



Università degli Studi di Camerino

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea in Informatica (Classe L-31)

Sviluppo di una struttura dati per la trascrizione e gestione di sogni

Laureando
Marco Caputo

Matricola 119136

Relatore
Prof.ssa Emanuela Merelli

A.A. 2023/2024

Indice

1	Introduzione	11
1.1	Motivazione	11
1.2	Obiettivi	12
1.3	Struttura della Tesi	12
2	Grafi e Approccio Multi-Livello	15
2.1	Cenni di Teoria dei Grafi	15
2.1.1	Grafo Orientato	15
2.1.2	Archì e nodi	16
2.1.3	Cammini	17
2.1.4	Connessione tra nodi	18
2.2	Contrazione di Grafi	18
2.2.1	Contrazione di archi	18
2.2.2	Contrazione di sottografi	19
2.2.3	Grafi quoziente	21
2.3	Approccio Multi-Livello	23
2.3.1	Partizionamento multilivello di grafi	23
3	Grafi Multi-livello	27
3.1	Grafo decontraibile	27
3.2	Contrazioni	29
3.3	Grafo multi-livello	33
3.3.1	Funzioni	33
3.3.2	Definizione dei Grafi Multi-Livello	34
3.3.3	Algoritmo di trasformazione naturale	36
4	Algoritmi di enumerazione	37
4.1	Enumerazione di componenti fortemente connesse	37
4.1.1	Algoritmo di Kosaraju	37
4.1.2	Condensazione in un grafo decontraibile	41
4.1.3	Correttezza dell'algoritmo	43
5	Applicazioni dei Grafi Multilivello	47
5.0.1	Possibili applicazioni della contrazione	47

Elenco dei codici

Elenco delle figure

2.1	Un esempio di grafo orientato	16
2.2	Un esempio di contrazione di un arco in un grafo orientato	19
2.3	Un esempio di contrazione di un sottografo in un grafo orientato	20
2.4	Un esempio di grafo quoziente di un grafo orientato	22
2.5	Un esempio di condensazione di un grafo orientato	22
2.6	Schema grafico del partizionamento multilivello	24
3.1	Un esempio di decontrazione locale di un grafo decontraibile	28
3.2	Esempio di contrazione di un grafo decontraibile	30
3.3	Esempio di grafo decontraibile che non è contrazione della sua decontrazione completa	31
3.4	Esempio di grafo multilivello	35
4.1	Esempio di esecuzione dell'algoritmo di Kosaraju su un grafo diretto	40

Elenco delle tabelle

1. Introduzione

Numerosi e ragguardevoli sono stati i traguardi raggiunti dagli strumenti di elaborazione automatica di testi scritti sviluppati ed affinati negli ultimi decenni. In particolare, la branca dell'intelligenza artificiale dell'elaborazione automatica del linguaggio naturale (*Natural Language Processing* o *NLP*) ha visto una crescita esponenziale negli ultimi anni, grazie all'impiego di tecniche di deep learning e all'incremento della potenza di calcolo a disposizione. Tuttavia, nonostante i progressi compiuti circa le capacità, la comprensione del testo scritto rimane un compito complesso per i sistemi automatici, che richiedono enormi quantitativi di dati annotati per poter apprendere modelli di linguaggio sufficientemente accurati. Si pensi che i dataset per l'addestramento di modelli di linguaggio come *GPT-3* si sono rapidamente espansi, culminando in dimensioni dell'ordine del trilione di parole [DBLP:journals/corr/abs-2005-14165?].

D'altra parte, l'applicazione di queste tecniche di analisi automatica di testi scritti o parlati sui sogni hanno già trovato applicazioni in ambito psicologico e psichiatrico, applicando tecniche di NLP su piccoli corpus di testi di sogni [ALTSZYLER2017178?], mentre la rappresentazione di testi sui sogni attraverso grafi si è rivelato un'utile strumento a supporto della diagnosi e predizione di disturbi come la schizofrenia o il disturbo bipolare [mota2014graph?, mota2017thought?] .

In questa tesi si discuterà di come una struttura di grafi a più livelli possa essere utilizzata per rappresentare e analizzare piccoli dataset di testi provenienti da trascrizioni di sogni e come essa possa essere sfruttata per realizzare dei modelli di linguaggio minimali rappresentativi di un particolare sognatore, dimostrando come informazioni legate alla semantica delle parole possano essere estrapolate a partire da aspetti sintattici.

1.1 Motivazione

Sebbene gli strumenti di NLP siano stati ampiamente utilizzati per l'analisi sintattica e semantica di testi scritti, le motivazioni che spingono alla realizzazione di una struttura dati applicabile alla trasposizione di sogni in semplici modelli di linguaggio sono legate al tentativo di individuare i rapporti sintattici e semantici tra parole e contesti di parole in relazione alla specifica persona, ovvero allo spazio semantico di un sognatore.

L'estrapolazione di informazioni legate al significato delle parole a partire da aspetti sintattici è un principio fondamentale della semantica computazionale, noto come *ipotesi distribuzionale*, che si basa sul principio per cui il significato di una parola è de-

terminato dal suo contesto di utilizzo, e che le parole che appaiono nello stesso contesto tendono ad avere significati simili.

Lo spazio semantico di un sognatore può essere rappresentato, quindi, attraverso una struttura basata su grafi in cui i nodi rappresentino le parole o i contesti di parole presenti nei sogni e gli archi siano ricavati dalle relazioni sintattiche tra di esse, come l'immediata vicinanza o la co-occorrenza.

realizzare una struttura dati generica per la rappresentazione di una gerarchia di grafi a più livelli, dove ogni livello rappresenti una diversa astrazione del grafo iniziale, e i grafi ai livelli inferiori possano essere ottenuti dall'espansione ricorsiva dei nodi ai livelli superiori.

Da questa necessità nasce l'idea di definire e realizzare nella maniera più generale possibile una struttura gerarchica di grafi a più livelli dove ogni livello rappresenti una diversa astrazione del grafo iniziale, e i grafi ai livelli inferiori possono essere ottenuti dall'espansione ricorsiva dei nodi ai livelli superiori, permettendo espansioni locali o globali. Ciò può essere utile per descrivere caratteristiche strutturali di grafi grandi e sparsi a partire dall'individuazione di schemi topologici che siano significativi, che essi siano, ad esempio, cricche, componenti fortemente connesse, circuiti, stelle o cammini, e fornire operazioni che permettano di operare ad un determinato livello di astrazione nella gerarchia, come ottenere il grafo corrispondente ad un nodo, il calcolo della distanza o la modifica della struttura.

1.2 Obiettivi

L'obiettivo principale di questa tesi è, quindi, proporre una definizione formale della struttura dati astratta del *Grafo Multi-Livello* e delle operazioni che possono essere eseguite su di essa, nonché di valutarne complessità computazionale e spaziale.

Il secondo obiettivo è quello di analizzarne le possibili applicazioni, in particolare per la rappresentazione di spazi di parole e contesti in relazione ai sogni trascritti da un determinato sognatore.

1.3 Struttura della Tesi

La tesi è strutturata come segue:

- Nel Capitolo ?? verranno presentati i concetti di base relativi alla teoria dei grafi, con particolare attenzione agli aspetti legati al partizionamento e agli approcci multilivello esistenti per la risoluzione di problemi di partizionamento su grafi.
- Nel Capitolo ?? verranno illustrati gli algoritmi per l'individuazione di pattern strutturali in grafi utili per la costruzione di una gerarchia di grafi a più livelli.
- Nei Capitoli ?? verrà presentata e definita la struttura dati del Grafo Multi-Livello, le operazioni che possono essere eseguite su di essa e i relativi algoritmi

- Nei Capitoli ?? verranno discusse le possibili applicazioni del Grafo Multi-Livello, evidenziandone limiti e punti di forza. Particolare attenzione sarà rivolta all'ambito della trascrizione dei sogni, e verranno discussi i risultati preliminari ottenuti applicando la struttura dati a dataset di sogni di esempio.

2. Grafi e Approccio Multi-Livello

In questo capitolo sono presentati alcuni concetti introduttivi utili alla definizione e alla comprensione dei *Grafi Multi-livello*. Verrà esplorato il concetto fondamentale di grafo, una struttura matematica in grado di rappresentare relazioni tra elementi discreti, e verranno illustrati i fondamenti della teoria dei grafi [cormen2010introduction?, gross2018graph?], la disciplina che si occupa dello studio di queste strutture, utile in svariati ambiti applicativi, come l'informatica, l'ingegneria, la biologia, la chimica ed altri. Maggiore attenzione sarà rivolta alle definizioni pertinenti al partizionamento e alla contrazione di grafi [Sanders2012HighQG?], vicine alle caratteristiche salienti dei *Grafi Multi-livello*, evidenziando gli aspetti già trattati nella letteratura esistente e quelli che verranno approfonditi in questa tesi.

2.1 Cenni di Teoria dei Grafi

Un grafo è una struttura matematica costruita su un insieme di elementi in cui coppie di elementi possono essere in relazione tra loro. I grafi possono essere orientati o non orientati, a seconda che esista una direzione o un ordine tra le coppie di elementi che si trovano in relazione. In questa sezione ci concentreremo esclusivamente sui grafi diretti, in quanto più generali, visto che grafi non orientati possono sempre essere rappresentati come particolari grafi orientati, ed in quanto la struttura dei *Grafi Multi-livello* si basa su di essi.

2.1.1 Grafo Orientato

Definizione 2.1.1 (Grafo orientato)

Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E) , dove:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un insieme finito non vuoto di elementi detti **nodi** (o **vertici**).
- $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\} \subseteq V \times V$ è un insieme di coppie ordinate di nodi dette **archi** (o **spigoli**).

Nelle rappresentazioni grafiche dei grafi orientati, i nodi sono solitamente rappresentati come cerchi o punti, mentre gli archi come frecce. Nella figura 2.1 è mostrato un esempio di grafo orientato con insieme di nodi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e insieme di archi $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4),$

$(v_4, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_5)\}$.

Si noti che sono ammessi **cappi**, ovvero archi che collegano un nodo a se stesso, ma nella normale nozione di grafo orientato non sono ammessi archi multipli tra due nodi.

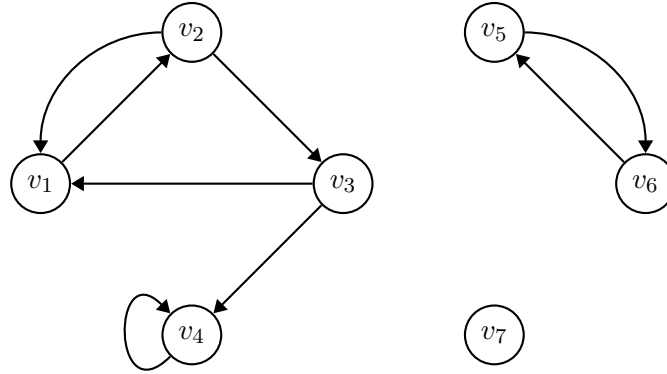


Figura 2.1: Un esempio di grafo orientato

Le cardinalità degli insiemi di nodi e archi di un grafo orientato sono rispettivamente $|V| = n$ e $|E| = m$, e vengono dette rispettivamente **ordine** e **dimensione** del grafo.

Essendo definiti su un insieme di elementi e di archi, possono essere definite relazioni di inclusione tra grafi. Un grafo $G' = (V', E')$ è un sottografo di $G = (V, E)$, e lo si indica con $G' \subseteq G$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Inoltre, dato un certo insieme $V' \subseteq V$, si definisce il sottografo di G **indotto** da V' , e lo si indica con la notazione $G[V']$, il grafo avente come insieme di nodi V' e come insieme di archi l'insieme di tutti gli archi in G che rappresentino relazioni tra tali nodi, ovvero il grafo $G' = (V', E')$ dove $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$.

Essendo il contenuto informativo rilevante di un grafo orientato contenuto nei suoi archi, e quindi nelle relazioni tra nodi, il concetto di eguaglianza tra grafi orientati non è banale. Una relazione tra grafi orientati, utile per valutare la loro equivalenza in termini di informazione espressa, è l'isomorfismo (dal greco *iso* = uguale e *morphè* = forma). Così come per tutte le strutture matematiche, intuitivamente, due grafi si dicono **isomorfi** quando per ogni parte della struttura di uno esiste una corrispondente parte della struttura dell'altro, e viceversa. Formalmente, due grafi orientati $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ si dicono isomorfi, e lo si indica con $G \cong H$ se esiste una biiezione $f : V \rightarrow W$ tale per cui $(u, v) \in E$ se e solo se $(f(u), f(v)) \in F$ per ogni $u, v \in V$.

2.1.2 Archi e nodi

A seguire alcune definizioni relative ai nodi e agli archi di un grafo orientato:

Sia $(u, v) \in E$ un arco di un grafo orientato $G = (V, E)$, allora:

- l'arco (u, v) **esce** dal nodo u ed entra nel nodo v . Ad esempio, gli archi uscenti dal nodo v_2 nel grafo della figura 2.1 sono (v_2, v_1) e (v_2, v_3) , mentre l'unico arco entrante nel nodo v_5 è (v_6, v_5) .

- l'arco (u, v) si dice **incidente** in entrambi i vertici u e v .
- il nodo v è detto **adiacente** al nodo u , in quanto esiste un arco $(u, v) \in E$.

Sia $v \in V$ un nodo di un grafo orientato $G = (V, E)$, allora:

- il **grado uscente** di un nodo v è il numero di archi che escono da v .
- il **grado entrante** di un nodo v è il numero di archi che entrano in v .
- il **grado** di un nodo v è la somma del grado uscente e del grado entrante di v .

2.1.3 Cammini

I cammini sono concetti fondamentali della teoria dei grafi e sono alla base di molti algoritmi e problemi noti relativi ai grafi.

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, siano $u, v \in V$ due nodi di G , allora un **cammino** da u a v in G è una sequenza ordinata di nodi $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ tale che $(v_i, v_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 0, 1, \dots, k-1$ con $v_0 = u$ e $v_k = v$. La **lunghezza** k di un cammino è data dal numero di archi che lo compongono. Ad esempio, $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ è un cammino di lunghezza 3 nel grafo della figura 2.1.

Se esiste un cammino p da u a v in G , allora si dice che il nodo v è **raggiungibile** da u attraverso p in G , e questo può essere indicato con la notazione $u \xrightarrow{p} v$.

A seguire alcune definizioni relative ai cammini su un grafo orientato:

- Un cammino si dice **semplice** se non contiene nodi ripetuti, ad eccezione del primo e dell'ultimo nodo.
- Un cammino si dice **elementare** se non contiene archi ripetuti. Si noti che un cammino semplice è sempre elementare.
- Un cammino $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ di lunghezza $k \geq 1$ si dice **ciclo** se $v_1 = v_k$, ovvero se il suo nodo iniziale coincide con il suo nodo finale. Un **ciclo semplice** è un cammino in cui tutti i nodi sono distinti, ad eccezione del primo e dell'ultimo nodo, mentre un **ciclo elementare** (o **circuito**) è un ciclo in cui tutti gli archi sono distinti. Ad esempio, nel grafo in figura 2.1, il cammino $\langle v_1, v_2, v_3, v_1 \rangle$ è un circuito semplice di lunghezza 3. Inoltre, un grafo diretto che non contiene cicli semplici è detto grafo diretto **acicclico** (o **DAG**).
- Un cammino si dice **cammino hamiltoniano** in nel grafo G se attraversa ogni nodo di G esattamente una volta.
- Un cammino $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ si dice **ciclo hamiltoniano** in nel grafo G se esso è un ciclo e ogni nodo di G appare una ed una sola volta tra i nodi $\langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ e $v_k = v_0$.
- Un cammino si dice **cammino euleriano** nel grafo G se attraversa ogni arco di G esattamente una volta.
- Un cammino si dice **ciclo euleriano** nel grafo G se esso è un ciclo e ogni arco di G appare una ed una sola volta tra gli archi del ciclo.

2.1.4 Connessione tra nodi

Una caratteristica importante dei grafi orientati, basata sul concetto di raggiungibilità e adiacenza, è la connessione dei suoi nodi.

Un grafo orientato $G = (V, E)$ si dice **fortemente connesso** se per ogni coppia di nodi $u, v \in V$ esiste un cammino da u a v .

In un tale grafo, quindi, ogni nodo è mutualmente raggiungibile da ogni altro nodo. Le **componenti fortemente connesse** di un grafo sono le classi di equivalenza dei nodi secondo la relazione "essere mutualmente raggiungibili". Ad esempio, nel grafo in figura 2.1, le componenti fortemente connesse sono $\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7\}\}$. Si noti che l'insieme di nodi V di un grafo fortemente connesso è per definizione una unica componente connessa.

Un maggiore grado di connessione tra nodi è dato dalla presenza di singoli archi tra ogni coppia di nodi anziché di cammini.

Un grafo orientato $G = (V, E)$ si dice **completo** se esiste un arco $(u, v) \in E$ per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in V$. In un tale grafo, quindi, ogni coppia di nodi distinti è adiacente. Le **cricche** di un grafo sono le classi di equivalenza dei nodi secondo la relazione "essere mutualmente adiacenti". Ad esempio, nel grafo in figura 2.1, le cricche sono $\{\{v_1, v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7\}\}$. Si noti che l'insieme di nodi V di un grafo completo è per definizione un'unica cricca.

2.2 Contrazione di Grafi

Nella teoria dei grafi la contrazione di un grafo è un'operazione che permette di ridurre la dimensione di un grafo senza alterarne la struttura fondamentale.

La contrazione di archi o di sottoinsiemi di nodi è un'operazione fondamentale nella teoria dei grafi minori, dove si studiano le proprietà di un grafo in relazione alla presenza di sottostrutture minori ottenibili attraverso rimozione di archi e nodi o contrazioni. Queste tecniche di contrazione trovano applicazione in tutti quei casi in cui si vuole semplificare un grafo identificando i vertici che possono essere considerati equivalenti in relazione ad una certa proprietà, e risultano essere utili in svariati problemi di ottimizzazione e partizionamento di grafi. In letteratura, le operazioni di contrazione di grafi sono state utilizzate anche a scopo di compressione di grafi, al fine di renderli più compatti e trattabili con algoritmi di analisi altrimenti troppo costosi, individuando schemi di contrazione d'interesse e cercando di evitare perdita di informazione [10.1145/3448016.3452797].

2.2.1 Contrazione di archi

La contrazione di archi, spesso riferita come **contrazione di spigoli**, di un grafo orientato $G = (V, E)$ è un'operazione che consiste nella rimozione di un arco $e = (u, v) \in E$ e nella simultanea fusione dei nodi u e v in un unico nodo w . Quando ciò avviene, tutti gli archi che entrano in u e v diventano archi entranti in w , e, analogamente, tutti gli archi che escono da u e v diventano archi uscenti da w . Il risultato di una tale operazione è, quindi, un nuovo grafo ottenuto da G mediante la contrazione dell'arco e , che può

essere indicato con G/e (da non confondersi con la sottrazione insiemistica \setminus). Si noti che, secondo la definizione data, una tale operazione applicata ad un grafo orientato semplice può risultare in un grafo con archi multipli e cappi, a seconda della struttura del grafo iniziale, e per questo è spesso previsto nella definizione di contrazione di archi che vengano applicate le ulteriori operazioni necessarie ad ottenere come risultato un nuovo grafo semplice.

Definizione 2.2.1 (Contrazione di archi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e sia $e = (u, v) \in E$ un arco di G con $u \neq v$, sia f una funzione su V che associa ogni nodo in $V \setminus \{u, v\}$ a se stesso, o ad un nuovo nodo w altrimenti.

La contrazione di e su G è un nuovo grafo $G' = (V', E')$ dove:

- $V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ con $w \notin V$
- $E' = \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in E \setminus \{e\}\}$

In figura 2.2 è mostrato un esempio di contrazione di un arco (u, v) in un nuovo nodo w in un grafo orientato, che include la rimozione di archi multipli e di cappi. Più in generale, una tale operazione può essere eseguita su un insieme di archi, contraendo ciascuno di essi in un qualsiasi ordine.

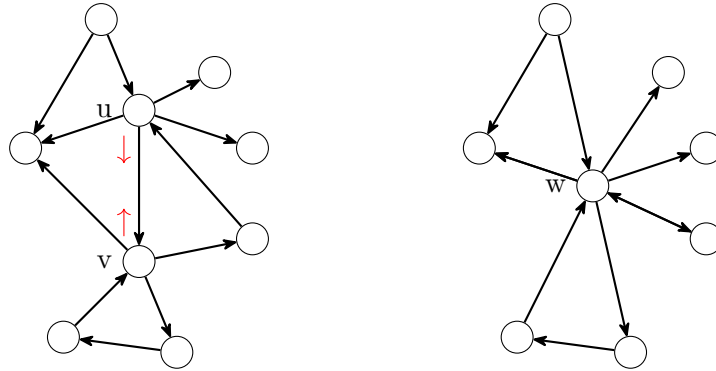


Figura 2.2: Un esempio di contrazione di un arco in un grafo orientato

2.2.2 Contrazione di sottografi

Un'operazione simile alla contrazione di archi, ma più generale, è la **contrazione di vertici** (o **identificazione di vertici**) di un grafo. Essa può essere vista come una generalizzazione della contrazione di archi, in quanto rimuove la restrizione che la coppia di nodi da contrarre sia adiacente, rendendo la contrazione per archi un suo caso particolare. Si immagini, pertanto, di avere il grafo a sinistra della figura 2.3 privato, però, dell'arco (u, v) . La contrazione per vertici permetterebbe di contrarre la coppia non adiacente di nodi u e v , risultando, comunque, nel grafo a destra della figura 2.3.

L'operazione di contrazione di vertici può essere generalizzata nella **contrazione di sottografi**, un'operazione che permette di contrarre un qualsiasi sottoinsieme di

nodì di un grafo in un unico nodo. Dato un grafo $G = (E_G, V_G)$ ed un suo sottografo $H = (V_H, E_H)$, quindi, il grafo risultante dalla contrazione di H mantiene tutti gli archi incidenti su coppie di nodi in $E_G \setminus E_H$, sostituendo quegli archi incidenti tra nodi in $V_G \setminus V_H$ e V_H con nuovi archi incidenti sul nuovo nodo contratto.

Definizione 2.2.2 (Contrazione di sottografi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme di nodi di G , sia $H = G[W] = (W, F)$ il sottografo indotto da W in G . Sia f una funzione su V che associa ogni nodo in $V \setminus W$ a se stesso, o ad un nuovo nodo w altrimenti. La contrazione di H su G è un nuovo grafo $G' = (V', E')$ dove:

- $V' = (V \setminus W) \cup \{w\}$ con $w \notin V$
- $E' = \{(f(u), f(v)) \mid (u, v) \in E \setminus F\}$

In figura 2.3 è mostrato un esempio di contrazione di un sottografo $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ del grafo orientato G in un nuovo nodo w , che include la rimozione di archi multipli e di cappi.

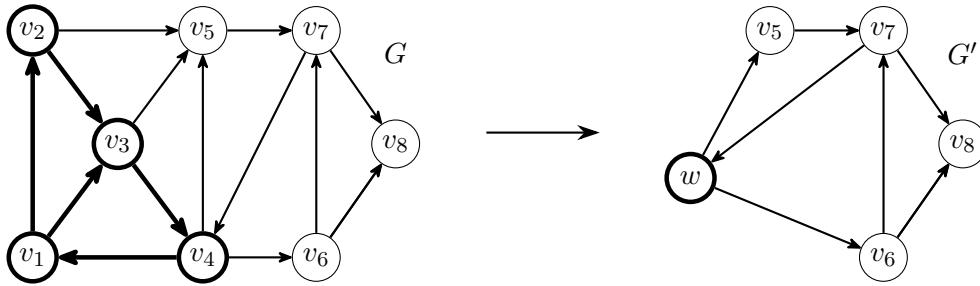


Figura 2.3: Un esempio di contrazione di un sottografo in un grafo orientato

Alla luce delle definizioni delle operazioni presentate, valgono le seguenti considerazioni:

- Il risultato della contrazione di una coppia di nodi adiacenti su un certo grafo G può produrre un grafo isomorfo a quello della contrazione di una coppia di nodi non adiacenti in un altro grafo G' non isomorfo a G . E' il caso precedentemente considerato applicato al grafo a sinistra in figura 2.2.
- Il risultato della contrazione di un sottografo su un certo grafo G può produrre un grafo isomorfo a quello della contrazione di un sottografo in un altro grafo G' non isomorfo a G . Come esempio analogo, basta considerare un grafo J ottenuto a partire dal grafo G a sinistra in figura 2.3 rimuovendo il nodo v_1 e i suoi archi incidenti. I grafi risultanti dalla contrazione di $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ in G e dalla contrazione di $J[\{v_2, v_3, v_4\}]$ in G' sono certamente isomorfi.

Questo significa che la contrazione di vertici e di sottografi non sono operazioni invertibili, in quanto rappresentano funzioni suriettive, e quindi non iniettive. Di fatti queste operazioni non mantengono alcuna informazione legata alla struttura originale del grafo su cui sono applicate. Come mostrato nei prossimi capitoli, tra gli obiettivi

della definizione del grafo multi-livello, vi è proprio quello di mantenere le informazioni legate alla struttura dei grafi a cui sono applicate contrazioni, permettendo anche operazioni di decontrazione.

2.2.3 Grafi quoziente

Nella teoria dei grafi, un grafo quoziente è una visione astratta di un grafo partizionato in sottoinsiemi di nodi che rappresenta le relazioni tra tali sottoinsiemi. In un grafo quoziente G' ottenuto a partire da un grafo $G = (V, E)$, i nodi rappresentano blocchi di nodi di G che fanno parte dello stesso insieme per una qualche partizione di V . Per quanto riguarda gli archi di G' , dati due blocchi di nodi B_1 e B_2 in G' , un arco tra B_1 e B_2 sta ad indicare la presenza di almeno un arco tra un nodo di B_1 e un nodo di B_2 in G .

Se intuitivamente si potrebbe dire che il grafo quoziente permette di accorpare gruppi di nodi e archi tra loro per formare un nuovo grafo, una descrizione più formale utilizzerebbe il concetto di contrazione di sottografi, definendo il grafo quoziente come il risultato delle contrazioni dei sottografi indotti dalla data partizione di nodi.

Definizione 2.2.3 (Grafo Quoziente)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, sia $P \subseteq \mathcal{P}(V)$ una partizione di V , sia R la relazione d'equivalenza su V indotta dalla partizione P . Il grafo quoziente di G rispetto a P è il grafo $G' = (V', E')$ dove:

- V' è l'insieme quoziente V/R , ovvero l'insieme delle classi di equivalenza di R su V .
- $E' = \{([u]_R, [v]_R) \mid (u, v) \in E\}$, dove $[u]_R$ e $[v]_R$ sono rispettivamente le classi di equivalenza dei nodi u e v rispetto a R .

La figura 2.4 mostra un esempio di grafo quoziente sulla destra ottenuto a partire dal grafo orientato sulla sinistra e una partizione $P = \{A, B, C\}$.

Come evidente dalla definizione, il nome del grafo quoziente è dovuto al fatto che la sua struttura è strettamente legata all'insieme quoziente di una qualche relazione di equivalenza definita sui nodi del grafo. Sebbene, assieme al grafo di partenza, l'ingrediente fondamentale per la definizione di un grafo quoziente sia la una partizione dei suoi nodi, una relazione di equivalenza sugli stessi sarebbe un parametro equivalente, in quanto ogni relazione di equivalenza induce una partizione degli elementi del suo dominio in classi di equivalenza.

Le relazioni di equivalenza, così come le partizioni, possono essere comparate tra loro secondo il concetto di raffinamento: una relazione di equivalenza R_1 si dice **più fine** (in inglese **finer**) di un'altra relazione di equivalenza R_2 se ogni classe di equivalenza di R_1 è contenuta in una classe di equivalenza di R_2 . In tal caso si dice che R_2 è **più grezza** (in inglese **coarser**) di R_1 , in quanto ogni classe di equivalenza di R_2 può essere ottenuta come l'unione di classi di equivalenza di R_1 .

Per questo è interessante notare che tale concetto di finezza può essere facilmente esteso ai grafi quoziente:

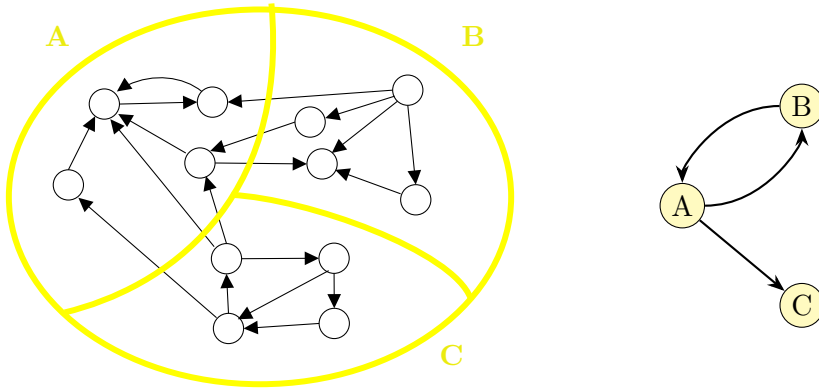


Figura 2.4: Un esempio di grafo quoziente di un grafo orientato

- Ogni grafo può banalmente considerarsi come il grafo quoziente di se stesso rispetto alla relazione di equivalenza di ugualianza, in quanto ogni nodo di un grafo è uguale unicamente a se stesso. La relazione di equivalenza di ugualianza, infatti, è la relazione di equivalenza più fine, e per questo genera il grafo quoziente più fine possibile a partire da qualunque grafo.
- Analogamente, il grafo composto di un unico nodo e nessun arco risulta il grafo quoziente di ogni grafo rispetto alla relazione di equivalenza universale, che mette in relazione qualsiasi coppia di elementi ed identifica tutti i nodi di qualunque grafo in un unico blocco. La relazione di equivalenza universale, infatti, è la relazione di equivalenza più grezza e, come è intuibile pensare, genera il grafo quoziente più grezzo possibile a partire da qualunque grafo.

Una particolare relazione di equivalenza che ben si presta alla definizione di un grafo quoziente è la relazione di mutua raggiungibilità tra nodi di un grafo, che ne definisce le componenti fortemente connesse. Il grafo quoziente di un grafo rispetto a tale relazione di equivalenza prende il nome di **condensazione** (o grafo delle componenti fortemente connesse), e si dimostra essere un grafo diretto aciclico.

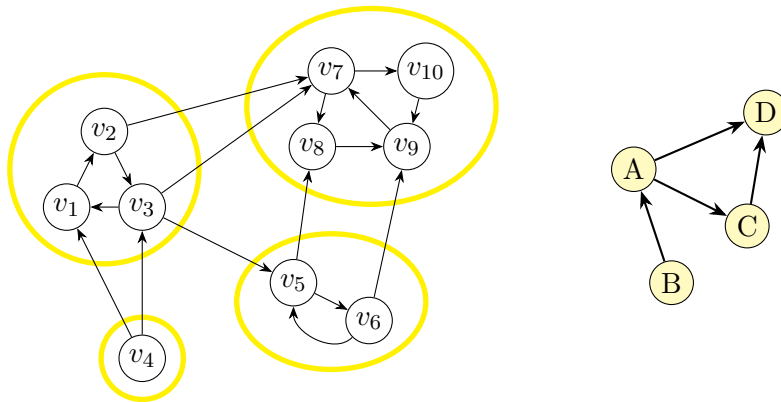


Figura 2.5: Un esempio di condensazione di un grafo orientato

In figura 2.5 è mostrato un esempio di grafo orientato sulla sinistra, in cui le componenti fortemente connesse sono evidenziate in giallo, e al sua condensazione sulla destra.

Si noti che il grafo condensato, in quanto aciclico, non contiene cicli semplici.

Se si volesse aggiungere un arco affinché il grafo condensato contenesse un ciclo, ad esempio aggiungendo un arco uscente da un nodo nella componente C e entrante in un nodo nella componente A , si otterrebbe una nuova componente fortemente connessa data dall'unione delle componenti A , B e C , ovvero le componenti i cui corrispondenti nodi nel grafo condensato sarebbero contenuti in un ciclo semplice.

2.3 Approccio Multi-Livello

In questa sezione verrà introdotto il concetto di contrazione a più livelli di grafi.

L'idea di base di un approccio multi-livello è quella di partire da un grafo di partenza e di applicare ripetutamente operazioni di contrazione, ottenendo una sequenza di grafi contratti di dimensione via via minore. Sebbene tale approccio sia stato generalmente utilizzato per ridurre la dimensione di un grafo al fine di applicare efficientemente algoritmi di partizionamento [DBLP:journals/corr/abs-1012-0006?], non mancano esempi di applicazioni in contesti diversi, come quello della visualizzazione di grafi di grandi dimensioni [4069239?].

In ogni caso, lo scopo di un approccio multi-livello è quello di costruire una gerarchia di grafi contratti che rappresentino la struttura del grafo di partenza, comprimendo in nodi in meta-nodi in accordo a determinate caratteristiche di interesse. Così come per la terminologia usata per le partizioni, i grafi risultanti dalle contrazioni sono spesso detti grossolani (*coarse*), mentre quelli risultanti dalle decontrazioni sono detti raffinati (*fine*). I grafi grossolani, ottenuti ricorsivamente a partire dai grafi più raffinati, sono quindi da considerarsi come rappresentazioni più astratte di questi ultimi.

2.3.1 Partizionamento multilivello di grafi

Il **partizionamento multilivello di grafi** (in inglese *multilevel graph partitioning* o *MGP*) è un approccio euristico per la risoluzione di problemi su grafi in cui si vuole dividere un grafo in un dato numero di blocchi che abbiano approssimativamente la stessa dimensione, affinché una certa funzione obiettivo sia minimizzata.

Un esempio di tale problema dalla grande utilità pratica è quello in cui l'obiettivo del partizionamento è quello di minimizzare il numero di archi che connettono i blocchi, che trova applicazione in importanti contesti legati all'informatica, ad esempio per la decomposizione di strutture dati per la computazione parallela, e all'ingegneria, ad esempio per il partizionamento di circuiti integrati.

L'approccio multi-livello, per la prima volta introdotto da Hendrickson e Leland nel 1995 [Hendrickson:1995:MPG:221253.221279?], si è rivelato essere quello di maggior successo per la risoluzione di problemi di partizionamento di grafi di grandi dimensioni, in quanto permette di ottenere partizioni di alta qualità in tempi ragionevoli, nonostante il problema di partizionamento sia NP-completo per la maggior parte delle funzioni obiettivo.

L'utilità di questa tecnica si basa sull'intuizione per cui una buona partizione ad un livello grossolano della gerarchia rimarrà tale anche ad un livello più raffinato, e che, in questo modo, la ricerca di una partizione ottimale può essere effettuata su grafi più piccoli e più semplici.

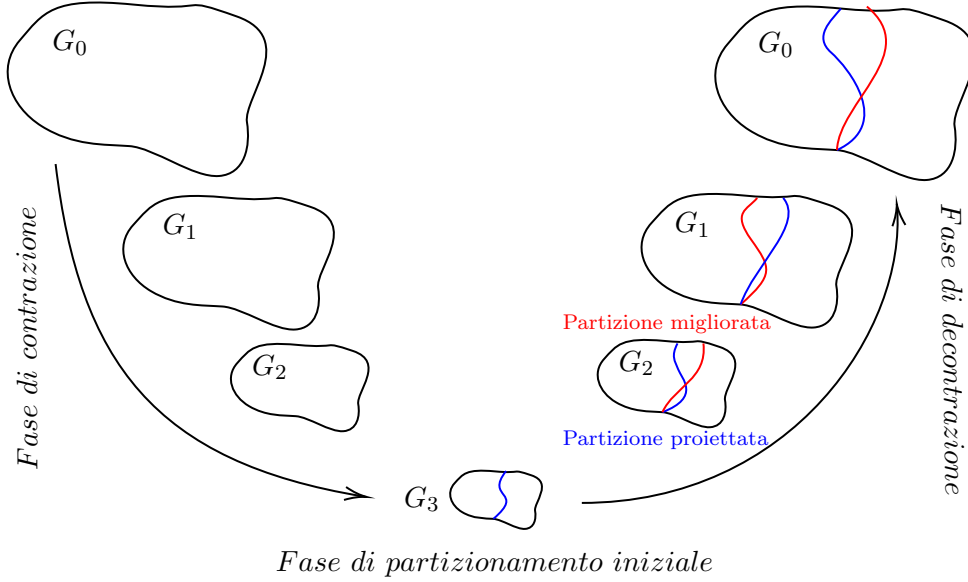


Figura 2.6: Schema grafico del partizionamento multilivello

L'approccio multi-livello per la partizione di grafi si articola in tre fasi principali:

1. **Fase di contrazione** (*contraction/coarsening phase*): si crea una gerarchia di grafi riducendo iterativamente la dimensione del grafo iniziale. Questo viene fatto comunemente individuando e contraindo coppie di nodi adiacenti, ovvero individuando un sottoinsieme degli archi del grafo da contrarre, $M \subseteq E$ detti *match*. Si noti che la scelta di contrarre coppie di nodi adiacenti porta a grafi grossolani i cui nodi rappresentano sottografi del grafo iniziale densamente connessi. In base allo specifico problema, una determinata funzione di *rating* classifica gli archi individuando quale sottoinsieme degli archi E debba essere assegnato ad M affinché la somma dei *rating* degli in M sia globalmente massimizzata. Si consideri che un nodo già contratto non può essere più coinvolto in un ulteriore *matching* allo stesso livello della gerarchia.
2. **Fase di partizionamento iniziale** (*initial partitioning phase*): quando a seguito delle contrazioni il grafo risulta essere di ordine abbastanza piccolo, in relazione ad un qualche threshold, esso può essere partizionato direttamente con algoritmi costosi, fornendo una partizione iniziale sul grafo più grossolano della gerarchia.
3. **Fase di decontrazione** (*refinement/uncoarsening phase*), i matchings vengono iterativamente decontratti, e i relativi nodi vengono associati a blocchi della partizione del grafo più grossolano, proiettandola sul grafo più raffinato. Per fare in modo che la partizione al livello più grossolano tenga conto delle sotto-strutture ai livelli più raffinati, un algoritmo di miglioramento locale (*local improvement*)

ricollocare i nodi tra i blocchi per migliorare la dimensione del taglio o l'equilibrio delle dimensioni tra i blocchi.

3. Grafi Multi-livello

Come si è potuto vedere dal contenuto del Capitolo 1, le operazioni di contrazione e la costruzione di gerarchie di grafi a più livelli siano concetti già ampiamente utilizzati e consolidati nella teoria dei grafi e nelle sue applicazioni. Tuttavia, ciò che non è stato ancora propriamente considerato nella letteratura esistente è la possibilità di definire e formalizzare una vera e propria struttura dati astratta che rappresenti un grafo multi-livello come un'entità a sè stante. In questo capitolo saranno proposte definizioni e proprietà di base di una struttura dati per la rappresentazione di gerarchie di grafi a più livelli, in cui sia possibile ottenere informazioni sull'intera struttura gerarchica in relazione ai singoli grafi che la compongono, come attraverso l'espansione e contrazione di nodi. In particolare, riprendendo dalla terminologia e dai concetti esistenti in letteratura, si proporranno definizioni originali di *Grafi decontraibili* e di *Grafi multi-livello*.

3.1 Grafo decontraibile

A partire dal concetto noto di grafo quoziente e di contrazione, si vuole definire una particolare tipologia di grafi quoziente che, oltre a rappresentare le caratteristiche strutturali ad alto livello dei grafi da cui sono derivati, siano in grado di mantenere l'informazione originale di questi ultimi, ed in che modo essa sia legata alla sua rappresentazione astratta.

Nasce così il concetto di grafo decontraibile, che intuitivamente può essere considerato come un grafo in cui i nodi sono riconducibili ad un grafo e gli archi ad un insieme di archi tra i nodi dei grafi associati ai nodi coinvolti.

Definizione 3.1.1 (Grafo Decontraibile)

Un **grafo decontraibile** è una quadrupla $G = (V, E, dec_V, dec_E)$ dove:

- V è un insieme di elementi detti **supernodi**;
- $E \subseteq V \times V$ è un insieme di coppie ordinate di supernodi, dette **superarchi**;
- $dec_V : V \rightarrow \mathcal{G}_D$ è una biiezione tale per cui $dec_V(v) = G_v = (\mathcal{V}_v, \mathcal{E}_v)$ è un grafo decontraibile rappresentato dal supernodo v ;
- $dec_E : E \rightarrow (\mathcal{V} \times \mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \bigcup_{v \in V} \mathcal{V}_v$, è una biiezione tale per cui $\forall e = (u, v)$, $dec_E(e) = E_e \subseteq \{(a, b) \mid a \in \mathcal{V}_u \wedge b \in \mathcal{V}_v\}$ è un insieme di archi rappresentati dal superarco e .

Nella definizione, così come d'ora in avanti, si utilizzerà la notazione \mathcal{V} e \mathcal{E} per indicare, rispettivamente, insiemi di supernodi e superarchi ottenibili attraverso decontrazioni

e, quindi, di livello inferiore rispetto al grafo decontratto di riferimento. Nello specifico, le notazioni \mathcal{V}_v e \mathcal{E}_v saranno utilizzate per indicare, rispettivamente, insiemi di nodi e archi di grafi ottenibili attraverso la decontrazione di un certo supernodo v . Nel contesto di un determinato grafo decontraibile, per portare maggiore distinzione si continuerà ad utilizzare il termine di nodo ed arco per riferirsi ai supenodi e superarchi di tale livello inferiore.

Si noti che è possibile usare una notazione basata su attributi alternativa a quella delle funzioni per descrivere le proprietà caratteristiche di nodi ed archi che rendono tale un grafo decontraibile. Tale notazione sarà utilizzata in seguito per semplificare la descrizione di algoritmi.

In particolare, si può definire un grafo decontraibile come un normale grafo diretto sotto forma di coppia (V, E) dove:

- $\forall v \in V$, è definito un attributo $v.dec = G_v$ dove $G_v = (\mathcal{V}_v, \mathcal{E}_v)$ è un grafo decontraibile rappresentato da v , quindi tale per cui $dec_V(v) = v.dec$.
- $\forall e = (u, v) \in E$, è definito una attributo $e.dec = E_e$ dove $\mathcal{E}_e \subseteq \{(a, b) \mid a \in \mathcal{V}_u \wedge b \in \mathcal{V}_v\}$ è un insieme di archi rappresentati da e , quindi tale per cui $dec_E(e) = e.dec$.

Si consideri la natura ricorsiva definizione di grafo decontraibile, per cui se un supernodo v può essere rappresentato da un grafo decontraibile G_v , allora i nodi di G_v saranno a loro volta dei supernodi. Stessa cosa vale per gli archi, che possono essere rappresentati da insiemi di archi tra i nodi dei grafi. La scelta di rendere il grafo decontraibile una struttura ricorsiva, così come la definizione in se stessa, è utile alle successive definizioni legate ai grafi multi-livello.

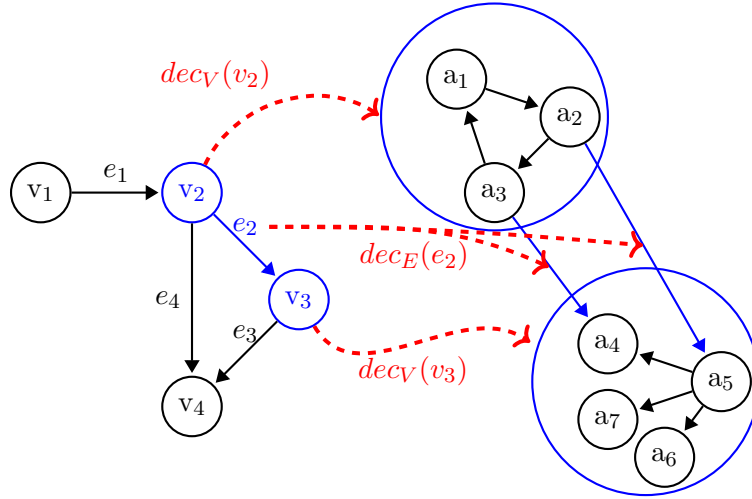


Figura 3.1: Un esempio di decontrazione locale di un grafo decontraibile

In Figura 3.1 è mostrato un esempio di grafo decontraibile sulla sinistra, mentre sulla destra sono rappresentati i grafi associati ai supernodi v_2 e v_3 , assieme all'insieme di archi associato al super-arco e_2 . Si osservi che il grafo $dec_V(v_2)$ composto dai nodi a_1 ,

a_2 e a_3 , ad esempio, manca degli archi collegati esternamente che definiscono il contesto in cui tale grafo si colloca, e solo uno degli archi incidenti in v_1 è stato espanso. Questo fornisce una visione parziale dell'informazione contenuta nel grafo decontraiibile a sinistra, e per questo si può dire che il grafo a destra è il risultato di un'espansione locale.

Inoltre, dal momento in cui i grafi decontraiibili sono a tutti gli effetti dei grafi, tutte le definizioni date sui grafi standard continuano ad essere utilizzate in modo equivalente per i grafi decontraiibili. Analogamente, un supernodo può essere considerato come un particolare tipo di nodo, e lo stesso vale per i superarchi. In particolare, il concetto di isomorfismo può essere esteso ai grafi decontraiibili senza particolari modifiche, ignorando l'aspetto decontraiibile dei nodi e archi, ovvero le funzioni dec_V e dec_E di entrambi i grafi di cui si vuole valutare l'isomorfismo.

3.2 Contrazioni

A partire dalla decontrazione, che rappresenta un aspetto intrinseco alla definizione dei grafi decontraiibili, la relazione di contrazione è quella che, intuitivamente, permette di legare grafi decontraiibili nel senso opposto. Se da un lato la decontrazione permette di costruire grafi che rappresentino espansioni locali, con una definizione di contrazione si vogliono stabilire le condizioni che permettono di legare interi grafi decontraiibili ad altri che ne forniscano una loro rappresentazione astratta, affinché la tale rappresentazione sia coerente con il concetto di contrazione esistente nella teoria dei grafi.

Definizione 3.2.1 (Contrazione di un Grafo Decontraiibile)

Sia $G = (V, E)$ un grafo decontraiibile, il grafo decontraiibile $G' = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ è una sua **contrazione** se e solamente se:

- l'insieme $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{V}\}$ è una partizione di V
- l'insieme $(\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{V}\} \setminus \{\emptyset\}) \cup \{dec_{\mathfrak{E}}(\epsilon) \mid \epsilon \in \mathfrak{E}\}$ è una partizione di E .

Nella definizione, così come d'ora in avanti, si utilizzerà la notazione \mathfrak{V} e \mathfrak{E} per indicare, rispettivamente, gli insiemi di supernodi e superarchi di un grafo contratto, e quindi di livello superiore, rispetto al grafo di riferimento.

Nella figura 3.2, sulla sinistra è mostrato un esempio di grafo decontraiibile contrazione del grafo decontraiibile a destra, dove sono annotati per ogni supernodo e superarco i nodi e gli archi ottenibili dalle loro decontrazioni.

Dalla definizione si evince che le seguenti sono condizioni necessarie affinché un grafo decontraiibile G' possa essere una contrazione di un grafo decontraiibile G :

- (i) I nodi di G' devono avere tutti un grafo non vuoto come decontrazione, ovvero $V_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in \mathfrak{V}$. Infatti se fosse che $V_\alpha = \emptyset$ per qualche $\alpha \in \mathfrak{V}$, allora l'insieme $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{V}\}$ non costituirebbe una partizione di V , in quanto, per definizione, l'insieme vuoto non può essere incluso in una partizione.
- (ii) Gli insiemi di nodi delle decontrazioni dei supernodi in G' devono essere a due a due disgiunti, ovvero non possono esistere nodi a cui corrispondono contemporaneamente due supernodi distinti, in quanto anche in questo caso l'insieme $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{V}\}$ non costituirebbe una partizione di V .

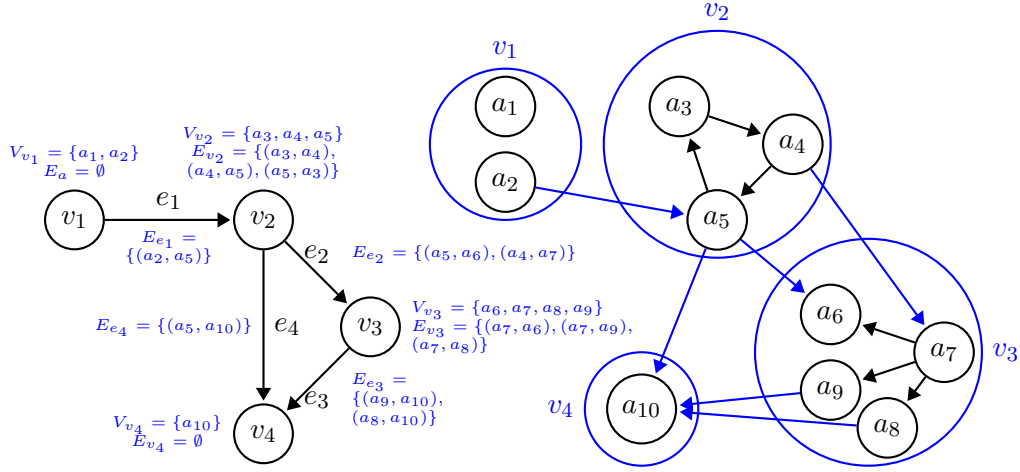


Figura 3.2: Esempio di contrazione di un grafo decontraibile

- (iii) I superarchi di G' devono avere tutti una decontrazione non vuota. Infatti, se fosse che $dec_{\mathfrak{E}}(\epsilon) = \emptyset$ per qualche $\epsilon \in \mathfrak{E}$, allora l'insieme $(\{E_{\alpha} \mid \alpha \in \mathfrak{V}\} \setminus \{\emptyset\}) \cup \{dec_{\mathfrak{E}}(\epsilon) \mid \epsilon \in \mathfrak{E}\}$ non costituirebbe una partizione di E , analogamente a quanto detto nel primo punto.

Si noti che la condizione di disgiunzione tra gli insiemi di archi delle decontrazioni dei superarchi è automaticamente soddisfatta dalla definizione di grafo decontraibile e delle decontrazioni dei suoi archi.

E' rilevante notare che, data una contrazione G' del grafo decontraibile G , essa contiene tutte le informazioni necessarie a calcolare la struttura di archi e nodi di G . Infatti, sia $G' = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ una contrazione di G , allora dalla definizione si ha:

$$G = (\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{V}} V_{\alpha}, (\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{V}} E_{\alpha} \cup \bigcup_{\epsilon \in \mathfrak{E}} dec_{\mathfrak{E}}(\epsilon)), dev_V, dec_E)$$

Definiamo, quindi, l'operatore unario $^D : \mathcal{G}_D \rightarrow \mathcal{G}_D$ come l'operatore di **decontrazione completa** che, dato un grafo decontraibile $G = (V, E)$ restituisce il grafo decontraibile G^D ottenuto dalla decontrazione di tutti i supernodi e superarchi del grafo in input.

$$G^D = (\bigcup_{v \in V} \mathcal{V}_v, (\bigcup_{v \in V} \mathcal{E}_v \cup \bigcup_{e \in E} dec_E(e)), dec_{\mathcal{V}}, dec_{\mathcal{E}})$$

Una contrazione di un grafo decontraibile G , può quindi essere alternativamente definita come un suo grafo quoziente decontraibile G' la cui decontrazione completa $(G')^D$ è proprio G .

Si noti che, in generale, un grafo decontraibile G può non essere una contrazione di G^D . Questo può verificarsi unicamente quando G non soddisfa tutte le condizioni (i), (ii) e (iii) presentate in precedenza.

Per rendere chiaro questo aspetto, in figura 3.3 è proposta una variazione dell'esempio precedente, in cui il grafo decontraibile a sinistra, ottenuto come decontrazione completa

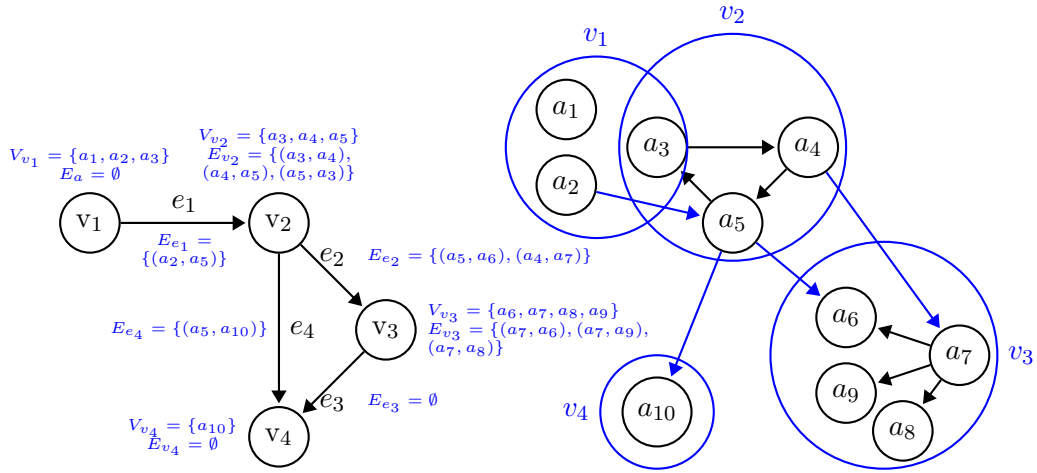


Figura 3.3: Esempio di grafo decontraibile che non è contrazione della sua decontrazione completa

del grafo destra, non è una sua contrazione, in quanto il super-nodo a_3 appartiene contemporaneamente a V_a e V_b , e il super-arco e_3 viene decontratto in un insieme vuoto di archi, violando le condizioni (ii) e (iii).

Sarebbe, quindi, scorretto dire che un grafo G' è una contrazione di G se $(G')^D = G$. In particolare, considerato quanto già detto, si può facilmente dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 3.2.1. *Siano $G = (V, E)$ e $G' = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ due grafi decontraibili. Allora:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_\alpha \neq \emptyset & \forall \alpha \in \mathfrak{V} \\ V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset & \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{V}, \alpha \neq \beta \\ E_\epsilon \neq \emptyset & \forall \epsilon \in \mathfrak{E} \end{array} \right\} \wedge G = (G')^D \iff G' \text{ è una contrazione di } G$$

In aggiunta alla precedente proposizione, grazie alla definizione di contrazione tra grafi decontraibili, si propone un'altra proposizione che descrive come il concetto di grafo indotto può essere usato per descrivere le decontrazioni.

Proposizione 3.2.2. *Sia $G = (V, E)$ un grafo decontraibile e sia $G' = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ una sua contrazione, sia α un super-nodo appartenente a \mathfrak{V} . Allora $dec_{\mathfrak{V}}(\alpha) = (V_\alpha, E_\alpha)$ è il sottografo di G indotto da V_α .*

$$dec_{\mathfrak{V}}(\alpha) = G[V_\alpha]$$

Dimostrazione Sia $H = (W, F)$ il sottografo di $G = (V, E)$ indotto da V_α con $\alpha \in \mathfrak{V}$, per definizione di grafo indotto, H deve essere definito sull'insieme di nodi V_α , ovvero deve essere $W = V_\alpha$. Si vuole ora dimostrare che $F = E_\alpha$.

L'inclusione $F \subseteq E_\alpha$ può essere dimostrata notando che per definizione H , che è un grafo indotto da V_α , si ha:

$$(x, y) \in F \implies (x, y) \in E \quad \text{con} \quad x, y \in V_\alpha$$

Essendo che $\{E_\beta \mid \beta \in \mathfrak{V}\} \cup \{dec_{\mathfrak{E}}(\epsilon) \mid \epsilon \in \mathfrak{E}\}$ è un ricoprimento di E , si nota che l'unico insieme del ricoprimento che può contenere archi definiti in $V_\alpha \times V_\alpha$ è proprio E_α . Si conclude allora $(x, y) \in F \implies (x, y) \in E \implies (x, y) \in E_\alpha$.

L'inclusione $E_\alpha \subseteq F$ può essere dimostrata notando che per la proprietà delle contrazioni, per cui $\{E_\beta \mid \beta \in \mathfrak{V}\} \cup \{dec_{\mathfrak{E}}(\epsilon) \mid \epsilon \in \mathfrak{E}\}$ è una copertura di E , si ha:

$$(u, v) \in E_\alpha \implies (u, v) \in E$$

Essendo che $(u, v) \in E_\alpha \implies (u, v) \in V_\alpha \times V_\alpha$ per definizione di E_α , si deve avere $u, v \in V_\alpha$. Segue quindi $(u, v) \in E_\alpha \wedge u, v \in V_\alpha \implies (u, v) \in F$.

3.3 Grafo multi-livello

A partire dalla definizione di grafo decontraibile e di contrazione, può essere definita una struttura gerarchica a più livelli di grafi decontraibili che siano l'uno la contrazione dell'altro, dove i grafi ai livelli inferiori o loro sottografi possano essere ottenuti attraverso, rispettivamente, decontrazioni complete o espansioni locali dei livelli superiori.

3.3.1 Funzioni

Definizione 3.3.1 (Funzione di contrazione)

Una **funzione di contrazione** $f_C : \mathcal{G}_D \rightarrow \mathcal{G}_D$ è una funzione che dato un grafo decontraibile G essa produce un nuovo grafo decontraibile $f_C(G) = G'$ che sia una contrazione di G .

Una funzione di contrazione rappresenta quindi un particolare schema di contrazione dove dominio e codominio sono coincidenti e sono rappresentati dall'insieme dei grafi decontraibili \mathcal{G}_D . Essa produce contrazioni dei grafi decontraibili in input secondo determinate logiche definite dalla funzione stessa. Nel corso di questo capitolo, i termini *funzione di contrazione* e *schema di contrazione* saranno utilizzati in modo intercambiabile.

È importante notare il fatto che la funzione sia chiusa rispetto all'insieme dei grafi decontraibili: questo vuol dire che è possibile comporre più funzioni di contrazione in sequenza a partire da un dato grafo decontraibile.

Definizione 3.3.2 (Funzione di trasformazione naturale)

Definiamo **funzione di trasformazione naturale** η una funzione che dato un grafo standard $H = (W, F)$, produce il corrispondente grafo decontraibile $G = (V, E, dec_V, dec_E)$ con le seguenti proprietà:

- $dec_V(v) = (\emptyset, \emptyset) \quad \forall v \in V$
- $dec_E(e) = \emptyset \quad \forall e \in E$
- H e G sono isomorfi

La funzione trasformazione naturale è quindi la funzione che permette di trasformare un dato grafo standard in un grafo decontraibile isomorfo per cui le due funzioni di decontrazione dei nodi e degli archi siano definite, seppur producano rispettivamente un grafo e un insieme di archi vuoto.

Si può osservare che queste proprietà garantiscono che il grafo decontraibile ottenuto non possa essere contrazione di alcun altro grafo decontraibile.

Il nome di funzione di trasformazione naturale deriva dalla teoria delle categorie, dove una trasformazione naturale è una mappa tra due funtori che preserva la struttura tra i due oggetti e la coerenza delle operazioni che possono essere applicate su di essi. Sebbene in matematica i grafi non siano considerati essi stessi funtori, nella programmazione funzionale è possibile che i grafi vengano interpretati come tali.

3.3.2 Definizione dei Grafi Multi-Livello

Il concetto di grafo multi-livello è di seguito definito attraverso una descrizione bottom-up di tale struttura, indicandone il grafo iniziale e gli schemi di contrazione, che descrivono il modo in cui dei sottografi di un determinato livello sono collassati in singoli supernodi del livello superiore, formando gerarchie di grafi decontraibili.

[Grafo multi-livello]

Un **grafo multi-livello** M è una coppia (G, Γ) dove:

- $G = (V, E)$ è un grafo
- Γ è una sequenza $\langle f_{C_1}, f_{C_2}, \dots, f_{C_k} \rangle$ di funzioni di contrazione

Utilizzando la notazione G_i per indicare il grafo decontraibile collocato al livello i -esimo della gerarchia, si può considerare il grafo multi-livello M come una sequenza di grafi decontraibili $\langle G_0, G_1, \dots, G_k \rangle$, dove il grafo $G_0 = \eta(G)$ può essere ottenuto dalla funzione di trasformazione naturale η applicata al grafo standard G . Per questo, le funzioni di contrazione di un grafo multi-livello devono essere tali che $f_{C_i}(G_{i-1}) = G_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dato un grafo multi-livello $M = (G, \Gamma)$ con $\Gamma = \langle f_{C_1}, f_{C_2}, \dots, f_{C_k} \rangle$, la funzione che calcola il suo grafo decontraibile al livello k -esimo G_k può quindi essere descritta attraverso la seguente definizione ricorsiva:

$$\text{con}(M, k) = \begin{cases} f_{C_k}(\text{con}(M, k-1)) & \text{se } k > 0 \\ \eta(G) & \text{se } k = 0 \end{cases} = G_k$$

Si può notare che la funzione da applicare a G per ottenere G_k dovrà essere la composizione ordinata delle funzioni di contrazione in Γ fino al livello k abbinata alla funzione di contrazione η per ottenere G_0 , ovvero:

$$G_k = (f_{C_k} \circ f_{C_{k-1}} \circ \dots \circ f_{C_1} \circ \eta)(G)$$

Sia \mathcal{M} l'insieme dei grafi decontraibili, definiamo, inoltre, la funzione altezza h , sia per grafi multi-livello che per i suoi grafi decontraibili, nel modo seguente:

- $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che $h(M) = k$, con $M = (G, \Gamma)$ e k il numero di funzioni di contrazione in Γ . Ad esempio $h(M) = 0$ se $M = (G, \langle \rangle)$.
- $h : \mathcal{G}_D \rightarrow \mathbb{N}$, tale che $h(G_i) = i$, con i il numero di contrazioni necessarie per ottenere G_i a partire da $\eta(G)$. Ad esempio $h(\eta(G)) = 0$.

In figura 3.4 è mostrato un esempio di grafo multi-livello di altezza 2, rappresentato mediante una sequenza di grafi decontraibili G_0, G_1 , e G_2 . I grafi dei livelli superiori sono ottenuti rispettivamente attraverso funzioni di contrazione per cricche (contrazione da G_0 a G_1) e per componenti connesse (contrazione da G_1 a G_2).

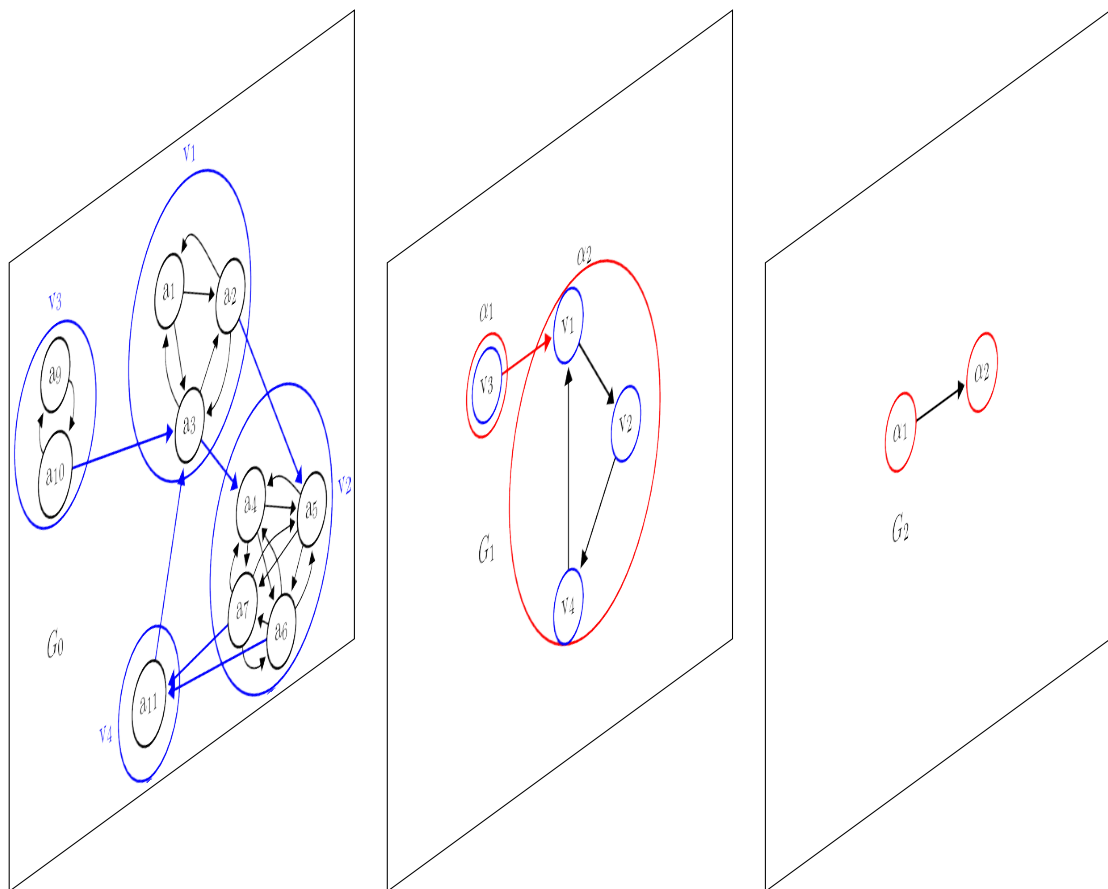


Figura 3.4: Esempio di grafo multilivello

3.3.3 Algoritmo di trasformazione naturale

La generica procedura algoritmica per realizzare la trasformazione naturale da un grafo standard $H = (W, F)$ preso in input ad un grafo decontraibile $G = (V, E)$, può essere definita considerando la creazione di supernodi e superarchi in accordo alla funzione biiettiva $f_V : W \rightarrow V$ che realizza l'isomorfismo tra i nodi di H e i supernodi di G .

Algorithm 1 NATURAL-TRANSFORMATION(H)

```

1:  $V := \emptyset$ 
2: for  $x \in W$  do
3:   Sia  $v$  un supernodo tale che  $f_V(x) = v$ 
4:    $v.dec := (\emptyset, \emptyset)$ 
5:    $V := V \cup \{v\}$ 
6: end for
7:  $E := \emptyset$ 
8: for  $(x, y) \in F$  do
9:   Sia  $e$  un superarco tale che  $e = (f_V(x), f_V(y))$ 
10:   $e.dec := \emptyset$ 
11:   $E := E \cup \{e\}$ 
12: end for
13:  $G := (V, E)$ 
14: return  $G$ 

```

Tramite l'ausilio di strutture dati con tempi di ricerca costanti, come insiemi di hash, la complessità delle operazioni all'interno dei due circoli è $O(1)$, e, di conseguenza, la complessità dell'algoritmo è dettata dal numero di nodi e archi del grafo in input H , ovvero $\Theta(|W| + |F|)$.

4. Algoritmi di enumerazione

In informatica, un *algoritmo di enumerazione* è un algoritmo che elenca tutte le possibili risposte ad un problema computazionale in modo sistematico e completo. Tali algoritmi sono quindi progettati per ricevere un determinato input, generare una lista esaustiva di tutte le possibili soluzioni senza duplicati e, solo allora, terminare. Quando si parla di algoritmi di enumerazione applicati al dominio dei grafi, allora spesso si intende il processo di identificazione di sottoinsiemi di nodi o archi che soddisfano determinate caratteristiche. In questo capitolo si tratteranno e analizzeranno alcuni utili algoritmi di enumerazione presenti in letteratura per il riconoscimento di pattern strutturali all'interno di grafi. In particolare, si discuteranno algoritmi per l'enumerazione di componenti fortemente connesse, di cricche e di circuiti semplici, problemi di notevole importanza nella teoria dei grafi e ritenuti di interesse per la definizione di algoritmi di contrazione. Questi algoritmi costituiranno il motore degli algoritmi presentati nei capitoli successivi, e saranno di importanza fondamentale alla definizione degli algoritmi di contrazione usati per la costruzione di grafi multi-livello.

4.1 Enumerazione di componenti fortemente connesse

Come citato nel Capitolo 1, la condensazione di un grafo diretto è il suo grafo quoziente dove le componenti fortemente connesse definiscono i blocchi della partizione. Enumerare le componenti fortemente connesse di un grafo diretto $G = (V, E)$ significa trovare tutti i sottoinsiemi che permettano di costruire una condensazione del grafo di partenza. In questa sezione si discuterà un classico algoritmo di enumerazione delle componenti fortemente connesse, chiamato da alcuni testi come l'algoritmo di Kosaraju [SHARIR198167?] e al seguito si discuterà di un possibile adattamento dell'algoritmo per la costruzione contestuale di un grafo contratto in forma di grafo decontraibile.

4.1.1 Algoritmo di Kosaraju

L'algoritmo di Kosaraju (anche noto come algoritmo di Kosaraju-Sharir) è un algoritmo per l'enumerazione delle componenti fortemente connesse di un grafo diretto dalla complessità lineare scoperto nel 1978 da S. Rao Kosaraju, ma pubblicato solamente nel 1981 da Micha Sharir, che lo scoprì indipendentemente. Esso sfrutta il principio per cui le componenti fortemente connesse di un grafo diretto sono le stesse del suo grafo trasposto, ovvero il grafo ottenuto invertendo l'orientamento di tutti gli archi.

A seguire alcune utili nozioni preliminari per la comprensione dell'algoritmo:

Grafo trasposto Dato un grafo diretto $G = (V, E)$, il suo grafo trasposto $G^T = (V, E^T)$ è il grafo ottenuto invertendo l'orientamento di tutti gli archi di G , ovvero $E^T = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$. È interessante notare che G^T ha le stesse componenti fortemente connesse di G : se un cammino da u a v esiste in G , allora esiste anche un cammino da v a u in G^T . Essendo le componenti fortemente connesse basate sulla mutua raggiungibilità dei nodi, esse non cambiano quando si invertono gli archi.

Una procedura algoritmica per il calcolo di G^T non farebbe altro che scorrere linsieme di archi di G e invertirli, e sarebbe quindi di complessità lineare.

Visita in profondità La visita in profondità di un grafo (in inglese *depth-first search* o *DFS*) è un particolare algoritmo di visita che, in quanto tale, permette di visitare tutti i nodi di un grafo partendo da un nodo iniziale, e di scoprire tutti i nodi raggiungibili da esso. Ciò viene fatto in modo ricorsivo: nel corso della visita di un nodo si considerano uno ad uno i nodi ad esso adiacenti, e ai nodi non ancora marcati come visitati viene applicata immediatamente la stessa procedura di visita. Nel corso dell'algoritmo i nodi vengono colorati in tre colori: bianco, grigio e nero, ad indicare rispettivamente che il nodo non è stato visitato, che è in fase di visita e che è stato visitato. Questo permette di non incorrere in cicli di visita infiniti nel caso non si stia visitando un grafo aciclico. Nel corso dell'algoritmo vengono anche assegnati ai nodi due valori interi: il tempo di scoperta d e il tempo di fine visita f , che permettono di determinare, rispettivamente, il momento in cui i nodi vengono scoperti e colorati di grigio e il tempo in cui la visita di un nodo termina, colorandosi di nero. Un attributo aggiuntivo, il predecessore π , permette di memorizzare il nodo da cui si è scoperto il nodo corrente e, con esso, di ricostruire il cammino di visita sotto forma di albero, detto albero di visita in profondità.

Algorithm 2 DFS(G)

```

1: for  $v \in G.V$  do
2:    $v.color := \text{WHITE}$ 
3:    $u.\pi := \text{NIL}$ 
4: end for
5:  $time := 0$ 
6: for  $v \in G.V$  do
7:   if  $v.color == \text{WHITE}$  then
8:     DFS-VISIT( $G, v$ )
9:   end if
```

La procedura si mantiene in tempo lineare rispetto al numero di nodi e di archi del grafo, in quanto ogni nodo viene visitato una sola volta e ogni arco viene esaminato al massimo una volta.

Ordinamento topologico Dato un grafo diretto aciclico $G = (V, E)$, un ordinamento topologico di G è una particolare sequenza dei suoi nodi $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ tale che per ogni arco $(v_i, v_j) \in E$, $i < j$. Si noti, quindi, che un ordinamento topologico di un grafo diretto può esistere solo se il grafo non contiene cicli. Un ordinamento topologico fornisce una disposizione tale che i nodi raggiungibili da un certo nodo v_i vengano disposti dopo di esso, e che i nodi che v_j può raggiungere vengano disposti dopo di esso.

Una procedura algoritmica per il calcolo di un ordinamento topologico di G può essere effettuata tramite una visita in profondità del grafo, raccogliendo in una lista concatenata i nodi in ordine decrescente di tempo di fine visita, man mano che vengono

Algorithm 3 DFS-VISIT(G, u)

```

1:  $u.color := \text{GRAY}$ 
2:  $time := time + 1$ 
3:  $u.d := time$ 
4: for  $v \in G.Adj[u]$  do
5:   if  $v.color == \text{WHITE}$  then
6:      $v.\pi := u$ 
7:      $DFS - VISIT(G, v)$ 
8:   end if
9: end for
10:  $u.color := \text{BLACK}$ 
11:  $time := time + 1$ 
12:  $u.f := time = 0$ 

```

visitati. Per via del normale costo di una visita in profondità, la complessità di tale procedura è lineare al numero di nodi e di archi del grafo

Algorithm 4 KOSARAJU-ALGORITHM(G)

```

1: Esegui  $DFS(G)$  per calcolare il tempo di fine visita  $u.f$  per ogni nodo  $u$  in  $G$ 
2: Calcola  $G^T$ 
3: Esegui  $DFS(G^T)$ , considerando  $G.V$  in ordine decrescente di tempo di fine visita
4: Fornisci in output ogni albero di visita in profondità come componente fortemente
   connessa di  $G$ 

```

Come descritto dallo pseudocodice, l'algoritmo di Kosaraju esegue due visite in profondità, una sul grafo originale G e una sul grafo trasposto G^T , in cui la seconda visita viene effettuata secondo l'ordinamento ottenuto dalla prima. Le motivazioni per cui la procedura di visita a riga 3 permette di visitare una componente fortemente connessa alla volta per ogni iterazione del ciclo for principale possono essere riassunte dai seguenti punti:

- La condensazione di G è un grafo aciclico, e quindi ammette un ordinamento topologico. Questo vuol dire che se esiste un cammino $u \rightsquigarrow v$ in G , con u e v nodi di componenti fortemente connesse distinte, allora di certo non può esistere un cammino $v \rightsquigarrow u$ in G , altrimenti i nodi in entrambe le componenti connesse sarebbero tutti mutualmente raggiungibili tra loro, e costituirebbero una unica componente fortemente connessa.
- Se C e C' sono componenti fortemente connesse di G distinte ed esiste in G un cammino $u \rightsquigarrow v$ con $u \in C$ e $v \in C'$, allora il tempo di fine visita massimo tra i nodi di C sarà maggiore del tempo di fine visita massimo tra i nodi di C' . Infatti, supponendo che venga visitato prima u , tutti i nodi raggiungibili da u , incluso v e tutti i nodi in C' , saranno visitati prima che la visita di u termini. Al contempo, supponendo che venga visitato prima v , allora nessun nodo di C verrà visitato prima che la visita di v termini, in quanto, come detto nel primo punto, l'esistenza di un cammino $u \rightsquigarrow v$ esclude l'esistenza di un cammino $v \rightsquigarrow u$.
- Considerare i nodi in ordine decrescente di tempo di fine visita permette di visitare prima le componenti fortemente connesse meno profonde; ovvero quelle che non

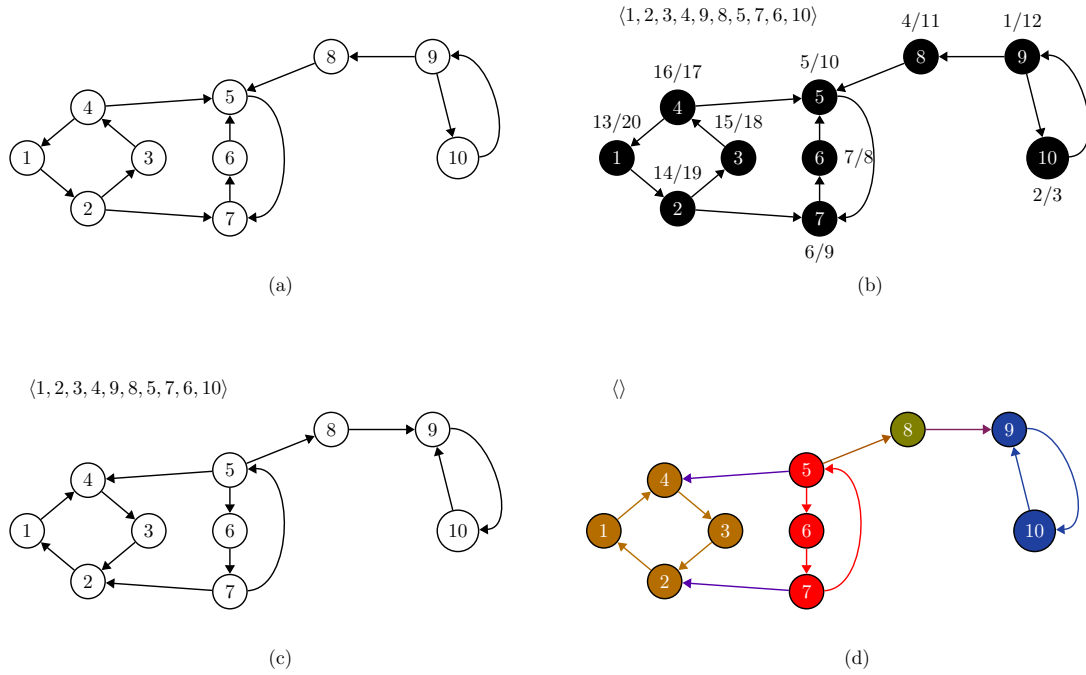


Figura 4.1: Esempio di esecuzione dell'algoritmo di Kosaraju su un grafo diretto

contengono nodi raggiungibili da altre componenti fortemente connesse. In altre parole, le componenti meno profonde sono le prime ad apparire nell'ordinamento topologico della condensazione.

- Invertendo il senso degli archi e visitando prima le componenti fortemente connesse meno profonde in G , si garantisce che non si possano raggiungere nodi di altre componenti, ma solo nodi della stessa componente. Invertendo il senso degli archi, infatti, si inverte l'ordinamento topologico della condensazione, visitando prima le componenti che si trovano in fondo al nuovo ordinamento.

In figura [fig:kozaraju'example'2?] sono rappresentate le fasi rilevanti dell'algoritmo di Kosaraju applicato al grafo in (a). In (b) è rappresentato lo stato del grafo al termine della procedura DFS, assieme alla lista dei nodi ordinata per tempi di fine visita. In (c) il grafo trasposto ottenuto invertendo gli archi del grafo in (a). In (d) lo stato del grafo trasposto in (c) al termine della seconda procedura di visita in profondità, dove colori dello stesso colore rappresentano nodi appartenenti alla stessa componente fortemente connessa fornita in output.

Complessità dell'algoritmo L'algoritmo di Kosaraju ha una complessità temporale di $\Theta(V + E)$, in quanto:

- A riga 1 viene eseguita una ricerca in profondità tradizionale, quindi con costo $\Theta(|V| + |E|)$.
- A riga 2 viene costruito il grafo trasposto G^T e come già detto, la sua costruzione può avvenire in un tempo $\Theta(|V| + |E|)$, iterando prima sull'insieme dei nodi di G e poi sui suoi archi, invertendone l'orientamento.

- L'ordinamento dei nodi di G^T può essere realizzato nel corso della visita a riga 1 attraverso la costruzione di una lista concatenata, per cui i singoli nodi possono essere aggiunti in testa alla lista nel momento in cui vengono colorati di nero, in tempo costante, per un totale di $\Theta(|V|)$, e non ci sono costi aggiuntivi per la costruzione dell'ordinamento.
- A riga 3 viene eseguita la procedura DFS che corrisponde ad una visita in profondità di G^T , quindi sempre di complessità $\Theta(|V|+|E|)$.

4.1.2 Condensazione in un grafo decontraibile

La procedura segue la logica dell'algoritmo di Kosaraju per l'individuazione delle componenti strettamente connesse descritto in [1], effettuando due visite in profondità, una sul grafo originale G e una sul grafo trasposto G^T , in cui la seconda è effettuata secondo l'ordinamento della prima. Durante la seconda visita in profondità viene costruito il grafo G' ottenuto come contrazione del grafo decontraibile G .

Il seguente algoritmo descrive la seconda visita in profondità, che include la costruzione del grafo contratto di G .

I parametri passati alla procedura ricorsiva DFS-VISIT' includono

- il grafo decontraibile originale G
- il nodo da visitare u
- il supernodo α_i , che rappresenta una componente fortemente connessa di G che include u
- i due insiemi da costruire $V_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}$, che insieme definiscono il grafo $\alpha_i.dec = (V_{\alpha_i}, E_{\alpha_i})$ associato al supernodo α_i .
- l'insieme di superarchi \mathfrak{E} , che vengono definiti nel corso della visita. Gli archi in $\epsilon.dec$ con $\epsilon \in \mathfrak{E}$ vengono aggiunti quando si incontrano nodi appartenenti ad altre componenti connesse già visitate.

Algorithm 5 DFS'(G)

```

1: for each  $v \in G.V$  do
2:    $v.color = \text{WHITE}$ 
3: end for
4:  $\mathfrak{V} := \emptyset$ 
5:  $\mathfrak{E} := \emptyset$ 
6:  $i := 0$ 
7: for each  $u \in G.V$  in decreasing order by  $u.f$  do
8:   if  $u.color == \text{WHITE}$  then
9:     let  $\alpha$  be a new super-node
10:     $\mathfrak{V} := \mathfrak{V} \cup \{\alpha_i\}$ 
11:     $V_{\alpha_i} := \emptyset$ 
12:     $E_{\alpha_i} := \emptyset$ 
13:    DFS-VISIT'(G, u,  $\alpha$ ,  $V_{\alpha_i}$ ,  $E_{\alpha_i}$ ,  $\mathfrak{E}$ )
14:     $\alpha.dec := (V_{\alpha_i}, E_{\alpha_i})$ 
15:     $i := i + 1$ 
16:   end if
17: end for
18:  $G' := (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ 
19: return  $G'$ 

```

Algorithm 6 DFS-VISIT'(G, u, α , V_α , E_α , \mathfrak{E})

```

1:  $u.color := \text{GREY}$ 
2:  $u.supernode := \alpha$ 
3:  $V_\alpha := V_\alpha \cup \{u\}$ 
4: for each  $v \in G.adj[u]$  do
5:   if  $(v.color == \text{WHITE} \vee v.supernode == \alpha)$  then
6:      $E_\alpha := E_\alpha \cup (v, u)$ 
7:   end if
8:   if  $(v.color == \text{WHITE})$  then
9:     DFS-VISIT'(G, v,  $\alpha$ ,  $V_\alpha$ ,  $E_\alpha$ ,  $\mathfrak{E}$ )
10:  else if  $(v.color == \text{BLACK} \wedge v.supernode \neq \alpha)$  then
11:    if  $(v.supernode, \alpha) \notin \mathfrak{E}$  then
12:       $(v.supernode, \alpha).dec := \emptyset$ 
13:       $\mathfrak{E} := \mathfrak{E} \cup \{(v.supernode, \alpha)\}$ 
14:    end if
15:     $(v.supernode, \alpha).dec := (v.supernode, \alpha).dec \cup \{(v, u)\}$ 
16:  end if
17: end for
18:  $u.color := \text{BLACK}$ 

```

In particolare:

- i nodi v che soddisfano la condizione a riga 5 di DFS-VISIT' fanno parte della stessa componente di u . Per questi nodi l'arco originale del grafo non trasposto (v, u) viene aggiunto al grafo corrispondente al supernodo α a riga 6;
- i nodi v che soddisfano la condizione a riga 10 di DFS-VISIT' sono nodi che fanno parte di altre componenti fortemente connesse già visitate che sono adiacenti a u . Per questi nodi, si considerano i superarchi ottenuti dai rispettivi supernodi di v e u , aggiungendoli a \mathfrak{E} se necessario, (riga 13), e aggiungendo l'arco originale (v, u) all'insieme di archi rappresentato dal superarco (riga 15).

Complessità dell'algoritmo L'algoritmo COMPONENT-CONTRACT applicato ad un grafo $G = (V, E)$ mantiene una complessità temporale di $\Theta(V + E)$, in quanto:

- A riga 1 viene eseguita una ricerca in profondità tradizionale, quindi con costo $\Theta(V + E)$.
- A riga 2 viene costruito il grafo trasposto $G^T = (V, E^T)$, dove $E^T = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$ è dato dagli archi in E con orientamento invertito. Anche in questo caso, la sua costruzione può avvenire in un tempo $O(V + E)$, iterando prima sull'insieme dei nodi di G e poi sui suoi archi, invertendone l'orientamento. L'ordinamento dei nodi di G^T può essere realizzato nel corso della visita a riga 1 attraverso la costruzione di una lista concatenata, per cui i nodi possono essere aggiunti in testa alla lista in tempo $O(1)$ man mano che viene loro assegnata l'etichetta di fine visita $u.f$.
- A riga 3 viene eseguita la procedura DFS' che corrisponde ad una visita in profondità di G^T abbinata alle operazioni di costruzione del grafo decontraibile. In particolare, le operazioni che vengono effettuate in aggiunta a quelle di una visita in profondità consistono nei semplici assegnamenti alle righe 4–6, 10–12, 14–15 e 18 di DFS' e alle righe 2–3 di DFS-VISIT'. Inoltre sono previsti dei controlli e dei relativi assegnamenti alle righe 5–7 e 10–16 che, ancora una volta, aggiungono solamente costi costanti per ogni arco in G^T . Il costo computazionale della procedura rimane $\Theta(V + E)$.

4.1.3 Correttezza dell'algoritmo

Lemma 3.2.1 Sia $G = (V, E)$ un grafo decontraibile input dell'algoritmo COMPONENT-CONTRACT, sia G' il grafo decontraibile in output, sia u un nodo in V , sia v un nodo adiacente a u in $(G)^T$, sia α il supernodo di u . Le condizioni sul nodo v alle righe 5 e 10 di DFS-VISIT' sono tra loro mutualmente esclusive e ricoprono tutti i possibili casi. In particolare:

- (i) $(v.color == \text{WHITE} \vee v.supernode == \alpha) \implies$ il nodo v ha lo stesso supernodo di u al termine dell'algoritmo.
- (ii) $(v.color == \text{BLACK} \wedge v.supernode \neq \alpha) \implies$ il nodo v non ha lo stesso supernodo di u al termine dell'algoritmo.

Dimostrazione Si noti, innanzitutto, che l'attributo *supernode* una volta assegnato non viene più modificato fino al termine dell'algoritmo, in quanto esso può essere assegnato solamente a riga 2 di DFS-VISIT' e DFS-VISIT' viene richiamato una ed una sola volta per ciascun nodo.

Per dimostrare (i) ci limitiamo a dimostrare $v.color == WHITE \implies v.supernode == u.supernode$ e $v.supernode == \alpha \implies v.supernode == u.supernode$.

1. Assumiamo $v.color == WHITE$. Questo significa che esso non ha ancora alcun supernodo assegnato e che gli verrà assegnato il supernodo α nella chiamata di DFS-VISIT' a riga 9, in quanto la condizione a riga 8 è verificata (H_1).
2. Assumiamo $v.supernode == \alpha$. Banalmente, essendo $u.supernode = \alpha$ si ottiene $v.supernode == u.supernode$ (H_2).

Per (H_1) e (H_2) abbiamo dimostrato il punto (i).

Per dimostrare (ii) assumiamo $v.color == BLACK$ (H_3) e $v.supernode \neq \alpha$ (H_4). Dato (H_3), il nodo v è già stato visitato e deve, pertanto, avere un supernodo assegnato. Per (H_4), questo supernodo non può essere $\alpha = u.supernode$, pertanto si conclude $v.supernode \neq u.supernode$.

Le conclusioni dei punti (i) e (ii) risultano essere, quindi, mutualmente esclusive e ricoprono tutti i possibili casi sullo stato del nodo v ed u al termine dell'algoritmo.

Correttezza dell'algoritmo Al termine dell'esecuzione dell'algoritmo su un grafo decontraibile $G := (V, E)$ avremo costruito un grafo decontraibile $G' := (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ dove:

- (i) G' è una contrazione di G
- (ii) Per ogni supernodo $\alpha \in \mathfrak{V}$, con $\alpha.dec = (V_\alpha, E_\alpha)$, V_α è una componente fortemente connessa di G

Dimostrazione La proprietà (i) può essere dimostrata notando che:

- La prima proprietà delle contrazioni è rispettata, in quanto ogni nodo $u \in V$ viene visitato una ed una sola volta da DFS-VISIT' e viene aggiunto ad un certo insieme V_α per qualche $\alpha \in \mathfrak{V}$. Inoltre, per ogni supernodo $\alpha \in \mathfrak{V}$, $V_\alpha \neq \emptyset$ in quanto esso dovrà contenere almeno il nodo u della prima chiamata di DFS-VISIT' a riga 13 di DFS'.
- La seconda proprietà delle contrazioni è rispettata. Per il Lemma 3.2.1 le condizioni sul nodo v alle righe 5 e 10 di DFS-VISIT' sono tra loro mutualmente esclusive e ricoprono tutti i possibili casi al termine dell'algoritmo: o v ha lo stesso supernodo di u o non ha lo stesso supernodo di u . Quindi si può notare che tutti gli archi in E sono considerati ognuno una ed una sola volta dal ciclo for a riga 4 di DFS-VISIT'. Per ognuno di questi archi (v, u) , o vengono aggiunti ad un certo insieme E_α per qualche α quando u e v sono tali per cui $u.supernode = v.supernode = \alpha$, o vengono aggiunti ad un insieme $e.dec$ per qualche $e \in \mathfrak{E}$ quando u e v sono tali per cui $u.supernode \neq v.supernode$. Questo vuol dire che $\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{V}, \alpha.dec = (V_\alpha, E_\alpha)\} \cup \{e.dec \mid e \in \mathfrak{E}\}$ è un ricoprimento di E formato di insiemi a due a due disgiunti.

Inoltre, la proprietà per cui $\emptyset \notin \{\epsilon.dec \mid \epsilon \in \mathfrak{E}\}$ è garantita dal fatto che l'esecuzione della riga 13 di DFS-VISIT' è sempre succeduta dall'esecuzione della riga 16, per cui non può esistere $\epsilon \in \mathfrak{E}$ tale per cui $\epsilon.dec = \emptyset$.

La proprietà (ii) può essere dimostrata notando che l'algoritmo utilizza la stessa logica dell'algoritmo per l'individuazione delle componenti connesse descritto in [1]. In particolare, è possibile dimostrare per induzione che alla k -esima chiamata di DFS-VISIT', le componenti connesse C_i con $i = 0, \dots, k-1$, tali per cui $f(C_i)$ è il tempo di fine visita massimo tra i nodi della componente i -esima e, quindi, tali per cui $f(C_i) > f(C_k) \forall i$, sono state già visitate e assegnate a degli insiemi V_{α_i} per dei supernodi α_i . Inoltre, per il Lemma 22.15 descritto in [1], le componenti C' tali per cui $f(C') < f(C_k)$ non possono essere visitate durante la visita dell'albero di C_k , in quanto in G^T non possono esistere archi della forma (v, u) con $v \in C'$ e $u \in C_k$. Per l'assegnamento a riga 3 di DFS-VISIT', ogni nodo visitato viene aggiunto all'insieme V_{α_i} , il quale cambia a riga 11 di DFS' per ogni nuovo albero di ricerca in profondità che viene percorso. Pertanto al termine dell'algoritmo V_{α_i} rappresenterà una componente fortemente connessa di G per ogni α_i .

5. Applicazioni dei Grafi Multilivello

5.0.1 Possibili applicazioni della contrazione

Nel contesto generale dell'analisi di grafi, la contrazione di nodi e archi può essere utile per:

- Ridurre la complessità dell'analisi strutturale di un grafo, sia che esso debba essere processato attraverso algoritmi costosi, sia che esso debba essere graficamente visualizzato, rendendolo più facilmente interpretabile ed evidenziando le caratteristiche strutturali di interesse.
- Studiare l'interrelazione di caratteristiche strutturali di un grafo, che rappresenti la navigabilità di uno spazio basato su componenti fortemente connesse, cicli, cricche ecc.
- Stabilire il grado di connettività di un grafo, individuando la rilevanza (intesa come il numero di insiemi componente che rappresentano i supernodi), il numero e la dimensione delle sue contrazioni.
- Misurare il grado di complessità dello spazio rappresentativo del grafo, in base al numero di nodi e archi presenti nelle contrazioni (grafi derivanti da specifici domini tendono ad avere un certo grado di complessità legato ad un concetto spaziale).
- Valutare l'influenza di singoli nodi e archi sulla struttura contratta del grafo, eseguendo analisi della sensitività e della robustezza del grafo.

Nel contesto dell'analisi di testi in linguaggio naturale, in particolare di sogni, e della loro rappresentazione tramite grafi, con l'ausilio di strumenti di analisi NLP per un eventuale preprocessing, la contrazione di nodi è utile per:

- Individuare contesti sintattici (e possibilmente semantici) di parole e frasi, evidenziando l'interrelazione e la distanza tra gruppi di parole e frasi.
- Valutare la somiglianza di singoli brevi testi, come il racconto dei sogni, individuando le macro-caratteristiche strutturali comuni e le differenze tra esse.
- Individuare pattern ricorrenti di parole e insiemi di parole su un corpus più ampio di testi, con eventuale ausilio di strumenti statistici.
- Stabilire il grado di connettività del grafo delle parole in base al numero di insiemi componente (gruppi di parole) e di nodi presenti nelle contrazioni.

-
- Permettere un confronto automatico dei pattern strutturali con grafi multilivello che rappresentino un controllo, con l'eventuale ausilio di algoritmi che valutano il grado di somiglianza di grafi.