Séquence 7

1ère partie :

Produit scalaire (2) : applications

2e partie :

Problèmes

1ère partie

Produit scalaire (2) : applications

Sommaire

1 Pré-requis

A Géométrie plane

Dans cette séquence, nous auront besoin de toutes les propriétés de géométrie plane vues en collège et en seconde.

Egalement de la notion d'équation de droite, et du calcul vectoriel.

Pour toutes ces notions, revoir la Séquence 1 partie 2 si nécessaire.

B Trigonométrie

Le produit scalaire de deux vecteurs pouvant s'exprimer à l'aide du cosinus de l'angle des deux vecteurs, nous aurons aussi besoin de nous souvenir des propriétés de trigonométrie.

Cette séquence nous permettra d'ailleurs d'enrichir les propriétés de trigonométrie que nous avons.

Pour toutes ces notions de trigonométrie, revoir la Séquence 4 partie 2 si nécessaire.

C Produit scalaire de deux vecteurs

Dans cette séquence, nous allons voir des applications du produit scalaire.

Il est donc indispensable de se souvenir des propriétés vues dans la séquence 5 partie1.

1. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

On le lit « **u** scalaire **v** ».

Propriétés

a. Retenons tout d'abord que le **produit scalaire** de deux vecteurs est un **nombre** réel.

b. Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est **nul**, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

c. Quand on calcule un produit scalaire, l'**ordre des vecteurs** n'a pas d'importance et on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

d. Si $\vec{v}=\vec{u}$, autrement dit si l'on calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même, on a : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$.

On a l'habitude de dire que c'est le **carré scalaire** de $\vec{u}$ et on le note : $\vec{u}^{\,2}$. On a donc : $\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$.

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}$.

2. Expression analytique du produit scalaire

Dans tout ce paragraphe, on suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Théorème

Si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un **repère orthonormé** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, sont $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, on a : $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$.

Propriétés

a. Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a : $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}$.

b. Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le nombre réel λ on a : $\boldsymbol{\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\times\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)}$.

Propriété

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

a. $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$.

b. $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$.

c. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$.

3. Autres expressions du produit scalaire

Théorème

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, et $\vec{v}$ un vecteur quelconque, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\overrightarrow{v'}$ où $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Théorème

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$.

2 Calculs de distances, d'angles

Dans ce chapitre, nous allons voir quelques applications « classiques » du calcul de produits scalaires, mais il y en a bien d'autres, dont beaucoup sont relativement simples et que vous pourrez rencontrer au détour d'un exercice. Bien entendu, seules les propriétés établies dans le cours seront considérées comme « déjà vues » et directement utilisables, les autres, mêmes intuitivement évidentes, seront à établir.

A Activité

1. Côtés et médiane

Soit un triangle ABC tel que $AC = 3$, $AB = 4$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}$. On appelle I le milieu de [BC].

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer la distance AD, où D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme. En déduire la distance AI.
3. Calculer la distance BC.
4. Vérifier que l'on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$. Où avez-vous déjà vu une telle égalité ?

2. Côtés et angles

Soit un triangle ABC tel que $AB = 9$, $BC = 7$ et $CA = 4$.

Calculer, au degré près, les angles non orientés $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

B Cours

1. Relations dans un triangle

Comme on l'a vu dans la première activité, et dans le dernier exercice d'approfondissement de la Séquence 5 partie 1, dans un triangle quelconque ABC, on a la propriété suivante.

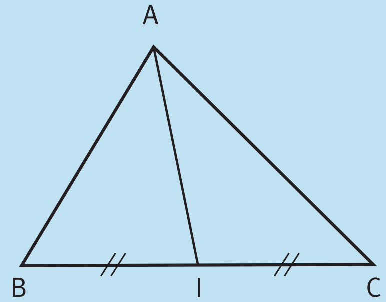
Théorème 1 (théorème de la médiane)

Soit un triangle ABC et I le milieu de [BC]. On a les égalités :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AI^2-\dfrac{BC^2}{4}$.

b) $AB^2-AC^2=2\,\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c) $AB^2+AC^2=2\,AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$.



▸ **Démonstration**

a) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)$, soit en développant :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{AI}\cdot\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$.

Le point I étant le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=-IB\cdot IC=-\dfrac{BC^2}{4}$.

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}^2-\dfrac{BC^2}{4}$.

b) On a $AB^2-AC^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.

Or $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

Donc : $AB^2-AC^2=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CB}=2\,\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c) On a $AB^2+AC^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$, soit en développant :

$$AB^2+AC^2=\left(\overrightarrow{AI}^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2\right)+\left(\overrightarrow{AI}^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}^2\right)$$

$$=2\overrightarrow{AI}^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2.$$

Or $\overrightarrow{AI}^2=AI^2$, $\overrightarrow{IB}^2=\overrightarrow{IC}^2=IB^2=\dfrac{BC^2}{4}$ et $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Donc : $AB^2+AC^2=2\,AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$.

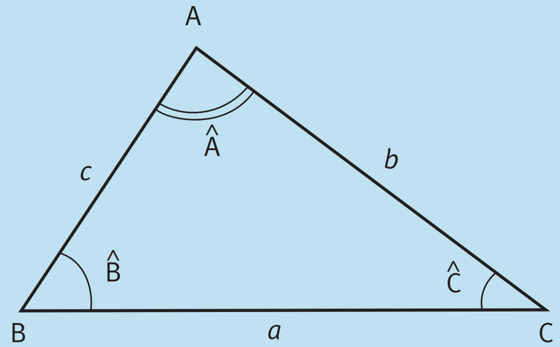
Théorème 2 (Relation d'Al Kashi)

Soit un triangle ABC, en notant $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, et $\widehat{BAC} = \hat{A}$, $\widehat{CBA} = \hat{B}$, $\widehat{ACB} = \hat{C}$, on a les égalités :

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$.

b) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B})$.

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$.



▶ **Démonstration**

a) On a $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$ soit en développant :

$$a^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2.$$

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A}) = bc\cos(\hat{A})$, on a bien :

$$a^2 = c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) + b^2.$$

b) et c) Les deux autres propriétés se démontrent de manière analogue.

Remarques

❶ Les notations utilisées pour les longueurs des côtés et pour les angles permettent de mieux voir le rôle de chacun dans ces égalités.
Ce théorème est parfois nommé « théorème de Pythagore généralisé » puisqu'il « prolonge » le théorème de Pythagore aux cas où les angles ne sont pas droits.

❷ Ici l'orientation des angles n'a pas d'importance puisque seuls les cosinus interviennent.

▶ **Exemple 1**

Un triangle ABC est tel que : $AB = 8$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

Déterminer une valeur approchée à $0{,}1°$ près de l'angle $\widehat{ABC}$.

Réponse

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$, c'est-à-dire
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos(60°)$.

Donc : $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times 0{,}5 = 49$.

On a alors : $\cos(\hat{B}) = \dfrac{-b^2+c^2+a^2}{2ca} = \dfrac{-5^2+8^2+49}{2\times 8\times 7} = \dfrac{11}{14}$.

D'où : $\hat{B} \approx 38{,}2°$.

2. Equation d'un cercle

Dans un repère orthonormé du plan, on sait calculer la distance entre deux points. Or un cercle peut se définir par son centre et son rayon.

Rappel Un point C et un réel positif ***r*** étant donnés, le cercle de centre C et de rayon ***r*** est l'ensemble des points M du plan tels que : $CM = r$.

Comme une distance est toujours positive, l'égalité $CM = r$ est équivalent à $CM^2 = r^2$.

Théorème 3

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan on considère un point C de coordonnées $C(x_C\,; y_C)$.
Soit ***r*** un réel positif.

Le cercle de centre C et de rayon ***r*** est l'ensemble des points M, de coordonnées $M(x\,; y)$, tels que : $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2 = r^2$.

▸ Démonstration Il suffit de se souvenir que $CM^2 = (x-x_C)^2+(y-y_C)^2$.

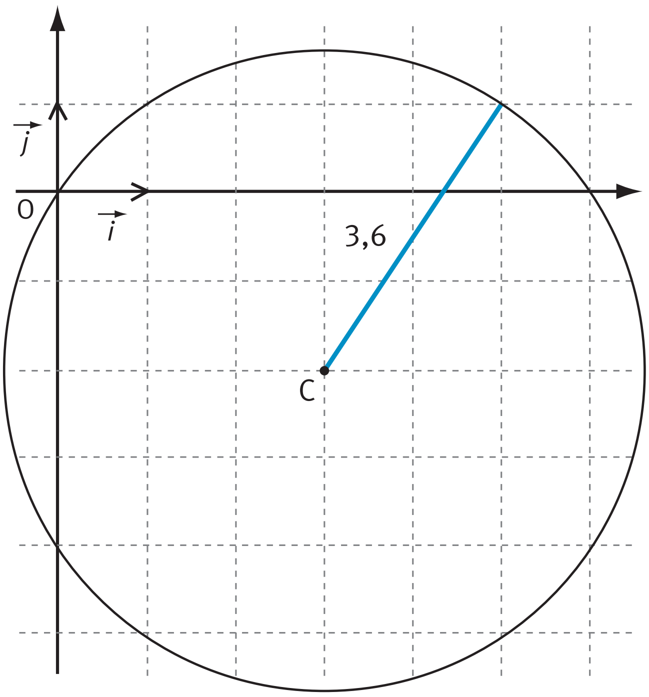
Remarques **a)** Une telle égalité, qui permet de savoir si un point est ou non sur le cercle, caractérise le cercle. On dit que c'est une équation du cercle.

b) Ce n'est pas réellement une conséquence de la notion de produit scalaire, puisque seul le calcul de distance est utile, mais ce n'en est pas très loin puisque l'on sait que $CM^2 = \overrightarrow{CM}^2$.

▸ Exemple 2 **a)** Déterminer une équation du cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

b) On considère le cercle de centre $C(3\,; -2)$ et de rayon 3,6.
Faire une figure. Ce cercle passe-t-il par l'origine du repère ?
Déterminer une équation de ce cercle. Confirmer (ou infirmer) la réponse précédente.

Réponse



a) Une équation du cercle de centre O et de rayon 1 est : $OM^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$.

Soit : $x^2 + y^2 = 1$.

b) Voir figure ci-contre. La figure peut laisser penser que ce cercle passe par le point O.

Une équation du cercle de centre C et de rayon 3,6 est :

$CM^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2 = 3{,}6^2$.

Pour vérifier si ce cercle passe par le point O, on vérifie si : $(x_O - 3)^2 + (y_O + 2)^2 = 3{,}6^2$.

Soit si : $9 + 4 = 3{,}6^2$.

Ce qui est faut car $3{,}6^2 = 12{,}96 \neq 13$.

Donc le cercle ne passe pas par l'origine du repère, contrairement à ce que la figure le suggérait.

On aurait pu aussi calculer directement la distance CO.

▶ **Exemple 3**

a) Si l'équation $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$ est celle d'un cercle, le déterminer.

b) Si l'équation $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 6 = 0$ est celle d'un cercle, le déterminer.

Réponse

a) Pour déterminer le cercle dont une équation est : $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$ on peut essayer d'écrire cette équation sous la forme : $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ (comme on l'a fait pour trouver la forme canonique d'un polynôme du second degré).

Commençons donc par regarder les termes avec x (c'est-à-dire $x^2 + 6x$) pour trouver une valeur de x_C qui convienne. On veut avoir : $(x - x_C)^2 = x^2 - 2xx_C + x_C^2 = x^2 + 6x + \dots$.

On peut donc prendre : $x_C = -3$.

De la même façon on trouve : $y_C = 1$.

Comme $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, on en déduit que $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$.

De même $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$.

L'équation donnée peut donc s'écrire : $(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+6=0$, soit $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

L'équation donnée est celle du cercle de centre $C(-3\,;1)$ et de rayon 2.

b) Déterminer, s'il existe, le cercle dont une équation est :

$x^2-2x+y^2+2y+6=0$.

Faisons de même avec cette équation.

On veut avoir : $(x-x_C)^2=x^2-2xx_C+x_C^2=x^2-2x+\dots$. On peut prendre : $x_C=1$.

On veut avoir : $(y-y_C)^2=y^2-2yy_C+y_C^2=y^2+2y+\dots$. On peut prendre : $y_C=-1$.

Comme $(x-1)^2=x^2-2x+1$, on en déduit que $x^2-2x=(x-1)^2-1$.

De même $y^2+2y=(y+1)^2-1$.

L'équation donnée peut donc s'écrire : $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+6=0$, soit $(x-1)^2+(y+1)^2=-4$.

Cette équation n'a évidemment pas de solution, ce qui veut dire qu'il n'y a aucun point du plan dont les coordonnées vérifient l'équation.

Cette équation caractérise donc l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun point.

Théorème 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Un **cercle** est **caractérisé** par une équation de la forme :

$x^2+y^2+ax+by+c=0$, où a, b et c sont des réels quelconques.

b) **Réciproquement**, l'ensemble des points $M(x\,;y)$, tels que $x^2+y^2+ax+by+c=0$, où a, b et c sont des réels quelconques, **est un cercle** (éventuellement réduit à un point) ou **l'ensemble vide**.

▶ Démonstration

a) Il suffit de développer l'équation écrite sous la forme :
$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$.

b) Il suffit de refaire, dans un cadre général, les calculs faits dans l'exemple 3.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1 On considère un parallélogramme ABCD, de centre K, tel que : $AB=7$, $BC=5$ et $BD=8$.

Calculer la longueur AC.

Exercice 2 Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(-2\,;2)$, $B(3\,;-2)$, $C(0\,;-3)$ et $D(4\,;1)$.

Les droites (AB) et (CD) se coupent en K.

Calculer une valeur approchée à $0{,}1°$ près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AKC}$.

Exercice 3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ **a)** Déterminer une équation du cercle de centre $C(1\,;-3)$ et de rayon 5.

b) Le point $A(-3\,;-6)$ est-il un point de ce cercle ?

❷ **a)** Déterminer une équation du cercle de centre $E(2\,;3)$ passant par $D(4\,;1)$.

b) Déterminer un point de ce cercle, d'ordonnée 1, autre que D.

Exercice 4 On considère un carré ABCD, E le milieu de [AB], F celui de [BC] et K le point d'intersection de (AF) et (DE).

On veut déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{FAC}$ (en calculant, de deux façons différentes, le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$), et la distance DK.

❶ **a)** Expliquer pourquoi ce produit scalaire peut nous permettre de calculer l'angle $\widehat{FAC}$.

b) Exprimer le produit scalaire : $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de la longueur du côté du carré et du cosinus de l'angle $\widehat{FAC}$.

❷ **a)** Exprimer, en utilisant les propriétés de calcul du produit scalaire, le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$ uniquement en fonction de la longueur du côté du carré.

b) En déduire que : $\cos\left(\widehat{FAC}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

c) En déduire une valeur approchée à $0{,}1°$ près de la mesure en degré de l'angle $\widehat{FAC}$.

❸ a) Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

b) Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA}$.

c) En déduire la distance DK.

Exercice 5

Pour la figure, on prendra le centimètre comme unité de longueur.

❶ Construire un triangle ABC tel que : $AB = 8$, $BC = 7$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On constatera qu'il y a plusieurs possibilités.

❷ a) En utilisant la relation d'Al-Kashi, montrer que AC est solution de l'équation : $x^2 - 8x + 15 = 0$.

b) Quelles sont les valeurs possibles de AC ?

❸ Dans chacun des cas obtenus, calculer $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$. En déduire une valeur approchée à $0{,}1°$ près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$.

❹ Calculer l'aire de ABC dans chacun des cas.

3 Orthogonalité. Vecteur normal à une droite

Dans ce chapitre, nous allons encore voir quelques applications « classiques » du calcul de produit scalaire, concernant l'orthogonalité.

A Activité

1. Vecteur normal à une droite

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $A\left(-2\,;3\right)$ et $B\left(4\,;0\right)$.

❶ a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\left(1\,;2\right)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) On sait qu'un point $M\left(x\,;y\right)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
En déduire qu'une équation de (AB) est : $3x+6y-12=0$.

c) Comme le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
En utilisant cette propriété, en déduire qu'une équation de (AB) est : $x+2y-4=0$.
On dit alors que $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (AB).

d) Vérifier que les deux équations sont équivalentes.

❷ En raisonnant de la même façon, déterminer une équation de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point $C\left(1\,;-2\right)$.

2. Equation de cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $A\left(-4\,;3\right)$ et $B\left(8\,;-2\right)$.

1 Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].

2 a) Montrer que le point $E(2\,;7)$ appartient au cercle.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABE ? Etait-ce prévisible ?

3 a) Montrer que le point $F(-0{,}5\,;-5{,}5)$ appartient au cercle.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABF ? Etait-ce prévisible ?

4 a) Déterminer les points R et T du cercle dont l'ordonnée est nulle.

b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$. Que peut-on en déduire pour les triangles ABR et ABT ? Etait-ce prévisible ?

B Cours

1. Vecteur normal à une droite

Comme on l'a vu dans la première activité, il est possible de définir une droite non pas à l'aide d'un vecteur directeur, mais à l'aide d'un vecteur normal.

Nous allons formaliser cela.

Définition 1

Soit une droite D, de vecteur directeur $\vec{u}$.

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à D s'il est non nul et orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé, on peut alors utiliser un vecteur normal à une droite pour en obtenir une équation cartésienne.

Théorème 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ a une équation de la forme : $ax+by+c=0$.

b) **Réciproquement**, si $(a\,;b)\neq(0\,;0)$, l'ensemble des points $M(x;y)$, tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$.

Démonstration

a) Soit $A\left(x_A\,;y_A\right)$ un point du plan et D la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\left(a\,;b\right)$.

Dire qu'un point $M\left(x\,;y\right)$ appartient à D équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. C'est-à-dire que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. Ce qui donne : $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$, ou encore $ax+by-ax_A-by_A=0$.

Cette équation est bien de la forme $ax+by+c=0$ où les coefficients de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont les coordonnées d'un vecteur normal à D.

b) Réciproquement, considérons l'ensemble E des points $M\left(x\,;y\right)$ du plan vérifiant l'équation $ax+by+c=0$ avec $\left(a\,;b\right)\neq\left(0\,;0\right)$.

Puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls, on peut supposer que $a\neq0$.

On peut alors chercher un point $M_0\left(x_0\,;y_0\right)$ de E dont l'ordonnée soit nulle $(y_0=0)$.

On doit avoir : $ax_0+by_0+c=0$, soit $ax_0+c=0$ et donc $x_0=-\frac{c}{a}$.

Le point $M_0\left(-\frac{c}{a}\,;0\right)$ appartient à l'ensemble E.

Si c'est b qui est différent de 0, un calcul analogue peut se faire pour un point de E d'abscisse nulle.

Prenons maintenant un point $M\left(x\,;y\right)$ quelconque de l'ensemble E.

Ses coordonnées vérifient l'équation : $ax+by+c=0$. Mais on a aussi l'égalité $ax_0+by_0+c=0$, où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point M_0 trouvé précédemment.

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, on voit que les coordonnées de M vérifient :

$ax+by-ax_0-by_0=0$, c'est-à-dire $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$.

Cette égalité peut s'interpréter comme : $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$, où $\vec{n}$ est le vecteur de coordonnées $\vec{n}\left(a\,;b\right)$.

On en déduit que l'ensemble E est l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{M_0M}$ soit orthogonal à $\vec{n}$, autrement dit c'est la droite passant par M_0 et admettant comme vecteur normal $\vec{n}$.

En résumé, le raisonnement est : $M\in E\Leftrightarrow ax+by+c=0$

$$M\in E\Leftrightarrow a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$$

$$M\in E\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0.$$

Remarque Il faut bien faire attention à ne pas confondre vecteur directeur d'une droite et vecteur normal à une droite.

Si une droite a pour équation $ax+by+c=0$, un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u}(-b;a)$, alors qu'un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$.

▶ Exemple 4 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;1)$ et $C(2\,;4)$.

a) Déterminer une équation de la hauteur issue de A du triangle ABC.

b) Déterminer une équation de la médiatrice de [BC].

Réponse

a) La hauteur issue de A, dans le triangle ABC, est la droite passant par $A(-1\,;2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}(-1\,;3)$. Elle a donc une équation cartésienne de la forme : $(-1)x+3y+c=0$.

Les coordonnées de A vérifient cette équation, donc : $1+6+c=0$. Soit $c=-7$.

La hauteur issue de A, dans le triangle ABC, a pour équation : $-x+3y-7=0$.

b) De la même façon, la médiatrice de [BC] est la droite passant par le milieu de [BC], $K(2{,}5\,;2{,}5)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}(-1\,;3)$. Elle a donc une équation cartésienne de la forme : $(-1)x+3y+c=0$.

Les coordonnées de K vérifient cette équation, donc : $-2{,}5+7{,}5+c=0$. Soit $c=-5$.

La médiatrice de [BC] a pour équation : $-x+3y-5=0$.

2. Equation d'un cercle défini par un diamètre

L'activité 2 a permis de retrouver une propriété géométrique vue en collège à propos des points d'un cercle et d'un de ses diamètres.

Nous allons démontrer cela à nouveau (avec l'outil « produit scalaire ») et utiliser ce résultat pour obtenir une équation de cercle.

Théorème 6

Un point M du plan est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

▶ Démonstration Appelons I le milieu de [AB]. C'est donc le centre du cercle de diamètre [AB].

Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}.$$

Or $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}^2=-IA^2$.

D'où : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$. (Résultat déjà connu par le théorème de la médiane).

M appartient au cercle de diamètre [AB], c'est-à-dire au cercle de centre I et de rayon IA, si et seulement si $IM=IA$. Ce qui équivaut à $IM^2=IA^2$ puisque ce sont des distances.

Donc M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2=0$.

Propriété

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan on considère deux points A et B de coordonnées $A\left(x_A\,;y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;y_B\right)$.

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M, de coordonnées $M\left(x\,;y\right)$, tels que : $\left(x-x_A\right)\left(x-x_B\right)+\left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right)=0$.

▶ **Démonstration** Ce n'est que la traduction, à l'aide des coordonnées des points, du théorème 6.

▶ **Exemple 5** Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A\left(1\,;5\right)$ et $B\left(15\,;-3\right)$.

a) Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].

b) Montrer que ce cercle passer par le point O.

c) Déterminer une équation de la tangente à ce cercle au point O.

Réponse

a) Un point M du plan appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Donc si et seulement si : $\left(x-1\right)\left(x-15\right)+\left(y-5\right)\left(y+3\right)=0$.

Equation que l'on peut écrire : $x^2+y^2-16x-2y=0$.

b) Cette forme permet de voir immédiatement que le point O appartient au cercle.

c) La tangente en O au cercle est la droite passant par O et perpendiculaire au rayon.

Appelons I le centre du cercle.

Ce point a pour coordonnées : $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+15}{2}=8$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{5-3}{2}=1$.

Un vecteur normal à la tangente en O est donc le vecteur : $\overrightarrow{OI}\left(8\,;1\right)$.

Une équation de cette tangente est donc de la forme : $8x+y+c=0$. Comme la tangente passe par le point O, une équation est donc : $8x+y=0$ ou $y=-8x$.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(-3\,;2)$, $B(7\,;1)$ et $C(4\,;5)$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Calculer les coordonnées de H.

2. En déduire la distance de A à la droite (BC), c'est-à-dire la plus courte distance de A à un point quelconque de (BC).

3. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(-3\,;2)$ et $B(4\,;5)$.
On va déterminer une équation de la médiatrice D de [AB] de deux façons.

1. Première façon : la droite D est la droite perpendiculaire à [AB] passant par le milieu de ce segment.
Déterminer une équation de D.

2. Deuxième façon : la droite D est l'ensemble des points équidistants de A et de B.
a) Soit un point M quelconque, de coordonnées x et y. Exprimer les distances MA et MB en fonction de x et y.
b) En déduire une équation de D.

Exercice 8

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(-3\,;2)$, $B(5\,;4)$ et $C(3\,;-4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice de [AB] et une équation de la médiatrice de [BC].

2. En déduire les coordonnées du centre du cercle passant par A, B et C.

3. Déterminer une équation de ce cercle.

4. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

4 Applications à la trigonométrie

Dans ce chapitre, nous allons voir, encore à l'aide du calcul de produits scalaires, des résultats de calcul de trigonométrie assez utiles pour transformer certaines expressions.

A Activité

Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le cercle trigonométrique de centre O.

1. Sur ce cercle, placer les points A et B tels que : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4}$.
2. En utilisant les coordonnées des points A et B, calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
3. a) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ en fonction de $\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

   b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

B Cours

1. Formules d'addition

En généralisant les calculs faits dans l'activité ci-dessus, nous allons pouvoir exprimer le cosinus de la différence de deux nombres (ou deux angles) en fonctions des sinus et cosinus de chacun des deux nombres (ou angles).

Quelques techniques déjà vues de calcul trigonométrique nous permettront aussi d'exprimer le cosinus de la somme de deux nombres, puis les sinus de la somme et de la différence de deux nombres.

Nous obtiendrons alors les résultats exprimés dans le théorème suivant.

Théorème 7

Quels que soient les nombres réels ***a*** et ***b***, on a :

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b),$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).$$

▸ **Démonstration**

a) Démontrons la première égalité en généralisant les calculs de l'activité d'introduction.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique de centre O, et sur ce cercle les points A et B tels que : $(\vec{i},\overrightarrow{OA})=a$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OB})=b$.

Les coordonnées du point A sont $A(\cos(a)\,;\sin(a))$ puisqu'il est sur le cercle trigonométrique, et celles de B sont $B(\cos(b)\,;\sin(b))$.

On a donc : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

On peut aussi exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ par :

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ puisque $OA=OB=1$.

Il nous reste à remarquer que :

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{OB})=(\vec{i},\overrightarrow{OB})-(\vec{i},\overrightarrow{OA})=b-a.$ On a alors :

$\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\cos(b-a)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).$

Et comme $\cos(b-a)=\cos(a-b)$, on a bien :

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).$

b) Pour démontrer la deuxième égalité, il suffit d'appliquer la première aux nombres ***a*** et $(-b)$. Cela nous donne : $\cos(a-(-b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)$.

Soit : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ puisque $\cos(-b)=\cos(b)$ et $\sin(-b)=-\sin(b)$.

c) Pour la troisième égalité, c'est un peu plus astucieux. Nous avons établi des formules pour le cosinus d'une somme ou d'une différence et nous voudrions des formules pour le sinus d'une somme ou d'une différence. Nous allons utiliser l'égalité : $\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ qui permet de passer d'un sinus à un cosinus.

On a alors : $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$.

En utilisant la deuxième formule nous obtenons :

$$\sin(a-b)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b).$$

Il nous reste à transformer de nouveau un cosinus en sinus et un sinus en cosinus pour obtenir :

$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).$$

d) Pour la dernière égalité, comme pour la deuxième, on applique la troisième aux nombres **a** et $(-b)$. Cela nous donne : $\sin(a-(-b))=\sin(a)\cos(-b)-\cos(a)\sin(-b)$.

Soit : $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

Remarque Ces formules s'appellent les formules d'addition, même si deux d'entre elles portent sur des soustractions.

▸ Exemple 6 Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Réponse

Comme dans l'activité d'introduction, nous remarquerons que : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. Ce qui nous donne :

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Et donc, avec les valeurs connues :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

2. Formules de duplication

En prenant $b=a$ dans les formules d'addition on obtient deux égalités importantes.

Théorème 7

Quels que soient le nombre réel ***a***, on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a),$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b).$$

Remarque Rappelons que la notation $\cos^2(a)$ signifie $(\cos(a))^2$.

▶ Démonstration Les calculs étant immédiats, nous ne démontrerons que la première égalité.

On a : $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.

Remarques ❶ Ces formules permettent de calculer les sinus et cosinus d'un angle double d'un angle dont on connaît les sinus et cosinus ; d'où l'appellation « formules de duplication ».

❷ La première formule de duplication peut s'exprimer de deux autres façons en utilisant l'égalité, toujours vraie, $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

On peut écrire : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$,

ou : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

Ces formules ont l'avantage de n'utiliser que le cosinus, ou que le sinus, de l'angle initial.

❸ Ces deux dernières formules peuvent aussi servir à calculer les sinus et cosinus d'un angle **a** en fonction du cosinus de l'angle double 2***a***, si c'est cet angle que l'on connaît.

Il suffit de les écrire sous la forme : $\dfrac{1+\cos(2a)}{2} = \cos^2(a)$, ou $\dfrac{1-\cos(2a)}{2} = \sin^2(a)$.

On les trouve parfois écrites sous la forme : $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$, et $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(x)}{2}$.

Elles permettent de calculer les sinus et cosinus d'un angle moitié d'un angle dont on connaît les sinus et cosinus.

▶ Exemple 6 ❶ Calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

❷ Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ d'une autre façon que celle de l'activité d'introduction. Vérifier la cohérence des deux résultats.

Réponses

1 On peut remarquer que : $\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{4}$. Ce qui nous donne :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$ Et comme on sait que $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\geq 0,$

on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

2 On peut là aussi remarquer que : $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}$. Ce qui nous donne :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$ Et comme on sait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\geq 0,$ on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Dans l'activité d'introduction nous avions trouvé : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Remarquons que ces deux nombres, en apparence différents, sont tous deux positifs. Élevons-les au carré. On obtient :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2=\frac{2}{16}\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\frac{1}{8}\left(3+2\sqrt{3}+1\right)=\frac{1}{8}\left(4+2\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right),$$

et $\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. Ce qui prouve que ces deux nombres sont bien égaux.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 9 Calculer $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 10

Montrer que, pour tout réel ***x***, on a :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0 \text{ et}$$

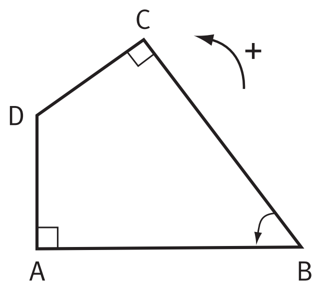
$$\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

Exercice 11

On considère un quadrilatère direct ABCD dont deux angles non consécutifs sont droits et tel que :

$AB = BC = 2\times CD = 2\times DA$ (voir figure ci-contre).

Calculer $\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$.



Exercice 12

Résoudre les équations suivantes :

1. $1+2\cos(x)+\cos(2x)=0$;
2. $\cos^2(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)=0$;
3. $\sin(5x)\cos(x)-\cos(5x)\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5 Synthèse de la partie 1 de la séquence

Calculs de distances, d'angles

1 Relations dans un triangle

Théorème 1 (Théorème de la médiane)

Soit un triangle ABC et I le milieu de [BC]. On a les égalités :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

b) $AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c) $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.

Théorème 2 (Relation d'Al Kashi)

Soit un triangle ABC, en notant $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, et $\widehat{BAC} = \hat{A}$, $\widehat{CBA} = \hat{B}$, $\widehat{ACB} = \hat{C}$, on a les égalités :

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\hat{A}\right)$.

b) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos\left(\hat{B}\right)$.

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\hat{C}\right)$.

2 Equation d'un cercle

Théorème 3

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan on considère un point C de coordonnées $C\left(x_C ; y_C\right)$.
Soit r un réel positif.
Le cercle de centre C et de rayon r est l'ensemble des points M, de coordonnées $M\left(x ; y\right)$, tels que :

$\left(x - x_C\right)^2 + \left(y - y_C\right)^2 = r^2$.

Théorème 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Un **cercle** est **caractérisé** par une équation de la forme :

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels quelconques.

b) **Réciproquement**, l'ensemble des points $M(x\,;y)$, tels que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels quelconques, **est un cercle** (éventuellement réduit à un point) ou **l'ensemble vide**.

Orthogonalité. Vecteur normal à une droite

1 Vecteur normal à une droite

Définition

Soit une droite D, de vecteur directeur $\vec{u}$.

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à D s'il est non nul et orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Théorème 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ a une équation de la forme : $ax + by + c = 0$.

b) **Réciproquement**, si $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, l'ensemble des points $M(x\,;y)$, tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$.

2 Equation d'un cercle défini par un diamètre

Théorème 6

Un point M du plan est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Propriété 1

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan on considère deux points A et B de coordonnées $A\left(x_A\,;y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;y_B\right)$.

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M, de coordonnées $M\left(x\,;y\right)$, tels que :

$\left(x-x_A\right)\left(x-x_B\right)+\left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right)=0.$

Applications à la trigonométrie

1 Formules d'addition

Théorème 7

Quels que soient les nombres réels ***a*** et ***b***, on a :

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b),$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).$$

2 Formules de duplication

Théorème 8

Quels que soient le nombre réel ***a***, on a :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a),$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(b).$$

6 Exercices d'approfondissement

Exercice I On considère un triangle ABC tel que : $AB = 7$, $BC = 8$ et $CA = 10$.

❶ **a)** Déterminer une valeur approchée à $0{,}01°$ près de l'angle $\widehat{BAC}$.

b) Déterminer une valeur approchée à $0{,}01°$ près de l'angle $\widehat{BCA}$.

❷ Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

❸ En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice II Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère la droite D dont une équation est : $x + y - 7 = 0$.

Déterminer une équation du cercle de centre K, de coordonnées $K(1\,;2)$, tangent à la droite D.

Exercice III Soient A et B deux points tels que $AB = 3$.
On veut déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA = 2MB$.

Pour cela on choisit le repère orthonormé $\left(A\,; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \vec{j}\right)$ où $\vec{j}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

❶ **a)** Exprimer les coordonnées des points A et B dans ce repère.

b) Si M est un point de coordonnées $M(x\,; y)$, exprimer les distances MA et MB en fonction de x et y.

❷ **a)** En déduire que l'ensemble recherché a pour équation : $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

b) Quel est sa nature ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?

❸ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de cet ensemble avec la droite (AB). Constater que ces points étaient bien solutions du problème.

Exercice IV On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2$ et $AD = 1$. Le point K est tel que : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

❶ Vérifier que : $CD^2 - CB^2 = KD^2 - KB^2$.

❷ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MD^2 - MB^2 = 3$.

❸ En déduire que les droites (BD) et (CK) sont perpendiculaires.

❹ Retrouver ce résultat en utilisant les coordonnées des points dans le repère $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Exercice V

Résoudre les équations suivantes :

❶ $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$;

❷ $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$.

Exercice VI

❶ En développant $\cos(a+2a)$, montrer que : $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

❷ En déduire que le nombre $x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est une solution de l'équation $4x^3 - 3x - 0,5 = 0$.

❸ En utilisant les fonctions de référence connues, représenter, dans un même repère, les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3$ et $g(x) = 3x + 0,5$.

❹ Expliquer comment ce graphique permet de trouver une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ et, à l'aide de votre calculatrice, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice VII

Pentagone régulier à la règle et au compas

Partie A Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

❶ Vérifier que $\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation $\cos(3x) = \cos(2x)$.

❷ En utilisant un résultat de l'exercice précédent, en déduire que le nombre $x_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une solution de l'équation $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0$.

❸ a) Montrer que : $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (X-1)\left(4X^2 + 2X - 1\right)$.

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Partie B Construction d'un pentagone régulier

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le cercle trigonométrique de centre O et les points $M(-0{,}5\,;0)$ et $J(0\,;1)$.

1 **a)** Faire une figure.

b) Calculer MJ.

2 **a)** Construire le point K de l'axe des abscisses, d'abscisse positive, et tel que $MK = MJ$.

b) Construire le point H, milieu de $[OK]$. Calculer OH.

c) En déduire la construction du point A du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$. Puis la construction d'un pentagone régulier ABCDE.

2e partie

Problèmes

Sommaire

1 Présentation

La raison principale de l'invention d'outils mathématiques, puis de leur étude, est de résoudre des problèmes, de natures très diverses.

D'ailleurs le programme officiel, tant dans son introduction que dans ses différentes parties, indique que :

« Le cycle terminal de la série S procure un bagage mathématique solide aux élèves … en les formant à la pratique d'une démarche scientifique et en renforçant leur goût pour des activités de recherche. »

Puis :

« … le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral. »

Ou encore :

« Les activités proposées … prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :

- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit. »

« Le programme s'inscrit, … dans le cadre de la résolution de problèmes. Les situations proposées répondent à des problématiques clairement identifiées d'origine purement mathématique ou en lien avec d'autres disciplines.

Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets. »

Il est donc temps, maintenant que vous avez étudié toute une palette de nouveaux outils mathématiques, de faire une petite pose dans les apprentissages pour mettre en pratique vos connaissances.

C'est pourquoi cette Partie 2 de la séquence est un peu particulière.

Elle vous propose quatre problèmes (chapitre 2), de nature assez différente, que vous allez essayer de résoudre par vous-même en mettant en œuvre l'ensemble de vos connaissances.

Pour certains d'entre eux, une première aide vous sera fournie pour éviter les blocages prématurés (chapitre 3 A : Quelques idées).

Puis une seconde aide, plus détaillée, vous sera offerte si la première n'est pas suffisante (chapitre 3 B : D'autres aides au cas où …).

Enfin, un corrigé de chaque problème vous sera proposé dans le fascicule de Corrigés.

2 Problèmes

A Alignés ?

Voici un problème dont l'intérêt réside dans le fait que son énoncé est très simple et que vous avez désormais de nombreux outils mathématiques pour le résoudre.

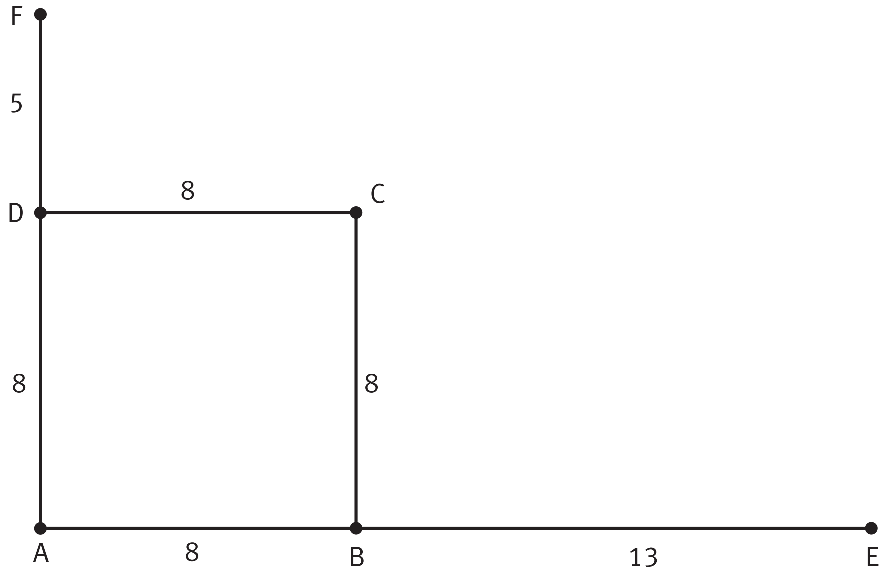
Soit ABCD un carré de côté 8.

On place le point E sur la demi-droite [AB) tel que $AE = 21$ et F sur la demi-droite [AD) tel que $AF = 13$.

Les points E, C et F sont-ils alignés ?

Il existe de nombreuses démonstrations pour justifier la réponse.

On demande d'en chercher le plus possible.



B Hyperbole

Ce problème, moins ouvert que le précédent, a comme principal intérêt d'étudier quelques propriétés d'une courbe classique, l'hyperbole.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie 1

On considère la fonction inverse f sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

On appelle (C_1) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ Construire la courbe (C_1) que l'on complètera aux questions ❷ et ❸.

❷ Soit A $\left(a ; \dfrac{1}{a}\right)$ un point de la courbe (C_1). La tangente à la courbe (C_1) au point A coupe les axes en deux points N et P. Montrer que le triangle ONP a une aire constante.

❸ Soient les droites (D_p) d'équation $y = -2x + p$, p étant un réel positif quelconque.

a) Quelle condition doit vérifier le nombre p pour que la droite (D_p) coupe la courbe (C_1) ?

b) Soit p un nombre réel vérifiant la condition précédente. On nomme Q et R les points d'intersection de la droite (D_p) avec la courbe (C_1), S et T les points d'intersection de (D_p) avec les axes. Montrer que les segments [QR] et [ST] ont le même milieu I_p.

c) Démontrer que les points I_p sont alignés.

Partie 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

Soit (C_2) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour toutes les questions posées dans les parties 2 et 3, on se place dans ce repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour information, on indique, à la fin du corrigé, comment un changement de repère montre que les courbes (C_1) et (C_2) sont géométriquement identiques ; seuls les repères dans lesquels on les étudie sont différents.

❶ Construire la courbe (C_2).

❷ Soit F le point de coordonnée (0 ; 2) et (D) la droite d'équation $y = 1$. Soit M $(x ; g(x))$ un point quelconque de la courbe (C_2) et H son projeté orthogonal sur la droite (D). Déterminer les coordonnées du point H, puis montrer que le quotient $\dfrac{\text{FM}}{\text{HM}}$ est constant.

❸ Soit F' le point de coordonnée $(0 ; -2)$, (D') la droite d'équation $y = -1$, et H' le projeté orthogonal du point M sur la droite (D'). Montrer alors que la différence $\text{H'M} - \text{HM}$ est constante.

On admet que le rapport $\dfrac{\text{F'M}}{\text{H'M}}$ est constant et de valeur égale à $\dfrac{\text{FM}}{\text{HM}}$.

Montrer alors que la différence $\text{F'M} - \text{FM}$ est constante. En déduire une construction géométrique des points de (C_2) avec un logiciel de géométrie en utilisant des cercles centrés en F et en F'.

Partie 3

Comme dans la partie 2 on considère la courbe (C_2) dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

❶ En appliquant la définition du nombre dérivé, démontrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+2}}$, pour tout réel a.

❷ Soit A un point de (C_2) d'abscisse $a = 1$. Déterminer les coordonnées du point B, intersection de la tangente (T) à (C_2) au point A avec la droite (D). Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{FA}} \cdot \overrightarrow{\text{FB}}$.

En déduire une construction géométrique avec un instrument de dessin traditionnel de la tangente au point A à la courbe (C_2).

❸ Dans cette question, on fixe encore $a = 1$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AF}} \cdot \overrightarrow{\text{AF'}}$. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{v}\left(-\sqrt{3}\,;\,-1\right)$.

Calculer $\overrightarrow{\text{AF}} \cdot \vec{v}$, en déduire $\left(\cos\left(\overrightarrow{\text{AF}},\vec{v}\right)\right)^2$ puis $\cos\left(\overrightarrow{\text{AF}},\vec{v}\right)$ En admettant que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AF}},\vec{v}\right)$ est positive, donner cette mesure principale.

Que peut-on dire de la tangente (T) par rapport à l'angle géométrique $\widehat{\text{FAF'}}$?

Partie 4

Pour conclure, on vous propose d'observer, avec un logiciel de géométrie dynamique, que les propriétés démontrées dans la partie 1 sont vérifiées aussi lorsque l'on considère les deux branches de la courbe de la fonction inverse définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

De même, on peut observer que les propriétés étudiées dans les parties 2 et 3 sont vérifiées aussi par la courbe (C_3) représentative de la fonction h définie par $h(x) = -g(x)$, la construction géométrique de la question ❸ de la partie 2 étant légèrement modifiée.

C Un modèle de diffusion

Voici maintenant un problème montrant comment on utilise les fonctions numériques pour modéliser un phénomène évolutif.

Ce problème porte sur un modèle de diffusion d'une innovation.

1 Soit la fonction f définie sur $\left[0\ ;\ +\infty\right[$ par $f(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}$.

a) Montrer que, pour tout t de l'intervalle $\left[0\ ;\ +\infty\right[$, on a $0 \leq f(t) \leq 1$.

Donc le nombre $f(t)$ peut être utilisé pour modéliser une proportion.

Dans la suite de ce problème, le nombre $f(t)$ représentera la proportion d'internautes parmi les étudiants de Syldavie au temps t, le temps étant mesuré en années depuis l'instant 0.

b) Etudier les variations de la fonction f et tracer la courbe (C_f) représentative de f dans un repère orthogonal.

2 a) Au bout de combien de temps la proportion d'étudiants connectés à Internet en Syldavie est-elle supérieure à 90% ?

b) Mêmes questions avec 99%, avec 99,9%, puis avec 100%.

c) Comment peut-on interpréter graphiquement les questions a) et b) ?

3 La fonction dérivée de f s'appelle la vitesse de diffusion et sera ici notée v.

a) Etudier les variations de la fonction v. Donner le tableau de variation de la fonction v et tracer sa courbe représentative (C_v) dans un nouveau repère orthogonal.

b) Sur la courbe représentative de f, placer le point A correspondant à l'instant où la vitesse de diffusion est maximale. Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente (T) en ce point. Tracer cette tangente.

4 On veut étudier ici la position de (C_f) par rapport à (T). On fait d'abord une étude générale.

a) Soit une fonction g définie sur un intervalle I. Soit (C_g) la courbe représentative de g dans un repère, et soit (T_a) la tangente à cette courbe au point d'abscisse a, $a \in \text{I}$.

On suppose que, sur I, la dérivée seconde g'' (la dérivée seconde est la dérivée de la dérivée : $(g')'=g''$) s'annule en a en changeant de signe en a, en étant positive lorsque $t \leq a$ et négative lorsque $t \geq a$.

Etudier la position de (C_g) par rapport à sa tangente (T_a).

b) En déduire, pour notre exemple, la position de (C_f) par rapport à la tangente (T) en A.

c) Sans calcul, essayer de trouver une situation analogue sur la courbe (C_v).

D Loi géométrique tronquée

Et pour terminer, un problème de probabilité.

Loi géométrique tronquée

On considère une pièce de monnaie non équilibrée. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{3}$ et la probabilité d'obtenir Face $\frac{2}{3}$.

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant.

A joue. S'il obtient Pile, il a gagné, B lui donne a euros et le jeu s'arrête.

S'il obtient Face, il donne 1 euro à B et rejoue jusqu'à obtenir Pile en donnant, à chaque fois qu'il obtient Face, 1 euro à B.

Dès qu'il obtient Pile, B lui donne a euros et le jeu s'arrête.

On note X la variable aléatoire représentant le gain de A pour ce jeu.

❶ A l'aide d'un programme, simuler 1000 parties de ce jeu pour différentes valeurs de a.

Le jeu semble-t-il équilibré pour les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4 de a ?

❷ On suppose que les joueurs ont décidé de limiter le jeu, quoiqu'il arrive, à 10 lancers.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer $E(X)$.

❸ On suppose que les joueurs ont décidé de limiter le jeu, quoiqu'il arrive, à n lancers.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) A l'aide d'un logiciel de calcul formel comme *Xcas*, déterminer $E(X)$ en fonction de a et de n.

❹ Les joueurs se limitent à 100 lancers.

a) On suppose $a = 10$. Quel gain le joueur A peut-il espérer ?

b) Quelle valeur donner à a pour que le jeu soit équilibré ?

3 Aides

A Quelques idées

1. Alignés ?

Voici quelques pistes.

Vous pouvez faire un raisonnement direct, mais certaines méthodes nécessitent un raisonnement par l'absurde.

Différentes notions de géométrie sont utilisables : angles, aires, longueurs, colinéarité, Thalès, équation, …

Vous pouvez introduire un repère bien choisi.

Rappel Il est impossible de prouver une égalité en utilisant des valeurs approchées.

Pour prouver que des nombres sont distincts en utilisant des valeurs approchées, il faut bien contrôler les approximations.

Vocabulaire : si $a \leq x \leq b$ avec $b - a \leq 10^{-n}$, on dit que a est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près et que b est une valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près.

2. Hyperbole

Partie 1

3 **b)** Tous les points étant alignés, pour montrer que deux points sont confondus, il suffit de montrer l'égalité de leurs abscisses.

Partie 2

2 et 3

Pour travailler sur des longueurs, on peut d'abord travailler sur les carrés des longueurs, les calculs sont plus simples.

Construction géométrique : l'égalité s'écrit aussi $F'M = FM + 2\sqrt{2}$, on peut poser $FM = r$ et $F'M = r + 2\sqrt{2}$.

3. Un modèle de diffusion

3 a) On montre ou on admet que $v'(t)=\dfrac{2\left(-3t^4-2t^2+1\right)}{(t^2+1)^4}$ ou $v'(t)=\dfrac{2(-3t^2+1)}{\left(t^2+1\right)^3}$.

4 Pour connaître la position de (C_g) par rapport à sa tangente (T_a), on cherche le signe de la différence $d(t)$ définie sur I par $d(t)=g(t)-\left(g'(a)(t-a)+g(a)\right)$.

Pour étudier le signe de $d(t)$, on étudie les variations de la fonction d en utilisant $d'(t)$.

Mais pour étudier le signe de $d'(t)$, il faut …

4. Loi géométrique tronquée

1 Pour simuler le lancer d'une pièce ainsi déséquilibrée, on peut utiliser :
SI(Random < 2/3) alors Pièce = 1 sinon Pièce = 0 (1 pour Pile et 0 pour Face).
On peut alors rédiger un programme comportant une boucle « Pour I de 1 à 1000 » (ce qui correspond à la simulation de 1000 parties) en ajoutant à chaque fois le gain obtenu à une variable Somme.
Le gain moyen est alors : Somme / 1000.

2 a) On peut utiliser un arbre et compléter le tableau suivant.

Lancers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2/3 F 1/3 P (a)	2/3 F 1/3 P (a–1)	2/3 F 1/3 P (a–2)	2/3 F 1/3 P (a–3)	2/3 F 1/3 P (a–4)	2/3 F 1/3 P (a–5)	2/3 F 1/3 P (a–6)	2/3 F 1/3 P (a–7)	2/3 F 1/3 P (a–8)	2/3 F (a–9) 1/3 P (a–9)

$X=$	a	$a-1$									
P											

3 b) On a : $\mathrm{E}\left(X\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a-k\right)P\left(X=a-k\right)-n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n P\left(X=a-n\right).$

4 a) Le gain que le joueur peut espérer est $\mathrm{E}(X)$.

b) Le jeu est équilibré si $\mathrm{E}\left(X\right)=0.$

B D’autres aides au cas où …

1. Alignés ?

- **Démonstrations n’utilisant pas de repère**

❶ Avec les angles

a) Calculer $\widehat{ECF}$ et conclure.

b) Calculer la somme $\widehat{BEC}+\widehat{CFD}+\widehat{FAE}$ et conclure.

c) Comparer les angles $\widehat{BEC}$ et $\widehat{DCF}$ et conclure.

❷ Avec les longueurs

Calculer les longueurs EF, EC et CF et conclure.

❸ Avec les aires

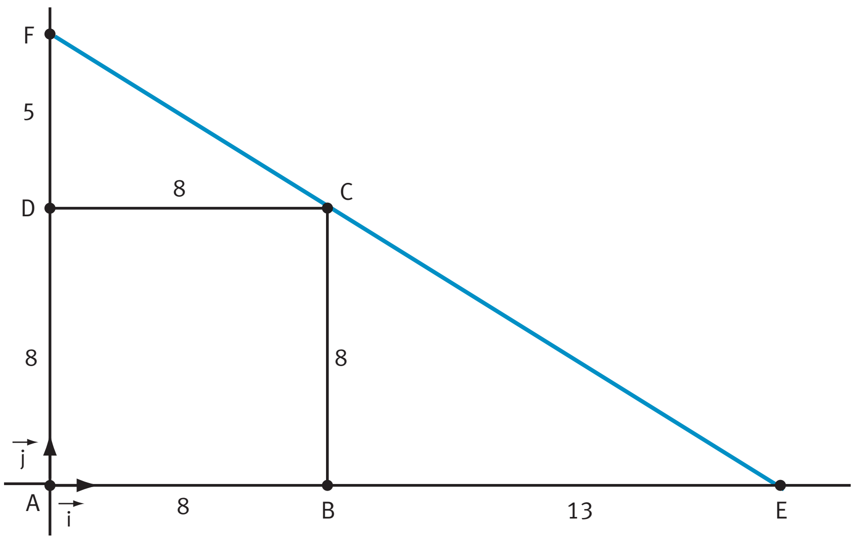
Calculer les aires du triangle AEF, du triangle BEC, du carré ABCD et du triangle DCF. Conclure.

❹ Thalès

Calculer les rapports $\frac{DC}{AE}$ et $\frac{FD}{FA}$. Conclure.

- **Démonstrations utilisant un repère**

Dans les trois méthodes suivantes (équation de droite, vecteurs et colinéarité, vecteurs et produit scalaire) on va travailler avec des coordonnées et donc on définit d’abord un repère. On va utiliser l’origine A et les vecteurs $\vec{i}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$.
Le repère $\left(A\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé (ce qui est nécessaire pour l’utilisation du produit scalaire dans la méthode ❼, mais qui ne l’est pas pour les autres méthodes).



❺ Equation de droite

Déterminer l'équation réduite de la droite (EF) et conclure.

❻ Vecteurs et colinéarité

Etudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FE}$ et conclure.

❼ Vecteurs et produit scalaire

Utiliser le produit scalaire pour calculer $\cos\left(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FE}\right)$ et conclure.

2. Hyperbole

Pas d'aide supplémentaire, l'énoncé étant déjà très détaillé.

3. Un modèle de diffusion

❸ **a)** On a $v'(t) = \dfrac{2\left(-3t^4 - 2t^2 + 1\right)}{(t^2+1)^4}$. Le signe de $v'(t)$ est le même que le signe de $-3t^4 - 2t^2 + 1$.

Pour étudier le signe de ce polynôme, on le factorise. Pour cela, on pose $T = t^2$.

Il suffit donc de factoriser le polynôme du second degré $-3T^2 - 2T + 1$, puis de revenir à la variable *t*.

Ou bien l'égalité $v'(t) = \dfrac{2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3}$, montre que le signe de $v'(t)$ est le même que le signe de $(-3t^2 + 1)$.

❹ Pour connaître la position de (C_g) par rapport à sa tangente (T_a), on cherche le signe de la différence $d(t)$ définie sur I par $d(t) = g(t) - \left(g'(a)(t-a) + g(a)\right)$.
a) On a $d'(t) = g'(t) - g'(a)$ car a est une constante. Pour déterminer le signe de $d'(t)$, on étudie les variations de la fonction d' et, pour cela, on dérive à nouveau. Déterminer $d''(t)$.

b) On suppose que, sur I, la dérivée seconde g'' s'annule en a en changeant de signe en a, en étant positive lorsque $t \leq a$ et négative lorsque $t \geq a$. Faire le tableau de variation de la fonction d'.
Quelle est la valeur de son extremum ? En déduire le signe de $d'(t)$ sur I.
En déduire le tableau de variation de la fonction d sur I.

En déduire la position de (C_g) par rapport à sa tangente (T_a).
En déduire, pour notre exemple, la position de (C_f) par rapport à la tangente (T) en A.
On dit alors que le point A est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

c) Sans calcul, essayer de trouver géométriquement un point d'inflexion sur la courbe (C_v).

4. Loi géométrique tronquée

1 On pourra compléter et utiliser l'algorithme suivant.

Initialisations

Dans Gain mettre 0

Dans Pièce mettre 0

Traitement

Tant que Pièce = 0

Si Random < (1/3) alors Dans Pièce mettre 1 (1 pour Pile)

Dans Gain mettre …

Sinon Dans pièce mettre 0 (0 pour Face)

Dans Gain mettre …

Fin du Si

Fin du Tant que

Sortie

Gain

Ensuite, on pourra à l'aide d'une boucle « Pour », faire fonctionner 1000 fois l'algorithme précédent, et afficher le gain moyen sur les 1000 simulations.

3 **a)** On peut compléter le tableau grâce à l'arbre décrivant la situation.

x_i	$a-1$	$a-2$	…	$a-(n-1)$	$-n$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$			

On déterminera la probabilité de l'événement (X= a–n), c'est-à-dire que le joueur A ait obtenu Face lors des n lancers.

b) On peut commencer par déterminer $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{3}\times(a-k)\times\left(\frac{2}{3}\right)^k\right]$:

sum((1/3)*(a–k)*(2/3)^k,k,0,n–1) (avec *Xcas*).