi grand que l'on veut, tous les termes de la suite $\left(n^2\right)$ (resp. $\left(\sqrt{n}\right)$), à partir d'un certain rang, sont plus grands que A.

Propriété 4

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$

Autrement dit, pour ces suites strictement positives, que le réel r soit aussi proche de 0 (et positif) que l'on veut, tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ (resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$), à partir d'un certain rang, sont dans l'intervalle $[0 ; r]$.

B Autour des suites géométriques

1. Suites géométriques de 1^er terme $u_0 = 1$

Activité 3 Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = q^n$. On désire étudier les différents comportements pour les grandes valeurs de n de la suite $\left(u_n\right)$ selon les valeurs de $q > 0$.

❶ Que peut-on dire de la suite $\left(u_n\right)$ si $q=1$?

❷ A l'aide du tableur, étudier le comportement de la suite lorsque :

a) $q=10$ **b)** $q=2$ **c)** $q=0{,}01$ **d)** $q=\dfrac{1}{2}$

❸ Pour chacune des suites précédentes, répondre par Vrai ou Faux. Lorsque la réponse est vraie, donner la valeur de n_0 .

Tous les termes de la suite $\left(u_n\right)$ à partir du rang n_0 appartiennent à l'intervalle

a) $\left]10\,;+\infty\right[$ **b)** $\left]10000\,;+\infty\right[$ **c)** $\left[0\,;0{,}1\right[$

d) $\left[0\,;0{,}0002\right[$

❹ On suppose $q=\dfrac{1}{2}$. Ecrire un programme déterminant la plus petite valeur N (sortie) telle que $u_N \leq 10^{-P}$ (p : entier naturel, entrée).

On admet le résultat suivant.

Synthèse (non exigible)

Propriété 5

Si $0<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(q^n\right)=0.$

Si $1<q$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(q^n\right)=+\infty$

2. Développement décimal

Activité 4

Partie I

On considère l'algorithme suivant.

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE LISTE
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "D?"
  LIRE N
  AFFICHER "N? (N<D)"
  LIRE D
  AFFICHER "T?"
  LIRE T
  POUR I ALLANT_DE 1 A T
    DEBUT_POUR
    R PREND_LA_VALEUR N%D
    L[I] PREND_LA_VALEUR (N-R)/D
    N PREND_LA_VALEUR 10*R
    AFFICHER L[I]
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On pose $x = \dfrac{41}{99}$.

❶ Faire fonctionner l'algorithme pour N = 41, D = 99 et

a) T = 2 b) T = 8 c) T = 10.

❷ Qu'obtient-on ?

Partie II

On construit la suite (u_n) des valeurs approchées par défaut à 10^{-2n} près de $x = \dfrac{41}{99}$. Ainsi :

$u_1 = 0{,}41$, $u_2 = 0{,}4141$ et $u_3 = 0{,}414141$. On admet que : $u_n = 0{,}41414141...$

❶ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}41 + 0{,}01u_n$.

❷ Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - \dfrac{41}{99}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Que peut-on dire du comportement de la suite (u_n). A quoi serait égal $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

3. Jardinage

Activité 5 Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost initialement vide de 300 litres.

Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.

On appelle V_n le volume en litres stocké le n-ième samedi de tonte.

❶ Calculer V_1 , V_2 et V_3 .

❷ Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n Cette suite est-elle arithmétique ou géométrique ?

Partie I : utilisation du tableur

Programmer la suite sur tableur et répondre aux questions suivantes.

a) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de la suite (V_n) ?

b) Le bac de stockage sera-t-il un jour rempli ?

c) A partir de combien de tontes, la quantité de matière dans le bac sera-t-elle

- supérieure ou égale à 150 L
- supérieure ou égale à 151 L
- supérieure ou égale à 159,99 L
- supérieure ou égale à 160,01 L

Partie II

a) On définit pour tout entier $n \geq 1$, le nombre t_n par $t_n = 160 - V_n$. Démontrer que la suite (t_n) est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer t_n en fonction de n et en déduire le terme général de la suite (V_n).

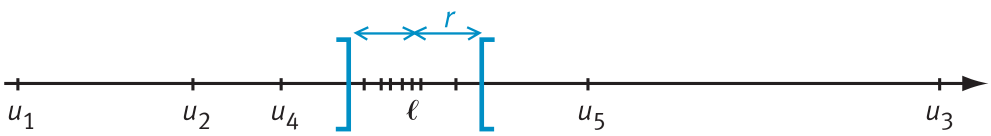
c) Reprendre les questions **2.** a), b) et c) de la partie I.

4. Synthèse

Synthèse

Soit a un réel, (u_n) une suite telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors, quelle que soit la précision choisie, les termes de la suite finiront par être aussi proches que l'on veut de ℓ.

Autrement dit, quel que soit le réel $r > 0$, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $]\ell - r\,;\ \ell + r[$ à partir d'un certain rang.



Si les termes de la suite (u_n) se rapprochent de a (et s'en approchent d'aussi près que l'on veut) pourvu que n soit assez grand, il est assez naturel de penser que tous les termes de la suite $(ku_n + b)$ se rapprochent de $k\ell + b$ (et s'en approchent d'aussi près que l'on veut) pourvu que n soit assez grand.

Autrement dit si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (ku_n + b) = k\ell + b$.

Activité 6

On dispose d'un vase de 10L. A l'étape 1, on verse 5L d'eau dans le vase. A l'étape (n+1), on verse la moitié de ce qu'on a versé à l'étape précédente. On note u_n la quantité d'eau versée à l'étape n.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Montrer qu'après l'étape n, le vase contient $10\left[1 - \dfrac{1}{2^n}\right]$ L.
4. Le vase pourra-t-il être plein ?
5. Le vase pourra-t-il contenir 9,999L ? Si oui après quelle étape ?

C Autres exemples

1. Une somme

Activité 7 **Soit (u_n) la suite définie par**

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

❶ Quel est le nombre de termes contenus dans la somme qui définit u_n?

❷ Déterminer le plus petit et le plus grand de ces termes.

❸ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\le u_n\le 1+\dfrac{1}{n}$.

❹ En utilisant les limites vues au A) et un raisonnement intuitif, déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

❺ Expliquer pourquoi tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]0,99\,;1,01[$ à partir d'un certain rang.

2. Une suite récurrente

Activité 8 On considère la fonction f définie sur $]-3,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$.

❶ Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.

❷ Construire la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé ainsi que la droite D d'équation $y = x$. Que peut-on dire de la droite D par rapport à C ? Le vérifier.

❸ Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=5$ par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

Faire apparaître sur le graphique les premiers termes de la suite.

❹ On pose $v_n=\dfrac{1}{1+u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique ; exprimer (v_n) en fonction de n.

❺ Montrer que pour tout $n>0$, $u_n=\dfrac{2}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{3n}}\right)-1$. Calculer sa limite.

3. Vers l'infini

Activité 9 La suite (u_n) est définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

❶ Ecrire un algorithme donnant les 100 premiers de cette suite.

❷ Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

❸ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{2n}-u_n \geq \frac{1}{2}$.

❹ Montrer que $u_{2^{10}} \geq 1+\frac{10}{2}$ (*on pourra appliquer plusieurs fois le formule précédente).*

❺ Donner un minorant de $u_{2^{100}}$.

❻ Montrer que tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à 1000 à partir d'un certain rang.

❼ Que peut-on conjecturer pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

4 Synthèse de la séquence

1. Somme de *n* termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 1

Soient (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0, N un entier naturel et S_N la somme des N premiers termes de la suite (u_n) : $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_{N-1}$.

Alors : $S_N = N \times \dfrac{u_0 + u_{N-1}}{2}$. Autrement dit : $S = \text{Nombre de termes} \times \dfrac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Propriété 2

Soient (u_n) la suite géométrique de 1er terme u_0, N un entier naturel et S_N la somme des N premiers termes de la suite (u_n) : $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_{N-1}$

- Si $q = 1$ alors $S_N = N \times u_0$
- Si $q \neq 1$ alors $S_N = u_0 \times \dfrac{1-q^N}{1-q}$. Autrement dit :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \quad (\text{raison} : q).$$

2. Limites (résultats non exigibles)

Propriété 3

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2\right) = +\infty \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n}\right) = +\infty$

Autrement dit, que le réel A soit aussi grand que l'on veut, tous les termes de la suite $\left(n^2\right)$ (resp. $\left(\sqrt{n}\right)$) sont plus grands que A à partir d'un certain rang.

Propriété 4

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$$

Autrement dit, pour ces suites strictement positives, que le réel a soit aussi proche de 0 (et positif) que l'on veut, tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ (resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$) sont dans l'intervalle $[0\,;a]$ à partir d'un certain rang.

Propriété 5

Si $0<q<1$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(q^n\right)=0$. Si $1<q$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(q^n\right)=+\infty$

Propriété 6

Soit a un réel, (u_n) une suite telle que : $\lim_{n\to+\infty} u_n=a$, c'est-à-dire que, quelle que soit la précision choisie, les termes de la suite finiront par être aussi proche que l'on veut de a.

Autrement dit, quel que soit le réel $r>0$, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $]a-r\,;a+r[$ à partir d'un certain rang.

Si les termes de la suite (u_n) se rapprochent de a (et s'en approchent d'aussi près que l'on veut) pourvu que n soit assez grand, il est assez naturel de penser que tous les termes de la suite (ku_n+b) se rapprochent de $ka+b$ (et s'en approche d'aussi près que l'on veut) pourvu que n soit assez grand.

Autrement dit si $\lim_{n\to+\infty} u_n=a$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(ku_n+b\right)=ka+b$.

5 Exercices d'approfondissement

Exercice I Remboursement d'emprunt.

Une personne emprunte à sa banque la somme de 10 000€ pour acheter une voiture. Ce prêt est remboursable en 60 mensualités constantes et le taux d'intérêt est de 0,5 % par mois. Cela signifie que chaque mois, l'emprunteur paie les intérêts dus pour le mois écoulé et diminue le capital à rembourser.

M désigne la somme versée chaque mois par l'emprunteur (la mensualité) et C_n le capital restant dû au bout de n mois.

La règle bancaire est : C_{n+1} est égal à C_n augmenté de 0,5 % puis diminué de M.

a) On suppose que M = 200 et on cherche à savoir si le remboursement sera bien achevé au bout de 60 mois.

❶ Ecrire C_{n+1} en fonction de C_n. Quelle est la valeur de C_0?

❷ On pose $D_n = C_n - 40\,000.$ Calculer D_0 et montrer que (D_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison.

❸ En déduire D_n puis C_n en fonction de n.

Calculer C_{60}.
La mensualité de 200€ est-elle trop élevée ou pas assez ?

b) Calcul de M pour que le remboursement se fasse exactement en 60 mensualités.

❶ Ecrire C_{n+1} en fonction C_n et de M.

❷ On pose $D_n = C_n - 200\text{M}.$ Calculer D_0 et montrer que (D_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison.

❸ En déduire D_n puis C_n en fonction de n et de M.

❹ A quelle condition le remboursement sera-t-il effectué à l'issue des 60 mensualités ? Calculer alors M.

❺ Si vous disposez d'un tableur, vous pouvez construire le tableau d'amortissement. (voir corrigé).

Exercice II On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3n - 4$ et $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3n + 4$

On pose $S_n = u_n + v_n$ et $D_n = u_n - v_n$.

❶ Calculer $S_n = s_0 + s_1 + \ldots + s_n$ et $D_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$.

❷ En déduire $U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

Exercice III

On lâche une balle d'un pont d'une hauteur de 100m sur le sol. On suppose que la balle rebondit et que la hauteur d'un rebond est égale à 80% de la hauteur du précédent rebond.

On note r_n la hauteur du n-ième rebond. Ainsi :

$r_0 = 100$ et $r_1 = 100 \times \dfrac{8}{10} = 80$.

❶ Déterminer r_2 et r_3.

❷ **a)** Quelle est la nature de la suite (r_n) ?

b) Exprimer r_n en fonction de n.

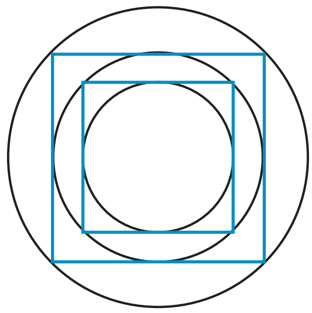
c) Quelle est la hauteur du $10^{\text{ème}}$ rebond ?

❸ En fait, on considère que la balle ne rebondit plus si r_n est inférieur à 10 cm. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier naturel n tel que : $r_n < 0{,}1$. En déduire le nombre de rebonds effectués par la balle.

❹ Déterminer alors la distance totale parcourue par la balle.

Exercice IV

Un cercle de rayon 2 cm est donné. On construit un carré inscrit dans ce premier cercle, puis le cercle inscrit dans ce carré, et ainsi de suite. On suppose que ce programme de construction peut se poursuivre indéfiniment. On note D_1 l'aire en cm^2 du 1^{er} disque, puis D_2, D_3, …, D_n les aires respectives des suivants. On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les aires des carrés. On note de plus $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les rayons des cercles et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les mesures des côtés des carrés.



❶ Calculer r_1, D_1, c_1, C_1 et puis r_2, D_2, c_2 et C_2.

❷ Montrer que la suite (D_n) est géométrique. Exprimer D_n en fonction de n.

❸ Etudier le sens de variation de la suite (D_n).

❹ Conjecturer $\lim\limits_{x \to +\infty} D_n$.

Exercice V

On considère les sommes $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_2 = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$S_3 = 3 + 6 + 9 + \ldots + 3n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

…

$S_n = n + 2n + 3n + \ldots + n^2.$

❶ Exprimer S_1 en fonction de n (un quotient est attendu).

❷ Exprimer $S_2, \ldots S_3, \ldots, S_n$ en fonction de S_1.

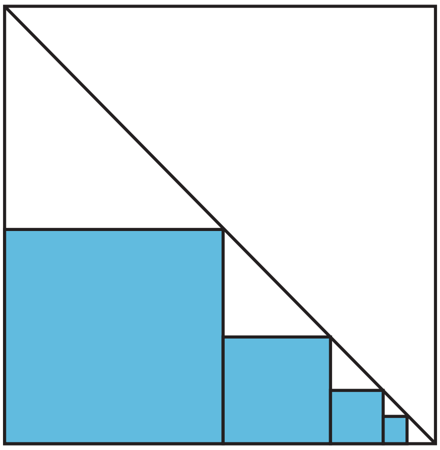
❸ En déduire que $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = S_1^2.$

❹ **a)** Résoudre l'équation $x^2 + x - 20 = 0.$

b) Déterminer n sachant que $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = 100.$

Exercice VI

On a un carré de côté 10 cm. A l'intérieur de ce carré, on construit d'autes carrés plus petits comme indiqué sur la figure ci-contre : le plus grand des carrés hachurés à un côté égal à la moitié de celui du carré initial (5 cm) et les suivants ont toujours un côté égal à la moitié du précédent.



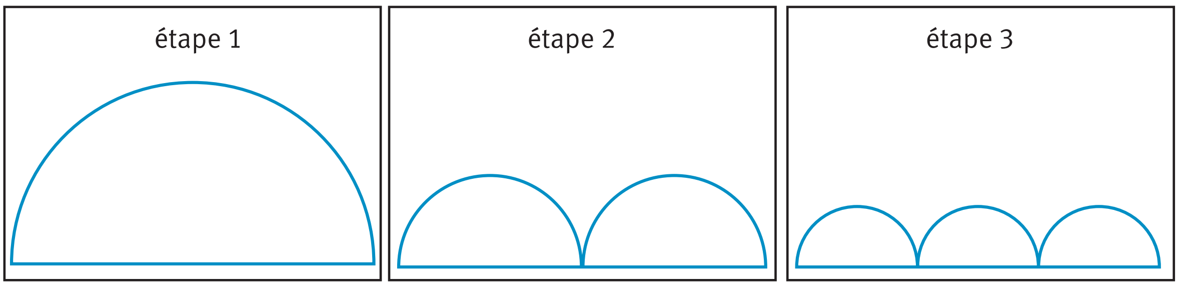
On note c_n le côté du n-ième carré construit dans le grand carré et a_n son aire.

❶ Montrer que les suites (c_n) et (a_n) sont des suites géométriques dont on précisera le premier terme et la raison.

❷ Existe-t-il une valeur de n pour laquelle le sommet inférieur droit du n-ième carré sera à l'extérieur du carré initial ?

❸ Calculer la somme des aires des n premiers carrés (zone hachurée) et montrer qu'elle est toujours inférieure au tiers de l'aire du grand carré.

Exercice VII



On partage un segment de longueur 1 en n segments de même longueur et on trace les n demi disques de diamètres ces segments. Les figures ci-dessus correspondent aux valeurs 1, 2 et 3 de n.

❶ d_n est le diamètre des n demi-cercles ; déterminer d_n et conjecturer sa limite.

❷ L_n est la somme des longueurs de ces n demi cercles. Calculer L_n et conjecturer sa limite.

❸ A_n est la somme des aires des n demi disques ;. Calculer A_n et conjecturer sa limite.

Aide

Exercice I

a)

❷ Exprimer D_{n+1} en fonction de C_{n+1}, puis C_{n+1} en fonction de C_n et enfin C_n en fonction de D_n

❸ La mensualité est insuffisante si à l'issue des 60 mois, le capital n'est pas totalement remboursé.

b)

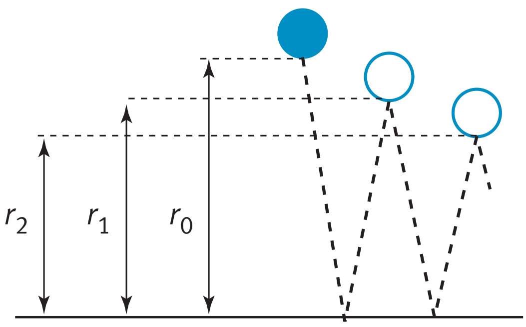
❹ le capital à rembourser à l'issue des 60 mois doit être nul.

Exercice II

1. Rappels :

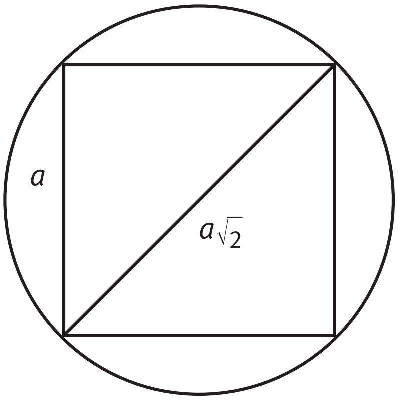
La suite $(an+b)$ est arithmétique de raison a et la suite $\left(aq^n\right)$ est géométrique de raison q.

Exercice III



Exercice IV

La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$ donc si un carré de côté a est inscrit dans un cercle de rayon r, on a : $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Exercice VI

❶ On pourra simplifier $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et remarquer que : $a_n = \left(c_n\right)^2$.

❷ Soit A un point de [BC]. On a A appartient [BC] si et seulement si BA $\leq$ BC.

Exercice VII

❶ Si d_n est le diamètre d'un des n demi-cercles, on a : $\underbrace{d_n + d_n + ... + d_n}_{n \text{ fois}} = nd_n = 1$ donc $d_n = \ldots$

2e partie

Échantillonnage

Sommaire

1 Introduction

Comme on l'a annoncé au début de la séquence 2, ceci est la troisième partie du cours de statistiques-probabilité.

Après avoir étudié les statistiques descriptives, puis, en probabilité, avoir défini les variables aléatoires, leurs lois de probabilité, en particulier les lois binomiales, nous abordons ici un troisième point de vue, celui des statistiques inférentielles. On appelle ainsi la partie des statistiques qui consiste, à partir d'un échantillon pris dans une population, à estimer des paramètres de cette population ou à prendre des décisions sur des hypothèses faites sur la population totale.

En classe de première S, nous verrons comment on peut utiliser une loi binomiale pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion dans une population à partir de la fréquence observée sur un échantillon. En terminale S, de nouvelles notions permettront de faire des estimations.

Des exemples réels montreront comment l'argumentation statistique peut être utilisée dans la vie courante.

Ces méthodes statistiques interviennent de plus en plus dans le domaine de la santé, de la vie sociale, économique …

Cette partie utilise des éléments de l'article *La prise de décision de la Seconde à la Première* de Yves Ducel et Bruno Saussereau, publié dans le numéro 85 de la revue Repères IREM (octobre 2011) ainsi que différents travaux de l'IREM de Paris-Nord.

2 Pré-requis

A Seconde - Intervalle de fluctuation

Un **échantillon** de **taille *n*** est obtenu par n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire.

Dans le cas où l'expérience qui est répétée n'a que deux issues, on dit qu'un tel échantillon relève du modèle de Bernoulli, ce sera toujours le cas ici pour les études de proportion d'un caractère dans une population.

Les fréquences varient d'un échantillon à l'autre. Ce phénomène, qui s'observe facilement, est appelé **fluctuation d'échantillonnage.**

Propriétés

On établit, et on admet en Seconde, que, pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et une proportion p du caractère dans la population telle que $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$, la fréquence f du caractère dans l'échantillon appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité proche de 0,95 et d'au moins 0,95.

Définition

On dit que l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un **intervalle de fluctuation** au seuil de 95%.

▶ **Utilisation**

On se sert de ce résultat pour décider si un échantillon donné d'une population statistiquement connue est un échantillon compatible ou non avec le modèle, c'est-à-dire si la fréquence observée est simplement due au hasard et à la fluctuation d'échantillonnage ou si elle est significative d'une situation anormale par rapport aux valeurs attendues.

Règles de décision

Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ on décide que l'échantillon est conforme au modèle ; si la fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, on décide que la situation est anormale.

Remarque La propriété énoncée ci-dessus a pour conséquence que, pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et une proportion p du caractère dans la population telle que $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8,$ la fréquence f du caractère dans l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,05.

Ainsi, environ 5% des échantillons « normaux » ont une fréquence qui n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation.

D'après la règle de décision qui a été choisie, quand on décide qu'un échantillon n'est pas « normal » on peut se tromper dans certains cas, mais le risque est assez faible (seulement 5% des cas « normaux » seront rejetés par erreur).

B Probabilité

Nous utiliserons des notions et des résultats des séquences 3 et 6, en particulier ce qui concerne les répétitions d'expériences identiques et indépendantes et les lois binomiales.

Les probabilités issues d'une loi binomiale seront calculées avec un tableur ou une calculatrice.

3 Échantillonnage

A Activités

Activité 1 Intervalle de fluctuation et conditions d'utilisation

Pile ou Face

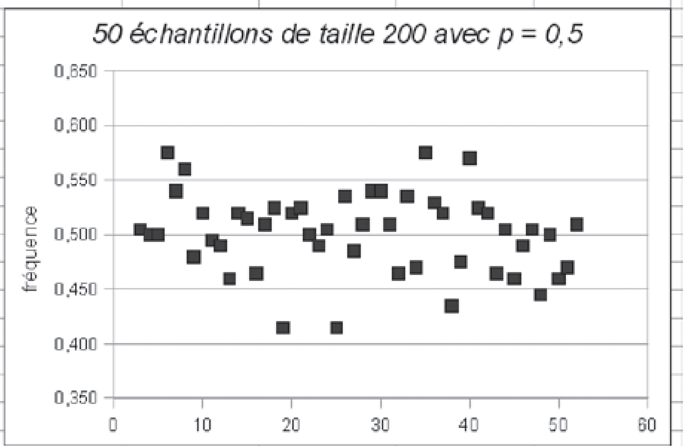
❶ On lance une pièce équilibrée ; on sait que la fréquence théorique de sortie de Pile est $p = 0{,}5$.

On simule l'obtention de 50 échantillons de taille 200

Avec un tableur

GR3 =ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)+GQ3

	GQ	GR	GS
1			
2			
3	101	101	0,505
4	99	100	0,500
5	99	100	0,500
6	114	115	0,575
7	107	108	0,540
8	111	112	0,560
9	96	96	0,480
10	103	104	0,520
11	99	99	0,495
12	97	98	0,490
13	91	92	0,460
14	104	104	0,520
15	103	103	0,515
16	93	93	0,465
17	101	102	0,510



Dans la ligne 3, jusqu'à la cellule GR3, on a simulé un échantillon en réalisant 200 fois une épreuve de Bernoulli avec $p = 0{,}5$, en accumulant les résultats dans les cellules successives.

On a recopié vers le bas pour obtenir 50 échantillons.

Dans la colonne GR se trouvent donc les nombres de fois où on a obtenu Pile dans chaque échantillon.

Dans la colonne suivante on a calculé les fréquences qui sont représentées dans le graphique.

a) Réaliser cette feuille de calcul.

b) Pour faire apparaître les bornes de l'intervalle de fluctuation $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ au seuil de 95%, indiquer ces valeurs dans les cellules GS1 et GS2 (ces bornes correspondront aux deux points les plus à gauche du graphique) et refaire le graphique.

c) Effectuer plusieurs simulations en utilisant CTRL MAJ F9 (ou seulement F9 selon le tableur). En se référant à la propriété énoncée dans les pré-requis, commenter ce qui est observé.

Avec une calculatrice

Pour cela, on tire au hasard un nombre de l'intervalle [0 ;1[et on assimile la sortie de Pile à l'affichage d'un nombre dans l'intervalle [0 ; 0,5[.

Voici un programme qui permet d'obtenir 50 échantillons de taille 200.

TI

```
Program : PILEFACE
: For (J,1,50)
: 0 → X
: For(I,1,200)
: If rand<0.5
: Then    : X+1 → X
: End
: End
: J → L1(J)
: (X / 200) → L2(J)
: End
```

Casio

```
PILEFACE
For1 → J To 50↵
0 → X↵
For 1 → I To 200↵
If (Rand# < 0.5)↵
Then↵
X+1 → X↵
IfEnd↵
Next↵
J → List 1[J]↵
(X ÷ 200) → List 2[J]↵
Next↵
```

Remarque : Avant d'éxécuter ce programme sur la calculatrice Casio, il convient de définir la dimension des listes 1 et 2. Une façon de faire est de remplir ces listes avec des «1» en tapant la séquence Seq (1, I, 1, 50, 1) après avoir sélectionné la liste dan sle menu Stat.

Lancer ce programme (attention : sa réalisation peut prendre plusieurs minutes). Ouvrir le menu STAT et expliquer le contenu du tableau.

a) Afficher à l'écran les points dont les coordonnées sont données par le tableau précédent (des indications sont données dans la séquence 2 - partie 1) et faire apparaître l'intervalle de fluctuation $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ au seuil de 95% en traçant deux droites dont on donnera les équations.

b) En se référant à la propriété énoncée dans les pré-requis, commenter ce qui est observé.

❷ Cas où $n < 25$

a) Modifier le programme ou la feuille de calcul pour réaliser la simulation de 50 échantillons de taille 20.

b) En se référant à la propriété énoncée dans les pré-requis, commenter ce qui est observé.

❸ Cas où $p < 0{,}2$ ou $p > 0{,}8$

a) Modifier le programme ou la feuille de calcul pour réaliser la simulation de 50 échantillons de taille 200, lorsque la fréquence théorique est $p = 0{,}1$, puis $p = 0{,}9$.

b) En se référant à la propriété énoncée dans les pré-requis, commenter ce qui est observé.

Activité 2

Monsieur Z, chef d'un gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52% des électeurs lui font confiance. On réalise un sondage dans cette population en interrogeant 80 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).

❶ On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est $p = 0{,}52$.

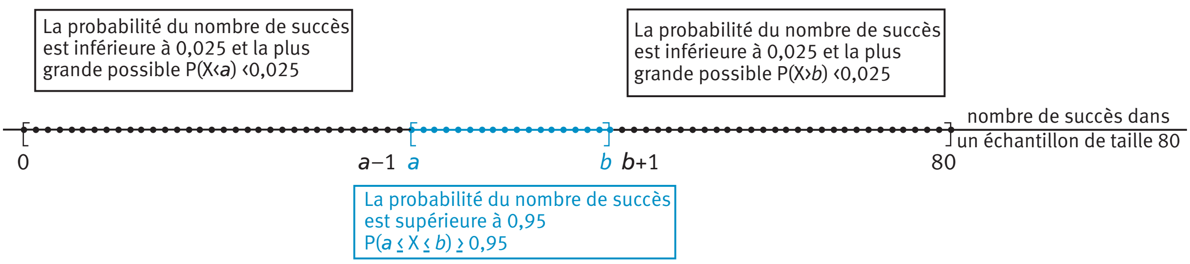
Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 80 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}52$.

❷ A l'aide d'un tableur, donner la loi de probabilité de X et sa représentation graphique.

❸ Faire aussi apparaître dans une colonne adjacente les valeurs de $P(X \le k)$ avec k entier de 0 à 80.

❹ On cherche à partager l'intervalle [0 ; 80] où X prend ses valeurs entières, en trois intervalles [o ; a[, [a ; b] et]b ; 80] de sorte que X prenne ses valeurs dans chacun des intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,025, sans dépasser cette valeur :

$P(X < a) \le 0{,}025$, $P(a \le X \le b) \ge 0{,}95$ et $P(X > b) \le 0{,}025$.



a) Pour déterminer les entiers a et b on va utiliser la colonne du tableur qui donne les probabilités $P(X \le k)$ pour k entier de 0 à n.

Comme X prend des valeurs entières, la condition sur l'intervalle de gauche peut aussi s'écrire $P(X \le a-1) \le 0{,}025$ et le nombre a est donc le plus petit entier pour lequel la probabilité dépasse 0,025, soit $\boxed{P(X \le a) > 0{,}025}$.

Pour le nombre b il suffit d'utiliser l'événement contraire, en effet $P(X > b) \le 0{,}025$. équivaut à $1 - P(X > b) \ge 1 - 0{,}025$ soit $P(X \le b) \ge 0{,}975$. Donc b est le plus petit entier tel que $\boxed{P(X \le b) \ge 0{,}975.}$ Utiliser le tableur pour donner les valeurs des nombres entiers a et b.

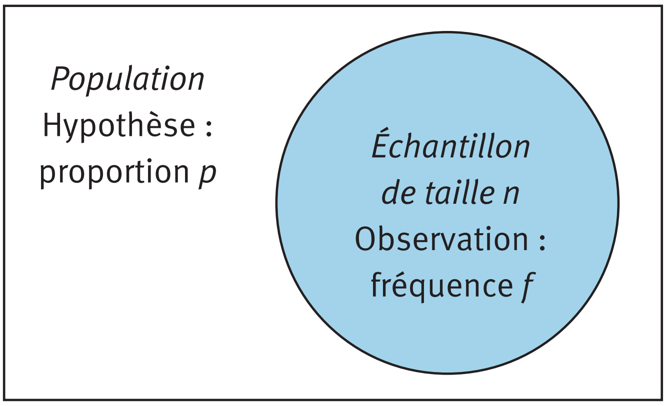
b) Comparer l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% considéré en seconde.

5 Sur les 80 électeurs interrogés au hasard, 32 déclarent avoir confiance en Monsieur Z.

Peut-on émettre un doute sur le pourcentage de 52% annoncé par Monsieur Z ?

B Cours

1. Intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence et loi binomiale. Cas général.



On généralise, dans le cas général, ce qui a été fait dans l'activité 2.

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un certain caractère est p. Pour juger de cette hypothèse, on y prélève, au hasard et avec remise un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.

On rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion dans la population est p lorsque la fréquence f observée est trop éloignée de p, dans un sens ou dans l'autre. On choisit de fixer le seuil de décision de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5%.

Lorsque la proportion dans la population vaut p, la variable aléatoire X, correspondant au nombre de fois où le caractère est observé dans un échantillon de taille n, suit la loi binomiale de paramètres n et p (pour chacun des n éléments de l'échantillon, il y a succès si l'élément possède le caractère étudié et échec si ce n'est pas le cas).

On cherche à partager l'intervalle $[0 ; n]$, où X prend ses valeurs entières, en trois intervalles $[0 ; a[$, $[a ; b]$, $]b ; n]$, de sorte que X prenne ses valeurs dans chacun des intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,025, sans dépasser cette valeur.

En affichant, sur un tableur ou une calculatrice, les probabilités $P(X \leq k)$, pour k entier de 0 à n, il suffit, comme on l'a vu dans l'activité 2, de déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Définition 1

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de succès dans un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $\left[a\,;b\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \le a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \le b) \ge 0{,}975$.

Remarque Concernant les probabilités, il faut faire attention aux inégalités stricte ou non. On a vu, dans l'activité 2 ❹, pourquoi on obtient ces inégalités en partant des conditions $P(X > a) \le 0{,}025$ et $P(X > b) \le 0{,}025$ où a et b ont des rôles symétriques.
Heureusement, dans la pratique, il y a peu de risques d'erreurs car il est rarissime d'obtenir des égalités.

Règle de décision

Si le nombre de succès observé appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de succès, $\left[a\,;b\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Propriété

La probabilité qu'un résultat, obtenu suivant le modèle de la loi binomiale, soit

- dans la zone de rejet à gauche est au plus 2,5 %,
- soit dans la zone de rejet à droite est au plus 2,5 %,
- soit dans l'intervalle de fluctuation est au moins 95 %.

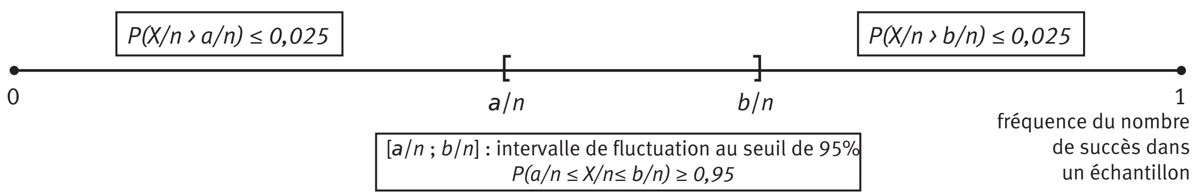
Mais, le plus souvent, on a l'habitude d'utiliser la fréquence des succès plutôt que le nombre de succès.

Il suffit de diviser par n, le nombre d'éléments de l'échantillon, on obtient donc la variable aléatoire $\frac{X}{n}$ qu'on peut appeler la fréquence théorique du nombre de succès (qu'il ne faut pas confondre avec la fréquence f observée dans un échantillon).
On obtient alors la définition et la règle de décision suivantes.

Définition 2

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.



Règle de décision

Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence, $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Remarque

- Les entiers a et b dépendent de la taille n de l'échantillon.
- L'intervalle de fluctuation d'une variable aléatoire X de paramètre n et p est valable sans aucune condition sur les variables n et p ce qui n'était pas le cas de l'intervalle de fluctuation utilisé en Seconde.
- On peut adapter cette méthode à d'autres pourcentages et déterminer des intervalles de fluctuation à 90%, à 99%..., suivant les besoins.
- Pour $n \geq 25$ et $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$, on pourra observer dans des exercices que l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ de fluctuation d'une fréquence à 95% est sensiblement le même que l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu en Seconde (comme on l'a vu dans l'activité 2).
- Dans certaines situations, la constitution d'un échantillon ne se fait pas avec remise : sondage d'opinion, test de qualité (par exemple sur des œufs, des allumettes…) qui entraîne la destruction de l'objet étudié. Dans le cas où la population est suffisamment nombreuse, on appliquera les résultats précédents à ces cas de tirages sans remise qui peuvent alors être assimilés à des tirages avec remise (c'est ce qui a été fait dans l'activité 2 et qui va être fait dans l'exemple 1).

2. Intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence et loi binomiale : étude de deux exemples

Nous allons étudier deux exemples, la solution du premier est très détaillé pour bien mettre en évidence les différentes étapes. La solution du second correspond davantage à ce qui peut vous être demandé dans un exercice. L'intervalle de fluctuation rencontré en Seconde n'est pas utilisable dans le premier cas parce que p est trop petit, et, dans le second cas, parce que n est trop petit.

▸ **Exemple 1**

Pour faire un contrôle de qualité dans une usine automobile, on étudie les défauts de peinture « grains ponctuels sur le capot » (quasiment invisibles pour le client). Lorsque le processus est sous contrôle, on a 10% de ce type de défaut, c'est-à-dire que la proportion de capots présentant ce défaut de peinture dans la production totale est $p = 0{,}10$.
On choisit un échantillon de 200 capots et on observe 26 capots défectueux. Faut-il s'en inquiéter ?
(Un constructeur d'automobiles français a effectivement pratiqué ce type de contrôle de qualité.)

Solution

Comme la population étudiée est très grande (les capots de toutes les voitures fabriquées par l'usine), on peut considérer que le nombre de capots défectueux X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}1$.

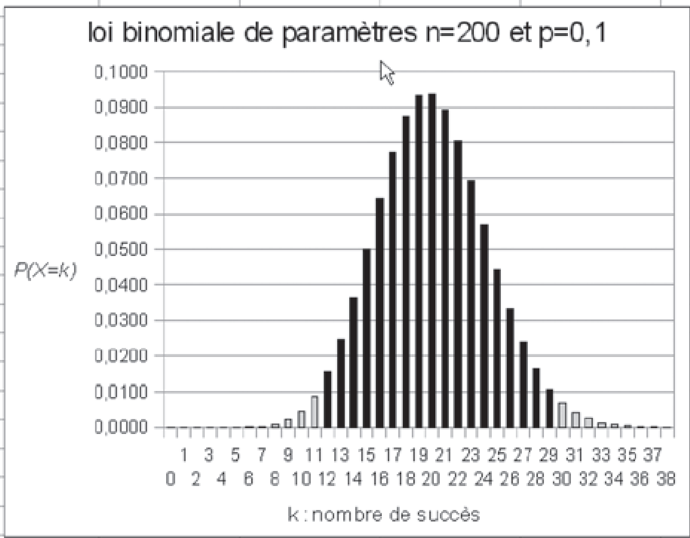
Comme $p < 0{,}2$, nous ne pouvons pas utiliser l'intervalle de fluctuation utilisé en Seconde, mais nous pouvons utiliser l'intervalle de fluctuation déterminé à l'aide de la loi binomiale.

Représentons cette loi binomiale à l'aide d'un tableur.

Nous écrirons les entiers k de 0 à 200 dans la colonne A, $P(X = k)$ dans la colonne B en recopiant la formule =LOI.BINOMIALE(A2;200;0,1;0) et dans la colonne C, $P(X \le k)$ en recopiant la formule =LOI.BINOMIALE(A2;200;0,1;1) qui permet d'obtenir $P(X \le k)$ pour k compris entre 0 et 200.

=LOI.BINOMIALE(A2;200;0,1;1)

k	$P(X=k)$	$P(X\le k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0001	0,0001
7	0,0003	0,0005
8	0,0009	0,0014
9	0,0021	0,0035
10	0,0045	0,0081
11	0,0087	0,0168
12	**0,0153**	**0,0320**
13	0,0245	0,0566
14	0,0364	0,0929
15	0,0501	0,1431
16	0,0644	0,2075
17	0,0775	0,2849
18	0,0875	0,3724
19	0,0931	0,4655
20	0,0936	0,5592
21	0,0892	0,6484
22	0,0806	0,7290
23	0,0693	0,7983
24	0,0568	0,8551
25	0,0444	0,8995
26	0,0332	0,9328
27	0,0238	0,9566
28	0,0163	0,9729
29	**0,0108**	**0,9837**
30	0,0068	0,9905
31	0,0042	0,9946



On a indiqué d'une couleur différente les bâtons correspondants à des valeurs de k situées en dehors de l'intervalle de fluctuation à 95% du nombre de succès.

En utilisant la colonne C, on détermine les nombres entiers a et b tels que

- a soit le plus petit entier tel que $P(X \le a) > 0{,}025$
- b soit le plus petit entier tel que $P(X \le b) \ge 0{,}975$.

On trouve $a = 12$ car 12 est la première valeur de k pour laquelle la probabilité $P(X \le k)$ dépasse 0,025. Et la valeur de b est 29, car 29 est la première valeur de k pour laquelle la probabilité $P(X \le k)$ dépasse 0,975.

L'intervalle de fluctuation à 95% du nombre de succès est donc [12 ; 29].

Vérifions sur cet exemple que la probabilité que X appartienne à l'intervalle [12 ; 29] est supérieure à 0,95.

Comme on a $(X \leq 29) = (X \leq 11) \cup (12 \leq X \leq 29)$ et qu'il s'agit de la réunion d'événements disjoints, on obtient $P(X \leq 29) = P(X \leq 11) + P(12 \leq X \leq 29)$ donc $P(12 \leq X \leq 29) = P(X \leq 29) - P(X \leq 11)$

On a $P(X \leq 11) \leq 0{,}025$ donc $-P(X \leq 11) \geq -0{,}025$,

et comme $P(X \leq 29) \geq 0{,}975$, en ajoutant terme à terme ces inégalités de même sens on obtient $P(X \leq 29) - P(X \leq 11) \geq 0{,}975 - 0{,}025$ soit $P(12 \leq X \leq 29) \geq 0{,}95$.

Si on raisonne en terme de fréquence, l'échantillon étant de taille 200, on obtient que $P\left(\frac{12}{200} \leq \frac{X}{200} \leq \frac{29}{200}\right) \geq 0{,}95$ soit $P\left(0{,}06 \leq \frac{X}{200} \leq 0{,}145\right) \geq 0{,}95$. L'intervalle de fluctuation à 95% des fréquences est $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right] = [0{,}06 ; 0{,}145]$.

La règle de décision est donc que, en appelant f la fréquence de capots défectueux dans un échantillon de taille 200, si f appartient à l'intervalle $[0{,}06 ; 0{,}145]$ la situation est jugée normale, mais si f n'est pas dans cet intervalle la situation sera jugée anormale.

Les 26 capots défectueux sur les 200 observés correspondent à une fréquence de 0,13 (ou 13%), et 0,13 appartient à l'intervalle de fluctuation [0,06 ; 0,145], nous considérerons donc que la fréquence observée dans cette échantillon est normale et qu'il n'y a pas de raison de s'inquiéter.

On peut aussi raisonner sur les effectifs observés et l'intervalle $[a ; b]$ (on le fera dans le corrigé de l'exercice 2), mais en général on raisonne avec les fréquences observées.

▸ Exemple 2

Dans un jeu, le joueur doit deviner si le dé qui va être lancé va donner un nombre pair ou impair.

1. Pour une suite de dix nombres, le joueur devine 8 réponses correctes. Que penser de ce résultat ?

2. Pour une suite de vingt nombres, le joueur devine 16 réponses correctes. Que penser de ce résultat ?

Solution

On suppose que le jeu se fait au hasard, donc que la probabilité de deviner correctement le résultat pour un nombre est $p = 0{,}5$.

k	$P(X \leq k)$
0	0
1	0,01
2	**0,05**
3	0,17
4	0,38
5	0,62
6	0,83
7	0,95
8	**0,99**
9	1
10	1

1. Le calcul des probabilités $P(X \leq k)$ montre que $a = 2$ et $b = 8$. Comme $n = 10$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour les fréquences est $\left[\frac{2}{10} ; \frac{8}{10}\right]$ soit $[0{,}2 ; 0{,}8]$. Le joueur a donné 8 réponses correctes sur 10, la fréquence observée est donc $f = 0{,}8$.

La fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation donc on ne rejette pas l'hypothèse $p = 0{,}5$ (on considère que la valeur de f est due au hasard et à la fluctuation d'échantillonnage).

❷ Le joueur doit deviner maintenant la parité de 20 nombres.

Dans ce cas, on trouve $a = 6$ et $b = 14$.

Comme $n = 20$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour les fréquences est $\left[\frac{6}{20}\,;\frac{14}{20}\right]$ soit $[0{,}3\,;0{,}7]$.

k	$P(X \le k)$
0	0,000
1	0,000
2	0,000
3	0,001
4	0,006
5	0,021
6	**0,058**
7	0,132
8	0,252
9	0,412
10	0,588
11	0,748
12	0,868
13	0,942
14	**0,979**
15	0,994
[illegible]	[illegible]

Le joueur donne 16 réponses correctes sur 20, la fréquence observée est donc $f = 0{,}8$ (comme à la question ❶).

Mais ici, la fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation donc on rejette l'hypothèse $p = 0{,}5$.

On considère que la valeur de f est significative d'une situation anormale. Cet argument statistique peut alors déclencher des vérifications sur les conditions du jeu … le dé est-il truqué ?

Remarque Cet exemple montre le rôle de n. La fréquence observée est la même dans les deux cas, mais le nombre n a changé et les intervalles de fluctuation sont différents, les décisions ne sont pas les mêmes.

3. Algorithme

Dans ce qui précède nous avons utilisé les valeurs des lois binomiales données par un tableur. Il est possible aussi d'obtenir les valeurs des nombres a et b déterminant l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$, sur une calculatrice avec un programme construit à partir d'un algorithme contenant deux boucles ayant une fin conditionnelle.

La condition de la première boucle est $P(X \le k) \le 0{,}025$: elle s'arrêtera dès que $P(X \le k) > 0{,}025$ et on obtiendra a.

La condition de la seconde boucle est $P(X \le k) \le 0{,}975$: elle s'arrêtera dès que $P(X \le k) > 0{,}025$ et on obtiendra b.

Lire N
Lire P
$S \leftarrow 0$
$K \leftarrow 0$
Tant que $S \leq 0{,}025$

$$S \leftarrow S + \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

$K \leftarrow K+1$
Fin
Ecrire « $A =$ » , $K-1$
Tant que $S < 0{,}975$

$$S \leftarrow S + \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} P^k (1-P)^{n-k}$$

$K \leftarrow K+1$
Fin
Ecrire « $B =$ » , $K-1$

A la k-ième étape de la boucle « tant que », S est la variable qui contient le nombre $P(X \leq k)$.

La boucle s'arrête quand S a dépassé 0,025, mais la valeur de k est déjà la suivante, donc la valeur du nombre a est $K-1$.

On continue à calculer les probabilités $P(X \leq k)$ jusqu'à atteindre ou dépasser 0,975.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Ecrire pour votre calculatrice un programme permettant d'obtenir les nombres a et b de l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ de la loi binomiale de paramètres n et p

Tester votre programme avec les données de l'activité 2.

Exercice 2 Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux Etats-Unis est égale à 0,00052. (Source des données : Massachussets Departement of public Health).

Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en pensez-vous ? On argumentera la réponse en déterminant à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% déterminé à partir d'une loi binomiale.

Exercice 3 Une pièce est lancée 1074 fois, on considère la fréquence du nombre de fois où on obtient Pile.

❶ Comparer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% obtenu par la loi binomiale de paramètres 1074 et $p = 0{,}5$ à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, avec l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

❷ On obtient 572 fois Pile, la pièce utilisée est-elle équilibrée ?

4 Synthèse de la séquence

Définition 2

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un certain caractère est p. Pour juger de cette hypothèse, on y prélève, au hasard et avec remise un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.

Règle de décision

Si la fréquence observée f de l'échantillon appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% , on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

5 Exercices d'approfondissement

Exercice I

On reprend l'exemple de l'exercice 3 : une pièce est lancée 1074 fois.

1. Sur cet exemple, montrer comment on peut construire un intervalle de fluctuation au seuil de 99%.

2. De même, montrer comment on peut construire un intervalle de fluctuation au seuil de 90%.

3. Comparer les différents intervalles qui ont été obtenus. On obtient Pile 572 fois, la pièce est-elle équilibrée ?

Exercice II

On reprend l'exemple de Woburn (exercice 2) en modifiant le principe de la décision.

Il s'agit en effet d'évaluer si la situation à Woburn est dangereuse pour la santé.

On décide de rejeter la supposition $p = 0{,}0052$ (la situation est la même que dans le reste des Etats-Unis) si la fréquence f de l'échantillon est trop éloignée de p, **en étant supérieure à** p (en effet, il n'y a pas lieu de s'inquiéter si la fréquence f est éloignée de p en étant inférieure à p).

On choisit de fixer le seuil de décision de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5%.

Pour cela on utilise un intervalle de la forme $\left[0\,;\,\frac{b}{n}\right]$ qui sera appelé intervalle de fluctuation unilatéral au seuil de 95%.

Comment peut-on déterminer l'entier b ?

Avec ce nouveau principe de décision, peut-on encore conclure qu'à Woburn la situation est différente du reste du pays ?