/tikz/,/tikz/graphs/
conversions/canvas coordinate/.code=1 , conversions/coordinate/.code=1

force, layering, graphs
Dimostrazione[theorem]

Università degli Studi di Camerino

Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Informatica (Classe L-31)

Sviluppo di una struttura dati per la trascrizione e gestione di sogni

Laureando
Marco Caputo

Matricola 119136

Relatore
Prof.ssa Emanuela Merelli

A.A. 2023/2024

Indice

Elenco dei codici

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

1. Introduzione

Numerosi e ragguardevoli sono stati i traguardi raggiunti dagli strumenti di elaborazione automatica di testi scritti sviluppati ed affinati negli ultimi decenni. In particolare, la branca dell'intelligenza artificiale dell'elaborazione automatica del linguaggio naturale (*Natural Language Processing* o *NLP*) ha visto una crescita esponenziale negli ultimi anni, grazie all'impiego di tecniche di deep learning e all'incremento della potenza di calcolo a disposizione. Tuttavia, nonostante i progressi compiuti circa le capacità, la comprensione del testo scritto rimane un compito complesso per i sistemi automatici, che richiedono enormi quantitativi di dati annotati per poter apprendere modelli di linguaggio sufficientemente accurati. Si pensi che i dataset per l'addestramento di modelli di linguaggio come *GPT-3* si sono rapidamente espansi, culminando in dimensioni dell'ordine del trilione di parole [Bro+20].

D'altra parte, l'applicazione di queste tecniche di analisi automatica di testi scritti o parlati sui sogni hanno già trovato applicazioni in ambito psicologico e psichiatrico, applicando tecniche di NLP su piccoli corpus di testi di sogni [Alt+17], mentre la rappresentazione di testi sui sogni attraverso grafi si è rivelato un'utile strumento a supperto della diagnosi e predizione di disturbi come la schizofrenia o il disturbo bipolare [MFM+14; MCR17] .

In questa tesi si discuterà di come una struttura di grafi a più livelli possa essere utilizzata per rappresentare e analizzare piccoli dataset di testi provenienti da trascrizioni di sogni e come essa possa essere sfruttata per realizzare dei modelli di linguaggio minimali rappresentativi di un particolare sognatore, dimostrando come informazioni legate alla semantica delle parole possano essere estrapolate a partire da aspetti sintattici.

1.1 Motivazione

Sebbene gli strumenti di NLP siano stati ampiamente utilizzati per l'analisi sintattica e semantica di testi scritti, le motivazioni che spingono alla realizzazione di una struttura dati applicabile alla trasposizione di sogni in semplici modelli di linguaggio sono legate al tentativo di individuare i rapporti sintattici e semantici tra parole e contesti di parole in relazione alla specifica persona, ovvero allo spazio semantico di un sognatore.

L'estrapolazione di informazioni legate al significato delle parole a partire da aspetti sintattici è un principio fondamentale della semantica computazionale, noto come *ipotesi distribuzionale*, che si basa sul principio per cui il significato di una parola è determinato dal suo contesto di utilizzo, e che le parole che appaiono nello stesso contesto tendono ad avere significati simili.

Lo spazio semantico di un sognatore può essere rappresentato, quindi, attraverso una struttura basata su grafi in cui i nodi rappresentino le parole o i contesti di parole presenti nei sogni e gli archi siano ricavati dalle relazioni sintattiche tra di esse, come l'immediata vicinanza o la co-occorrenza.

Da questa necessità nasce l'idea di realizzare una struttura dati generica per la rappresentazione di una gerarchia di grafi a più livelli, dove ogni livello rappresenti una diversa astrazione del grafo iniziale, e i grafi ai livelli inferiori possano essere ottenuti dall'espansione ricorsiva dei nodi ai livelli superiori.

1.2 Obiettivi

L'obiettivo principale di questa tesi è, quindi, proporre una definizione formale della struttura dati astratta del *Grafo Muli-Livello* e delle operazioni che possono essere eseguite su di essa, nonché di valutarne complessità computazionale e spaziale.

Il secondo obiettivo è quello di analizzarne le possibili applicazioni, in particolare per la rappresentazione di spazi di parole e contesti in relazione ai sogni trascritti da un determinato sognatore.

1.3 Struttura della Tesi

La tesi è strutturata come segue:

- Nel Capitolo **??** verranno presentati i concetti di base relativi alla teoria dei grafi, con particolare attenzione agli aspetti legati al partizionamento e agli approcci multilivello esistenti per la risoluzione di problemi di partizionamento su grafi.
- Nel Capitolo **??** verranno illustrati gli algoritmi per l'individuazione di pattern strutturali in grafi utili per la costruzione di una gerarchia di grafi a più livelli.
- Nei Capitoli **??** verrà presentata e definita la struttura dati del Grafo Multi-Livello, le operazioni che possono essere eseguite su di essa e i relativi algoritmi
- Nei Capitoli **??** verranno discusse le possibili applicazioni del Grafo Multi-Livello, evidenziandone limiti e punti di forza. Particolare attenzione sarà rivolta all'ambito della trascrizione dei sogni, e verranno discussi i risultati preliminari ottenuti applicando la struttura dati a dataset di sogni di esempio.

2. Grafi e Approccio Multi-Livello

In questo capitolo sono presentati alcuni concetti introduttivi utili alla definzione e alla comprensione dei *Grafi Multi-livello*. Verrà esplorato il concetto fondamentale di grafo, una struttura matematica in grado di rappresentare relazioni tra elementi discreti, e verranno illustrati i fondamenti della teoria dei grafi [**gross2018graph**; Cor+09], la disciplina che si occupa dello studio di queste strutture, utile in svariati ambiti applicativi, come l'informatica, l'ingegneria, la biologia, la chimica ed altri. Maggiore attenzione sarà rivolta alle definizioni pertinenti al partizionamento e alla contrazione di grafi [**Sanders2012HighQG**], vicine alle caratteritiche salienti dei *Grafi Multi-livello*, evidenziando gli aspetti già trattati nella letteratura esistente e quelli che verranno approfonditi in questa tesi.

2.1 Cenni di Teoria dei Grafi

Un grafo è una struttura matematica costruita su un insieme di elementi in cui coppie di elementi possono essere in relazione tra loro. I grafi possono essere orientati o non orentati, a seconda che esista una direzione o un ordine tra le coppie di elementi che si trovano in relazione. In questa sezione ci concentreremo eclusivamente sui grafi diretti, in quanto più generali, visto che grafi non orientati possono sempre essere rappresentati come particolari grafi orientati, ed in quanto la struttura dei *Grafi Multi-livello* si basa su di essi.

2.1.1 Grafo Orientato

Definizione 2.1.1 (Grafo orientato)
*Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E), dove:*

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *è un di un insieme finito non vuoto di elementi detti **nodi** (o **vertici**).*
- $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\} \subseteq V \times V$ *è un insieme di coppie ordinate di nodi dette **archi** (o **spigoli**).*

Nelle rappresentazioni grafiche dei grafi orientati, i nodi sono solitamente rappresentati come cerchi o punti, mentre gli archi come frecce. Nella figura **??** è mostrato un esempio di grafo orientato con insieme di nodi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e insieme di archi $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_1)(v_3, v_4),$

$(v_4, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_5)\}$.
Si noti che sono ammessi **cappi**, ovvero archi che collegano un nodo a se stesso, ma nella normale nozione di grafo orientato non sono ammessi archi multipli tra due nodi.

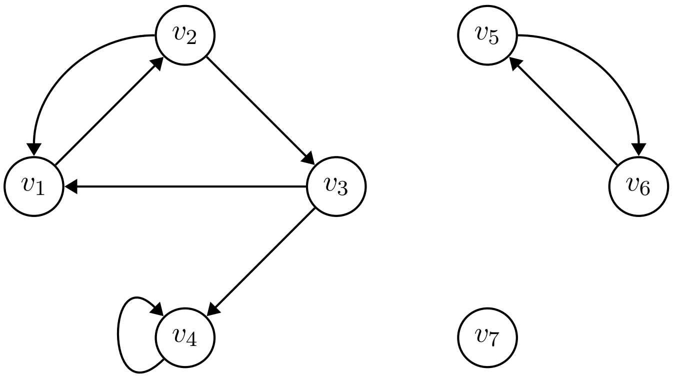

Figura 2.1: Un esempio di grafo orientato

Le cardintalità degli insiemi di nodi e archi di un grafo orientato sono rispettivamente $|V|= n$ e $|E|= m$, e vengono dette rispettivamente **ordine** e **dimensione** del grafo.

Essendo definiti su un insieme di elementi e di archi, possono essere definite relazioni di inclusione tra grafi. Un grafo $G' = (V', E')$ è un sottografo di $G = (V, E)$, e lo si indica con $G' \subseteq G$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
Inoltre, dato un certo insieme $V' \subseteq V$, si definisce il sottografo di G **indotto** da V', e lo si indica con la notazione $G[V']$, il grafo avente come insieme di nodi V' e come insieme di archi l'insieme di tutti gli archi in G che rappresentino relazioni tra tali nodi, ovvero il grafo $G' = (V', E')$ dove $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$.

Essendo il contenuto informativo rilevante di un grafo orientato contenuto nei suoi archi, e quindi nelle relazioni tra nodi, il concetto di eguaglianza tra grafi orientati non è banale. Una relazione tra grafi orientati, utile per valutare la loro equivalenza in termini di informazione espressa, è l'isomorfismo (dal greco *iso* = uguale e *morphè* = forma). Così come per tutte le struttre matematiche, intuitivamente, due grafi si dicono **isomorfi** quando per ogni parte della struttura di uno esiste una corrispondente parte della struttura dell'altro, e viceversa. Formalmente, due grafi orientati $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ si dicono isomorfi, e lo si indica con $G \cong H$ se esiste una biiezione $f : V \to W$ tale per cui $(u, v) \in E$ se e solo se $(f(u), f(v)) \in F$ per ogni $u, v \in V$.

2.1.2 Archi e nodi

A seguire alcune definizioni relative ai nodi e agli archi di un grafo orientato:

Sia $(u, v) \in E$ un arco di un grafo orientato $G = (V, E)$, allora:

- l'arco (u, v) **esce** dal nodo u ed entra nel nodo v. Ad esempio, gli archi uscenti dal nodo v_2 nel grafo della figura **??** sono (v_2, v_1) e (v_2, v_3), mentre l'unico arco entrante nel nodo v_5 è (v_6, v_5).

- l'arco (u, v) si dice **incidente** in entrambi i vertici u e v.
- il nodo v è detto **adiacente** al nodo u, in quanto esiste un arco $(u, v) \in E$.

Sia $v \in V$ un nodo di un grafo orientato $G = (V, E)$, allora:

- il **grado uscente** di un nodo v è il numero di archi che escono da v.
- il **grado entrante** di un nodo v è il numero di archi che entrano in v.
- il **grado** di un nodo v è la somma del grado uscente e del grado entrante di v.

2.1.3 Cammini

I cammini sono concetti fondamentali della teoria dei grafi e sono alla base di molti algoritmi e problemi noti relativi ai grafi.

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, siano $u, v \in V$ due nodi di G, allora un **cammino** da u a v in G è una sequenza ordinata di nodi $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ tale che $(v_i, v_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, k-1$ con $v_1 = u$ e $v_k = v$. La **lunghezza** k di un cammino è data dal numero di archi che lo compongono. Ad esempio, $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ è un cammino di lunghezza 3 nel grafo della figura **??**.

Se esiste un cammino p da u a v in G, allora si dice che il nodo v è **raggiungibile** da u attraverso p in G, e questo può essere indicato con la notazione $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$.

A seguire alcune definizioni relative ai cammini su un grafo orientato:

- Un cammino si dice **semplice** se non contiene nodi ripetuti, ad eventuale eccezione del primo e dell'ultimo nodo.
- Un cammino si dice **elementare** se non contiene archi ripetuti. Si noti che un cammino semplice è sempre elementare.
- Un cammino $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ di lunghezza $k \geq 1$ si dice **ciclo** se $v_1 = v_k$, ovvero se il suo nodo iniziale coincide con il suo nodo finale. Un **ciclo semplice** è un cammino in cui tutti i nodi sono distinti, ad eccezione del primo e dell'ultimo nodo, mentre un **ciclo elementare** (o **circuito**) è un ciclo in cui tutti gli archi sono distinti. Ad esempio, nel grafo in figura **??**, il cammino $\langle v_1, v_2, v_3, v_1 \rangle$ è un circuito semplice di lunghezza 3. Inoltre, un grafo diretto che non contiene cicli semplici è detto grafo diretto **aciciclico** (o **DAG**).
- Un cammino si dice **cammino hemiltoniano** in nel grafo G se attraversa ogni nodo di G esattamente una volta.
- Un cammino $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ si dice **ciclo hemiltoniano** in nel grafo G se esso è un ciclo e ogni nodo di G appare una ed una sola volta tra i nodi $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle$ e $v_k = v_0$.
- Un cammino si dice **cammino euleriano** nel grafo G se attraversa ogni arco di G esattamente una volta.
- Un cammino si dice **ciclo euleriano** nel grafo G se esso è un ciclo e ogni arco di G appare una ed una sola volta tra gli archi del ciclo.

2.1.4 Connessione tra nodi

Una caratteristica importante dei grafi orientati, basata sul concetto di raggiungibilità e adiacenza, è la connessione dei suoi nodi.

Un grafo orientato $G = (V, E)$ si dice **fortemente connesso** se per ogni coppia di nodi $u, v \in V$ esiste un cammino da u a v.
In un tale grafo, quindi, ogni nodo è mutualmente raggiungibile da ogni altro nodo. Le **componenti fortemente connesse** di un grafo sono le classi di equivalenza dei nodi secondo la relazione ëssere mutualmente raggiungibili". Ad esempio, nel grafo in figura **??**, le componenti fortemente connesse sono $\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7\}\}$. Si noti che l'insieme di nodi V di un grafo fortemente connesso è per definizione una unica componente connessa.

Un maggiore grado di connessione tra nodi è dato dalla presenza di singoli archi tra ogni coppia di nodi anzichè di cammini.
Un grafo orientato $G = (V, E)$ si dice **completo** se esiste un arco $(u, v) \in E$ per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in V$. In un tale grafo, quindi, ogni coppia di nodi distinti è adiaciente. Le **cricche** di un grafo sono le classi di equivalenza dei nodi secondo la relazione "essere mutualmente adiacienti". Ad esempio, nel grafo in figura **??**, le cricche sono $\{\{v_1, v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7\}\}$. Si noti che l'insieme di nodi V di un grafo completo è per definizione un'unica cricca.

2.2 Contrazione di Grafi

Nella teoria dei grafi la contrazione di un grafo è un'operazione che permette di ridurre la dimensione di un grafo senza alterarne la struttura fondamentale.
La contrazione di archi o di sottoinsiemi di nodi è un operazione fondamentale nella teoria dei grafi minori, dove si studiano le proprietà di un grafo in relazione alla presenza di sottostrutture minori ottenibili attraverso rimozione di archi e nodi o contrazioni. Queste tecniche di contrazione trovano applicazione in tutti quei casi in cui si vuole semplificare un grafo identificando i vertici che possono essere considerati equivalenti in relazione ad una certa propriet, e risultano essere utili in svariati problemi di ottimizzazione e partizionamento di grafi. Come vedremo in seguito, un grafo quoziente è proprio un grafo ottenuto dalla contrazione di un grafo secondo una relazione d'equivalenza definita sui suoi nodi.

2.2.1 Contrazione di archi

La contrazione di archi, spesso riferita come **contrazione di spigoli**, di un grafo orientato $G = (V, E)$ è un'operazione che consiste nella rimozione di un arco $e = (u, v) \in E$ e nella simultanea fusione dei nodi u e v in un unico nodo w. Quando ciò avviene, tutti gli archi che entrano in u e v diventano archi entranti in w, e, analogamente, tutti gli archi che escono da u e v diventano archi uscenti da w. Il risultato di una tale operazione è, quindi, un nuovo grafo ottenuto da G mediante la contrazione dell'arco e, che può essere indicato con G/e (da non confondersi con la sottrazione insiemistica $\backslash$). Si noti che, secondo la defnizione data, una tale operazione applicata ad un grafo orientato semplice può risultare in un grafo con archi multipli e cappi, a seconda della struttura del grafo iniziale, e per questo è spesso previsto nella defìnzione di contrazione di archi che vengano applicate le ulteriori operazioni necessarie ad ottenere come risultato un nuovo grafo semplice.

Definizione 2.2.1 (Contrazione di archi)
Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e sia $e = (u, v) \in E$ un arco di G con $u \neq v$, sia f una funzione su V che associa ogni nodo in $V \setminus \{u, v\}$ a se stesso, o ad un nuovo nodo w altrimenti.
La contrazione di e su G è un nuovo grafo $G' = (V', E')$ dove:

- $V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ *con* $w \notin V$
- $E' = \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in E \setminus \{e\}\}$

In figura **??** è mostrato un esempio di contrazione di un arco (u, v) in un nuovo nodo w in un grafo orientato, che include la rimozione di archi multipli e di cappi. Più in generale, una tale operazione può essere eeguita su un insieme di archi, contraendo ciacuno di essi in un qualsiasi ordine.

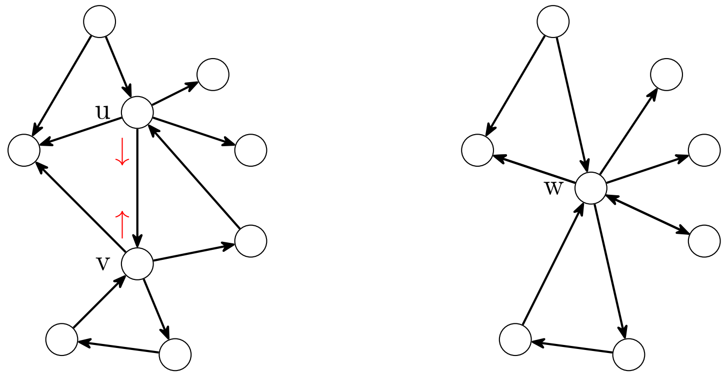

Figura 2.2: Un esempio di contrazione di un arco in un grafo orientato

2.2.2 Contrazione di sottografi

Un'operazione simile alla contrazione di archi, ma più generale, è la **contrazione di vertici** (o **identificazione di vertici**) di un grafo. Essa può essere vista come una generalizzazione della contrazione di archi, in quanto rimuove la restrizione che la coppia di nodi da contrarre sia adiacente, rendendo la contrazione per archi un suo caso particolare. Si immagini, pertanto, di avere il grafo a sinistra della figura **??** privato, però, dell'arco (u, v). La contrazione per vertici permetterebbe di contrarre la coppia non adiacente di nodi u e v, risultando, comunque, nel grafo a destra della figura **??**.

L' operazione di contrazione di vertici può essere generalizzata nella **contrazione di sottografi**, un'operazione che permette di contrarre un qualsiasi sottoinsieme di nodi di un grafo in un unico nodo. Dato un grafo $G = (E_G, V_G)$ ed un suo sottografo $H = (V_H, E_H)$, quindi, il grafo risultante dalla contrazione di H mantiene tutti gli archi incidenti su coppie di nodi in $E_G \setminus E_H$, sostituendo quegli archi incidenti tra nodi in $V_G \setminus V_H$ e V_H con nuovi archi incidenti sul nuovo nodo contratto.

Definizione 2.2.2 (Contrazione di sottografi)
Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme di nodi di G, sia $H = G[W] = (W, F)$ il sottografo indotto da W in G. Sia f una funzione su V che associa ogni nodo in $V \setminus W$ a se stesso, o ad un nuovo nodo w altrimenti. La contrazione di H su G è un nuovo grafo $G' = (V', E')$ dove:

- $V' = (V \setminus W) \cup \{w\}$ *con* $w \notin V$
- $E' = \{(f(u), f(v)) \mid (u, v) \in E \setminus F\}$

In figura **??** è mostrato un esempio di contrazione di un sottografo $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ del grafo orientato G in un nuovo nodo w, che include la rimozione di archi multipli e di cappi.

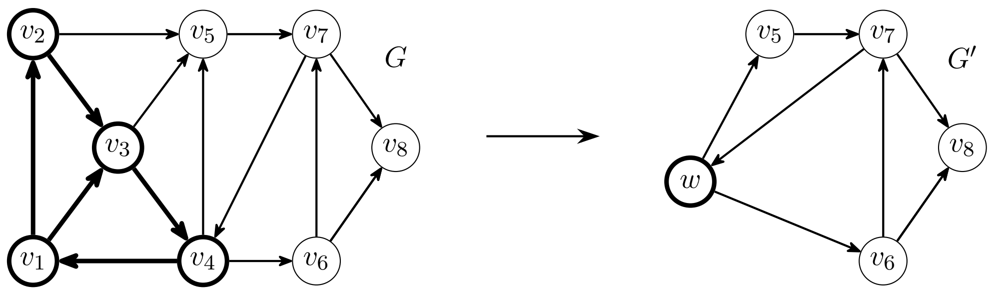

Figura 2.3: Un esempio di contrazione di un sottografo in un grafo orientato

Alla luce delle definizioni delle operazioni presentate, valgono le seguenti considerazioni:

- Il risultato della contrazione di una coppia di nodi adiacienti su un certo grafo G può produrre un grafo isomorfo a quello della contrazione di una coppia di nodi non adiacenti in un altro grafo G' non isomorfo a G. E' il caso precedentemente considerato applicato al grafo a sinistra in figura **??**.
- Il risultato della contrazione di un sottografo su un certo grafo G può produrre un grafo isomorfo a quello della contrazione di un sottografo in un altro grafo G' non isomorfo a G. Come esempio analogo, basta considerare un grafo J ottenuto a apartire dal grafo G a sinistra in figura **??** rimuovendo il nodo v_1 e i suoi archi incidenti. I grafi risultanti dalla contrazione di $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ in G e dalla contrazione di $J[\{v_2, v_3, v_4\}]$ in G' sono certamente isomorfi.

Questo significa che la contrazione di vertici e di sottografi non sono operazioni invertibili, in quanto rappresentano funzioni suriettive, e quindi non iniettive. Di fatti queste operazioni non mantengono alcuna informazione legata alla struttura originale del grafo su cui sono applicate. Come mostrato nei prossimi capitoli, tra gli obiettivi della definizione del grafo multi-livello, vi è proprio quello di mantenere le informazioni legate alla struttura dei grafi a cui sono applicate contrazioni, permettendo anche operazioni di decontrazione.

2.2.3 Grafi quoziente

Nella teoria dei grafi, un grafo quoziente è una visione astratta di un grafo partizionato in sottoinsiemi di nodi che rappresenta le relazioni tra tali sottoinsiemi. In un grafo quoziente G' ottenuto a partire da un grafo $G = (V, E)$, i nodi rappresentano blocchidi nodi di G che fanno parte dello stesso insieme per una qualche partizione di V. Per quanto riguarda gli archi di G', dati due blocchi di nodi B_1 e B_2 in G', un arco tra B_1 e B_2 sta ad indicare la presenza di almeno un arco tra un nodo di B_1 e un nodo di B_2 in G.

Se intuitivamente si potrebbe dire che il grafo quoziente permette di accorpare gruppi di nodi e archi tra loro per formare un nuovo grafo, una descrizione più formale utilizzerebbe il concetto di contrazione di sottografi, definendo il grafo quoziente come il risultato delle contrazioni dei sottografi indotti dalla data partizione di nodi.

Definizione 2.2.3 (Grafo Quoziente)
Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, sia $P \subseteq \mathcal{P}(V)$ una partizione di V, sia R la relazione d'equivalenza su V indotta dalla partizione P. Il grafo quoziente di G rispetto a P è il grafo $G' = (V', E')$ dove:

- *V' è l'insieme quoziente V/R, ovvero l'insieme delle classi di equivalenza di R su V.*
- *$E' = \{([u]_R, [v]_R) \mid (u, v) \in E\}$, dove $[u]_R$ e $[v]_R$ sono rispettivamente le classi di equivalenza di u e v rispetto a R.*

Come evidente dalla definzione, il nome del grafo quoziente è dovuto al fatto che la sua struttura è strettamente legata all'insieme quoziente di una qualche relazione di equivalenza definita sui nodi del grafo. Sebbene l'ingrediente fondamentale per la definizione di un grafo quoziente, assieme al grafo di partenza, sia la una partizione dei suoi nodi, una relazione di equivalenza sugli stessi sarebbe un parametro equivalente, in quanto ogni relazione di equivalenza induce una partizione degli elementi del suo dominio in classi di equivalenza.

Le relazioni di equivalenza, cosí come le partizioni, possono essere comparate tra loro secondo il concetto di raffinamento: una relazione di equivalenza R_1 si dice **più fine** (in inglese **finer**) di un'altra relazione di equivalenza R_2 se ogni classe di equivalenza di R_1 è contenuta in una classe di equivalenza di R_2. In tal caso si dice che R_2 è **più grezza** (in inglese **coarser**) di R_1, in quanto ogni classe di equivalenza di R_2 può essere ottenuta come l'unione di classi di equivalenza di R_1.

Per questo è interessante notare che tale concetto di finezza può essere facilmente esteso ai grafi quoziente:

- Ogni grafo può banalmente considerarsi come il grafo quoziente di se stesso rispetto alla relazione di equivalenza di ugualianza, in quanto ogni nodo di un grafo è uguale unicamente a se stesso. La relazione di equivalenza di ugualianza, infatti, è la relazione di equivalenza più fine, e per questo genera il grafo quoziente più fine possibile a partire da qualunque grafo.
- Analogamente, il grafo composto di un unico nodo e nessun arco risulta il grafo quoziente di ogni grafo rispetto alla relazione di equivalenza universale, che mette

in relazione qualsiasi coppia di elementi ed identifica tutti i nodi di qualunque grafo in un unico blocco. La relazione di equivalenza universale, infatti, è la relazione di equivalenza più grezza e, come è intuibile pensare, genera il grafo quoziente più grezzo possibile a partire da qualunque grafo.

Una particolare relazione di equivalenza che ben si presta alla definizione di un grafo quoziente è la relazione di mutua raggiungibilità tra nodi di un grafo, che ne definisce le componenti fortemente connesse. Il grafo quoziente di un grafo rispetto a tale relazione di equivalenza, infatti, prende il nome di **condensazione**, e si dimostra essere un grafo diretto aciclico.

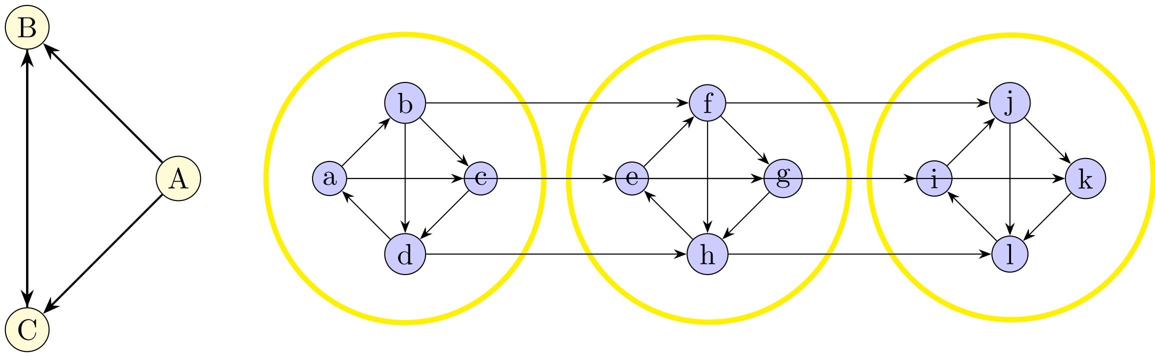

Figura 2.4: Un esempio di condensazione di un grafo orientato

Bibliografia

[Alt+17] Edgar Altszyler et al. «The interpretation of dream meaning: Resolving ambiguity using Latent Semantic Analysis in a small corpus of text». In: *Consciousness and Cognition* 56 (2017), pp. 178–187. ISSN: 1053-8100. DOI: https://doi.org/10.1016/j.concog.2017.09.004. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053810017301034.

[Bro+20] Tom B. Brown et al. «Language Models are Few-Shot Learners». In: *CoRR* abs/2005.14165 (2020). arXiv: 2005.14165. URL: https://arxiv.org/abs/2005.14165.

[Cor+09] Thomas H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms.* 3ª ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2009. ISBN: 978-0-262-03384-8.

[LK17] Marc Moreno Lopez e Jugal Kalita. «Deep Learning applied to NLP». In: *CoRR* abs/1703.03091 (2017). arXiv: 1703.03091. URL: http://arxiv.org/abs/1703.03091.

[MCR17] N.B. Mota, M. Copelli e S. Ribeiro. «Thought disorder measured as random speech structure classifies negative symptoms and schizophrenia diagnosis 6 months in advance». In: *npj Schizophrenia* 3 (2017), p. 18. DOI: 10.1038/s41537-017-0019-3. URL: https://doi.org/10.1038/s41537-017-0019-3.

[MFM+14] N Mota, R Furtado, P Maia et al. «Graph analysis of dream reports is especially informative about psychosis». In: *Scientific Reports* 4 (2014), p. 3691. DOI: 10.1038/srep03691. URL: https://doi.org/10.1038/srep03691.