

# Sommaire

## Espace et géométrie

### A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

• Outils de géométrie	
38. Points, droites, demi-droites, segments	115
39. Droites sécantes, droites parallèles, droites perpendiculaires	118
40. Milieu, médiatrice d'un segment	122
41. Cercle	126
42. Codage de figure	127
43. Programme de construction	129
44. Démonstration mathématique	130
• Angles	
45. Angles	133
46. Angles particuliers	135
• Parallélogrammes	
47. Parallélogramme	137
48. Reconnaître un parallélogramme	140
49. Rectangle	141
50. Le losange	143
51. Le carré	145
52. Parallélogrammes particuliers : synthèse	147
• Triangles	
53. Inégalité triangulaire	148
54. Droites remarquables d'un triangle	149
55. Les triangles et les angles	150
56. Théorème de Pythagore	151
57. Trigonométrie : cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu	154
58. Le théorème de Thalès et sa réciproque	159

• Transformations	
59. La symétrie axiale	162
60. La symétrie centrale	165
61. La translation	169
62. La rotation	172
63. L'homothétie	175

## B. Représentation de l'espace

64. Le parallélépipède rectangle	179
65. La sphère	182
66. Repérage sur le globe terrestre	184



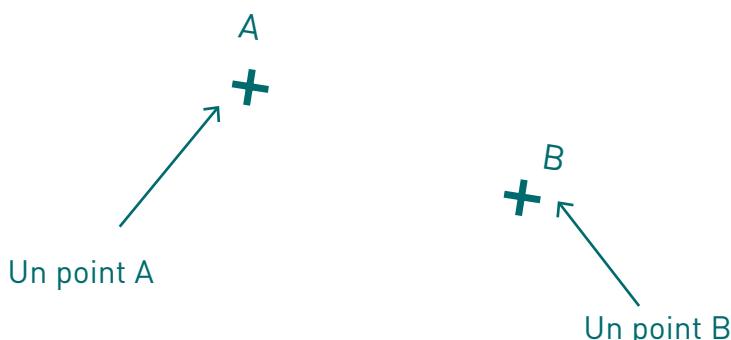
## 38. Outils de géométrie Points, droites, demi-droites, segments



La géométrie utilise des « objets » mathématiques qui ne sont pas des objets de la vie réelle mais ils leur ressemblent. Et pour en parler correctement et se faire comprendre des autres, il faut bien connaître les noms et les notations qui les désignent ainsi que leur représentation.

- **Un point** est le plus souvent représenté par **une croix**.

Sur une même figure, deux points distincts ne portent pas le même nom.



**Tracer un point avec Geogebra :**



B  
X

Place le point. Il est nommé de façon automatique.

M X

X A

Pour le renommer :

1. Clic-droit sur le point. Un menu s'ouvre.
2. Sélectionne "Renommer".
3. Renomme le point.

- **Définition d'une droite**

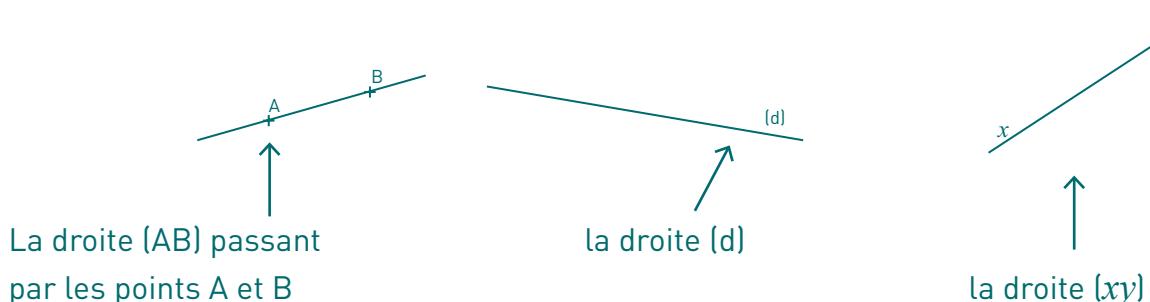
Une droite est une ligne droite **illimitée**, que l'on trace avec une règle. On ne peut en dessiner qu'une partie. Une droite est constituée de points tous alignés.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

- Notations et écritures symboliques

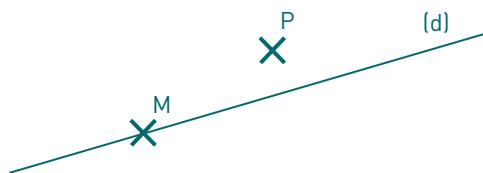
Une droite se note **entre parenthèses**. On peut nommer une droite avec deux points de cette droite ou lui donner un nom.

Il y a trois façons de nommer une droite :



Lorsqu'un point M est sur une droite (d), on dit que M **appartient à** la droite (d) et on note  $M \in (d)$

Lorsqu'un point P n'est pas sur la droite (d), on dit que P **n'appartient pas à** la droite (d) et on note  $P \notin (d)$

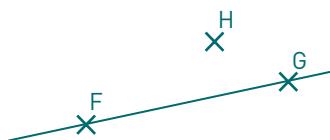


- Définition de points alignés

Des points alignés sont des points qui **appartiennent à une même droite**.

Les points A, B, C appartiennent à la même droite (d).

Les points A, B et C sont donc alignés.



$H \notin (FG)$   
donc les points F, G et H ne sont pas alignés

- Définition d'une demi-droite

Une demi-droite est une partie de droite **limitée d'un côté par un point**. Ce point est appelé **l'origine** de la demi-droite.

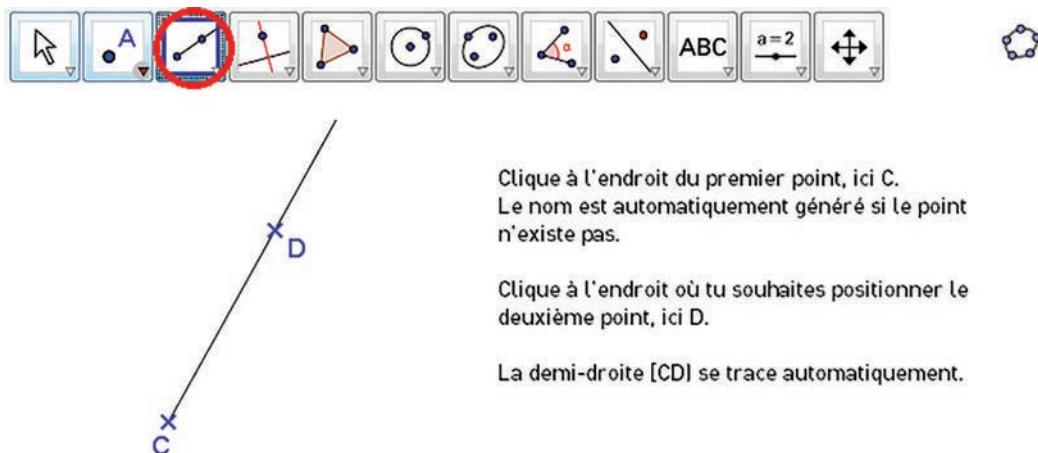
L'origine A  
de la demi-droite



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Cette demi-droite d'origine A se note **[AB]** ou **[Ax]**.

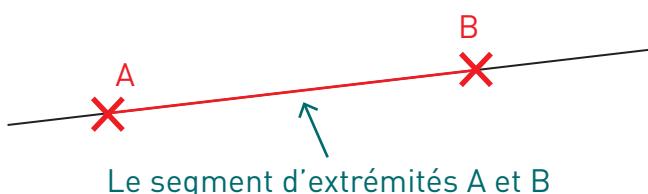
**Tracer une demi-droite avec Geogebra :**



- Définition d'un segment de droite

L'ensemble des points de la droite (AB) situés entre A et B est appelé un **segment**.

Les points A et B sont les extrémités du segment **[AB]**.



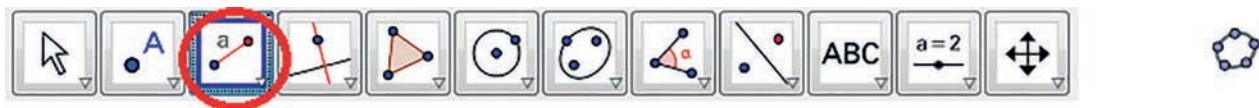
**Attention !**

**Ne pas confondre [AB]** qui désigne un segment et **AB** qui désigne un nombre (puisque c'est une longueur).

Pour dire que le segment [AB] mesure 4 cm, on écrit :  $AB = 4 \text{ cm}$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Tracer un segment de longueur donnée avec Geogebra :



Clique sur le point I.

Dans la nouvelle fenêtre, indique la longueur du segment.

Le segment est alors construit.

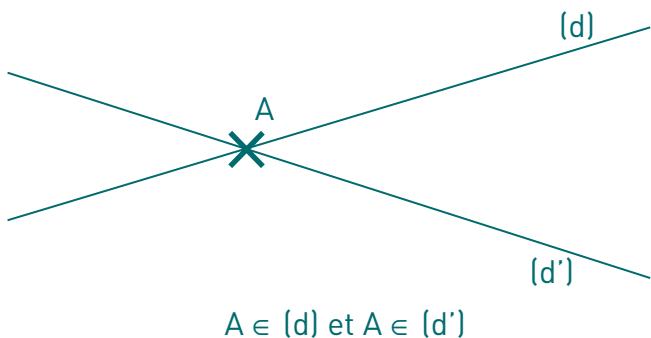
On peut le déplacer, ou faire tourner le point J généré. La longueur de [IJ] reste fixe.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 39. Outils de géométrie Droites sécantes, droites parallèles, droites perpendiculaires

#### DROITES SÉCANTES

Des droites **sécantes** sont des droites qui ont un **point commun**. Ce point est appelé le **point d'intersection**.



$$A \in (d) \text{ et } A \in (d')$$

On dit que les droites (d) et (d') sont **sécantes** en A.

A est le point d'intersection des droites (d) et (d').

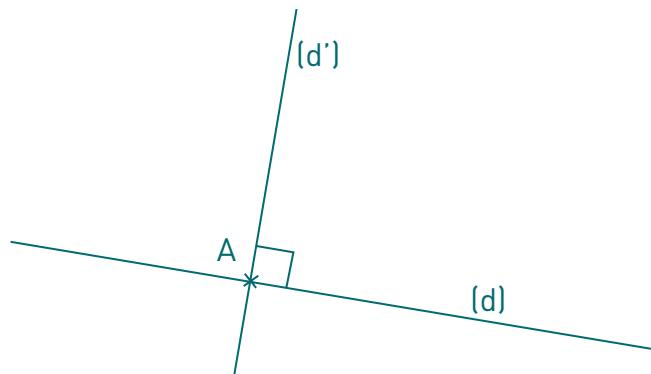
(d') se lit « la droite d prime »  
On peut aussi dire que les droites (d) et (d') sont **concourantes en A**.



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### DROITES PERPENDICULAIRES

Deux droites **perpendiculaires** sont deux droites sécantes qui forment **un angle droit**.



On dit que les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont perpendiculaires en  $A$ . On note :  $(d) \perp (d')$ .



**Tracer une droite perpendiculaire à une droite  $(d)$  passant par un point avec Geogebra :**

GeoGebra

Sélectionne l'outil « Perpendiculaire »

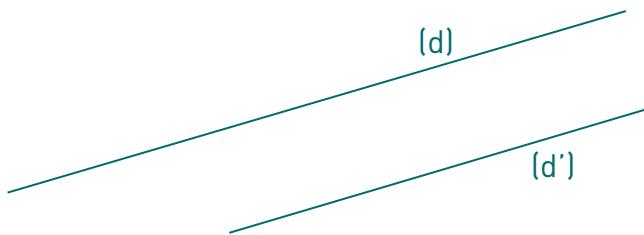
1. Clique sur le point par lequel doit passer la perpendiculaire, ici B ou C.

2. Clique sur la droite de référence, ici  $(d)$ .

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### DROITES PARALLÈLES

Deux droites **parallèles** sont deux droites qui **ne sont pas sécantes**.

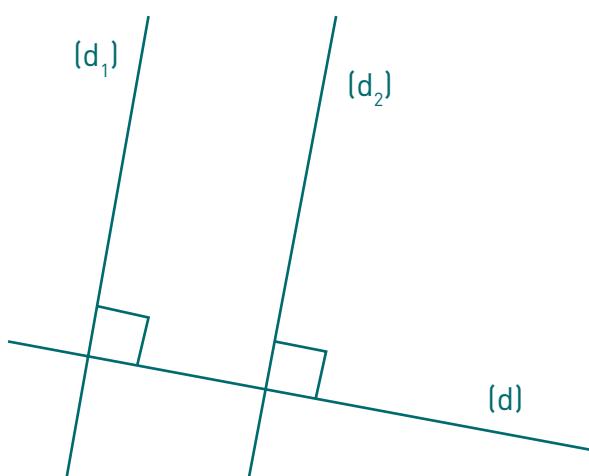


Les droites (d) et (d') sont parallèles.

On note : **(d) // (d')**

### PROPRIÉTÉ

Si deux droites sont **perpendiculaires** à une même droite, alors elles sont **parallèles**.



Données :  $(d_1) \perp (d)$  et  $(d_2) \perp (d)$

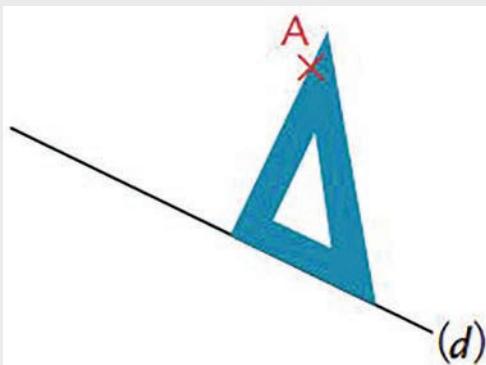
Conclusion :  $(d_1) // (d_2)$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

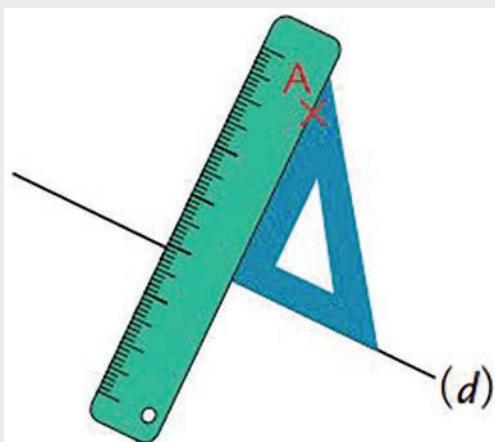
### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Tracer une droite parallèle à une autre droite à partir d'un point donné

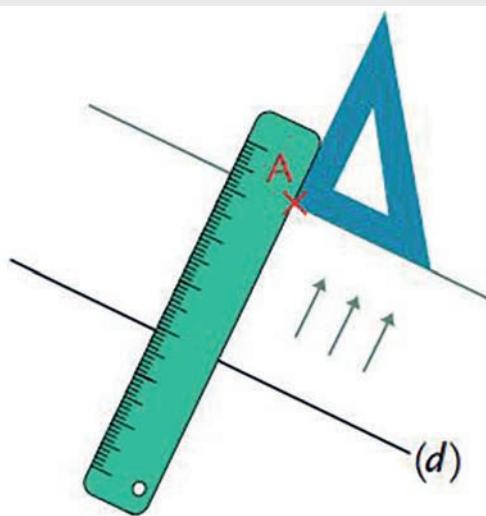
1 - On place un côté de l'angle droit de l'équerre le long de la droite, on fait glisser l'équerre le long de la droite jusqu'à ce que le point A se trouve sur l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.



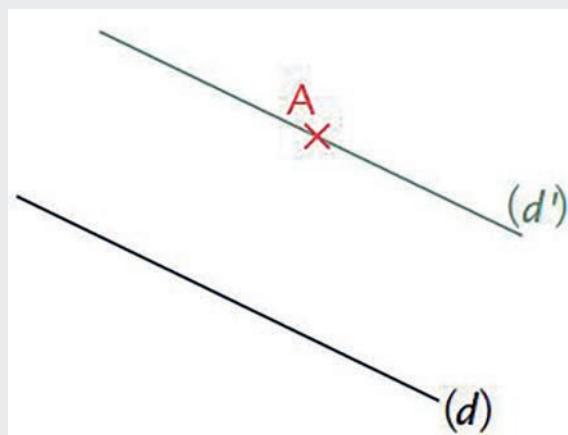
2 - Ensuite, on place la règle le long du bord de l'équerre qui est perpendiculaire à la droite (d).



3 - On fait glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que le point A se trouve sur l'autre côté de l'angle droit de l'équerre. On trace la droite passant par A et qui longe ce côté.



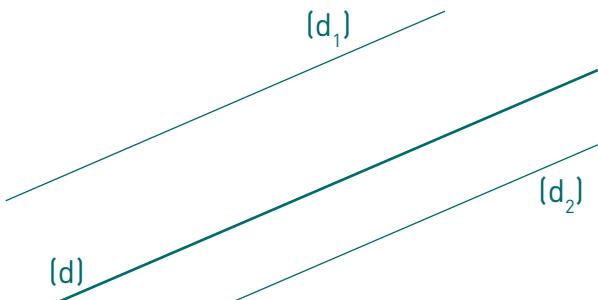
4 - On nomme (d') la droite tracée.



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### PROPRIÉTÉ

Si deux droites sont **parallèles à une même droite**, alors elles sont **parallèles**.

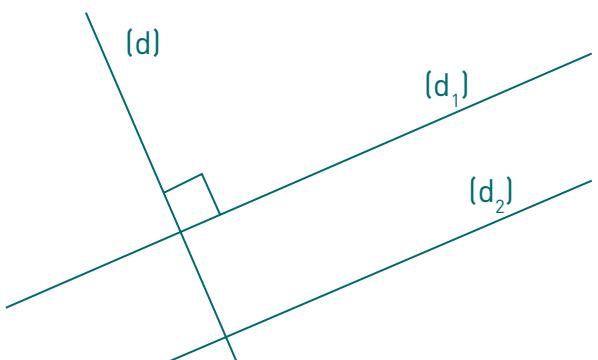


Données :  $(d_1) \parallel (d)$  et  $(d_2) \parallel (d)$

Conclusion :  $(d_1) \parallel (d_2)$

### PROPRIÉTÉ

Si deux droites sont **parallèles**, alors toute droite **perpendiculaire à l'une** est **perpendiculaire à l'autre**.



Données :  $(d_1) \parallel (d_2)$  et  $(d) \perp (d_1)$

Conclusion :  $(d) \perp (d_2)$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 40. Outils de géométrie Milieu, médiatrice d'un segment

### MILIEU D'UN SEGMENT

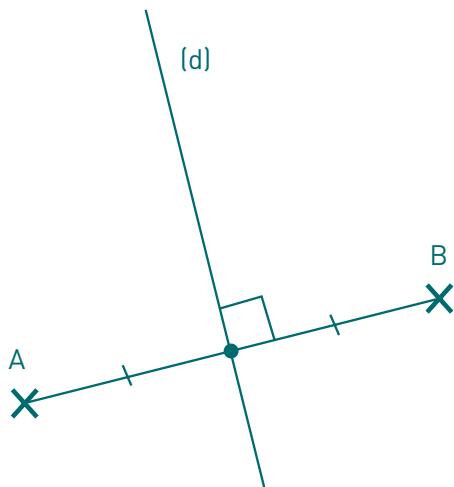
Le milieu d'un segment est le point de ce segment qui est situé à **égale distance** de ses extrémités.



Le point I est le milieu du segment [AB] car  $I \in [AB]$  et  $IA = IB$ .

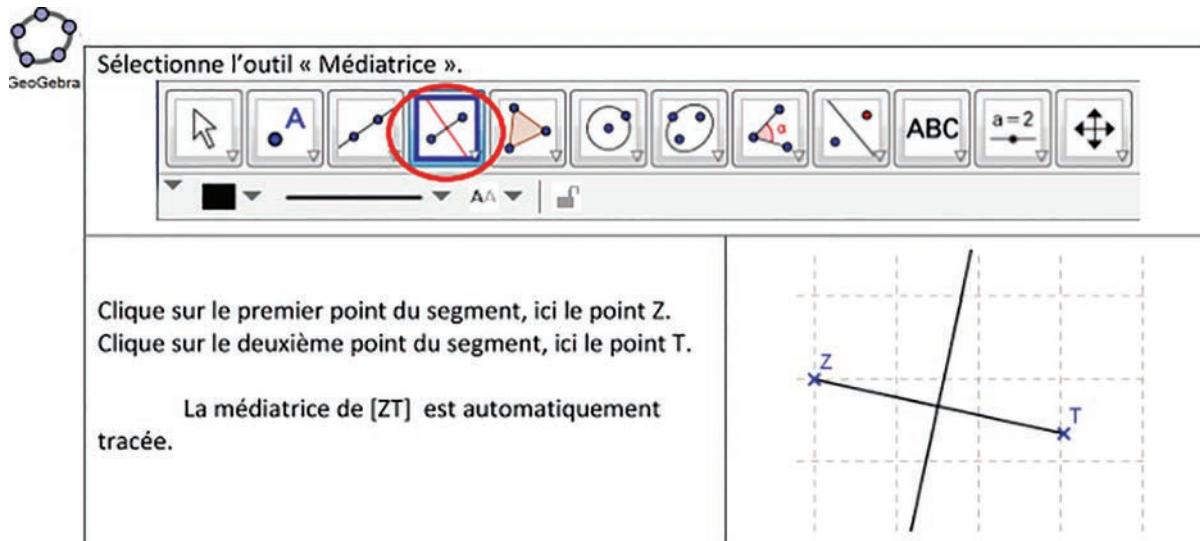
### MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

La **médiatrice d'un segment** est la droite qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui coupe ce segment en son **milieu**.



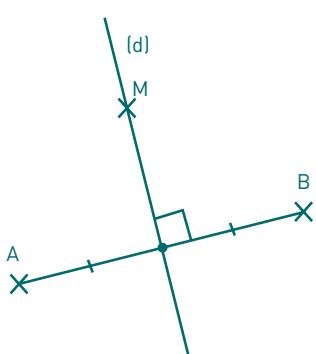
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Tracer la médiatrice d'un segment avec Geogebra :

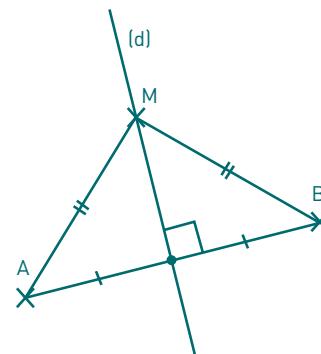


### PROPRIÉTÉ

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est situé **à la même distance** des extrémités de ce segment.



Données : le point M appartient  
à la médiatrice (d) du segment [AB]

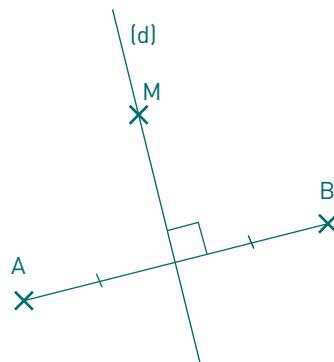
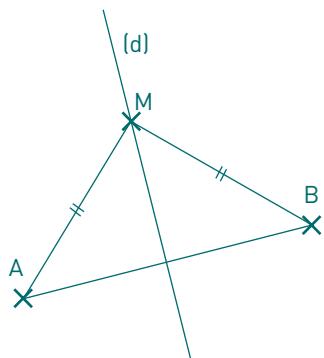


Conclusion :  $MA = MB$ .

### PROPRIÉTÉ

Si un point est situé à la même distance des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



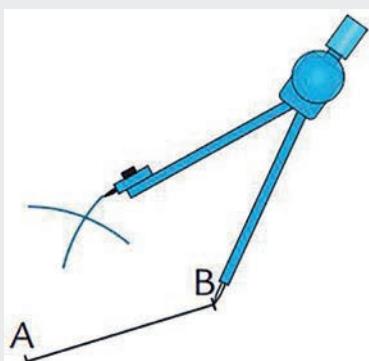
Donnée :  $MA = MB$

Conclusion : le point M appartient à la médiatrice (d) du segment [AB].

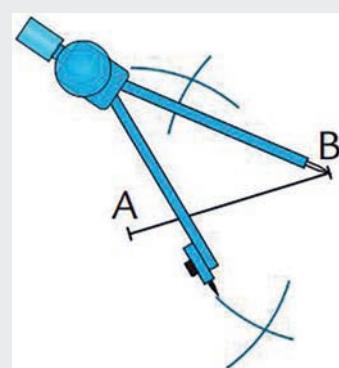
### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Tracer la médiatrice d'un segment avec une règle non graduée et un compas

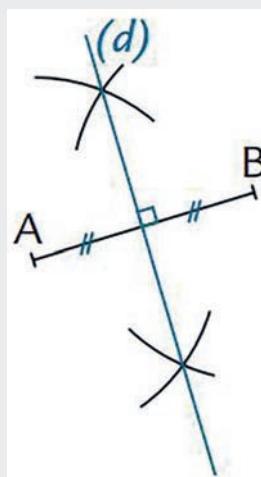
- 1.** On trace deux arcs de cercle de centre A et de même rayon, l'un au-dessus du segment [AB] et l'autre au-dessous.



- 2.** On trace deux autres arcs de cercles de centre B et toujours de même rayon. Ces arcs coupent les deux premiers en M et N.



- 3.** On trace la droite (MN). Cette droite est la médiatrice du segment [AB].



$MA = MB$  et  $NA = NB$   
(puisque l'écartement du compas est conservé)  
Donc, M et N appartiennent à la médiatrice du segment [AB].

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 41. Outils de géométrie Cercle

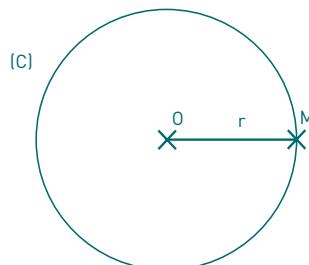
### DÉFINITION D'UN CERCLE

Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points **situés à la même distance  $r$  du point  $O$** .

$(C)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

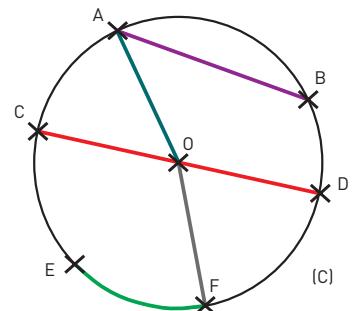
$M$  est un point de  $(C)$ .

$OM$  est un rayon de  $(C)$ .  **$OM = r$**



### RAYON, CORDE, DIAMÈTRE, ARC DE CERCLE

- **Un rayon** d'un cercle est un segment dont les extrémités sont un point du cercle et le centre du cercle.  
Exemples :  $[OA]$ ,  $[OC]$ ,  $[OF]$  sont des rayons de  $(C)$ .
- **Une corde** d'un cercle est un segment dont les extrémités sont des points du cercle.  
Exemple :  $[AB]$  est une corde de  $(C)$ .
- **Un diamètre** d'un cercle est une corde qui passe par le centre de ce cercle.  
Exemple :  $[CD]$  est un diamètre de  $(C)$ .  
On dit que les points  $C$  et  $D$  sont diamétralement opposés.
- **Un arc** de cercle est la plus petite portion de cercle comprise entre deux points d'un cercle.  
Exemple :  $\widehat{EF}$  est un arc de cercle de  $(C)$ .



### PROPRIÉTÉS

Le **centre** d'un cercle est le milieu de tous les diamètres de ce cercle.

Dans un cercle, la longueur d'un diamètre est le double de la longueur d'un rayon.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

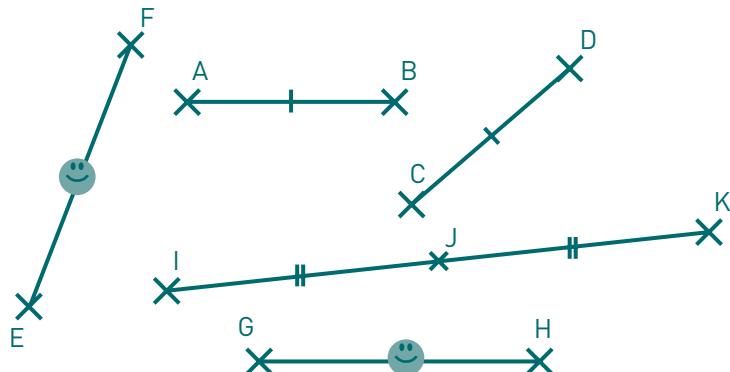
### 42. Outils de géométrie Codage de figure



Sur chaque figure à construire, que ce soit une figure à main levée ou une figure aux vraies grandeurs, il est **IMPORTANT** de coder **les longueurs égales, les angles de même mesure, les angles droits**. Doivent aussi apparaître les données de longueurs, ainsi que les mesures d'angle.

- Codage de longueurs égales

Pour indiquer que des segments ont la même longueur, on dessine le même signe sur chacun de ces segments.



On marque des longueurs égales au moyen d'un trait, de deux traits, d'un rond ou autant d'autres signes que nécessaire.



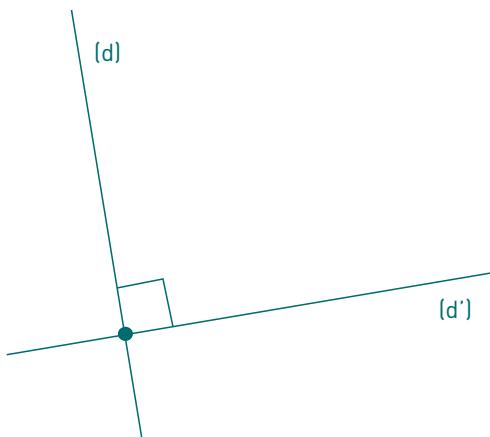
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Le codage indique que les segments [AB] et [CD] ont la même longueur. On écrit :  $AB = CD$ .

De même,  $IJ = JK$  et  $EF = GH$ .

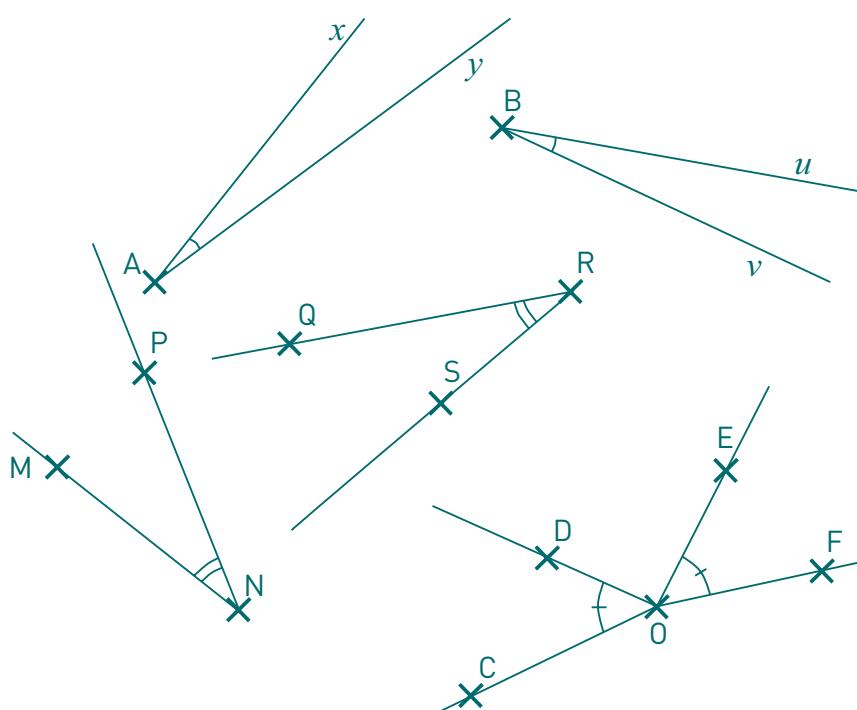
- **Codage d'angle droit**

Pour indiquer un angle droit, on dessine un petit carré.



- **Codage d'angles de même mesure**

Pour indiquer que des angles ont la même mesure, on dessine le même signe sur chacun de ces angles.



Le codage indique que les angles  $\widehat{xAy}$  et  $\widehat{uBv}$  ont la même mesure. On écrit :  $\widehat{xAy} = \widehat{uBv}$ .

De même,  $\widehat{MNP} = \widehat{QRS}$  et  $\widehat{COD} = \widehat{EOF}$ .

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 43. Outils de géométrie

## Programme de construction

### ÉCRIRE UN PROGRAMME DE CONSTRUCTION

- On écrit des phrases **courtes** et **simples**.
- On commence chaque étape de construction par un **verbe à l'infinitif**.
- On utilise **un langage mathématique**.
- On utilise correctement les articles définis et indéfinis.



En mathématiques, l'article défini comme le, la, les, l'permet d'introduire un objet mathématique unique. Il y a une seule solution possible pour le tracer.

L'article indéfini comme un, une, des, permet d'introduire un objet mathématique qui n'est pas complètement défini. Il y a plusieurs solutions possibles pour le tracer.

Exemple :

- Placer **un** point A et **un** point B  
(Ici, on peut placer les points A et B où l'on veut. Il y a plusieurs possibilités)



- Tracer **le** segment [AB]  
(Maintenant que les points A et B sont connus, il existe un seul segment [AB])



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 44. Outils de géométrie Démonstration mathématique

### QUELQUES RÈGLES POUR DÉBATTRE EN MATHÉMATIQUES

- Un énoncé mathématique est soit **vrai** soit **faux**.
- Un exemple qui **ne vérifie pas** un énoncé suffit à montrer que cet énoncé est **faux**. Cet exemple est appelé un **contre-exemple**.

Exemple :

La phrase « tous les nombres inférieurs à 100 s'écrivent avec deux chiffres » est-elle vraie ou fausse ?

7 est un nombre inférieur à 100 et 7 s'écrit avec un seul chiffre. Ce qui vient contredire la phrase de l'énoncé.

Conclusion : La phrase « tous les nombres inférieurs à 100 s'écrivent avec deux chiffres » est fausse.

- En revanche, des exemples qui vérifient un énoncé ou des mesures sur un dessin **ne suffisent pas** pour prouver qu'un énoncé est vrai. Pour prouver des résultats en mathématiques, on utilise des **démonstrations**.

### DÉMONTRER EN GÉOMÉTRIE

Pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai, il **faut raisonner en partant des données du problème** (c'est-à-dire les informations fournies par l'énoncé que l'on connaît) et en arriver à la conclusion. Pour répondre à ce défi, on utilise **les définitions et les propriétés du cours**.

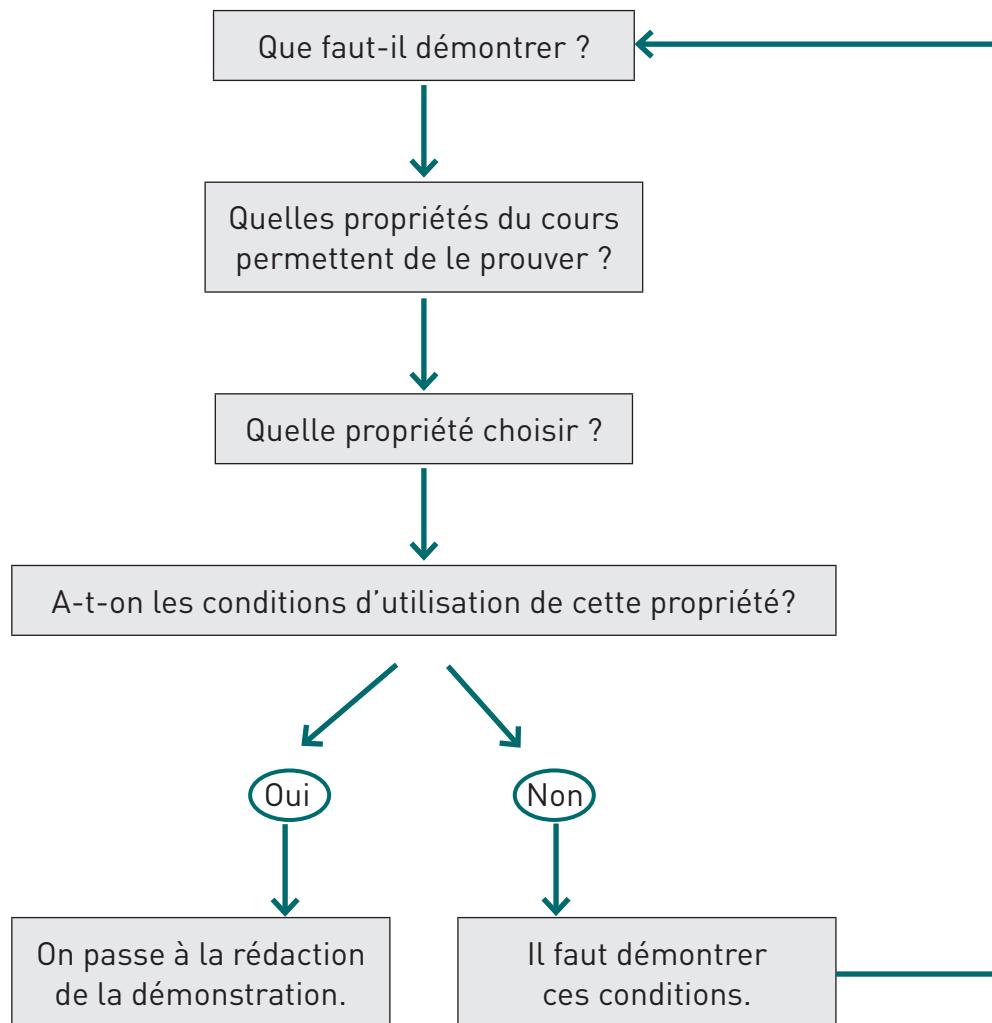
Voici les différentes étapes du travail de la démonstration :

1. **Lire attentivement le texte, faire une figure** à main levée à compléter au fur et à mesure des questions et **identifier** ce qu'il faut prouver.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 2. Chercher une démonstration

Il n'y a pas de méthode unique pour chercher une démonstration. On peut **partir des données** et essayer **d'en déduire des conséquences à partir de propriétés du cours**. Mais souvent il est commode de **partir de la conclusion** en suivant le schéma suivant :



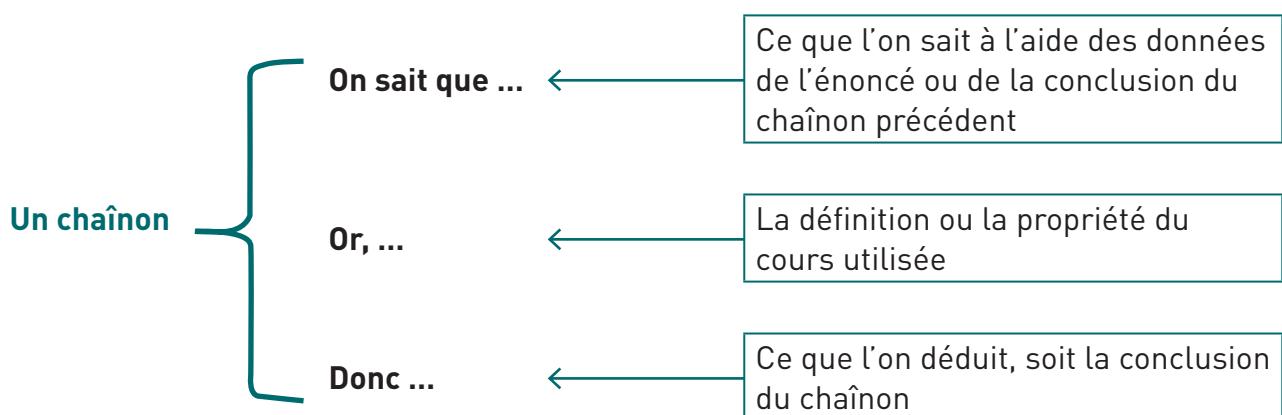
### 3. Rédiger et faire une figure

au crayon à papier avec les instruments de géométrie que l'on n'oublie pas de coder !

Il faut comprendre qu'une démonstration est un **enchaînement logique de raisonnements** appelés **chaînons déductifs**.

Chaque petit chaînon d'une démonstration est construit de la façon suivante :

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



Une démonstration peut comporter un seul chaînon ou plusieurs chaînons les uns à la suite des autres. Dans ce dernier cas, la conclusion d'un chaînon devient le point de départ du chaînon qui le suit.

4. **Relire** en vérifiant que chaque réponse justifiée comporte les trois étapes d'un chaînon déductif.

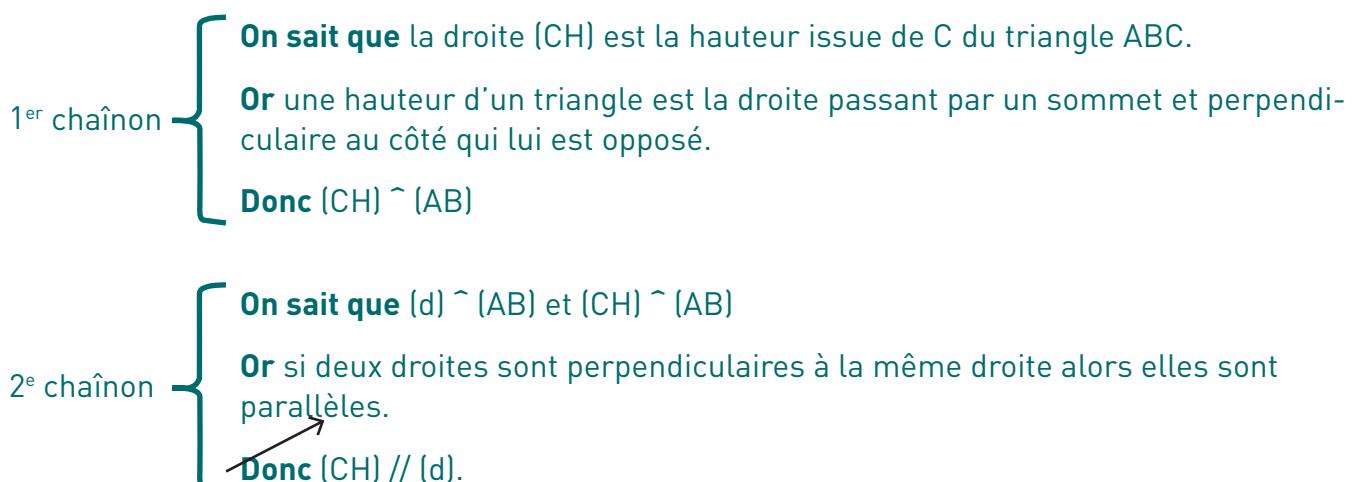
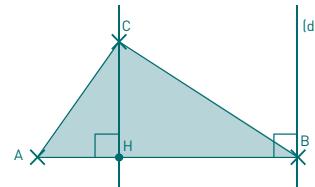
Exemple :

*ABC est un triangle.*

*La hauteur issue de C coupe le côté [AB] en H.*

*(d) est la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (AB).*

*Prouver que les droites (CH) et (d) sont parallèles.*



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

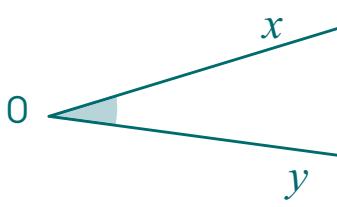
### 45. Angles

#### DÉFINITION D'UN ANGLE

Un angle est délimité par deux demi-droites de même origine.

Les demi-droites sont les **côtés** de l'angle.

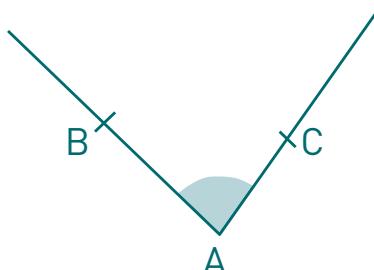
L'origine de ces demi-droites est le **sommet** de l'angle.



On nomme l'angle  $\widehat{xOy}$  ou  $\widehat{yOx}$

O est le sommet de l'angle  $\widehat{xOy}$

Les demi-droites  $[Ox]$  et  $[Oy]$  sont les côtés  
de  $\widehat{xOy}$



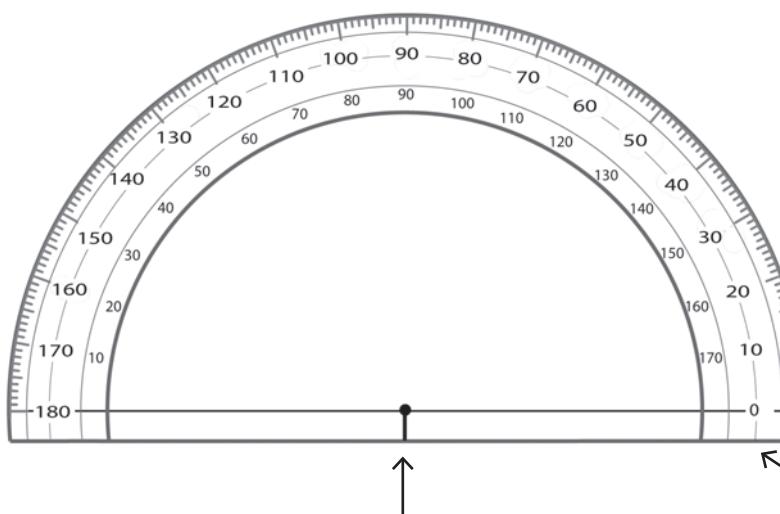
On nomme l'angle  $\widehat{BAC}$  ou  $\widehat{CAB}$

A est le sommet de l'angle

Les demi-droites  $[AB]$  et  $[AC]$  sont les côtés  
de  $\widehat{BAC}$

Pour mesurer un angle, on utilise un **rapporteur**.

L'unité usuelle de mesure d'angle est le **degré**, noté  $^{\circ}$ .



0 de la graduation  
du sens des aiguilles  
d'une montre

Centre du rapporteur

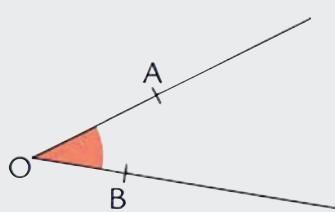
0 de la graduation du  
sens inverse de celui des  
aiguilles d'une montre

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

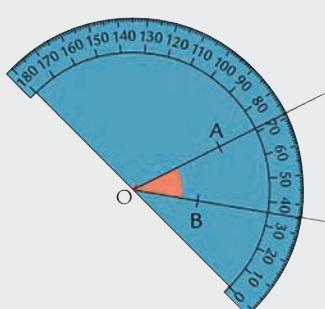
### POINT METHODE

#### Mesurer un angle avec le rapporteur

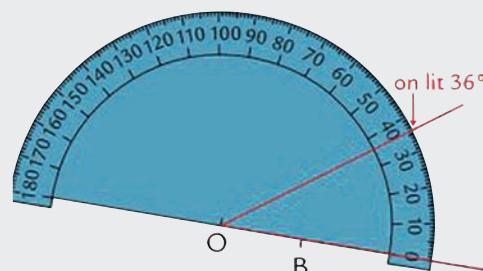
1. On repère le sommet O de l'angle  $\widehat{AOB}$



2. On place le centre du rapporteur sur le sommet O de l'angle



3. On place le zéro de l'une des graduations du rapporteur sur un des côtés de l'angle, ici [OB)



L'angle  $\widehat{AOB}$  mesure  $36^\circ$ .

On écrit :  $\widehat{AOB} = 36^\circ$

#### Tracer un angle avec Geogebra :



Sectionne l'outil «Angle de mesure donnée».



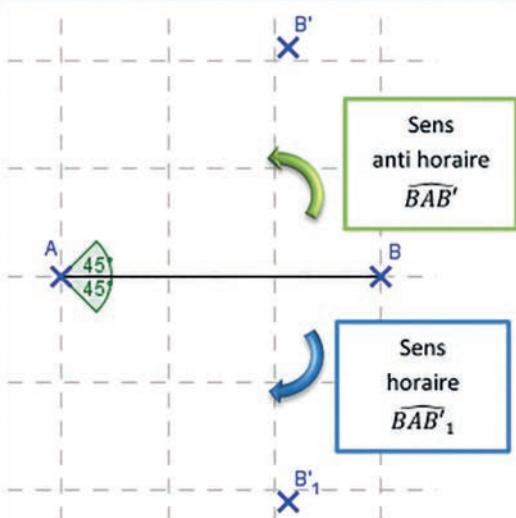
Soit un segment  $[AB]$  déjà tracé.

Pour tracer  $\widehat{BAC} = 45^\circ$

- Clique sur B.
- Clique sur A.
- Renseigne la valeur de l'angle en  $^\circ$ .
- Choisis sens horaire ou anti horaire, en fonction de l'angle voulu.

Le point  $B'$  (ou  $B'_1$ ) est généré automatiquement.

Trace la demi-droite  $[AB']$  (ou  $[AB'_1]$ ). Renomme  $B'$  (ou  $B'_1$ ) en C.



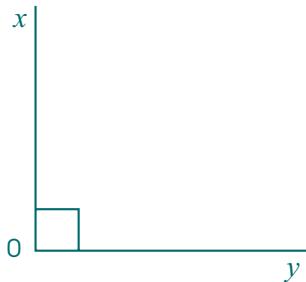
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 46. Angles particuliers

### ANGLES PARTICULIERS



Un angle nul est un angle qui mesure  $0^\circ$ .



Un angle droit est un angle qui mesure  $90^\circ$ .



Un angle plat est un angle qui mesure  $180^\circ$ .

### COMPARAISON D'UN ANGLE À UN ANGLE DROIT

Un angle aigu est un angle dont la mesure est comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

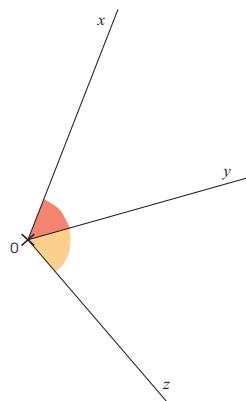
Un angle obtus est un angle dont la mesure est comprise entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ .

### ANGLES ADJACENTS

Deux angles sont adjacents lorsque :

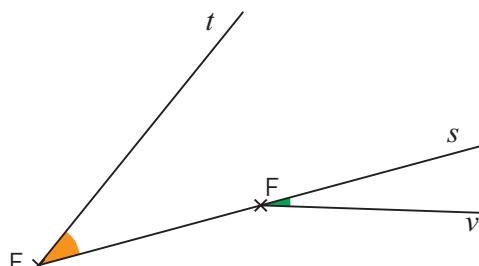
- ils ont le même sommet
- ils ont un côté commun
- ils sont tracés de part et d'autre de ce côté commun.

Exemples :



Les angles  $\widehat{xOy}$  et  $\widehat{yOz}$  sont adjacents.

Les angles  $\widehat{xOy}$  et  $\widehat{xOz}$  ne sont pas adjacents



Les angles  $\widehat{tEs}$  et  $\widehat{sEv}$  ne sont pas adjacents

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

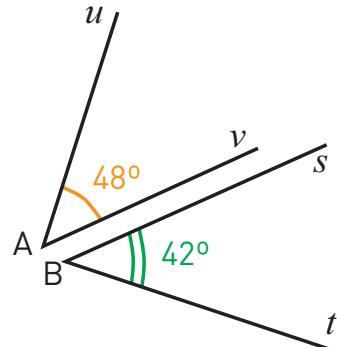
### ANGLES COMPLÉMENTAIRES

Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est égale à  $90^\circ$ .

Exemple :

$$\widehat{uAv} + \widehat{sBt} = 48^\circ + 42^\circ = 90^\circ$$

Les angles  $\widehat{uAv}$  et  $\widehat{sBt}$  sont donc complémentaires.



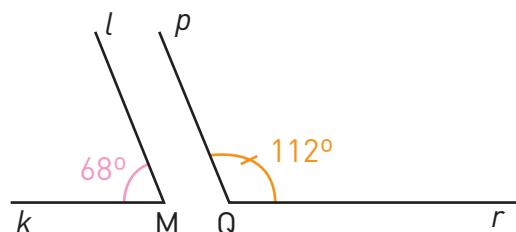
### ANGLES SUPPLÉMENTAIRES

Deux angles sont **supplémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est égale à  $180^\circ$ .

Exemple :

$$\widehat{kMl} + \widehat{pQr} = 68^\circ + 112^\circ = 180^\circ$$

Les angles  $\widehat{kMl}$  et  $\widehat{pQr}$  sont donc supplémentaires.

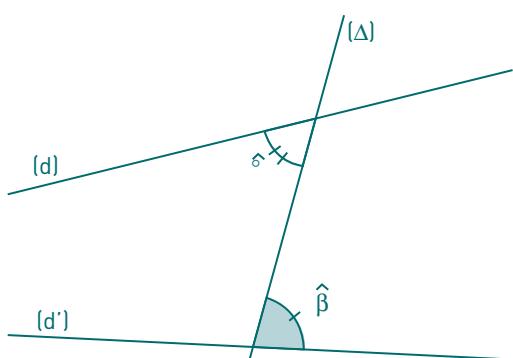


### ANGLES ALTERNES INTERNES

Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites coupées par une autre droite  $(\Delta)$

Deux **angles** sont **alternes-internes** lorsqu'ils sont situés de part et d'autre de la sécante  $(\Delta)$

- et à l'intérieur de la surface comprise entre les droites  $(d)$  et  $(d')$



« Les angles  $\widehat{\alpha}$  et  $\widehat{\beta}$  » se lit  
« les angles alpha et béta »



Les angles  $\widehat{\alpha}$  et  $\widehat{\beta}$  sont alternes-internes

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 47. Parallélogramme

#### DÉFINITION DU PARALLÉLOGRAMME

Un **parallélogramme** est un **quadrilatère** dont **les côtés opposés sont parallèles**.

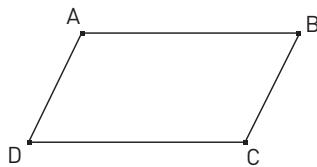


(AB) // (DC) et (AD) // (BC)  
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

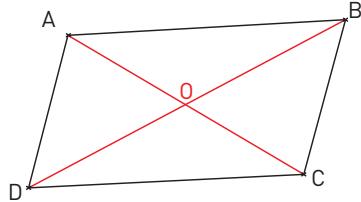
#### PROPRIÉTÉS

- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors **le point d'intersection de ses diagonales est centre de symétrie**.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors **ses diagonales se coupent en leur milieu**.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors **ses angles opposés ont la même mesure**.

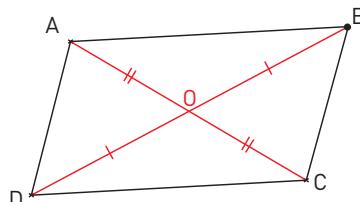
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



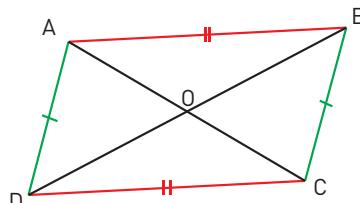
**Si ABCD est un parallélogramme**



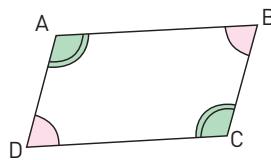
**1. Alors O est le centre de symétrie de ABCD**



**2. Alors O est le milieu des diagonales [AC] et [BD]**



**3. Alors AB = DC et AD = BC**



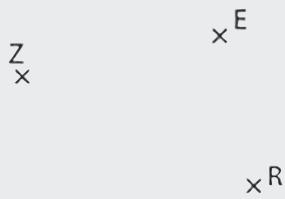
**4. Alors  $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$  et  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$**

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

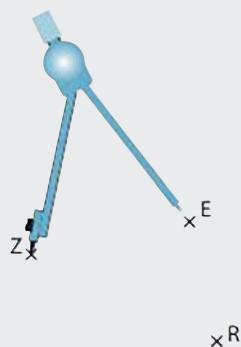
### POINT MÉTHODE

#### Tracer un parallélogramme à l'aide d'un compas

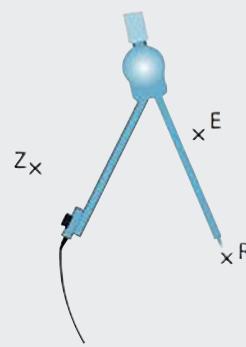
Pour construire le 4<sup>e</sup> sommet du parallélogramme ZERO...



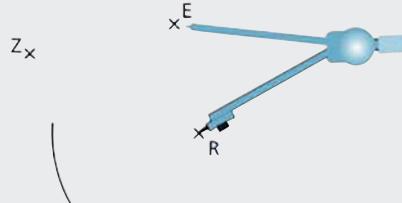
... je pique la pointe du compas sur le point E puis je prends l'écartement qui correspond à la longueur EZ.



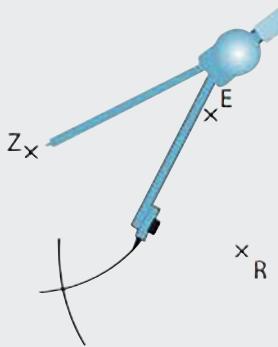
Je reporte cette longueur EZ en pointant le compas sur le point R et je trace un arc de cercle.



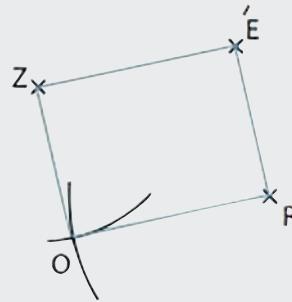
Je pique maintenant la pointe du compas sur le point E puis je prends l'écartement qui correspond à la longueur ER.



Je reporte cette longueur ER en pointant le compas sur le point Z et je trace un 2<sup>e</sup> arc de cercle qui coupe le 1<sup>er</sup>.



Le point d'intersection des 2 arcs est le point O, 4<sup>e</sup> sommet du parallélogramme ZERO.

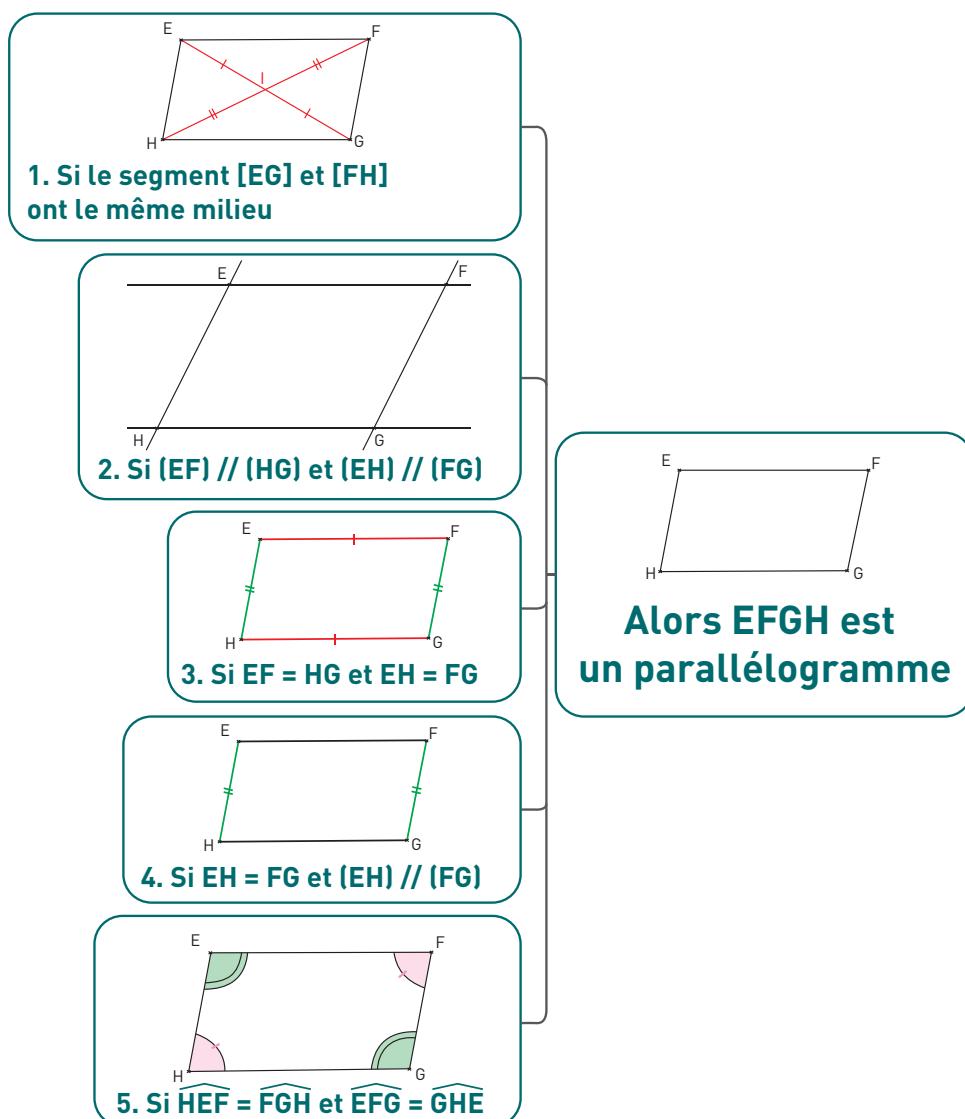


## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 48. Reconnaître un parallélogramme

### PROPRIÉTÉS

1. Si les **diagonales** d'un quadrilatère ont le **même milieu**, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
2. Si un quadrilatère a ses **côtés opposés parallèles**, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
3. Si un quadrilatère a ses **côtés opposés de même longueur**, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
4. Si un quadrilatère (non croisé) a **deux côtés opposés parallèles et de même longueur**, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
5. Si un quadrilatère a ses **angles opposés de même mesure**, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 49. Rectangle

#### RECTANGLE

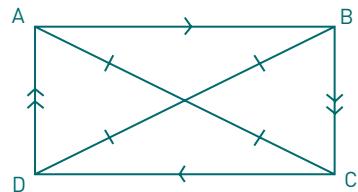
Un rectangle est un quadrilatère qui a **quatre angles droits**.



Un rectangle ABCD

Si un quadrilatère est un rectangle, alors :

- il a ses **côtés opposés parallèles** : c'est un **parallélogramme**
- ses diagonales ont le **même milieu** et la **même longueur**
- ses côtés opposés sont **parallèles** et ont la **même longueur**
- 



#### PROPRIÉTÉS

1. Si un quadrilatère a **trois angles droits**, alors ce quadrilatère est **un rectangle**.
2. Si un **parallélogramme a un angle droit**, alors ce quadrilatère est **un rectangle**.
3. Si **les diagonales** d'un quadrilatère ont le **même milieu** et la **même longueur**, alors ce quadrilatère est **un rectangle**.
4. Si **les diagonales** d'un **parallélogramme** ont la **même longueur**, alors ce quadrilatère est **un rectangle**.

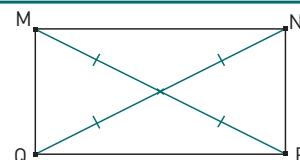
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



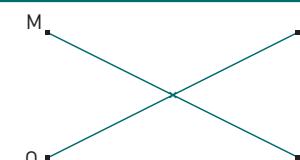
**1. Si le quadrilatère MNPQ a trois angles droits**



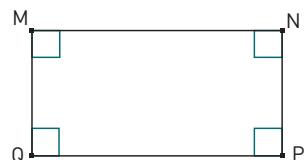
**2. Si MNPQ est un parallélogramme et a un angle droit**



**3. Si les diagonales [MP] et [NQ] du quadrilatère MNPQ ont le même milieu et la même longueur**



**4. Si MNPQ est un parallélogramme et  $MP = NQ$**



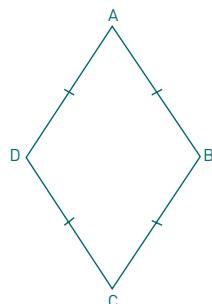
**Alors MNPQ est un rectangle**

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 50. Le losange

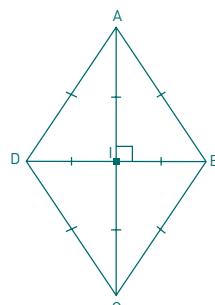
#### LOSANGE

Un losange est un quadrilatère qui a **quatre côtés de la même longueur**.



Si un quadrilatère est un losange, alors :

- il a ses **côtés opposés parallèles** : c'est un **parallélogramme** ;
- ses diagonales ont le **même milieu** et sont **perpendiculaires** ;
- ses côtés ont la **même longueur** ; ses côtés **opposés** sont **parallèles** ;

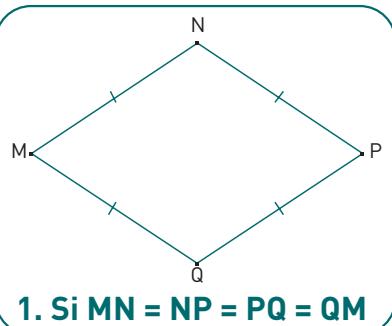


Un losange ABCD

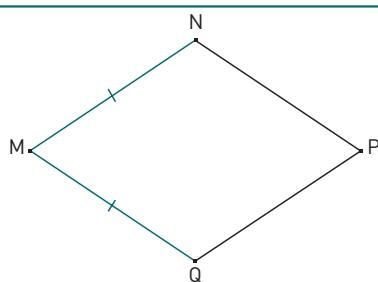
#### PROPRIÉTÉS

1. Si un quadrilatère a ses **quatre côtés de même longueur**, alors ce quadrilatère est **un losange**.
2. Si un parallélogramme a **deux côtés consécutifs de même longueur**, alors ce quadrilatère est **un losange**.
3. Si les **diagonales** d'un quadrilatère ont le **même milieu** et sont **perpendiculaires**, alors ce quadrilatère est un **losange**.
4. Si les **diagonales** d'un parallélogramme sont **perpendiculaires**, alors ce quadrilatère est un **losange**.

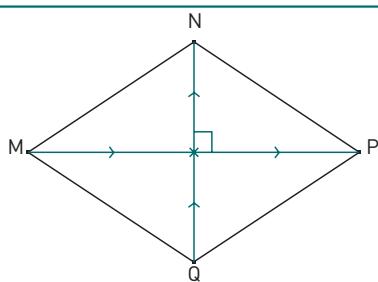
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



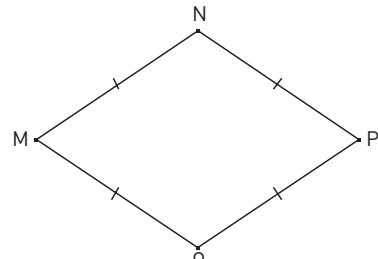
1. Si  $MN = NP = PQ = QM$



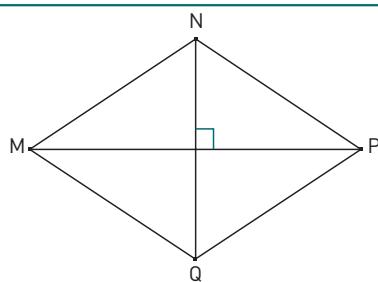
2. Si  $MNPQ$  est un parallélogramme et  $MN = MQ$



3. Si  $[MP]$  et  $[NQ]$  ont le même milieu I et  $(MP) \perp (NQ)$



Alors  $MNPQ$  est un losange



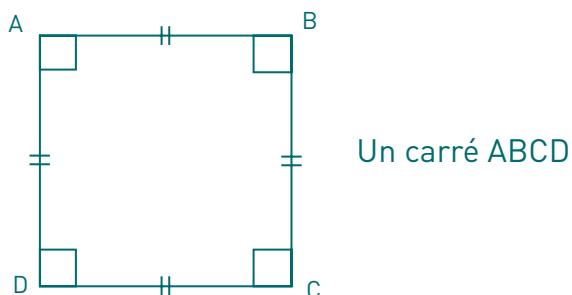
4. Si  $MNPQ$  est un parallélogramme et  $(MP) \perp (NQ)$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 51. Le carré

#### CARRÉ

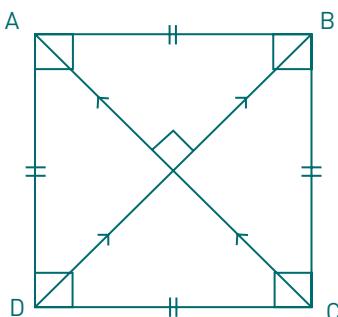
Un carré est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de la même longueur.



Un carré est à la fois un rectangle et un losange. Il a toutes les propriétés de ces derniers.

Si un quadrilatère est un carré, alors :

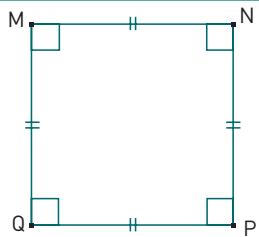
- il a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme ;
- ses diagonales ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires ;
- ses côtés ont la même longueur ; ses côtés opposés sont parallèles ;
- il a quatre axes de symétrie : les médiatrices des côtés opposés et les droites portant ses diagonales, et un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.



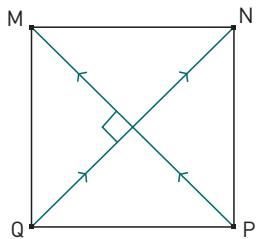
#### PROPRIÉTÉS

1. Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange, alors ce quadrilatère est un carré.
2. Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires et de même longueur alors ce quadrilatère est un carré.

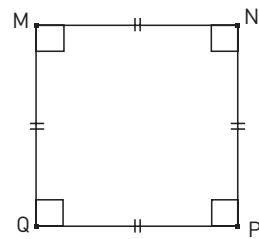
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



1. Si  $MNPQ$  est un rectangle et un losange



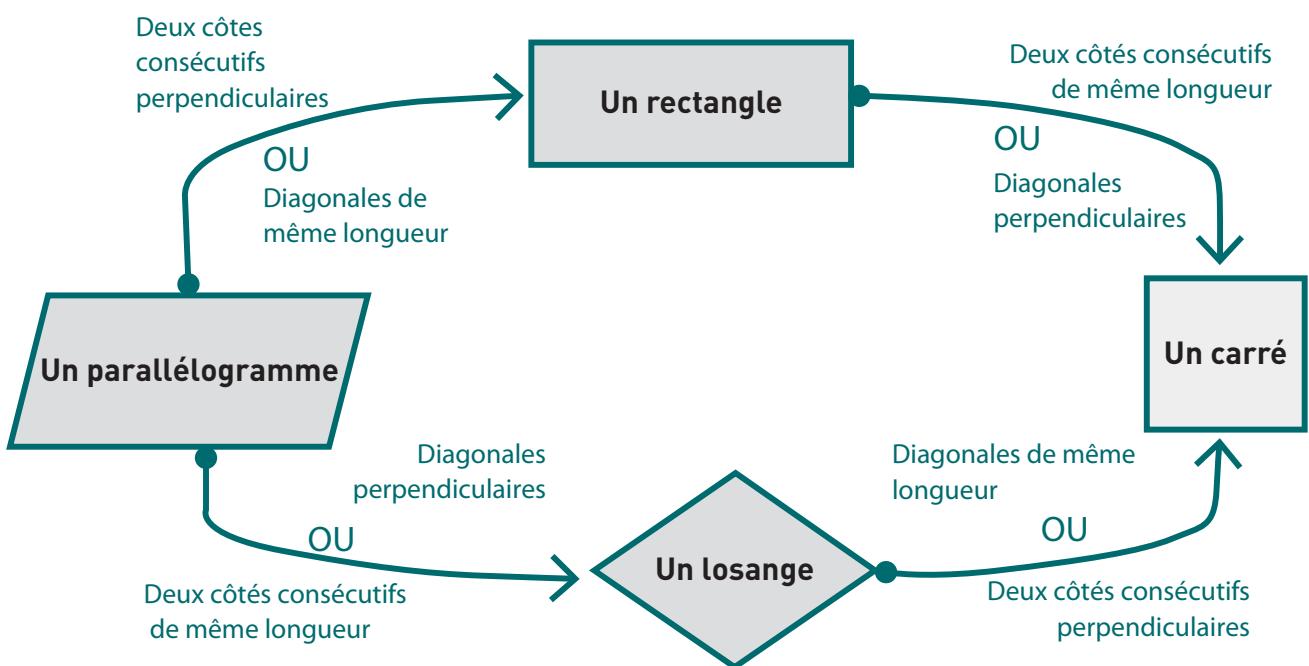
2. Si  $MNPQ$  est un parallélogramme,  
 $MP = NQ$  et  $(MP) \perp (NQ)$



Alors  $MNPQ$  est un carré

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 52. Parallélogrammes particuliers : synthèse



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 53. Inégalité triangulaire

#### INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Étant donné trois points quelconques A, B, C, la distance AC est **inférieure ou égale** à la somme des distances AB et BC.

$$AC \leq AB + BC.$$

C'est ce que l'on appelle **l'inégalité triangulaire**.

#### APPLICATION AU TRIANGLE

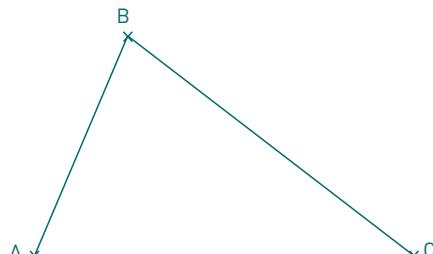
Dans un triangle, la longueur de chaque côté est **inférieure** à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Dans le triangle ABC, on a :

$$AB \leq AC + CB$$

$$AC \leq AB + BC$$

$$BC \leq AB + AC$$



#### CONSÉQUENCE SUR LA CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE

#### PROPRIÉTÉ

On peut construire un triangle dont on connaît la longueur des côtés si la longueur du plus grand côté est **inférieure** à la somme des longueurs des deux autres côtés.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 54. Droites remarquables d'un triangle



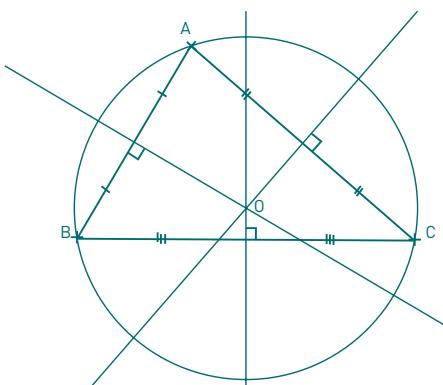
Dans un triangle, on peut construire les médiatrices de ses trois côtés.

#### MÉDIATRICES D'UN TRIANGLE

Dans un triangle, les **médiatrices** des trois côtés se coupent en un même point : on dit que les trois médiatrices sont **concourantes**. Ce point est le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets du triangle. Ce cercle est appelé le **cercle circonscrit au triangle**.

Les médiatrices des trois côtés du triangle ABC se coupent en O.

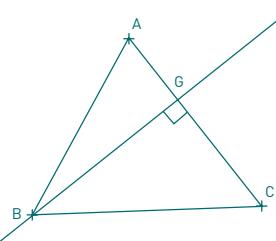
O est le centre du cercle circonscrit à ABC.



#### HAUTEURS D'UN TRIANGLE

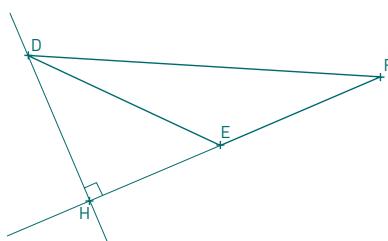
La **hauteur** issue d'un sommet d'un triangle est la droite qui **passe par ce sommet** et qui est **perpendiculaire au côté opposé à ce sommet**.

Exemples :



Dans le triangle ABC, la droite (BG) est **la hauteur issue de B**.

On parle aussi de **la hauteur relative au côté [AC]**. G est **le pied de la hauteur** issue de B.



Dans le triangle DEF, la droite (DH) est **la hauteur issue de D ou la hauteur relative au côté [EF]**.

H est **le pied de la hauteur** issue de D.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

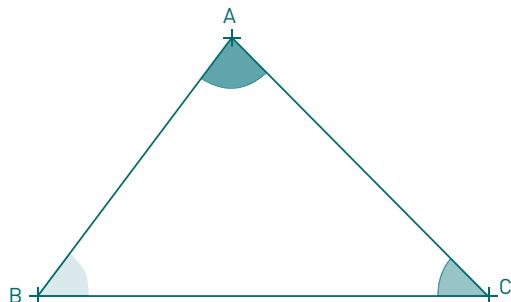
# 55. Les triangles et les angles

### SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ .

Dans le triangle ABC, on a :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

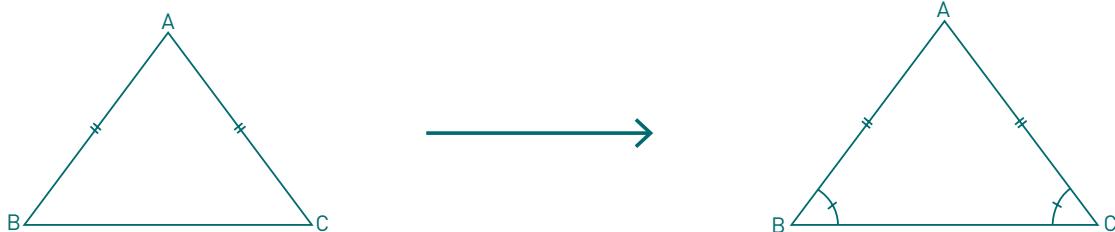


### TRIANGLE RECTANGLE

Si un triangle est rectangle, alors la somme des mesures des angles aigus du triangle est égale à  $90^\circ$ .

### TRIANGLE ISOCÈLE

Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base de ce triangle sont de même mesure.



### PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Si, dans un triangle, deux angles sont de même mesure alors ce triangle est isocèle.

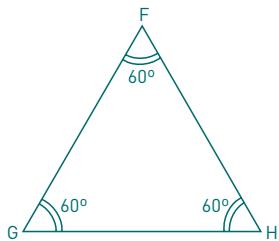
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Si un triangle est équilatéral, alors chacun de ses angles mesure  $60^\circ$ .

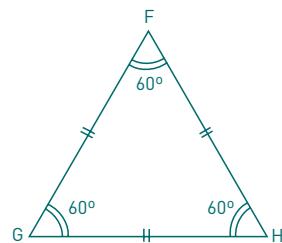
### PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Si, dans un triangle, chaque angle mesure  $60^\circ$  alors ce triangle est équilatéral.



$$\widehat{HFG} = \widehat{FGH} = \widehat{GHF}$$

donc



le triangle FGH est équilatéral

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

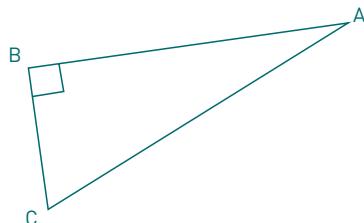
# 56. Théorème de Pythagore

### HYPOTÉNUSE D'UN TRIANGLE RECTANGLE

Dans un triangle **rectangle**, l'**hypoténuse** est le **côté opposé à l'angle droit**.

Sur le dessin ci-contre,

- le triangle ABC est rectangle en B ;
- le côté [AC] est l'hypoténuse du triangle ABC.

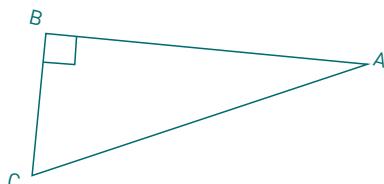


Dans un triangle rectangle,  
l'hypoténuse est le côté le plus long.



### THÉORÈME DE PYTHAGORE

**Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.**



Donnée

ABC est rectangle en B

Conclusion

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que  $AC = 8 \text{ cm}$  et  $BC = 20 \text{ cm}$ .

Calculer un arrondi à 0,1 près de la longueur AB.

**On sait que** le triangle ABC est rectangle en A.

**Or** si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

**Donc**  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$20^2 = AB^2 + 8^2$$

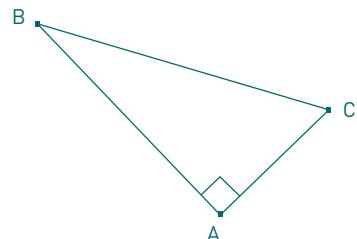
$$400 = AB^2 + 64$$

$$AB^2 = 400 - 64$$

$$AB = 336$$

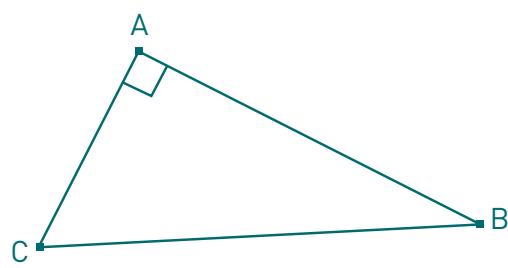
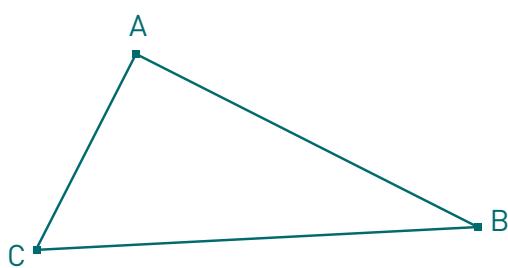
$$AB = \sqrt{336}$$

$$AB \approx 18,3 \text{ cm}$$



### RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Si dans un triangle **le carré de la longueur du plus grand côté** est égal à **la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**, alors ce triangle est **rectangle**.



Données → Conclusion

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Dans le triangle ABC,

[BC] est le plus long côté

$$\text{et } BC^2 = AC^2 + AB^2$$

Le triangle ABC est rectangle en A.



La réciproque du théorème de Pythagore permet de montrer qu'un triangle est rectangle.

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

Dans chacun des cas, le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel point ?

a. AB = 40 cm, AC = 42 cm, BC = 58 cm ;

[BC] est le plus long côté du triangle ABC, alors ABC ne pourrait être rectangle qu'en A.

$$BC^2 = 58^2 = 3\,364$$

$$AB^2 + AC^2 = 40^2 + 42^2$$

$$= 1\,600 + 1\,764$$

$$= 3\,364$$

Donc  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que **le triangle ABC est rectangle en A.**

b. AB = 11 cm, AC = 9 cm, BC = 15 cm.

[BC] est le plus long côté du triangle ABC, alors ABC ne pourrait être rectangle qu'en A.

$$BC^2 = 15^2 = 225$$

$$AB^2 + AC^2 = 11^2 + 9^2$$

$$= 121 + 81$$

$$= 202$$

Donc  $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que **le triangle ABC n'est pas rectangle en A.**

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 57. Trigonométrie : cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

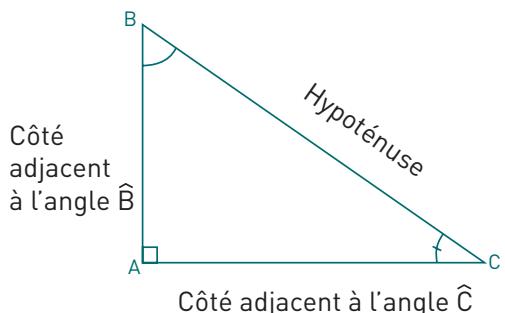
« **Trigonométrie** » vient des mots grecs *trigonos*, « triangle » et *metron*, « mesure ». La trigonométrie désigne l'étude de mesure d'angle et de longueur dans un triangle.



### VOCABULAIRE

Dans le triangle rectangle en A,

- [BC] est l'hypoténuse ;
- [AC] est le côté adjacent à l'angle  $\hat{C}$
- [AB] est le côté adjacent à l'angle  $\hat{B}$



### COSINUS D'UN ANGLE AIGU

Dans un triangle rectangle, **le cosinus d'un angle aigu** est égal au quotient :

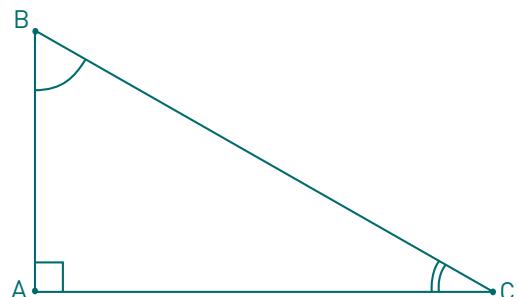
$$\frac{\text{Longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

Le cosinus d'un angle aigu  $\hat{M}$  se note  $\cos \hat{M}$ .

Dans un triangle ABC rectangle en A,

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer



Attention ! Le cosinus est un rapport de longueurs, il ne se représente pas sur une figure et n'a pas d'unité.

### PROPRIÉTÉ

Le **cosinus** d'un angle aigu est **un nombre compris entre 0 et 1**.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

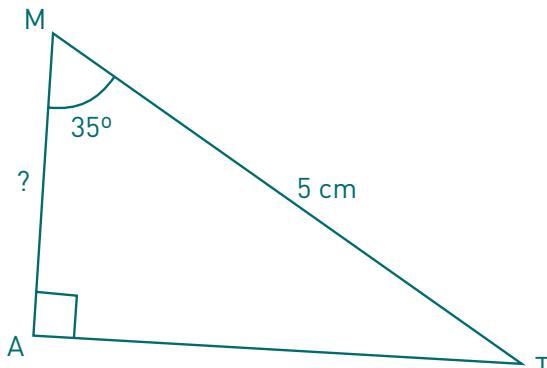
### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

Utiliser le cosinus dans un triangle rectangle :

pour déterminer la longueur d'un côté

On considère le triangle MAT ci-contre.

Calculer la valeur exacte de AM, puis son arrondi à 0,1 près.



Le triangle MAT est rectangle en A. On peut donc utiliser la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{AMT} = \frac{AM}{MT}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{AM}{5}$$

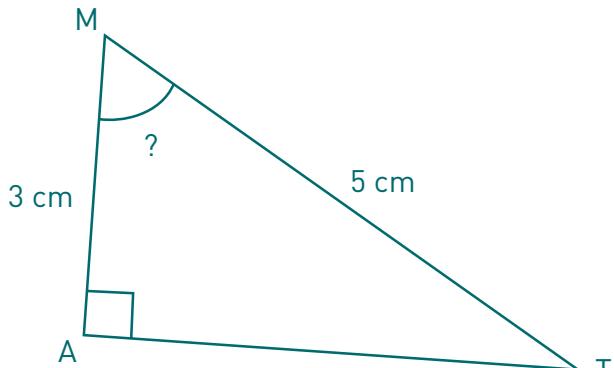
D'où :  $AM = 5 \times \cos 35^\circ$

$$AM \approx 4,3 \text{ cm}$$

pour déterminer un angle aigu

On considère le triangle MAT ci-contre.

Déterminer l'arrondi de la mesure de l'angle  $\widehat{AMT}$  à  $0,1^\circ$  près.



Le triangle MAT est rectangle en A. On peut donc utiliser la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{AMT} = \frac{AM}{MT}$$

$$\cos \widehat{AMT} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\widehat{AMT} \approx 53,1^\circ$$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### SINUS ET TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

- le **sinus d'un angle aigu** est égal au quotient :

$$\frac{\text{Longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

- la **tangente d'un angle aigu** est égale au quotient :

$$\frac{\text{Longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{Longueur du côté adjacent à cet angle}}$$

Pour mémoriser ces définitions, on peut retenir la « formule » **SOHCAHTOA** avec :

S : sinus ; O : opposé ; H : hypoténuse ; C : cosinus ;  
A : adjacent ; T : tangente.

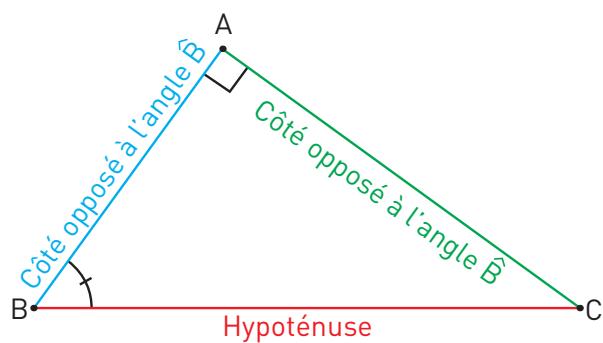


Dans un triangle ABC rectangle en A,

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$



### PROPRIÉTÉ

Le **cosinus** et le **sinus** d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1.

La tangente d'un angle aigu est un nombre positif.

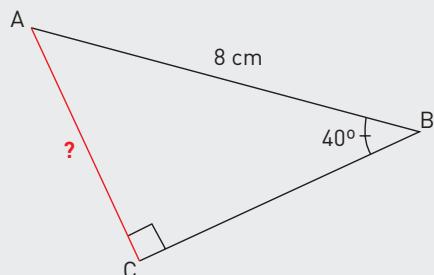
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Calculer une longueur dans un triangle rectangle

On considère le triangle ABC ci-contre.

Calculer la valeur exacte de AC, puis son arrondi à 0,1 près.



Le triangle ABC est rectangle en C.

On peut donc utiliser les définitions de trigonométrie.

On connaît la mesure de l'angle  $\hat{B}$ , la longueur de l'hypoténuse et on cherche la longueur du côté opposé à l'angle B.

On utilise alors le sinus.

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin 40^\circ = \frac{AC}{8}$$

$$AC = 8 \times \sin 40^\circ$$

$$AC \approx 5,1 \text{ cm}$$

### PROPRIÉTÉ

Si  $x$  désigne un **angle aigu**, alors on a les relations suivantes :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Le carré de  $\cos x$ , soit  $(\cos x)^2$  se note plus simplement  $\cos^2 x$ .

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 58. Le théorème de Thalès et sa réciproque

### THÉORÈME DE THALÈS

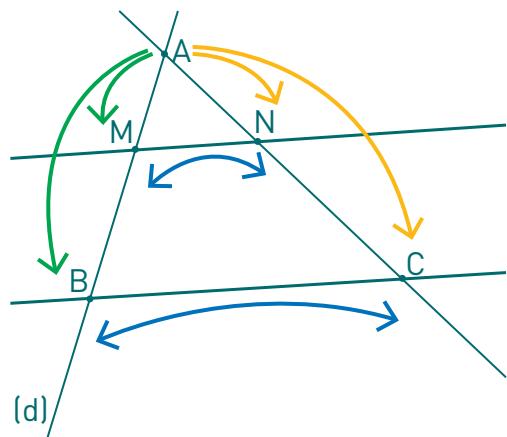
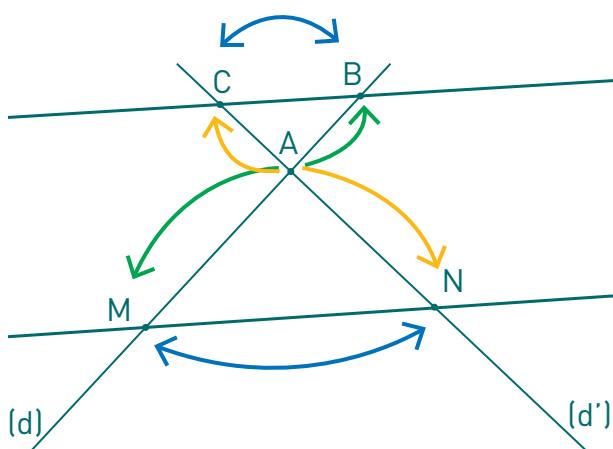
Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites sécantes en  $A$  ;

$A, B$  et  $M$  sont trois points alignés de  $(d)$

$A, C$  et  $N$  sont trois points de  $(d')$

D'après le théorème de Thalès, si les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont **parallèles**, alors on a **l'égalité des quotients de longueurs** :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Données

$A, M, B$  alignés  
 $A, N, C$  alignés  
 $(MN) // (BC)$

Conclusion

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

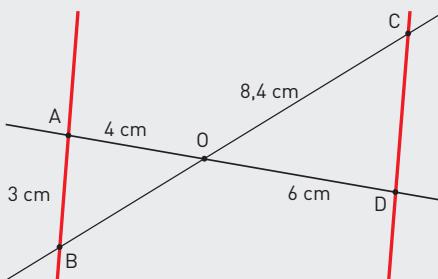
### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Utiliser le théorème de Thalès pour calculer une longueur

Sur la figure ci-contre,  $OA = 4 \text{ cm}$ ,  $OC = 6 \text{ cm}$ ,  $OC = 8,4 \text{ cm}$  et  $AB = 3 \text{ cm}$ .

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

Calculer  $OB$ .



Les points  $A, O, C$  d'une part et les points  $B, O, C$  d'autre part sont alignés.

De plus, les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD}$$

En remplaçant les longueurs connues par leurs valeurs numériques, on obtient :

$$\frac{OB}{8,4} = \frac{4}{6}$$

$$OB \times 6 = 4 \times 8,4$$

$$OB = \frac{4 \times 8,4}{6}$$

$$\underline{\underline{OB = 5,6 \text{ cm}}}$$

### RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites sécantes en  $A$  ;

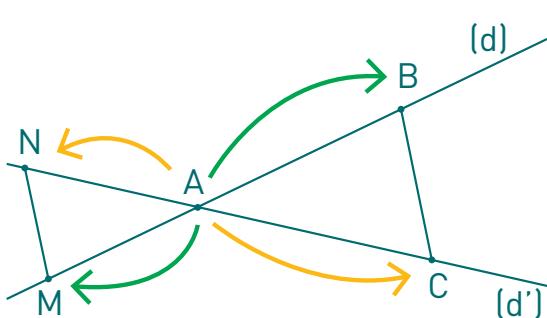
$A, B$  et  $M$  sont trois points alignés de  $(d)$

$A, C$  et  $N$  sont trois points de  $(d')$  dans le même ordre que  $A, B, M$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, si  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  et si **les points  $A, B, M$  et  $C, N$  sont alignés dans le même ordre**, alors **les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  sont parallèles**.

**les points  $A, C, N$  sont alignés dans le même ordre, alors les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  sont parallèles.**

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

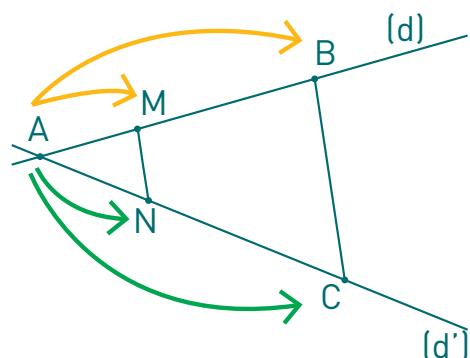


Données

A, B, M alignés

A, C, N alignés, dans le même ordre

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



Conclusion

$$(MN) \parallel (BC)$$

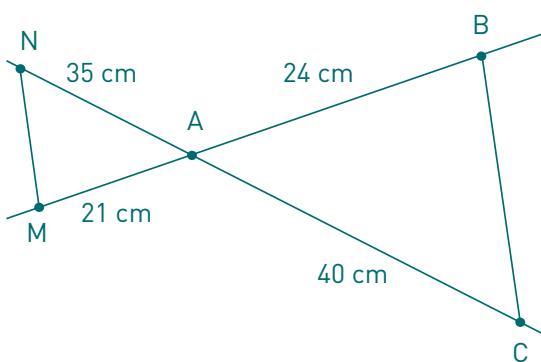
### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

Reconnaître des droites parallèles à l'aide de rapports de longueurs.

Dans chacun des cas suivants, les points A, M, B et A, N, C sont alignés.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

a.



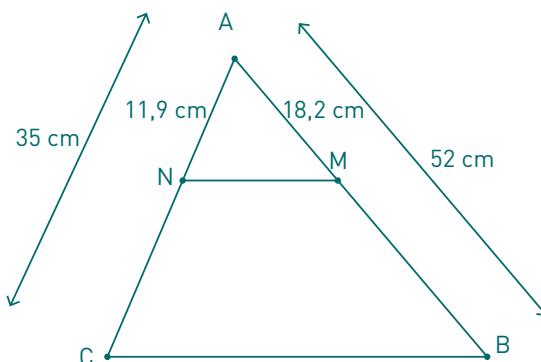
$$a. \frac{AM}{AB} = \frac{21}{24} = \frac{3 \times 7}{3 \times 8} = \frac{7}{8} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{35}{40} = \frac{5 \times 7}{5 \times 8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{Donc } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

De plus, les points M, A, B et N, A, C sont alignés dans le même ordre.

Donc d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

b.



$$b. \frac{AM}{AB} = \frac{18,2}{52} = 0,35 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{11,9}{35} = 0,34$$

$$\text{Donc } \frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}.$$

De plus, A, M, B et A, N, C sont alignés.

Donc d'après **le théorème de Thalès**, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 59. La symétrie axiale

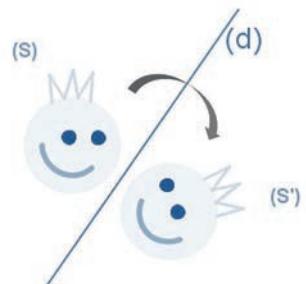
#### DÉFINITION

**Deux figures** sont **symétriques par rapport à une droite** si ces deux figures **se superposent par pliage le long de cette droite**.

Exemple :

Si l'on plie le dessin ci-contre le long de la droite ( $d$ ), les deux smileys se superposent.

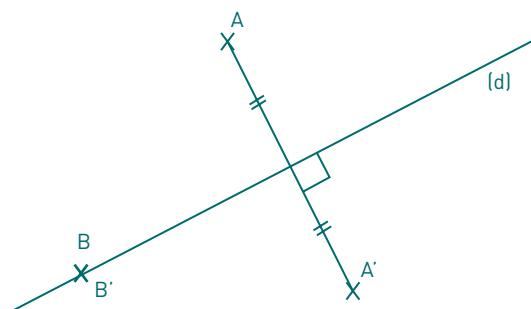
On dit que les figures ( $S$ ) et ( $S'$ ) sont **symétriques par rapport à la droite ( $d$ )**.



#### SYMÉTRIQUE D'UN POINT

Le **symétrique du point  $A$  par rapport à la droite ( $d$ )** est le point  $A'$  tel que la droite ( $d$ ) soit la médiatrice du segment  $[AA']$ .

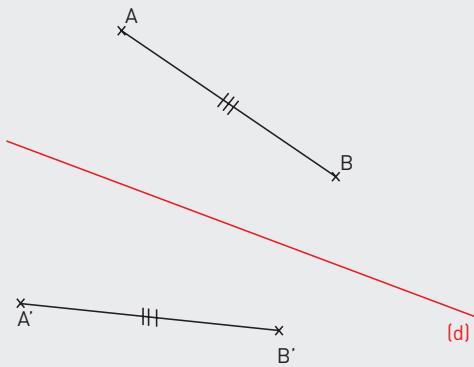
On dit que les points  $A$  et  $A'$  sont **symétriques par rapport à la droite ( $d$ )**.



Si  $B$  est un point de la droite ( $d$ ), alors son symétrique par rapport à ( $d$ ) est le point  $B$  lui-même.

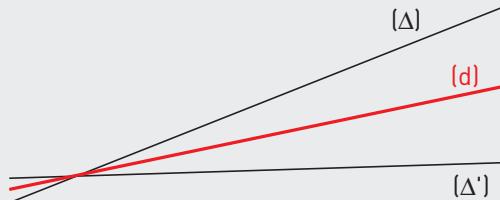
#### SYMÉTRIQUE D'UN SEGMENT, D'UNE DROITE, D'UN ANGLE, D'UN CERCLE

Le **symétrique d'un segment** par rapport à une droite est **un segment de même longueur**.



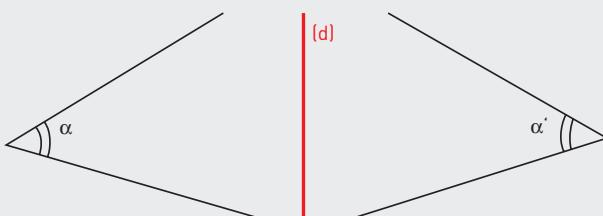
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Le **symétrique d'une droite** par rapport à une droite est **une droite**.

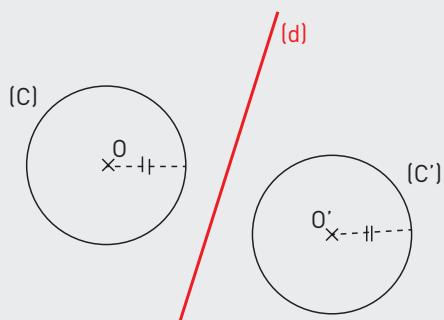


Les droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont symétriques par rapport à la droite  $(d)$ .

Le **symétrique d'un angle** par rapport à une droite est **un angle de même mesure**.



Le **symétrique d'un cercle** par rapport à une droite est **un cercle de même rayon**.



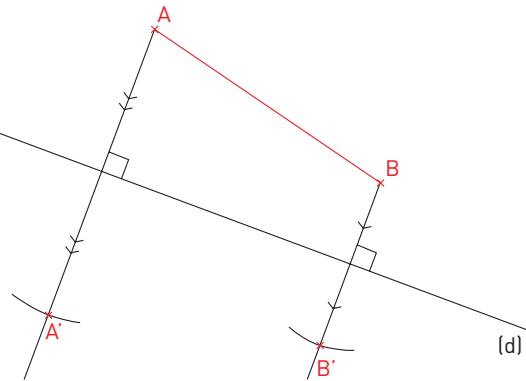
### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Construire le symétrique d'un segment par rapport à une droite

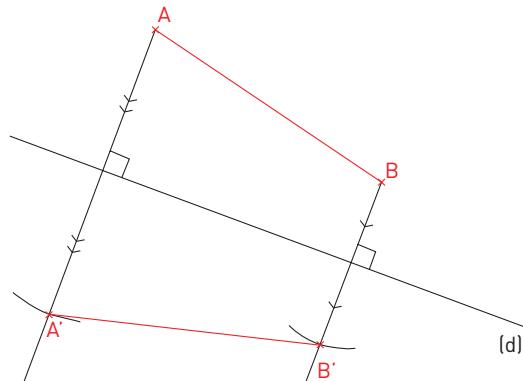
Construire le segment  $[A'B']$ , symétrique du segment  $[AB]$  par rapport à la droite  $(d)$ .

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

1. On construit  $A'$  et  $B'$ , les symétriques respectifs des extrémités  $A$  et  $B$  du segment, par rapport à la droite  $(d)$ .



2. On trace le segment  $[A'B']$ .



### PROPRIÉTÉS

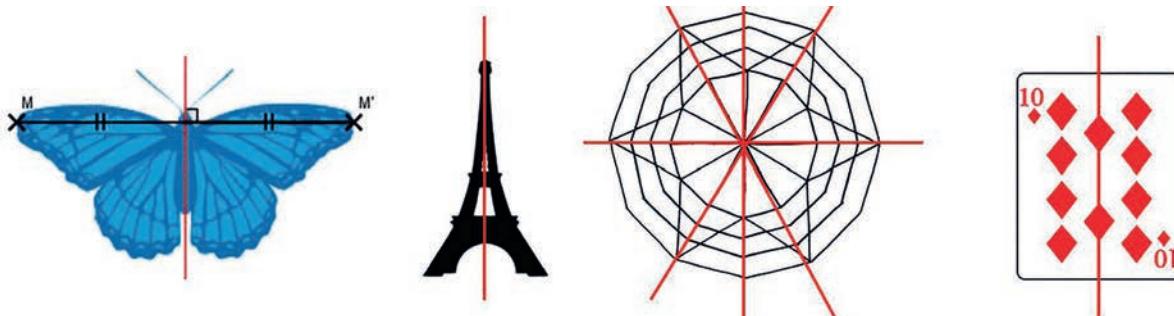
**Une figure et son symétrique par rapport à une droite sont superposables.**

La symétrie axiale conserve alors

- **l’alignement** : si trois points sont alignés alors leurs symétriques par rapport à une droite sont aussi alignés ;
- **les longueurs** : si deux segments sont symétriques par rapport à une droite, alors leurs longueurs sont égales ;
- **les mesures d’angle** : si deux angles sont symétriques par rapport à une droite, alors leurs mesures sont égales ;
- **les aires et les périmètres** : si deux figures sont symétriques par rapport à une droite, alors leurs périmètres sont égaux et leurs aires sont égales.

### AXE DE SYMÉTRIE D’UNE FIGURE

Un **axe de symétrie d’une figure** ( $F$ ) est une droite telle que **le symétrique de la figure** ( $F$ ) par rapport à cette droite **est la figure** ( $F$ ) elle-même.



Le papillon, la tour Eiffel et le segment ont un axe de symétrie, la toile d’araignée en a plusieurs. La carte de 10 de carreau n’a aucun axe de symétrie.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

# 60. La symétrie centrale

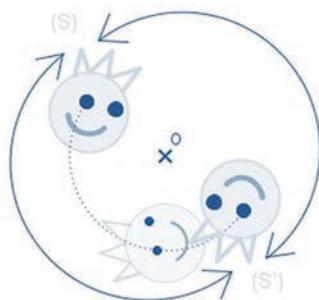
### DÉFINITION

Deux figures sont symétriques par rapport à un point si ces deux figures se superposent en faisant un demi-tour autour de ce point.

Exemple :

On passe d'un smiley à l'autre en tournant d'un demi-tour autour du point O.

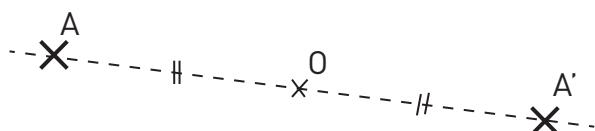
On dit que les **figures** (S) et (S') sont **symétriques par rapport au point O**.



### SYMÉTRIQUE D'UN POINT

Le **symétrique du point A par rapport au point O** est le point A' tel que O soit le milieu du segment [AA'].

On dit que les points A et A' sont **symétriques par rapport au point O**.

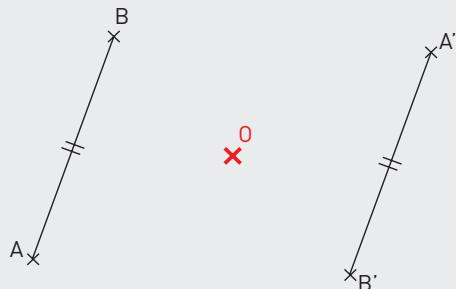


Dans la symétrie centrale de centre O, le symétrique du point O est le point O lui-même.

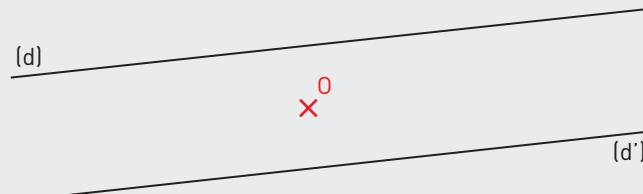
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### SYMÉTRIQUE D'UN SEGMENT, D'UNE DROITE, D'UN ANGLE, D'UN CERCLE

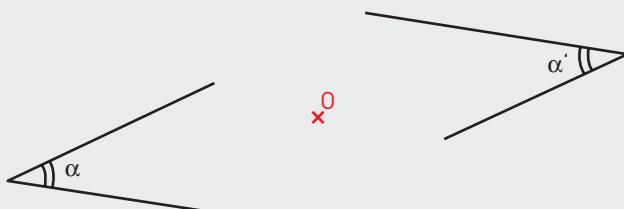
**Le symétrique d'un segment** par rapport à un point est **un segment de même longueur**.



**Le symétrique d'une droite** par rapport à un point est **une droite qui lui est parallèle**.



**Le symétrique d'un angle** par rapport à un point est **un angle de même mesure**.



**Le symétrique d'un cercle** par rapport à un point est **un cercle de même rayon**.



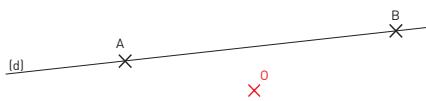
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

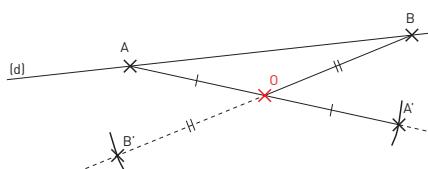
#### Construire le symétrique de la droite ( $d$ ) par rapport au point O.

Construire le segment  $[A'B']$ , symétrique du segment  $[AB]$  par rapport à la droite ( $d$ ).

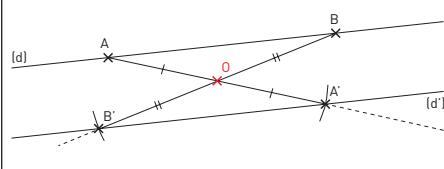
**1.** On place deux points A et B sur la droite ( $d$ ).



**2.** On construit  $A'$  et  $B'$ , les symétriques des points A et B par rapport au point O.



**3.** On trace la droite ( $d'$ ) passant par les point  $A'$  et  $B'$ .



### PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

**Une figure et son symétrique par rapport à un point sont superposables.**

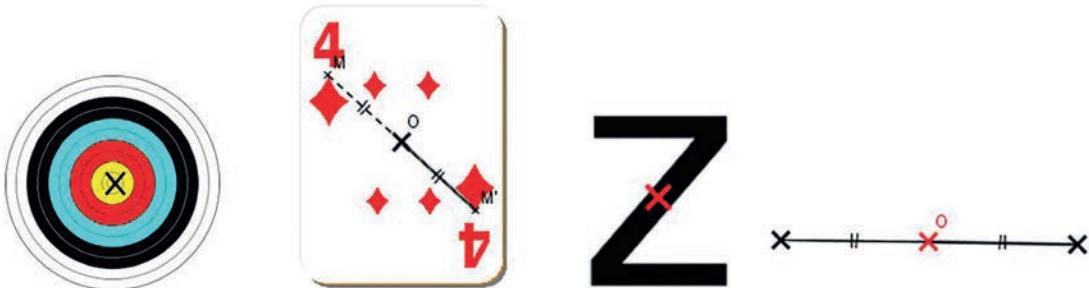
La symétrie centrale conserve alors

- **l'alignement** : si trois points sont alignés alors leurs symétriques par rapport à un point sont aussi alignés ;
- **les longueurs** : si deux segments sont symétriques par rapport à un point, alors leurs longueurs sont égales ;
- **les mesures d'angle** : si deux angles sont symétriques par rapport à un point, alors leurs mesures sont égales ;
- **les aires et les périmètres** : si deux figures sont symétriques par rapport à un point, alors leurs périmètres sont égaux et leurs aires sont égales.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

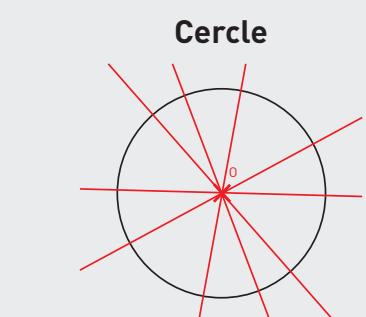
### CENTRE DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

Un point est un **centre de symétrie d'une figure (F)** si le symétrique de la figure (F) par rapport à ce point est la figure (F) elle-même.

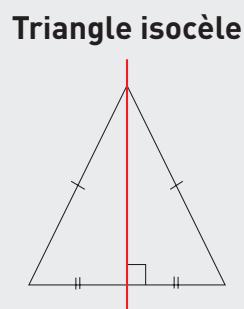


La cible, le quatre de carreau, le Z et le segment ont un centre de symétrie, contrairement au labyrinthe.

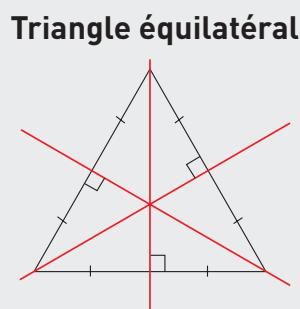
### CENTRE DE SYMÉTRIE ET AXES DE SYMÉTRIE DE FIGURES USUELLES



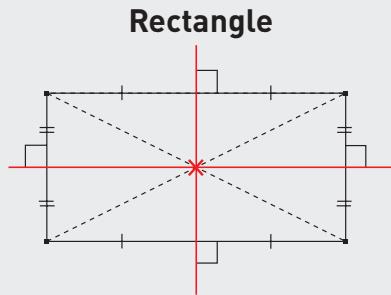
Un cercle a une **infinité d'axes de symétrie** : les droites portant ses diamètres, et un centre de symétrie : son centre.



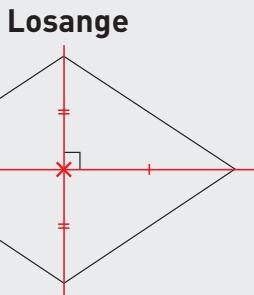
Un triangle isocèle a **un axe de symétrie** : la médiatrice de sa base, et n'a **pas de centre de symétrie**.



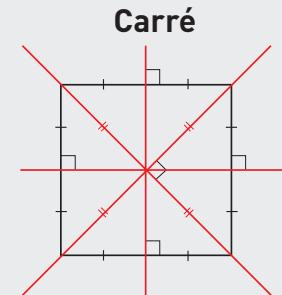
Un triangle équilatéral a **trois axes de symétrie** : les médiatrices de ses côtés et n'a **pas de centre de symétrie**.



Un rectangle a **deux axes de symétrie** : les médiatrices de ses côtés, et **un centre de symétrie** : le point d'intersection de ses diagonales.



Un losange a **deux axes de symétrie** : les droites portant ses diagonales, et **un centre de symétrie** : le point d'intersection de ses diagonales.



Un carré a **quatre axes de symétrie** : les droites portant ses diagonales et les médiatrices de ses côtés, et **un centre de symétrie** : le point d'intersection de ses diagonales.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 61. La translation



Déplacer une figure par translation, c'est déplacer cette figure sans la faire tourner.

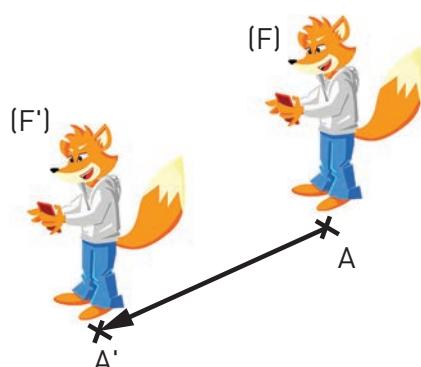
Exemple :

On passe ici de la figure  $(F)$  à la figure  $(F')$  par **la translation qui transforme A en  $A'$** .

On dit que l'on effectue une **translation** de la figure  $(F)$ .

On obtient  $(F')$ , **image** de  $(F)$  par la translation qui transforme A en  $A'$ .

On peut représenter la translation par une flèche qui part de A pour arriver en  $A'$ .

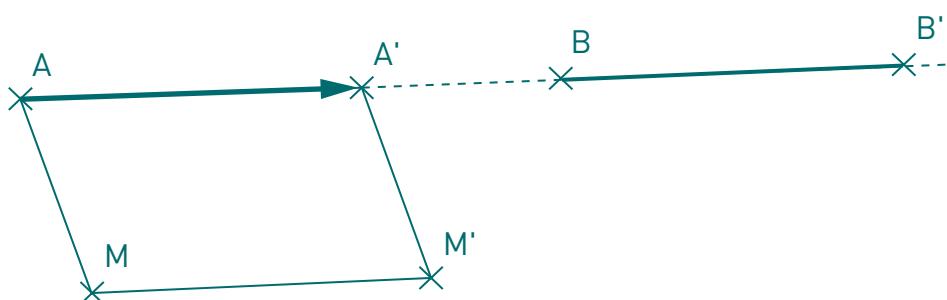


#### PROPRIÉTÉ

La connaissance d'un point A et de son image  $A'$  définit la translation.

#### IMAGE D'UN POINT PAR UNE TRANSLATION

Dire que le **point  $M'$  est l'image du point M par la translation qui transforme A en  $A'$**  signifie que le quadrilatère  $AA'M'M$  est un parallélogramme.



## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

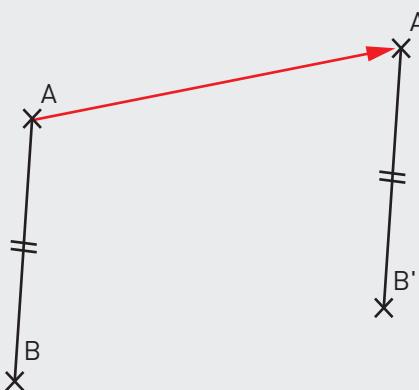
Si  $B$  appartient à la droite  $(AA')$ , alors

- son image  $B'$  par la translation qui transforme  $A$  en  $A'$  appartient à la droite  $(AA')$  ;
- $BB' = AA'$  ;
- et les demi-droites  $[AA']$  et  $[BB']$  ont le même sens.

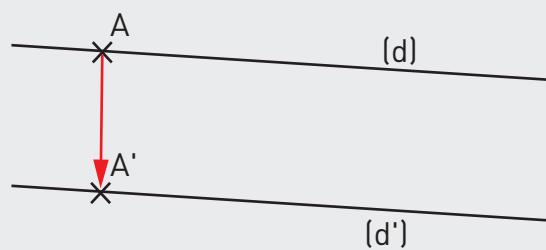
La translation qui transforme  $M$  en  $M'$  est la même que celle qui transforme  $A$  en  $A'$ .

### IMAGE D'UN SEGMENT, D'UNE DROITE, D'UN ANGLE, D'UN CERCLE PAR UNE TRANSLATION

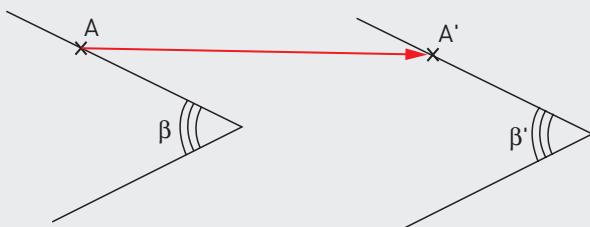
Par une translation, l'**image d'un segment** est un **segment de même longueur**.



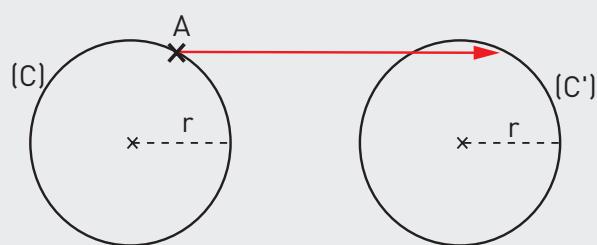
Par une translation, l'**image d'une droite** est une **droite qui lui est parallèle**.



Par une translation, l'**image d'un angle** est un **angle de même mesure**.



Par une translation, l'**image d'un cercle** est un **cercle de même rayon**.



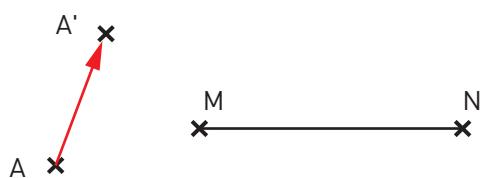
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

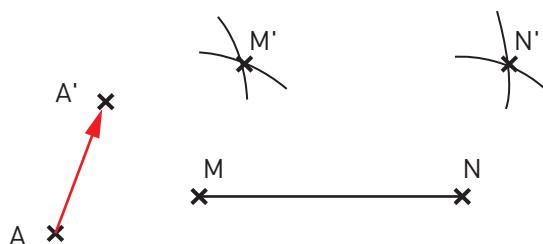
#### Construction de l'image d'un segment par une translation

On donne deux points distincts A et A', ainsi qu'un segment [MN].

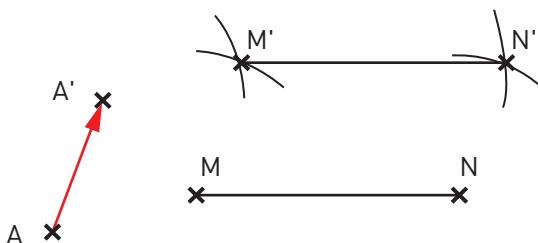
Construire l'image [M'N'] du segment [MN] par la translation qui transforme A en A'.



1. On construit avec le compas M' et N' les images respectives des points M et N par la translation qui transforme A en A'.



2. On trace le segment [M'N'].



### PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

**Une figure et son image par une translation sont superposables.**

**La translation conserve** alors

- **l'alignement** : si trois points sont alignés alors **leurs images** par une translation sont aussi alignés ;
- **les longueurs** : un segment et son image par une translation **ont la même longueur** ;
- **les mesures d'angle** : un angle et son image par une translation **ont la même mesure** ;
- **les aires et les périmètres** : une figure et son image par une translation **ont la même aire et le même périmètre**.

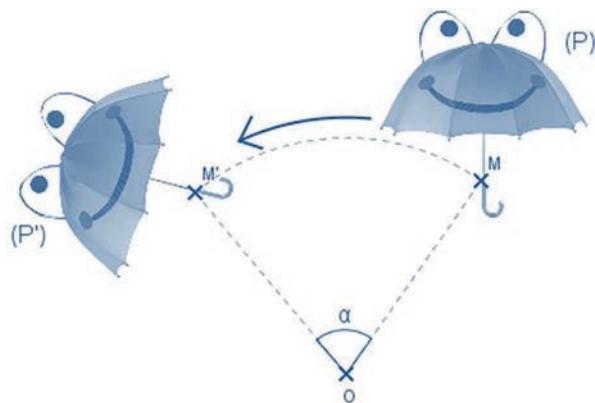
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 62. La rotation



Déplacer une figure par rotation, c'est la faire tourner autour d'un point, d'un angle et dans un sens donnés.

Exemple :



On déplace la figure  $(P)$  en tournant autour du point  $O$ , d'un angle  $\alpha$ , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Elle vient se superposer à la figure  $(P')$ .

On dit que la figure  $(P')$  est l'**image** de  $(P)$  par la **rotation** de centre  $O$ , d'angle  $\alpha$ , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

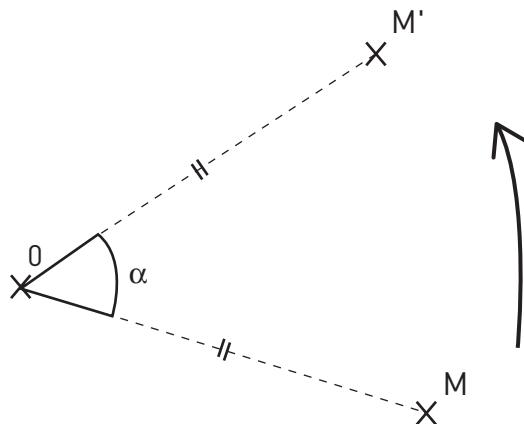
#### PROPRIÉTÉS

Une **rotation** est définie

- par **un point**, appelé **le centre** de la rotation ;
- par **un angle**, appelé **l'angle** de la rotation ;
- et par **un sens** :
  - soit le sens contraire des aiguilles d'une montre , appelé **sens direct** ;
  - soit le sens des aiguilles d'une montre, appelé **sens indirect**.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### IMAGE D'UN POINT PAR UNE ROTATION



Soient O et M deux points distincts, et  $\alpha$  une mesure d'angle en degré.

L'image du point M par la rotation de centre O, d'angle  $\alpha$ , dans le sens direct (respectivement indirect) est le point M' tel que

- $OM = OM'$
- $\widehat{MOM'} = \alpha$  (en tournant dans le sens direct) (respectivement indirect)

L'image du centre O d'une rotation est le centre O lui-même. On dit qu'il est **invariant**.

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Construction de l'image d'un point par une rotation

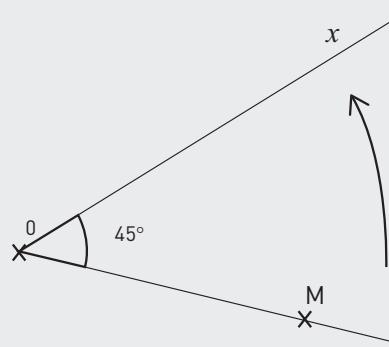
On donne O et M deux points distincts.

Construire l'image M' du point M par la rotation de centre O et d'angle  $45^\circ$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

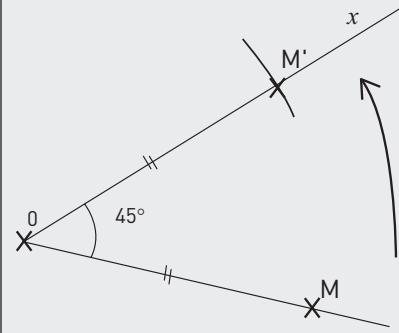
1. On trace la demi-droite [OM].



2. On trace l'angle  $\widehat{MOx}$  de  $45^\circ$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



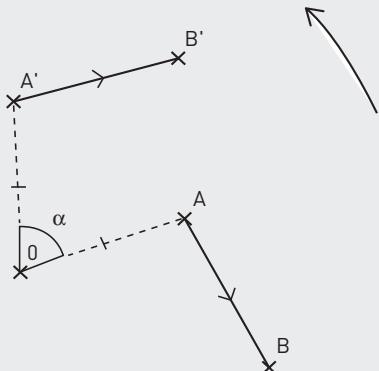
3. On place avec le compas le point M' sur le côté [Ox] tel que  $OM = OM'$ .



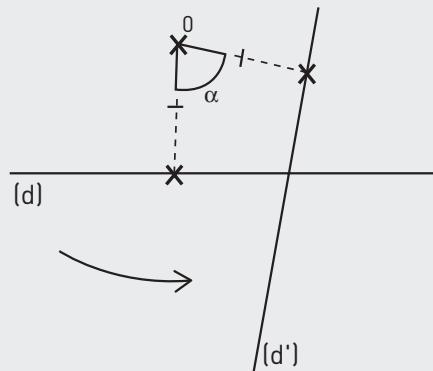
## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### IMAGE D'UN SEGMENT, D'UNE DROITE, D'UN ANGLE, D'UN CERCLE PAR UNE ROTATION

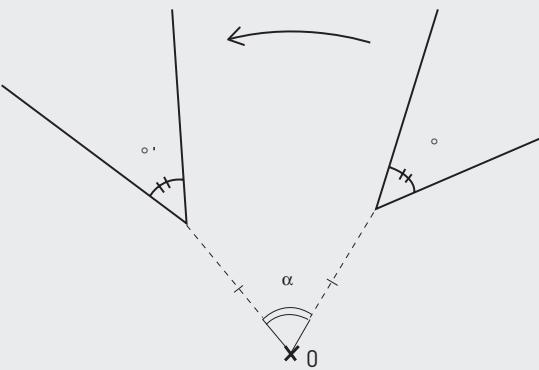
Par une rotation, l'**image d'un segment** est un **segment de même longueur**.



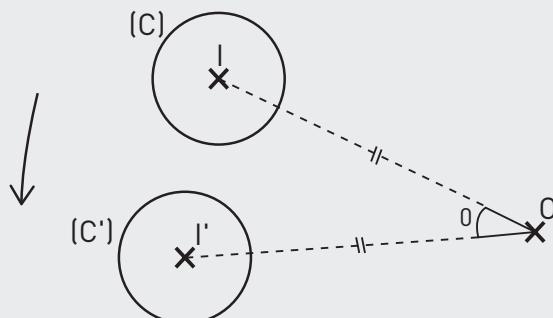
Par une rotation, l'**image d'une droite** est une **droite**.



Par une rotation, l'**image d'un angle** est un **angle de même mesure**.



Par une rotation, l'**image d'un cercle** est un **cercle de même rayon**.



### PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

**Une figure et son image par une rotation sont superposables.**

**La rotation conserve** alors

- **l'alignement** : si trois points sont alignés alors leurs images par une rotation sont aussi alignés ;
- **les longueurs** : un segment et son image par une rotation ont la même longueur ;
- **les mesures d'angle** : un angle et son image par une rotation ont la même mesure ;
- **les aires et les périmètres** : une figure et son image par une rotation ont la même aire et le même périmètre.

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### 63. L'homothétie



L'homothétie est une transformation géométrique qui permet d'agrandir ou de réduire une figure.

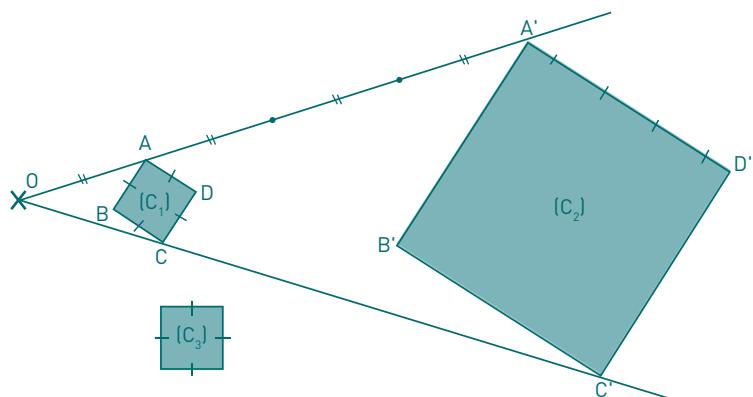
Exemple :

Les figures  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ci-contre ont la même forme et sont disposées de la même façon. On dit que les figures  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont **homothétiques**.

(Ce qui n'est pas le cas des figures  $(C_3)$  et  $(C_2)$ .)

La figure  $(C_2)$  a été agrandie 4 fois à partir du point O.

On dit que la figure  $(C_2)$  est l'**image** de la figure  $(C_1)$  par l'**homothétie de centre O et de rapport 4**.



#### PROPRIÉTÉS

Une **homothétie** est définie

- par un point, appelé **le centre** de l'homothétie ;
- et par un nombre , appelé **le rapport** de l'homothétie.

Soient O et M deux points distincts et k un nombre positif non nul.

Si  $M'$  est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k, alors

$$k = \frac{OM'}{OM} = \frac{\text{longueur du segment image}}{\text{longueur du segment initial}}$$

En effet, si  $M'$  est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k, alors  $OM' = k \times OM$ .

$$\text{Et alors, } k = \frac{OM'}{OM}.$$

## A. Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

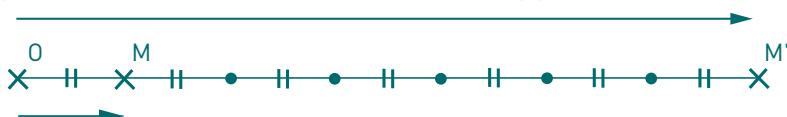
### IMAGE D'UN POINT PAR UNE HOMOTHÉTIE

Soient  $O$  un point et  $k$  un nombre positif non nul donné.

L'image du point  $M$  par l'**homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$**  est le point  $M'$  tel que

- les points  $O$ ,  $M$  et  $M'$  soient alignés ;
- le sens qui va de  $O$  vers  $M$  soit le même que celui qui va de  $O$  vers  $M'$  ;
- et  $OM' = k \times OM$

$M'$  est l'image de  $M$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 7.



En effet :

- $O$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés ;
- le sens qui va de  $O$  vers  $M$  est le même que celui qui va de  $O$  vers  $M'$  ;
- et  $OM' = 7 \times OM$ .

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

#### Construction de l'image d'un point par une homothétie

On donne  $O$  et  $M$  deux points distincts.

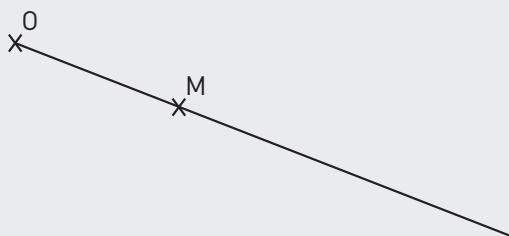
a. Construire l'image  $M'$  du point  $M$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 3.



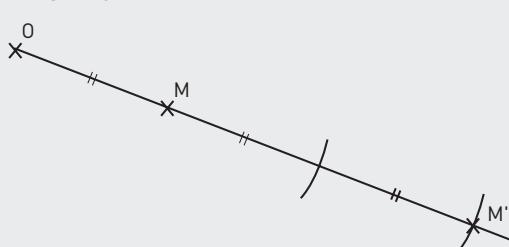
b. Construire l'image  $M''$  du point  $M$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 0,25.



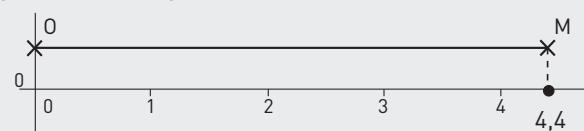
a. On trace la demi-droite  $[OM]$ .



Puis avec le compas on place le point  $M'$  sur la demi-droite  $[OM]$  tel que  $OM' = 3 \times OM$ .



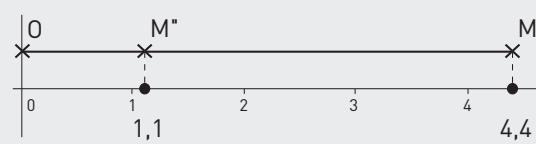
b. On mesure avec la règle graduée la longueur du segment  $[OM]$ .



Puis on calcule :

$$0,25 \times OM = 0,25 \times 4,4 = 1,1$$

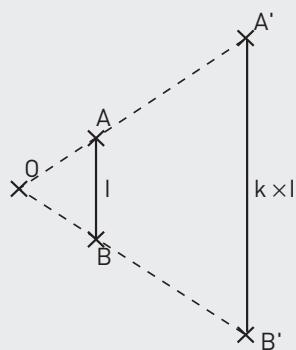
On place ensuite avec la règle graduée le point  $M''$  du segment  $[OM]$  tel que  $OM'' = 0,25 \times OM$ , soit 1,1.



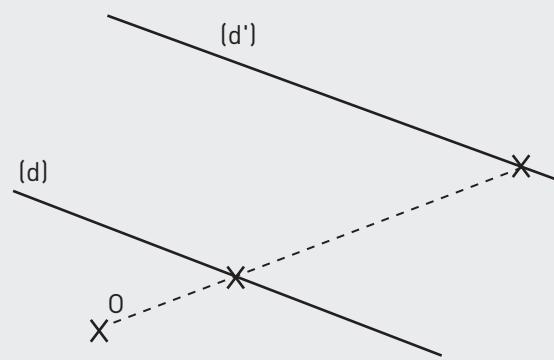
## B. Représentation de l'espace

### IMAGE D'UN SEGMENT, D'UNE DROITE, D'UN ANGLE, D'UN CERCLE PAR UNE HOMOTHÉTIE

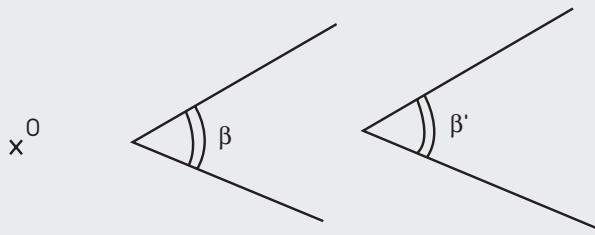
Par une homothétie de centre O et rapport k, l'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur  $k \times l$ .



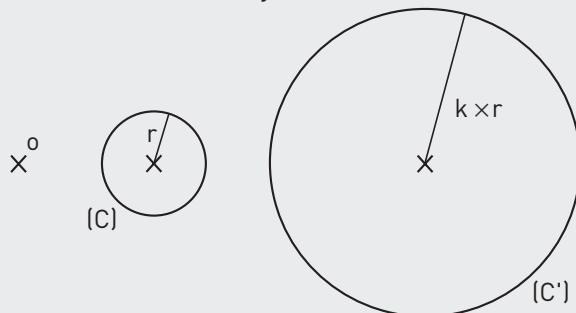
Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.



Par une homothétie, l'image d'un angle est un angle de même mesure.



Par une homothétie de centre O et de rapport k, l'image d'un cercle de rayon r est un cercle de rayon  $k \times r$ .



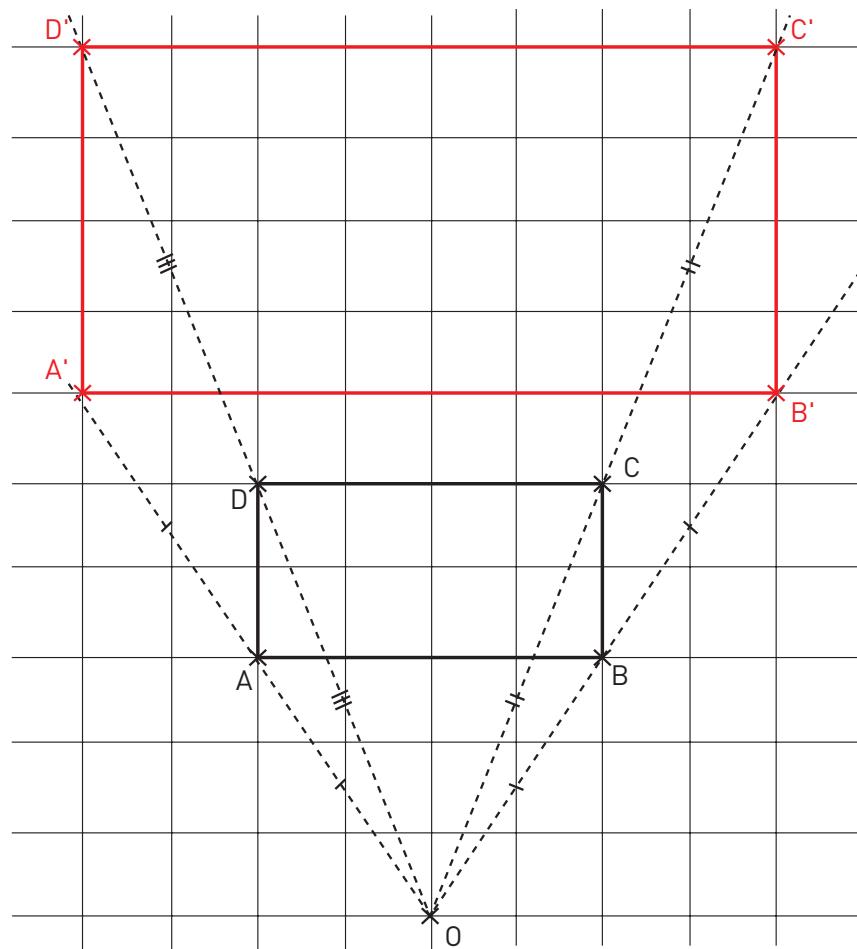
### EFFET DU RAPPORT D'HOMOTHÉTIE K SUR L'IMAGE

On considère une homothétie de centre O et de rapport k et (F) une figure.

Le rapport de l'homothétie influence la taille de la figure obtenue à partir de la figure (F) par l'homothétie.

- On utilise un rapport  $k > 1$  pour effectuer un agrandissement de (F).
- On utilise un rapport  $0 < k < 1$  pour effectuer une réduction de (F).

## B. Représentation de l'espace



Le rectangle  $A'B'C'D'$  est l'image du rectangle  $ABCD$  par l'homothétie de centre  $O$  de rapport 2.

## B. Représentation de l'espace

### 64. Le parallélépipède rectangle



La géométrie plane n'est pas suffisante pour représenter le monde dans lequel vivent les hommes. C'est pourquoi il faut définir de nouveaux objets géométriques.

Les **solides** sont les formes géométriques qui ne sont pas planes. On dit que ces objets ont trois dimensions. On les appelle aussi des **objets de l'espace**. Voici quelques objets de l'espace :



Cône



Sphère



Pavé droit

#### PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

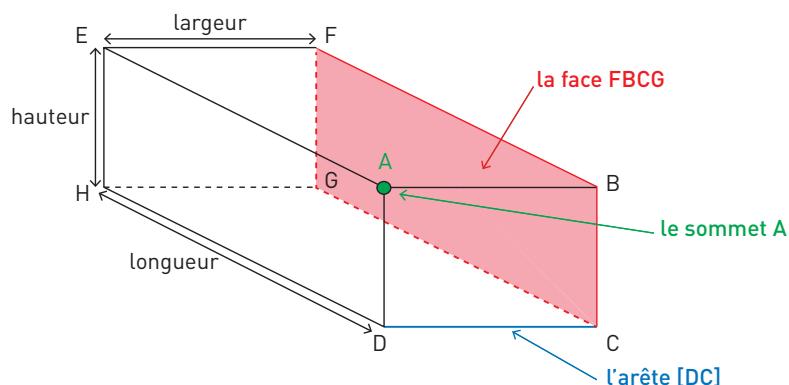
Un **parallélépipède rectangle** est un solide dont les **six faces sont des rectangles**.

Un parallélépipède rectangle s'appelle aussi un **pavé droit**.

Deux faces **opposées** du parallélépipède rectangle sont **superposables**.

Un parallélépipède rectangle a **huit sommets et douze arêtes**.

Parallélépipède rectangle ABCDEFGH :



Un parallélépipède rectangle est défini par trois dimensions : **une largeur, une longueur et une hauteur**.

## B. Représentation de l'espace



La **perspective cavalière** est une manière de représenter un solide sur une surface plane.

### RÈGLES DE LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE

- Le parallélépipède rectangle est posé **sur un plan horizontal**.
- Une face est considérée comme étant **face à l'observateur**.
- Les faces avant et arrière sont représentées par des rectangles **en vraie grandeur**.
- Les autres faces rectangulaires sont représentées par des **parallélogrammes**.
- On réduit les longueurs des **arêtes fuyantes**.
- Les **arêtes cachées** sont représentées **en pointillés**.
- Les côtés **parallèles** restent **parallèles**.
- Les côtés de même longueur, s'ils sont portés par des droites parallèles, **restent de même longueur**.

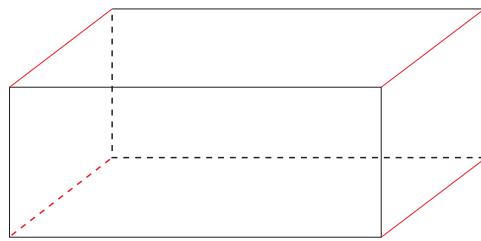
Face arrière



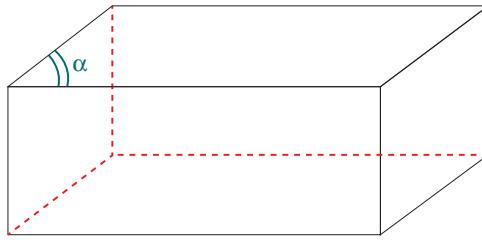
Face avant



Arêtes fuyantes



Arêtes cachées



## B. Représentation de l'espace

L'angle  $\alpha$  est appelé **angle de fuite**. Dans la réalité, c'est un angle droit.

L'expression « perspective cavalière » date du Moyen Âge et fait référence à un cavalier qui regarde un objet à terre du haut de son cheval.



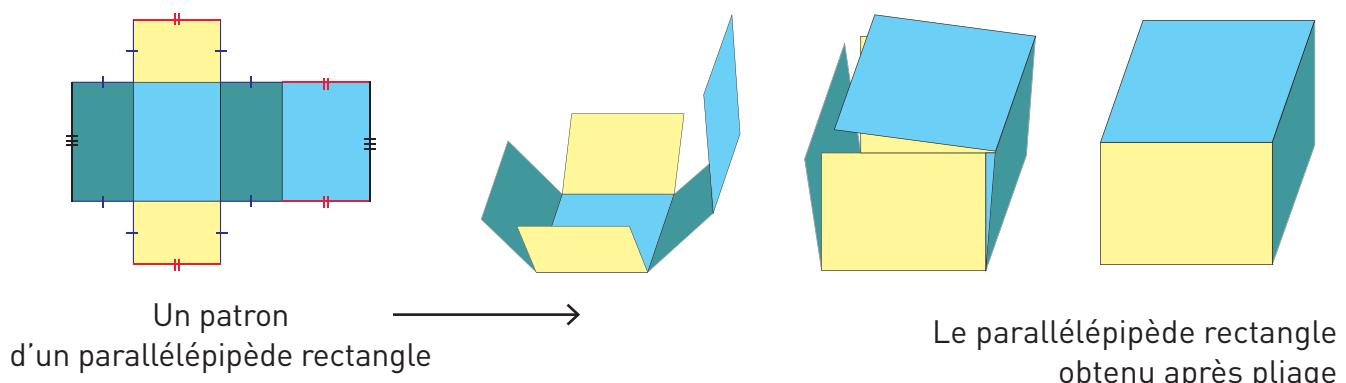
### PATRON

Le **patron** d'un solide est un dessin qui permet, après découpage et pliage, de fabriquer ce solide.

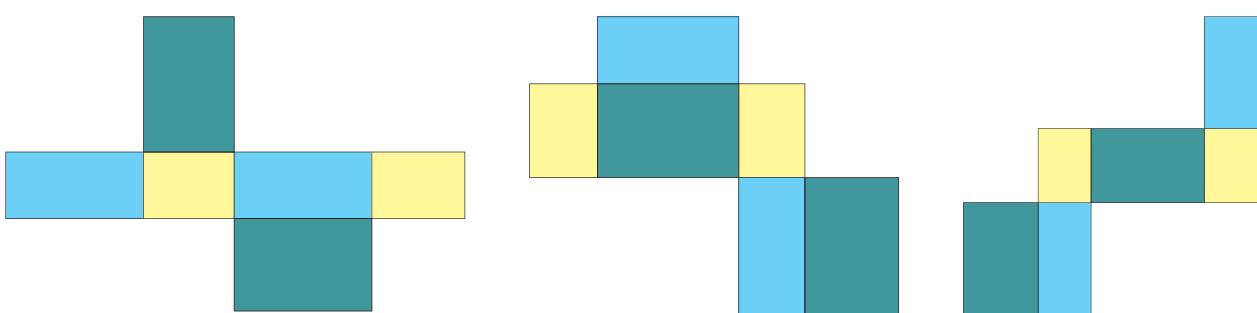
Sur un patron, chaque face du solide est tracée **en vraie grandeur**.

Le patron d'un parallélépipède rectangle compte 6 rectangles.

Les arêtes en contact lors du pliage doivent être de la même longueur.



Il existe plusieurs patrons d'un même parallélépipède rectangle.



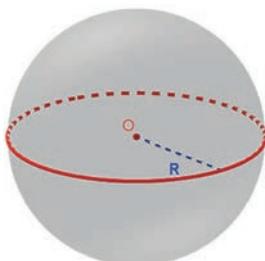
## B. Représentation de l'espace

## 65. La sphère

## DÉFINITION

Soient  $O$  un point et  $R$  un nombre positif.

- Une **sphère** est formée de tous les points situés à la même distance d'un point appelé **centre**.  
Ainsi, la **sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$**  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $OM = R$ .
- L'**intérieur de la sphère** s'appelle **la boule**.  
**La boule de centre  $O$  et de rayon  $R$**  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $OM \leq R$ .



## LE GLOBE TERRESTRE



La Terre peut être vue comme une boule, sa surface comme une sphère de 6 371 km de rayon. Elle tourne sur elle-même autour d'un axe qui passe par le pôle Nord (que l'on note  $N$ ) et le pôle Sud (que l'on note  $S$ ). La droite ( $NS$ ) est appelée **l'axe des pôles**.

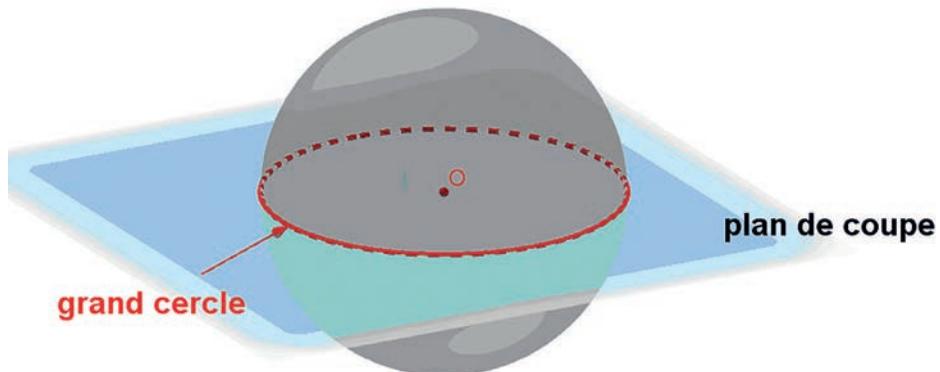


Axe de rotation de la Terre

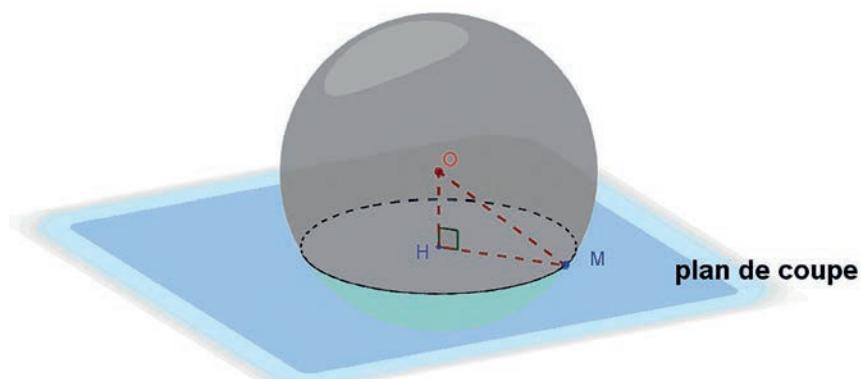
## B. Représentation de l'espace

### SECTION

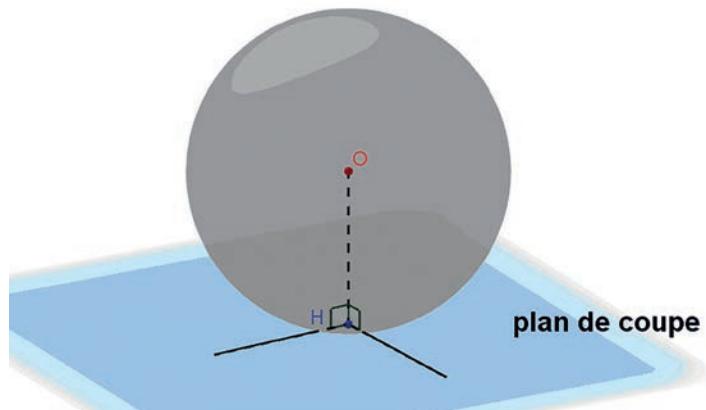
Lorsqu'on coupe une sphère creuse de centre O, par un plan, on parle de **section** de sphère et trois cas peuvent se produire :



Dans ce premier cas, le plan de coupe contient le centre O de la sphère. L'intersection obtenue est un cercle nommé « grand cercle ». Remarquons que l'équateur est un grand cercle de la Terre, si l'on considère que cette dernière est sphérique.



Dans ce second cas, ce plan de coupe définit un cercle plus petit qu'un « grand cercle ». Son rayon est HM sur le dessin. OM est le rayon de la sphère et bien sûr  $HM < OM$ .

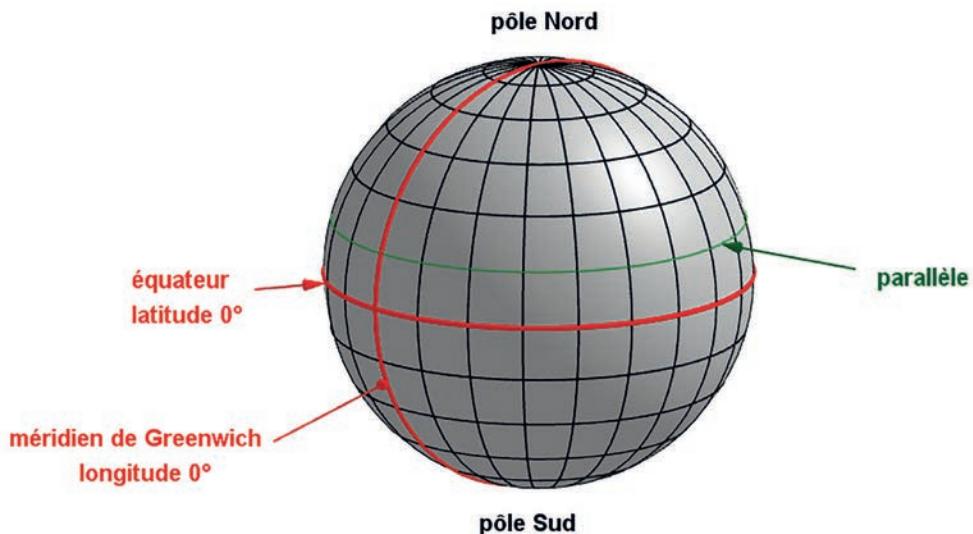


## B. Représentation de l'espace

## 66. Repérage sur le globe terrestre

## PARALLÈLES, ÉQUATEUR, MÉRIDIENS

- Si on coupe la sphère terrestre par un plan perpendiculaire à l'axe des pôles, alors la section obtenue est un cercle que les géographes appellent **parallèle**.
- Si on coupe la sphère terrestre par un plan perpendiculaire à l'axe des pôles et passant par le centre, alors la section obtenue est un grand cercle appelé **équateur**.
- Si on coupe la sphère terrestre par un plan passant par l'axe des pôles, alors la section obtenue est un grand cercle de diamètre [NS], formé de deux **méridiens**.



L'**équateur** est le plus grand parallèle de la Terre. Il marque la séparation entre l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud.

Le **méridien de Greenwich** est le plus connu des méridiens. Il passe par Greenwich, une ville d'Angleterre près de Londres.



Les **parallèles** et les **méridiens**, lignes imaginaires tracées sur le globe terrestre, permettent de situer très précisément n'importe quel point sur la terre.

## B. Représentation de l'espace

### JE COMPRENDS LA MÉTHODE

Le méridien de Greenwich sert d'origine pour la longitude et l'Équateur fait de même pour la latitude. Les **méridiens et les parallèles du globe ci-dessus sont espacés de  $15^\circ$**  et quand on précise des coordonnées sur le globe, on doit donner la latitude avant la longitude.

On met une majuscule sur chaque direction Nord, Est, Sud et Ouest.

Ainsi, le point A a pour latitude  $15^\circ$  Nord et pour longitude  $0^\circ$ .

Le point B a pour latitude  $15^\circ$  Sud et pour longitude  $60^\circ$  Est.

Enfin, le point C a pour latitude  $45^\circ$  Nord et pour longitude  $30^\circ$  Ouest.

