

Dificultades en el aprendizaje del cálculo¹

Fernando Hitt

Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN
Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal

Resumen

El objetivo del presente trabajo es el de mostrar algunos problemas de aprendizaje ligados tanto a profesores de matemáticas como a estudiantes en temas de cálculo. Parte de la problemática aquí expuesta se refiere a que los alumnos que ingresan por primera vez a un curso de cálculo, generalmente han tenido un acercamiento intuitivo del infinito, muy probablemente con aspectos de la “vida real” (p.e. que el universo es infinito), sin haber reflexionado sobre aspectos propios del infinito en matemáticas; ello dificulta en cierta medida su comprensión en un contexto matemático. En el aprendizaje del concepto de límite (fundamental para la construcción adecuada de los conceptos del cálculo) se requiere un conocimiento sobre los procesos infinitos. Además, si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegaran a una comprensión profunda del cálculo. Es difícil concebir que un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos del cálculo. ¿Los profesores no tienen esos problemas? Incluiremos en este trabajo resultados de investigaciones realizadas tanto con estudiantes como con profesores de matemáticas.

Introducción

La investigación en educación matemática ha mostrado que existen varios problemas para el aprendizaje del cálculo dificultando a una gran mayoría de estudiantes, e incluso a algunos profesores de enseñanza media, el acceso profundo a los conceptos propios del cálculo. La gran cantidad de tópicos que están íntimamente relacionados en cálculo, y el manejo pobre de algunos de sus subconceptos, obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios del cálculo, como son, el concepto de función, de límite, de continuidad, de derivada y de integral. Es decir, los problemas derivados de una concepción pobre del

¹ Una versión preliminar ha sido presentada en el undécimo Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Enero, 2003.

“precálculo²” derivará en un mal entendimiento de los procesos infinitos del cálculo y sus aplicaciones. Ello quiere decir, que además de los problemas para el entendimiento de los procesos infinitos, hay que añadir los problemas producto de un mal aprendizaje del precálculo.

Veamos por ejemplo sobre el concepto de función. El problema que tienen los estudiantes y algunos profesores de enseñanza media (ver Hitt, 1996, 1998) para desarrollar un entendimiento profundo del concepto de función, es que, generalmente tanto los estudiantes como algunos profesores se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, que produce una limitación en su comprensión. En lo general, la actividad de conectar las diferentes representaciones de un concepto³, no es considerada por muchos profesores como tarea fundamental en la construcción del conocimiento matemático y, en lo particular, las tareas de conversión son minimizadas por parte de los profesores en relación al concepto de función. Nuestro punto es que las tareas de conversión promoverían un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización.

La visualización matemática tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, en pizarrón o en computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego.

Desde ese punto de vista, los trabajos de Ben-Chaim et al. (1989), Eisenberg y Dreyfus (1990), Hitt (1998, 2002), Vinner (1989), Zimmermann y Cunningham (1990), entre otros, proporcionan elementos de reflexión sobre el papel que juega la visualización en la comprensión del cálculo.

La literatura suministra ejemplos de experimentación educativa donde se analizan problemas de aprendizaje que presentan muchos estudiantes e incluso algunos profesores de matemáticas con respecto a los temas de funciones, límites, continuidad, derivada e integral de funciones. Muchos de estos problemas son enmarcados en la falta de una habilidad ligada a la visualización matemática, como veremos en los siguientes apartados de este capítulo.

² En algunos países se ha caracterizado lo que se entiende por precálculo que tiene que ver fundamentalmente con el tratamiento de las funciones desde un punto de vista algebraico y gráfico y de las sucesiones y series (ver p.e. Viglino & Berger, 1998),

³ La articulación entre representaciones se logra a través de considerar tareas de conversión entre representaciones, p. e. en el caso de las funciones, la tarea de pasar de una representación gráfica de una función a su representación algebraica y viceversa.

Puesto que el objetivo de este documento es mostrar algunas de las dificultades que presentan tanto estudiantes como algunos profesores en el aprendizaje del cálculo, a continuación presentaremos algunos ejemplos relativos a esa problemática.

Problemas de aprendizaje sobre el concepto de función

En una experimentación con profesores de matemáticas de enseñanza media, se les solicitó a una muestra de 9 profesores que diseñaran una clase del tema que ellos quisieran, sin utilizar notas o libros. Uno de los 9 profesores que participaron en esa experimentación (ver Hitt, 1996), seleccionó el tema de función lineal. He aquí lo que presentó.

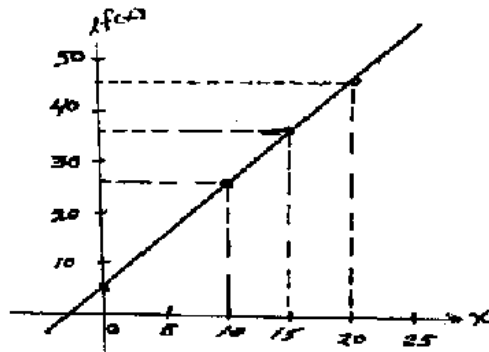
Propuesta del profesor (transcripción fiel)	Interpretación
<p>Que el alumno determine la representación algebraica del siguiente problema: “La edad del padre de Juan es el doble de la edad de esté dentro de cinco años”</p> <p>y = edad del padre de Juan: (Variable dependiente). x = edad de Juan: (Variable Independiente)</p> <p>Modelo algebraico. $y = 2x + 5$</p> <p>logrando que el alumno Indique esto; tan solo una de sus compañeros enuncio dicho problema. con lo que ellos mismos determinaron que la edad del Padre estaba en función de la edad del Hijo.</p> <p>Estableciendo la Representación Algebraica del Problema; podremos asignarle a Juan una Serie de edades de la siguiente forma: Si Juan no ha nacido ¿cual es la edad de su padre?</p> $y = f(x)$ $f(x) = 2x + 5$ $f(0) = 2(0) + 5 = 5 \text{ años};$ <p>Así que para cuando Juan tiene, 10, 15 y 20 años ¿cual será la edad del Padre? para cuando Juan tiene 10 años, la edad de su padre es de 25 Años.</p> $f(10) = 2(10) + 5 = 20 + 5 = 25$ <p>- para cuando Juan tiene 15 años la edad de su padre será de 35 años</p> $f(15) = 2(15) + 5 = 30 + 5 = 35$ <p>- para cuando Juan cumpla 20 años mayor de edad la edad de su padre Será de: 45 años</p> <p>Por medio del ejemplo anterior lo podremos interpretar gráficamente por medio de parejas ordenadas $(x, f(x))$ donde:</p>	<p>El enunciado tal como se presenta parece más cercano a una interpretación algebraica como: $y = 2(x + 5)$, diferente de la proporcionada por el profesor. Pero el punto más importante es que en realidad el profesor está planteando una ecuación y no una función. ¿Tendrá claro el profesor la diferencia entre ecuación y función?</p> <p>Por la manera como el profesor presenta su ejemplo, pareciera un ejemplo que efectivamente él desarrolló en el aula.</p> <p>¿Si Juan tiene un año, el padre tendrá 6 años! El profesor ha proporcionado un ejemplo irreal carente de lógica.</p>

x = edad de Juan.

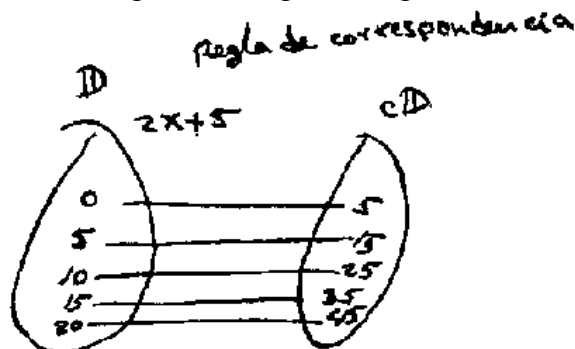
$f(x)$ = edad del Padre.

Obteniendo los siguientes puntos y, denotándolos por:
 $F(x) = \{(0, 5) (10, 25) (15, 35) (20, 45)\}$

Elaborando una gráfica en el sistema cartesiano. de la forma:



Obteniendo el siguiente Diagrama Sagital:



De tal forma que la gráfica obtenida corresponde a una gráfica de una línea Recta a la cual Se le llamara “función lineal”

De la misma forma observará que para cada valor de x le corresponde al menos una de $f(x)$, con lo que se le puede inducir que corresponde a una función Inyectiva; los valores del D (Dominio) van de uno menor a uno mayor de tal forma que decimos que la función es Creciente, y como para cada valor que el asignemos a x , existe un valor para $f(x)$, con lo cual la definimos como Continua para $\forall x \exists f(x)$,

- continua.

Podremos dejar que el alumno encuentre y grafique

- la analogía de grados Centígrados a grados Farenhai.

Graficándola y enunciando una serie de Características de esté ejemplo.

-“Un movil desarrolla una velocidad de cinco veces su distancia recorrida, menos cuatro metros en un tiempo determinado”. etcétera.

El profesor pasa de caso discreto al continuo sin explicación alguna.

¿Qué significado le podemos dar a las edades negativas?

El profesor regresa a una representación discreta sin mayor explicación.

El profesor se contradice con la definición de función: “...para cada elemento del Dominio le corresponde uno y solo un elemento del Codominio...”

Menciona que una función es creciente porque “los valores de D (Dominio) van de uno menor a uno mayor”. O sea que para él función creciente está determinada por los valores del dominio sin tomar en cuenta sus imágenes.

Su definición de continuidad la considera equivalente a que la función esté definida en cada punto.

Ambigüedad en el enunciado.

Como podemos apreciar, el docente quiere presentar un ejemplo ligado “a la vida real” para introducir el concepto de función lineal. El acercamiento seguido por el profesor, seguramente producirá una concepción limitada y errónea en el alumno. Proponer ejemplos ligados “a la vida real” requiere de mucho cuidado por parte del docente. Se recomienda que se utilicen ejemplos bien desarrollados (ver p.e. Hitt, 2002) que no deriven en incoherencias como las que el profesor desarrolló. Las aplicaciones de la matemática son importantes como para proponer ejemplos inconexos que mal formarán a los estudiantes, corriendo el peligro de que en lugar de llevarlos a un nivel más profundo sobre los conceptos matemáticos en juego, los volvamos insensibles a incoherencias y contradicciones lógicas. El profesor parece no percatarse de las contradicciones lógicas en las que él mismo se encontraba. Tanto desde el punto de vista de la matemática como del sentido común (¡un padre que a la edad de seis años tenga un hijo de uno!). En resumen, podemos señalar que,

Producto de la enseñanza, tendremos alumnos que frente a una contradicción, no generarán un conflicto cognitivo (reconocimiento de que algo anda mal) y su desempeño será bajo en la resolución de problemas.

Existen otros problemas que se generan de “manera natural” por la manera como se enseña, pero estos son de naturaleza diferente.

Un ejemplo de lo señalado en el párrafo anterior, se presenta cuando estamos enseñando a graficar. La graficación de funciones, a menudo se inicia con alguna expresión algebraica, se sustituyen algunos valores para formar una tabla, y enseguida se le solicita al estudiante unir esos puntos por medio de una curva. Ello producirá en el estudiante (al igual que en algunos profesores) dos tipos de conflictos:

- ***Falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones. Este conflicto se puede detectar de inmediato al solicitar la tarea de dada una gráfica de una función, construir su correspondiente expresión algebraica.***
- ***Una concepción de función como función continua. Este conflicto se puede detectar solicitando la construcción de funciones diferentes que cumplan con ciertas características. Por ejemplo, con el ejercicio: Construir tres funciones diferentes f_1, f_2, f_3 de los reales en los reales, tal que $|f_1(x)|=|f_2(x)|=|f_3(x)|=2$, para toda x real.***

Estos conflictos aparecen como conflictos naturales al ir profundizando sobre el concepto de función. El problema radica que el profesor si no es consciente de ello, no podrá ayudar al estudiante y esos conflictos cognitivos se radicalizarán y se convertirán en obstáculos para el aprendizaje de las funciones y por ende del cálculo.

De hecho, en el primer ejemplo, el profesor muestra el segundo obstáculo arriba mencionado al conceptualizar la función como una noción de función-continuidad como un solo ente matemático. Tiene una idea intuitiva de la continuidad de funciones, mezclada con alguna notación que probablemente aprendió años atrás con la definición formal de continuidad. He aquí un par de ejemplos de otro docente de enseñanza media que presenta los obstáculos antes señalados relativos al concepto de función (ver Figura 1).

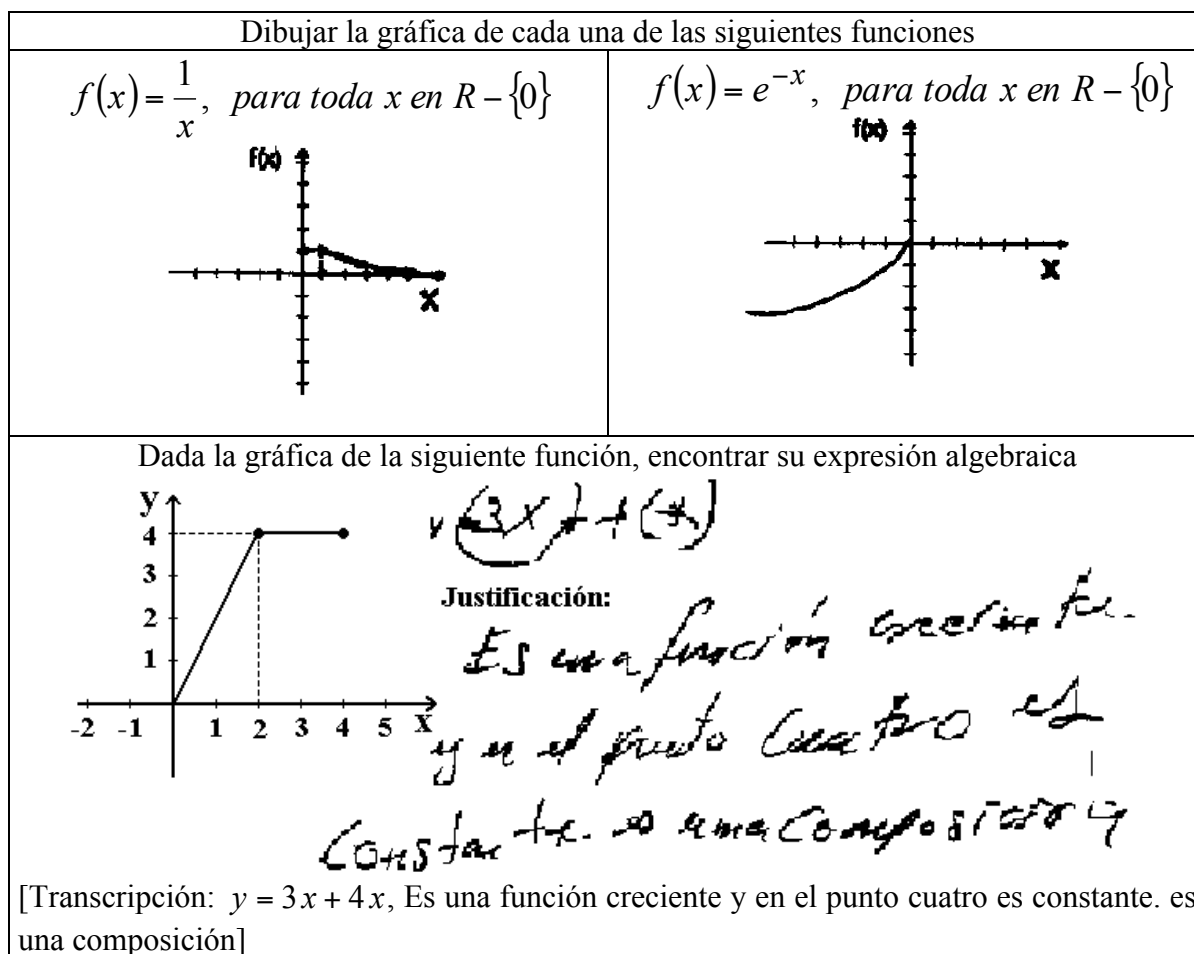


Figura 1

En realidad el problema de tener una concepción de las funciones como noción función-continuidad es un problema mayor. El ejemplo proporcionado puede ser un extremo; en realidad, lo que queremos señalar es que esa idea intuitiva de función se presenta en muchos profesores de enseñanza media, produciendo un bajo rendimiento en la resolución de problemas. Por ejemplo, Hitt (1998) diseñó 14 cuestionarios para detectar las diferentes concepciones que tienen algunos profesores sobre el concepto de función. Un ejemplo que proporciona información al respecto es que solo 6 profesores de enseñanza media entre 30 resolvió completamente el siguiente problema (ver Hitt, 1998, p. 251):

Construir tres funciones diferentes f_1, f_2, f_3 de los reales en los reales, tal que $|f_1(x)|=|f_2(x)|=|f_3(x)|=2$, para cada x real.

La mayoría de los profesores al pensar en funciones continuas, proporcionaba la respuesta: $f_1(x)=2$; $f_2(x)=-2$; y al no encontrar una tercera función continua las respuestas de los profesores eran del estilo: $f_3(x)=\frac{4}{2}$ o $f_3(x)=\sqrt{4}$. Este problema, por un lado, nos proporciona información sobre los alumnos y profesores que tienen una propensión a pensar en funciones continuas; Por otro lado, la idea sobre la continuidad es tan espontánea que obstaculiza el pensar en consideraciones analíticas (para mayor amplitud ver Hitt, 1997, 1998).

Otra dificultad que se presenta en el estudio de las funciones es la relacionada con la lectura de gráficas. A continuación presentamos algunos trabajos de investigación que muestran la complejidad de la tarea.

Lectura de gráficas, software de matemáticas y problemas cognitivos

La utilización de la tecnología y la investigación relacionada a su implementación en el aula, ha mostrado la existencia de problemas relativos a la lectura de gráficas. Al inicio de la década de los ochenta, se pensaba que el problema de la lectura de gráficas al utilizar algún software, se solucionaba poniendo en guardia al estudiante de que era importante graficar las funciones con diferentes ventanas para observar con mayor detenimiento el comportamiento de la función. Por ello, en esa época, se recomendaba la importancia del manejo del zoom para analizar con mayor precisión el comportamiento de las funciones (ver Demana y Waits, 1988; Santillán y Turriza, 1994). El ejemplo siguiente muestra la problemática considerada por los autores antes citados.

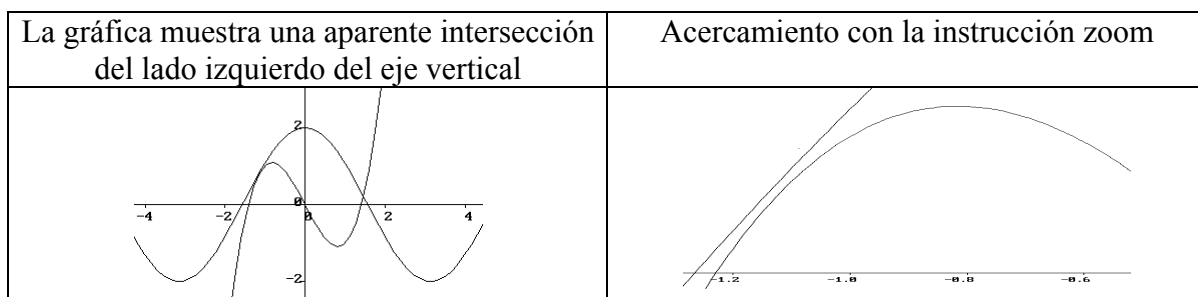


Figura 2

Posteriormente, investigadores preocupados por el uso de la tecnología en el aula, muestran que la idea anterior es mucho más compleja de lo que parece. Por ejemplo, Guin and Trouche (1998) proporcionan en su estudio el siguiente episodio, ligado al problema de resolver la ecuación $tg(x) = x$, en \mathbb{R} . Los autores dicen: “En una clase de 32 estudiantes (edad 17 años) solamente cuatro estudiantes llegaron a la conclusión de la existencia de una infinidad de soluciones...” (Figura 3). Referente a la ecuación $\frac{\sin(x)}{x} = 0$, en $[0, 600]$, (Figura 4), señalaron lo siguiente: “Solamente 10% de 40 estudiantes de terminal y de ciencias a nivel universitario (18 y 19 años respectivamente) respondieron ‘es cero cada vez que el seno de x se hace cero’”.

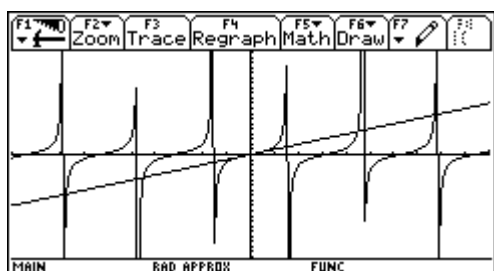


Figura 3

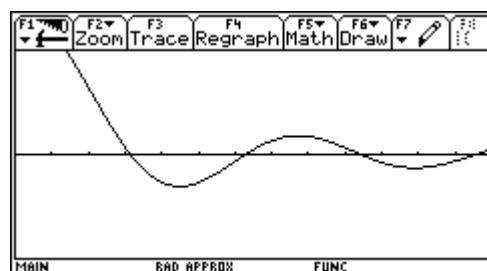


Figura 4

Hemos querido mostrar las complicaciones en el aprendizaje del concepto de función, ya que una concepción inadecuada de este concepto, redundará en un bajo rendimiento en el aprendizaje del cálculo.

Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite

Iniciaremos este apartado con otro ejemplo del mismo estudio realizado con la muestra de los 9 profesores acerca de la redacción de una lección sin utilizar notas o libros de texto. En este caso, un profesor seleccionó el tema de límites.

El profesor escribió 14 páginas acerca del tema de límites. Inició su documento proporcionando ejemplos intuitivos de la idea de límite, por ejemplo, él escribió: “Para entender límites al infinito y límites infinitos, se tiene que hacer desde un punto de vista intuitivo, utilizando un acercamiento numérico y una interpretación gráfica; es importante también dominar el conocimiento algebraico...”. Continuó de esta manera proporcionando ejemplos de la vida real, por ejemplo, mencionó: “límite de velocidad, límite de elasticidad de un material o límite de una playa donde puedas nadar con seguridad”. Añadió que una

deducción de lo que ha dicho es : “el límite no puede sobrepasar una marca..., el valor límite no es alcanzado, puedes estar tan cerca como quieras pero no lo alcanza”

Nuevamente como en los casos anteriores, esta idea de ejemplificar con situaciones de “la vida real”, va a promover en los estudiantes una concepción errónea que posteriormente se convertirá en obstáculo.

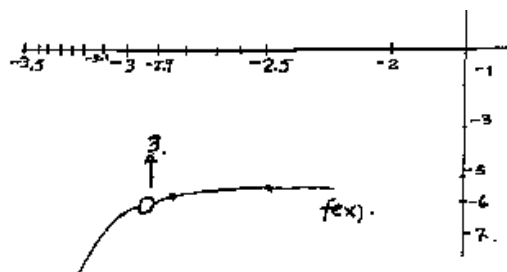
El profesor introduce diferentes situaciones para el cálculo de límites. Presentamos uno de sus ejemplos : “...para entender la noción de límite de una función es necesario trabajar con funciones racionales para ver diferentes casos como el resultado que podría dar el límite de una función. a) Un número entero, b) un número racional, c) $0/c$, con c un entero, entonces el resultado es cero, d) $c/0$, c un entero, en ese caso tenemos una indeterminación, ∞ . También, el límite de una función puede dar indeterminaciones como

$0/0=\infty$... Por ejemplo $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ cuando “ x ” se aproxima a -3 . Para encontrar el límite

por medio de una aproximación numérica necesitamos tabular los siguientes datos

x	-2.5	-2.9	-2.99	-2.999	-3.001	-3.01	-3.1	-3.5
$f(x)$	-5.5	-5.9	-5.99	-5.999	-6.001	-6.01	-6.1	-6.5

En la representación gráfica se puede visualizar que el hueco que se representó con O indica que en el valor -3 la función es indeterminada es decir, se hace discontinua en ese punto la función, lo que indica que la función tiene un límite, es decir un valor al cual la función se puede acercar tanto como sea posible pero sin que se haya indeterminado, este límite se encuentra tanto a la derecha como a la izquierda del hueco de la indeterminación”.



En primer lugar, queremos señalar que la gráfica que el profesor dibujó no corresponde a la función $f(x) = x - 3$, con $x \neq -3$. ¿Es importante en el aula realizar mejores dibujos cuando queremos ejemplificar con una gráfica? Pareciera que para el profesor la idea “intuitiva” es lo importante y no la precisión de la gráfica. Pero, ¿la idea “intuitiva” está bien desarrollada? En realidad, el profesor tiene una confusión, primeramente utiliza al

inicio de sus explicaciones la idea intuitiva del infinito potencial⁴ al presentar su tabla, mostrando la idea intuitiva de “acercarse más y más”. En seguida, con respecto al límite, el profesor se refiere a un acercamiento por la izquierda y por la derecha concluyendo que el límite deber ser -6 , añadiendo: “***...este límite se encuentra tanto a la derecha como a la izquierda del hueco de la indeterminación***”!!! El profesor tiene una idea intuitiva del concepto de límite algo extraña, ¿qué significa que el límite se encuentre a la izquierda y a la derecha del hueco? **El profesor muestra una seria deficiencia con respecto al concepto de límite.**

Además de esa confusión que trasmite seguramente a sus estudiantes, este profesor continúa con otra idea que no es conveniente, expresa lo siguiente:

“Las técnicas algebraicas para evaluar límites son las siguientes: a) Cuando el resultado es un entero $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 + 1$ debes sustituir directamente el valor de la variable, entonces

$\lim_{x \rightarrow 1} 2(1)^3 + 1 = 3$, b) cuando el resultado es un número racional $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{x-6}$ el mismo

proceso como en a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(0)+2}{0-6} = -\frac{1}{3}$. También puedes tener un resultado con (c), (d) y

(e) utilizando un método algebraico para remover la indeterminación como $\frac{0}{0}$,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ Si tu substituyes directamente el valor de la variable

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1)^2 + 2(1) - 3}{(1)^2 - 1} = \frac{0}{0}$. Para remover la indeterminación antes del proceso al límite debes

factorizar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1}$, substituyendo el valor de la

variable, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1)+3}{(1)+1} = \frac{4}{2} = 2$. Esta introducción es útil en el estudio de la noción de continuidad de una función.”

⁴ El uso sistemático del concepto de infinito potencial se puede encontrar dentro de los diferentes trabajos (filosóficos y matemáticos) producidos por los griegos dentro de la denominada “época de oro” (siglos VI al II a. C.). La idea de infinito potencial surgió de manera natural entre los filósofos de esa época, **permitiendo designar la posibilidad de ir más lejos**. El problema del infinito continuó hasta Kant (1790, § 26) en su “Crítica del Juicio”, donde surge otra idea acerca del infinito (ahora considerado como ‘infinito actual’): “...La mente atiende ahora a la voz de la razón, la cual, para todas las magnitudes dadas... requiere totalidad... sin excluir siquiera de este requisito al infinito, sino que, antes bien, **hace inevitable que nosotros consideremos este infinito... como dado en su totalidad**”.

Esto nos muestra que una parte de las dificultades que los estudiantes tendrán en el aprendizaje del concepto de límite, son debidas por la manera como el profesor introduce el tema. En realidad, **el profesor no introduce en ningún momento un proceso al infinito. Todo lo reduce a una sustitución. Esta idea prevalece a lo largo de los estudios de los estudiantes y son pocos los que logran superar el obstáculo.**

Por tal motivo, el estudiante tendrá “encima todas las dificultades del mundo”. Unas que son naturales por la complejidad de la noción de límite, que involucra el uso coherente de los procesos infinitos, y la otra por las ideas erróneas que recibe por parte del profesor.

Pasando ahora a los problemas de aprendizaje de los estudiantes, queremos ejemplificar con una parte de un diálogo con un estudiante relativo a una experimentación sobre problemas de aprendizaje del concepto de límite (ver Hitt y Lara, 1998). Al entrevistar a un estudiante de ingeniería, con respecto a la pregunta:

El límite de una función tiene que ver con el comportamiento de la función en: a) un punto, b) cerca del punto.

Su respuesta fue:

Estudiante : *“Bueno, aquí en esta pregunta el límite de una función tiene que ver con... Mi respuesta es en un punto.”*

Estudiante : *“Esto es porque si tenemos una función $f(x) = x^2 - 1$ cuando x se aproxima a..., No se, digamos que x sea 2, tenemos que el límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2)^2 - 1 = 3$.”*

Podemos ver que el estudiante sigue un patrón muy similar al ejemplo del profesor anterior. La situación se complica en el momento que solicitamos a nuestros estudiantes resolver un ejercicio no rutinario, en donde lo más seguro es que el estudiante tenga la necesidad de transitar entre diferentes representaciones para poder resolver el problema. Para un análisis mucho más detallado de las dificultades en el aprendizaje del límite, les recomendamos remitirse a Páez (2001).

Dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada

Por lo que hemos visto en los apartados anteriores parece ser que uno de los problemas es la falta de un acercamiento visual para el entendimiento de los conceptos del cálculo. Desde ese punto de vista, Eisenberg y Dreyfus (1990) mencionan que promover en nuestros estudiantes una tendencia a visualizar situaciones matemáticas no es una tarea simple, observan: *“la mayoría de los estudiantes se resisten a aceptar los beneficios de la*

visualización de los conceptos matemáticos” (p. 25). También señalan: “...pensar visualmente demanda procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica”, además: “presentaciones no-visuales son utilizadas para comunicar ideas matemáticas. Esta tendencia se fundamenta en la creencia de matemáticos, maestros, y estudiantes que las matemáticas no son visuales” (p. 30). En este contexto, los autores afirman: “De hecho, con respecto al problema nueve [ver en el siguiente párrafo] un profesor típico de cálculo (quien resultó que había escrito un libro de cálculo) escribió:

$f'(-a) = (f(-a))' = (-f'(a)) = -f'(a).$ ” Como respuesta al problema:

“Dado que f es una función diferenciable tal que cumple que $f(-x) = -f(x)$. Entonces, para cualquier elemento a dado:

A) $f'(-a) = -f'(-a)$

B) $f'(-a) = f'(a)$

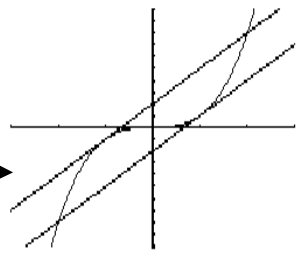
C) $f'(-a) = -f'(a)$

D) Ninguna de las anteriores”

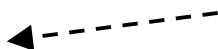
¿Cómo podríamos saber si la respuesta proporcionada por el profesor es correcta?

¿Sería importante pensar en una representación geométrica de la situación?

Resulta que el profesor está equivocado. Mostremos primeramente la situación bajo un punto de vista geométrico, por ejemplo, pongamos una función cualquiera que cumpla con la propiedad estipulada, tal como $f(x) = x^3$, tomando dos números simétricos en el dominio de la función a y $-a$, y pensando en las tangentes sobre la curva en los correspondientes puntos $(a, f(a))$ y $(-a, f(-a))$, la situación podría haberle dado al profesor un “signo de advertencia” (ver Figura 5).

Visualización y resolución del problema		
Sistema algebraico de representaciones	Idea intuitiva	Sistema geométrico de representaciones
<p>“Dado que f es una función diferenciable tal que cumple que $f(-x) = -f(x)$. Entonces, para cualquier elemento a dado:</p> <p>A) $f'(-a) = -f'(-a)$ B) $f'(-a) = f'(a)$ C) $f'(-a) = -f'(a)$ D) Ninguna de las anteriores”</p> <p>Argumentos:</p> <p>$f'(-a) = (f(-a))' = (-f'(a)) = -f'(a)$</p>	<p>Construcción de una gráfica de una función y sus tangentes en dos puntos simétricos a y $-a$</p>	

"SIGNO DE



<p>Contra-ejemplo:</p> <p>$f(x) = x^3$. Entonces, $f'(-1) = f'(1)$.</p> <p>Nuevos argumentos:</p> $f'(-a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right]$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+(-h)) - f(a)}{(-h)} = f'(a)$	<p>ADVERTENCIA"</p>
---	---------------------

Figura 5

Hemos querido ejemplificar que la construcción realizada no es un ejemplo, es mucho más que eso, es un contra-ejemplo, de hecho una situación como tal lo que describe es la *visualización matemática de un problema*. Con relación a esta actividad tenemos el trabajo de Zimmermann (1990, p. 136) quien afirma:

Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso del cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de enfatizar un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como faltante en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y ... en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido.

El profesor mencionado por Eisenberg y Dreyfus tiene plena confianza en su proceso algebraico. Probablemente, este profesor en su enseñanza cotidiana hace un especial énfasis en los procesos algebraicos, descuidando seguramente los geométricos e intuitivos. De hecho, pareciera que en la década de los ochenta, la enseñanza de las matemáticas con énfasis en los procesos algebraicos estaba muy de moda. Veamos otro ejemplo de otra investigación, esta vez realizada en una universidad de Estados Unidos con estudiantes de primer año universitario.

El estudio lo realizaron los profesores Selden, Mason y Selden (1989, 1994), con estudiantes de ingeniería quienes habían aprobado un curso de cálculo. Su estudio tiene que ver con problemas no rutinarios. Para situar la problemática, queremos introducir aquí lo que entendemos por ejercicio rutinario, ello nos dará una mejor comprensión de lo expresado en ese estudio. Desde nuestro punto de vista: ***Un ejercicio rutinario es aquél que al leer el enunciado viene a nuestra mente un proceso algebraico a seguir.*** Por ende, una definición que hemos adoptado en este contexto es: ***Un ejercicio no rutinario es aquél***

que al leer el enunciado no viene a nuestra mente un proceso algebraico a seguir, es necesario re-interpretarlo y seguramente las diferentes representaciones que evoquemos al leer el enunciado jugarán un papel fundamental para resolver el ejercicio.

El estudio de Selden et al., de 1989, obtuvo los siguientes resultados a un cuestionario de cinco problemas no rutinarios: “*ni uno solo de los estudiantes de ingeniería [que aprobaron el curso de cálculo en la Universidad de Tennessee], pudo resolver completamente alguno de los problemas no rutinarios.*” Uno de esos problemas es el siguiente:

¿La expresión $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ tiene raíces reales entre -1 y 0 ?
¿Porqué sí o porqué no?

La ecuación $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ no es una expresión algebraica que pueda evocar algún procedimiento de entrada. Esto es precisamente el aspecto no rutinario, en la ausencia de un procedimiento conocido, nos obliga a la búsqueda de diferentes representaciones y métodos para resolver el problema.

Un procedimiento podría ser el de considerar la función $f(x) = x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2$, evaluar la función en $f(-1) = 1 > 0$ y calcular su derivada para $-1 < x < 0$. Si la derivada fuera positiva, nos indicaría que la función es estrictamente creciente en ese intervalo y por ende no tendría raíz para $-1 < x < 0$. Y éste es el caso (ver Figura 6).

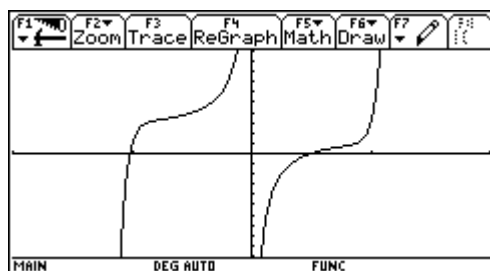


Figura 6

Al analizar cada uno de los problemas propuestos por Selden et al. (1989, 1994), parece mostrar que los estudiantes no pudieron resolverlos por no haber desarrollado una habilidad ligada a la visualización matemática. Ellos señalan: “*Esto sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo creativamente*”.

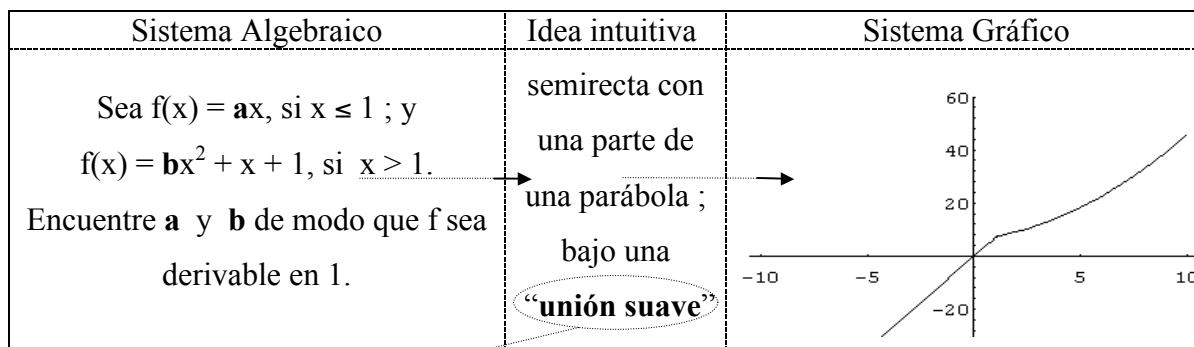
Precisando nuestro punto de vista, el fracaso de estos estudiantes de ingeniería se debe a la carencia de articulación entre representaciones, provocando que el estudiante “camine a ciegas” en el sistema algebraico, desarrollando algoritmos sin una idea clara del objetivo final perseguido. La resolución de los problemas no rutinarios propuestos por Selden et al., tiene que ver con la visualización matemática, con la articulación coherente de representaciones ligadas al contexto de cada uno de los problemas.

Enfatizamos algunas de esas ideas ¿Qué entendemos por un problema no-rutinario? De acuerdo a lo comentado antes, entenderemos por un **problema no-rutinario** *aquél que al leer el enunciado **no** viene a la mente un algoritmo predeterminado, o una idea a desarrollar para resolverlo*. Entonces, si la lectura del enunciado no me indica qué tipo de algoritmo o camino seguir, es necesario interpretarlo y eventualmente recurrir a una representación diferente.

Veamos otro de los problemas de Selden et al., (1989), que nos permitirá precisar nuestro punto de vista.

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} ax, & \text{si } x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}. \text{ Encuentre } a \text{ y } b \text{ de modo que } f(x) \text{ sea derivable en } 1.$$

Si analizamos el enunciado del problema, interpretándolo gráficamente, lo que se requiere es la construcción de una curva asociada a una función, de tal manera que en $x = 1$ se puedan unir una parte de una recta con una parte de una parábola. También es necesario, según las condiciones señaladas en el enunciado, que esa unión se realice en forma “suave” (libre de picos, ver Figura 7, Hitt, 1997).



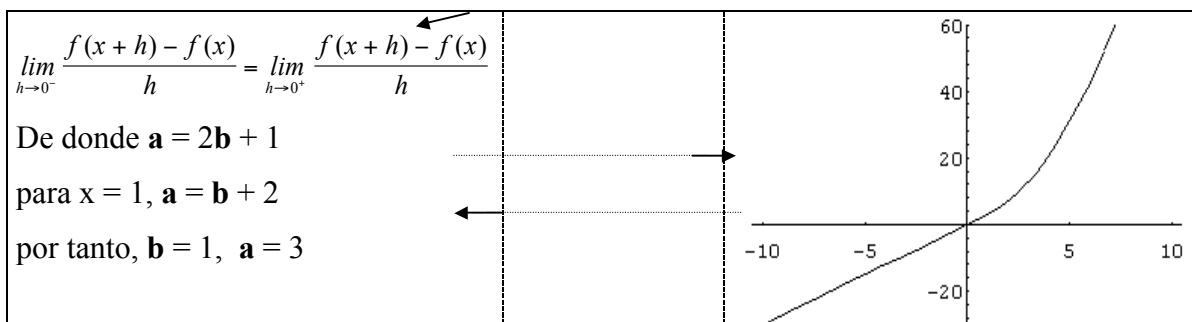


Figura 7

Así, al interpretar el enunciado utilizando una idea intuitiva, es posible representar geométicamente las condiciones del problema y encontrar su solución en el sistema algebraico.

Resistencia al uso de consideraciones visuales

Sobre la resistencia que usualmente los estudiantes muestran al uso de consideraciones visuales, producto del predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, Vinner (1989) reporta que sus estudiantes (nivel universitario) tuvieron una tendencia a la evasión de consideraciones visuales aún después de un curso de cálculo con énfasis en representaciones gráficas y demostraciones visuales.

Estos estudiantes presentaron un pensamiento analítico más que visual. Lo grave es que los resultados muestran que **esos estudiantes no hacen un uso eficiente de los procesos algebraicos, por lo tanto, es necesario promover un pensamiento visual articulado a los procesos algorítmicos.**

En uno de los problemas Vinner solicitó la demostración del teorema del valor medio; ya fuese en forma algebraica o visual (entendiéndose por visual : “*Tome la secante AB y desplázela paralelamente a sí misma hasta que sea tangente a la curva. Denote por α a la primera coordenada del punto común a la curva y la tangente. La pendiente de AB es $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y por lo tanto es la pendiente de la tangente en α , que es $f'(x)$* ”). Estos alumnos dentro de su curso de cálculo trabajaron con la Figura 8 izquierda.

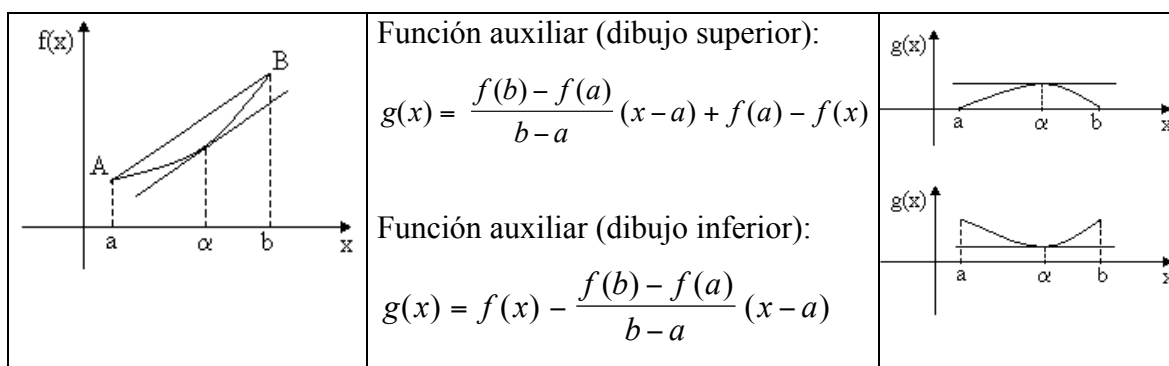


Figura 8

Reflexionando exclusivamente sobre características algebraicas ligadas al teorema, debemos recordar la función auxiliar (el truco) para aplicarle el teorema de Rolle. ¿Usted recuerda la función auxiliar? Si no la recuerda ¿podría utilizar otro camino para reconstruirla, utilizando ideas geométricas ?

Analizando las gráficas de la Figura 8, podemos inferir que la función auxiliar se puede construir de dos maneras con la ayuda de una función lineal $y(x)$ que representa en un primer caso a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con pendiente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Esta tiene que ver con la construcción de la figura superior derecha para

aplicarle el Teorema de Rolle. Para tal construcción se tiene que la función auxiliar es $g(x) = y(x) - f(x)$; En el segundo caso (Figura 8 inferior derecha), podemos construir la función auxiliar con la recta que tiene pendiente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, y que pasa por el punto

$(a, 0)$. Estas construcciones geométricas son de suma importancia, dado que recordando alguna de las dos ideas geométricas, lo que sigue son procesos algebraicos rutinarios. ¿Qué es más fácil? ¿Recordar de memoria la expresión algebraica de la función auxiliar $g(x)$ o reconstruirla a través de una interpretación geométrica?

Sobre el concepto de integral

Regresando a la experimentación con los nueve profesores de enseñanza media (ver Hitt, 1998), a continuación presentamos el diseño de otra lección, pero en este caso, este profesor eligió el concepto de integral. El docente mencionó en su escrito que él propuso el siguiente ejemplo para “el entendimiento” del Teorema Fundamental del Cálculo.

El estudiante aplicara el teorema fundamental del calculo (estableciendo la relacion entre la diferencial y la integral).

Podremos decir que la Integral es conocida como la primitiva de una Función establecida, siendo está función la Derivada.

Por lo tanto la Diferencial es una secuencia de la Integral.

Analizando ejemplos que se han empleado en temas anteriores. Introduciendo la relación entre la derivada y la Integral en problemas referidos al calculo de Areas de una parábola, calculo de la velocidad de un movil, etc.

Ejemplo

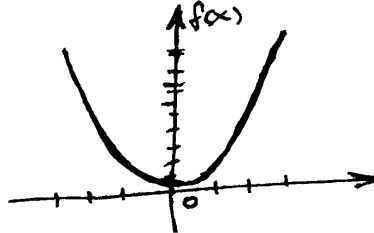
$$\text{Sea } f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

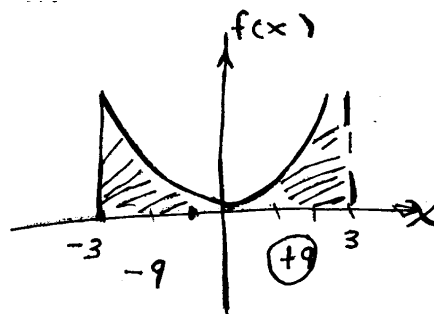
$$dy/dx = 2x$$

$$dy = 2x dx$$

Si graficamos la primera función de $-3 \leq x \leq 3$, $[-3, 3]$, encontramos que



Podremos observar que se trata de una parábola con vertice en el origen y simetrica, la derivada de está función es $2x$ por lo tanto la Integral sera $f(x) = \int 2x dx$ podremos observar que del Intervalo de $[-3, 3]$ se podran formar los subIntervalos de $[-3, 0]$, $[0, 3]$; entonces : $\int_{-3}^3 2x dx = \int_{-3}^0 2x dx + \int_0^3 2x dx$. Por tal motivo estamos encontrando una serie de Areas



$$\int_{-3}^3 2x dx = x^2 \Big|_{-3}^3 = [3^2] - [-3^2] = 9 - 9 = 0 \quad \text{Entonces}$$

$2 \int_{-3}^3 x dx = 2 \int_{-3}^0 x dx + 2 \int_0^3 x dx = x^2 \Big|_{-3}^0 + x^2 \Big|_0^3 = 0^2 - (-3)^2 + (3)^2 - (0)^2 = -9 + 9 = 0$ Esto es lo que deseavamos Demostrar. Encontrando un metodo para Determinar integrales más complejas.

Analizando lo realizado por el profesor, en realidad él quería ejemplificar la aplicación de la integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^x f(x) dx + \int_x^b f(x) dx; \quad \text{con } x \in (a, b).$$

El profesor grafica $f(x) = x^2$, señala que $f(x) = \int 2x dx$; Analizando su segunda gráfica y

del resultado de $\int_{-3}^0 2x dx = -9$, podemos inferir que ha asignando área negativa al área

sombreada del lado izquierdo del eje vertical; y positiva a la derecha. No se percató que está calculando la integral de la función $2x$ en el intervalo de -3 a 3 y no la integral de una función cuadrática. Probablemente, la asignación establecida le permite momentáneamente mantener un equilibrio entre su resultado numérico y su representación gráfica (Figura 9).

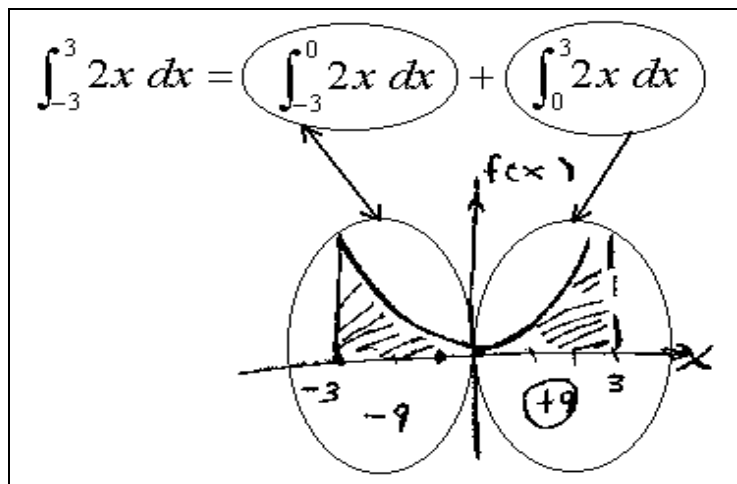


Figura 9

El profesor es consistente con la idea intuitiva de “área bajo la curva” y fiel a la tradición, no comete errores en sus procesos algebraicos, pero no tiene una articulación coherente, es decir libre de contradicciones, entre los procesos algebraicos con los aspectos geométricos del concepto en cuestión.

Posiblemente, el docente no ha reflexionado sobre imágenes como la proporcionada por la Figura 10 (Mochón, 1994, p. 187).

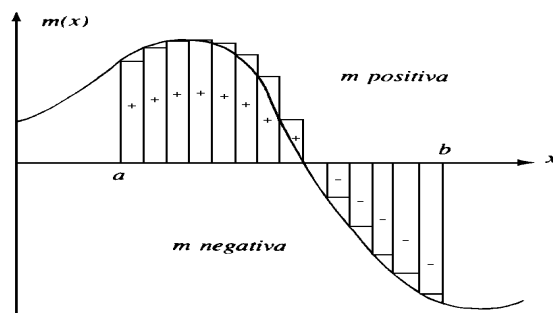


Figura 10. Las contribuciones $m(x) \, dx$ a la integral serán positivas cuando m sea positiva pero serán negativas cuando m sea negativa.

El problema anterior no es un caso único, en una ocasión otro profesor de enseñanza media mencionó :

... el software que usted está utilizando no es bueno ya que proporciona cero como resultado de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx$, y debería ser un número positivo.

Otro ejemplo que muestra la fuerza de esa idea intuitiva de “área bajo la curva” pero que provoca problemas de aprendizaje, se refleja en lo que el autor (Leal, 1995, p. 14) criticando las “*fallas*” de un paquete señala: “*Por ejemplo, la integral de una cosenoide Cos (x), definida en el intervalo de 0 a 2*Pi, entrega un valor cero. Al margen de esta falla, Calcula es bastante estable en las cercanías de singularidades.*”

En realidad el problema es mucho más grave de lo que pudiera parecer un hecho aislado. Veamos otro ejemplo, de un grupo de estudiantes de 3er semestre de una carrera de economía de un prestigiado instituto del área metropolitana. El profesor del curso de matemáticas señaló a sus alumnos: “*En mi curso no está permitido el uso de calculadoras, aquí vamos a hacer matemáticas...*”. Pareciera que a través de esta afirmación, pudiéramos predecir el tipo de enseñanza del docente. En efecto, los estudiantes señalaron que en general su acercamiento de enseñanza está muy restringido al contexto algebraico. El ejemplo proporcionado por sus alumnos es el siguiente. A mitad del curso el profesor propuso el siguiente problema a sus estudiantes:

Calcular: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

Ninguno de los estudiantes pudo resolver el problema y el profesor indignado por tal resultado, resolvió él mismo el problema en el contexto algebraico sin que sus estudiantes comprendieran la resolución. Una estudiante me hizo la pregunta e inicié el análisis de la siguiente manera (ver Figura 11): “*Primero veamos el comportamiento de la función...*”

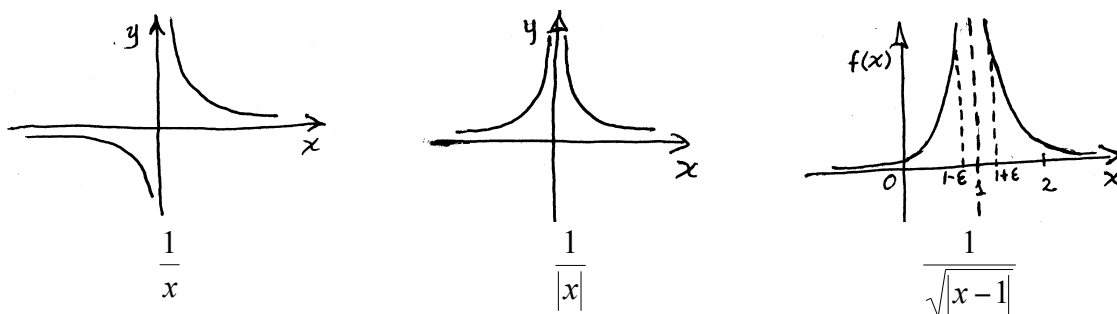


Figura 11

Es una integral impropia. La función no está definida en $x = 1$. Entonces, debemos calcular la integral un poco antes de $x = 1$ y un poco después de ese valor. Es decir, dado $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

Entonces, $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \dots = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\sqrt{\varepsilon} + 2) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 4."$

La estudiante estaba sorprendida por la manera como abordé el problema y me preguntó si otro profesor seguiría el mismo camino. Le contesté que ensayara y que fuera a consultar a otro colega. Éste dijo lo siguiente: “Tenemos una integral impropia. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, debemos calcular lo siguiente:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}."$$

El camino algebraico seguido por algunos profesores nos llamó la atención y decidimos realizar una experimentación con una nueva población de nueve docentes (población diferente a la señalada anteriormente). Uno de ellos proporcionó la siguiente respuesta (ver Figura 12).

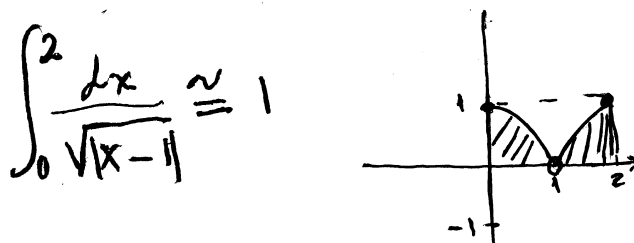


Figura 12

Solamente una profesora de entre los nueve pudo resolver el problema, sin embargo, al intentar apoyarse en una gráfica, no hubo coherencia entre su proceso algebraico (bien desarrollado) y la gráfica incorrecta (ver Figura 13) que realizó. Es notorio que esta profesora le da mayor peso a sus procesos algebraicos no importa que obtenga algo “extraño” en sus representaciones gráficas.

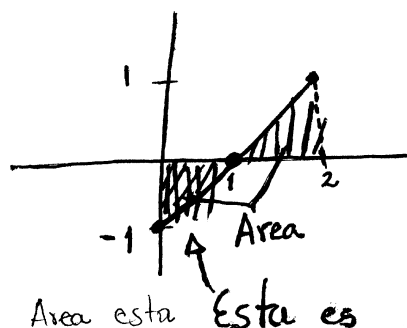


Figura 13

Continuando con nuestra experimentación, le solicitamos a otra profesora si podría resolver el problema. El resultado fue el siguiente:

Entrevistador: Calcular $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

Profesora: *La integral es el área bajo la curva... entonces, ¿qué puedo hacer para eliminar el valor absoluto? Inicio resolviendo el problema desde un punto de vista algebraico... en este caso debo encontrar una fórmula para calcular la integral...*

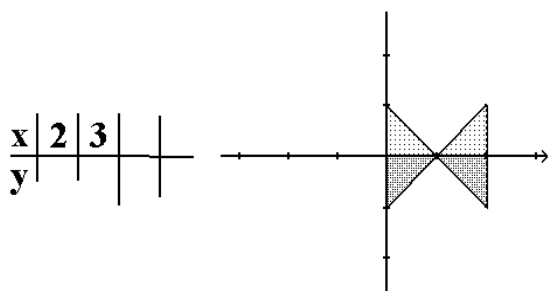
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$x-1 \geq 0; \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}; \left. \begin{matrix} u = x-1 \\ dv = dx \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int_0^2 u^{-1/2} dv = 2u^{1/2} \Big|_0^2 = 2(x-1) \Big|_0^2 \rightarrow 2(1+1) = 4$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} \begin{matrix} -x+1 < 0 \\ -x < 0 \end{matrix} \left. \begin{matrix} u = -x+1 \\ dv = -dx \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\int_0^2 u^{1/2} dv = -2u^{1/2} \Big|_0^2 = -2(2) = -4$$

Entrevistador: Recuerda que la pregunta original es: Calcular $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

Profesora: *Bueno, ... la integral está en dos partes, y deberá ser cero, pero... Necesito una gráfica [ver Figura 14] antes de proporcionar mi respuesta final...*



Profesora: Sí, se obtiene cero.

Figura 14

Podemos observar que la profesora graficó dos funciones $x-1$ y $-(x-1)$ en lugar de una función, es decir $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$, cuando $0 \leq x \leq 2$. Ella al no estar convencida de

su respuesta, añade: *¿Puedo utilizar calculadora?*

Entrevistador: *Por supuesto!*

Profesora: *¡Huyyy!* [expresión cuando vio el resultado de que la integral era 4, y cuando vio la gráfica, ver Figura 15]

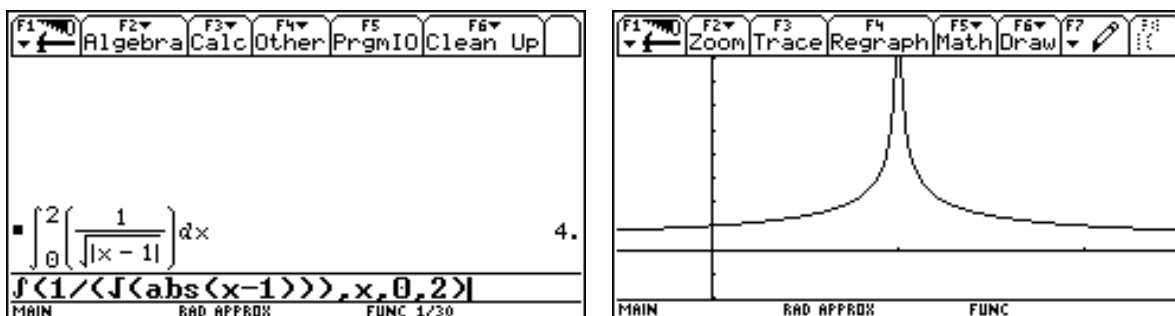


Figura 15

Profesora: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$; *Ahora entiendo qué hacer, calcular la integral utilizando epsilon y entonces el límite...*

La representación gráfica de la calculadora y el resultado del cálculo provocó en esta profesora un cambio total que la situó en un camino más cercano a la resolución del problema desde un punto de vista algebraico. Es notorio que todavía en esa última aproximación cometió errores en la igualdad. En este contexto, una pregunta pertinente es: ¿Qué tan conveniente es el uso de tecnología en la resolución de problemas?

Reflexiones finales

Las investigaciones reportadas muestran la necesidad de utilizar diferentes representaciones en forma coherente que nos permita abordar los problemas en forma más eficiente. Los estudiantes manipulan preponderantemente las representaciones algebraicas, pero si cometen errores, no pueden reconocer en dónde está el error; y debido a su tendencia a utilizar las representaciones gráficas de manera muy limitada, no cuentan con consideraciones adicionales que les puedan servir de apoyo para darles mayor seguridad a sus procesos algebraicos o proporcionarles una señal de peligro en caso de error.

Por tanto, es importante promover la visualización matemática utilizando diferentes representaciones y promoviendo un uso racional de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, se favorecerá la construcción de conceptos a través de la coordinación, libre de contradicciones, de las diferentes representaciones relacionadas con dichos conceptos.

La mayoría de profesores de matemáticas son renuentes a la utilización de calculadoras graficadoras y computadoras porque tienen la creencia que su uso inhibirá las habilidades operatorias de los estudiantes. Sin embargo, dado la dificultad tan grave del

aprendizaje del cálculo, sería conveniente analizar su contribución a la solución de este problema. La pregunta obligada si estamos a favor del uso de la tecnología en el aula de matemáticas es qué actividades proponer para utilizar la tecnología de manera que promueva la construcción de conceptos y una mejor actuación en la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática podrá impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos fundamentales del cálculo. El diseño de nuevos materiales es imperativo para este desarrollo integral, y no como hasta ahora se ha realizado, en donde se enfatiza en demasía un solo tipo de representación, a saber el algebraico. Es necesario romper con esa idea y proporcionar al estudiante una noción más rica que le permitan realizar tareas más profundas cuando está aprehendiendo conceptos del cálculo.

Referencias

- Ben-Chaim D., Lappan G. & Houang R. (1989). The Role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition, Vol. 11, N. 1, p. 49-60.
- Demana F. & Waits B. (1988). Pitfalls in Graphical Computers, or Why a Single Graph isn't Enough. *College Mathematics Journal* 19(March), pp. 177-183.
- Eisenberg T. & Dreyfus T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series. USA.
- Guin D. et Trouche L. (1998). Environnements "Calculatrice symbolique": Nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation. Evolution des comportements d'élèves au cours de ces processus. In Dominique Guin (Ed.), *Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*. IREM de Montpellier, France.
- Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática* Vol. I (pp. 245-264). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Hitt F. (1997). Sistemas semióticos de representación. *Revista Avance y Perspectiva*, Vol. 16, mayo-junio, Cinvestav, México.
- Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.
- Hitt F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista Educación Matemática*, 10(1), 23-45.
- Hitt F. & Lara H. (1999). Limits, Continuity and Discontinuity of Functions from Two Points of View: That of the Teacher and that of the Student. *British Society for Research into Learning Mathematics*. pp. 49-54. Lancaster, U.K.
- Hitt F. (2002). Funciones en contexto. Editorial Pearson Educación (Prentice Hall). México.
- Mochón S. (1994). *Quiero entender el cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

- Paéz R. (1991). Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite: Ideas del infinito. Tesis de Maestría. Cinvestav-IPN. México.
- Santillán M., Turriza J. Y Lara N. (1994) Sobre el uso crítico de los paquetes de graficación. Memorias del V Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. (Hitt F., Filloy E. y Peraza E. Editores) *Cuadernos de Investigación* No. 31, Año VII, 1994, pp. 115-123.
- Selden J., Mason A. & Selden A. (1989). Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems?. *Journal of Mathematical Behavior*, 8 (1989) 45-50. Traducción en Antología en Educación Matemática (compiladores R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta). DME-Cinvestav, 1992, México, p. 77-83.
- Selden J., Mason A. & Selden A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems?. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning* (pp. 19-26), MAA Notes Number 33, 1994.
- Viglino G. & Berger M. (1998). Precalculus in the light of technology. Brook/Cole Publishing Company.
- Vinner S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 11, pp. 149-156. Traducción en *Antología en Educación Matemática*, compiladores : Cambray R., Sánchez E. y Zubieta G., Dpto. Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Zimmermann W. (1990). Visual Thinking in Calculus. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 127-138), MAA Series. USA.
- Zimmermann W. & Cunningham S. (1990). What is Mathematical Visualization ? In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 1-8), MAA Series. USA.