信息学奥赛笔记21

哈夫曼编码，哈夫曼树，图

哈夫曼树

产生

在一篇英文的文章中，大多数情况下，整体内容都是由英文字母和标点符号组成的。那计算机在存储每一个字符的时候采用的存储方式都是一个$ASCII$码的形式，一个$ASCII$码需要使用`8`个二进制位，一个字节，在文章体量极大的情况下，这样存储还是十分的占用计算机内存，于是产生了对**内存压缩**的需求。

比如说：一篇文章仅仅出现`26`个英文字母，那么如果用$ASCII$码的形式存储，其实能存储`128`个字符，但是这篇文章仅仅只使用到了`26`个字符类型，所以咱们用不到那么多的**二进制位**。在刚刚的例子中，一共有`26`种不同的字符编码，那么`5位二进制`就能代表`32`种不同的字母：例如我们给`a`定义为`00000`，给`z`定义为`11010`。

那么，这样编码后，我们遇到一篇文章就可以使用这个新的编码来存储了，比如说，我们想要存储`abcd`这篇文章，如果使用$ASCII$码表来存储，需要使用`32`个二进制位，但是如果采用新的编码存储，只需要使用`20`个二进制位，刚刚的结果是`00000000100001000011`。

如果一篇文章仅仅有`[a, b, c, d, e]`五个字母的话，我们可以用`3`位二进制位来对这篇文章重新编码，`a`为`0`，`b`为`1`，`c`为`10`，`d`为`11`，`e`为`100`。

那如果有如下编码`001001101`，我们可以把这个编码翻译成`aacabcb`也就是`0 0 10 0 1 10 1`，也可以把这个编码翻译成`aaedab`，也就是`0 0 100 11 0 1`，那我们发现采用这种编码形式来压缩文章的话，可能会导致文章的歧义，同一个编码格式可能会导致翻译成不同的文章的情况，这种情况会导致我们压缩后丢失数据，是不利于结果的。

所以由此，我们不仅仅需要缩短每个编码的长度，还需要使得每一个编码是**唯一**的，不会被重复翻译。这样就产生的哈夫曼树。

哈夫曼树

为了计算出哈夫曼编码，我们需要先作一棵哈夫曼树

哈夫曼树的求解过程如下。

假设一篇文章有且仅有若干个字符，我们将这些字符的分布频率($\text{字符出现个数} \div \text{文章字符总数} \times 100\%$)先求出来，然后排个序。

① 从当前的频率中选出两个最小的频率，将他们求和后重新排放在整体的频率表中。

② 将刚刚的两个频率放进树的兄弟结点中建树。

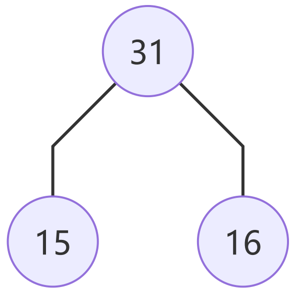
重复执行①②后直到频率表中没有元素结束。

例题：

一篇文章中一共有`100`个字符，有且仅有`[a，b，c，d，e]`五种字符，在这篇文章中这五种字符分别出现了`[15，20，16，32，17]`

首先，将这五个字母的频率排列后是`[15，16，17，20，32]`

选出其中两个最小的结果，将其求和后放回频率表。然后将这两个元素进行建树。



现在的频率表为`[17，20，31，32]`，我们再拿出其中两个最小的结果，此时有几种情况。

- 两个最小的频率都是原始频率
- 两个最小的频率其中一个是求和后频率
- 两个最小频率均是求和后频率

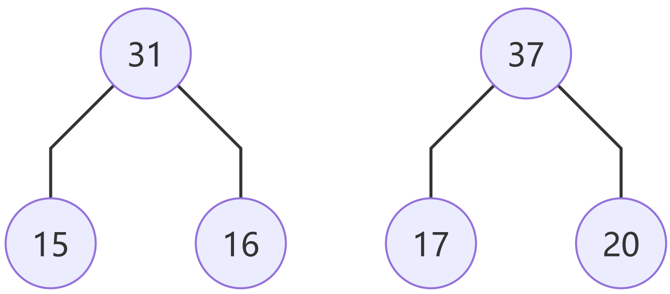
那么我们都需要把他们拿出，求和后放回频率列表中，但是在树里的操作情况是不同的。

对于第一种情况，我们需要在刚刚一层建的树的旁边再建一个兄弟树。

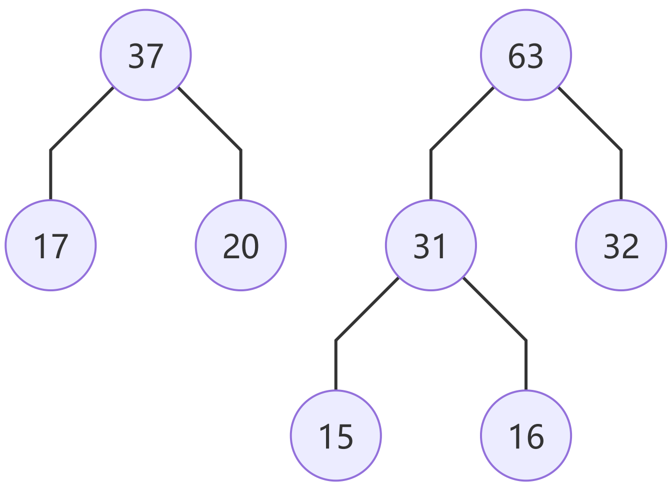
对于第二种情况，我们需要把当前的原始结点和求和后结点作为兄弟结点建树。

对于第三种情况，直接将两个结点作为兄弟结点相连求和。

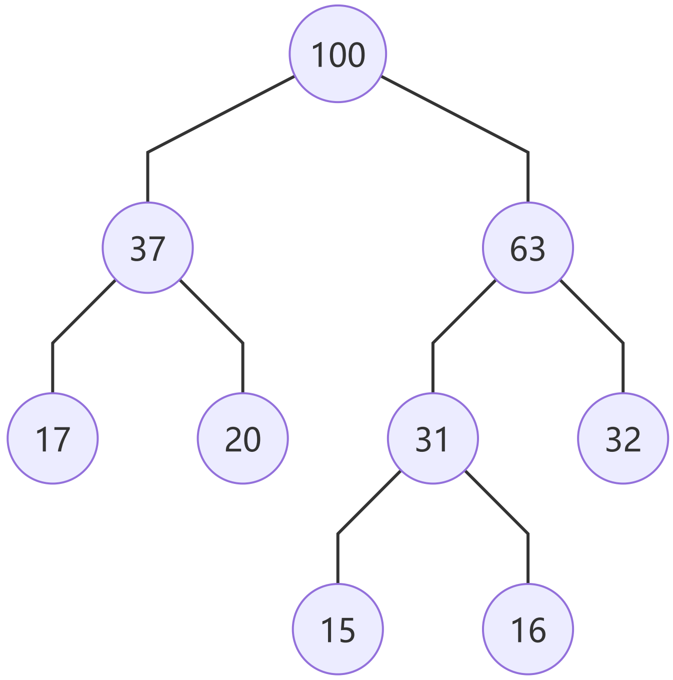
所以目前的两个最小值`[17，20]`符合情况`1`。所以这两个结点需要同层建树



现在的频率表为`[31，32，37]`，我们拿出其中两个最小的结果，`[31，32]符合`情况`2`，所以`[32]`需要与`[31]`这个结点同层建树。



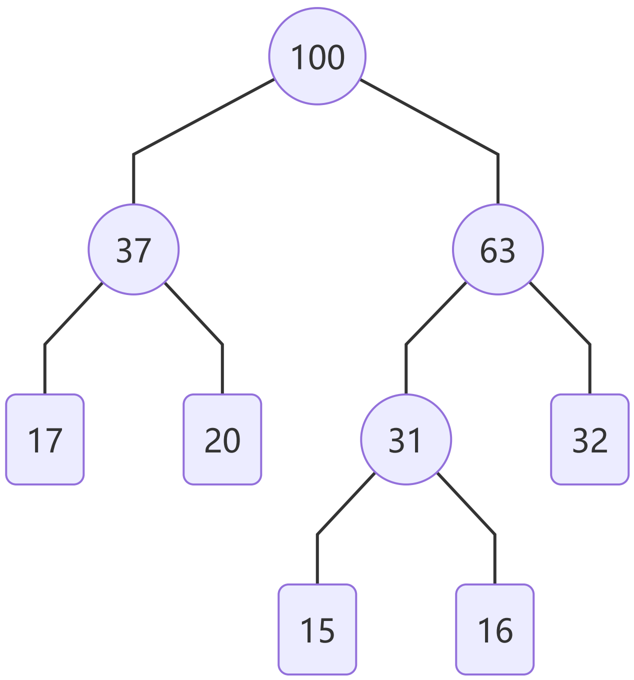
现在的频率表为`[37, 63]`，我们拿出其中两个最小的结果，`[37, 63]`符合情况`3`，所以需要直接将结点相连。



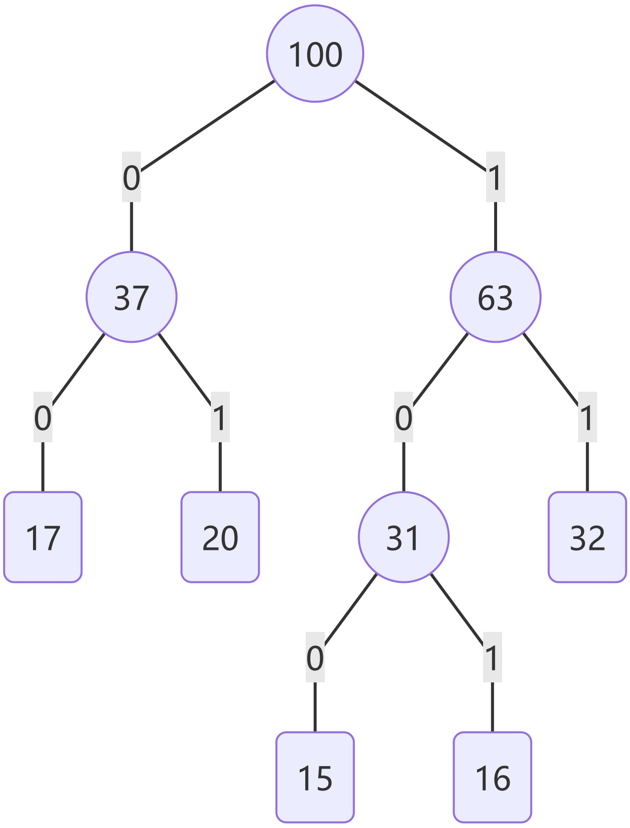
上图所示的结果就是一个哈夫曼树了。

哈夫曼编码

我们把哈夫曼树的原始频率，也就是对应着每个字符出现的频率的情况把他们单独标记出来



我们把这棵树从跟结点开始，左孩子为`0`，右孩子为`1`的规则，分别遍历到每一个结点，并标记编码



`[a, b, c, d, e]`所对应的编码为`[15, 20, 16, 32, 17]`

我们分别求出他们路径上对应的编码

字符	频率	编码	码长
a	15	100	3
b	20	01	2
c	16	101	3
d	32	11	2
e	17	00	2

利用这个编码规则所求出来的新的编码就可以避免**一码两意**的冲突情况发生了。

平均码长

平均码长的计算公式为$WPL = 总码长/字符个数$

总码长的计算公式为$PL = \Sigma 频率 * 码长$

Σ的意思就是大求和的意思，在这道题中，码长为$15*3+20*2+16*3+32*2+17*2=231$

把每个字符的**频率*码长**求出来之后再进行一次求和，就是大求和Σ。

所以平均码长$WPL=231/100=2.31$，平均每个字符只需要占用`2.31`个二进制位就可以存储整个文章，相比于$ASCII$码的存储来说，一共需要$100*8=800$个二进制位，我们减少了`569`个二进制位，整篇文章就被大大的压缩了。

冒泡排序

冒泡排序的规则十分简单，我们需要交换两个相邻的数，如果发现左边比右边大，也就是在一个数组中，我们发现$a[i] > a[i+1]$则进行一次交换，每一趟冒泡排序可以把这一趟最大的值交换到数组的最右端，所以我们可以利用这个原理快速的得出冒泡排序的计算结果。

下表就是一个冒泡排序的交换过程

冒泡排序的次数	a[0]	a[1]	a[2]	a[3]	a[4]	交换次数
初始数组的情况	3	5	4	2	1	0
第1趟冒泡排序	3	4	2	1	**5**	3
第2趟冒泡排序	3	2	1	**4**	**5**	2
第3趟冒泡排序	2	1	**3**	**4**	**5**	2
第4趟冒泡排序	1	**2**	**3**	**4**	**5**	1
第5趟冒泡排序	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	0

所以把数组`[3, 5, 4, 2, 1]`排序成`[1, 2, 3, 4, 5]`一共需要交换$3+2+2+1=8$次，第i趟可以把数组里第i大的数放置在正确的位置上。

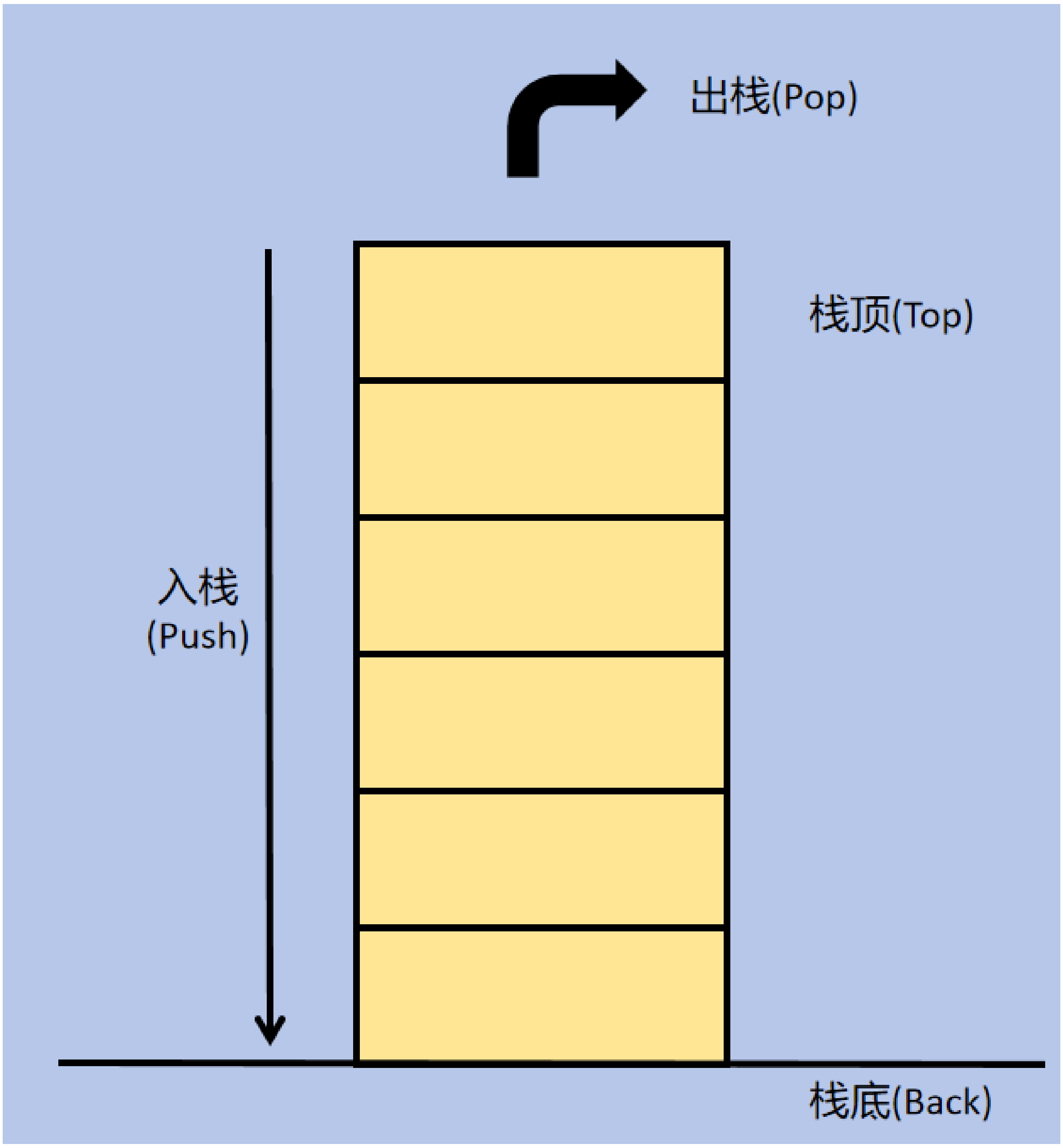
在上表中，被加粗的数，就表示在这一趟下，已经被放置在正确位置上的数的情况。

所以一个长度为n的数组，我们最多需要走n趟冒泡排序，每一趟冒泡排序最多会经历n次交换，也就是说最坏的情况下，冒泡排序会经历两层循环，一共有$n*n=n^2$次交换才能完成排序，我们也把冒泡排序的时间复杂度称为$O(n^2)$

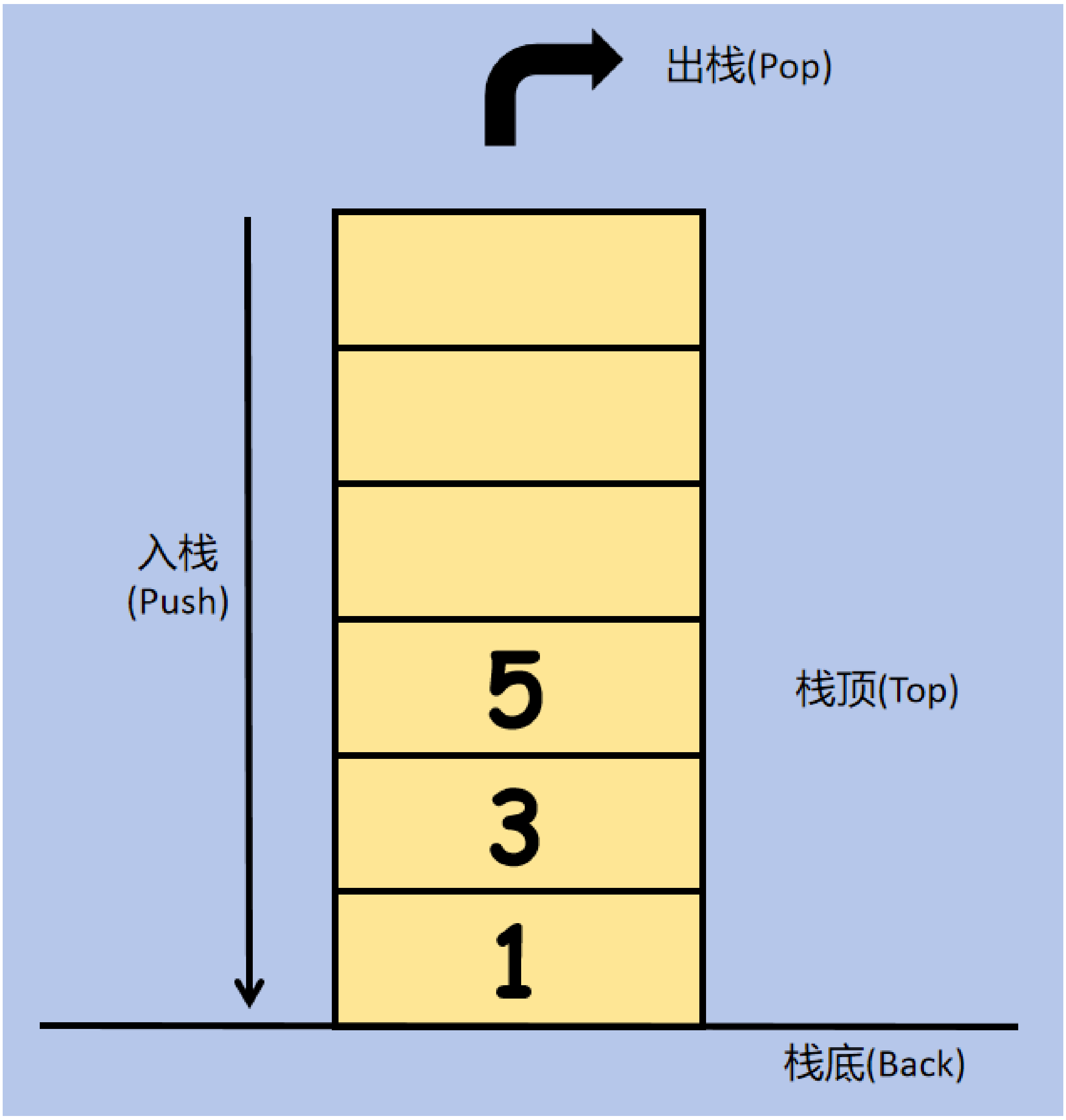
栈

栈是一种数据结构

它的根本原理是**先进后出(First-In-Last-Out, FILO)**，下图所示的就是一个栈的结构。



假如说有`3`个元素入栈，分别为`[1， 3， 5]`那么下图就是一个可能得情况。



那现在想要对这个栈出栈的话，就只能先将`5`出栈，但是也有可能在5入栈前，3已经出栈了，所以这个栈的出栈顺序可以是`[3，5，1]`也可以是`[3，1，5]`

那么，一个栈如果是以`[1，3，5]`的顺序入栈的话，一共有`5`种可能得出栈顺序，他们分别是

`[1，3，5]`：`[1入栈，1出栈，3入栈，3出栈，5入栈，5出栈]`；

`[1，5，3]`：`[1入栈，1出栈，3入栈，5入栈，5出栈，3出栈]`；

`[3，1，5]`：`[1入栈，3入栈，3出栈，1出栈，5入栈，5出栈]`；

`[3，5，1]`：`[1入栈，3入栈，3出栈，5入栈，5出栈，1出栈]`；

`[5，3，1]`：`[1入栈，3入栈，5入栈，5出栈，3出栈，1出栈]`；

但是`[5，1，3]`是一个不可能的出栈顺序，因为`5`如果要最先出栈的话，此时栈中一定存储了`[1，3]`这两个元素，`[1]`不可能比`[3]`优先出栈。

卡特兰数

如果有`n`个不同的元素入栈，一共有$\frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$种不同的出栈顺序，这个$\frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$也被称之为是卡特兰数。

在数学上C_m^n也被称之为是组合数，从`m`个元素中选取`n`个元素，一共有C_m^n种不同的选数方式

具体地，C_m^n的公式为:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$n!$叫做n的阶乘，也就是$n*(n-1)*(n-2)*...*1$

所以卡特兰数也写作。

$$\frac{C_{2n}^{n}}{n+1} = \frac{2n!}{n!*n!*(n+1)} = \frac{2n!}{n!(n+1)!}$$

所以在上个例子中，如果有`3`种不同的元素入栈，一共有$\frac{6!}{3!4!}$ = $\frac{720}{144} = 5$种不同的出栈顺序

那如果有`7`种不同的元素入栈，一共有$\frac{14!}{7!8!} = 1716$种不同的出栈顺序。