

CÁLCULO I

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS



INSTITUTO PROFESIONAL
VIRGINIO GOMEZ
DE LA UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

Indice

Contenido

Página

Unidad N°1: Números Reales

Números reales	3
Intervalos reales	4
Inecuaciones	
a) simples	9
b) con paréntesis	9
c) con denominador numérico	10
d) Inecuaciones con denominador algebraico	13
Valor absoluto	20
Inecuaciones con valor absoluto	22

Unidad N°2: Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas en el plano	28
Distancia entre dos puntos del plano \mathbb{R}^2	29
División de un trazo en una razón dada	31
Pendiente entre dos puntos	33
Línea recta	36
Formas de la ecuación de la recta	40
Tipos de rectas	46
Distancia de un punto a una recta	50
Cónicas	57
Circunferencia	59
Parábola	64
Elipse	75
Hipérbola	87

Unidad N°3: Límites y Continuidad

Concepto de límites de una función	95
Teorema sobre límites	97
Resolución algebraica de límites	98
Límites laterales	105
Límites infinitos	112
Límites al infinito	117
Asíntotas	120
Continuidad de funciones reales	126

VIRGINIO GÓMEZ

Unidad N°4: Derivadas

Derivada	137
Interpretación de la derivada	139
Reglas de derivación	140
Regla de la cadena	156
Derivación implícita	152
Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas	156
Derivación logarítmica	158
Derivada de funciones trigonométricas	163
Derivada de funciones trigonométricas inversas	167
Derivada de orden superior	171
Aplicación de la derivada:	
a) Gráficos de funciones continuas	176
b) Gráficos de funciones discontinuas	186
- Problemas de aplicación de máximos y/o mínimos	197
- Problemas de variaciones relacionadas	203
- Formas indeterminadas	210
Autoevaluación por unidad	217

VIRGINIO GÓMEZ

UNIDAD N° 1
Números Reales

VIRGINIO GÓMEZ

Números Reales

Es el conjunto formado por todos los números cuya naturaleza sea natural (\mathbb{N}), entera (\mathbb{Z}), racional (\mathbb{Q}) e irracional (\mathbb{I}).

El conjunto de los números reales está provisto de dos operaciones directas: adición y multiplicación y dos operaciones inversas: sustracción y división.

Propiedades de la adición en \mathbb{R}

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple:

- 1) Clausura: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R}$
- 2) Conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$
- 3) Asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$
- 4) Elemento Neutro: $\exists! 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$
- 5) Elemento Inverso Aditivo: $\exists! (-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Propiedades de la multiplicación en \mathbb{R}

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple

- 1) Clausura: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$
- 2) Conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$
- 3) Asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 4) Elemento Neutro: $\exists! 1 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- 5) Elemento Inverso Aditivo: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists! a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$

Existe otra propiedad que integra a ambas operaciones: la propiedad distributiva

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Las operaciones inversa de los números reales se definen de la siguiente forma:

Sustracción: $a - b = a + (-b)$

División: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado, pues existe la relación de orden mayor que ($>$) que cumple con los siguientes axiomas denominados Axiomas de Orden.

1) Tricotomía: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple una, y sólo una de las siguientes relaciones:

$$a > b, \quad a = b, \quad b > a$$

2) Transitividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

3) Adición: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a > b \Rightarrow a + c > b + c$

4) Multiplicación: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Otras relaciones de orden son:

Mayor o igual que : $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

Menor que : $a < b \Leftrightarrow b > a$

Menor o igual que : $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$

Los símbolos $>$, $<$, \geq , \leq denotan la existencia de desigualdades

Propiedades de las desigualdades

1) Transitiva: Si $a < b \wedge b < c$, entonces $a < c$

2) Aditiva: Si $a < b \wedge c < d$, entonces $a + c < b + d$

3) Si $a < b \wedge c \in \mathbb{R}$, entonces $a + c < b + c$

4) Si $a < b \wedge c \in \mathbb{R}$, entonces $a - c < b - c$

5) Si $a < b \wedge c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$

6) Si $a < b \wedge c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

7) Si $a < b$ y c está entre a y b , entonces $a < c \wedge c < b$, es decir, $a < c < b$

8) Si $a > b$, entonces $a^{-1} < b^{-1}$

Intervalos Reales

Es un conjunto infinito de números reales

Tipos de intervalos

1) Intervalo abierto: $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$



2) Intervalo semiabierto:

$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$



$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



3) Intervalo cerrado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



4) Otros intervalos reales infinitos

$$(-\infty, a] =]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



$$(-\infty, a) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$



$$[b, +\infty) = [b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\}$$



VIRGINIO GOMEZ

$$(b, +\infty) =]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > b\}$$



$$(-\infty, +\infty) =]-\infty, +\infty[= \{x / x \text{ es un número real}\}$$

Así,

$$\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$



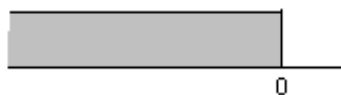
$$\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$



$$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$$



$$\mathbb{R}^- \cup \{0\} =]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$$



$$[a, a] = \{a\}$$

$$(a, a) = \emptyset$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejemplos

1) Dibuje el intervalo que representa la expresión dada

a) $x > 5$



b) $3 \leq x < 7$



c) $x \leq -4$



d) $x < -3 \quad \vee \quad x > 2$



2) Escriba la desigualdad que representa el intervalo dado

a)



$-6 \leq x \leq 14$

b)



$x > 13/5$

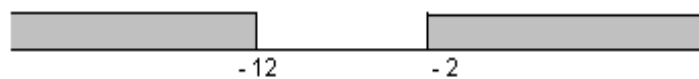
VIRGINIO GOMEZ

c)



$$x \leq -16/9$$

d)



$$x \leq -12 \quad \vee \quad x \geq -2$$

VIRGINIO GOMEZ

Inecuaciones

Son desigualdades con una incógnita que se verifican para ciertos números reales. La solución de una inecuación corresponde a un intervalo.

Para resolver una inecuación se procede en forma similar a los procedimientos usados en la resolución de ecuaciones, pero considerando las propiedades de las desigualdades.

a) Inecuaciones simples

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad 3x - 4 > 5 - 12x & / + 12x \\
 15x - 4 > 5 & / + 4 \\
 15x > 9 & / : 15 \\
 x > \frac{9}{15} \\
 x > \frac{3}{5}
 \end{array}$$



$$\text{Sol: } \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{3}{5} \right\}$$

$$\text{Sol: } \left] \frac{3}{5}, +\infty \right[$$

$$\begin{array}{ll}
 2) \quad 2b - 9 < 1 - 3b & / + 3b \\
 5b - 9 < 1 & / + 9 \\
 5b < 10 & / : 5 \\
 b < 2
 \end{array}$$

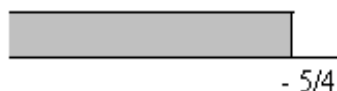


$$\text{Sol: } \{ b \in \mathbb{R} / b < 2 \}$$

$$\text{Sol: }] -\infty, 2[$$

b) Inecuaciones con paréntesis

$$\begin{array}{ll}
 3) \quad 3x - (4x - 5) \leq -4x - 7 + (2 - 5x) & / \text{se elimina paréntesis} \\
 3x - 4x + 5 \leq -4x - 7 + 2 - 5x & / \text{se reducen términos semejantes} \\
 -x + 5 \leq -9x - 5 & / + 9x \\
 8x + 5 \leq -5 & / - 5 \\
 8x \leq -10 & / : 8 \\
 x \leq -\frac{10}{8} \\
 x \leq -\frac{5}{4}
 \end{array}$$



$$\text{Sol:} \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{5}{4} \right\} \quad \text{Sol:} \left] -\infty, -\frac{5}{4} \right]$$

$$4) (6y + 5)^2 - 4(5y - 10) < (6y + 10)(6y - 10) + 5$$

/se resuelven los

productos

$$36y^2 + 60y + 25 - 20y + 40 < 36y^2 - 100 + 5$$

/se reducen términos

semejantes

$$40y + 65 < -95$$

/ - 65

$$40y < -160$$

/ : 40

$$y < -4$$



$$\text{Sol:} \{ y \in \mathbb{R} / y < -4 \}$$

$$\text{Sol:}] -\infty, -4[$$

c) Inecuaciones con denominador numérico

$$5) \frac{2}{3}(a + 1) + \frac{1}{5}(a - 2) \geq \frac{3}{2}(a - 2) + \frac{1}{15}(a - 1) \quad / \text{MCM} = 30$$

$$20(a + 1) + 6(a - 2) \geq 45(a - 2) + 2(a - 1)$$

/se resuelven los productos

$$20a + 20 + 6a - 12 \geq 45a - 90 + 2a - 2$$

/se reducen términos

semejantes

$$26a + 8 \geq 47a - 92$$

/ - 47a

$$-21a + 8 \geq -92$$

/ - 8

$$-21a \geq -100$$

/ · (-1)

$$21a \leq 100$$

/ : 21

$$a \leq \frac{100}{21}$$



$$\text{Sol:} \left\{ a \in \mathbb{R} / a \leq \frac{100}{21} \right\}$$

$$\text{Sol:} \left] -\infty, \frac{100}{21} \right]$$

VIRGINIO GOMEZ

$$6) \frac{2x+7}{4} - \frac{3x-5}{8} - \frac{8-7x}{5} + \frac{1-9x}{10} + 6 < x \quad / \text{MCM} = 40$$

$$10(2x+7) - 5(3x-5) - 8(8-7x) + 4(1-9x) + 240 < 40x \quad \begin{array}{l} \text{/se resuelven} \\ \text{los productos} \end{array}$$

$$20x + 70 - 15x + 25 - 64 + 56x + 4 - 36x + 240 < 40x \quad \begin{array}{l} \text{/se reducen términos} \\ \text{semejantes} \end{array}$$

$$25x + 275 < 40x \quad / - 40x$$

$$-15x < -275$$

$$/ \cdot (-1)$$

$$15x > 275$$

$$/ : 15$$

$$x > \frac{275}{15}$$

$$x > \frac{55}{3}$$



$$\text{Sol: } \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{55}{3} \right\}$$

$$\text{Sol: } \left] \frac{55}{3}, +\infty \right[$$

Ejercicios Propuestos

$$1) 9x + 6 \geq 8 - 2x$$

$$2) \frac{x}{5} + \frac{3}{10} < \frac{5}{4} - \frac{7x}{2}$$

$$3) (5x+6)(3-x) \leq 7(2-4x) - 5x^2 \quad 4) (4-3x)(4+3x) - (2x+1) \geq (9x+1)(2-x)$$

$$5) (5-4x)^2 - (7-6x) \leq 16x^2 - 3(2-x)$$

$$6) (x+5)^2 + (2x-3)^2 > (x+1)(3-x) + 6x^2$$

$$7) (5x+3)(5x-3) - (1+2x) \geq 5x(6+2x) - 3x(1-5x)$$

$$8) \frac{z+3}{2} - \frac{3(1-z)}{7} \geq \frac{5(z+4)}{14}$$

$$9) \frac{1}{4}(y-1) - \frac{2}{3}(5-y) < \frac{5}{8}(2y+3) - \frac{7}{12}(1-3y)$$

$$10) \frac{(z+5)^2}{4} + \frac{5(z-2)^2}{6} > \frac{z+1}{8} + \frac{13(z+1)^2}{12}$$

Solución :

$$1) \quad x \geq \frac{2}{11} \quad \text{Sol} = \left[\frac{2}{11}, +\infty \right[$$

$$2) \quad x < \frac{19}{74} \quad \text{Sol} = \left] -\infty, \frac{19}{74} \right[$$

$$3) \quad x \leq -\frac{4}{37} \quad \text{Sol} = \left] -\infty, -\frac{4}{37} \right]$$

$$4) \quad x \leq \frac{13}{19} \quad \text{Sol} = \left] -\infty, \frac{13}{19} \right]$$

$$5) \quad x \geq \frac{24}{37} \quad \text{Sol} = \left[\frac{24}{37}, +\infty \right[$$

$$6) \quad x < \frac{31}{4} \quad \text{Sol} = \left] -\infty, \frac{31}{4} \right[$$

$$7) \quad x \leq -\frac{10}{29} \quad \text{Sol} = \left] -\infty, -\frac{10}{29} \right]$$

$$8) \quad z \geq \frac{5}{8} \quad \text{Sol} = \left[\frac{5}{8}, +\infty \right[$$

$$9) \quad y > -\frac{117}{50} \quad \text{Sol} = \left] -\frac{117}{50}, -\infty \right[$$

$$10) \quad z < \frac{67}{25} \quad \text{Sol} = \left] -\infty, \frac{67}{25} \right[$$

VIRGINIO GÓMEZ

d) Inecuaciones con denominador algebraico

Para resolver este tipo de inecuaciones se empleará el método denominado **Tabla Francesa**. Este método consiste en confeccionar una tabla que resume la información de la inecuación a resolver. Para ello se deben realizar los siguientes pasos:

- 1) Dejar todas las expresiones algebraicas de la inecuación al lado izquierdo del símbolo de la desigualdad, de modo que al lado derecho sólo quede cero.
- 2) Reducir a una sola fracción las expresiones del lado izquierdo de la desigualdad
- 3) Por separado, igualar a cero la expresión resultante del numerador y la del denominador.
- 4) Con los valores encontrados en (3) se construye una tabla de la siguiente forma

	$-\infty, \text{valor1}$	valor1	valor1, valor2	valor2	valor2, $+\infty$
expresión del numerador					
expresión del denominador					
fracción					

5) Llenar la tabla sólo con signos más (+) o menos (−) o ceros (0). El proceso consiste en colocar cero en el casillero del valor que anula la expresión del numerador como también colocar cero en el casillero del valor que anula la expresión del denominador, el resto de los casilleros se rellenarán con signos más o signos menos. Para la línea correspondiente a la expresión del numerador se elige un número a la izquierda o a la derecha del valor que anula la expresión del numerador y se reemplaza en esta expresión. Si el número elegido da una evaluación positiva y está a la derecha(izquierda) del valor que anula al numerador, entonces en la tabla todos los casilleros a la derecha(izquierda) del valor que anula al numerador se rellenarán con signo más y los que están a la izquierda(derecha) se rellenarán con signo menos. Se repite el mismo proceso para la línea que corresponde a la expresión del denominador. Luego para la línea que corresponde a la fracción se usa la ley de los signos referente al signo del numerador con el signo del denominador, en esta línea está la solución de la inecuación.

Si el problema consiste en encontrar todos los valores mayores que cero, entonces habrá que considerar como solución los casilleros que en la última línea lleven signo más.(intervalos abiertos)

Si el problema consiste en encontrar todos los valores menores que cero, entonces habrá que considerar como solución los casilleros que en la última línea lleven signo menos.(intervalos abiertos)

Si el problema consiste en encontrar todos los valores mayores o iguales a cero, entonces habrá que considerar como solución los casilleros que en la última línea lleven signo más.(intervalos cerrados)

Si el problema consiste en encontrar todos los valores menores o iguales a cero, entonces habrá que considerar como solución los casilleros que en la última línea lleven signo menos.(intervalos cerrados)

En el caso de los intervalos cerrados habrá que considerar si los extremos de cada intervalo no indeterminan la inecuación.

Ejemplos :

$$1) \frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7 \quad / - \frac{2}{x} + 7$$

$$\frac{2}{x} + 4 > 0$$

$$\frac{2 + 4x}{x} > 0$$

$$2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$x = 0$$

	$-\infty, -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, 0$	0	$0, +\infty$
$2 + 4x$	-	0	+	+	+
x	-	-	-	0	+
$\frac{2 + 4x}{x}$	+	0	-	ind	+

Sol: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$



2) $\frac{5x - 7}{x + 3} - 6 \leq 1 \quad / -1$

$$\frac{5x - 7}{x + 3} - 7 \leq 0$$

$$\frac{5x - 7 - 7x - 21}{x + 3} \leq 0$$

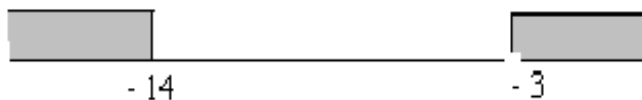
$$\frac{-2x - 28}{x + 3} \leq 0$$

$$-2x - 28 = 0 \Rightarrow x = -14$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

	$-\infty, -14$	-14	$-14, -3$	-3	$-3, +\infty$
$-2x - 28$	+	0	-	-	-
$x + 3$	-	-	-	0	+
$\frac{-2x - 28}{x + 3}$	-	0	+	ind	-

Sol: $(-\infty, -14] \cup (-3, +\infty)$



VIRGINIO GOMEZ

$$3) \frac{3-x}{x-7} \geq 3 \quad / -3$$

$$\frac{3-x}{x-7} - 3 \geq 0$$

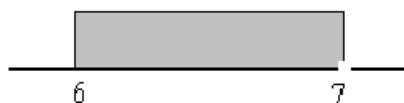
$$\frac{3-x-3x+21}{x-7} \geq 0$$

$$\frac{-4x+24}{x-7} \geq 0$$

$$\begin{aligned} -4x+24=0 &\Rightarrow x=6 \\ x-7=0 &\Rightarrow x=7 \end{aligned}$$

	$-\infty, 6$	6	6, 7	7	$7, +\infty$
$-4x+24$	+	0	-	-	-
$x-7$	-	-	-	0	+
$\frac{-4x+24}{x-7}$	-	0	+	ind	-

$$\text{Sol} = [6, 7[$$



$$4) \frac{x-3}{x+1} \leq \frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3}{x+1} - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$\frac{3x-9-2x-2}{3x+3} \leq 0$$

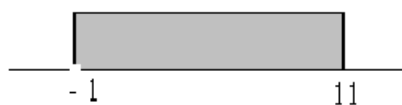
$$\frac{x-11}{3x+3} \leq 0$$

$$x-11=0 \quad \Rightarrow \quad x=11$$

$$3x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

	$-\infty, -1$	-1	-1, 11	11	$11, +\infty$
$x-11$	-	-	-	0	+
$3x+3$	-	0	+	+	+
$\frac{x-11}{3x+3}$	+	ind	-	0	+

$$\text{Sol: }] -1, 11]$$



VIRGINIO GOMEZ

Otros casos donde es posible aplicar la tabla francesa

$$1) x^2 - 2x \leq 63 \quad / - 63$$

$$x^2 - 2x - 63 \leq 0 \quad / \text{factorizando}$$

$$(x + 7)(x - 9) \leq 0$$

$$x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -7$$

$$x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

	$-\infty, -7$	-7	$-7, 9$	9	$9, +\infty$
$x + 7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 9$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 7)(x - 9)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Sol: $[-7, 9]$



$$2) (x - 2)(4 - x)(x + 6) > 0$$

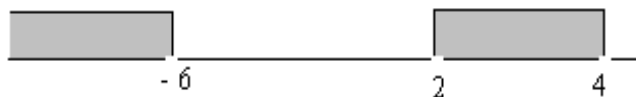
$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -6$$

	$-\infty, -6$	-6	$-6, 2$	2	$2, 4$	4	$4, +\infty$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x - 2)(4 - x)(x + 6)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Sol: $]-\infty, -6[\cup]2, 4[$



$$3) \frac{(x - 1)(2x + 3)}{(3x - 1)(2 - x)} \leq 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

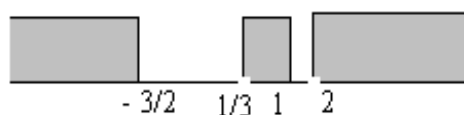
$$2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

	$-\infty, -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, 1$	1	1, 2	2	$2, +\infty$
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$2x + 3$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$3x - 1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$2 - x$	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{(x-1)(2x+3)}{(3x-1)(2-x)}$	-	0	+	ind	-	0	+	ind	-

$$\text{Sol: } \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup \left] \frac{1}{3}, 1 \right] \cup]2, +\infty[$$



Ejercicios Propuestos

1) $\frac{3}{x} + 5 \leq \frac{1}{x} - 4$

2) $\frac{5x-1}{3-x} + 4 < 7$

3) $\frac{2x-3}{4-5x} > \frac{1}{5}$

4) $x^2 + 13x \geq -42$

5) $(x-2)^2 \leq 16$

6) $(2x+1)^2 > 1$

7) $x^3 + 3x^2 > 10x$

8) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+3) > 0$

9) $\frac{(x+1)(3-x)}{(x-2)} \leq 0$

10)
$$\frac{(2x+1)(4-x)}{(x-3)(1-3x)} < 0$$

11) En un experimento químico, una solución de ácido clorhídrico se va a mantener entre 30°C y 35°C ; es decir, $30 \leq C \leq 35$. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados Fahrenheit si la fórmula de conversión Celsius/Fahrenheit es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$?

12) Un rollo fotográfico se va a mantener entre 68°F y 77°F ; es decir, $68 < F < 77$. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados Celsius si la fórmula de conversión Celsius/Fahrenheit es $F = \frac{9}{5}C + 32$?

13) En 1984, al perforar el pozo más profundo del mundo, los soviéticos encontraron que la temperatura a " x " kilómetros de profundidad de la Tierra estaba dada por

$$T = 30 + 25(x - 3) \quad 3 \leq x \leq 15$$

donde T es la temperatura en grados Celsius. ¿A qué profundidad la temperatura estará entre 200 y 300°C en total?

14) Una compañía electrónica está planeando comercializar una nueva calculadora gráfica. Los costos fijos son de \$650.000 y los variables de \$47 por calculadora. El precio de la calculadora al mayoreo será de \$63. Es evidente que para que la compañía obtenga utilidades los ingresos deben ser superiores a los costos.

- a) ¿Cuántas calculadoras se deben vender para que la compañía obtenga utilidades?
- b) ¿Cuántas calculadoras tendría que vender para llegar al punto de equilibrio?

Solución :

1) $\text{Sol} = \left[-\frac{2}{9}, 0 \right[$

2) $\text{Sol} = \left] -\infty, \frac{5}{4} \right[\cup \left] 3, +\infty \right[$

3) $\text{Sol} = \left] \frac{4}{5}, \frac{19}{15} \right[$

4) $\text{Sol} = \left] -\infty, -7 \right[\cup \left] -6, +\infty \right[$

5) $\text{Sol} = \left] -2, 6 \right[$

6) $\text{Sol} = \left] -\infty, -1 \right[\cup \left] 0, +\infty \right[$

7) $\text{Sol} = \left] -5, 0 \right[\cup \left] 2, +\infty \right[$

8) $\text{Sol} = \left] -\infty, -3 \right[\cup \left] -1, 1 \right[\cup \left] 2, +\infty \right[$

9) $\text{Sol} = \left] -1, 2 \right[\cup \left] 3, +\infty \right[$

10) $\text{Sol} = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right[\cup \left] 3, 4 \right[$

11) El rango de la temperatura es de $86^{\circ}F$ a $95^{\circ}F$ en total.

12) El rango de la temperatura es de $20^{\circ}C$ a $25^{\circ}C$ en total.

13) A una profundidad entre 9.8 Km y 13.8 Km.

14) a) La compañía debe vender más de 40.625 calculadoras para tener utilidades.

b) Para llegar al punto de equilibrio, la compañía debe vender 40.625 calculadoras.

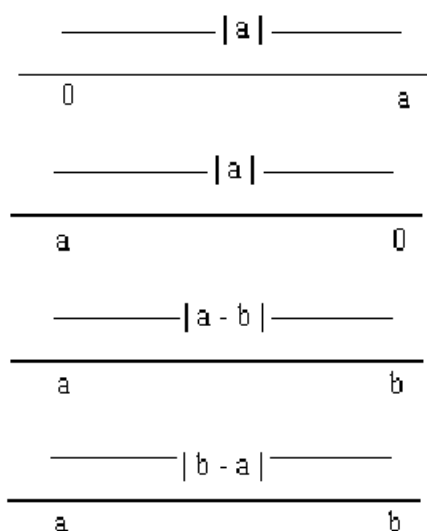
VIRGINIO GOMEZ

Valor Absoluto

Es una función que determina de cada número sólo su valor como cantidad. Su Símbolo es $| \cdot |$. Se define de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el valor absoluto mide distancias. El valor absoluto de un número cualquiera mide la cantidad de unidades de este número con respecto a cero. El valor absoluto entre dos números mide la cantidad de unidades entre estos dos números.



Propiedades del valor absoluto

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

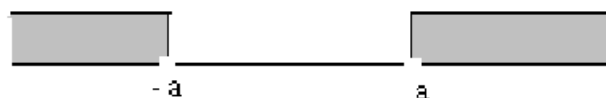
$$1) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$2) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{con } y \neq 0$$

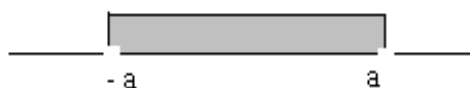
$$3) |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$4) |x| - |y| \leq |x - y|$$

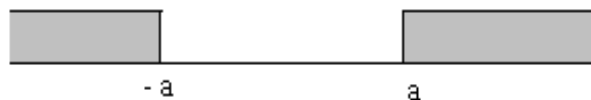
$$5) |x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \quad \vee \quad x > a$$



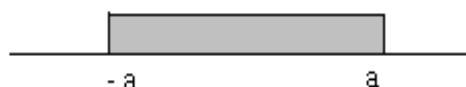
$$6) |x| < a \quad \Leftrightarrow \quad x > -a \quad \wedge \quad x < a$$



$$7) |x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \quad \vee \quad x \geq a$$



$$8) |x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -a \quad \wedge \quad x \leq a$$



$$9) |x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x = -a \quad \vee \quad x = a$$

Ejemplos de ecuaciones

$$1) |2x + 1| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = -4 \quad \vee \quad 2x + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sol: } \left\{ -\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$2) \left| \frac{3x - 1}{x - 2} \right| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x - 1}{x - 2} = -6 \quad \vee \quad \frac{3x - 1}{x - 2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 1 = -6x + 12 \quad \vee \quad 3x - 1 = 6x - 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x = 13 \quad \vee \quad -3x = -11$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{13}{9} \quad \vee \quad x = \frac{11}{3}$$

$$\text{Sol: } \left\{ \frac{13}{9}, \frac{11}{3} \right\}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejemplos de inecuaciones

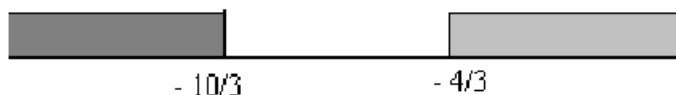
$$\begin{aligned}
 1) \quad |2x - 3| < 4 &\Leftrightarrow \begin{aligned} 2x - 3 &> -4 && \wedge && 2x - 3 < 4 \\ \Leftrightarrow 2x &> -1 && \wedge && 2x < 7 \\ \Leftrightarrow x &> -\frac{1}{2} && \wedge && x < \frac{7}{2} \end{aligned}
 \end{aligned}$$



En este caso la solución de la inecuación es la intersección de los dos intervalos.

$$\text{Así, Sol} = \left] -\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right[$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad |3x + 7| \geq 3 &\Leftrightarrow \begin{aligned} 3x + 7 &\leq -3 && \vee && 3x + 7 \geq 3 \\ \Leftrightarrow 3x &\leq -10 && \vee && 3x \geq -4 \\ \Leftrightarrow x &\leq -\frac{10}{3} && \vee && x \geq -\frac{4}{3} \end{aligned}
 \end{aligned}$$



En este caso la solución de la inecuación es la unión de los dos intervalos.

$$\text{Así, Sol: } \left] -\infty, -\frac{10}{3} \right] \cup \left[-\frac{4}{3}, +\infty \right], \text{ que también se puede escribir como:}$$

$$\mathbb{R} - \left] -\frac{10}{3}, -\frac{4}{3} \right[$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \left| \frac{2-3x}{5x-3} \right| \leq 2 &\Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{2-3x}{5x-3} &\geq -2 && \wedge && \frac{2-3x}{5x-3} \leq 2 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{2-3x}{5x-3} + 2 &\geq 0 && \wedge && \frac{2-3x}{5x-3} - 2 \leq 0 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{2-3x+10x-6}{5x-3} &\geq 0 && \wedge && \frac{2-3x-10x+6}{5x-3} \leq 0 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{7x-4}{5x-3} &\geq 0 && \wedge && \frac{8-13x}{5x-3} \leq 0 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{aligned} 7x-4=0; 5x-3=0 &&& \wedge && 8-13x=0; 5x-3=0 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{aligned} x=\frac{4}{7}; x=\frac{3}{5} &&& \wedge && x=\frac{8}{13}; x=\frac{3}{5} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Tabla para $\frac{7x-4}{5x-3} \geq 0$

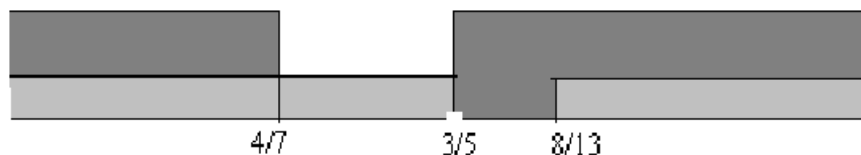
	$-\infty, \frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}, \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}, +\infty$
$7x-4$	-	0	+	+	+
$5x-3$	-	-	-	0	+
$\frac{7x-4}{5x-3}$	+	0	-	∞	+

$$\text{Sol: } \left] -\infty, \frac{4}{7} \right] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty \right[$$

Tabla para $\frac{8-13x}{5x-3} \leq 0$

	$-\infty, \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}, \frac{8}{13}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{13}, +\infty$
$8-13x$	+	+	+	0	-
$5x-3$	-	0	+	+	+
$\frac{8-13x}{5x-3}$	-	∞	+	0	-

$$\text{Sol: } -\infty, \frac{3}{5} \left[\cup \left[\frac{8}{13}, +\infty \right[$$



En este caso la solución de la inecuación es la intersección de los dos intervalos.

$$\text{Así, Sol: } \left] -\infty, \frac{4}{7} \right] \cup \left[\frac{8}{13}, +\infty \right[$$

$$\begin{aligned}
 4) \left| \frac{4x+1}{2x-3} \right| > \frac{2}{5} &\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x-3} < -\frac{2}{5} \quad \vee \quad \frac{4x+1}{2x-3} > \frac{2}{5} \\
 &\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x-3} + \frac{2}{5} < 0 \quad \vee \quad \frac{4x+1}{2x-3} - \frac{2}{5} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{20x+5+4x-6}{10x-15} < 0 \quad \vee \quad \frac{20x+5-4x+6}{10x-15} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{24x-1}{10x-15} < 0 \quad \vee \quad \frac{16x+11}{10x-15} > 0 \\
 &\Leftrightarrow 24x-1=0; 10x-15=0 \quad \vee \quad 16x+11=0; 10x-15=0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{24}; x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{11}{16}; x = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Tabla para $\frac{24x - 1}{10x - 15} < 0$

	$-\infty, \frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, +\infty$
$24x - 1$	-	0	+	+	+
$10x - 15$	-	-	-	0	+
$\frac{24x - 1}{10x - 15}$	+	0	-	∞	+

Sol: $\left] \frac{1}{24}, \frac{3}{2} \right[$

Tabla para $\frac{16x + 11}{10x - 15} > 0$

	$-\infty, -\frac{11}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$-\frac{11}{16}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, +\infty$
$16x + 11$	-	0	+	+	+
$10x - 15$	-	-	-	0	+
$\frac{16x + 11}{10x - 15}$	+	0	-	∞	+

Sol: $\left] -\infty, -\frac{16}{11} \right[\cup \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$



En este caso la solución de la inecuación es la unión de los dos intervalos.

Así, Sol: $\left] -\infty, -\frac{16}{11} \right[\cup \left] \frac{1}{24}, \frac{3}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$, que también se puede

escribir como: $\left] -\infty, -\frac{16}{11} \right[\cup \left] \frac{1}{24}, +\infty \right[- \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

5) $|2x + 1| < |3x + 5| \quad / |3x + 5|$

$$\frac{|2x + 1|}{|3x + 5|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x + 1}{3x + 5} > -1 \quad \wedge \quad \frac{2x + 1}{3x + 5} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x + 1}{3x + 5} + 1 > 0 \quad \wedge \quad \frac{2x + 1}{3x + 5} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x + 1 + 3x + 5}{3x + 5} > 0 \quad \wedge \quad \frac{2x + 1 - 3x - 5}{3x + 5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+6}{3x+5} > 0 \quad \wedge \quad \frac{-x-4}{3x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow 5x+6=0; 3x+5=0 \quad \wedge \quad -x-4=0; 3x+5=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}; x = -\frac{5}{3} \quad \wedge \quad x = -4; x = -\frac{5}{3}$$

Tabla para $\frac{5x+6}{3x+5} > 0$

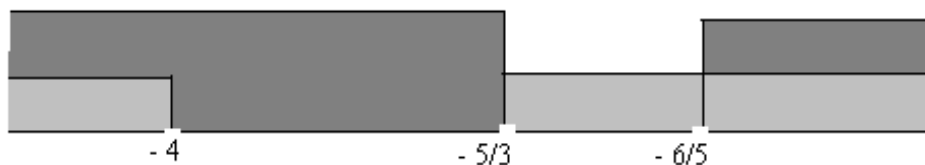
	$-\infty, -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}, -\frac{6}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{6}{5}, +\infty$
$5x+6$	-	-	-	0	+
$3x+5$	-	0	+	+	+
$\frac{5x+6}{3x+5}$	+	∞	-	0	+

Sol: $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{6}{5}, +\infty[$

Tabla para $\frac{-x-4}{3x+5} < 0$

	$-\infty, -4$	-4	$-4, -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}, +\infty$
$-x-4$	+	0	-	-	-
$3x+5$	-	-	-	0	+
$\frac{-x-4}{3x+5}$	-	0	+	∞	-

Sol: $]-\infty, -4[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$



En este caso la solución de la inecuación es la intersección de los dos intervalos.

Así, Sol: $]-\infty, -4[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$

Ejercicios Propuestos

1) $|3x - 4| = |2x + 1|$

2) $|5x - 2| < 3$

3) $\left| \frac{4x + 1}{3 - 7x} \right| \leq 5$

4) $\left| \frac{3}{x} - 2 \right| \leq 4$

5) $\left| 2 + \frac{1}{x} \right| > 4$

6) $\left| \frac{4}{x} \right| < 3$

7) $\left| \frac{2x - 1}{x} \right| > 2$

8) $|3x + 4| \geq |2 - 5x|$

9) La producción diaria P en una planta ensambladora de automóviles está dentro de 20 unidades de 500 unidades. Expresa la producción diaria como una desigualdad de valores absolutos.

10) En un proceso químico, la temperatura T se conserva entre los 10°C y los 200°C . Expresa esta restricción como una desigualdad de valores absolutos.

Solución :

1) $\text{Sol} = \left\{ \frac{3}{5}, 5 \right\}$

2) $\text{Sol} = \left] -\frac{1}{5}, 1 \right[$

3) $\text{Sol} = \left] -\infty, \frac{14}{39} \right] \cup \left[\frac{16}{31}, +\infty \right[$

4) $\text{Sol} = \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$

5) $\text{Sol} = \left] -\infty, -1 \right[\cup \left] -\frac{1}{3}, 0 \right[\cup \left] 0, +\infty \right[$

6) $\text{Sol} = \left] -\infty, -\frac{4}{3} \right[\cup \left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$

7) $\text{Sol} = \left] -\infty, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{1}{4} \right[$

8) $\text{Sol} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{2}{5} \right[\cup \left] \frac{2}{5}, 3 \right]$

9) $|P - 500| \leq 20$

10) $|T - 105| \leq 95$

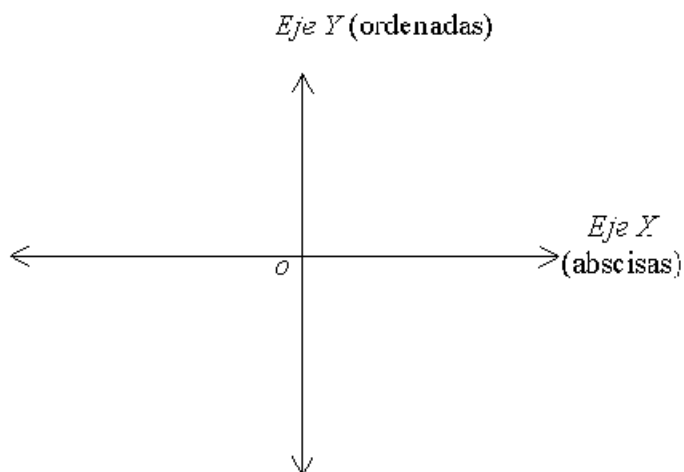
VIRGINIO GÓMEZ

UNIDAD N° 2
Geometría Analítica

VIRGINIO GÓMEZ

Sistema de coordenadas en el plano ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

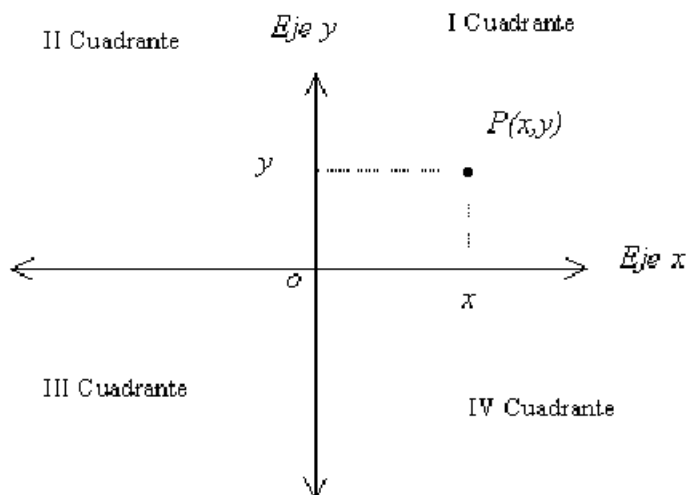
Está formado por dos ejes perpendiculares, con orígenes comunes y graduados con la misma unidad de longitud. Estos ejes perpendiculares dividen al plano \mathbb{R}^2 en cuatro regiones iguales denominadas cuadrantes. El eje horizontal se denomina eje de las abscisas (X) y el eje vertical recibe el nombre de eje de las ordenadas (Y)



Los elementos de este sistema se denominan pares ordenados. Cada par ordenado tiene un orden establecido, la primera componente del par es una abscisa y la segunda componente del par es una ordenada, es decir, (x, y) .

Propiedades

- 1) Todos los puntos del eje X tienen ordenada nula, es decir,
Eje X = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$
- 2) Todos los puntos del eje Y tienen abscisa nula, es decir,
Eje Y = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$
- 3) En el sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas existen cuatro cuadrantes :



$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y > 0\}$$

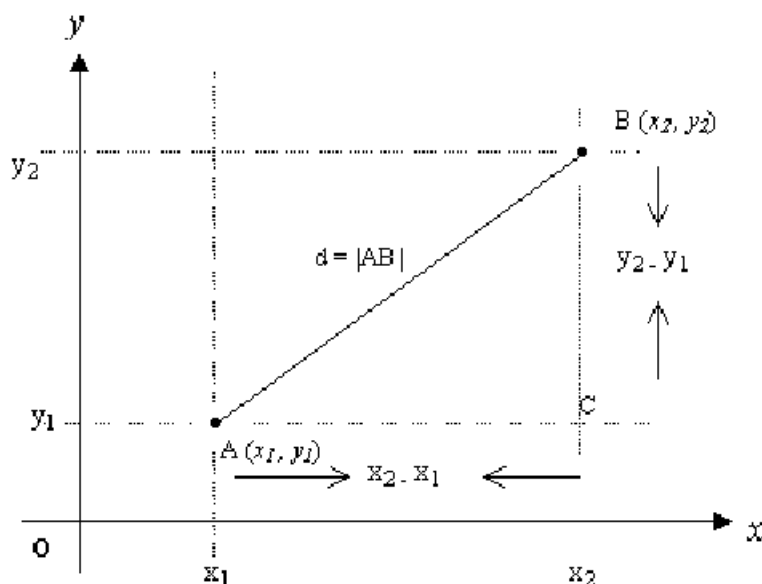
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y > 0\}$$

$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y < 0\}$$

$$C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y < 0\}$$

Distancia entre dos puntos del plano \mathbb{R}^2

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos del plano.



$$AC = x_2 - x_1$$

$$BC = y_2 - y_1$$

$$AB = d$$

Por Teorema de Pitágoras :

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$d = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Así, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, entonces la distancia entre A y B, denotada por $d(A, B)$ es :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplos :

1) Calcular la distancia entre el punto A(2, 5) y B(− 4, − 3)

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-5)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

2) Los vértices de un cuadrilátero son A(4, 5), B(− 2, 4), C(− 3, − 2) y D(2, − 3). Calcular su perímetro.

$$P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,D) + d(D,A)$$

$$d(A,B) = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(-3+2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$d(C,D) = \sqrt{(2+3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

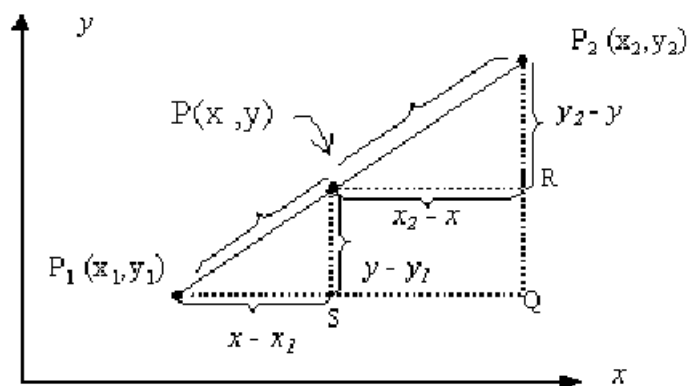
$$d(D,A) = \sqrt{(4-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$\begin{aligned} P &= d(A,B) + d(B,C) + d(C,D) + d(D,A) = \sqrt{37} + \sqrt{37} + \sqrt{26} + \sqrt{68} \\ &= 2\sqrt{37} + \sqrt{26} + 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

3) Determine el valor de x en A(x, 3) de modo que d(A,B) = 5 con B(3, − 2)

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ 5 &= \sqrt{(3 - x)^2 + (-2 - 3)^2} \\ 5 &= \sqrt{(3 - x)^2 + 25} & /()^2 \\ 25 &= (3 - x)^2 + 25 \\ 0 &= (3 - x)^2 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

División de un trazo en una razón dada



Sea $P(x, y)$ un punto del plano que divide al trazo P_1P_2 en una cierta razón k , es decir,

$$\frac{P_1P}{PP_2} = k$$

Se obtendrán las coordenadas del punto $P(x, y)$ en función de los puntos dados P_1 y P_2 .

$$\triangle P_1SP \sim \triangle PRP_2$$

$$\begin{aligned} \frac{P_1S}{PR} &= \frac{P_1P}{PP_2} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = k \\ \Rightarrow x - x_1 &= kx_2 - kx \\ \Rightarrow x + kx &= kx_2 + x_1 \\ \Rightarrow x(1 + k) &= x_1 + kx_2 \\ \Rightarrow x &= \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \quad \text{con } k \neq -1 \end{aligned}$$

De igual forma :

$$\begin{aligned} \frac{SP}{RP_2} &= \frac{P_1P}{PP_2} \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = k \\ \Rightarrow y - y_1 &= ky_2 - ky \\ \Rightarrow y + ky &= ky_2 + y_1 \\ \Rightarrow y(1 + k) &= y_1 + ky_2 \\ \Rightarrow y &= \frac{y_1 + ky_2}{1 + k} \quad \text{con } k \neq -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son:

$$P\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right)$$

Si P es el punto medio del trazo P_1P_2 , entonces $\frac{P_1P}{PP_2} = 1$, así $k = 1$

Luego,
$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Si P es un punto que queda fuera del trazo P_1P_2 , entonces k es negativo.

Ejemplos :

1) El punto medio de un trazo es $(3, 7)$ y uno de los extremos es $(10, 4)$. Determinar el otro extremo

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (3, 7)$$

$$\left(\frac{10 + x_2}{2}, \frac{4 + y_2}{2} \right) = (3, 7) \quad \Rightarrow \quad \frac{10 + x_2}{2} = 3 \quad \wedge \quad \frac{4 + y_2}{2} = 7$$

$$\Rightarrow 10 + x_2 = 6 \quad \wedge \quad 4 + y_2 = 14$$

$$\Rightarrow x_2 = -4 \quad \wedge \quad y_2 = 10$$

El otro punto es $(-4, 10)$

2) Los extremos de un trazo son los puntos $A(7, 4)$ y $B(-1, -2)$. Hallar la razón k en que el punto $C(1, -2)$ divide al trazo.

$$\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k} \right) = (1, -2)$$

$$\left(\frac{7 - k}{1 + k}, \frac{4 - 2k}{1 + k} \right) = (1, -2) \quad \Rightarrow \quad \frac{7 - k}{1 + k} = 1 \quad \wedge \quad \frac{4 - 2k}{1 + k} = -2$$

$$\Rightarrow 7 - k = 1 + k \quad \wedge \quad 4 - 2k = 1 + k$$

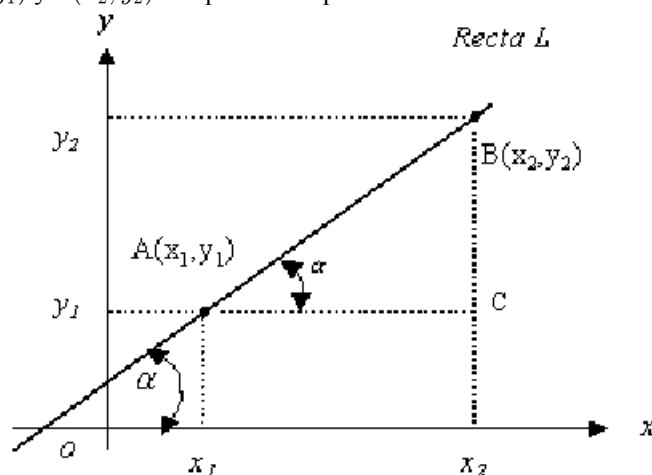
$$\Rightarrow 6 = 2k \quad \wedge \quad 3 = 3k$$

$$\Rightarrow k = 3 \quad \wedge \quad 1 = k$$

Luego, no existe el valor de k , por lo tanto el punto C no divide al trazo.

Pendiente entre dos puntos

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos del plano



La razón $\frac{CB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se denomina **pendiente**, se simboliza por m y representa el grado de inclinación del trazo AB con el eje X. El ángulo se mide desde el eje X al trazo (α)

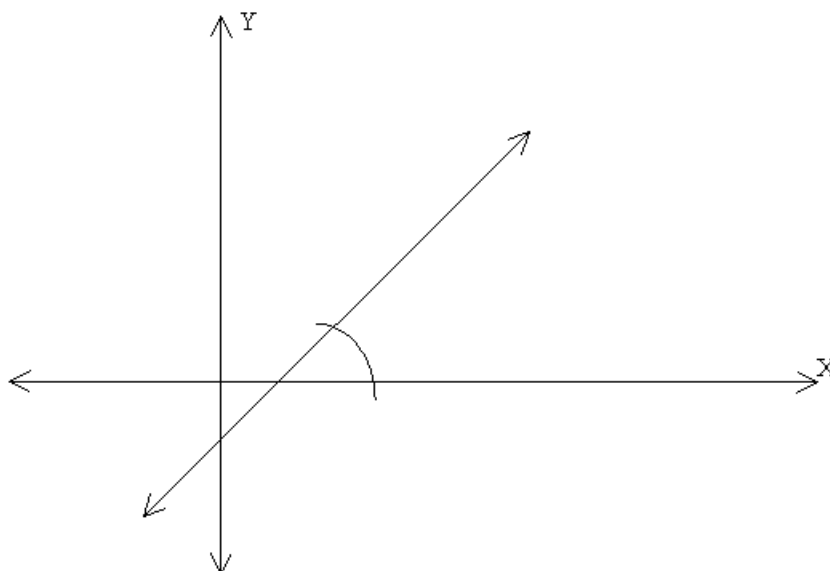
Así, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, entonces la pendiente entre A y B es :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

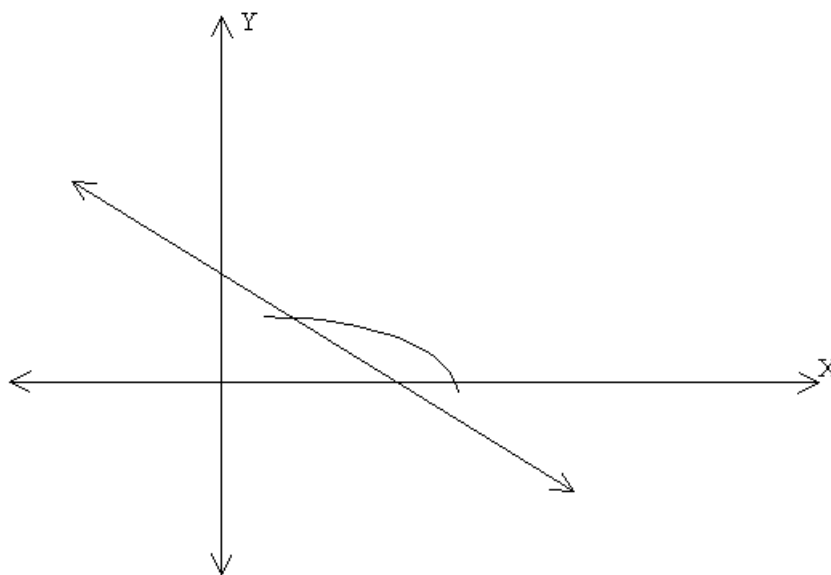
La pendiente es el valor de la tangente trigonométrica del ángulo α , es decir, $m = \operatorname{tg} \alpha$

Propiedades de la pendiente

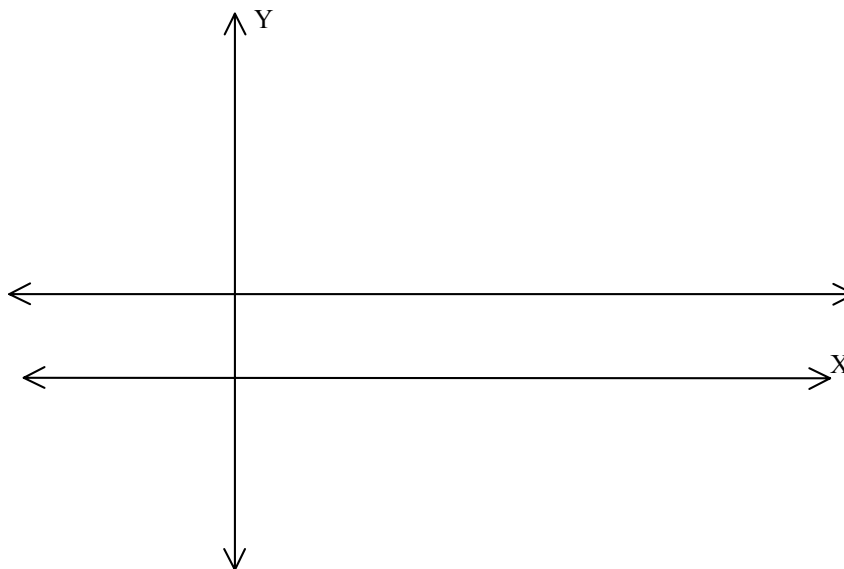
1) Si $m > 0$, entonces α es un ángulo agudo.



2) Si $m < 0$, entonces α es un ángulo obtuso

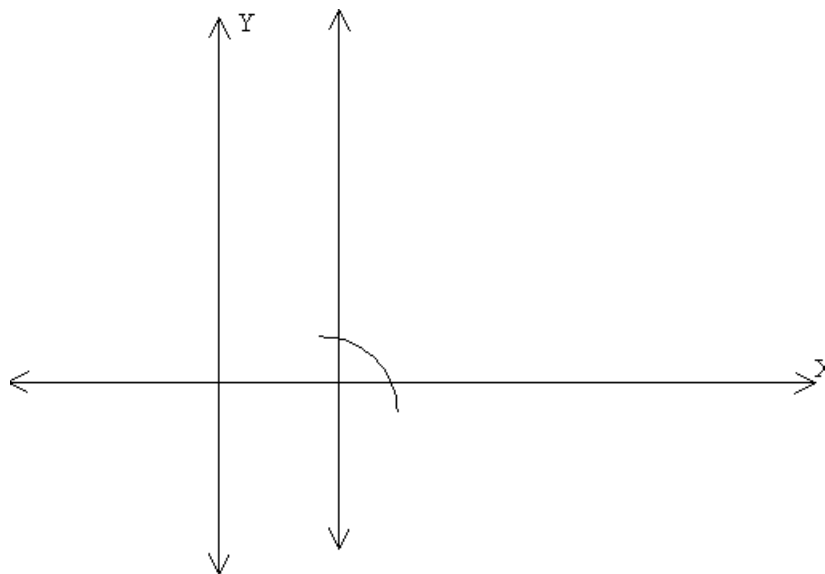


3) Si $m = 0$, entonces α es un ángulo nulo



VIRGINIO GOMEZ

4) Si m no está definida, entonces α es un ángulo recto



Ejemplo :

1) Determine la pendiente entre los puntos A y B, B y C, C y D, D y E si
A(- 3, 6); B(- 3, 2); C(- 1, 1); D(2, 1) y E(5, 5)

$$m_{AB} = \frac{2 - 6}{-3 - (-3)} = \frac{-4}{0} = \infty \quad \alpha \text{ es un ángulo recto}$$

$$m_{BC} = \frac{1 - 2}{-1 - (-3)} = -\frac{1}{2} \quad \alpha \text{ es un ángulo obtuso}$$

$$m_{CD} = \frac{1 - 1}{2 - (-1)} = \frac{0}{3} = 0 \quad \alpha \text{ es un ángulo nulo}$$

$$m_{DE} = \frac{5 - 1}{5 - 2} = \frac{4}{3} \quad \alpha \text{ es un ángulo agudo}$$

VIRGINIO GOMEZ

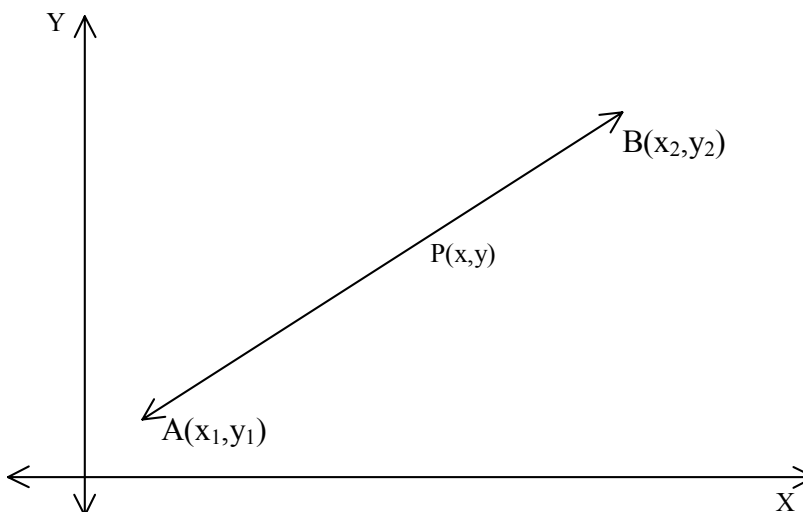
Línea recta

Una recta en \mathbb{R}^2 es un conjunto de pares ordenados que tienen la característica que cualquier pareja de puntos distintos tienen la misma pendiente.

Para determinar la ecuación de una recta existen dos formas :

a) Se conocen dos puntos de ella

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos conocidos de una recta y sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de ella



$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / m_{AP} = m_{AB}\}$$

$$m_{AP} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

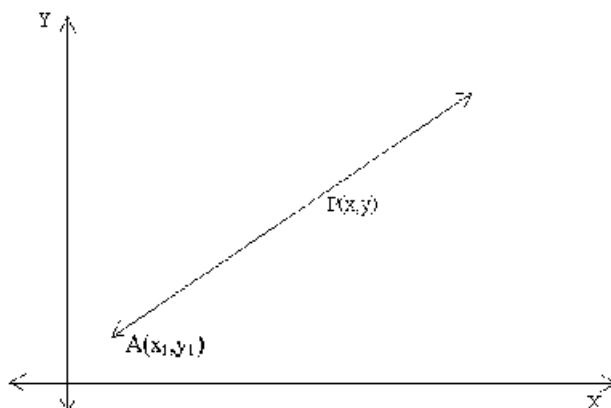
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AP} = m_{AB} \Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

Luego, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos conocidos de una recta , entonces su ecuación es :

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)}$$

b) Si se conoce un punto y su pendiente



Sea $A(x_1, y_1)$ un punto conocido de la recta, $P(x, y)$ un punto cualquiera y m su pendiente

$$m_{AP} = m \Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Luego, si $A(x_1, y_1)$ es un punto conocido de una recta y m su pendiente, entonces su ecuación es :

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplos :

1) Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(-3, -4)$

$$y + 2 = \left(\frac{-4 + 2}{-3 - 1} \right)(x - 1) \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

2) Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, -7)$ y tiene pendiente $-2/3$

$$y + 7 = -\frac{2}{3}(x + 2)$$

Ejercicios Propuestos

En cada uno de los ejercicios propuestos grafique cada caso:

1) Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos :

a) $A(-3, 5)$ y $B(-4, 1)$

b) $C(-1, 3)$ y $D(-5, 2)$

c) $E(5, 7)$ y $F(0, -4)$

2) Determine la ecuación de la recta que pasa por:

a) El punto $A(-2, -7)$ y tiene pendiente $\frac{2}{5}$

b) El punto $A(5, -1)$ y tiene pendiente $-\frac{4}{7}$

c) El punto $A(4, 7)$ y tiene pendiente $-\frac{5}{3}$

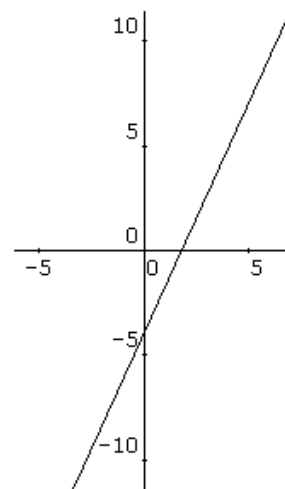
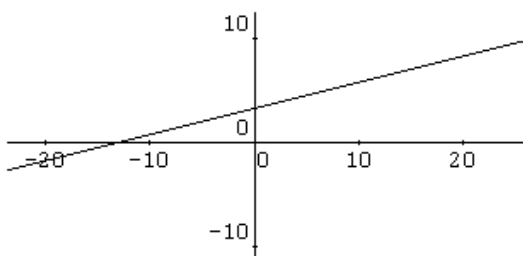
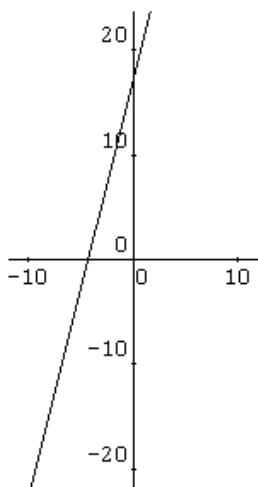
Solución:

1)

a) $y - 5 = 4(x + 3)$

b) $y - 3 = \frac{1}{4}(x + 1)$

c) $y - 7 = \frac{11}{5}(x - 5)$

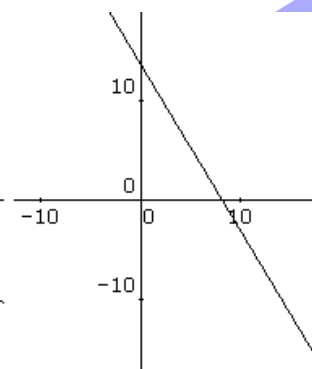
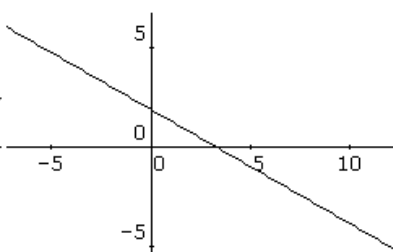
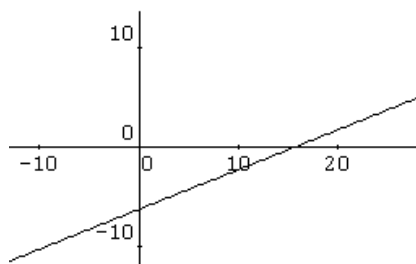


2)

a) $y + 7 = \frac{2}{5}(x + 2)$

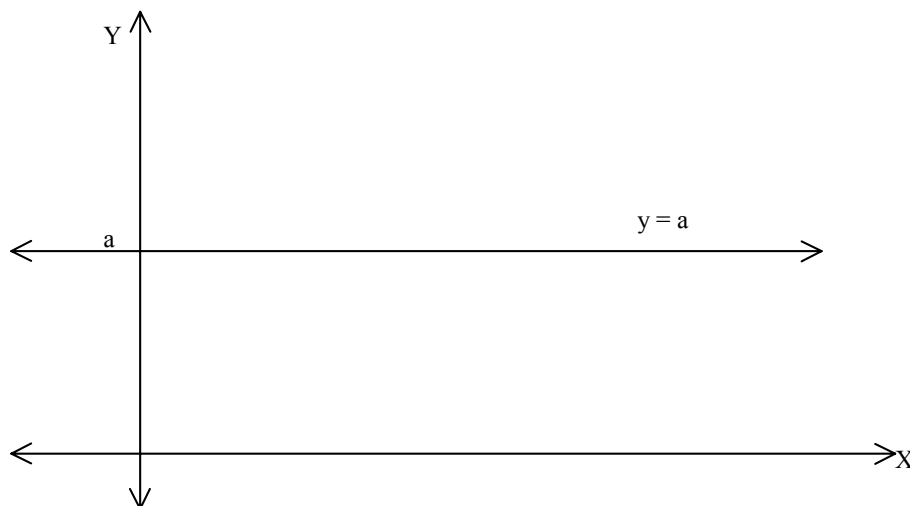
b) $y + 1 = -\frac{4}{7}(x - 5)$

c) $y - 7 = -\frac{5}{3}(x - 4)$

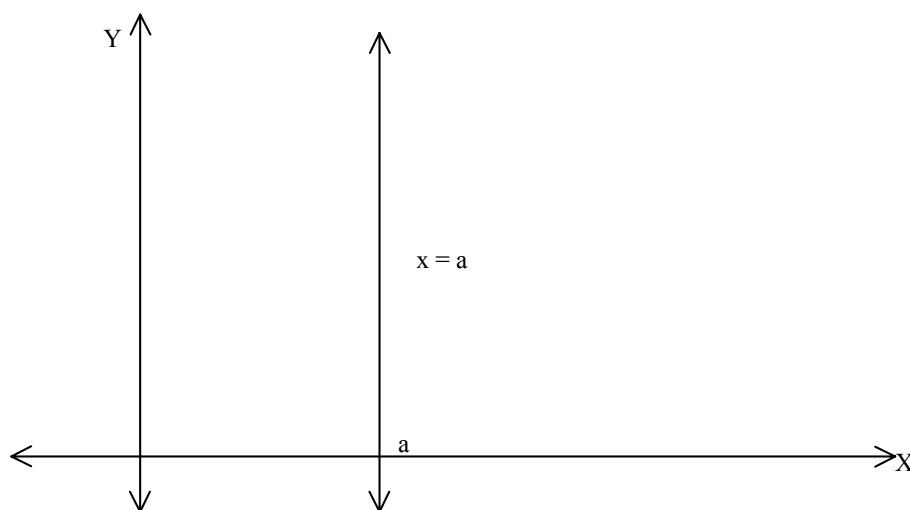


Propiedades

a) Toda recta paralela al eje X tiene por ecuación $y = a$. ($m = 0$)



b) Toda recta paralela al eje Y tiene por ecuación $x = a$. ($m = \infty$)



VIRGINIO GOMEZ

Formas de la ecuación de la recta :

a) Forma general

De $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$ se tiene

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$y(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + [x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)] = 0$$

Si $A = y_1 - y_2$; $B = x_2 - x_1$ y $C = x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)$, entonces

$Ax + By + C = 0$ es la Ecuación General de la recta con $A \neq 0 \vee B \neq 0$

b) Forma principal :

De $y - y_1 = m(x - x_1)$ se tiene

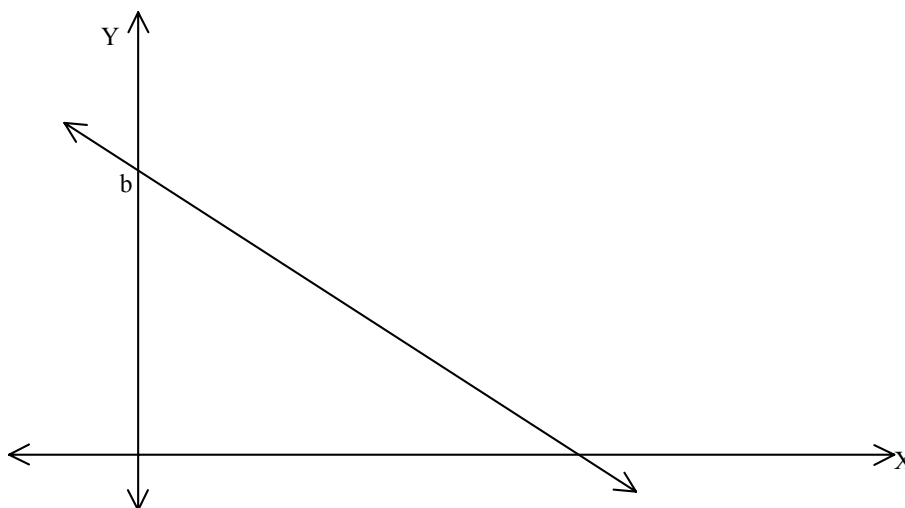
$$y - y_1 = mx - mx_1$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

Si $b = -mx_1 + y_1$, entonces :

$y = mx + b$ es la Ecuación Principal de la recta.

"b" se denomina **coeficiente de posición** y equivale a la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y



c) Ecuación de segmento

Sea $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, entonces :

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab \quad / : ab$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \text{ es la Ecuación de Segmento de la recta}$$

Ejemplos :

Determinar en cada caso, la ecuación general, principal y de segmento de la recta si :

a) pasa por $A(3, 1)$ y $B(-7, 4)$

Ecuación general:

$$y - 1 = \left(\frac{4 - 1}{-7 - 3} \right)(x - 3)$$

$$y - 1 = -\frac{3}{10}(x - 3)$$

$$10y - 10 = -3x + 9$$

$$3x + 10y - 19 = 0$$

Ecuación principal:

$$y - 1 = -\frac{3}{10}(x - 3)$$

$$y = -\frac{3}{10}x + \frac{9}{10} + 1$$

$$y = -\frac{3}{10}x + \frac{19}{10}$$

Ecuación de segmento:

$$3x + 10y - 19 = 0$$

$$3x + 10y = 19 \quad / : 19$$

$$\frac{3}{19}x + \frac{10}{19}y = 1$$

$$\frac{x}{\frac{19}{3}} + \frac{y}{\frac{19}{10}} = 1$$

b) Tiene pendiente $-7/5$ y pasa por el punto A($-1, -2$)

Ecuación general:

$$y + 2 = -\frac{7}{5}(x + 1)$$

$$5y + 10 = -7x - 7$$

$$7x + 5y + 17 = 0$$

Ecuación de segmento:

$$7x + 5y + 17 = 0$$

$$7x + 5y = -17 \quad / : -17$$

$$-\frac{7}{17}x - \frac{5}{17}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{17}{7}} + \frac{y}{-\frac{17}{5}} = 1$$

Ecuación principal:

$$y + 2 = -\frac{7}{5}(x + 1)$$

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{7}{5} - 2$$

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{17}{5}$$

c) corta al eje X en 2 y al eje Y en 3

Ecuación general:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad /6$$

$$3x + 2y = 6$$

$$3x + 2y - 6 = 0$$

Ecuación principal:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\frac{y}{3} = -\frac{x}{2} + 1$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Ecuación de segmento:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

1) Determine y grafique en cada caso, la ecuación general, principal y de segmento de la recta si pasa por los puntos:

a) $A(2, 5)$ y $B(-3, -11)$

b) $C(2, 0)$ y $D(0, 4)$

c) $E(-1, 3)$ y $F(5, 1)$

2) Determine y grafique en cada caso, la ecuación general, principal y de segmento de la recta si:

a) Pasa por el punto $A(6, 7)$ y tiene pendiente $\frac{1}{5}$

b) Pasa por el punto $B(-4, 1)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{2}$

c) Pasa por el punto $C(2, -5)$ y tiene pendiente 6

VIRGINIO GÓMEZ

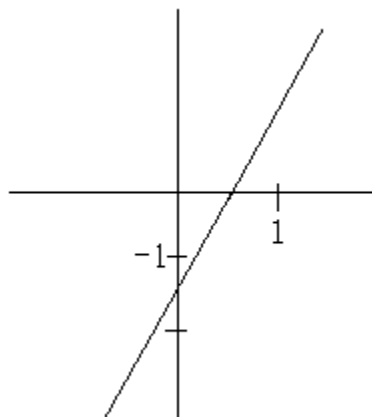
Solución:

1)

a) $y = \frac{16}{5}x - \frac{7}{5}$

$$16x - 5y - 7 = 0$$

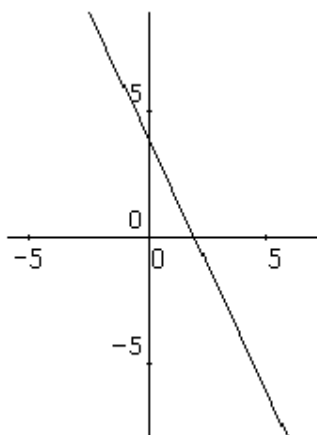
$$\frac{x}{\frac{7}{16}} + \frac{y}{-\frac{7}{5}} = 1$$



b) $y = -2x + 4$

$$2x + y - 4 = 0$$

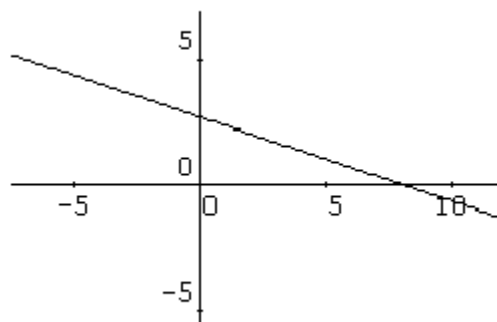
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$$



c) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

$$x + 3y - 8 = 0$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1$$



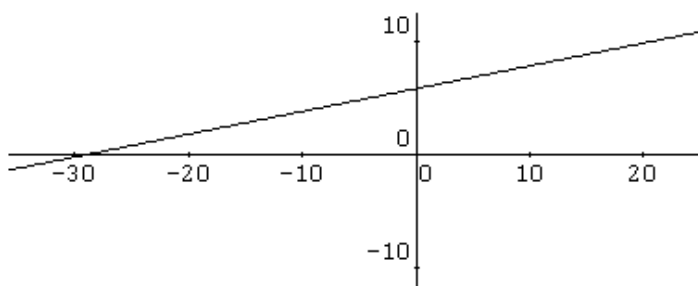
VIRGINIO GOMEZ

2)

$$a) y = \frac{1}{5}x + \frac{29}{5}$$

$$x - 5y + 29 = 0$$

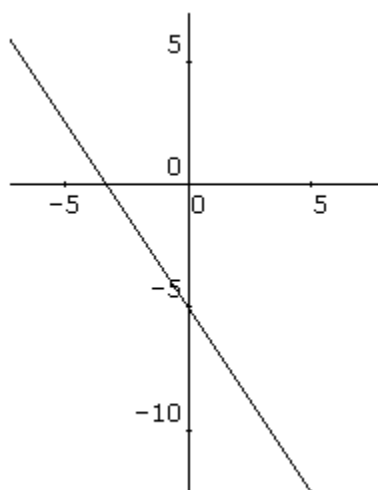
$$\frac{x}{-29} + \frac{y}{\frac{29}{5}} = 1$$



$$b) y = -\frac{3}{2}x - 5$$

$$3x + 2y + 10 = 0$$

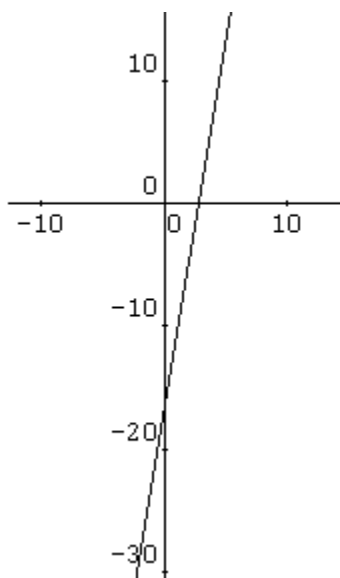
$$\frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{-5} = 1$$



$$c) y = 6x - 17$$

$$6x - y - 17 = 0$$

$$\frac{x}{\frac{17}{6}} + \frac{y}{-17} = 1$$



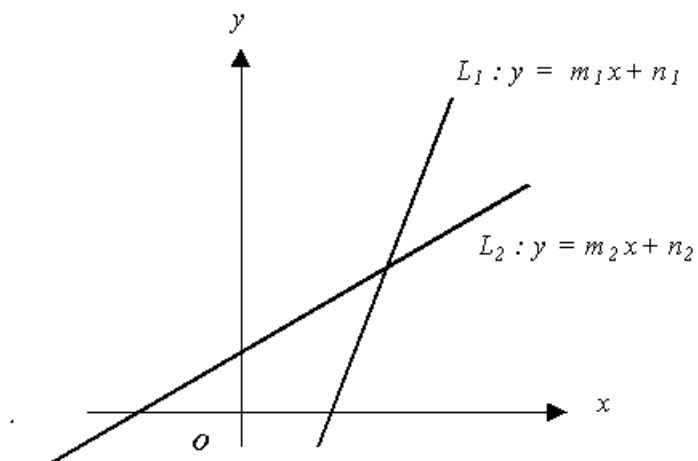
VIRGINIO GÓMEZ

Tipos de Rectas

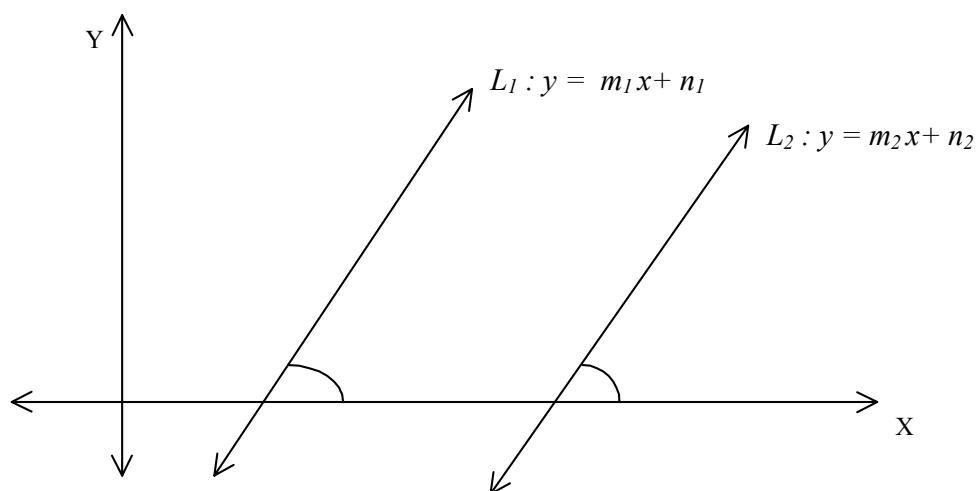
Sean $L_1 : y = m_1x + n_1$

y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces,

a) L_1 es secante a L_2 si , y sólo si, $L_1 \cap L_2$

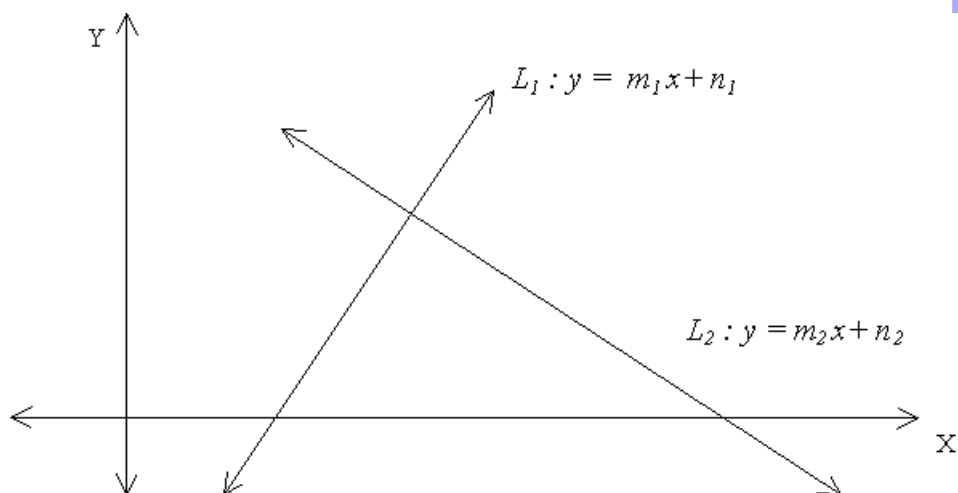


b) L_1 es paralela a L_2 ($L_1 \parallel L_2$) si, y sólo si, $m_1 = m_2$



VIRGINIO GOMEZ

- c) L_1 es perpendicular a L_2 ($L_1 \perp L_2$) si, y sólo si, $m_1 \cdot m_2 = -1$



Ejemplos

- 1) Determine el punto de intersección de las rectas $2x + y = 5$; $3x - 2y = -7$

Para determinar el punto de intersección de las dos rectas, sólo se debe resolver un sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 5 \\ 3x - 2y & = & -7 \end{array} \quad / \cdot 2$$

$$\begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & 10 \\ 3x - 2y & = & -7 \end{array} \quad +$$

$$7x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$$

$$2\left(\frac{3}{7}\right) + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{6}{7} \Rightarrow y = \frac{29}{7}$$

Luego el punto de intersección de las rectas $2x + y = 5$; $3x - 2y = -7$ es el punto $\left(\frac{3}{7}, \frac{29}{7}\right)$

- 2) Decida si las siguientes pares de rectas son paralelas o perpendiculares

a) $L_1 : 2x - 3y = 7$
 $L_2 : 2x - 3y = -8$

En L_1 , se tiene, $2x - 3y = 7 \Rightarrow 2x - 7 = 3y \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} = y$ Luego, $m_{L_1} = \frac{2}{3}$

En L_2 , se tiene, $2x - 3y = -8 \Rightarrow 2x + 8 = 3y \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = y$ Luego, $m_{L_2} = \frac{2}{3}$

Como $m_{L_1} = m_{L_2}$, entonces $L_1 \parallel L_2$

$$\begin{aligned} b) \quad L_1 : 4x - 5y &= 2 \\ L_2 : 5x + 4y &= -1 \end{aligned}$$

En L_1 , se tiene, $4x - 5y = 2 \Rightarrow 4x - 2 = 5y \Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{2}{5} = y$

Luego, $m_{L_1} = \frac{4}{5}$

En L_2 , se tiene, $5x + 4y = -1 \Rightarrow 4y = -5x - 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$

Luego, $m_{L_2} = -\frac{5}{4}$

Como $m_{L_1} \cdot m_{L_2} = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -1$, entonces $L_1 \perp L_2$

3) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1, -2)$ y es

a) paralela con la recta $L_1 : 5x - 2y + 5 = 0$

b) perpendicular con la recta $L_2 : 3x + 4y = 7$

a) Para encontrar la ecuación de la recta buscada se debe conocer la pendiente de la recta L_1 . Además, como la recta buscada debe ser paralela con L_1 , entonces sus pendientes son las mismas.

$$5x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 5x + 5 = 2y \Rightarrow \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} = y$$

Luego la pendiente de $L_1 = \frac{5}{2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta buscada es $\frac{5}{2}$

Su ecuación es:

$$y + 2 = \frac{5}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 4 = 5x - 5 \Rightarrow 5x - 2y - 9 = 0$$

Así, la recta $5x - 2y - 9 = 0$ es paralela con L_1 .

b) Para encontrar la ecuación de la recta buscada se debe conocer la pendiente de la recta L_2 . Además, como la recta buscada debe ser perpendicular con L_2 , entonces el producto de sus pendientes debe ser igual a -1 .

$$3x + 4y = 7 \Rightarrow 4y = -3x + 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

Luego la pendiente de $L_2 = -\frac{3}{4}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta buscada es $\frac{4}{3}$

Su ecuación es:

$$y + 2 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y + 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y - 10 = 0$$

Así, la recta $4x - 3y - 10 = 0$ es perpendicular con L_2 .

4) Determine el valor de k en $kx - (k + 1)y + 3 = 0$ para que la recta :

- a) pase por el punto $(2, -3)$.
- b) sea paralela a la recta $L : 2x - y + 5 = 0$
- c) sea perpendicular a la recta $L : -x + y - 8 = 0$

a) Para que el punto $(2, -3)$ pertenezca a la recta $kx - (k + 1)y + 3 = 0$ se debe reemplazar en la recta x por 2 e y por -3 y resolver la ecuación resultante para k . Si la ecuación tiene solución, entonces el punto pertenece a la recta, de lo contrario, si la ecuación no tiene solución, entonces el punto no pertenece a la recta.

$$k(2) - (k + 1)(-3) + 3 = 0$$

$$2k + 3k + 3 + 3 = 0$$

$$5k = -6$$

$$k = -\frac{6}{5}$$

Luego, la recta es

$$-\frac{6}{5}x - \left(-\frac{6}{5} + 1\right)y + 3 = 0$$

$$-\frac{6}{5}x + \frac{1}{5}y + 3 = 0$$

$$-6x + y + 15 = 0$$

b) Para que la recta $kx - (k + 1)y + 3 = 0$ sea paralela con $L : 2x - y + 5 = 0$ sus pendientes deben ser iguales.

$$kx - (k + 1)y + 3 = 0 \Rightarrow kx + 3 = (k + 1)y \Rightarrow \frac{k}{k + 1} + \frac{3}{k + 1} = y$$

la pendiente de esta recta es $\frac{k}{k + 1}$

$$2x - y + 5 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = y$$

la pendiente de la recta L es 2

$$\text{así, } \frac{k}{k + 1} = 2 \Rightarrow k = 2k + 2 \Rightarrow k = -2$$

Luego, la recta es

$$-2x - (-2 + 1)y + 3 = 0$$

$$-2x + y + 3 = 0$$

c) Para que la recta $kx - (k + 1)y + 3 = 0$ sea perpendicular con $L : -x + y - 8 = 0$ el producto de sus pendientes debe ser igual a -1 .

$$kx - (k + 1)y + 3 = 0 \Rightarrow kx + 3 = (k + 1)y \Rightarrow \frac{k}{k + 1} + \frac{3}{k + 1} = y$$

la pendiente de esta recta es $\frac{k}{k + 1}$

$$-x + y - 8 = 0 \Rightarrow y = x + 8$$

la pendiente de la recta L es 1

$$\text{así, } \frac{k}{k + 1} \cdot (1) = -1 \Rightarrow k = -k - 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Luego, la recta es:

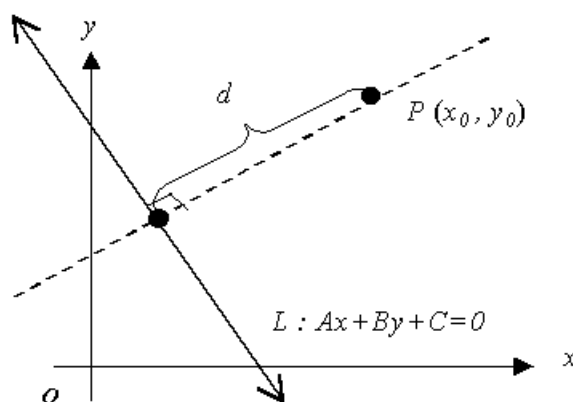
$$-\frac{1}{2}x - \left(-\frac{1}{2} + 1\right)y + 3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 = 0$$

$$x + y - 6 = 0$$

Distancia de un punto a una recta

Sea $L_1: Ax + By + C = 0$ y $P(x_0, y_0)$ un punto que no pertenece a la recta



la distancia d , desde P a la línea recta y denotada por $d(P, L)$ es :

$$d(P, L) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplos:

1) Determinar la distancia que existe desde el punto $A(-3, 4)$ a la recta $L: 3x = 4y - 5$

$$L: 3x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow A = 3, B = -4, C = 5$$

$$d(A, L) = \frac{|3(-3) + (-4)4 + 5|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d(A, L) = \frac{|-20|}{5}$$

$$d(A, L) = 4$$

2) Determinar la distancia que existe entre las rectas

$$L_1: y = 2x - 3$$

$$L_2: y = 2x + 5$$

Como L_1 es paralela con L_2 , ($L_1 \parallel L_2$), basta elegir un punto en la recta L_1 o en la recta L_2 y calcular la distancia de este punto a la otra recta.

Para este ejemplo se elegirá un punto de la recta L_1 , $A(1, -1)$ y se calculará la distancia de este punto a la recta L_2

$$L_2: 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow A = 2, B = -1, C = 5$$

$$d(A, L_2) = \frac{|2(1) + (-1)(-1) + 5|}{\sqrt{4 + 1}}$$

$$d(A, L_2) = \frac{|8|}{\sqrt{5}}$$

$$d(A, L_2) = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Luego la distancia entre las rectas L_1 y L_2 es $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ unidades

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

- 1) Los vértices de un triángulo son:
 $A(-1, 2); \quad B(3, 5); \quad C(1, 7)$
Determinar y graficar:
 - a) Ecuación de sus lados en forma principal y general
 - b) Perímetro del triángulo ABC
 - c) Ecuación de las transversales de gravedad
 - d) Ecuación de las alturas
 - e) Ecuación de las medianas
 - f) Área de triángulo ABC
- 2) Determinar el valor del parámetro k :
 - a) para que el triángulo de vértices $A(4, 2 - k); B(2, 2k - 3); C(-5, 2)$ sea rectángulo en C .
 - b) Para que la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(1, k)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $C(-3, -2)$ y $D(k, 3)$
 - c) Para que la recta $L_1 : 3x - 2y = 9$ sea paralela $L_2 : kx + (k - 1)y + 5 = 0$
- 3) Hallar el valor de k para que la recta $k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$ sea:
 - a) paralela a la recta $3x + 2y + 4 = 0$
 - b) perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$
 - c) pase por el punto $(1, -2)$
- 4) Hallar la distancia del punto $P(2, 6)$ a la recta $L : 4x + 3y = 12$
- 5) Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $3x + 4y = 7$ y que distan 4 de ella.
- 6) Un departamento de policía ha averiguado que el número de crímenes o delitos graves que ocurren por semana es una función del número de oficiales asignados a la vigilancia preventiva. La función matemática es: $c = f(p) = 1250 - 2.5p$, donde c es el número de crímenes por semana y p indica el número de oficiales asignados a la vigilancia preventiva.
 - a) ¿Cuál es el número esperado de crímenes si 250 oficiales son asignados a la vigilancia preventiva?
 - b) ¿Cuántos oficiales habría que asignar si se quisiera reducir a 500 el nivel semanal de crímenes?
 - c) ¿Cuántos oficiales habría que asignar para reducir a cero el nivel semanal de crímenes?

- 7) La utilidad total de plantar x_j acres en la granja j se expresa en la función:

$$P(x_1, x_2) = 400x_1 + 550x_2 - 285.000$$

- a) ¿Cuál es la utilidad total si en la granja 1 se plantan 200 acres y en la granja 2 se plantan 850 acres?
- b) Si en la granja 1 se plantaron 600 acres ¿Cuál debe ser la mínima cantidad de acres plantados en la granja 2 para que exista utilidad?
- c) Identifique una combinación de plantaciones que produzcan una utilidad de cero.
- 8) Hallar los valores de k tales que la distancia de $(-2, 3)$ a la recta $7x - 24y = k$ es 3
- 9) Hallar los valores de k tales que la recta $3x + 4y = k$ determine, con los ejes coordenados, un triángulo de área 6.
- 10) Hallar el punto de la recta $3x + y = -4$ que equidista de $(-5, 6)$ y $(3, 2)$

VIRGINIO GÓMEZ

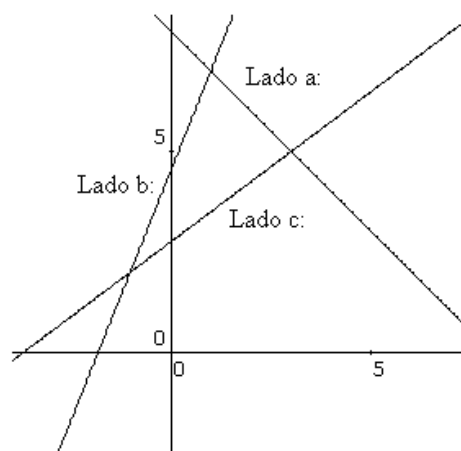
Solución:

1)

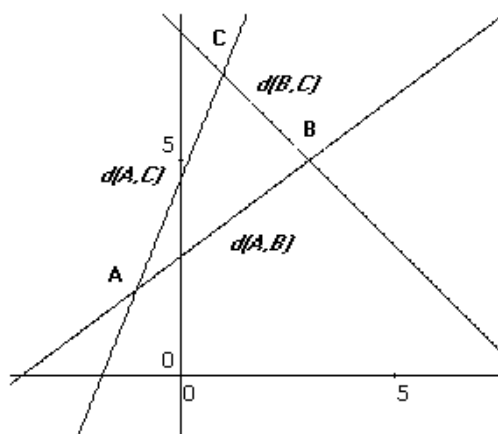
a) Lado a: $y = -x + 8$; $x + y - 8 = 0$

Lado b: $y = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$; $5x - 2y + 9 = 0$

Lado c: $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$; $3x - 4y + 11 = 0$



b) Perímetro = $d(A, B) + d(B, C) + d(A, C) = 5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{29}$

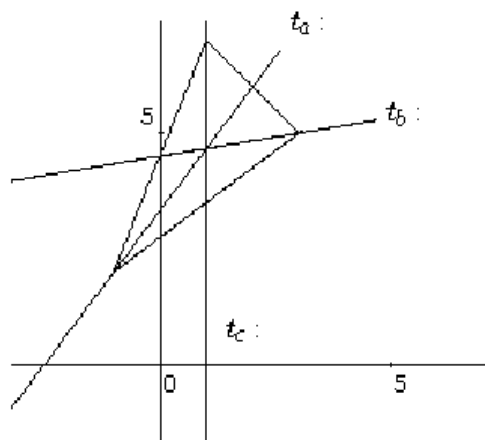


c) Ecuación de las transversales de gravedad

$t_a : 4x - 3y + 10 = 0$

$t_b : x - 6y + 27 = 0$

$t_c : x = 1$

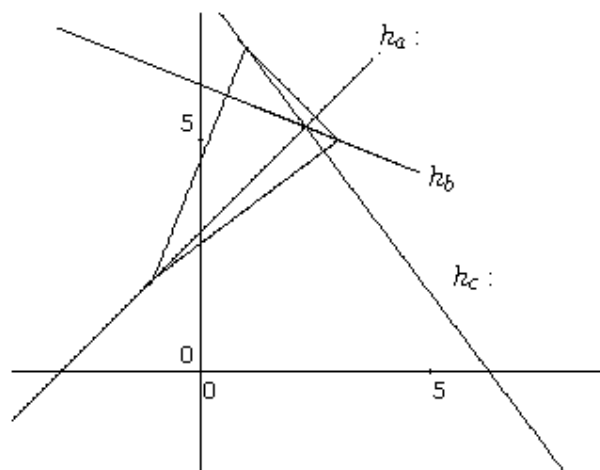


d) Ecuación de las alturas

$$h_a : x - y + 3 = 0$$

$$h_b : 2x + 5y - 31 = 0$$

$$h_c : 4x + 3y - 25 = 0$$

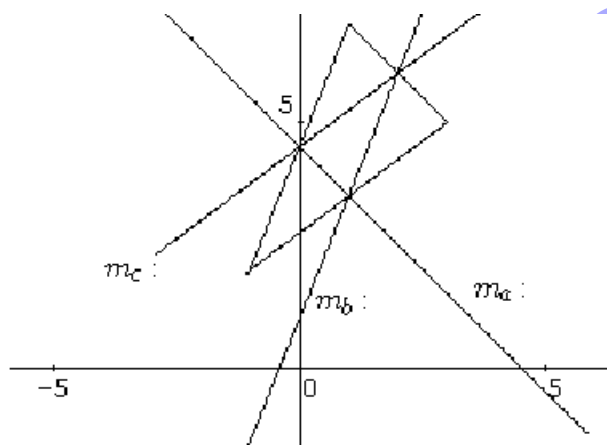


e) Ecuación de las medianas:

$$m_a : 2x + 2y - 9 = 0$$

$$m_b : 5x - 2y + 2 = 0$$

$$m_c : 3x - 4y + 18 = 0$$



f) Area $\triangle ABC = 14$

2) a) $k = 7$; $k = -\frac{9}{2}$ b) $k = -\frac{1}{2}$ c) $k = \frac{3}{5}$

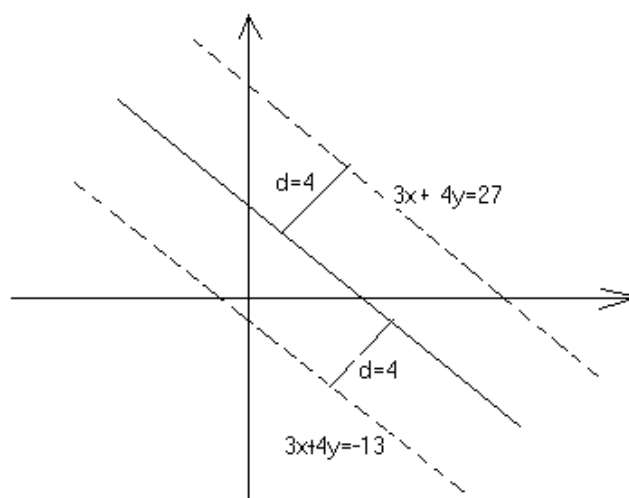
3) a) $k = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$; $k = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$

b) $k = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$; $k = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$

c) $k = 1$

4) Distancia = $\frac{14}{5}$

5)



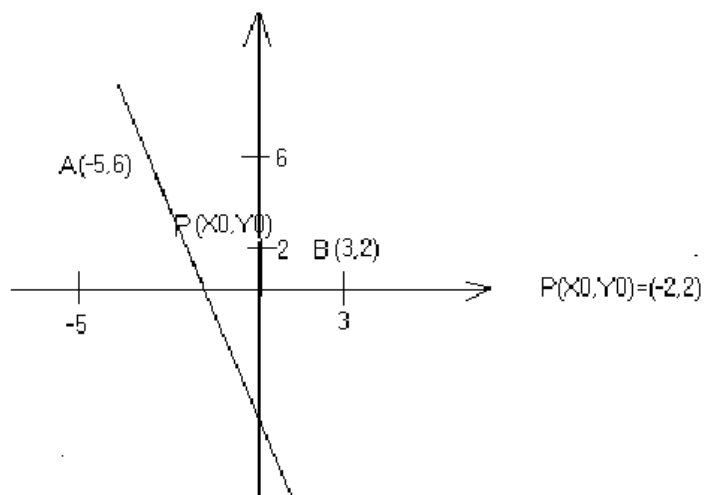
- 6) a) $c = 625$ crímenes.
b) $p = 300$ oficiales
c) $p = 500$ oficiales

- 7) a) $U = \$262.500$
b) 82 acres
c) Granja 1 : 300 acres
Granja 2 : 300 acres.

8) $k = \begin{cases} -161 \\ -11 \end{cases}$

9) $k = \begin{cases} -12 \\ +12 \end{cases}$

10)



Cónicas

Lugar Geométrico:

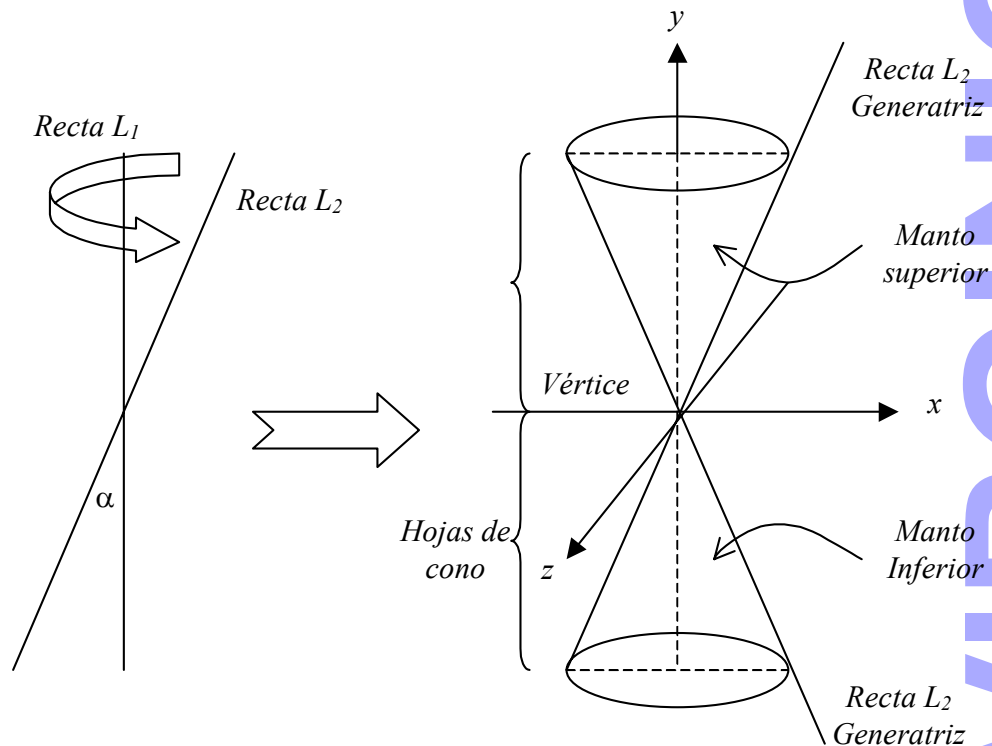
El lugar geométrico de una ecuación es una curva que contiene aquellos puntos y sólo aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Las secciones cónicas se llaman así porque todas ellas son secciones planas de un cono circular recto. Una **circunferencia** puede formarse cortando un cono perpendicular a su eje, una **elipse** se produce cuando el corte del cono es oblicuo al eje y a la superficie, se produce una **hipérbola** cuando el cono es intersectado por un plano paralelo al eje, y resulta una **parábola** cuando el plano de intersección es paralelo a un elemento de la superficie.

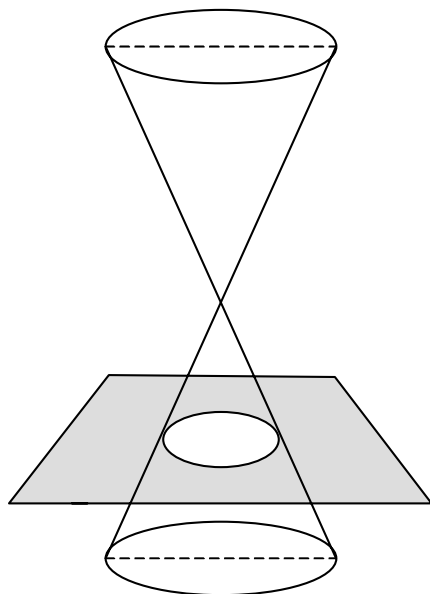
Es decir, a la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola se les llama frecuentemente secciones cónicas porque todas ellas pueden obtenerse como secciones de un cono recto circular al ser cortados por planos. Se entenderá que el cono se extiende indefinidamente a ambos lados de su vértice. Cada cono situado a un lado del vértice se denomina hoja de cono.

Cuando la curva producida cortando el cono se refiere a un sistema de coordenadas se definirá una sección cónica como:

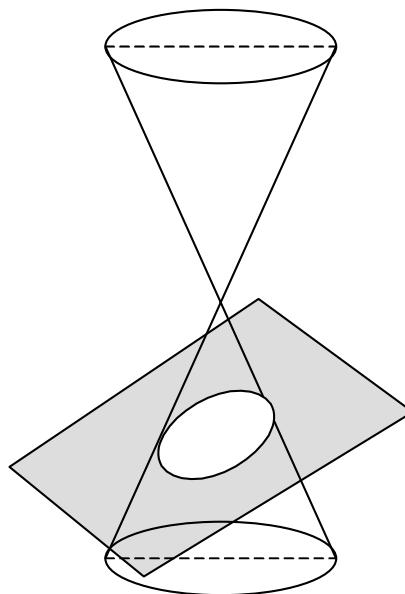
"Una **sección cónica** es el lugar geométrico de un punto que se mueve de modo que su distancia desde un punto fijo es una relación constante respecto de su distancia a una línea fija. El punto fijo se denomina **foco** y la línea fija se llama **directriz**."



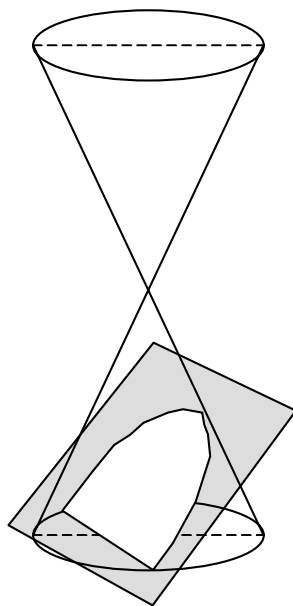
Circunferencia



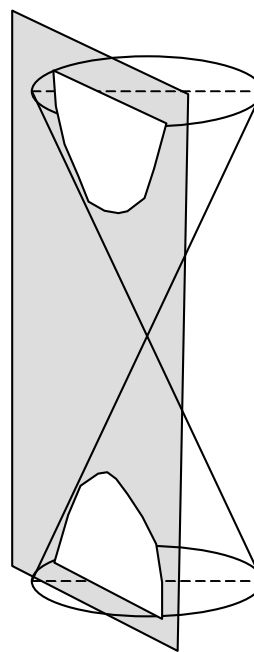
Elipse



Parábola



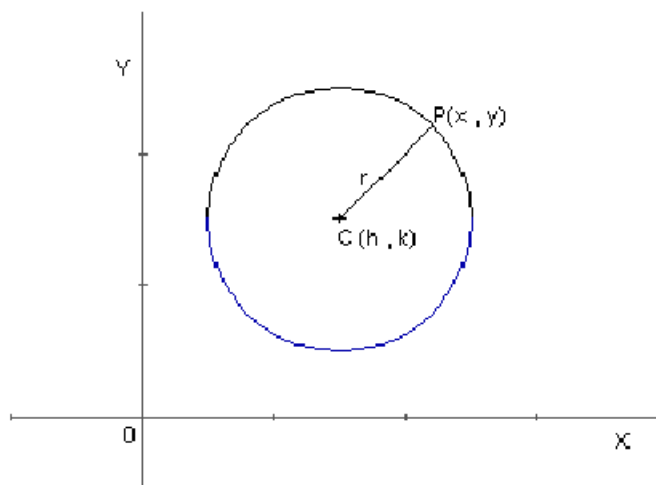
Hipérbola



VIRGINIO GÓMEZ

Circunferencia

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es constante. El punto fijo se llama **centro** y la distancia fija **radio**.



Sea $C(h, k)$ el centro de la circunferencia, $P(x, y)$ un punto de la circunferencia y r el radio, entonces :

$$d(P, C) = r$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

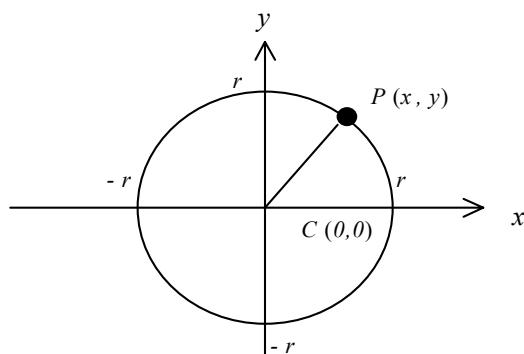
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

es la ecuación reducida de la circunferencia

Si $C(h, k) = (0, 0)$, entonces la ecuación de la circunferencia es :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que se conoce como ecuación canónica de la circunferencia



r : Radio $C(0,0)$: Centro de la \odot
 $x^2 + y^2 = r^2$

Ejemplo :

1) Determine la ecuación de la circunferencia si :

a) $C(1, 2)$ $r = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

b) $C(-2, 0)$ $r = \sqrt{3} \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 3$

c) $C(0, 5)$ $r = 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 24$

d) $C(-3, -4)$ $r = 7 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 49$

2) Obtener el centro y el radio de la circunferencia si su ecuación es :

a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4 \Rightarrow C(1, 4) \wedge r = 2$

b) $x^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow C(0, 2) \wedge r = 1$

c) $(x + 3)^2 + y^2 = 7 \Rightarrow C(-3, 0) \wedge r = \sqrt{7}$

d) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 3 \Rightarrow C(-2, -5) \wedge r = \sqrt{3}$

De la ecuación reducida se tiene :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Si $C = -2h$, $D = -2k$, $E = h^2 + k^2 - r^2$, entonces $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$ es la ecuación general de la circunferencia que también se puede expresar de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \text{ con } A = B}$$

Ejemplos :

1) Dada la ecuación de la circunferencia, determine su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$

Para encontrar la ecuación de la circunferencia reducida dada la ecuación general de la circunferencia se debe realizar el proceso de completación de cuadrado de binomio.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = -1$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -1 + 1 + 4$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow C(1, -2) \wedge r = 2$$

$$b) 16x^2 + 16y^2 - 24x + 16y = 3 \quad / : 16$$

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + y = \frac{3}{16}$$

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + (y^2 + y) = \frac{3}{16}$$

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow C\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) \wedge r = 1$$

2) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1, -4)$ y $B(2, -1)$ y tiene su centro en la recta $4x + 7y + 5 = 0$

Sea $C(h, k)$ el centro de la circunferencia, entonces

$$a) d(A, C) = d(B, C) \quad y \quad b) C(h, k) \in 4x + 7y + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} d(A, C) &= d(B, C) &\Rightarrow \sqrt{(h+1)^2 + (k+4)^2} &= \sqrt{(h-2)^2 + (k+1)^2} \\ &&\Rightarrow (h+1)^2 + (k+4)^2 &= (h-2)^2 + (k+1)^2 \\ &&\Rightarrow h^2 + 2h + 1 + k^2 + 8k + 16 &= h^2 - 4h + 4 + k^2 + 2k + 1 \\ &&\Rightarrow 6h + 6k + 12 &= 0 \\ &&\Rightarrow h + k + 2 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$C(h, k) \in 4x + 7y + 5 = 0 \quad \Rightarrow 4h + 7k + 5 = 0 \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene el siguiente sistema :

$$\begin{aligned} h + k + 2 &= 0 \\ 4h + 7k + 5 &= 0 \end{aligned} \quad \text{donde } h = -3, k = 1. \text{ Así } C(-3, 1)$$

$$r = d(A, C) \text{ o } r = d(B, C)$$

$$r = \sqrt{(-3+1)^2 + (1+4)^2} \Rightarrow r = \sqrt{29}$$

Luego la ecuación de la circunferencia es : $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 29$

Ejercicios Propuestos

- 1) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(2, -4)$ y que es tangente al eje Y .
- 2) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(3, -2)$ y que es tangente al eje X .
- 3) Una circunferencia pasa por los puntos $(-3, 3)$ y $(1, 4)$, y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hallar su ecuación.
- 4) Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x - 7y + 25 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.
- 5) Obtener la ecuación de la circunferencia si tiene centro en el punto $(2, 3)$, y es tangente a la recta que contiene los puntos $(2, -2)$ y $(6, -5)$.
- 6) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2, 4)$, $Q(6, 2)$ y $R(2, -2)$.
- 7) ¿Para qué valores de k pasa el círculo $(x + 2k)^2 + (y - 3k)^2 = 10$ por el punto $(1, 0)$?
- 8) Hallar el valor de k tal que $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ sea la ecuación de un círculo de radio 5.
- 9) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$ y tangente a la recta $2x - y = 3$.
- 10) Hallar la ecuación de las circunferencias de radio 10 tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.

Solución:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

3) $x^2 + y^2 - 4x + 17y - 81 = 0$

4) Longitud cuerda : $5\sqrt{2}$

5) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

6) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$

7) $k = \frac{9}{13}, k = -1$

8) $k = -12$

9) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0$

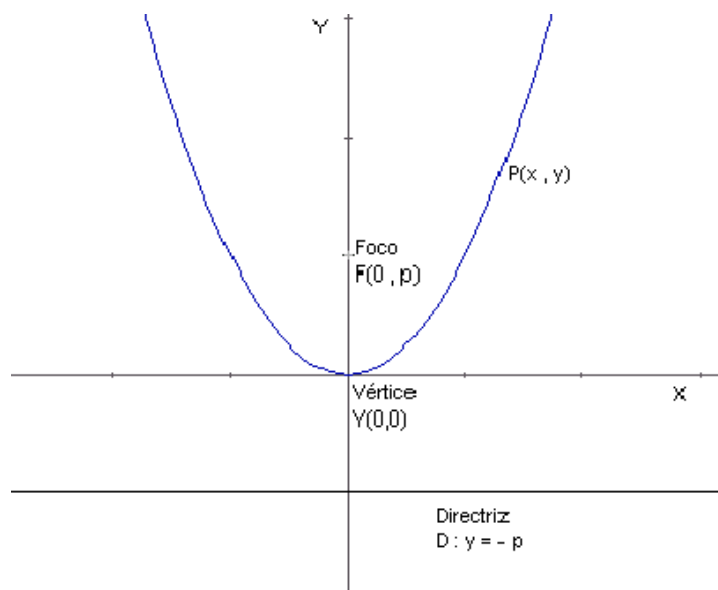
10) $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 125 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0$

VIRGINIO GOMEZ

Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz**.



Si $F(0, p)$ es el foco de la parábola, $D : y = -p$ es la ecuación de su directriz y $P(x, y)$ es un punto de ella, entonces :

$$d(P, F) = d(D, P)$$

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \frac{|y + p|}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2} \quad /()^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$\boxed{x^2 = 4py} \quad \text{es la ecuación canónica de la parábola}$$

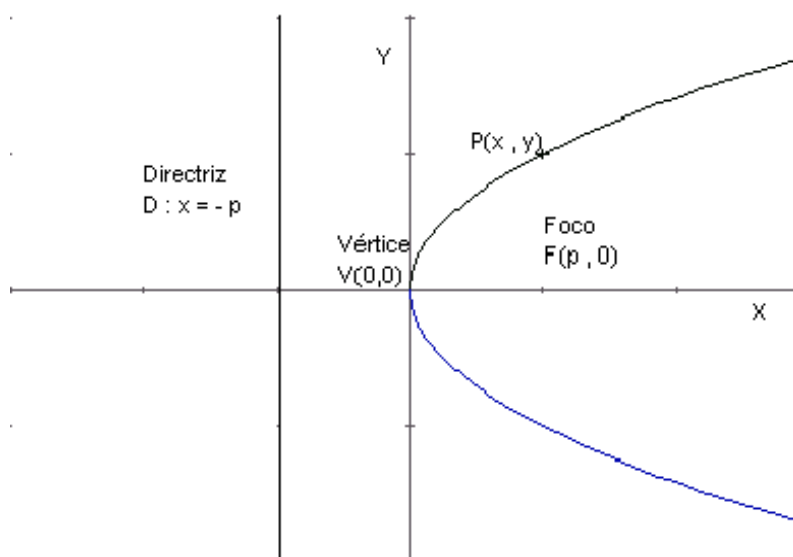
El punto $V(0, 0)$ se denomina **vértice de la parábola**, la recta $x = 0$ se llama **eje de simetría de la parábola**. El trazo perpendicular al eje de la parábola y que pasa por el foco se denomina **lado recto** y su longitud es $|4p|$.

Si $p > 0$, entonces la curva queda situada sobre el eje X, es no negativa y simétrica respecto al eje Y.

Si $p < 0$, entonces la curva queda situada bajo el eje X, es no positiva y simétrica respecto al eje Y.

Si $F(p, 0)$ es el foco de la parábola, $D : x = -p$ es la ecuación de su directriz y $P(x, y)$ es un punto de ella, entonces su ecuación canónica es :

$$\boxed{y^2 = 4px}$$



Vértice : $V(0, 0)$
Foco : $F(p, 0)$
Directriz : $D : x = -p$
Eje de simetría : $y = 0$
Long. lado recto : $|4p|$

Si $p > 0$, entonces la curva queda situada a la derecha del eje Y y es simétrica respecto al eje X.

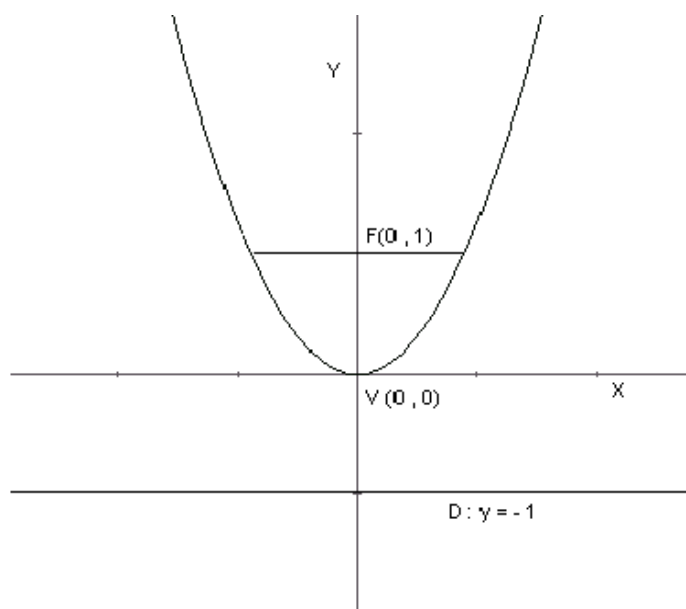
Si $p < 0$, entonces la curva queda situada a la izquierda del eje Y y es simétrica respecto al eje X.

Ejemplo :

Determine vértice, foco, directriz, longitud del lado recto, eje de la parábola y gráfico en

$$a) x^2 = 4y \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$$

Vértice : $V(0, 0)$
Foco : $F(0, 1)$
Directriz : $D : y = -1$
Eje de simetría : $x = 0$
Long. lado recto : 4



$$b) y^2 = -2x \Rightarrow 4p = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$$

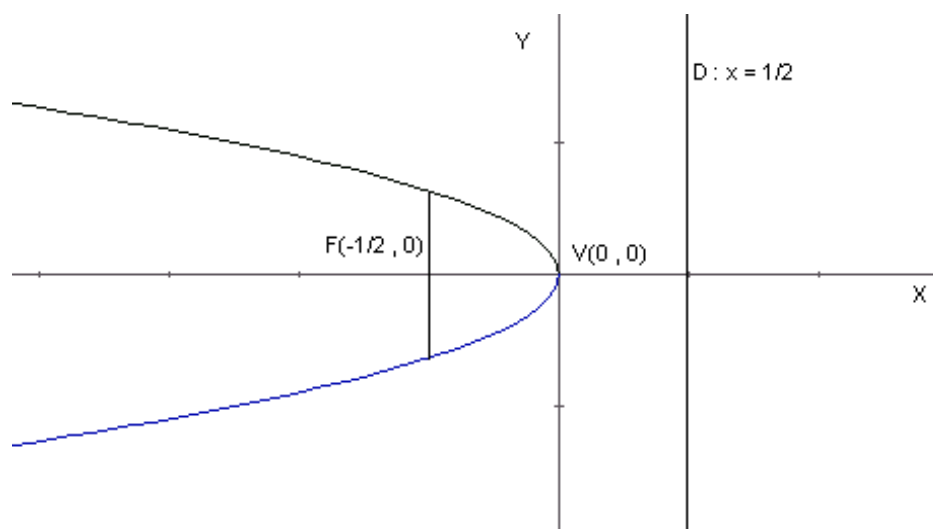
Vértice : $V(0, 0)$

Foco : $F(-\frac{1}{2}, 0)$

Directriz : $D: x = \frac{1}{2}$

Eje de simetría : $y = 0$

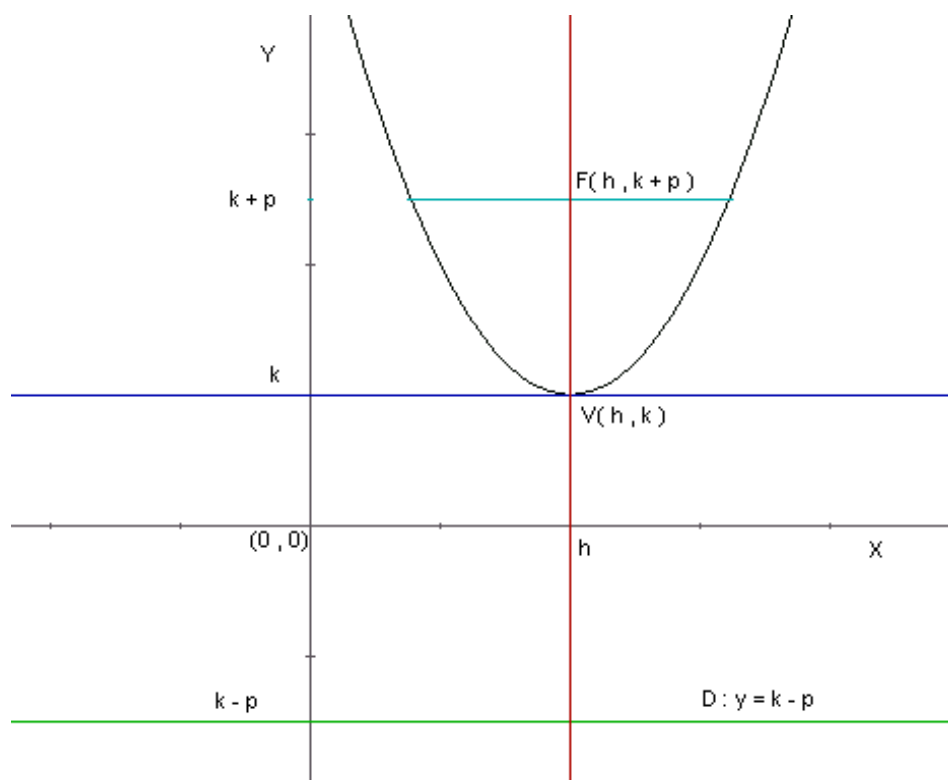
Long. lado recto : 2



c) $x^2 = -8y$

d) $y^2 = x$

Si $V(h, k)$ es el vértice y el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje Y, entonces

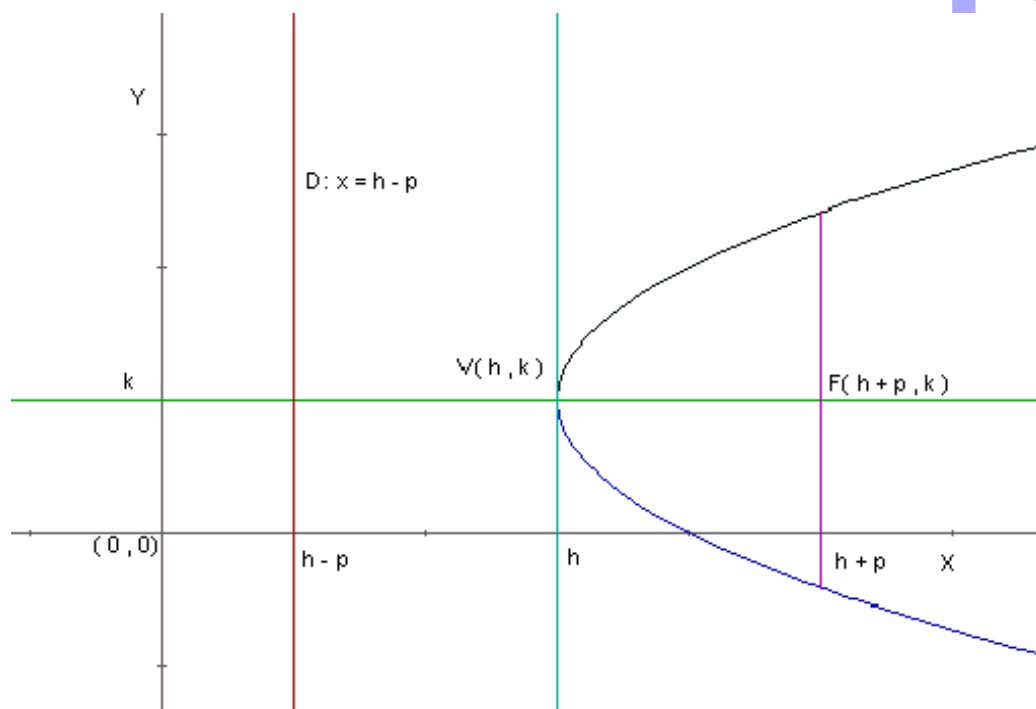


Ecuación : $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
 Vértice : $V(h, k)$
 Foco : $F(h, k + p)$
 Directriz : $D : y = k - p$
 Eje de simetría : $x = h$
 Long. l. recto : $|4p|$

Si $p > 0$, entonces la curva es cóncava hacia arriba.

Si $p < 0$, entonces la curva es cóncava hacia abajo.

Si $V(h, k)$ es el vértice y el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje X, entonces



Ecuación : $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
 Vértice : $V(h, k)$
 Foco : $F(h + p, k)$
 Directriz : $D : x = h - p$
 Eje de simetría : $y = k$
 Long. l. recto : $|4p|$

Si $p > 0$, entonces la curva es abierta hacia la derecha.

Si $p < 0$, entonces la curva es abierta hacia la izquierda.

La ecuación general de la parábola es :

$$Ax^2 + By + Cx + D = 0 \quad \text{ó} \quad Ax + By^2 + Cy + D = 0$$

Ejemplo :

Determine vértice, foco, directriz, longitud del lado recto, eje de la parábola y gráfico en

$$\begin{aligned} a) x^2 + 4x + 4y + 12 = 0 &\Rightarrow (x^2 + 4x) = -4y - 12 \\ &\Rightarrow (x^2 + 4x + 4) = -4y - 12 + 4 \\ &\Rightarrow (x + 2)^2 = -4(y + 2) \quad \Rightarrow 4p = -4 \\ &\quad \quad \quad \Rightarrow p = -1 \end{aligned}$$

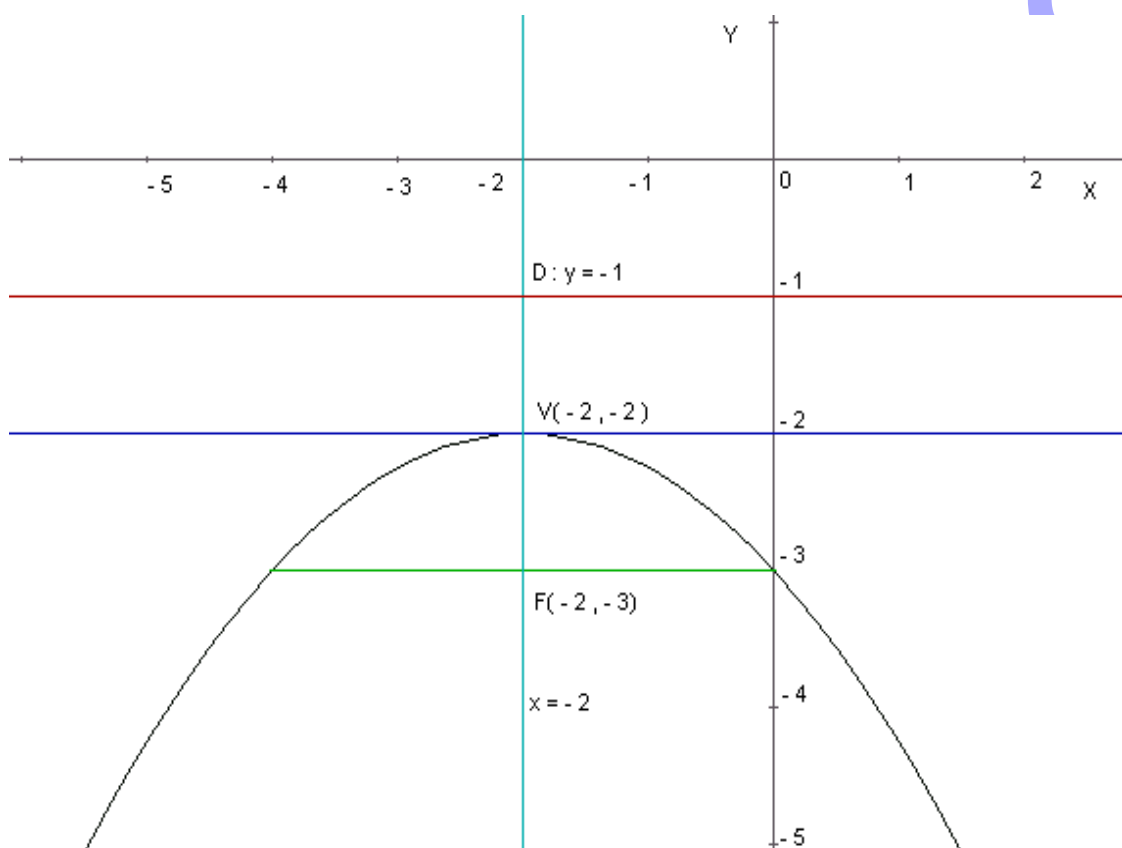
Vértice : $V(-2, -2)$

Foco : $F(-2, -3)$

Directriz : $D : y = -1$

Eje de simetría : $x = -2$

Long. l. recto : 4



$$\begin{aligned} b) \ y^2 - 4x - 6y + 13 &= 0 \Rightarrow (y^2 - 6y) = 4x - 13 \\ &\Rightarrow (y^2 - 6y + 9) = 4x - 13 + 9 \\ &\Rightarrow (y - 3)^2 = 4(x - 1) \Rightarrow 4p = 4 \\ &\Rightarrow p = 1 \end{aligned}$$

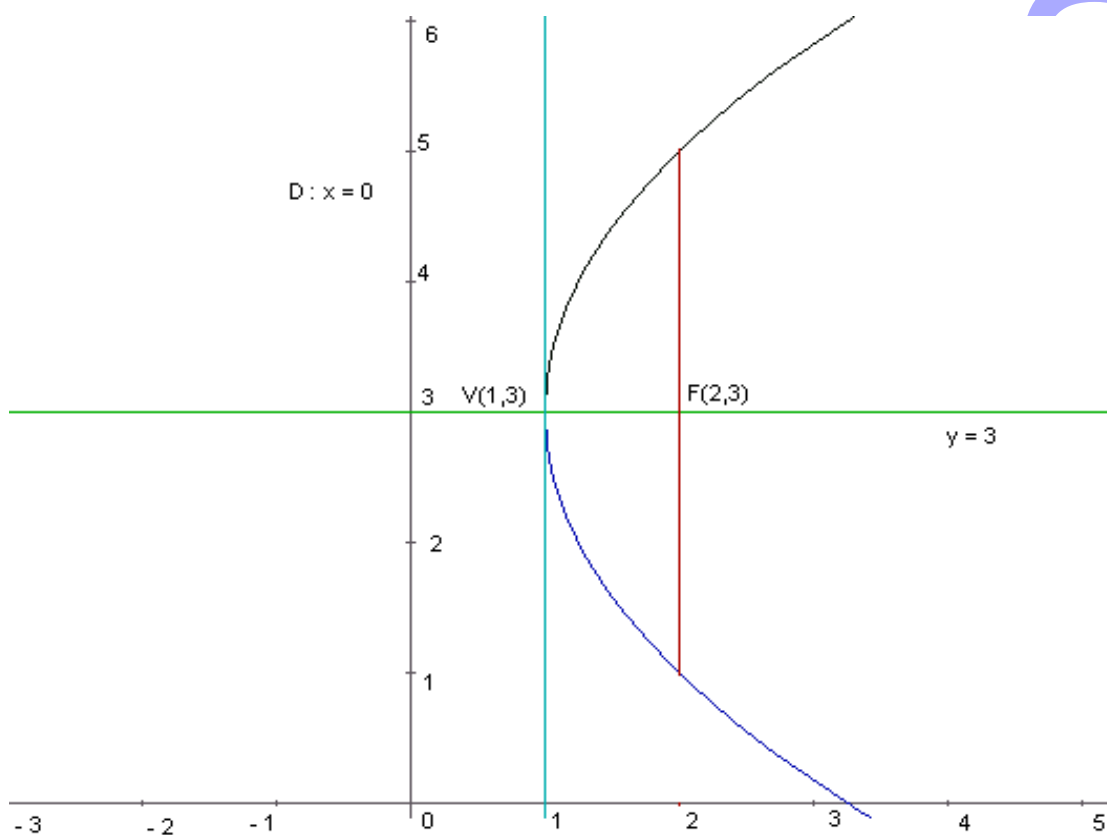
Vértice : $V(1, 3)$

Foco : $F(2, 3)$

Directriz : $D : x = 0$

Eje de simetría : $y = 3$

Long. l. recto : 4



c) $y^2 + 8x + 4y - 12 = 0$

d) $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

Ejercicios Propuestos

- 1) Hallar el vértice, foco, directriz, longitud del lado recto y gráfico de:
 - a) $y^2 + 16x = 0$
 - b) $2y - 3x^2 = 0$
 - c) $5x^2 + 4y = 0$
- 2) Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(3, 3)$ y $(3, 1)$ respectivamente. Hallar además la ecuación de su directriz y la longitud del lado recto.
- 3) Hallar la ecuación de la parábola de foco en el punto $(6, -2)$ y directriz la recta $x = 2$.
- 4) Dada la parábola de ecuación $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$, hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz.
- 5) Determinar la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(3, 0)$ y directriz $x = 1$
- 6) Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje y como eje de simetría y que contenga al punto $(3, 18)$
- 7) Determinar la ecuación de la parábola con vértice en $(3, 5)$, eje de simetría paralelo al eje y , contiene al punto $(5, 7)$
- 8) Hallar la ecuación de la parábola con eje de simetría paralelo al eje X , que contiene los puntos $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$
- 9) Si el lado recto de una parábola es el segmento que une $(2, 4)$ con $(6, 4)$, determinar la ecuación respectiva si la parábola pasa por el punto $(8, 1)$
- 10) Si una parábola pasa por los puntos $(1, 10)$ y $(2, 4)$, con eje de simetría vertical y vértice sobre la recta $4x - 3y = 6$, determinar su ecuación.

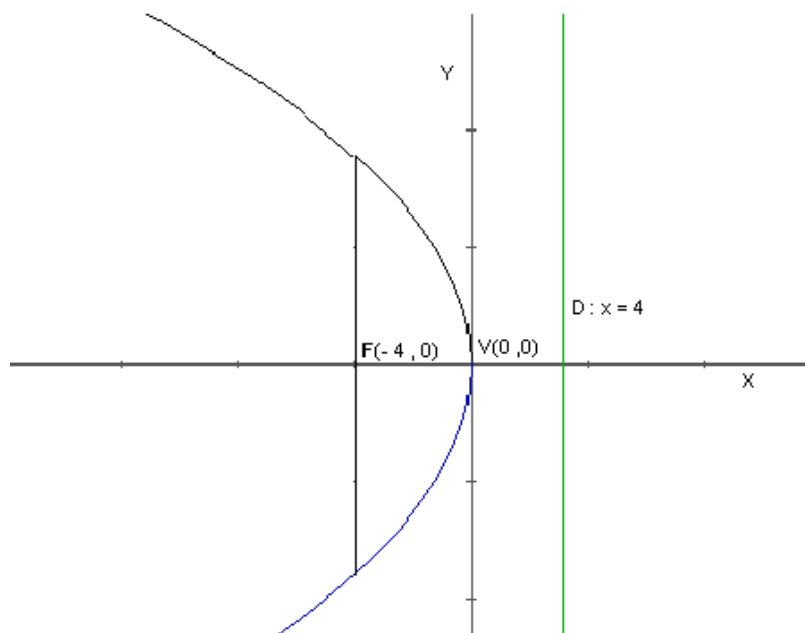
Solución:

1) a) Vértice: $V(0, 0)$

Foco: $F(-4, 0)$

Directriz: $x = 4$

Long lado recto: $|4p| = 16$



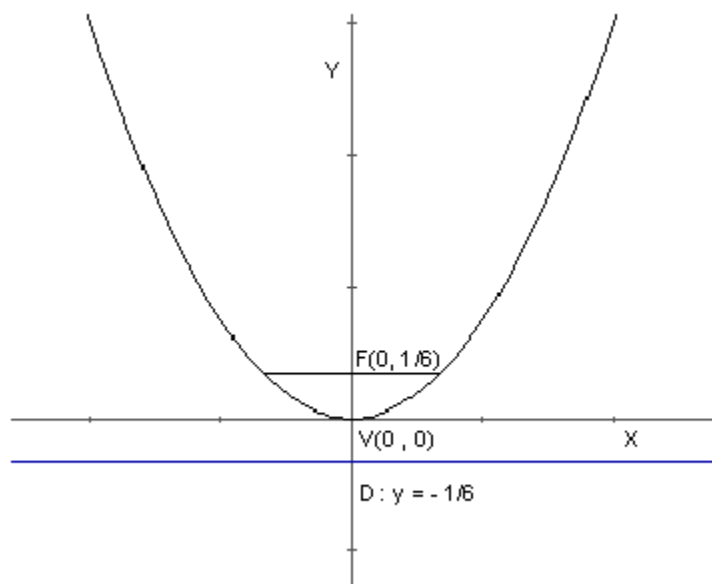
b) Vértice: $V(0, 0)$

Foco: $F\left(0, \frac{1}{6}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{6}$

Long lado recto: $|4p| = \frac{2}{3}$

VIRGINIO GOMEZ

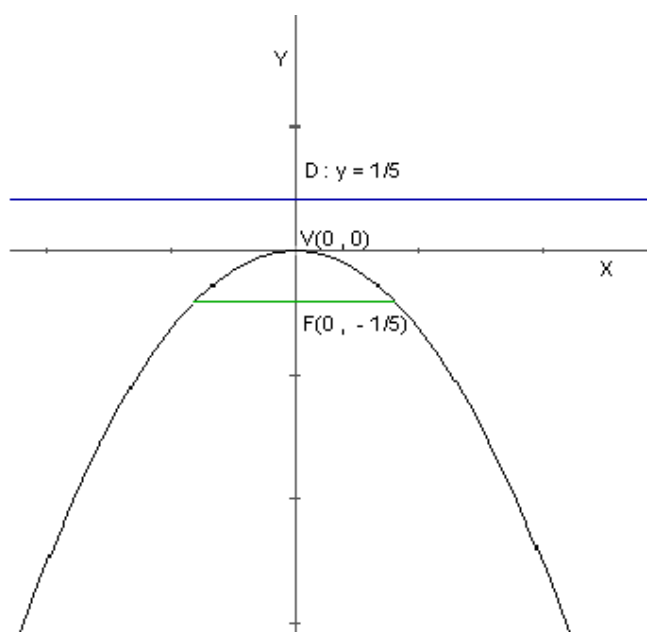


c) Vértice: $V(0, 0)$

Foco: $F\left(0, -\frac{1}{5}\right)$

Directriz: $y = \frac{1}{5}$

Long lado recto: $|4p| = \frac{4}{5}$



VIRGINIO GOMEZ

2) Ecuación: $x^2 - 6x + 8y - 15 = 0$

Directriz: $y = 5$

Long lado recto: $|4p| = 8$

3) Ecuación: $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$

4) Vértice: $V(-2, -4)$

Foco: $F\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$

5) $y^2 = 8(x - 3)$

6) $x^2 = \frac{1}{2}y$

7) $(x - 3)^3 = 2(y - 5)$

8) $\left(y - \frac{21}{10}\right)^2 = -\frac{2}{5}\left(x - \frac{121}{40}\right)$

9) $(x - 4)^2 = -4(y - 5)$

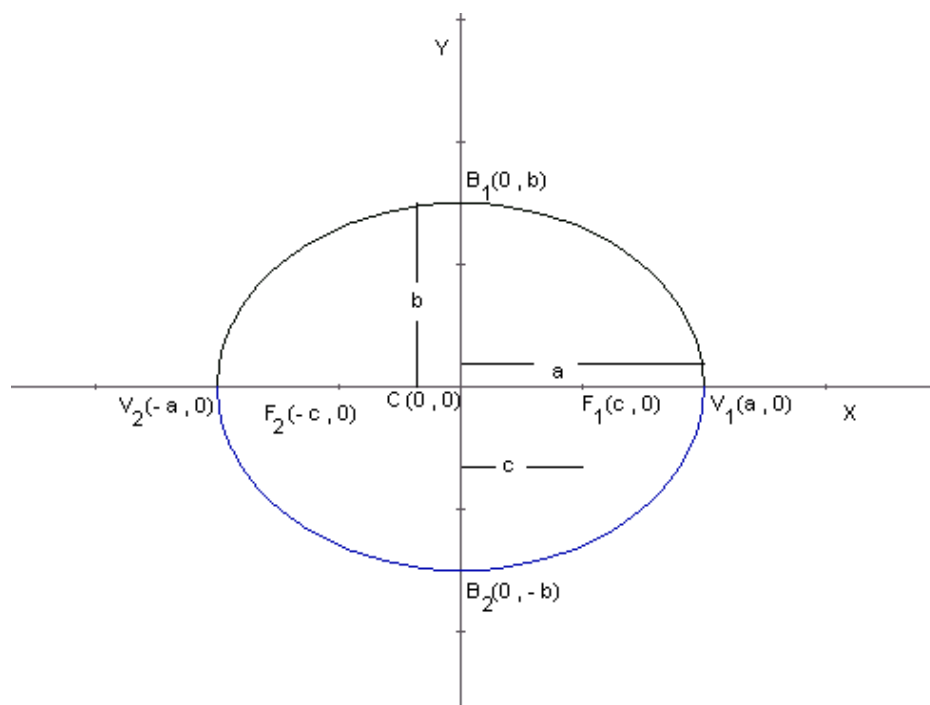
10) $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y - 2)$

$\left(x - \frac{21}{13}\right)^2 = \frac{1}{26}\left(y - \frac{2}{13}\right)$

VIRGINIO GOMEZ

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman **focos** y la distancia constante se designa por **$2a$**



Sean $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ los focos, $2a$ la distancia constante y $P(x, y)$ un punto de la elipse, entonces :

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad , \text{pero } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{así} \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ es la ecuación canónica de la elipse}$$

$$\text{Si } y = 0, \text{ entonces } \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$$

Los puntos $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$ se denominan **vértices del eje mayor** y los puntos $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ se llaman **vértices del eje menor**. Los focos F_1 y F_2 quedan siempre ubicados sobre el eje mayor.

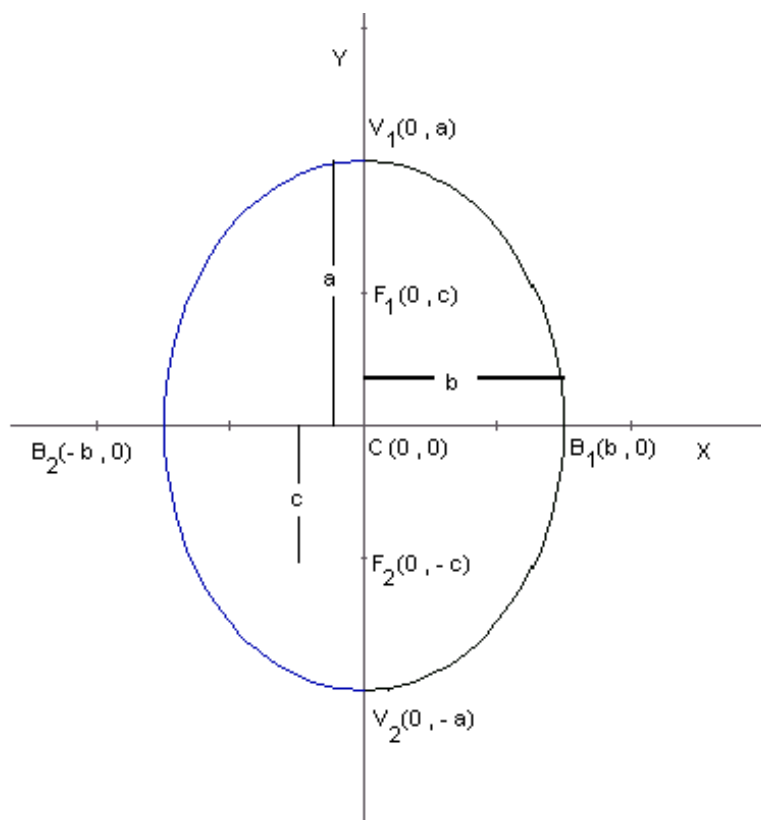
La longitud del eje mayor es $2a$, la longitud del eje menor es $2b$ y la longitud del eje focal es $2c$.

La razón $e = \frac{c}{a}$ se denomina excentricidad y señala el grado de mayor o menor alargamiento de la elipse.

Como $a > c$, entonces $0 < e < 1$

Si los focos de la elipse son $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$ y la distancia constante es $2a$, entonces su ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Centro	: $C(0, 0)$
Vértices eje mayor	: $V_1(0, a)$; $V_2(0, -a)$
Vértices eje menor	: $B_1(b, 0)$; $B_2(-b, 0)$
Focos	: $F_1(0, c)$; $F_2(0, -c)$
Excentricidad	: $e = \frac{c}{a}$

Ejemplo :

Determine centro, vértices del eje mayor y menor, focos, excentricidad y gráfico de :

$$a) 9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \quad / : 144$$

$$\frac{9}{144}x^2 + \frac{16}{144}y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &= 1 & \Rightarrow a^2 &= 16 & \Rightarrow a &= \pm 4 \\ & & \Rightarrow b^2 &= 9 & \Rightarrow b &= \pm 3 \\ & & \Rightarrow c^2 &= 7 & \Rightarrow c &= \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

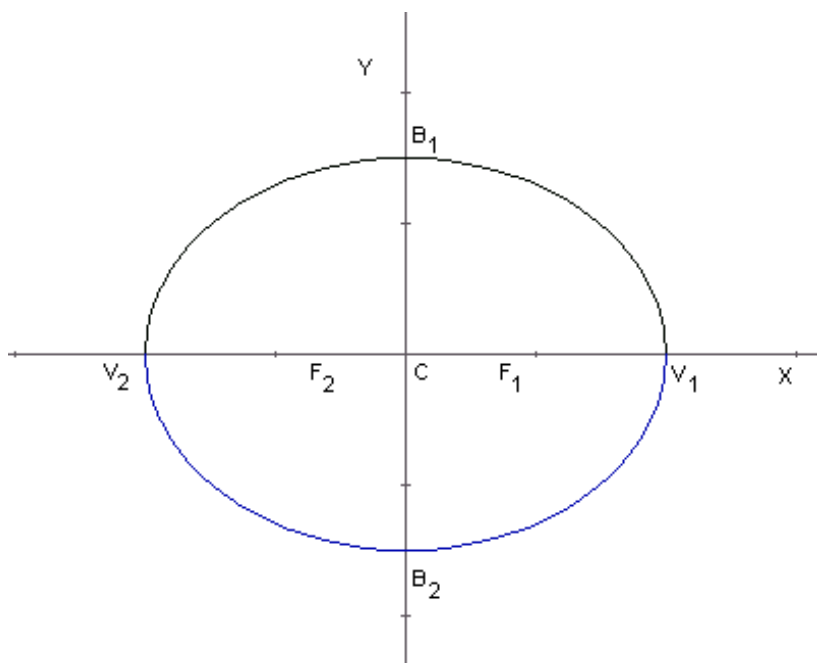
Centro : $C(0, 0)$

Vértices eje mayor : $V_1(4, 0) ; V_2(-4, 0)$

Vértices eje menor : $B_1(0, 3) ; B_2(0, -3)$

Focos : $F_1(\sqrt{7}, 0) ; F_2(-\sqrt{7}, 0)$

Excentricidad : $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$



VIRGINIO GOMEZ

$$b) 25x^2 + 4y^2 = 100$$

$$25x^2 + 4y^2 = 100 \quad / : 100$$

$$\frac{25}{100}x^2 + \frac{4}{100}y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \quad \Rightarrow a = \pm 5$$

$$\Rightarrow b^2 = 4 \quad \Rightarrow b = \pm 2$$

$$\Rightarrow c^2 = 21 \quad \Rightarrow c = \pm \sqrt{21}$$

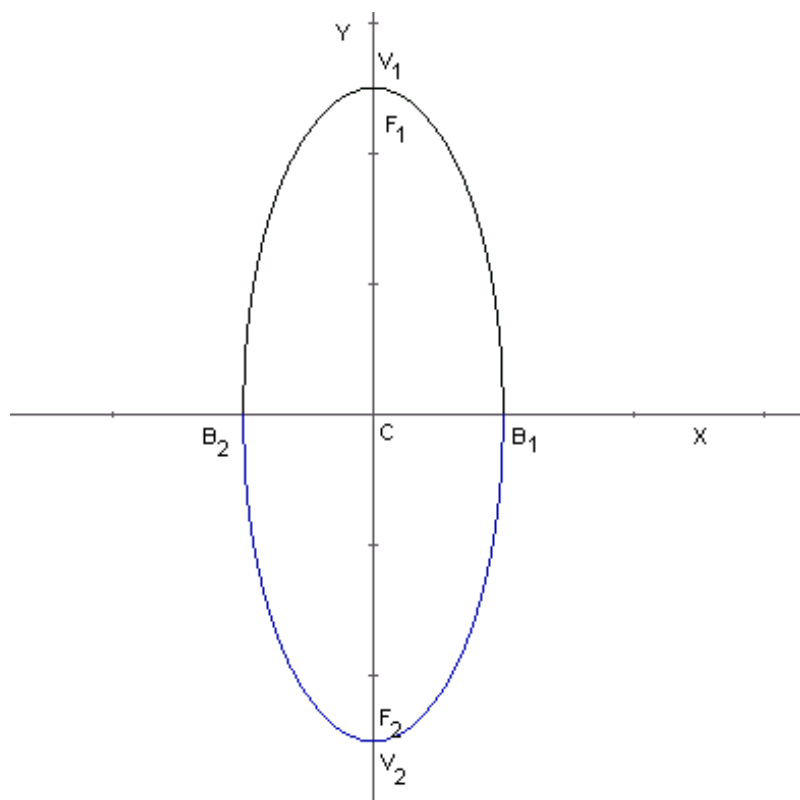
Centro : $C(0, 0)$

Vértices eje mayor : $V_1(0, 5) ; V_2(0, -5)$

Vértices eje menor : $B_1(2, 0) ; B_2(-2, 0)$

Focos : $F_1(0, \sqrt{21}) ; F_2(0, -\sqrt{21})$

Excentricidad : $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$



VIRGINIO GÓMEZ

c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

d) $9x^2 + 25y^2 = 225$

Si $C(h, k)$ es el centro de la elipse y el eje focal es paralelo al eje X, entonces la ecuación reducida es :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

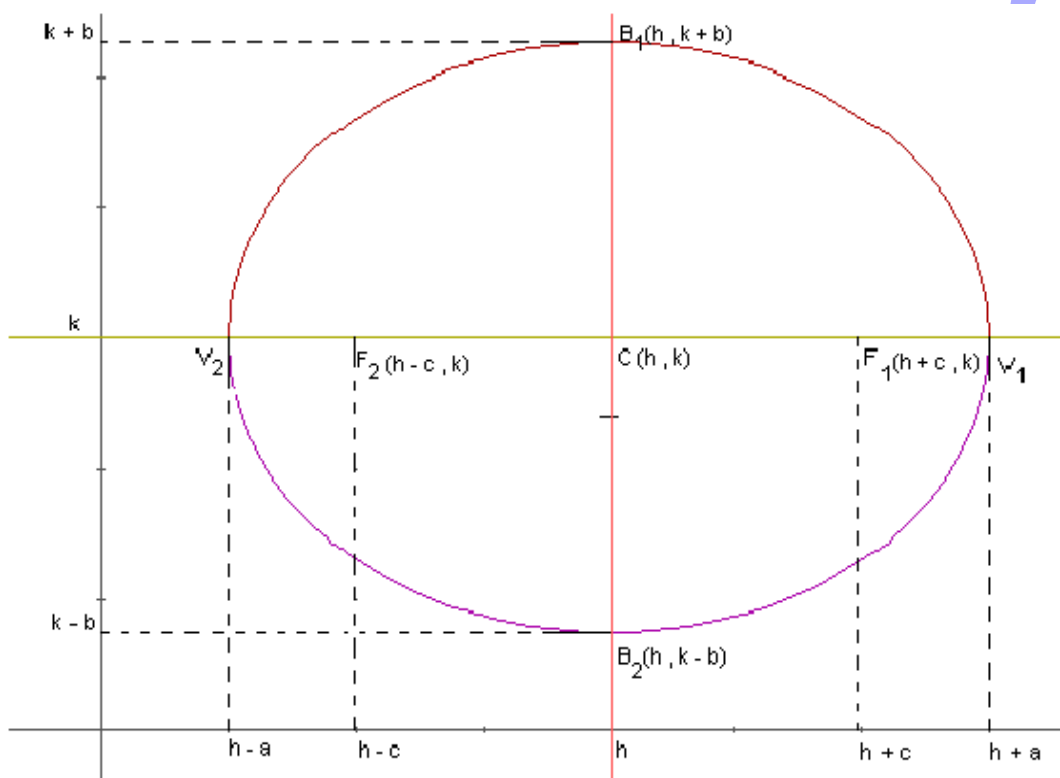
Centro : $C(h, k)$

Vértices eje mayor : $V_1(h + a, k)$; $V_2(h - a, k)$

Vértices eje menor : $B_1(h, k + b)$; $B_2(h, k - b)$

Focos : $F_1(h + c, k)$; $F_2(h - c, k)$

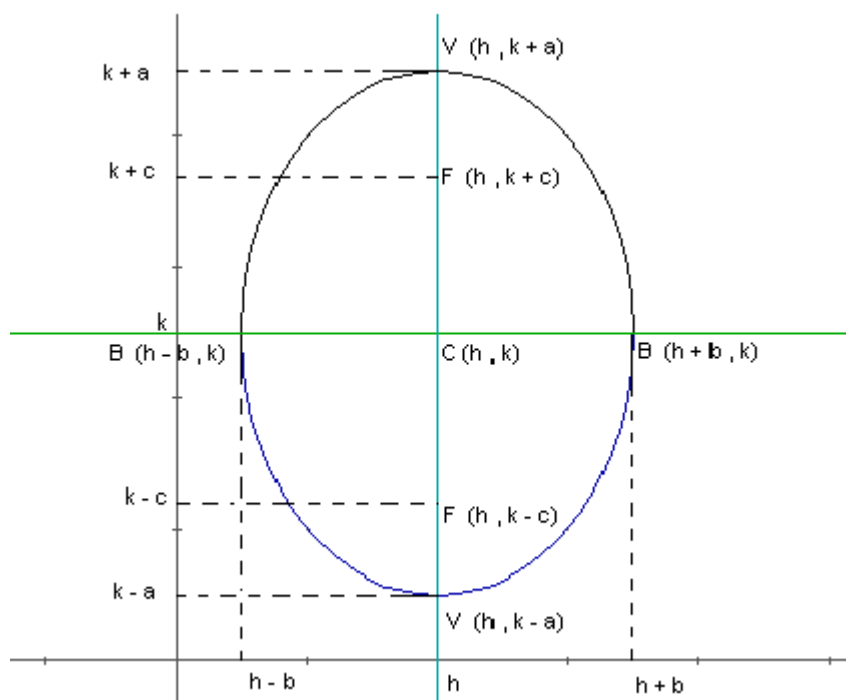
Excentricidad : $e = \frac{c}{a}$



Si $C(h, k)$ es el centro de la elipse y el eje focal es paralelo al eje Y, entonces la ecuación reducida es :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Centro	: $C(h, k)$
Vértices eje mayor	: $V_1(h, k + a)$; $V_2(h, k - a)$
Vértices eje menor	: $B_1(h - b, k)$; $B_2(h + b, k)$
Focos	: $F_1(h, k + c)$; $F_2(h, k - c)$
Excentricidad	: $e = \frac{c}{a}$



La forma general de la ecuación de la elipse es :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0 \quad \text{con } A \neq B$$

Ejemplo :

Determine centro, vértices del eje mayor y menor, focos, excentricidad y gráfico de :

$$a) 9x^2 + 25y^2 - 18x + 150y + 9 = 0$$

$$9x^2 + 25y^2 - 18x + 150y + 9 = 0$$

$$(9x^2 - 18x) + (25y^2 + 150y) = -9$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 6y) = -9$$

$$9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 6y + 9) = -9 + 9 + 225$$

$$9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 6y + 9) = 225$$

$$9(x - 1)^2 + 25(y + 3)^2 = 225 \quad / : 225$$

$$\frac{9}{225}(x - 1)^2 + \frac{25}{225}(y + 3)^2 = 1$$

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$$

$$\Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$\Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = \pm 4$$

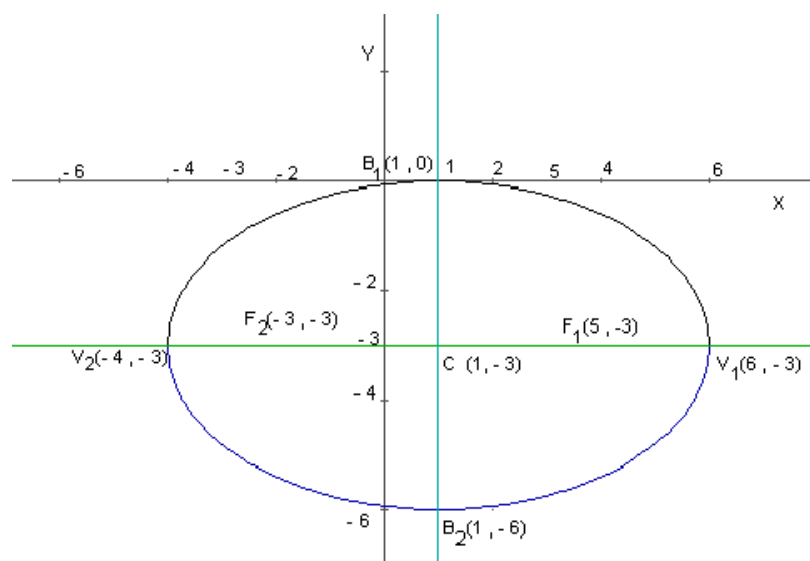
Centro : $C(1, -3)$

Vértices eje mayor : $V_1(6, -3)$; $V_2(-4, -3)$

Vértices eje menor : $B_1(1, 0)$; $B_2(1, -6)$

Focos : $F_1(5, -3)$; $F_2(-3, -3)$

Excentricidad : $e = \frac{4}{5}$



$$b) 25x^2 + 16y^2 + 100x + 32y - 284 = 0$$

$$25x^2 + 16y^2 + 100x + 32y - 284 = 0$$

$$(25x^2 + 100x) + (16y^2 + 32y) = 284$$

$$25(x^2 + 4x) + 16(y^2 + 2y) = 284$$

$$25(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 + 2y + 1) = 284 + 100 + 16$$

$$25(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 + 2y + 1) = 400$$

$$25(x + 2)^2 + 16(y + 1)^2 = 400 \quad / : 400$$

$$\frac{25}{400}(x + 2)^2 + \frac{16}{400}(y + 1)^2 = 1$$

$$\frac{(x + 2)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{25} = 1 \quad \Rightarrow a^2 = 25 \quad \Rightarrow a = \pm 5$$

$$\Rightarrow b^2 = 16 \quad \Rightarrow b = \pm 4$$

$$\Rightarrow c^2 = 9 \quad \Rightarrow c = \pm 3$$

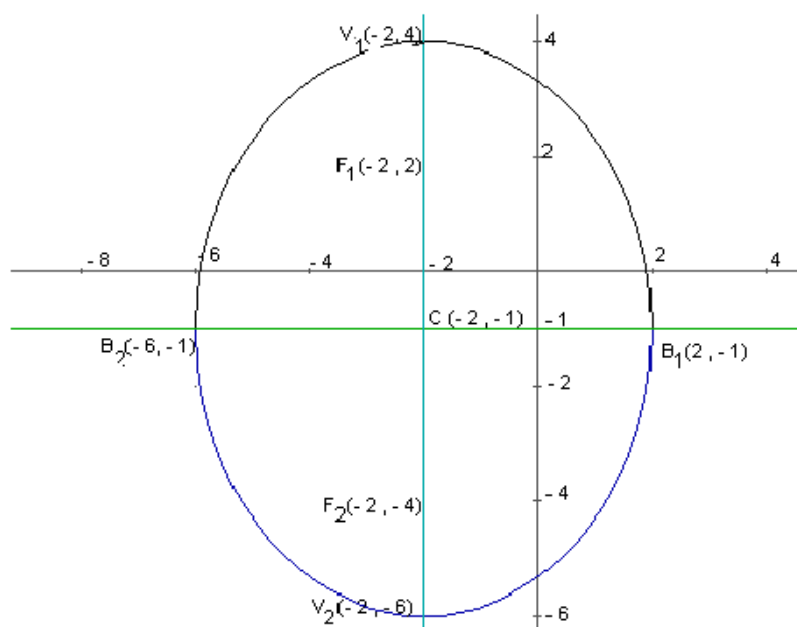
Centro : $C(-2, -1)$

Vértices eje mayor : $V_1(-2, 4)$; $V_2(-2, -6)$

Vértices eje menor : $B_1(2, -1)$; $B_2(-6, -1)$

Focos : $F_1(-2, 2)$; $F_2(-2, -4)$

Excentricidad : $e = \frac{3}{5}$



c) $100x^2 + 36y^2 - 400x + 72y - 3164 = 0$

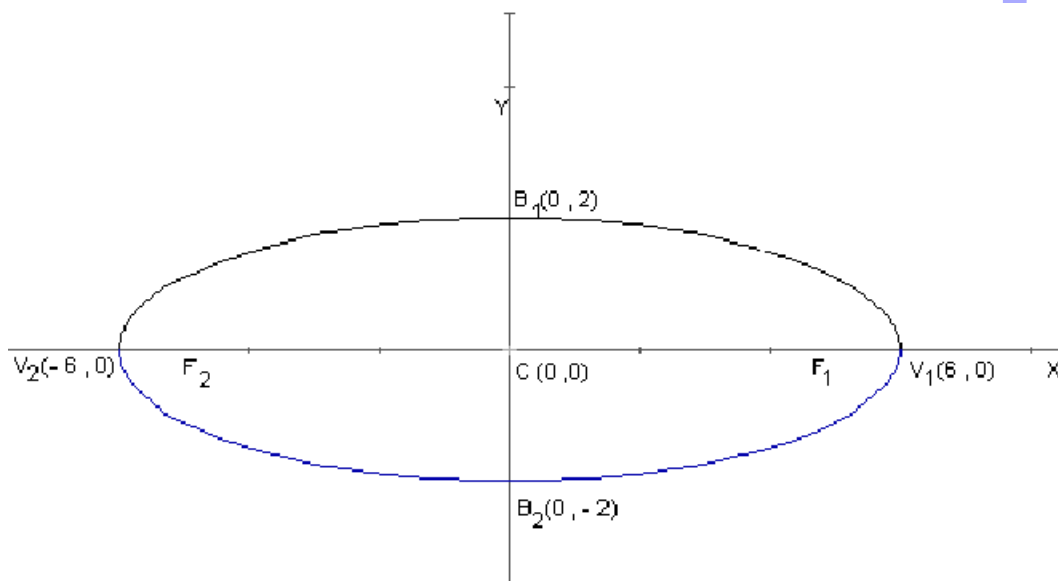
d) $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y = 9$

Ejercicios Propuestos

- 1) Determine centro, vértices eje mayor y menor, focos, excentricidad y gráfico de la elipse $4x^2 + 36y^2 = 144$
- 2) Determine en cada caso centro, vértices eje mayor y menor, focos, excentricidad y gráfico de la elipse:
 - a) $25x^2 + 9y^2 + 100x - 54y - 44 = 0$
 - b) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$
- 3) Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$; $(-4, 0)$, y cuyos focos son los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.
- 4) En cada caso determine la ecuación de la elipse centrada en el origen sabiendo que:
 - a) Un foco es el punto $(12, 0)$ y el vértice el punto $(13, 0)$
 - b) Un foco es $(-4, 0)$ y un vértice es $(0, -5)$
 - c) Un foco es $(0, -3)$ y la excentricidad es $\frac{3}{4}$
 - d) Un foco es $(0, 5)$ y el semieje mayor es de longitud 13
 - e) Contiene los puntos $(1, 2\sqrt{3})$ y $(\frac{1}{2}, \sqrt{15})$ y el eje mayor está en el eje Y
- 5) Determine la ecuación de la elipse si:
 - a) Tiene centro en el punto $(2, 4)$, foco en $(7, 4)$ y contiene el punto $(5, 8)$
 - b) Tiene vértice en $(6, 1)$, centro en $(0, 1)$ y excentricidad $\frac{2}{3}$
 - c) Contiene al punto $(\frac{4}{5}, 1)$ y focos en $(0, \frac{4}{3})$
 - d) Focos en $(0, 9)$ y el semieje menor es de longitud 12.

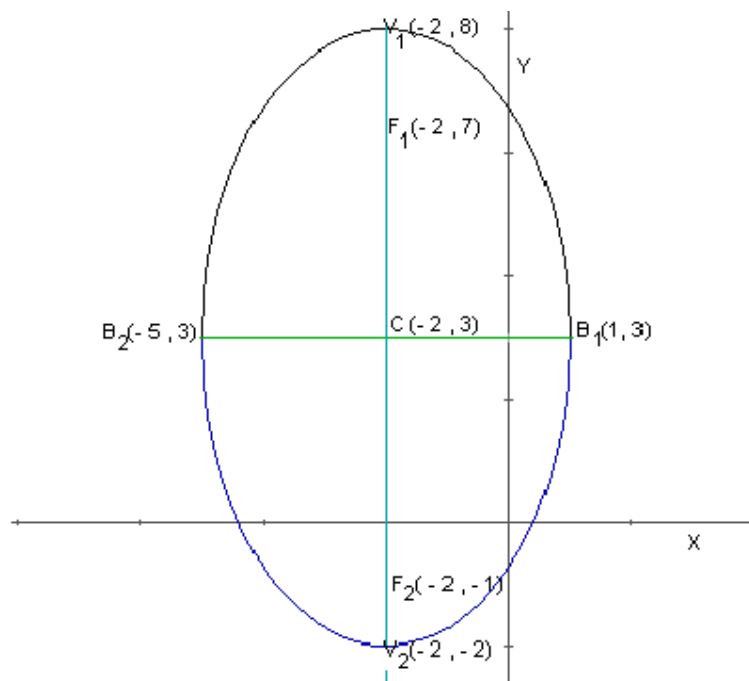
Solución:

- 1) Centro: $C(0, 0)$
- Vértices eje mayor: $V_1(6, 0)$; $V_2(-6, 0)$
- Vértices eje menor: $B_1(0, 2)$; $B_2(0, -2)$
- Focos: $F_1(\sqrt{32}, 0)$; $F_2(-\sqrt{32}, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

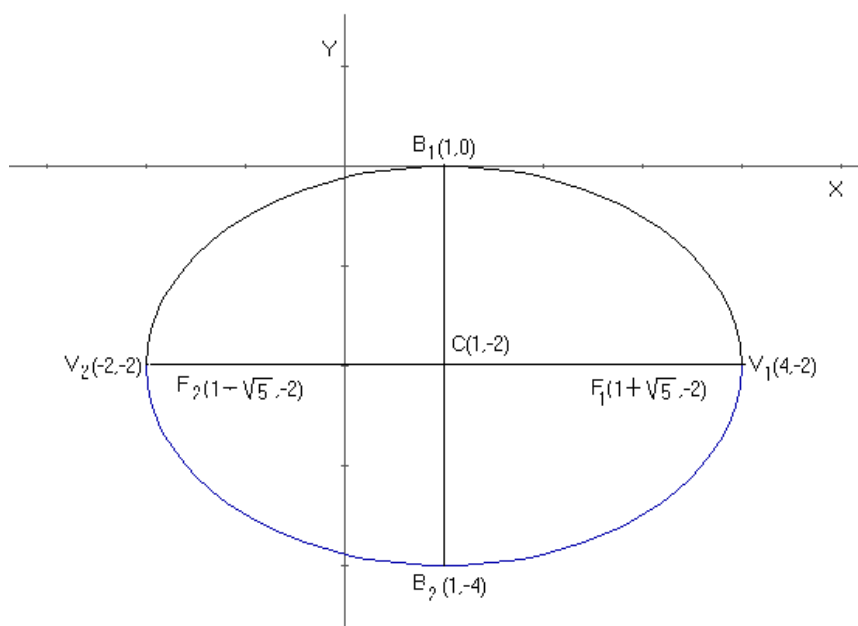


- 2) a)
- Centro: $C(-2, 3)$
- Vértices eje mayor: $V_1(-2, 8)$; $V_2(-2, -2)$
- Vértices eje menor: $B_1(1, 3)$; $B_2(-5, 3)$
- Focos: $F_1(-2, 7)$; $F_2(-2, -1)$
- Excentricidad: $e = \frac{4}{5}$

VIRGINIO GÓMEZ



- 2) b)
- Centro: $C(1, -2)$
- Vértices eje mayor: $V_1(4, -2)$; $V_2(-2, -2)$
- Vértices eje menor: $B_1(1, 0)$; $B_2(1, -4)$
- Focos: $F_1(1 + \sqrt{5}, -2)$; $F_2(1 - \sqrt{5}, -2)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$



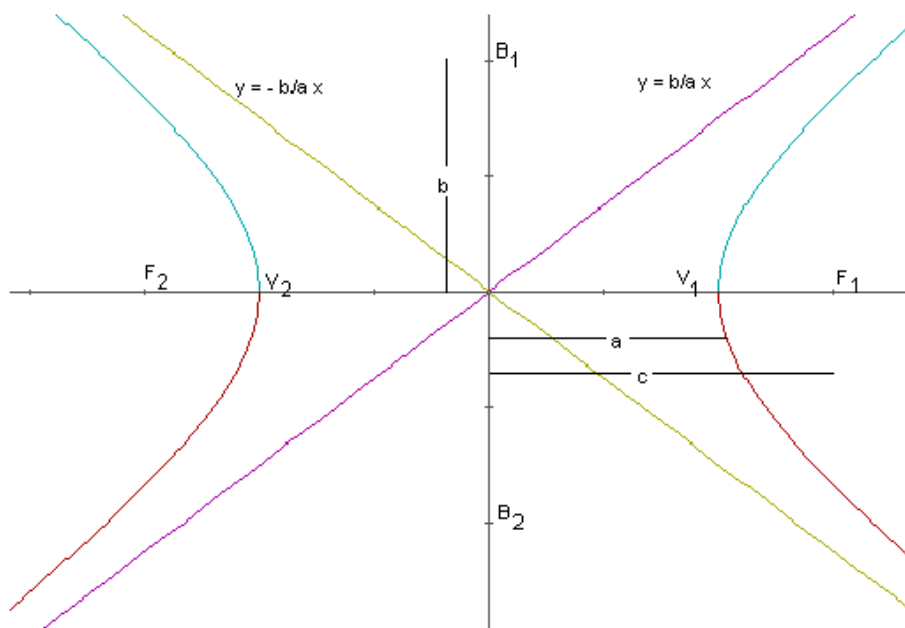
VIRGINIO GOMEZ

- 3) Ecuación: $7x^2 + 16y^2 = 112$
- 4) a) Ecuación: $25x^2 + 169y^2 = 4225$
b) Ecuación: $25x^2 + 41y^2 = 1025$
c) Ecuación: $16x^2 + 7y^2 = 112$
d) Ecuación: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$
e) Ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
- 5) a) Ecuación: $\frac{(x-2)^2}{45} + \frac{(y-4)^2}{20} = 1$
b) Ecuación: $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$
c) Ecuación: $x^2 + \frac{9y^2}{25} = 1$
d) Ecuación: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{225} = 1$

VIRGINIO GÓMEZ

Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se denominan **focos** y la diferencia constante se designa por **$2a$**



Si $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ son los focos, $2a$ es la diferencia constante y $P(x, y)$ un punto cualquiera, entonces :

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

resolviendo y ordenando se obtiene $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, pero en la hipérbola

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$, luego

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad /(-1)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad / : a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es la ecuación canónica de la hipérbola.

Si $y = 0$, entonces $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$

Si $x = 0$, entonces $-\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -b^2 \Rightarrow$ No existe intersección con los ejes

Los puntos $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$ se denominan **vértices del eje real** y los puntos $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ se llaman **vértices del eje imaginario**. Los focos F_1 y F_2 quedan siempre ubicados sobre el eje real.

La longitud del eje real es $2a$, la longitud del eje imaginario es $2b$ y la longitud del eje focal es $2c$.

La excentricidad $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ en la hipérbola indica la abertura del ángulo determinado por las asíntotas y en cuyo interior se encuentra la hipérbola.

Como $a < c$, entonces $e > 1$

Las asíntotas se obtienen haciendo igual a cero la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \vee \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \vee \quad y = \frac{b}{a}x$$

Si los focos de la hipérbola son $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$ y la diferencia común es $2a$, entonces su ecuación es :

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

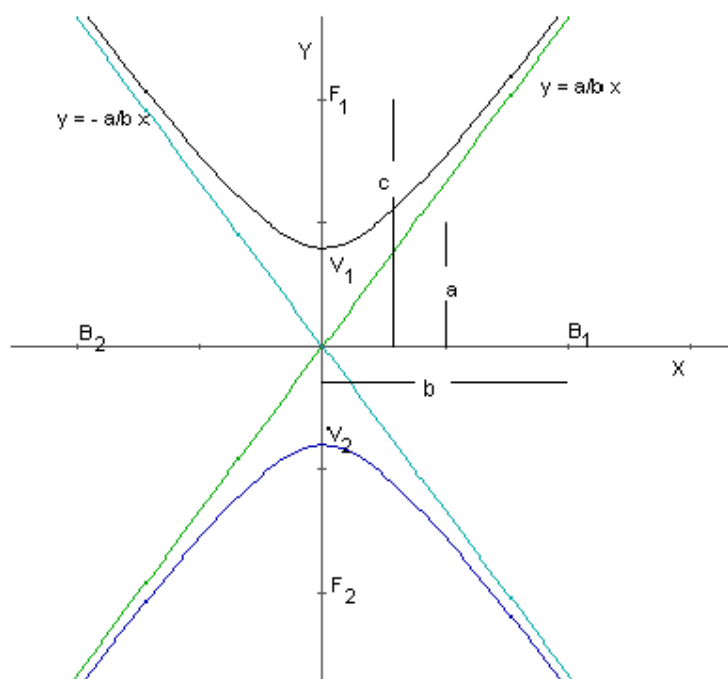
Vértices eje real : $V_1(0, a)$; $V_2(0, -a)$

Vértices eje imaginario: $B_1(b, 0)$; $B_2(-b, 0)$

Focos : $F_1(0, c)$; $F_2(0, -c)$

Excentricidad : $e = \frac{c}{a}$

Asíntotas : $y = \frac{a}{b}x$; $y = -\frac{a}{b}x$



La forma general de la ecuación de la hipérbola es :

$$Ax^2 - By^2 + C = 0, \quad \text{con } A = B, \quad A > B \vee A < B$$

o bien;

$$-Ax^2 + By^2 + C = 0, \quad \text{con } A = B, \quad A > B \vee A < B$$

Ejemplo :

Determine coordenadas de los eje real e imaginario, focos, excentricidad, asíntotas y gráfico de :

$$a) 16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144 \quad / : 144$$

$$\frac{16}{144}x^2 - \frac{9}{144}y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} &= 1 & \Rightarrow a^2 &= 9 & \Rightarrow a &\pm 3 \\ & & \Rightarrow b^2 &= 16 & \Rightarrow b &\pm 4 \\ & & \Rightarrow c^2 &= 25 & \Rightarrow c &\pm 5 \end{aligned}$$

VIRGINIO GOMEZ

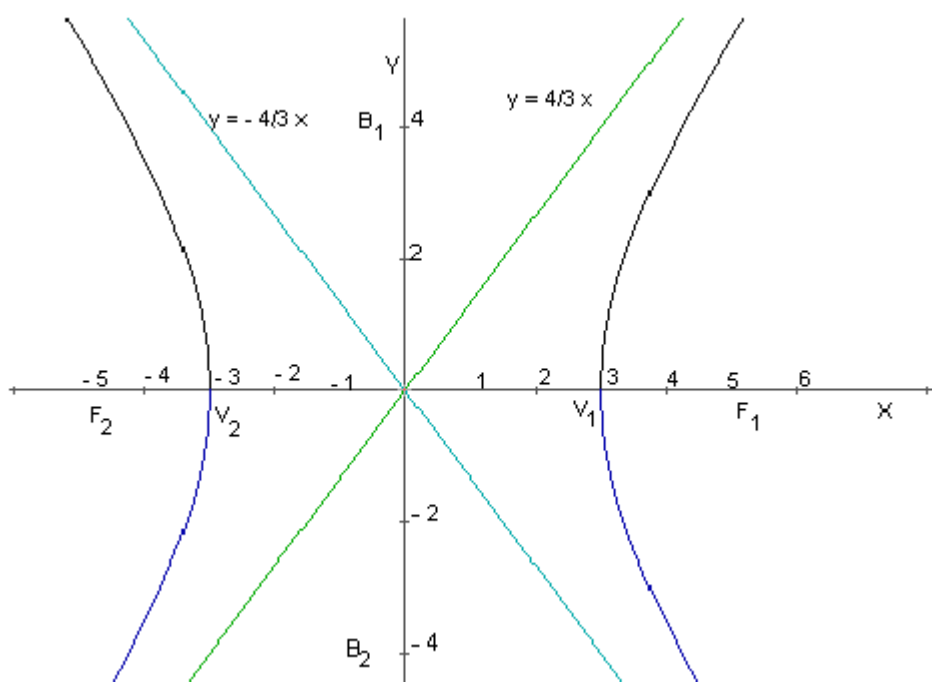
Vértices eje real : $V_1(3, 0)$; $V_2(-3, 0)$

Vértices eje imaginario : $B_1(0, 4)$; $B_2(0, -4)$

Focos : $F_1(5, 0)$; $F_2(-5, 0)$

Excentricidad : $e = \frac{5}{3}$

Asíntotas : $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$



b) $y^2 - x^2 = 1$

c) $4x^2 - 25y^2 = 100$

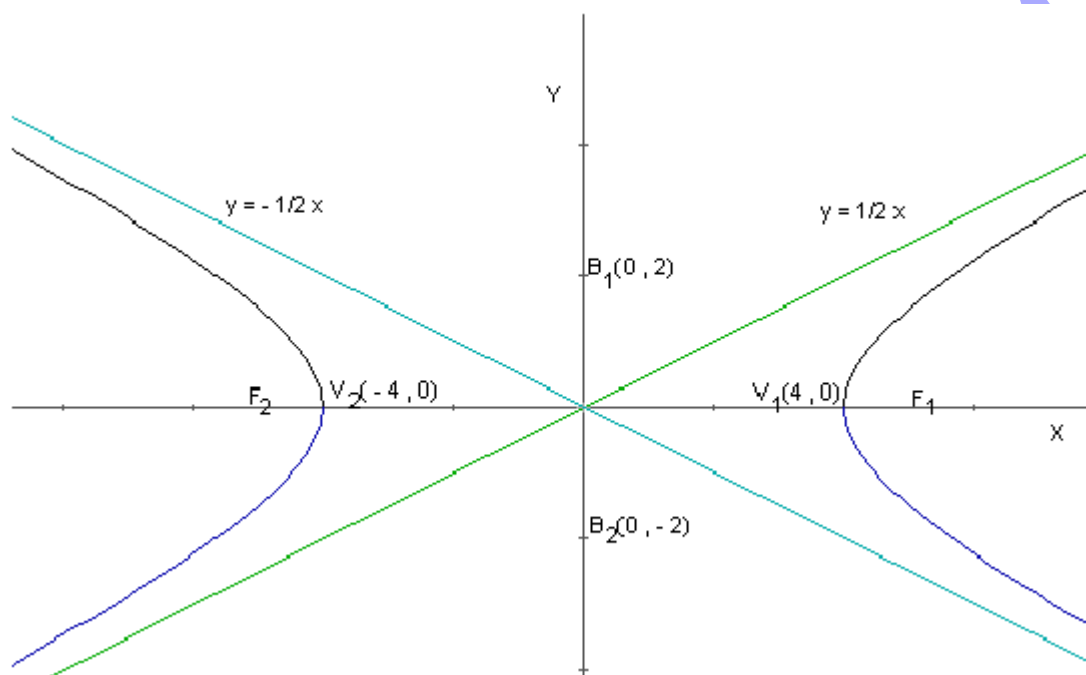
VIRGINIO GÓMEZ

Ejercicios Propuestos

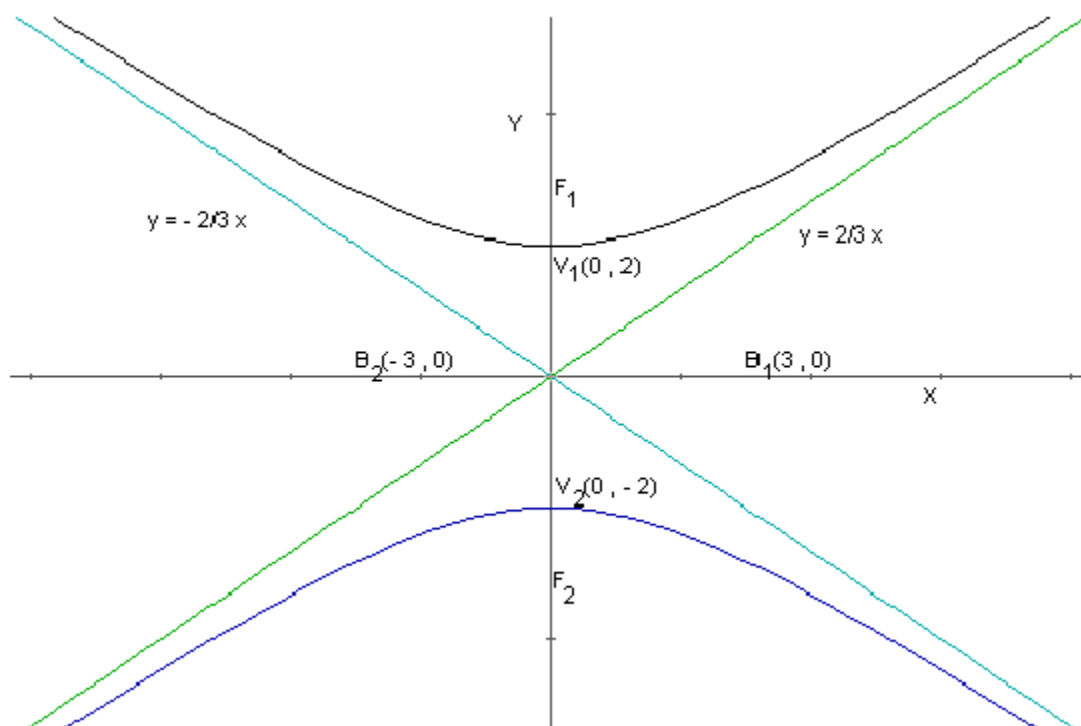
- 1) Determinar vértices eje real e imaginario, focos, excentricidad, asíntotas y gráfico de:
- a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
- b) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
- 2) Obtener la ecuación de la hipérbola si un vértice está en $(0, 4)$ y un foco en $(0, 5)$
- 3) Determine la ecuación de la hipérbola centrada en el origen si :
- a) Un foco está en $(8, 0)$ la longitud del eje imaginario es 6.
- b) Eje de simetría el eje X y contiene los puntos $(6, 4)$ y $(-3, 1)$
- c) Vértice en $(3, 0)$ y una asíntota es $y = \frac{2}{3}x$
- d) Sus asíntotas son $y = \pm\sqrt{2x}$ y contiene al punto $(1, 2)$
- e) Un vértice está en el punto $(3, 0)$ y un foco en el punto $(4, 0)$
- f) El eje real está en el eje X, longitud del eje real 14 y longitud del eje imaginario 10
- g) El eje real está en el eje X, longitud del eje real 18 y distancia de los focos desde el centro 10
- h) El eje imaginario está en el eje X, longitud del eje imaginario 14 y distancia de los focos desde el centro $\sqrt{200}$
- 4) Determinar si la hipérbola de ecuación $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ intersecta a la recta:
- a) $y = x$
- b) $y = 3x$.
- Si es así, encuentre en cada caso las coordenadas de todos los puntos de intersección.
- 5) ¿Para qué valores de m la recta con ecuación $y = mx$ intersecta la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$?
- 6) ¿Cuántas hipérbolas tienen su centro en $(0, 0)$ y su foco en $(1, 0)$?. Encuentre sus ecuaciones.

Solución:

- 1) a) Vértices eje real : $V_1(4, 0)$; $V_2(-4, 0)$
 Vértices eje imaginario : $B_1(0, 2)$; $B_2(0, -2)$
 Focos : $F_1(\sqrt{20}, 0)$; $F_2(-\sqrt{20}, 0)$
 Excentricidad : $e = \frac{1}{4}\sqrt{20}$
 Asíntotas : $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$



- b) Vértices eje real : $V_1(0, 2)$; $V_2(0, -2)$
 Vértices eje imaginario : $B_1(3, 0)$; $B_2(-3, 0)$
 Focos : $F_1(0, \sqrt{13})$; $F_2(0, -\sqrt{13})$
 Excentricidad : $e = \frac{1}{2}\sqrt{13}$
 Asíntotas : $y = \frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x$



2) Ecuación: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

3) a) Ecuación: $\frac{x^2}{55} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) Ecuación: $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) Ecuación: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

d) Ecuación: $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$

e) Ecuación: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

f) Ecuación: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$

g) Ecuación: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{40} = 1$

h) Ecuación: $\frac{y^2}{151} - \frac{x^2}{49} = 1$

- 4) a) La intersección en los puntos $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$
b) No la intersección.
- 5) Para los valores que cumplen la desigualdad $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$, es decir, $|m| < \frac{3}{4}$
- 6) Un número infinito de hipérbolas de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$

VIRGINIO GÓMEZ

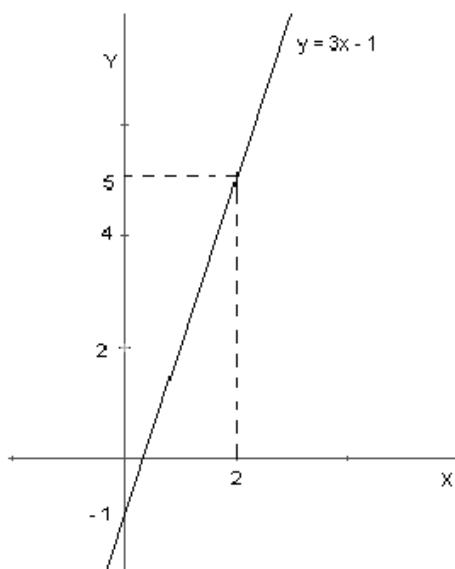
UNIDAD N° 3
Límites y Continuidad

VIRGINIO GÓMEZ

Límites

Concepto de límite de una función

Sea la función real $f(x) = 3x - 1$. Se estudiará qué sucede en las proximidades de 2. La gráfica de $f(x) = 3x - 1$ es la siguiente :



Observar la siguiente tabla :

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	4,7	4,97	4,997	?	5,003	5,03	5,3

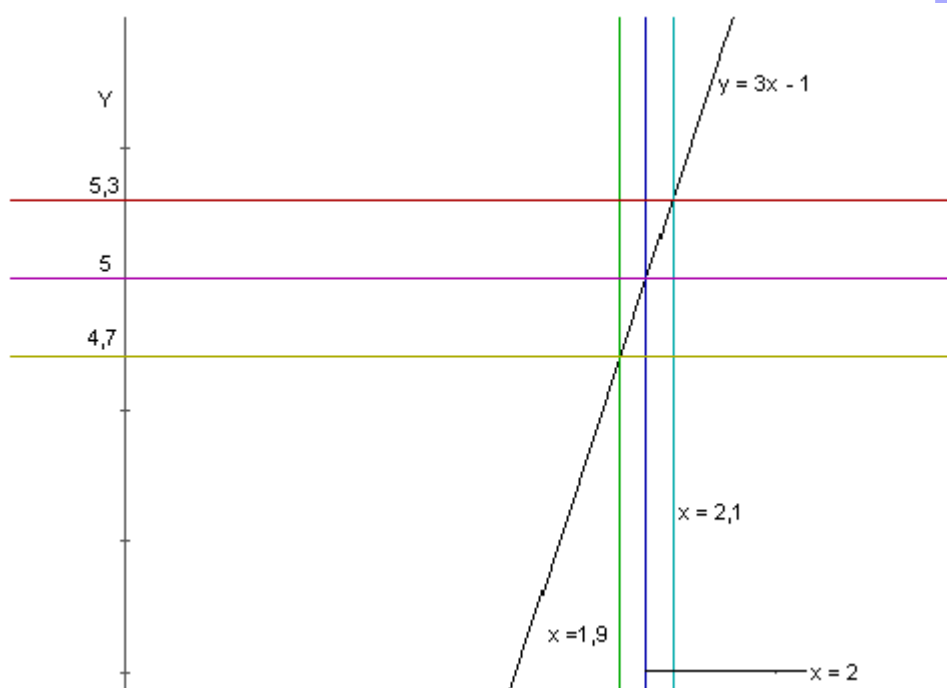
De la tabla se deduce lo siguiente : cuando x se acerca a 2 por la izquierda, $f(x)$ se acerca a 5 y cuando x se acerca a 2 por la derecha, $f(x)$ también se acerca a 5. Es decir :

1) Si x se aproxima a 2 por la izquierda y por la derecha en una décima, $1,9 < x < 2,1$, entonces $f(x)$ se aproxima a 5 por la izquierda y por la derecha en tres décimas, $4,7 < f(x) < 5,3$

2) Si x se aproxima a 2 por la izquierda y por la derecha en una centésima, $1,99 < x < 2,01$, entonces $f(x)$ se aproxima a 5 por la izquierda y por la derecha en tres centésimas, $4,97 < f(x) < 5,03$

3) Si x se aproxima a 2 por la izquierda y por la derecha en una milésima, $1,999 < x < 2,001$, entonces $f(x)$ se aproxima a 5 por la izquierda y por la derecha en tres milésimas, $4,997 < f(x) < 5,003$

Esto indica que la gráfica de $f(x)$ queda comprendida en un rectángulo. Por ejemplo, si consideramos (1) el rectángulo tiene por lados $x = 1,9$; $x = 2,1$; $y = 4,7$; $y = 5,3$



Esto significa que si $x \mapsto 2^-$, entonces $f(x) = 3x - 1 \mapsto 5$ y si $x \mapsto 2^+$, entonces $f(x) = 3x - 1 \mapsto 5$

De esta situación se puede concluir lo siguiente :

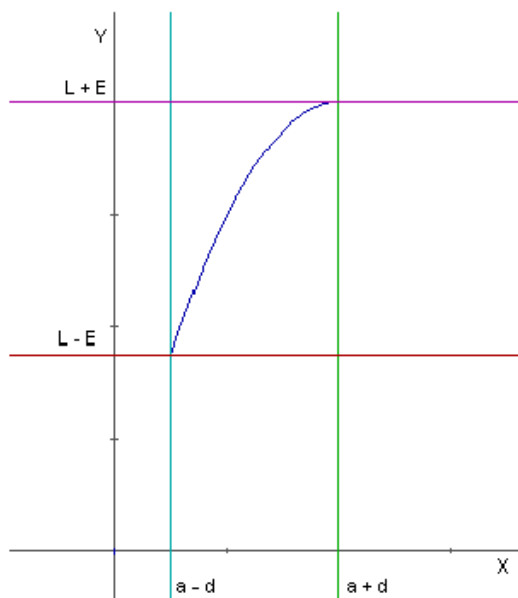
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1 = 5$$

Concepto de límite

Se dice que una función $y = f(x)$ tiende al límite L ($f(x) \mapsto L$) cuando x tiende al valor a ($x \mapsto a$) si el valor absoluto de la diferencia $f(x) - L$ ($|f(x) - L|$) puede ser tan pequeño como se quiera siempre que el valor de x esté en las proximidades de " a ". Esto es válido aún cuando x no esté definida en $x = a$.

Simbólicamente, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Esto significa que para un valor pequeño positivo ($\epsilon > 0$) arbitrario $|f(x) - L| < \epsilon$ es posible determinar otro valor pequeño positivo ($\delta > 0$) que depende de ϵ tal que $|x - a| < \delta$. Así $\forall x, a - \delta < x < a + \delta$ se cumple que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$



Teoremas sobre límites

Teorema 1 :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$

Teorema 2 :

Si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Teorema 3 :

Si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Teorema 4 :

Si $f(x) = g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Teorema 5 :

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, entonces:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

VIRGINIO GOMEZ

$$b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{con } g(x) \neq 0 \wedge L_2 \neq 0$$

$$d) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, L \geq 0 \text{ y } n \text{ par, entonces } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \\ = \sqrt[n]{L}$$

Teorema 8 :

$$\text{Si } f(x) = mx + b, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} mx + b = ma + b$$

Ejemplos :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \pi = \pi$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1 = 3(2) - 1 = 5$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + x - 2 = -(1)^2 + (1) - 2 = -2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{0}{0} \quad \text{Para levantar la indeterminación se debe factorizar}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 \\ = (-1) - 1 \\ = -2$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} \quad \text{Para levantar la indeterminación se debe factorizar}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2^2 + 2(2) + 4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 8} = \frac{1}{12}$$

VIRGINIO GOMEZ

6) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe factorizar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+3)} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-5}{x-3} \\ &= \frac{-3-5}{-3-3} \\ &= \frac{-8}{-6} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} = \frac{4}{3}$

7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - 6x - 16} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe factorizar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+7)}{(x-8)(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+7}{x-8} \\ &= \frac{-2+7}{-2-8} \\ &= \frac{5}{-10} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - 6x - 16} = -\frac{1}{2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe factorizar

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2+3x+9} = \frac{6}{3^2+3(3)+9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} = \frac{2}{9}$

VIRGINIO GOMEZ

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{0}{0}$$

Para levantar la indeterminación se debe factorizar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x^2 + 4)}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(4)(8)}{12} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{8}{3}$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

Para levantar la indeterminación se debe racionalizar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{0}{0} \text{ Para levantar la indeterminación se debe racionalizar}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + x - 3}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

VIRGINIO GOMEZ

12) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe racionalizar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{x^2+7-16} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7}+4}{(x-3)} \\ &= \frac{8}{-6} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4} = -\frac{4}{3}$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \frac{0}{0}$

Para levantar la indeterminación se debe racionalizar

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-(x^2+x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 0$

VIRGINIO GOMEZ

14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe racionalizar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = 2$

15) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \sqrt{27x}}{x - \sqrt{3x}} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe racionalizar

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \sqrt{27x}}{x - \sqrt{3x}} \cdot \frac{x + \sqrt{3x}}{x + \sqrt{3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - \sqrt{27x})(x + \sqrt{3x})}{x^2 - 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - \sqrt{27x})(x + \sqrt{3x})}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^2 + \sqrt{27x}}{x^2 + \sqrt{27x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 27x)(x + \sqrt{3x})}{(x^2 - 3x)(x^2 + \sqrt{27x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^3 - 27)(x + \sqrt{3x})}{x(x-3)(x^2 + \sqrt{27x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)(x + \sqrt{3x})}{(x-3)(x^2 + \sqrt{27x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)(x + \sqrt{3x})}{(x^2 + \sqrt{27x})} = \frac{(27)(6)}{18} = 9 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \sqrt{27x}}{x - \sqrt{3x}} = 9$

VIRGINIO GOMEZ

16) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \frac{0}{0}$ Para levantar la indeterminación se debe racionalizar

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \cdot \frac{x\sqrt{x} + a\sqrt{a}}{x\sqrt{x} + a\sqrt{a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^3 - a^3)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + ax + a^2)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{x\sqrt{x} + a\sqrt{a}} \\ &= \frac{(3a^2)(2\sqrt{a})}{2a\sqrt{a}} \\ &= 3a \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 3a$

Ejercicios Propuestos

Determine los siguientes límites:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 2x - 8}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x + 5}}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 7} - \sqrt{7}}$

4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{x^4 - 81}$

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{8x}}{x - \sqrt{2x}}$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$

10) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 2x - 8} = \frac{3}{2}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = -\frac{3}{5}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{x^4 - 81} = \frac{5}{54}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \frac{3}{2}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+7} - \sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{8x}}{x - \sqrt{2x}} = 6$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = 2\sqrt{a}$$

VIRGINIO GÓMEZ

Límites laterales

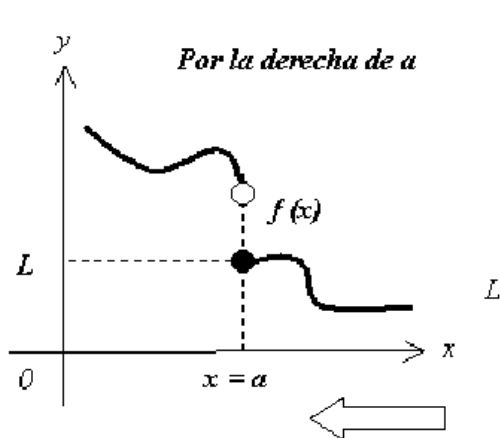
Existen funciones definidas por tramos donde es importante obtener límites laterales.

a) **Límite lateral derecho** : indica que nos estamos aproximando a un cierto valor "a" por números mayores o iguales a él.

Si $x > a \vee x \geq a$, entonces $x \mapsto a^+$

b) **Límite lateral izquierdo** : indica que nos estamos aproximando a un cierto valor "a" por números menores o iguales a él.

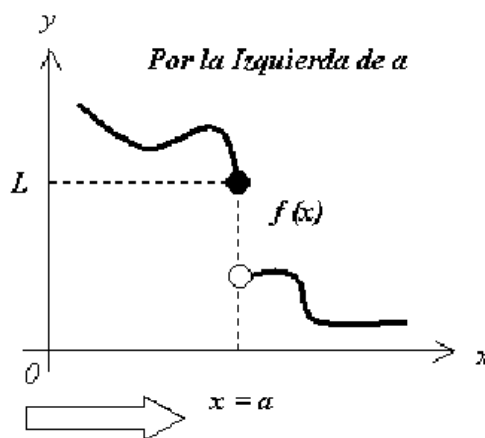
Si $x < a \vee x \leq a$, entonces $x \mapsto a^-$



Cuando x se aproxima hacia a por la Derecha

$$x \rightarrow a^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



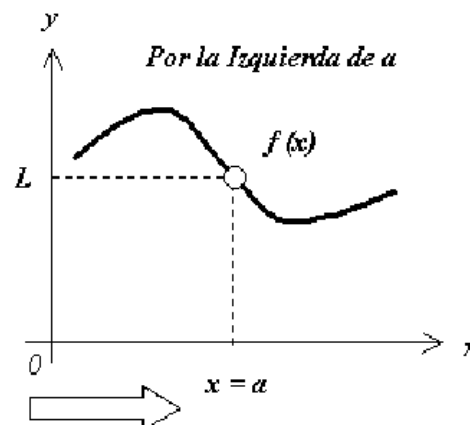
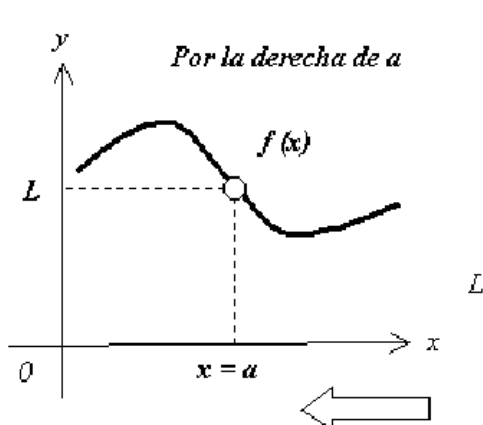
Cuando x se aproxima hacia a por la Izquierda

$$x \rightarrow a^-$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Así, existe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

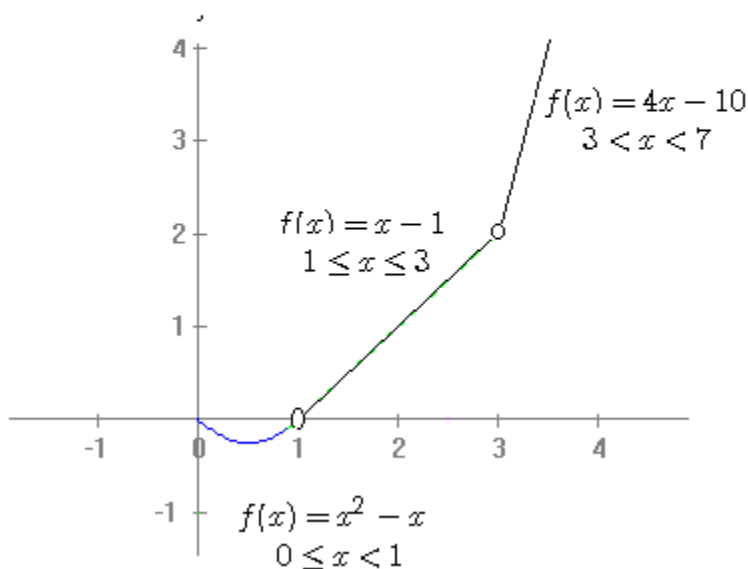


Cuando x se aproxima hacia a por la Derecha
 $x \rightarrow a^+$

Cuando x se aproxima hacia a por la Izquierda
 $x \rightarrow a^-$

Ejemplos :

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 4x - 10 & 3 < x < 7 \end{cases}$



Determine si $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y si $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ luego existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 4x - 10 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \text{ luego existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ 3x - 2 & x > 2 \end{cases}$. Determine si $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \text{ luego no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 27 & -2 < x \leq -1 \\ x^2 + 4x - 25 & -1 < x \leq 3 \end{cases}$. Determine si

$$\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^3 - 27 = -28$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 4x - 25 = -28$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \text{ luego existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -28$$

4) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} + x & 1 < x \leq 2 \\ x^2 - 1 & 2 < x < 3 \\ \frac{x^3 - 3x + 6}{4} & 3 \leq x < 12 \end{cases}$

Determine si $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y si $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{5-2x} + x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \text{ luego existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 3x + 6}{4} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \text{ luego no existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \geq 4 \\ x - 8 & x < 4 \end{cases}$ ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 3 \\ x - 1 & x < 3 \end{cases}$ ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 7 & x = 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$

Determine si $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 2x & 3 \leq x \leq 5 \\ 3x + 1 & 5 < x < 9 \end{cases}$

Determine si $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

5) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & -2 \leq x < 5 \\ x^2 - 2 & 5 \leq x \leq 8 \\ 6x + 14 & 8 < x < 10 \end{cases}$

¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$? , ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 8} f(x)$?

6) Dada la función $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$ ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$?

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x - 8 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2 - 3x = -10$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \quad \text{luego no existe } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+1} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \text{luego existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \text{luego existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 2x = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \text{luego existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

VIRGINIO GOMEZ

5) Para $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 7x - 2 = 33$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} x^2 - 2 = 23$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \text{ luego no existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

Para $x = 8$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} x^2 - 2 = 62$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} 6x + 14 = 62$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x), \text{ luego existe } \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 62$$

6) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} -1 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \text{ luego no existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

VIRGINIO GOMEZ

Límites infinitos

Sea $f(x) = \frac{2}{x-1}$

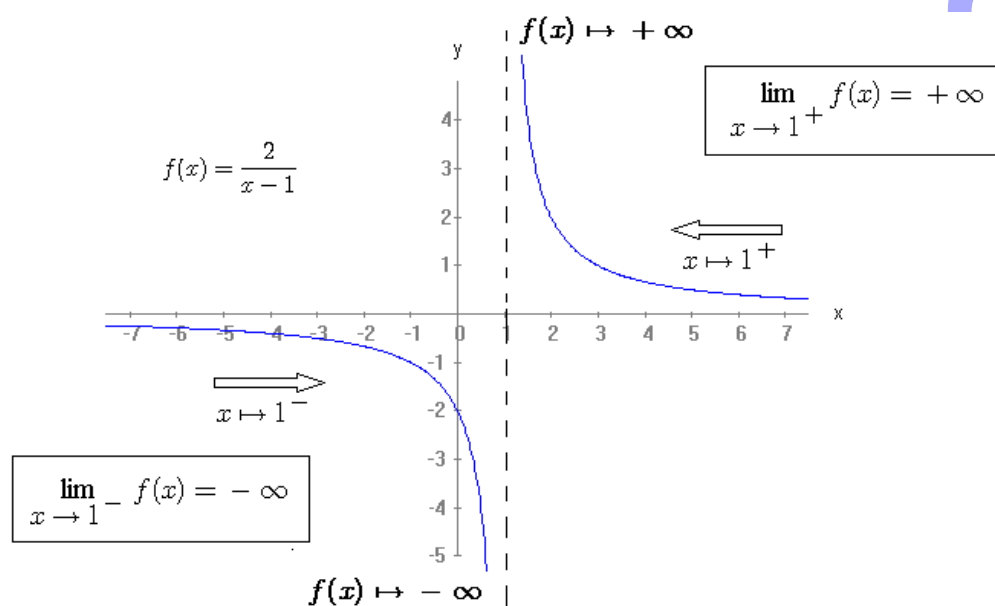
Observe la siguiente tabla :

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	-20	-200	-2.000	?	2.000	200	20

De la tabla se puede concluir que :

Si $x \mapsto 1^-$, entonces $f(x)$ decrece y si $x \mapsto 1^+$, entonces $f(x)$ crece, por lo tanto no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Cuando sucede que $f(x)$ crece o $f(x)$ decrece indefinidamente, entonces hablamos de límites infinitos. Gráficamente:



Concepto :

1) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, entonces $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

2) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, entonces $\forall N < 0 \exists \delta > 0$ tal que $f(x) < N$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Entonces para el ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Ejemplos : Analizar

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-2}{x+3} = -\infty$$

Luego a la izquierda de -3 , $f(x)$ crece y a la derecha de -3 , $f(x)$ decrece. Por lo

$$\text{tanto, no existe } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{x+3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Luego a la izquierda y a la derecha de 2 , $f(x)$ crece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-1}{(x+4)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-1}{(x+4)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{-1}{(x+4)^2} = -\infty$$

Luego a la izquierda y a la derecha de -4 , $f(x)$ decrece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{-1}{(x+4)^2}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Analizar los siguientes límites:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{4-x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5}{(x+2)^2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+x}{6-2x}$

5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x+1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3-x}{(5-x)^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x-1}{x+4}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{4-x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{4-x} = -\infty$$

Luego a la izquierda de 4, $f(x)$ crece y a la derecha de 4, $f(x)$ decrece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{4-x}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5}{(x+2)^2} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{(x+2)^2} = +\infty$$

Luego a la izquierda y a la derecha de -2 , $f(x)$ crece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty$$

Luego a la izquierda de 3, $f(x)$ decrece y a la derecha de 3, $f(x)$ crece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3+x}{6-2x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3+x}{6-2x} = -\infty$$

Luego a la izquierda de 3, $f(x)$ crece y a la derecha de 3, $f(x)$ decrece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+x}{6-2x}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1} = -\infty$$

Luego a la izquierda de -1 , $f(x)$ crece y a la derecha de -1 , $f(x)$ decrece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x+1}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{3-x}{(5-x)^2} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{3-x}{(5-x)^2} = -\infty$$

Luego a la izquierda y a la derecha de 5, $f(x)$ decrece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3-x}{(5-x)^2}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x-1}{x+4} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x-1}{x+4} = -\infty$$

Luego a la izquierda de -4 , $f(x)$ crece y a la derecha de -4 , $f(x)$ decrece. Por lo tanto, no existe $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x-1}{x+4}$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Luego a la izquierda de 0, $f(x)$ decrece y a la derecha de 0, $f(x)$ crece. Por lo tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

VIRGINIO GÓMEZ

Límites al infinito

Conceptos :

a) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, entonces $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $x > M$

b) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, entonces $\forall \epsilon > 0 \exists N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $x < N$

Teorema :

1) Si $r > 0$, r es racional y c es un número cualquiera, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{c}{x^r} = 0$$

2) Si $r > 0$, r es racional y c es un número cualquiera, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{c}{x^r} = 0$$

Ejemplos :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 2$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x+7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5\frac{x^2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{7}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{1 + \frac{7}{x}}$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x+7} = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{10}-1}{10x^{11}-9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\frac{x^{10}}{x^{11}} - \frac{1}{x^{11}}}{10\frac{x^{11}}{x^{11}} - \frac{9}{x^{11}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^{11}}}{10 - \frac{9}{x^{11}}} = \frac{0}{10}$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{10}-1}{10x^{11}-9} = 0$$

Ejercicios Propuestos

Analizar los siguientes límites:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{2-x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2}{2-3x}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-7x^3}{5x^5+1}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-x}{x+1}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4-5x^3+3x^2-7}{2x^3-4x}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-7x+1}{5-4x}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^3} - 5x\right)$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x}}$

VIRGINIO GÓMEZ

Solución:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{2-x} = -3$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2}{2-3x} = +\infty.$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-7x^3}{5x^5+1} = 0$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-x}{x+1} = -1$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4-5x^3+3x^2-7}{2x^3-4x} = +\infty$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-7x+1}{5-4x} = -\infty$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^3} - 5x\right) = +\infty$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}} = -4$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

VIRGINIO GOMEZ

Asíntotas

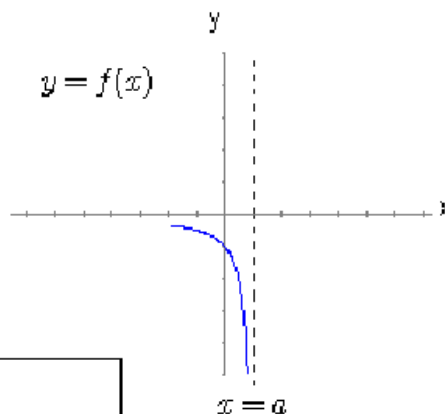
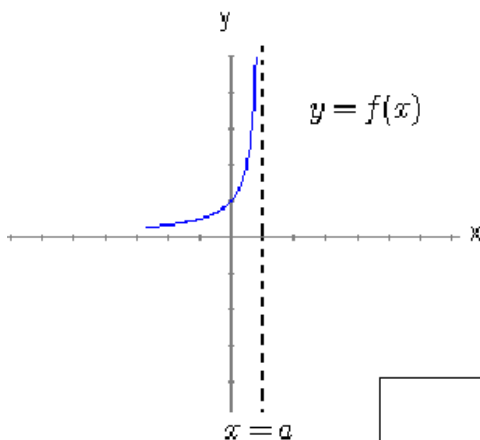
1) Vertical

$x = a$ es asíntota vertical de $y = f(x)$ si, y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

∨

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



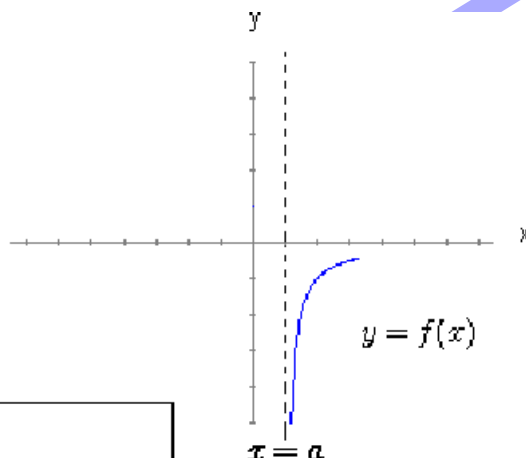
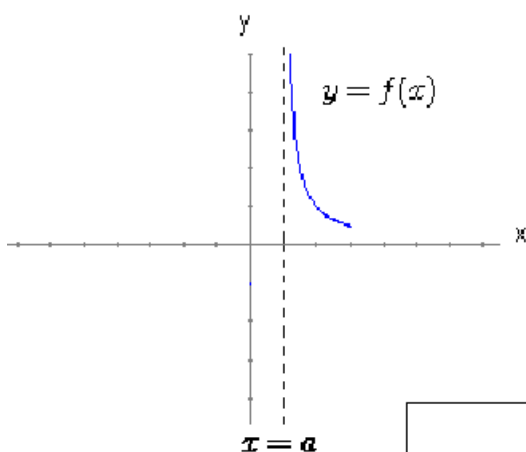
$x = a$
ASÍNTOTA VERTICAL

y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

∨

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



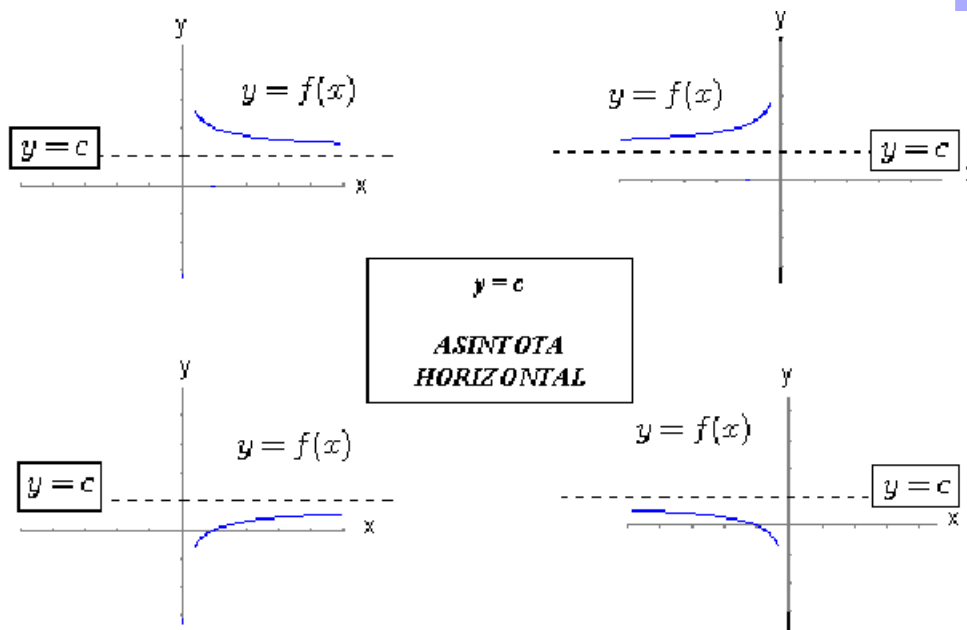
$x = a$
ASÍNTOTA VERTICAL

2) Horizontal

$y = c$ se dice asíntota horizontal de $y = f(x)$ si, y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \quad \vee$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$



3) Oblicua

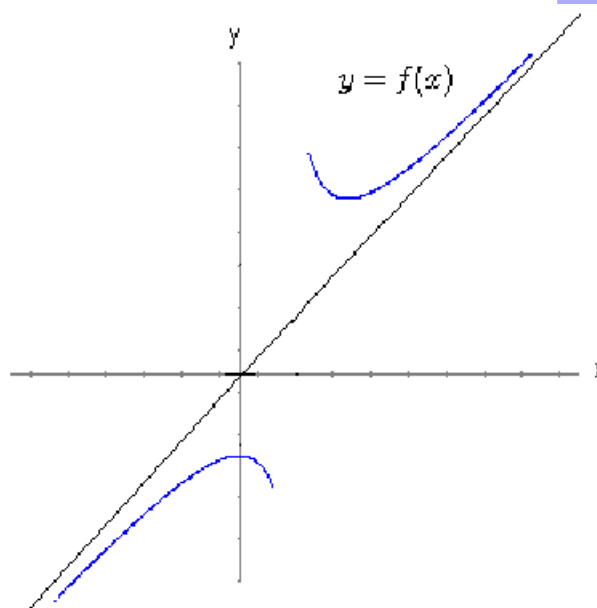
$y = mx + b$ se dice asíntota oblicua de $y = f(x)$ si, y sólo si

$$y = mx + b$$

ASINTOTA OBLICUA

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$



Ejemplos :

Determinar las asíntotas de :

$$1) f(x) = \frac{1}{x-2} - 3$$

*** Asíntota vertical**

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} - 3 = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} - 3 = +\infty$$

Por lo tanto, $x = 2$ es asíntota vertical de $f(x)$.

*** Asíntota horizontal**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7}{x} - 3\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7}{x} - 3}{1 - \frac{2}{x}} = -3$$

Por lo tanto, $y = -3$ es asíntota horizontal de $f(x)$.

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{x+4}$$

*** Asíntota vertical**

$$x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 - 6x + 12}{x+4} = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 - 6x + 12}{x+4} = +\infty$$

Por lo tanto, $x = -4$ es asíntota vertical de $f(x)$.

*** Asíntota horizontal**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 12}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x} - 6\frac{x}{x} + \frac{12}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 6 + \frac{12}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = +\infty$$

Por lo tanto, no existe asíntota horizontal de $f(x)$.

*** Asíntota oblicua**

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 6x + 12}{x + 4}}{x} \\
 &\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 12}{x^2 + 4x} \\
 &\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - 6\frac{x}{x^2} + \frac{12}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 4\frac{x}{x^2}} \\
 &\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} \\
 &\Rightarrow m = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 12}{x + 4} - x \\
 &\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 12 - x^2 - 4x}{x + 4} \\
 &\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x + 12}{x + 4} \\
 &\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10\frac{x}{x} + \frac{12}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} \\
 &\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10 + \frac{12}{x}}{1 + \frac{4}{x}} \\
 &\Rightarrow b = -10
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $y = x - 10$ es asíntota oblicua de $f(x)$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Determinar las asíntotas de:

1) $f(x) = \frac{3x}{5-x}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{7-x}$

3) $f(x) = \frac{2x+3}{x}$

4) $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$

5) $f(x) = \frac{x^2-3}{5-x}$

6) $f(x) = \frac{2-x}{1+x}$

7) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x}$

8) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-6}$

9) $f(x) = \frac{4x^2}{x-1}$

10) $f(x) = \frac{5}{x^2+6x+9}$

VIRGINIO GÓMEZ

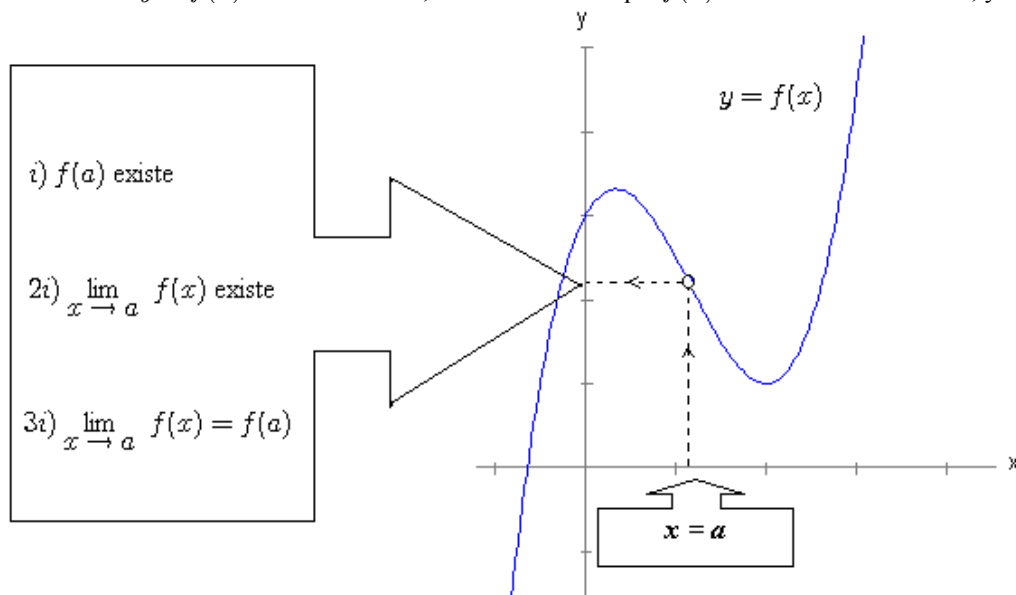
Solución:

- 1) Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota horizontal: $y = -3$
Asíntota oblicua: No existe.
- 2) Asíntota vertical: $x = 7$
Asíntota horizontal: No existe.
Asíntota oblicua: $y = -x - 2$
- 3) Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 2$
Asíntota oblicua: No existe.
- 4) Asíntota vertical: $x = 2$
Asíntota horizontal: $y = 1$
Asíntota oblicua: No existe.
- 5) Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota horizontal: No existe.
Asíntota oblicua: $y = -x - 5$
- 6) Asíntota vertical: $x = -1$
Asíntota horizontal: $y = -1$
Asíntota oblicua: No existe.
- 7) Asíntota vertical: $x = 0, x = 4$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota oblicua: No existe.
- 8) Asíntota vertical: $x = 3, x = -2$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota oblicua: No existe.
- 9) Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: No existe.
Asíntota oblicua: $y = 4x + 4$
- 10) Asíntota vertical: $x = -3$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota oblicua: No existe.

VIRGINIO GOMEZ

Continuidad

Sea $y = f(x)$ una función real, entonces se dice que $f(x)$ es continua en $x = a$ si, y sólo si :



Ejemplos :

Analizar la continuidad en :

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$$

Solución :

Punto de análisis : $x = 3$

$$i) f(3) = 4$$

$$\begin{aligned} 2i) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} \\ &= \frac{0}{0} \quad \text{Es posible levantar la indeterminación} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x + 1)(x - 3)}{x - 3} \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 7$$

$$3i) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

Luego $f(x)$ es discontinua en $x = 3$

En este caso es posible redefinir la función de modo de hacerla continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$$

Este tipo de discontinuidad recibe el nombre de discontinuidad evitable

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(x-1)^2} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

Solución :

Punto de análisis : $x = 1$

$$i) f(1) = 3$$

$$2i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{0}$$

No es posible levantar la indeterminación

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} \text{ no existe}$$

Como no se cumple la condición (2i) de continuidad se concluye que $f(x)$ es discontinua en $x = 1$

En este caso no es posible redefinir la función de modo de hacerla continua

Este tipo de discontinuidad recibe el nombre de discontinuidad infinita

$$3) f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

Solución :

Punto de análisis : $x = 1$

$$i) f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$2i) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ por lo tanto } \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$3i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

$$4) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & 0 < x \leq 2 \\ 8 - 3x & 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & 3 < x < 4 \end{cases}$$

Puntos de análisis : $x = 2, x = 3$

* Para $x = 2$

$$i) f(2) = 2(2) + 3 = 7$$

$$2i) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 3 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 8 - 3x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \text{ por lo tanto, no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Como no se cumple la condición (2i) de continuidad se concluye que $f(x)$ es discontinua en $x = 2$

* Para $x = 3$

$$i) f(3) = 8 - 3(3) = -1$$

$$2i) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 8 - 3x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \text{ por lo tanto } \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$$

$$3i) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 3$

Del análisis anterior, se concluye que $f(x)$ es discontinua en el intervalo $(0,4)$

VIRGINIO GOMEZ

$$5) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 9 & -2 \leq x \leq -1 \\ x^3 + 13 & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{38x - 2} + 8 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Puntos de análisis : $x = -1, x = 1$

* Para $x = -1$

$$i) f(-1) = 3(-1)^2 + 9 = 12$$

$$2i) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3x^2 + 9 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 + 13 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \text{ por lo tanto, } \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 12$$

$$3i) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

Luego, $f(x)$ es continua en $x = -1$

* Para $x = 1$

$$i) f(1) = 1^3 + 13 = 14$$

$$2i) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + 13 = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{38x - 2} + 8 = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ por lo tanto } \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 14$$

$$3i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

Del análisis anterior, se concluye que $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 3]$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Analizar la continuidad en :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} & x \neq -5 \\ -8 & x = -5 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{x^2 - 25} & x \neq 5 \\ 9 & x = 5 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - 4} & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases}$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \leq 2 \\ x - 5 & x > 2 \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \leq 1 \\ 3x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} x + 5 & 0 < x \leq 1 \\ 2x + 4 & 1 < x \leq 5 \\ x - 3 & 5 < x < 9 \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & 2 < x \leq 4 \\ x + 3 & 4 < x \leq 7 \\ 2x - 4 & 7 < x < 8 \end{cases}$$

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

1) *i)* $f(-5) = -8$

ii) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -8$

iii) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5)$

Luego $f(x)$ es continua en $x = -5$

2) *i)* $f(1) = 2$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

3) *i)* $f(5) = 9$

ii) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{1}{10}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$

Luego $f(x)$ no es continua en $x = 5$

4) *i)* $f(4) = 5$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{14}{0}$

Luego $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ no existe.

$\therefore f(x)$ es discontinua en $x = 4$

5) *i)* $f(2) = 7$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$

\therefore No existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Luego $f(x)$ es discontinua en $x = 2$

VIRGINIO GOMEZ

6) i) $f(1) = 4$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$

\therefore Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

Por lo tanto, $f(x)$ es discontinua en el intervalo $(0, 9)$

7) Para $x = 1$

i) $f(1) = 6$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 6$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 6$

\therefore Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

Por lo tanto, $f(x)$ es discontinua en el intervalo $(0, 9)$

Para $x = 5$

i) $f(5) = 14$

ii) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 14$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$

\therefore No existe $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

Luego $f(x)$ es discontinua en $x = 5$

8) Para $x = 4$

i) $f(4) = 7$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 7$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 7$

\therefore Existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7$

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 4$

Por lo tanto, $f(x)$ es continua en el intervalo $(2, 8)$

Para $x = 7$

i) $f(7) = 10$

ii) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 10$

$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 10$

\therefore Existe $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 10$

iii) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7)$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 7$

Otros estilos de ejercicios asociados a la continuidad son los siguientes :

Determine el valor de k para que la función sea continua en todo su dominio.

$$1) f(x) = \begin{cases} k & x = 4 \\ \frac{x+2}{x^2+2} & x \neq 4 \end{cases}$$

Solución :

Para que la función sea continua debe cumplirse la condición (3i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+2}{x^2+2} = k \\ &\Rightarrow \frac{6}{18} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = k \end{aligned}$$

$$\text{Luego la función es : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 4 \\ \frac{x+2}{x^2+2} & x \neq 4 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} kx - 1 & x < 2 \\ kx^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Para que la función sea continua debe cumplirse la condición (2i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} kx - 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} kx^2 \\ &\Rightarrow 2k - 1 = 4k \\ &\Rightarrow -1 = 2k \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} = k \end{aligned}$$

$$\text{Luego la función es : } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & x < 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

3) Determine el valor de a y de b para que la función sea continua en todo su dominio

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & x < -2 \\ 3ax + b & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2b & x > 1 \end{cases}$$

Para que la función sea continua debe cumplirse la condición (2i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} x + 2a = \lim_{x \rightarrow -2^+} 3ax + b \\ &\Rightarrow -2 + 2a = -6a + b \\ &\Rightarrow 8a - b = 2 \end{aligned} \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} 3ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 2b$$

$$\Rightarrow 3a + b = 3 - 2b$$

$$\Rightarrow 3a + 3b = 3$$

$$\Rightarrow a + b = 1$$

(**)

De (*) y (**) se obtiene un sistema de ecuaciones

$$8a - b = 2$$

$$\underline{a + b = 1} \quad \text{de donde} \quad a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego la función es : } f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{3} & x < -2 \\ x + \frac{2}{3} & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - \frac{4}{3} & x > 1 \end{cases}$$

4) Determine el valor de a y de b para que la función sea continua en todo su dominio

$$f(x) = \begin{cases} 2a - 3bx + 2 & -1 \leq x < 2 \\ ax^2 - b & 2 \leq x \leq 3 \\ bx + 9 & 3 < x \leq 1 \end{cases}$$

Para que la función sea continua debe cumplirse la condición (2i)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} 2a - 3bx + 2 = \lim_{x \rightarrow -2^+} ax^2 - b$$

$$\Rightarrow 2a - 6b + 2 = 4a - b$$

$$\Rightarrow 2 = 2a + 5b$$

(*)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 - b = \lim_{x \rightarrow 3^+} bx + 9$$

$$\Rightarrow 9a - b = 3b + 9$$

$$\Rightarrow 9a - 4b = 9$$

(**)

De (*) y (**) se obtiene un sistema de ecuaciones

$$2a + 5b = 2$$

$$\underline{9a - 4b = 9} \quad \text{de donde} \quad a = 1, b = 0$$

$$\text{Luego la función es : } f(x) = \begin{cases} 4 & -1 \leq x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x \leq 3 \\ 9 & 3 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicios Propuestos

Determine el valor de "k" para que la función sea continua en todo su dominio:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 3k & x = 5 \\ \frac{x-1}{x+2} & x \neq 5 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} k-3 & x = 1 \\ \frac{2-x}{x+5} & x \neq 1 \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} 3x-k & x \leq 4 \\ 2xk+1 & x > 4 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+4k}{3} & x \leq 2 \\ 5k - \frac{4x}{7} & x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de "a" y "b" para que la función sea continua en todo su dominio:

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} 2x-a & x < -5 \\ 4a+bx & -5 \leq x \leq 2 \\ 3b-5x & x > 2 \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} a+x & x < 2 \\ 4ax-2b & 2 \leq x \leq 3 \\ x+3b & x > 3 \end{cases}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} a+3b & x < 1 \\ \frac{5x}{3} + 2a & 1 \leq x \leq 5 \\ \frac{2b}{7} - 4x & x > 5 \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{1}{4}a & x < 3 \\ \frac{a+x}{2} + b & 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{3b}{5} - x & x > 4 \end{cases}$$

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

1) $k = \frac{4}{21}$

2) $k = \frac{19}{6}$

3) $k = \frac{11}{9}$

4) $k = \frac{38}{77}$

5) $a = -\frac{8}{3} ; b = -\frac{2}{3}$

6) $a = \frac{4}{11} ; b = \frac{3}{11}$

7) $a = -\frac{355}{24} ; b = -\frac{35}{8}$

8) $a = -37 ; b = \frac{125}{4}$

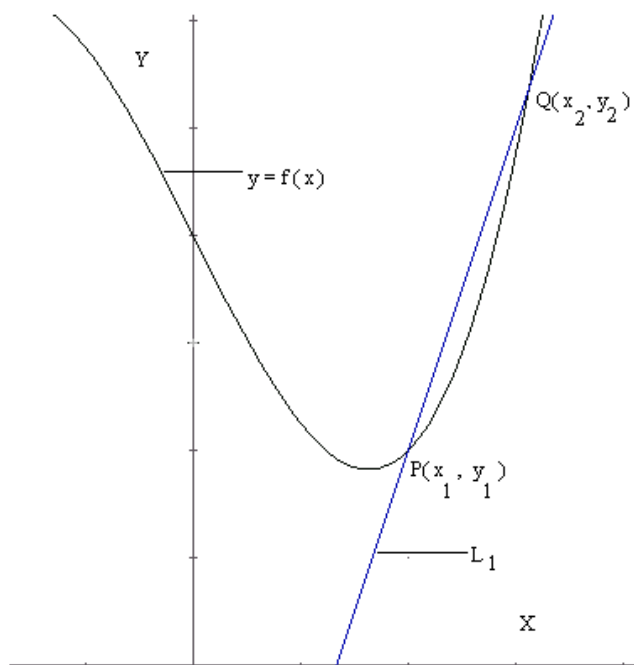
VIRGINIO GOMEZ

UNIDAD N° 4

Derivadas

VIRGINIO GÓMEZ

Derivada



Sea $y = f(x)$ una función real y sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos de $f(x)$.

L_1 es una recta secante a $y = f(x)$, luego la pendiente de L_1 es :

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{incremento de ordenadas}}{\text{incremento de abscisas}}$$

Como $\Delta x = x_2 - x_1$, entonces $x_1 + \Delta x = x_2$

$$y_1 = f(x_1)$$

$$y_2 = f(x_2) \Rightarrow y_2 = f(x_1 + \Delta x)$$

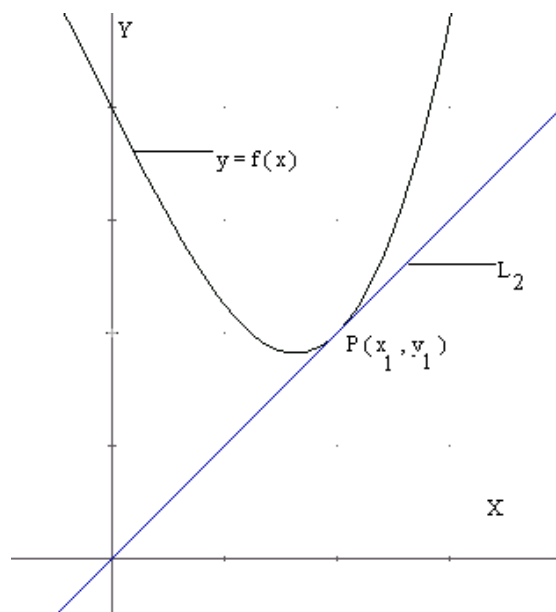
$$\text{Así, } m_1 = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si Q se aproxima a P , Δx tiende a cero y la recta L_1 (recta secante) se transforma en la recta L_2 , que es la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, y_1)$. Es decir,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es la pendiente de la recta tangente a } y = f(x) \text{ en el}$$

punto $P(x_1, y_1)$ con $y_1 = f(x_1)$

VIRGINIO GOMEZ



Concepto de derivada de una función

Si $y = f(x)$ es una función, entonces la derivada de f en x es :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{si el límite existe.}$$

Notación :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Teoremas :

Teorema 1: $y = f(x)$ es derivable en x si existe $f'(x)$.

Teorema 2: $y = f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) si lo es en cada punto del intervalo.

Teorema 3: Si $y = f(x)$ es derivable en $x = c$, entonces $y = f(x)$ es continua en $x = c$.

El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se denomina **Cuociente de Newton**.

VIRGINIO GOMEZ

Interpretaciones de la derivada

I) Geometría Analítica:

a) Si $y = f(x)$, entonces la derivada $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ representa la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. El punto $(x, f(x))$ debe pertenecer a la función $y = f(x)$ para ser el punto de tangencia.

Si (x_0, y_0) es punto de tangencia de la curva $y = f(x)$, entonces es posible establecer las ecuaciones de dos rectas :

Recta Tangente

$$y - y_0 = \left[\left(\frac{dy}{dx} \right) (x_0, y_0) \right] (x - x_0)$$

Recta Normal

$$y - y_0 = \left(\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx} \right) (x_0, y_0)} \right) (x - x_0)$$

La recta tangente y la recta normal son perpendiculares en el punto de tangencia.

b) Si $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa, además, la razón instantánea de cambio de y con respecto a x .

II) Física:

* Velocidad media :

Si $s = s(t)$ es la función de posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces la velocidad del objeto en el intervalo $(t, \Delta t)$ es :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

* Velocidad o velocidad instantánea :

Si $s = s(t)$ es la función de posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces la velocidad del objeto en el tiempo t es :

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$\text{Rapidez} = |v(t)|$$

* Aceleración :

Si $s = s(t)$ es la función de posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su aceleración en el instante t es :

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Reglas de derivación:

1) Si $f(x) = c$, c una constante, entonces $\boxed{\frac{dy}{dx}(c) = 0}$

2) Si $f(x) = x^n$, n un número racional, entonces $\boxed{\frac{dy}{dx}(x^n) = n x^{n-1}}$

3) Si $y = f(x)$ y c una constante, entonces $\boxed{\frac{dy}{dx}(cf(x)) = c f'(x)}$

4) Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx}(f(x)) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots + f_n'(x)$$

5) Si $y = f(x) \cdot g(x)$, entonces $\boxed{\frac{dy}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

6) Si $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$, entonces

$$\boxed{\frac{dy}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Ejemplos :

I) Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

1) $f(x) = 2$; $\frac{dy}{dx} = 0$

2) $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$; $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 3$

3) $f(x) = \frac{1}{3}(5x^4 - 3)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{20}{3}x^3$

4) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 2)(x^3 - 1) + (x^2 + 2x + 1)(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$5) f(x) = \frac{3 - 2x - x^2}{x^4 - 3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-2 - 2x)(x^4 - 3x) - (3 - 2x - x^2)(4x^3 - 3)}{(x^4 - 3x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 9}{(x^4 - 3x)^2}$$

$$6) f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 9 \right) \left(x^{3/2} - \frac{2}{x} + 3 \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} \right) \left(x^{3/2} - \frac{2}{x} + 3 \right) + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 9 \right) \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^5 + 27x^{9/2} + 3x^{7/2} + 3x^{5/2} + 36x^2 + 12x - 12}{2x^4}$$

$$7) f(x) = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right) (x^4 - x^3 - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(2x - 1)(x^2 + 1) - (x^2 - x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \right) (x^4 - x^3 - 1) + \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right) (4x^3 - 3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^5 + 4x^3 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$8) f(x) = \frac{(x^3 - x^5)(2x^5 - 9x + 3)}{(3x - 5)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{((3x^2 - 5x^4)(2x^5 - 9x + 3) + (x^3 - x^5)(10x^4 - 9))(3x - 5) - ((x^3 - x^5)(2x^5 - 9x + 3))(3)}{(3x - 5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2(36x^5 - 205x^4 + 282x^3 + 56x^2 - 198x + 45)}{(3x - 5)^2}$$

II) Determine la ecuación de la recta tangente y normal a la función en el punto de tangencia dado.

$$1) f(x) = x^2 + 2x$$

$$P(1, 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx}(1, 3) = 2(1) + 2 = 4$$

$$m_T = 4$$

$$m_N = -\frac{1}{4}$$

Recta tangente

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 1$$

Recta normal

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$2) f(x) = \frac{1 - 2x}{x + 1}$$

$$P\left(4, -\frac{7}{5}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+1) - (1-2x)(1)}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(4, -\frac{7}{5}\right) = -\frac{3}{(4+1)^2} = -\frac{3}{25}$$

$$m_T = -\frac{3}{25}$$

$$m_N = \frac{25}{3}$$

Recta tangente

$$y + \frac{7}{5} = -\frac{3}{25}(x - 4)$$

$$y = -\frac{3}{25}x - \frac{23}{25}$$

Recta normal

$$y + \frac{7}{5} = \frac{25}{3}(x - 4)$$

$$y = \frac{25}{3}x - \frac{521}{15}$$

III)

1) La altura s en el instante t de una moneda que se deja caer es $s(t) = -16t^2 + 1350$ con s medida en pies y t medido en segundos. Hallar :

a) velocidad media en el intervalo $[1, 2]$

$$s(1) = -16(1) + 1350 = 1334$$

$$s(2) = -16(4) + 1350 = 1286$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1286 - 1334}{2 - 1} = -48$$

la velocidad media es de -48 pies/seg.

b) velocidad instantánea en $t = 1$ y $t = 2$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -32t$$

$$v(1) = -32$$

$$v(2) = -64$$

la velocidad instantánea en $t = 1$ es -32 pies/seg. y en $t = 2$ es -64 pies/seg.

VIRGINIO GOMEZ

c) ¿cuánto tarda en llegar al suelo?

$$\begin{aligned}s(t) = 0 &\Rightarrow -16t^2 + 1350 = 0 \\1350 &= 16t^2 \\ \sqrt{\frac{1350}{16}} &= t \\ 9,19 &\sim t\end{aligned}$$

en llegar al suelo tarda aproximadamente 9,19 segundos.

2) La velocidad de un automóvil que parte del reposo es $v(t) = \frac{100t}{2t+15}$, v en m/seg. Hallar la aceleración tras :

- a) 5 segundos.
- b) 10 segundos
- c) 15 segundos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{100(2t+15) - 100t(2)}{(2t+15)^2} = \frac{1500}{(2t+15)^2}$$

$$a(5) = \frac{1500}{(10+15)^2} = 2,4$$

la aceleración a los 5 segundos es de 2,4 m/seg².

$$a(10) = \frac{1500}{(20+15)^2} = \frac{60}{49} \sim 1,22$$

la aceleración a los 10 segundos es aproximadamente de 1,22 m/seg².

$$a(15) = \frac{1500}{(30+15)^2} = \frac{20}{27} \sim 0,74$$

la aceleración a los 15 segundos es aproximadamente de 0,74 m/seg².

Ejercicios Propuestos

I) Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

1) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - x - 7$

2) $f(x) = (x^3 + 2x - 3)(x^2 - 5)$

3) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 3}$

4) $f(x) = \frac{(x+1)(x^3 + 4x + 2)}{(x^2 - 5)}$

5) $f(x) = (2x^2 + 3x)(x^3 - 4x^2)(3x^2 + 5x)$

II) Determine la ecuación de la recta tangente y normal a la función en el punto de tangencia dado.

1) $f(x) = 3x^3 + 4x$ $P(2, 1)$

2) $f(x) = \frac{3x + 2}{4 - x}$ $P(-3, -5)$

III) 1) La posición de un cuerpo está dada por $s(t) = 3t^2 - 5t$ con s medida en metros y t medido en minutos. Hallar :

a) velocidad media en el intervalo $[2, 3]$

b) velocidad instantánea en $t = 3$ y $t = 5$

c) ¿en qué tiempo el cuerpo vuelve a pasar por el origen?

2) La velocidad de un tren que parte del reposo es $v(t) = \frac{t - 25}{2t}$, v en km/hr. Hallar la aceleración tras :

a) 2 horas.

b) 3 horas.

c) 90 minutos.

Solución :

I) 1) $\frac{dy}{dx} = 15x^4 - 12x^2 + 2x - 1$

2) $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 9x^2 - 6x - 10$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{(x^3 + 2)^2}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^5 + x^4 - 20x^3 - 21x^2 - 44x - 30}{(x^2 - 5)^2}$

5) $\frac{dy}{dx} = (4x + 3)(x^3 - 4x^2)(3x^2 + 5x) + (2x^2 + 3x)(3x^2 - 8x)(3x^2 + 5x) + (2x^2 + 3x)(x^3 - 4x^2)(6x + 5)$

II) 1) Recta tangente: $y = 40x - 79$

Recta normal: $y = -\frac{1}{40}x + \frac{21}{20}$

2) Recta tangente: $y = \frac{2}{7}x - \frac{29}{7}$

Recta normal: $y = -\frac{7}{2}x - \frac{31}{2}$

III) 1) a) Veloc media: 10 mt/min
b) Veloc instantanea: $t = 3 \Rightarrow 13 \text{ mt/min}; \quad t = 5 \Rightarrow 25 \text{ mt/min}$
c) El cuerpo vuelve a pasar por el origen después de $1,67 \text{ min}$.

2) a) La aceleración a las 2 horas es de $3,125 \text{ km/hr}^2$.
b) La aceleración a las 3 horas es de $1,39 \text{ km/hr}^2$.
c) La aceleración a los 90 minutos es de $5,56 \text{ km/hr}^2$.

VIRGINIO GOMEZ

Regla de la cadena

a) Si $y = f(u)$ es una función derivable y $u = f(x)$ es también una función derivable, entonces :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

b) Si $y = f(u)$ es una función derivable, $u = f(v)$ es una función derivable y $v = f(x)$ es también una función derivable, entonces :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}$$

c) Si $y = (f(x))^n$, entonces $\boxed{\frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)}$

Ejemplo :

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

$$1) y = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4 \quad ; \quad u = x^{-5} + 3x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = u - u^2 + u^3 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{5}{x^6} + 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = (u - u^2 + u^3) \left(-\frac{5}{x^6} + 6x \right)$$

$$2) y = \sqrt{3x^5 - 7x + 9}$$

$$y = (3x^5 - 7x + 9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^5 - 7x + 9)^{-\frac{1}{2}}(15x^4 - 7) = \frac{15x^4 - 7}{2\sqrt{3x^5 - 7x + 9}}$$

$$3) y = (u^7 - 5u + 3u^4)^5 \quad ; \quad u = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 5(u^7 - 5u + 3u^4)^4 (7u^6 - 5 + 12u^3)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x\sqrt{x+1} - (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)}{x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(u^7 - 5u + 3u^4)^4 (7u^6 - 5 + 12u^3) \left(\frac{2x\sqrt{x+1} - (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)}{x + 1} \right)$$

$$4) y = (3x^7 - 4x)^7 \cdot \sqrt{x^2 - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 7(3x^7 - 4x)^6 (21x^6 - 4) \sqrt{x^2 - x} + (3x^7 - 4x)^7 \cdot \left(\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} \right)$$

$$5) y = \sqrt{3u^5 - 7u} \quad ; u = (2v^4 - 7v) \cdot \left(\sqrt{v} + \frac{2}{v} \right) \quad ; v = \frac{3x^6 - x}{3x^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{15u^4 - 7}{2\sqrt{3u^5 - 7u}}$$

$$\frac{du}{dv} = (8v^3 - 7) \left(\sqrt{v} + \frac{2}{v} \right) + (2v^4 - 7v) \left(\frac{1}{2\sqrt{v}} - \frac{2}{v^2} \right)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(18x^5 - 1)(3x^2 + 1) - (3x^6 - x)(6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{36x^7 + 18x^5 + 3x^2 - 1}{(3x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{15u^4 - 7}{2\sqrt{3u^5 - 7u}} \right) \left((8v^3 - 7) \left(\sqrt{v} + \frac{2}{v} \right) + (2v^4 - 7v) \left(\frac{1}{2\sqrt{v}} - \frac{2}{v^2} \right) \right) \left(\frac{36x^7 + 18x^5 + 3x^2 - 1}{(3x^2 + 1)^2} \right)$$

$$6) y = \sqrt[3]{\frac{3x^4 - 5x}{1 - 3x}} = \left(\frac{3x^4 - 5x}{1 - 3x}\right)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{3x^4 - 5x}{1 - 3x}\right)^{-2/3} \left(\frac{(12x^3 - 5)(1 - 3x) - (3x^4 - 5x)(-3)}{(1 - 3x)^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^4 - 5x}{1 - 3x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{12x^3 - 27x^4 - 5}{(1 - 3x)^2}\right)$$

$$7) y = \frac{\sqrt{2x - 1} \cdot (3x + 7)^4}{2x - 5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2x - 1}}\right)(3x + 7)^4 + 12(\sqrt{2x - 1})(3x + 7)^3\right)(2x - 5) - (\sqrt{2x - 1} \cdot (3x + 7)^4)(2)}{(2x - 5)^2}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

$$1) \quad y = \frac{2}{3}u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{5}{2}u^2 \quad ; \quad u = 3x^4 - 2x^3 + 9$$

$$2) \quad y = -\frac{3}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^{-3} - \frac{1}{4}u^{-1} \quad ; \quad u = \frac{1}{5}x^{-3} + \frac{2}{7}x^2 - 5x$$

$$3) \quad y = \sqrt{5x^4 - 2x^3 + 4}$$

$$4) \quad y = \sqrt{5x^3 - 4x} \cdot (x^2 + 3x)$$

$$5) \quad y = \frac{2u+1}{\sqrt{u^2+3}} \quad ; \quad u = (2x^3 + x^2 - 1)^3$$

$$6) \quad y = (8u^2 - 3u) \cdot \sqrt{3u^2 + 1} \quad ; \quad u = \sqrt{x^3 - 3x} \cdot (x^2 + 2)$$

$$7) \quad y = \frac{2u^5 - 5}{u^3 + 4} \quad ; \quad u = v^3 + 2v \quad ; \quad v = \sqrt{3x^2 + 5x}$$

$$8) \quad y = \left(\frac{u^2 + 1}{u - 3} \right) (u^3 + 3u) \quad ; \quad u = \frac{\sqrt{v^2 + v}}{v - 3} \quad ; \quad v = \frac{x^3 + x^2 - x}{\sqrt{x + 1}}$$

$$9) \quad y = \sqrt[5]{\frac{2x^3 + 4x}{x + 1}}$$

$$10) \quad y = \sqrt[7]{u^2 + u} \cdot (u^3 - 3u) \quad ; \quad u = (x^2 + 5) \cdot \sqrt[3]{4x^5 + 3x^2}$$

VIRGINIO GOMEZ

Solución :

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = (4u^5 - 2u^3 + 5u)(12x^3 - 6x^2)$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = \left(-3u^4 - 2u^{-4} + \frac{1}{4}u^{-2}\right)\left(-\frac{3}{5}x^{-4} + \frac{4}{7}x - 5\right)$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{10x^3 - 3x^2}{\sqrt{5x^4 - 2x^3 + 4}}$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{15x^2 - 4}{2\sqrt{5x^3 - 4x}}\right)(x^2 + 3x) + \sqrt{5x^3 - 4x} (2x + 3)$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2\sqrt{u^2 + 3} - \frac{u(2u + 1)}{\sqrt{u^2 + 3}}}{(u^2 + 3)}\right)(3(2x^3 + x^2 - 1)^2(6x^2 + 2x))$$

$$6) \quad \frac{dy}{dx} = \left((16u - 3)\sqrt{3u^2 + 1} + (8u^2 - 3u)\left(\frac{6u}{2\sqrt{3u^2 + 1}}\right)\right) \\ \left(2x\sqrt{x^3 - 3x} + (x^2 + 2)\left(\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}\right)\right)$$

$$7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(4u^7 + 40u^4 + 15u^2)}{(u^3 + 4)^2} (3v^2 + 2) \left(\frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5}}\right)$$

VIRGINIO GOMEZ

$$8) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\left(\frac{2u(u-3) - (u^2+1)}{(u-3)^2} \right) (u^3+3u) + \left(\frac{u^2+1}{u-3} \right) (3u^2+3) \right)$$

$$\left(\frac{\left(\frac{2v+1}{2\sqrt{v^2+v}} \right) (v-3) - \sqrt{v^2+v}}{(v-3)^2} \right)$$

$$\left((3x^2+2x-1)\sqrt{x+1} - (x^3+x^2-x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) \right)$$

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(\frac{2x^3+4x}{x+1} \right)^4}} \right) \left(\frac{4x^3+6x^2+4}{(x+1)^2} \right)$$

$$10) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\left(\frac{2u+1}{7\sqrt[7]{(u^2+u)^6}} \right) (u^3-3u) + \sqrt[7]{u^2+u} (3u^2-3) \right)$$

$$\left(2x\sqrt[3]{4x^5+3x^2} + (x^2+5) \left(\frac{20x^4+6x}{3\sqrt[3]{(4x^5+3x^2)^2}} \right) \right)$$

VIRGINIO GOMEZ

Derivación Implícita

Hasta el momento se han derivado funciones explícitas, es decir, funciones de la forma $y = f(x)$. Ahora, se derivarán funciones implícitas, es decir, funciones en las cuales la variable dependiente y no aparece despejada.

Son funciones explícitas :

Son funciones implícitas :

$$1) y = x^7 - 5x + 7$$

$$1) x^3 + y^7 = 3x - 5y + 9$$

$$2) y = \frac{\sqrt[5]{4x-5}}{7-8x^9}$$

$$2) xy - 3x^2y^3 = 2x - 5y$$

$$3) y = \left(\sqrt{\frac{2x-1}{5-3x}} \right) (4x-7)^4$$

$$3) (2x-3y)^7 = 1-xy$$

Para derivar funciones implícitas se usa el proceso de derivación implícita que consiste en derivar tanto la variable x como la variable y usando las reglas de derivación ya conocidas y cada vez que se derive la variable y , variable dependiente, se debe agregar $\frac{dy}{dx}$

Ejemplos :

$$1) \quad x^3 + y^7 = 3x - 5y + 9$$

$$3x^2 + 7y^6 \frac{dy}{dx} = 3 - 5 \frac{dy}{dx}$$

$$7y^6 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} (7y^6 + 5) = 3 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3x^2}{7y^6 + 5}$$

$$2) \quad xy - 3x^2y^3 = x^2 - 5y$$

$$\left(y + x \frac{dy}{dx} \right) - \left(6xy^3 + 9x^2y^2 \frac{dy}{dx} \right) = 2x - 5 \frac{dy}{dx}$$

$$x \frac{dy}{dx} - 9x^2y^2 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dy}{dx} = 2x - y + 6xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} (x - 9x^2y^2 + 5) = 2x - y + 6xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 6xy^3}{x - 9x^2y^2 + 5}$$

$$3) \quad 3x^4 - 7y^8 + 4 = 2x - 8y + 5y^9$$

$$12x^3 - 56y^7 \frac{dy}{dx} = 2 - 8 \frac{dy}{dx} + 45y^8 \frac{dy}{dx}$$

$$- 56y^7 \frac{dy}{dx} + 8 \frac{dy}{dx} - 45y^8 \frac{dy}{dx} = 2 - 12x^3$$

$$\frac{dy}{dx} (-56y^7 + 8 - 45y^8) = 2 - 12x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 12x^3}{-56y^7 + 8 - 45y^8}$$

$$4) \quad x^3y^7 - 4xy = x^8y^9 - 2x - 3y$$

$$\left(3x^2y^7 + 7x^3y^6 \frac{dy}{dx} \right) - \left(4y + 4x \frac{dy}{dx} \right) = \left(8x^7y^9 + 9x^8y^8 \frac{dy}{dx} \right) - 2 - 3 \frac{dy}{dx}$$

$$7x^3y^6 \frac{dy}{dx} - 4x \frac{dy}{dx} - 9x^8y^8 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} = -3x^2y^7 + 4y + 8x^7y^9 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} (7x^3y^6 - 4x - 9x^8y^8 + 3) = -3x^2y^7 + 4y + 8x^7y^9 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^7 + 4y + 8x^7y^9 - 2}{7x^3y^6 - 4x - 9x^8y^8 + 3}$$

$$5) \quad (2x - 3y)^7 = 1 - xy$$

$$7(2x - 3y)^6 \left(2 - 3 \frac{dy}{dx} \right) = - \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$14(2x - 3y)^6 - 21(2x - 3y)^6 \frac{dy}{dx} = -y - x \frac{dy}{dx}$$

$$-21(2x - 3y)^6 \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} = -y - 14(2x - 3y)^6$$

$$\frac{dy}{dx} (-21(2x - 3y)^6 + x) = -y - 14(2x - 3y)^6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 14(2x - 3y)^6}{-21(2x - 3y)^6 + x}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$6) (2 + xy)^4 = 3x^7 + 2xy + 7y^3 - 9$$

$$4(2 + xy)^3 \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 21x^6 + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 21y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$4y(2 + xy)^3 + 4x(2 + xy)^3 \frac{dy}{dx} = 21x^6 + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 21y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{21x^6 + 2y - 4y(2 + xy)^3}{4x(2 + xy)^3 - 2x - 21y^2}$$

Ejercicios Propuestos

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

$$1) \quad 5x^4 + 3y^5 + 1 = 9x - 3y^2$$

$$2) \quad 4x^3 + 7y^{-2} = 2y - 4x^{-3} + 5$$

$$3) \quad 3x^2y + x^3 = 2x^3y^4 - 4y^5$$

$$4) \quad 4xy^{-1} - 2y^4 + 6 = 5x^{-2}y^3 - 6x^{-4}$$

$$5) \quad 7x^4y^3 - 2y^5 + 9x = 4x^2y^5 - 6y^7$$

$$6) \quad \frac{2}{5}xy^{-2} - \frac{1}{3}x^{-4}y^{-5} + 6x = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}y^{-3}$$

$$7) \quad (5x + 2y)^5 + 5x = 2xy - 9y$$

$$8) \quad (x + y)^8 - 5xy^{-2} = (x^2 + 3y)^{-4}$$

$$9) \quad (2x + 3x^2y)^9 = 7y^2 - 2xy + 3x$$

$$10) \quad \left(\frac{3}{5}y + 2x^{-3}y^{-4} \right)^{-6} - \frac{2}{3}xy^{-2} = (xy + x)^{-4}$$

VIRGINIO GOMEZ

Solución :

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{9 - 20x^3}{15y^4 + 6y}$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{12x^{-4} - 12x^2}{-14y^{-3} - 2}$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2y^4 - 6xy - 3x^2}{3x^2 - 8x^3y^3 + 20y^4}$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{24x^{-5} - 10x^{-3}y^3 - 4y^{-1}}{-4xy^{-2} - 8y^3 - 15x^{-2}y^2}$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8xy^5 - 28x^3y^3 - 9}{21x^4y^2 - 10y^4 - 20x^2y^4 + 42y^6}$$

$$6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}y^{-2} - \frac{4}{3}x^{-5}y^{-5} - 6}{\frac{5}{3}x^{-4}y^{-6} - \frac{4}{5}xy^{-3} + \frac{9}{4}y^{-4}}$$

$$7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y - 25(5x + 2y)^4 - 5}{9 - 2x + 10(5x + 2y)^4}$$

$$8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-8x(x^2 + 3y)^{-5} - 8(x + y)^7 + 5y^{-2}}{8(x + y)^7 + 10xy^{-3} + 12(x^2 + 3y)^{-5}}$$

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2y - 18(2x + 3x^2y)^8 - 54xy(2x + 3x^2y)^8}{27x^2(2x + 3x^2y)^8 - 14y + 2x}$$

$$10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-4y(xy + x)^{-5} - 4(xy + x)^{-5} - 36x^{-4}y^{-4} \left(\frac{3}{5}y + 2x^{-3}y^{-4} \right)^{-7} + \frac{2}{3}y^{-2}}{-\frac{18}{5} \left(\frac{3}{5}y + 2x^{-3}y^{-4} \right)^{-7} + 48x^{-3}y^{-5} \left(\frac{3}{5}y + 2x^{-3}y^{-4} \right)^{-7} + \frac{4}{3}xy^{-3} + 4x(xy + x)^{-5}}$$

Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

1) Si $y = a^u$ con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

2) Si $y = e^u$ con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

3) Si $y = \log_a u$ con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot \frac{du}{dx}$$

4) Si $y = \ln u$ con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplos :

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

$$1) y = 2^{x^2 - x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{x^2 - x} (\ln 2)(2x - 1)$$

$$2) y = \ln(3x + \sqrt{x-1}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x + \sqrt{x-1}} \left(3 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{3x + \sqrt{x-1}}$$

$$3) y = \log_3(4 - 3x^4) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4 - 3x^4} (\log_3 e)(-12x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{12x^3 \log_3 e}{4 - 3x^4}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$4) y = 4^{\ln(1-3x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4^{\ln(1-3x)} (\ln 4) \left(\frac{1}{1-3x} (-3) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{3 \left(4^{\ln(1-3x)} \right) \ln 4}{1-3x}$$

$$5) y = x^2 \cdot \ln(x^2 - 1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x)(\ln(x^2 - 1)) + (x^2) \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \ln(x^2 - 1) + \frac{2x^3}{x^2 - 1}$$

$$6) y = e^{2x-1} \cdot \ln(5x-9) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2e^{2x-1})(\ln(5x-9)) + (e^{2x-1}) \left(\frac{5}{5x-9} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1} \ln(5x-9) + \frac{5e^{2x-1}}{5x-9}$$

$$7) y = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\ln^2(x+1)} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{(\ln(x+1))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(e^{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) (\ln^2(x+1)) - \left(e^{\sqrt{x+1}} \right) \left(2\ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \right)}{(\ln(x+1))^4}$$

$$8) e^{(x+y)} = \ln x - \ln y$$

$$e^{(x+y)} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} - e^{(x+y)}}{e^{(x+y)} + \frac{1}{y}}$$

$$9) e^{xy} + y = \ln x \cdot \ln y$$

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ln y + \ln x \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\ln y}{x} - y e^{xy}}{x e^{xy} + 1 - \frac{\ln x}{y}}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$10) \ln(x^2 - y^2) = 2x - 3y$$

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \left(2x - 2y \frac{dy}{dx} \right) = 2 - 3 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \frac{2x}{x^2 - y^2}}{-\frac{2y}{x^2 - y^2} + 3}$$

Derivación logarítmica

Hasta el momento se han derivado expresiones de la forma $y = (f(x))^n$ ó $y = a^x$, es decir, expresiones en las cuales la base o el exponente de una potencia son variables. Ahora, se derivarán expresiones en las cuales tanto la base como el exponente son variables. Para este tipo de expresiones se usa la derivación logarítmica. Este estilo de derivada consiste en aplicar a la función dada la función logaritmo natural y recordar la siguiente propiedad :

$$\ln x^n = n \ln x$$

Después que se aplica esta propiedad se deriva en forma implícita.

Ejemplos :

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

$$1) y = x^x \quad / \ln$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x + 1}{\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$$

$$2) x^y = y^x \quad / \ln$$

$$\ln x^y = \ln y^x$$

$$y \ln x = x \ln y$$

$$\frac{dy}{dx} \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

$$3) (x - y)^x = (x + y)^y \quad / \ln$$

$$\ln (x - y)^x = \ln (x + y)^y$$

$$x \ln (x - y) = y \ln (x + y)$$

$$\ln(x - y) + \frac{x}{x - y} \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} \ln(x + y) + \frac{y}{x + y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{y}{x + y} + \ln(x - y) + \frac{x}{x - y}}{\frac{x}{x - y} + \ln(x + y) + \frac{y}{x + y}}$$

$$4) (xy - 1)^{(x + y)} = (x + y)^{xy} \quad / \ln$$

$$\ln (xy - 1)^{(x + y)} = \ln (x + y)^{xy}$$

$$(x + y) \ln (xy - 1) = xy \ln (x + y)$$

$$\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \ln(xy - 1) + \frac{x + y}{xy - 1} \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) = y \ln(x + y) + x \ln(x + y) \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x + y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\ln(xy - 1) + \ln(xy - 1) \frac{dy}{dx} + \frac{xy + y^2}{xy - 1} + \left(\frac{x^2 + xy}{xy - 1}\right) \frac{dy}{dx} = y \ln(x + y) + x \ln(x + y) \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x + y} + \left(\frac{xy}{x + y}\right) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y} - \ln(xy - 1) - \frac{xy + y^2}{xy - 1}}{\ln(xy - 1) + \frac{x^2 + xy}{xy - 1} - x \ln(x + y) - \frac{xy}{x + y}}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

1) $y = 3^{2x^4 - 5x}$

2) $y = \ln(\sqrt{2x+3} + 5x^2)$

3) $y = \log_7(2x^5 - 4x^3)$

4) $y = 3x^4 \ln(\sqrt{x+1})$

5) $y = \frac{\ln^3(2x-1)}{e^{\sqrt{4x+5}}}$

6) $e^{xy} + \ln y = \ln x + y$

7) $\ln(x+y) + e^{xy} = 2^{3y} - \log_3 x$

8) $(x+y)^{2y} = (3y)^x$

9) $(x+y)^{x-y} = (xy+1)^{xy}$

10) $(\ln y)^x = (x-y)^{\ln y}$

VIRGINIO GOMEZ

Solución :

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = 3^{2x^4 - 5x} (\ln 3) (8x^3 - 5)$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{(\sqrt{2x+3} + 5x^2)} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}} + 10x \right)$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2x^5 - 4x^3} \right) \log_7 e (10x^4 - 12x^2)$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = 12x^3 \ln(\sqrt{x+1}) + \frac{3x^4}{2(x+1)}$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3 \ln^2(2x-1) \left(\frac{2}{2x-1} \right) e^{\sqrt{4x+5}} - \ln^3(2x-1) e^{\sqrt{4x+5}} \left(\frac{2}{\sqrt{4x+5}} \right)}{\left(e^{\sqrt{4x+5}} \right)^2}$$

$$6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} - y e^{xy}}{x e^{xy} + \frac{1}{y} - 1}$$

$$7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\log_3 e}{x} - \frac{1}{x+y} - y e^{xy}}{\frac{1}{x+y} + x e^{xy} - (3)(2^{3y})(\ln 2)}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\ln 3y - \frac{2y}{x+y}}{2 \ln(x+y) + \frac{2y}{x+y} - \frac{x}{y}}$$

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \ln(xy+1) + \frac{x^2 y}{xy+1} - \ln(x+y) - \frac{x-y}{x+y}}{-\ln(x+y) + \frac{x-y}{x+y} - x \ln(xy+1) - \frac{x^2 y}{xy+1}}$$

$$10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\ln y}{x-y} - \ln(\ln y)}{\frac{x}{y \ln y} - \frac{\ln(x-y)}{y} + \frac{\ln y}{x-y}}$$

VIRGINIO GOMEZ

Derivada de funciones trigonométricas

1) Si $y = \operatorname{sen} u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

2) Si $y = \cos u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx}$$

3) Si $y = \operatorname{tg} u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

4) Si $y = \operatorname{cotg} u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

5) Si $y = \sec u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot \frac{du}{dx}$$

6) Si $y = \operatorname{cosec} u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplos :

Determine $\frac{dy}{dx}$ en :

$$\begin{aligned} 1) y = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x - \operatorname{tg} x^2 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\cos 2x)2 - (\operatorname{sen} 3x)3 - (\sec^2 x^2)2x \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cos 2x - 3\operatorname{sen} 3x - 2x \sec^2 x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) y = \operatorname{cotg}(3x - 5)^4 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(\operatorname{cosec}^2(3x - 5)^4)4(3x - 5)^3 \cdot 3 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -12(3x - 5)^3 \operatorname{cosec}^2(3x - 5)^4 \end{aligned}$$

$$3) y = \operatorname{sen} \sqrt{x+x^2} - \cos^3 \sqrt{x+x^2} \Rightarrow y = \operatorname{sen} \sqrt{x+x^2} - (\cos \sqrt{x+x^2})^3$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos \sqrt{x+x^2}) \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} \right) + 3(\cos(\sqrt{x+x^2}))^2 \operatorname{sen}(\sqrt{x+x^2}) \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} \right)$$

$$4) y = \sqrt{\operatorname{tg} 7x} - \operatorname{sen}^5(x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7 \sec^2 7x}{2\sqrt{\operatorname{tg} 7x}} - 5 \operatorname{sen}^4(x-1) \cos(x-1)$$

$$5) y = \ln(\operatorname{sen} x - \cos x) + e^{\sec x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - \cos x} + 2x \sec x^2 \operatorname{tg} x^2 e^{\sec x^2}$$

$$6) y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \cos 2x} + \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(e^x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos 2x (1 - \cos 2x) - 2 \operatorname{sen}^2 2x}{(1 - \cos 2x)^2} + e^x \cos(\operatorname{tg}(e^x)) \sec^2(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1 - \cos 2x)} + e^x \cos(\operatorname{tg}(e^x)) \sec^2(e^x)$$

$$7) \operatorname{sen}(x-y) = x + \cos(x-y) + y$$

$$\cos(x-y) \left(1 - \frac{dy}{dx} \right) = 1 - \operatorname{sen}(x-y) \left(1 - \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y) - 1}{\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y) + 1}$$

$$8) (\operatorname{sen} x)^{\cos y} = (\cos y)^{\operatorname{sen} x} \quad / \ln$$

$$\ln (\operatorname{sen} x)^{\cos y} = \ln (\cos y)^{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos y \ln (\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \ln (\cos y)$$

$$- \operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} \ln (\operatorname{sen} x) + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} x} \cos x = \cos x \ln (\cos y) - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y} \operatorname{sen} y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \ln (\cos y) - \cos y \cot g x}{- \operatorname{sen} y \ln (\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \operatorname{tg} y}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Determine $\frac{dy}{dx}$ en :

1) $y = \operatorname{sen} 5x + \cos^2 3x + \cot g x^2$

2) $y = \sec (3x^2 - 1)^5$

3) $y = \operatorname{tg} \sqrt{1+x} + \operatorname{sen}^5 \sqrt{x^3+x}$

4) $y = \ln (\operatorname{sen}^2 2x) + \sqrt{\cos 8x}$

5) $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$

6) $y = \frac{\operatorname{sen}^3 x^2 - \cot g x}{\sqrt{\operatorname{cosec} 3x}}$

7) $\cos x - \operatorname{sen} y = \operatorname{tg} xy$

8) $\operatorname{tg} (x+y)^2 - \operatorname{cosec}^3 y = \operatorname{sen}(\ln xy)$

9) $(\operatorname{sen} x)^y = (\operatorname{tg} y)^x$

10) $(\cot g (x+y))^x = (\sec x)^y$

VIRGINIO GOMEZ

Solución :

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = 5 \cos 5x - 6 \cos 3x \operatorname{sen} 3x - 2x \operatorname{cosec}^2 x^2$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = 30x \sec(3x^2 - 1)^5 \operatorname{tg}(3x^2 - 1)^5 (3x^2 - 1)^4$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sec^2 \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} \right) + \left(\frac{(5 \operatorname{sen}^4 \sqrt{x^3+x}) (\cos \sqrt{x^3+x}) (3x^2+1)}{2\sqrt{x^3+x}} \right)$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x} \right) - \left(\frac{4 \operatorname{sen} 8x}{\sqrt{\cos 8x}} \right)$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(2 \operatorname{tg} x \sec^2 x)(1 + \operatorname{sen} x) - \operatorname{tg}^2 x \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left((6x \operatorname{sen}^2 x^2 \cos x^2 + \operatorname{cosec}^2 x) (\sqrt{\operatorname{cosec} 3x}) \right) - (\operatorname{sen}^3 x^2 - \operatorname{cotg} x) \left(\frac{-3 \operatorname{cosec} 3x \operatorname{cotg} 3x}{2\sqrt{\operatorname{cosec} 3x}} \right)}{\operatorname{cosec} 3x}$$

$$7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \sec^2(xy) + \operatorname{sen} x}{-\cos y - x \sec^2(xy)}$$

$$8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\cos(\ln xy)}{x} - (2x + 2y)(\sec^2(x + y)^2)}{(2x + 2y)(\sec^2(x + y)^2) + 3(\operatorname{cosec}^3 y)(\operatorname{cotg} y) - \frac{\cos(\ln xy)}{y}}$$

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\operatorname{tg} y) - \frac{y \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\ln(\operatorname{sen} x) - \frac{x \sec^2 y}{\operatorname{tg} y}}$$

$$10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{tg} x - \ln(\operatorname{cotg}(x + y)) + \frac{x \operatorname{cosec}^2(x + y)}{\operatorname{cotg}(x + y)}}{-\frac{x \operatorname{cosec}^2(x + y)}{\operatorname{cotg}(x + y)} - \ln(\sec x)}$$

Derivada de funciones trigonométricas inversas

1) Si $y = \text{Arc sen } u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

2) Si $y = \text{Arc tg } u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

3) Si $y = \text{Arc sec } u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

4) Si $y = \text{Arc cos } u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

5) Si $y = \text{Arc cotg } u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

6) Si $y = \text{Arc cosec } u$, con $u = (x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{u \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplos :

Determine $\frac{dy}{dx}$ en :

$$1) y = \text{Arc sen}(2x) + \text{Arctg}(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} + \frac{6x}{1+(3x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{6x}{1+9x^4}$$

$$2) y = \text{Arc sen } \sqrt{1-x^2} + x^3 \text{Arc tg } e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} + 3x^2 \text{Arc tg } e^x + \frac{x^3 e^x}{1+(e^x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 3x^2 \text{Arc tg } e^x + \frac{x^3 e^x}{1+(e^x)^2}$$

$$3) y = (\text{Arc sec } x^3)^7$$

$$\frac{dy}{dx} = 7(\text{Arc sec } x^3)^6 \frac{3x^2}{x^3 \sqrt{x^6-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{21x^2 (\text{Arc sec } x^3)^6}{x^3 \sqrt{x^6-1}}$$

$$4) y = \text{Arc tg}(\text{sen } x - e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - e^x}{1+(\text{sen } x - e^x)^2}$$

$$5) x \text{Arcsen } y = y \text{Arc sec } x$$

$$\text{Arcsen } y + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{Arc sec } x + \frac{y}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x \sqrt{x^2-1}} - \text{Arcsen } y}{\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} - \text{Arc sec } x}$$

$$6) x^{\text{Arcsen } y} = y^{\text{Arc tg } x} \quad / \ln$$

$$\ln x^{\text{Arcsen } y} = \ln y^{\text{Arc tg } x}$$

$$\text{Arcsen } y \ln x = \text{Arc tg } x \ln y$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} \ln x + \frac{\text{Arcsen } y}{x} = \frac{1}{1+x^2} \ln y + \frac{\text{Arc tg } x}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\ln y}{1+x^2} - \frac{\text{Arcsen } y}{x}}{\frac{\ln x}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{\text{Arc tg } x}{y}}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

Obtener $\frac{dy}{dx}$ en :

1) $y = \text{Arc tg}(2x^3) + \text{Arc cotg}(5x)$

2) $y = (\text{Arc cosec } x^4)^6$

3) $y = \text{Arc cos}(5x - \text{tg } x)$

4) $y = \text{Arc sen}(\ln x) - \text{Arc tg}(\sec x^2)$

5) $y = \text{Arc cos}(e^x) + \text{Arc cosec}(3^x)$

6) $y = (\text{Arc tg}(\text{sen } x^5))^7$

7) $y \text{ Arc cos } x = x \text{ Arc sen } y$

8) $\text{Arc tg}(x + y) - 3x = x \text{ Arc sen}(\text{sen } y)$

9) $y^{\text{Arc cos } 2x} = x^{\text{Arc sec } y^2}$

10) $(\text{Arc sec } x^2)^y = (\text{Arc tg } y^3)^x$

VIRGINIO GOMEZ

Solución :

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{1+4x^6} - \frac{5}{1+25x^2}$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = 6 (\text{Arc cosec } x^4)^5 \left(-\frac{4}{x \sqrt{x^8 - 1}} \right)$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{5 - \sec^2 x}{\sqrt{1 - (5x - \text{tg } x)^2}}$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} - \frac{2x \sec x^2 \text{tg } x^2}{1 + \sec^2 x^2}$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} - \frac{\ln 3}{\sqrt{3^{2x} - 1}}$$

$$6) \quad \frac{dy}{dx} = 7 (\text{Arc tg}(\text{sen } x^5))^6 \left(\frac{5x^4 \cos x^5}{1 + \text{sen}^2 x^5} \right)$$

$$7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{Arc sen } y + \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}}{\text{Arc cos } x - \frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}}$$

$$8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{Arc sen}(\text{sen } y) - \frac{1}{1 + (x + y)^2} + 3}{\frac{1}{1 + (x + y)^2} - \frac{x \cos y}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}}}$$

$$9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\text{Arc sec } y^2}{x} + \frac{2 \ln y}{\sqrt{1 - 4x^2}}}{\frac{\text{Arc cos } 2x}{y} - \frac{2 \ln x}{y \sqrt{y^4 - 1}}}$$

$$10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\text{Arc tg } y^3) - \frac{2y}{x \text{Arc sec } x^2 \sqrt{x^4 - 1}}}{\ln(\text{Arc sec } x^2) - \frac{3xy^2}{\text{Arc tg } y^3(1 + y^6)}}$$

VIRGINIO GOMEZ

Derivadas de orden superior

$y = f(x)$ es una función real que al derivarla, es decir, al obtener $f'(x)$ obtenemos otra función que depende de x , por lo tanto, se puede volver a derivar y así obtener la segunda derivada: $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$. Pero, a su vez, $f''(x)$ es también una función, luego es posible derivarla y así obtener la tercera derivada: $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ y así sucesivamente.

En general, si $y = f(x)$ tiene n derivadas, entonces la n - ésima derivada será :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = \frac{d(f^{n-1}(x))}{dx}$$

Ejemplos

- 1) Determinar todas las derivadas de :

$$y = 3x^4 - 2x^2 + 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 4x + 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 4$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 72x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 72$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

- 2) Obtener $\frac{d^2y}{dx^2}$ en :

$$a) y = (3x^4 - x)^3 \cdot (4 - 5x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(3x^4 - x)^2(12x^3 - 1)(4 - 5x^2) + (3x^4 - x)^3(-10x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(3x^4 - x)(12x^3 - 1)(12x^3 - 1)(4 - 5x^2) + 3(3x^4 - x)^2(36x^2)(4 - 5x^2) + 3(3x^4 - x)(12x^3 - 1)(-10x) + 3(3x^4 - x)^2(12x^3 - 1)(-10x) - 10(3x^4 - x)^3$$

b) $3x - 4xy + 5y = 0$

$$3 - 4y - 4x \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3}{5 - 4x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(4 \frac{dy}{dx}\right)(5 - 4x) + (4y - 3)(4)}{(5 - 4x)^2}$$

Ejercicios Propuestos

- 1) Determinar todas las derivadas de:

$$y = 10x^5 - 7x^3 + 9x^2 - 8x + 3$$

- 2) Obtener $\frac{d^2y}{dx^2}$ en:

a) $y = (2x^2 - 3x)(7x - 6x^3)^4$

b) $7y + 5x = 2xy$

c) $3x^2y - 5x = 6y + 4xy^2$

d) $y = \operatorname{sen}^3 x - \cos 2x$

e) $y = \ln(x - x^3)$

f) $y = 5x^2 + 1$

g) $\operatorname{sen} y + x^2 = e^y - \cos x$

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = 50x^4 - 21x^2 + 18x - 8$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 200x^3 - 42x + 18$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 600x^2 - 42$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 1200x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 1200$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = 0$$

$$2) \quad a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4(7x - 6x^3)^4 + (4x - 3)(4)(7x - 6x^3)^3(7 - 18x^2) + \\ (4x - 3)(4)(7x - 6x^3)^3(7 - 18x^2) + \\ (2x^2 - 3x)(12)(7x - 6x^3)^2(7 - 18x^2)(7 - 18x^2) + \\ (2x^2 - 3x)(4)(7x - 6x^3)^3(-36x)$$

$$b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(2 \frac{dy}{dx}\right)(7 - 2x) - (2y - 5)(-2)}{(7 - 2x)^2}$$

$$c) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(8y \frac{dy}{dx} - 6y - 6x \frac{dy}{dx}\right)(3x^2 - 6 - 8xy) - (4y^2 + 5 - 6xy)\left(6x - 8y - 8x \frac{dy}{dx}\right)}{(3x^2 - 6 - 8xy)^2}$$

$$d) \frac{dy}{dx} = 3(\operatorname{sen}^2 x)(\cos x) + 2\operatorname{sen} 2x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^3 x + 4\cos 2x$$

$$e) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1 - 3x^2}{x - x^3} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-6x)(x - x^3) - (1 - 3x^2)(1 - 3x^2)}{(x - x^3)^2} = -\frac{1 + 3x^4}{(x - x^3)^2}$$

$$f) \frac{dy}{dx} = (5^{x^2+1})(\ln 5)(2x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (\ln 5)(5^{x^2+1})(\ln 5)(2x)(2x) + (\ln 5)(5^{x^2+1})(2)$$

$$= (4x^2)(\ln)^2(5^{x^2+1}) + 2(\ln 5)(5^{x^2+1})$$

$$g) \cos y \frac{dy}{dx} + 2x = e^y \frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{\cos y - e^y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(\cos x - 2)(\cos y - e^y) - (\operatorname{sen} x - 2x)\left(-\operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} - e^y \frac{dy}{dx}\right)}{(\cos y - e^y)^2}$$

VIRGINIO GOMEZ

Aplicación de la derivada

A) Gráfico de curvas

Conceptos :

a) Valores extremos

Sea $y = f(x)$ una función definida en un cierto intervalo I donde $x = c \in I$, entonces :

1) $f(c)$ es el mínimo de $f(x)$ en I si, y sólo si $f(c) \leq f(x) \forall x \in I$.

2) $f(c)$ es el máximo de $f(x)$ en I si, y sólo si $f(c) \geq f(x) \forall x \in I$.

Criterios de la primera derivada

b) Valor crítico

Si $y = f(x)$ es una función que existe para $x = c$, entonces c se dice un valor crítico de $f(x)$ si, y sólo si $f'(c) = 0$. El punto $(c, f(c))$ se denomina punto crítico de $f(x)$.

c) Intervalos de crecimiento y/o decrecimiento

Si $y = f(x)$ es una función definida en un cierto intervalo I , entonces :

1) $f(x)$ es creciente en I ($f(x) \uparrow$) si, y sólo si $f'(x) > 0 \forall x \in I$.

2) $f(x)$ es decreciente en I ($f(x) \downarrow$) si, y sólo si $f'(x) < 0 \forall x \in I$.

d) Concavidad

Si $y = f(x)$ es una función definida en un cierto intervalo I , $f(x)$ es derivable en I , entonces :

1) $f(x)$ es cóncava hacia arriba en I ($f(x) \cup$) si, y sólo si $f'(x)$ es creciente en I .

2) $f(x)$ es cóncava hacia abajo en I ($f(x) \cap$) si, y sólo si $f'(x)$ es decreciente en I .

Criterios de la segunda derivada

e) Valor de inflexión

Si $y = f(x)$ es una función definida en un cierto intervalo I que existe para $x = a$, entonces a se dice un valor de inflexión del gráfico de $y = f(x)$ si, y sólo si $f''(a) = 0$. El punto $(a, f(a))$ se denomina punto de inflexión del gráfico de $f(x)$.

f) Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo

Sea $y = f(x)$ es una función definida en un cierto intervalo I , entonces :

1) $f(x)$ es cóncava hacia arriba en I ($f(x) \cup$) si, y sólo si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

2) $f(x)$ es cóncava hacia abajo en I ($f(x) \cap$) si, y sólo si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$.

g) Valores máximos y/o mínimos

Si $x = c$ es un valor crítico de $f(x)$, entonces el punto $(c, f(c))$ es un :

1) máximo relativo de $f(x)$ si, y sólo si $f''(c) < 0$.

2) mínimo relativo de $f(x)$ si, y sólo si $f''(c) > 0$.

Ejemplos :

Determine puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, puntos de máximos y/o mínimos y gráfico de :

$$1) f(x) = x^2 - 6x + 8$$

*** Puntos críticos :**

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$f(3) = 9 - 18 + 8 =$$

$$= -1$$

Punto crítico : $(3, -1)$

*** Intervalo de crecimiento y decrecimiento :**

Intervalo	$-\infty < x < 3$	$3 < x < +\infty$
Valor de prueba	2	4
Signo de $f'(x)$	$f'(2) < 0$	$f'(4) > 0$
Conclusión	decreciente	creciente

$$f(x) \uparrow :]3, +\infty[$$

$$f(x) \downarrow :]-\infty, 3[$$

* Punto de inflexión:

$$f''(x) = 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 = 0 \quad \text{Falso}$$

Por lo tanto, no existe punto de inflexión.

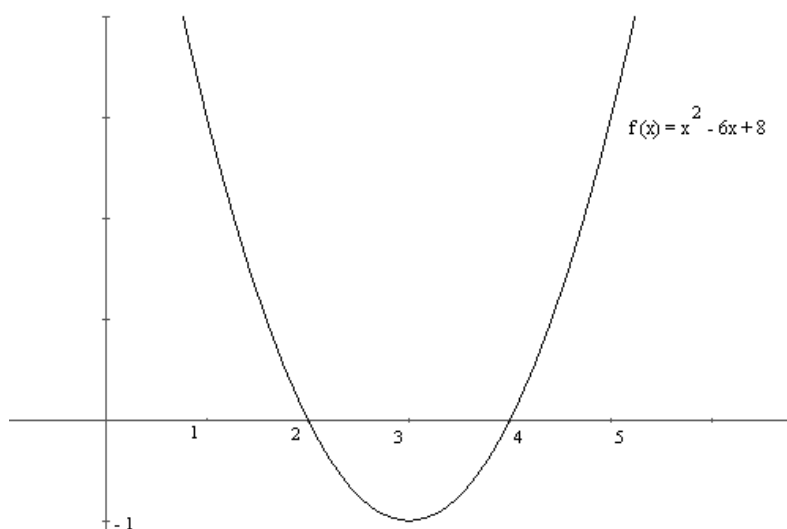
* Intervalos de concavidad :

Como $2 > 0$, entonces $f(x)$ es siempre cóncava hacia arriba.

* Punto de máximo y/o mínimo :

$$f''(3) = 2$$

Luego $(3, -1)$ es un mínimo de $f(x)$



$$2) f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$$

* Puntos críticos :

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{3}{4}x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$f(2) = \frac{8}{4} - 6 = -4 \quad f(-2) = -\frac{8}{4} + 6 = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Puntos críticos : } (2, -4); (-2, 4)$$

* Intervalo de crecimiento y decrecimiento :

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < +\infty$
Valor de prueba	-3	0	3
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	creciente	decreciente	creciente

$$f(x) \uparrow :]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$f(x) \downarrow :]-2, 2[$$

* Punto de inflexión :

$$f''(x) = \frac{6}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6}{4}x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = 0$$

Punto de inflexión : $(0, 0)$

* Intervalos de concavidad :

$$\frac{6}{4}x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\frac{6}{4}x < 0 \Rightarrow x < 0$$

$$f(x) \cup :]0, +\infty[$$

$$f(x) \cap :]-\infty, 0[$$

* Punto de máximo y/o mínimo :

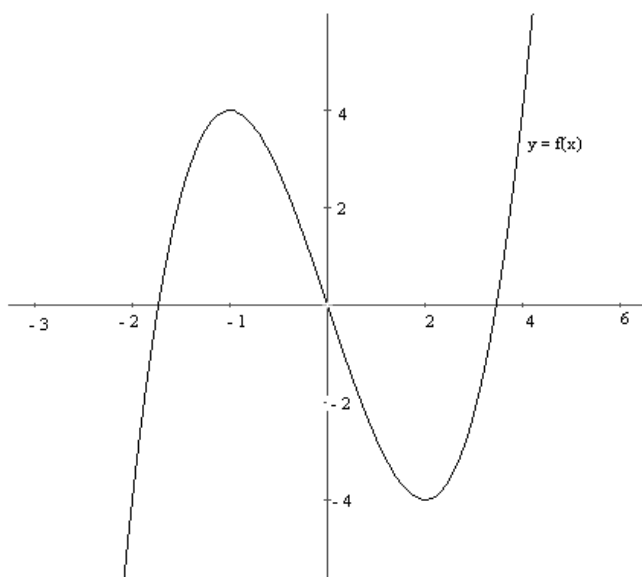
$$f''(2) = 3$$

Luego $(2, -4)$ es un mínimo de $f(x)$

$$f''(-2) = -3$$

Luego $(-2, 4)$ es un máximo de $f(x)$

VIRGINIO GOMEZ



Ejercicios Propuestos

Determine puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, puntos de máximos y/o mínimos y gráfico de :

1) $f(x) = x^2 + 2x - 15$

2) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$

4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

5) $f(x) = x^3 - 3x$

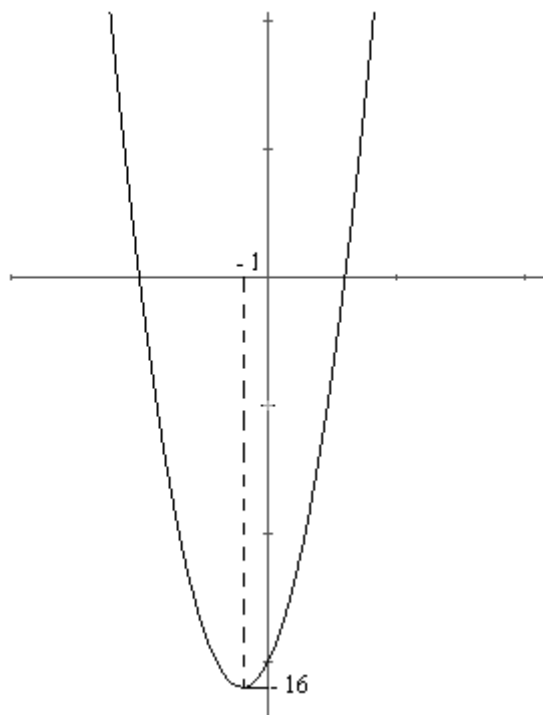
6) $f(x) = 2x^3 - 6x$

7) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 3x + 9$

8) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$

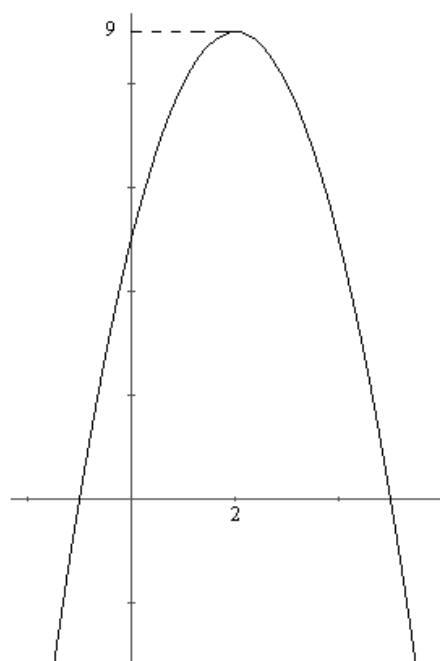
Solución:

- 1) Puntos Críticos: $(-1, -16)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :] -1, +\infty[$
 $f(x) \downarrow :] -\infty, -1[$
- Punto de Inflexión: No existe punto de inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x)$ siempre es cóncava hacia arriba.
- Punto de máximo y/o mínimo: $(-1, -16)$ es un mínimo de $f(x)$.

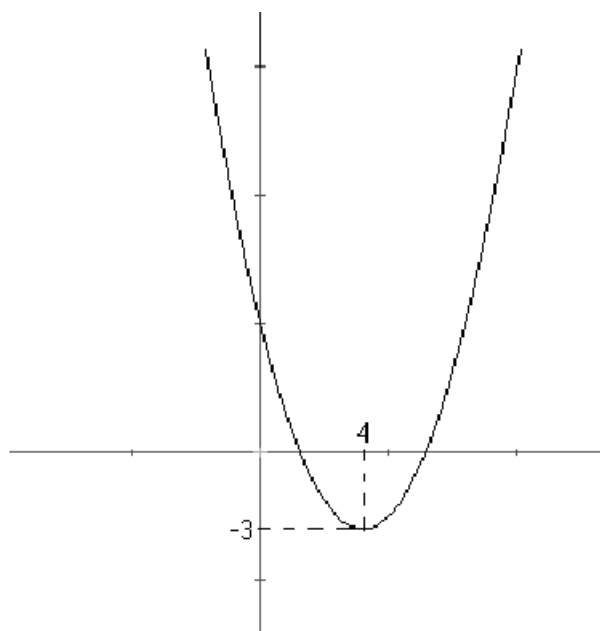


- 2) Puntos Críticos: $(2, 9)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :] -\infty, 2[$
 $f(x) \downarrow :] 2, +\infty[$
- Punto de Inflexión: No existe punto de inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x)$ siempre es cóncava hacia abajo.
- Punto de máximo y/o mínimo: $(2, 9)$ es un máximo de $f(x)$.

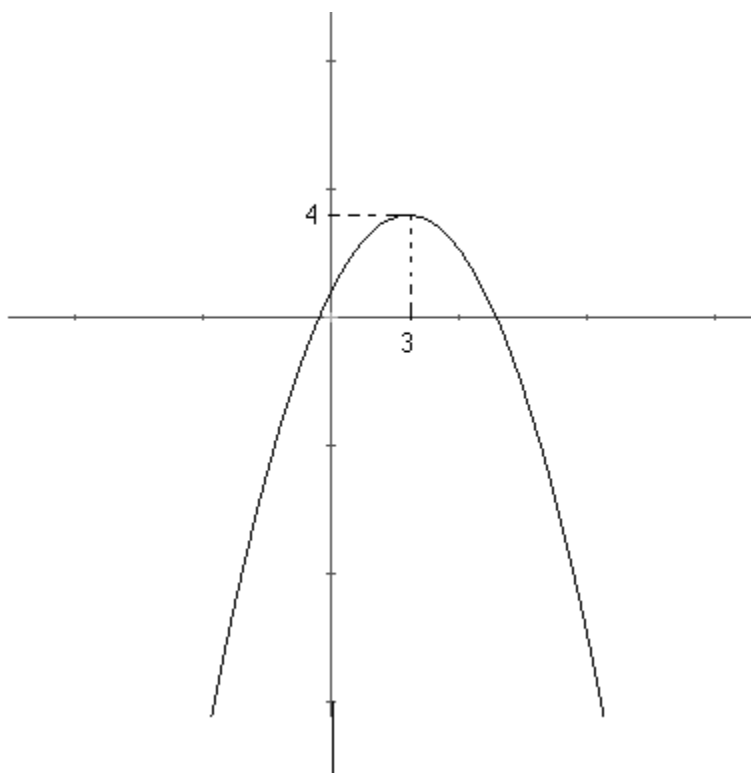
VIRGINIO GOMEZ



- 3) Puntos Críticos: $(4, -3)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :]4, +\infty[$
 $f(x) \downarrow :]-\infty, 4[$
- Punto de Inflexión: No existe punto de inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x)$ siempre es cóncava hacia arriba.
- Punto de máximo y/o mínimo: $(4, -3)$ es un mínimo de $f(x)$.

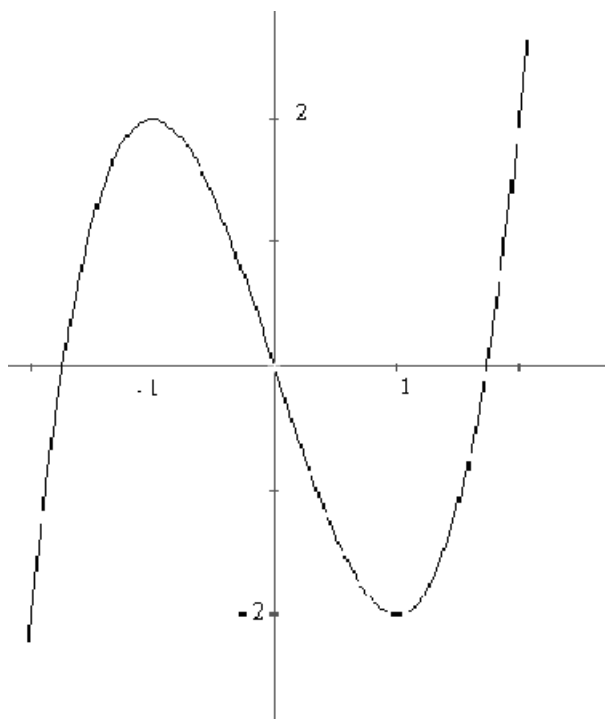


- 4) Puntos Críticos: $(3, 4)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :] - \infty, 3[$
 $f(x) \downarrow :] 3, + \infty[$
- Punto de Inflexión: No existe punto de inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x)$ siempre es cóncava hacia abajo.
- Punto de máximo y/o mínimo: $(3, 4)$ es un máximo de $f(x)$.

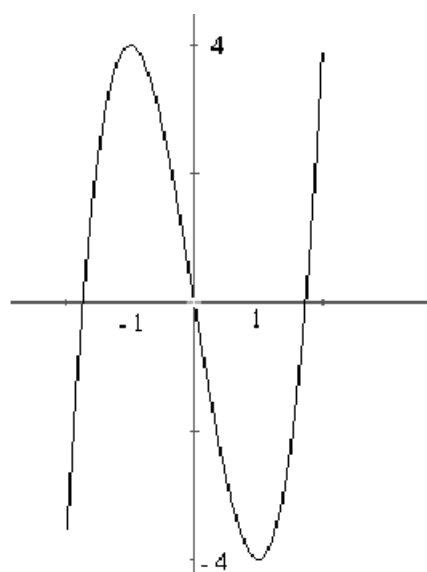


- 5) Puntos Críticos: $(1, -2) ; (-1, 2)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :] - \infty, -1[\cup] 1, + \infty[$
 $f(x) \downarrow :] -1, 1[$
- Punto de Inflexión: $(0, 0)$
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :] 0, + \infty[$
 $f(x) \cap :] - \infty, 0[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $(1, -2)$ es un mínimo de $f(x)$
 $(-1, 2)$ es un máximo de $f(x)$

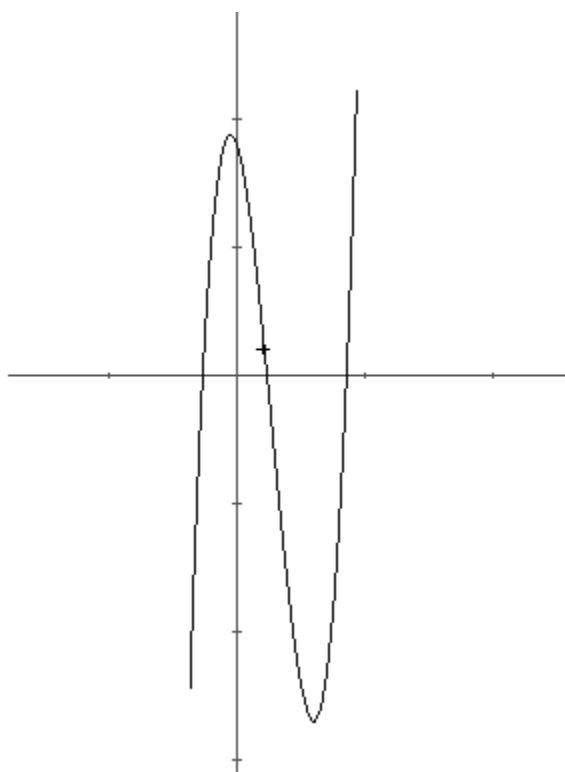
VIRGINIO GÓMEZ



- 6) Puntos Críticos: $(1, -4) ; (-1, 4)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$
 $f(x) \downarrow :] -1, 1[$
- Punto de Inflexión: $(0, 0)$
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :] 0, +\infty[$
 $f(x) \cap :] -\infty, 0[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $(1, -4)$ es un mínimo de $f(x)$
 $(-1, 4)$ es un máximo de $f(x)$

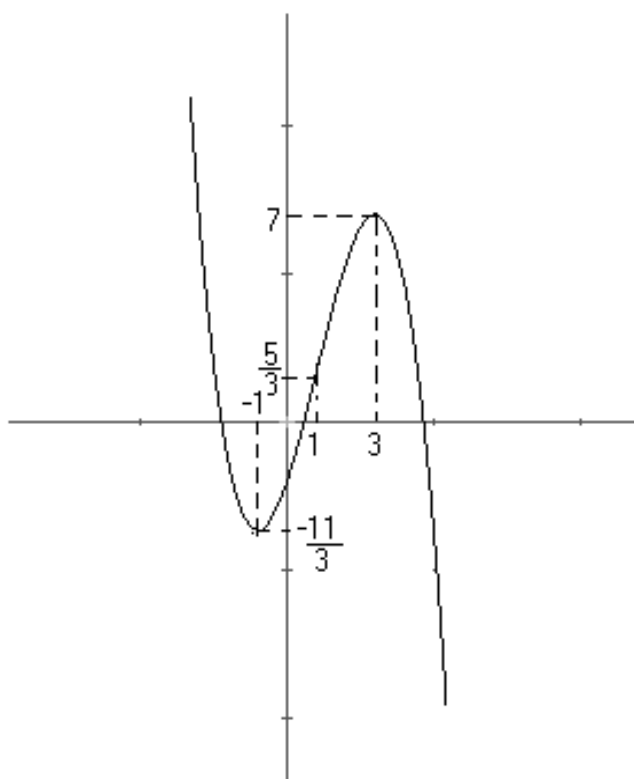


- 7) Puntos Críticos: $\left(3, -\frac{27}{2}\right); \left(-\frac{1}{4}, \frac{901}{96}\right)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]3, +\infty[$
 $f(x) \downarrow :]-\frac{1}{4}, 3[$
- Punto de Inflexión: $\left(\frac{11}{8}, -\frac{395}{192}\right)$
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :]\frac{11}{8}, +\infty[$
 $f(x) \cap :]-\infty, \frac{11}{8}[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $\left(3, -\frac{27}{2}\right)$ es un mínimo de $f(x)$
 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{901}{96}\right)$ es un máximo de $f(x)$



VIRGINIO GÓMEZ

- 8) Puntos Críticos: $(3, 7) ; (-1, -\frac{11}{3})$
- Interv crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :] -1, 3[$
 $f(x) \downarrow :] -\infty, -1[\cup] 3, +\infty[$
- Punto de Inflexión: $(1, \frac{5}{3})$
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :] -\infty, 1[$
 $f(x) \cap :] 1, +\infty[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $(-1, -\frac{11}{3})$ es un mínimo de $f(x)$
 $(3, 7)$ (es un máximo de $f(x)$)



VIRGINIO GOMEZ

Obtenga asíntotas, puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, puntos de máximos y/o mínimos y gráfico de :

$$a) f(x) = \frac{2x + 3}{x - 5}$$

* Asíntota vertical :

$$\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x + 3}{x - 5} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x + 3}{x - 5} = +\infty$$

Por lo tanto, $x = 5$ es una asíntota vertical

* Asíntota horizontal :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{5}{x}} = 2$$

Por lo tanto, $y = 2$ es una asíntota horizontal

* Punto crítico :

$$f'(x) = \frac{(2)(x - 5) - (2x + 3)(1)}{(x - 5)^2} = -\frac{13}{(x - 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{13}{(x - 5)^2} = 0 \Rightarrow -13 = 0 \quad \text{Falso}$$

Luego, no existe punto crítico

* Intervalo de crecimiento y de decrecimiento :

$$\text{Como } f'(x) = -\frac{13}{(x - 5)^2} \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{5\}$$

Por lo tanto $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \mathbb{R} - \{5\}$

* Punto de inflexión :

$$f''(x) = \frac{0(x - 5)^2 + (13)2(x - 5)}{(x - 5)^4} = \frac{26(x - 5)}{(x - 5)^4} = \frac{26}{(x - 5)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{26}{(x - 5)^3} = 0 \Rightarrow 26 = 0 \quad \text{Falso}$$

No existe punto de inflexión

* Intervalo de concavidad :

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{26}{(x-5)^3} > 0$$

Como $26 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $(x-5)^3 > 0$

$$(x-5)^3 > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{26}{(x-5)^3} < 0$$

Como $26 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $(x-5)^3 < 0$

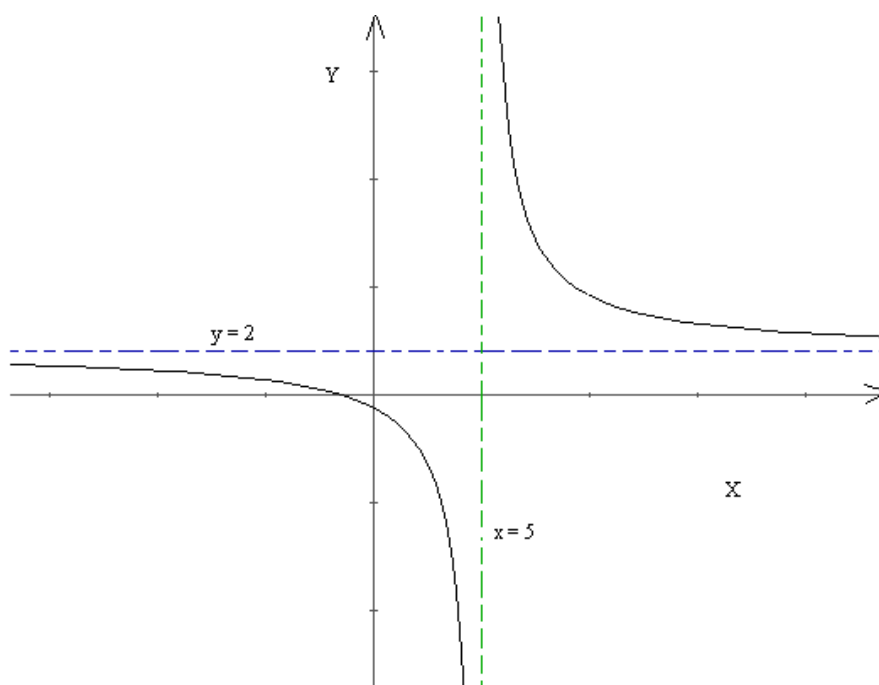
$$(x-5)^3 < 0 \Rightarrow x-5 < 0 \Rightarrow x < 5$$

$$f(x) \cup :]5, +\infty[$$

$$f(x) \cap :]-\infty, 5[$$

* Máximo y/o mínimo:

Como no existe punto crítico, entonces no hay puntos de máximo ni de mínimo



VIRGINIO GOMEZ

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

* Asíntota vertical :

$$\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = -\infty$$

Por lo tanto, $x = -2$ es una asíntota vertical

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = +\infty$$

Por lo tanto, $x = 2$ es una asíntota vertical

* Asíntota horizontal :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = 1$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal

* Punto crítico:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2 - 4) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -10x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \quad \text{Punto crítico : } \left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

* Intervalo de crecimiento y de decrecimiento :

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Valor de prueba	-1	1
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$
Conclusión	creciente	decreciente

$$f(x) \uparrow :]-\infty, 0[$$

$$f(x) \downarrow :]0, +\infty[$$

* Punto de inflexión :

$$f''(x) = \frac{-10(x^2 - 4)^2 + (10x)2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{10(x^2 - 4)(-x^2 + 4 + 4x^2)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -4 \quad \text{No existe } x \text{ en } \mathbb{R}$$

No existe punto de inflexión.

* Intervalo de concavidad :

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} > 0$$

Como $10(3x^2 + 4) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $(x^2 - 4)^3 > 0$

$$(x^2 - 4)^3 > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) > 0$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} < 0$$

Como $10(3x^2 + 4) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $(x^2 - 4)^3 < 0$

$$(x^2 - 4)^3 < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) < 0$$

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < +\infty$
Valor de prueba	-3	0	3
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

$$f(x) \cup :] - \infty, -2[\cup] 2, +\infty[$$

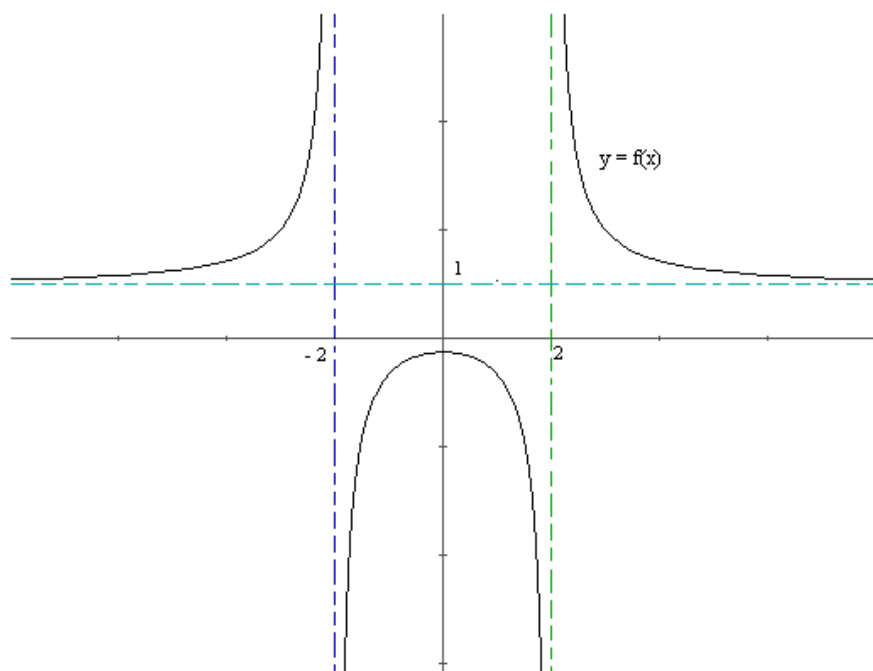
$$f(x) \cap :] -2, 2[$$

* Máximo y/o mínimo :

$$f''(0) = -\frac{40}{64}$$

Luego, $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ es un máximo de $f(x)$

VIRGINIO GOMEZ



Ejercicios Propuestos

Obtenga asíntotas, puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, puntos de máximos y/o mínimos y gráfico de :

1) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

2) $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$

3) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$

4) $f(x) = \frac{x^2+2}{9-x^2}$

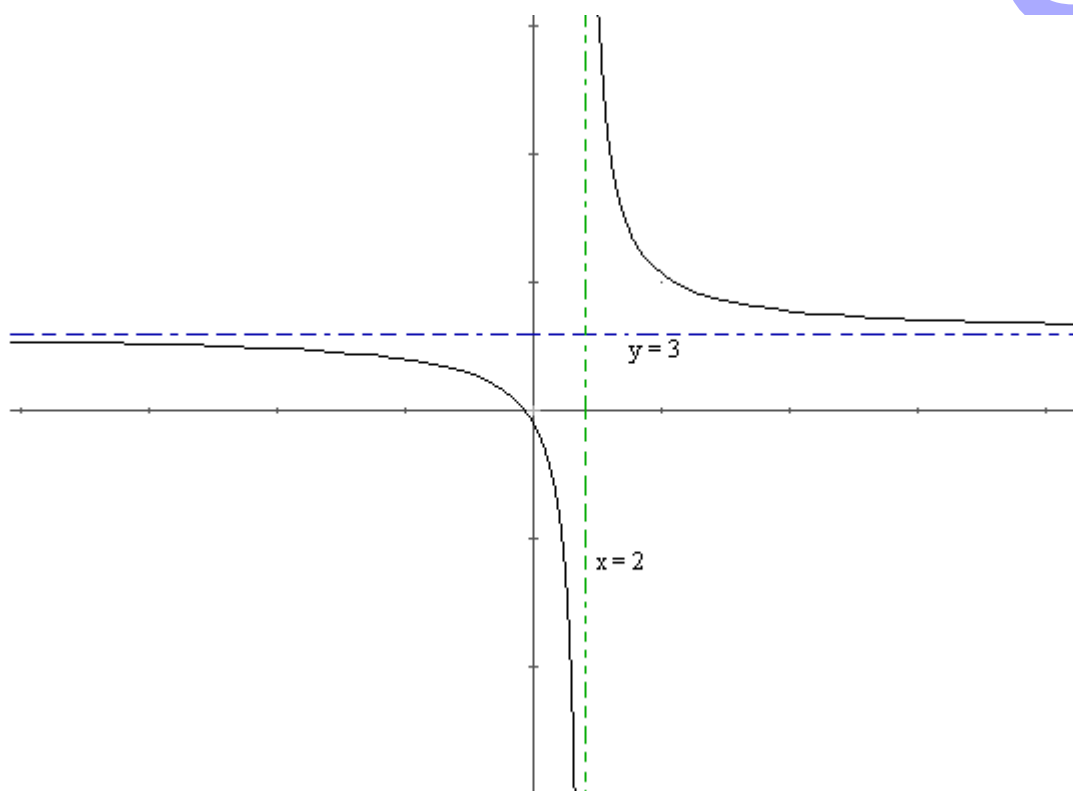
5) $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-4}$

6) $f(x) = \frac{2x^2}{16-x^2}$

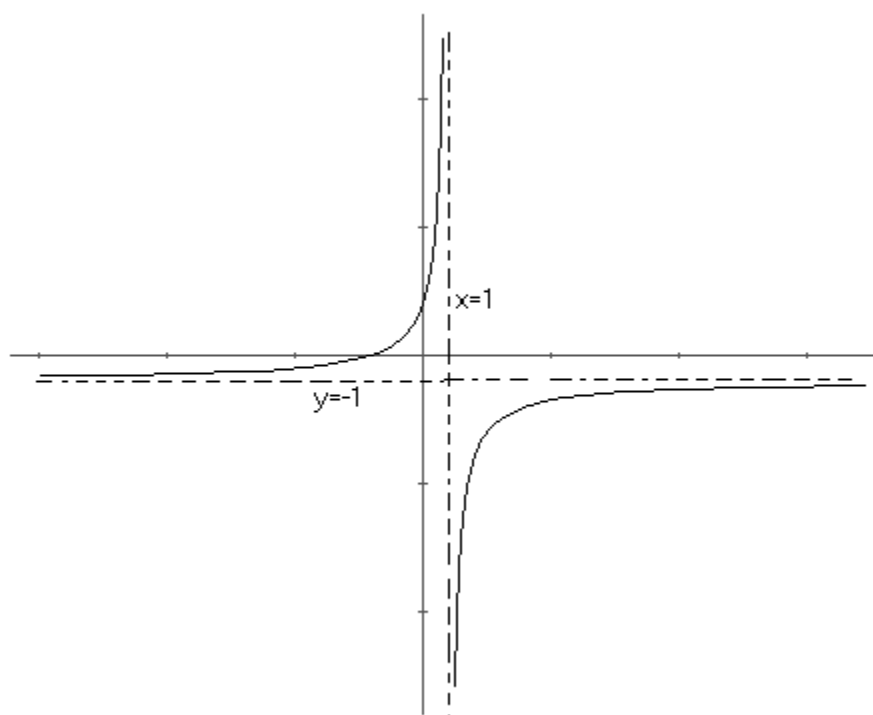
VIRGINIO GOMEZ

Solución:

1)	Asíntota Vertical:	$x = 2$
	Asíntota Horizontal:	$y = 3$
	Puntos Críticos:	No existe Punto Crítico.
	Interv de crecimiento y/o decrecim:	$f(x)$ es decreciente $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$
	Punto de Inflexión:	No existe Punto de Inflexión.
	Intervalo de Concavidad:	$f(x) \cup :] 2, +\infty[$ $f(x) \cap :] -\infty, 2[$
	Punto de máximo y/o mínimo:	No existe Punto Crítico \Rightarrow No existe Punto de máximo ni de mínimo.

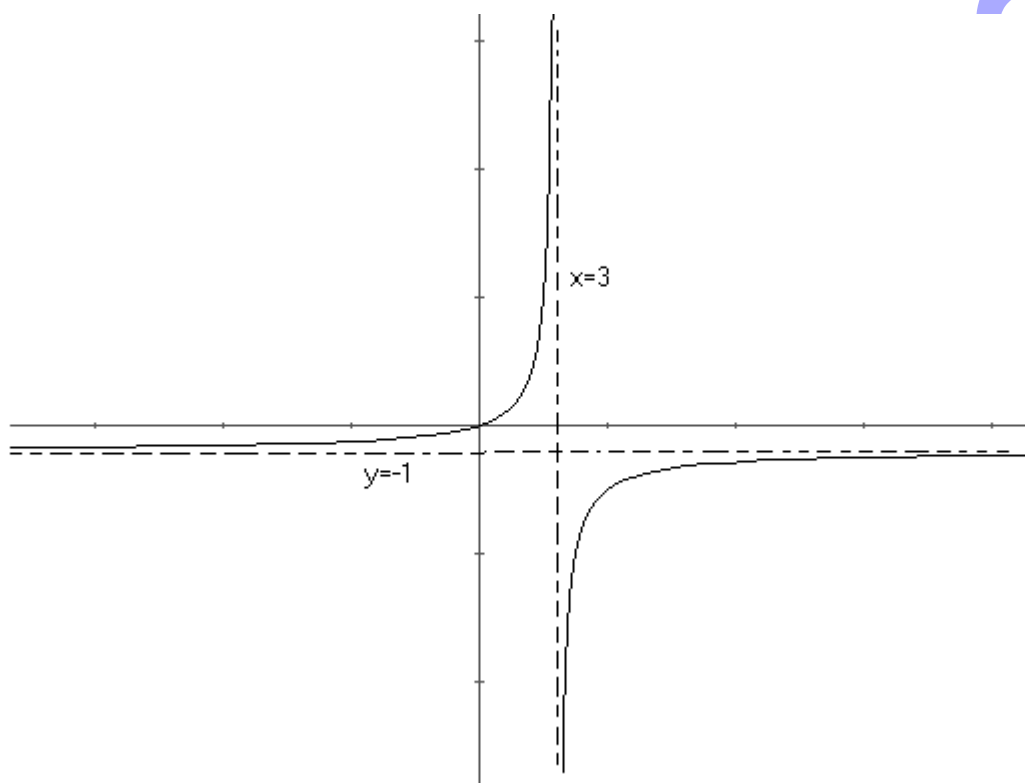


2)	Asíntota Vertical:	$x = 1$
	Asíntota Horizontal:	$y = -1$
	Puntos Críticos:	No existe Punto Crítico.
	Interv de crecimiento y/o decrecim:	$f(x)$ es creciente $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
	Punto de Inflexión:	No existe Punto de Inflexión.
	Intervalo de Concavidad:	$f(x) \cup :] - \infty, 1[$ $f(x) \cap :] 1, + \infty[$
	Punto de máximo y/o mínimo:	No existe Punto Crítico \Rightarrow No existe Punto de máximo ni de mínimo.

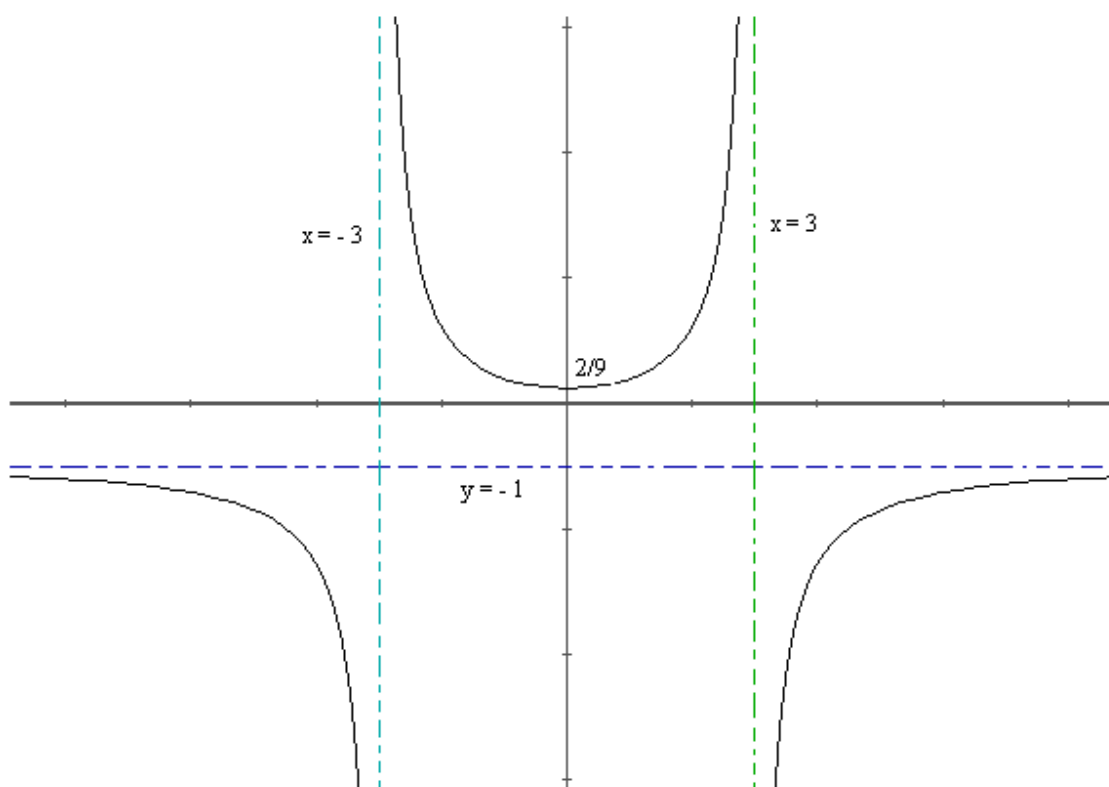


VIRGINIO GOMEZ

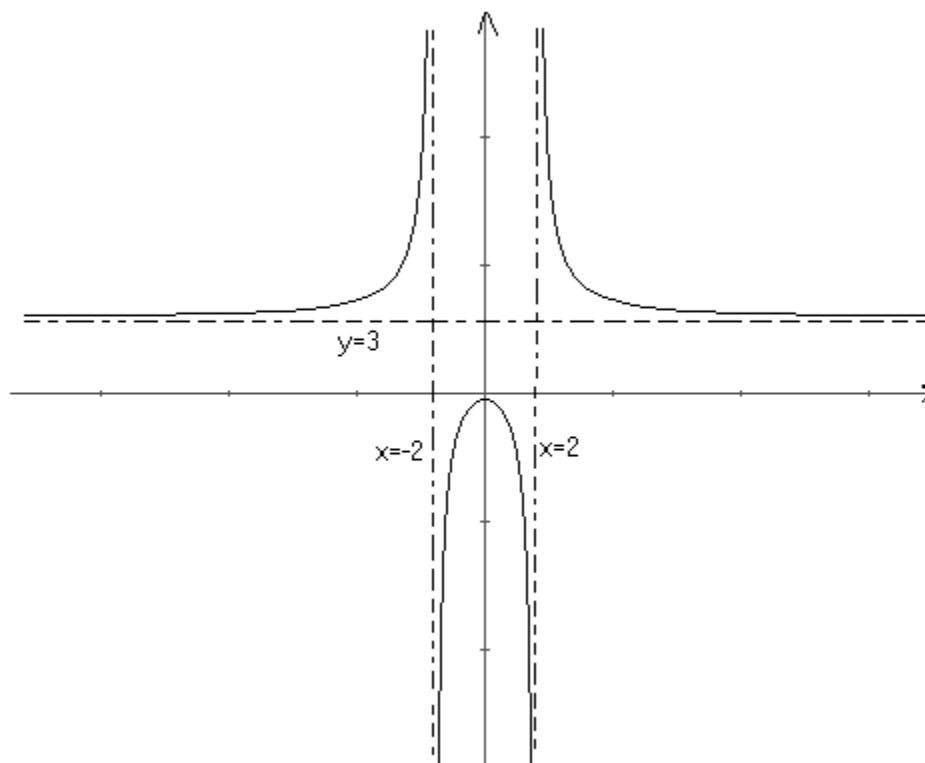
- 3) Asíntota Vertical: $x = 3$
- Asíntota Horizontal: $y = -1$
- Puntos Críticos: No existe Punto Crítico.
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x)$ es creciente $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$
- Punto de Inflexión: No existe Punto de Inflexión.
- Intervalo de Concavidad:
 $f(x) \cup :] - \infty, 3[$
 $f(x) \cap :] 3, + \infty[$
- Punto de máximo y/o mínimo: No existe Punto Crítico \Rightarrow No existe Punto de máximo ni de mínimo.



- 4) Asíntota Vertical: $x = -3$; $x = 3$
- Asíntota Horizontal: $y = -1$
- Puntos Críticos: $\left(0, \frac{2}{9}\right)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :]0, +\infty[$
 $f(x) \downarrow :]-\infty, 0[$
- Punto de Inflexión: No existe Punto de Inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :]-3, 3[$
 $f(x) \cap :]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $\left(0, \frac{2}{9}\right)$ es un mínimo de $f(x)$.

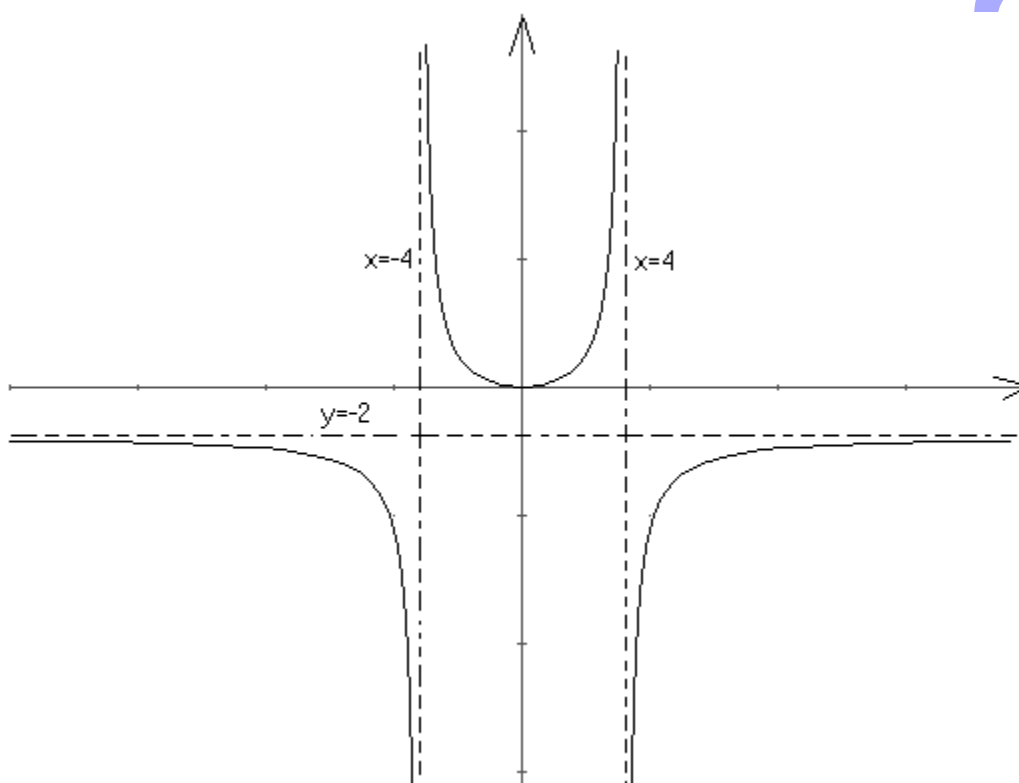


- 5) Asíntota Vertical: $x = -2$; $x = 2$
- Asíntota Horizontal: $y = 3$
- Puntos Críticos: $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :]-\infty, 0[$
 $f(x) \downarrow :]0, +\infty[$
- Punto de Inflexión: No existe Punto de Inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$
 $f(x) \cap :]-2, 2[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ es un máximo de $f(x)$.



VIRGINIO GOMEZ

- 6) Asíntota Vertical: $x = -4$; $x = 4$
- Asíntota Horizontal: $y = -2$
- Puntos Críticos: $(0, 0)$
- Interv de crecimiento y/o decrecim: $f(x) \uparrow :]0, +\infty[$
 $f(x) \downarrow :]-\infty, 0[$
- Punto de Inflexión: No existe Punto de Inflexión.
- Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :]-4, 4[$
 $f(x) \cap :]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$
- Punto de máximo y/o mínimo: $(0, 0)$ es un mínimo de $f(x)$.



VIRGINIO GÓMEZ

B) Problemas de aplicación de máximos y/o mínimos

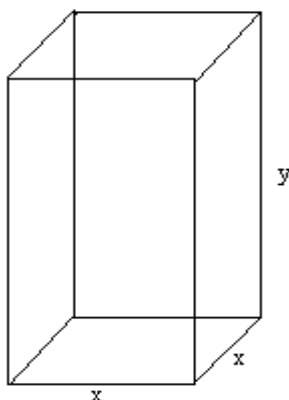
Procedimiento :

- 1) Realizar un dibujo esquemático.
- 2) Asignar variables a cada una de las cantidades mencionadas en el problema.
- 3) Establecer una ecuación que represente lo que se desea maximizar o minimizar.
- 4) Transformar la ecuación anterior en una ecuación que depende de una sola variable usando toda la información del problema.
- 5) Determinar el punto crítico de la ecuación encontrada en (4). Este valor será un máximo si el problema es maximizar o un mínimo si el problema consiste en minimizar.

VIRGINIO GÓMEZ

Ejemplos :

1) Una caja cerrada con una base cuadrada debe tener un volumen de 64 m^3 . El material de la parte de encima y el fondo de la caja cuesta \$1000 por m^2 y el material de los lados \$500 el m^2 . Calcular las dimensiones de la caja cuyo costo de construcción es mínimo.



$$V = x^2 y$$

$$64 = x^2 y$$

$$\frac{64}{x^2} = y$$

$$C = 1000(2x^2) + 500(4xy)$$

$$C = 2000x^2 + 2000xy$$

$$C = 2000x^2 + 2000x\left(\frac{64}{x^2}\right)$$

$$C = 2000x^2 + 128000x^{-1}$$

$$C' = 4000x - \frac{128000}{x^2}$$

$$C' = 0 \quad \Rightarrow \quad 4000x - \frac{128000}{x^2} = 0$$

$$4000x^3 - 128000 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{128000}{4000}}$$

$$x = \sqrt[3]{32}$$

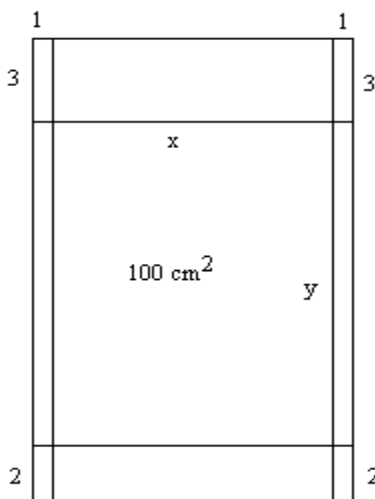
$$x = 2\sqrt[3]{4}$$

$$y = \frac{64}{4\sqrt[3]{16}} \quad \Rightarrow \quad y = 4\sqrt[3]{4}$$

Las dimensiones de la caja son : base $2\sqrt[3]{4} \text{ m}$ y altura $4\sqrt[3]{4} \text{ m}$.

VIRGINIO GOMEZ

2) Un impresor recibe un pedido para producir un cartel rectangular que contiene 100 cm² de impresión rodeado de márgenes de 1 cm. a cada lado, 3 cm. en la parte superior y 2 cm. en la parte inferior. ¿Cuáles son las dimensiones del cartel más económico?



$$(x - 2)(y - 5) = 100$$

$$xy - 5x - 2y + 10 = 100$$

$$xy - 2y = 90 + 5x$$

$$y(x - 2) = 90 + 5x$$

$$y = \frac{90 + 5x}{x - 2}$$

$$A = xy$$

$$A = x \left(\frac{90 + 5x}{x - 2} \right)$$

$$A = \frac{90x + 5x^2}{x - 2}$$

$$A' = \frac{(90 + 10x)(x - 2) - (90x + 5x^2)(1)}{(x - 2)^2}$$

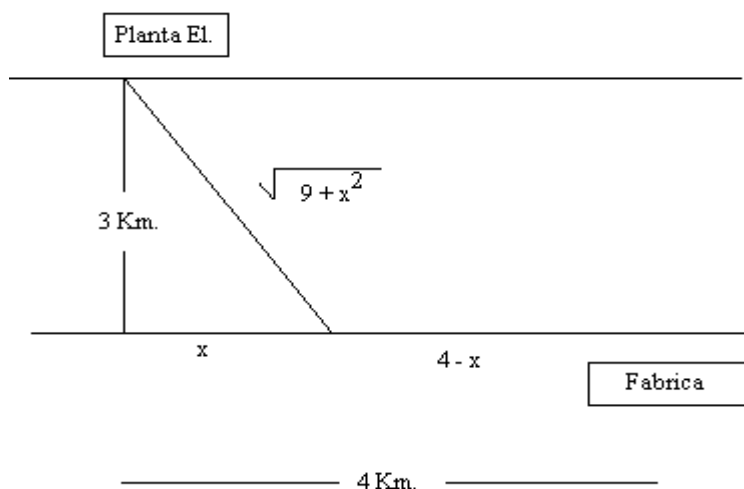
$$A' = \frac{5x^2 - 20x - 180}{(x - 2)^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{5x^2 - 20x - 180}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 20x - 180 = 0 \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{10}$$

$$y = \frac{90 + 5(2 + 2\sqrt{10})}{2 + 2\sqrt{10} - 2} \Rightarrow y = 5 + 5\sqrt{10}$$

Las dimensiones del cartel son : largo $5 + 5\sqrt{10}$ cm. y ancho $2 + 2\sqrt{10}$ cm.

3) En una ribera de un río de 3 km. de ancho hay una planta eléctrica. En la ribera opuesta y 4 km. aguas arriba hay una fábrica. Se desea tender un cable desde la planta eléctrica hasta la fábrica. calcular el trazado más económico, si el metro de cable bajo el agua tiene un costo de \$1200 y el metro de cable aéreo tiene un costo de \$720



$$C = 1200\sqrt{9 + x^2} + 720(4 - x)$$

$$C = 1200\sqrt{9 + x^2} + 2880 - 720x$$

$$C' = \frac{1200x}{\sqrt{9 + x^2}} - 720$$

$$C' = 0 \Rightarrow \frac{1200x}{\sqrt{9 + x^2}} - 720 = 0 \Rightarrow 1200x = 720\sqrt{9 + x^2}$$

$$\Rightarrow 5x = 3\sqrt{9 + x^2}$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 81 + 9x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$x = 2.25$$

$$4 - x = 4 - 2.25 = 1.75$$

$$\sqrt{9 + x^2} = \sqrt{9 + (2.25)^2} = 3.75$$

El trazado más económico es 3.75 m. bajo agua y 1.75 m. aéreo

Ejercicios Propuestos

- 1) Una caja cerrada con una base rectangular en la cual la altura es el triple de uno de los lados basales, debe tener un volumen de 48 m^3 . El material de la parte de encima y el fondo de la caja cuesta \$2.500 por m^2 y el material de los lados \$1.500 el m^2 . Calcular las dimensiones de la caja cuyo costo de construcción es mínimo.
- 2) Con una malla de 48 mt se desea construir un corral aprovechando una pared. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima, si el corral tiene forma rectangular?.
- 3) Con una plancha de 144 cm por 96 cm se construirá una caja. ¿Cómo deben ser los cortes para que el volumen de la caja sea máximo?.
- 4) Un rectángulo tiene un perímetro de 120 mt. ¿Qué largo y ancho da el área máxima?.
- 5) La diferencia entre dos números es 20. ¿Cuáles son aquellos en que su producto es mínimo?.
- 6) Se desea construir un depósito en forma de cilindro con capacidad máxima para 12 litros. Determinar las dimensiones con el fin de emplear la mínima cantidad de material.
- 7) Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de radio 12.
- 8) Una ventana normando tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encontrar sus dimensiones si el perímetro es de 12 pies y su área debe ser la máxima posible.
- 9) Calcular el área máxima del rectángulo que tiene su base inferior sobre el eje X y sus otros dos vértices en la curva $y = 12 - x^2$
- 10) Con un alambre de 36 cm se construye un cuadrado y un círculo. ¿Cómo ha de cortarse el alambre en dos partes para que la suma de sus áreas sea máxima.

Solución:

1) Largo: $16\sqrt[3]{\frac{81}{400}}$; Ancho: $\sqrt[3]{\frac{20}{9}}$; Alto: $3\sqrt[3]{\frac{20}{9}}$

2) Largo: 24 mt ; Ancho: 12 mt

3) Cortes cuadrados de 18,83 cm x 18,83 cm

4) Largo: 30 mt ; Ancho: 30 mt

5) Números: -10 y 10

6) Radio: $r = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$; Altura : $h = \frac{12}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{6}{\pi}\right)^2}}$

7) Es un cuadrado de lado $12\sqrt{2}$

8) Radio semi circunferencia: $r = \frac{12}{\pi + 4}$

Largo rectángulo: $l = \frac{12}{\pi + 4}$

Ancho rectángulo: $a = \frac{12}{\pi + 4}$

9) El área máxima del rectángulo es 32 (u de a).

10) Corte para cuadrado: $\frac{144}{\pi + 4} (cm)$ Corte para círculo: $\frac{36\pi}{\pi + 4} (cm)$

VIRGINIO GOMEZ

C) **Problemas de variaciones relacionadas**

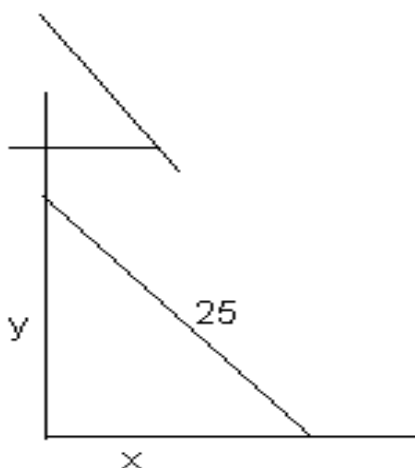
Procedimiento :

- 1) Asignar variables a todas las cantidades dadas y las cantidades a determinar.
- 2) Determinar una ecuación que represente al problema.
- 3) Derivar implícitamente con respecto al tiempo.
- 4) Sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio.

VIRGINIO GÓMEZ

Ejemplos :

1) Una escalera de 25 pies de largo está apoyada en una casa. Si la base de la escalera se separa de la pared a razón de 2 pies/seg. ¿A qué velocidad está bajando su extremo superior cuando la base está a 7 pies de la pared?.



$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{\text{pies}}{\text{seg.}} \quad \frac{dy}{dt} = ? \quad x = 7 \quad \Rightarrow y = \sqrt{625 - 49} = 24$$

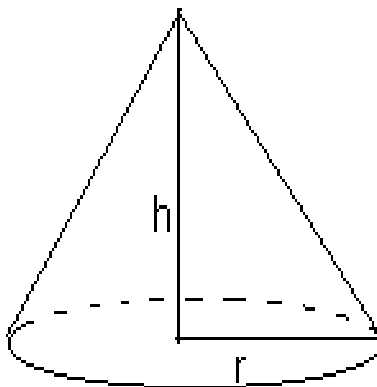
$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{derivando implícitamente con respecto al tiempo}$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{7(2)}{24} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{7}{12}$$

El extremo superior decrece a razón de 7 pies/seg.

VIRGINIO GOMEZ

2) Se arroja arena en un montón cónico a razón de $100 \text{ pies}^3/\text{min}$. Hallar la razón de cambio de la altura del montón cuando su altura es 10 pies. (Suponga que el radio del cono es igual a su altura).



$$\frac{dV}{dt} = 100 \frac{\text{pies}^3}{\text{min.}} \quad h = 10 \text{ pies} \quad h = r \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{como } h = r, \text{ se tiene :}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3 \quad \text{derivando implícitamente con respecto al tiempo}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

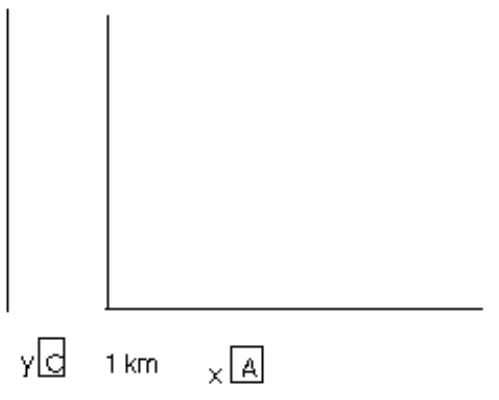
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi h^2} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{100}{100\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}$$

La altura del montón cónico crece a razón de $\frac{1}{\pi} \text{ pies/min.}$

VIRGINIO GOMEZ

3) Un automóvil que se desplaza a razón de 120 km/hr., se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 1 km. de la intersección, un camión que viaja a 150 km/hr. cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 1 minuto después que el camión pasa el cruce?

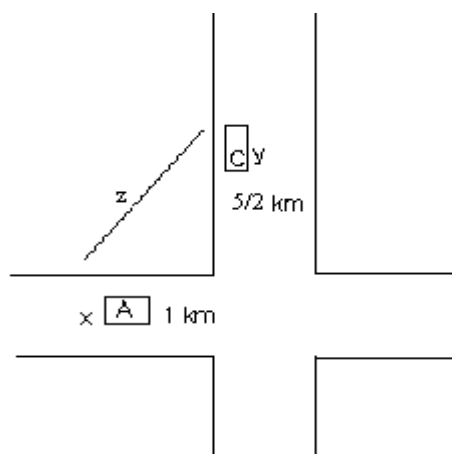


$$\frac{dx}{dt} = 120 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 150 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

$$\begin{array}{lcl} 120 \text{ km} & \longrightarrow & 60 \text{ minutos} \\ x \text{ km} & \longrightarrow & 1 \text{ minuto} \end{array} \Rightarrow x = 2 \text{ km}$$

$$\begin{array}{lcl} 150 \text{ km} & \longrightarrow & 60 \text{ minutos} \\ y \text{ km} & \longrightarrow & 1 \text{ minuto} \end{array} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \text{ km}$$

un minuto después :



$x^2 + y^2 = z^2$ derivando implícitamente con respecto al tiempo

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{z}$$

Como $x = 1$, $y = \frac{5}{2}$, entonces $z = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$$\text{Luego } d' = \frac{1(120) + \frac{5}{2}(150)}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{990}{29} \sqrt{29}$$

El auto y el camión se separan a una velocidad de $\frac{990}{29} \sqrt{29}$ km/hr después que el camión pasa por el cruce.

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios Propuestos

- 1) La razón de cambio del radio de un círculo es de 5 mt/mín. ¿Cuál es la velocidad de cambio del perímetro?
- 2) El largo de una parcela rectangular aumenta a razón de 7 mt/mín. ¿Cuál es la velocidad de cambio del perímetro de la parcela si su ancho permanece constante?
- 3) Se infla un globo a razón de $1.800 \text{ cm}^3/\text{sg}$. Determinar la velocidad de aumento de radio del globo cuando este mide 15 cm?
- 4) Se deposita agua en un tambor cilíndrico a razón de $400 \text{ cm}^3/\text{sg}$. Si el radio del tambor es 10 cm, determinar la razón de cambio de la altura del tambor.
- 5) Se deja caer una piedra en un lago en calma, lo que provoca ondas y círculos. El radio r del círculo exterior está creciendo a un ritmo constante de 1 pie/sg. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué ritmo está cambiando el área A de la región circular?
- 6) Un avión vuela a una altura de 6 millas por una trayectoria que le llevará a la vertical de una estación de radar. Si la distancia del avión al radar decrece a una razón de 400 millas/hr cuando dicha distancia es 10 millas, ¿Cuál es la velocidad del avión?
- 7) El radio de una esfera está creciendo a razón de 2 pulg/mín. calcular la razón de cambio del área de la esfera cuando el radio es 6 pulg.
- 8) Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara dista 2.000 pies del punto de lanzamiento. Calcular la variación de cambio del ángulo de elevación de la cámara 10 segundos después del despegue.
- 9) Un cono circular recto, tiene una altura de 12 cm y un diámetro de base de 8 cm. Si se invierte el cono y se vacía agua por la base del mismo, haciendo que el radio en el nivel del agua varíe con una velocidad de $\frac{1}{3} \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)$. ¿Con qué velocidad cambiará el volumen de agua cuando el radio es 2 cm?
- 10) Un globo asciende verticalmente sobre un punto A del suelo a razón de 15 pies/sg. Un punto B del suelo dista 30 pies de A . Cuando el globo está a 40 pies de A , ¿a qué razón está cambiando la distancia desde el globo al punto B ?

Solución:

- 1) El perímetro del círculo crece a razón de 10π mt/mín.
- 2) La velocidad de cambio del perímetro de la parcela es de 14 mt/mín.
- 3) El radio del círculo crece a razón de $\frac{2}{\pi}$ cm/sg.
- 4) La altura del tambor aumenta a razón de $\frac{4}{\pi}$ cm/sg.
- 5) El área del círculo crece a una razón de 8π pies²/sg.
- 6) La velocidad del avión es 500 millas/hr.
- 7) El área de la esfera aumenta a una razón de 96π pulg²/mín.
- 8) El ángulo de elevación de la cámara crece a una razón de $\frac{2}{29}$ rad/sg.
- 9) El volumen de agua aumenta a razón de 4π cm³/min.
- 10) La distancia desde el globo al punto B aumenta a razón de 12 pies/sg.

VIRGINIO GOMEZ

Formas Indeterminadas

1) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ adquiere

la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

2) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ adquiere

la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Regla de L'Hopital

1) Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$

2) Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$

La Regla de L'Hopital también es válida si $x \mapsto -\infty$ \vee $x \mapsto +\infty$, es decir

a) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ y si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

b) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ y si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejemplos:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{1}$$

$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)}{1} = 4$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(3+x)^{-1/2}}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \sqrt{27x}}{x - \sqrt{3x}} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - \frac{1}{2}(27x)^{-1/2}(27)}{1 - \frac{1}{2}(3x)^{-1/2}(3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - \frac{27}{2\sqrt{27x}}}{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x}}}$$

$$= \frac{6 - \frac{27}{18}}{1 - \frac{3}{6}}$$

$$= \frac{81}{9}$$

$$= 9$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{1/2}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} 3x$$

$$= 3a$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 3a$$

VIRGINIO GOMEZ

Otras formas indeterminadas:

a) $0 \cdot \infty, \infty - \infty$

En estos casos se transforma la expresión a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y luego se aplica la regla de L'Hopital.

Ejemplos:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \infty \cdot 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1}$$

$$= \pi$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$L'H \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x}$$

$$= 0$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = 0$

b) 0^0 ; ∞^0 ; 0^∞ ; 1^∞

Para estos casos primero se debe hacer uso de la función logaritmo natural y recordar la propiedad $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Ejemplo

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

Sea $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Por otro lado, si $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, entonces aplicando la función logaritmo natural se tiene :

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad / \ln$$

$$\ln y = \ln (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$$

$$\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Ahora, se puede aplicar la función límite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \ln y = \frac{0}{0}$$

$$\ln y = L'H \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}$$

$$\ln y = 1$$

Pero, si $\ln y = 1$, entonces $y = e$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Ejercicios Propuestos

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 5^x}{x}$

2) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{9 - (y + 3)^2}{y}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x + 5}}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8x} - x^2}{\sqrt{2x} - x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5\sqrt{5} - x\sqrt{x}}{\sqrt{5} - \sqrt{x}}$

6) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{cosec} x + \cotg x)$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right)$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)^{\frac{1}{(x - 2)}}$

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3n}{4}}$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right)^{\frac{3n}{2}}$

VIRGINIO GOMEZ

Solución:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 5^x}{x} = \ln\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$2) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{9 - (y+3)^2}{y} = -6$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8x-x^2}}{\sqrt{2x-x}} = 6$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5\sqrt{5} - x\sqrt{x}}{\sqrt{5} - \sqrt{x}} = 15$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{cosec} x + \cotg x) = 0$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{(x-2)}} = e$$

$$9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3n}{4}} = \sqrt[4]{e^3}$$

$$10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{\frac{3n}{2}} = e\sqrt{e}$$

VIRGINIO GÓMEZ

Autoevaluación

VIRGINIO GÓMEZ

Unidad N°1: Números Reales

1) $3x - 14 < 7x - 2$

2) $3x - 4 + \frac{x}{4} \leq \frac{5x}{2} + 2$

3) $6(x + 1)^2 - (2x - 4)(3x + 2) < 3(5x + 21)$

4) $(2x - 3)^2 + 4x^2(x - 7) \leq 4(x - 2)^3$

5) $\frac{x + 1}{x - 2} < \frac{x + 5}{x - 3}$

6) $\frac{x + 5}{x - 1} - \frac{x - 3}{x + 1} \leq \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$

7) $\frac{(2x - 3)(3x + 5)}{(1 - 4x)} \geq 0$

8) $\left| \frac{5x + 1}{3} \right| > 7$

9) $\left| \frac{3x - 4}{5 - 9x} \right| \leq 2$

10) $|2x + 5| > |7 - 10x|$

VIRGINIO GOMEZ

Unidad N°2: Geometría Analítica

- 1) Los vértices de un cuadrilátero son $A(-4, 3)$, $B(1, -1)$, $C(-2, -3)$ y $D(4, 2)$. Calcular su perímetro.
- 2) Determine el valor de x en $A(1, x)$ de modo que $d(A, B) = 5$, con $B(-3, 1)$
- 3) Determine la ecuación de la recta en su forma general, principal y de segmento que pasa por los puntos $A(-5, 4)$ y $B(2, -3)$
- 4) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1, 3)$ y es:
 - a) paralela con la recta $L: x + 4y + 7 = 0$
 - b) perpendicular con la recta $5x - 2y + 1 = 0$
- 5) Determine el valor de k en $(k - 1)x - 2ky + 1 = 0$ para que la recta:
 - a) pase por el punto $(1, -1)$
 - b) sea paralela a la recta $L: 4x - y + 2 = 0$
 - c) sea perpendicular a la recta $L: 2x + 3y - 5 = 0$
- 6) Los vértices de un triángulo son $A(2, 1)$; $B(-3, 3)$; $C(-1, -4)$

Determinar:
 - a) Ecuación de sus lados en forma principal y general
 - b) Perímetro del triángulo ABC
 - c) Ecuación de las transversales de gravedad
 - d) Ecuación de las alturas
 - e) Ecuación de las medianas
 - f) Área de triángulo ABC
- 7) Identifique la cónica, determine sus puntos representativos y gráfica de:
 - a) $25x^2 + 4y^2 - 150x + 8y + 129 = 0$
 - b) $y^2 + 8x - 6y + 49 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 26 = 0$
 - d) $25y^2 - 16x^2 = 400$

Unidad N°3: Límites y Continuidad

1) Determine si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6\sqrt{6} - x\sqrt{x}}{\sqrt{6} - \sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x+3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{x - 7}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 4x^2}{2x^2 + 3}$

g) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ si: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 7 \\ 22-2x, & 7 \leq x \leq 10 \\ 3x+1, & x > 10 \end{cases}$

2) Determine las asíntotas de:

a) $f(x) = \frac{x+5}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 2x - 3}$

VIRGINIO GÓMEZ

3) Analice la continuidad en:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{1 - x}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 5 - 3x, & x \leq 2 \\ 4x - 9, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ 16 - 3x, & 3 < x \leq 8 \\ 5 - 4x, & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

4) Determine el valor de k , a y b , según corresponda para que la función sea continua en todo su dominio:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} k + 1, & x = 3 \\ \frac{x - 5}{9 - x}, & x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x - 3k, & x < 5 \\ x^2 + 4k, & x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} ax + 3, & x < -4 \\ bx - 2a, & -4 \leq x \leq 1 \\ 5x - 7b, & x > 1 \end{cases}$$

VIRGINIO GOMEZ

Unidad N°4: Derivadas

1) Obtener la primera derivada de:

a) $f(x) = x^{-4} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 5x$

b) $f(t) = \frac{(t^2 + 3t)(7t - 2t^5)}{t^3 + 2}$

c) $y = \sqrt[5]{\frac{x^2 + 2x}{x + 1}}$

d) $f(t) = (t^5 - 5t^4 + t^2 - 1)^6$

e) $x^2y + 3x^4 = x^3 + 2y^6$

f) $(xy^3 + 3x^2)^4 + y = x^3 - 2y^4$

g) $y = 3^x \cdot \ln(x^3 + \sqrt{x^2 + 2})$

h) $f(t) = e^{(t^2 + t)} \cdot \log_4(t^3 - t)$

i) $2^{xy} - x = \ln y \cdot e^{4x}$

j) $(x + y)^x = y^x$

k) $f(t) = \sec^2(t^3 + 1) \cdot \operatorname{tg}(2 - t^2)$

l) $y = \operatorname{sen}^5(\ln^3(3x^4 + 4x^2))$

m) $(\cos x)^{\operatorname{sen} y} = (\operatorname{tg} y)^{\sec x}$

n) $y = (\operatorname{Arc} \operatorname{tg} t^3)^5 - \operatorname{Arc} \operatorname{sen}(t^2 - e^t)$

o) $x^{\operatorname{Arc} \operatorname{sen} y} = y^{\operatorname{Arc} \operatorname{cosec} x}$

VIRGINIO GOMEZ

- 2) Obtenga asíntotas (si corresponde), puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, puntos de máximos y/o mínimos y gráfico de:
- a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$
- b) $f(x) = \frac{5 - x^2}{x^2 - 9}$
- 3) Desarrolle los siguientes problemas:
- a) Dos postes, de 12 y 28 pies de altura, distan 30 pies. Hay que conectarlos mediante un cable que esté atado en algún punto del suelo entre ellos. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor cantidad de cable que sea posible?
- b) Un granjero dispone de 200 metros de valla para cerrar dos corrales adyacentes. ¿Qué dimensiones harán que el área encerrada sea máxima?
- c) Un controlador observa dos aviones que vuelan en trayectorias perpendiculares y a la misma altura. Uno de ellos dista 150 millas y se mueve a 450 millas/hr. El otro está a 200 millas y se desplaza a 600 millas/hr. ¿A qué ritmo decrece la distancia entre ellos?
- 4) Determine los siguientes límites aplicando *L'Hopital*:
- a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)^2 - 9}{5-x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{3 - \sqrt{2-x}}{x+7}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{27x} - x^2}{\sqrt{3x} - x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{\frac{2x}{5}}$

Solución:

Unidad N°1:

1) $Sol =] - 3, + \infty[$

2) $Sol =] - \infty, 8]$

3) $Sol =] - 7, + \infty[$

4) $Sol = \left[\frac{41}{60}, + \infty[\right.$

5) $Sol = \left] \frac{7}{5}, 2 \right[\cup \left] 3, + \infty[\right.$

6) $Sol = \left] - \infty, - \frac{3}{8} \right]$

7) $Sol = \left] - \infty, - \frac{5}{3} \right] \cup \left] \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right]$

8) $Sol = \left] - \infty, - \frac{22}{5} \right[\cup \left] 4, + \infty[\right.$

9) $Sol = \left] - \infty, \frac{2}{5} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, + \infty[\right.$

10) $Sol = \left] \frac{1}{6}, \frac{7}{10} \right[\cup \left] \frac{7}{10}, \frac{3}{2} \right[$

VIRGINIO GOMEZ

Unidad N°2:

1) Perímetro = $\sqrt{41} + \sqrt{13} + \sqrt{61} + \sqrt{65}$

2) $x = 3$; $x = -3$

3) $x + y + 1 = 0$; $y = -x - 1$; $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$

4) a) $x + 4y - 13 = 0$

b) $2x + 5y - 17 = 0$

5) a) $k = -\frac{4}{3}$; b) $k = -\frac{1}{7}$; c) $k = -\frac{1}{2}$

6) a) Lado a: $y = -\frac{7}{2}x - \frac{15}{2}$; $7x + 2y + 15 = 0$

Lado b: $y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$; $5x - 3y - 7 = 0$

Lado c: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$; $2x + 5y - 9 = 0$

b) Perímetro = $\sqrt{29} + \sqrt{53} + \sqrt{34}$

c) $t_a : 3x - 8y + 2 = 0$; $t_b : 9x + 7y + 6 = 0$; $t_c : 12x - y + 8 = 0$

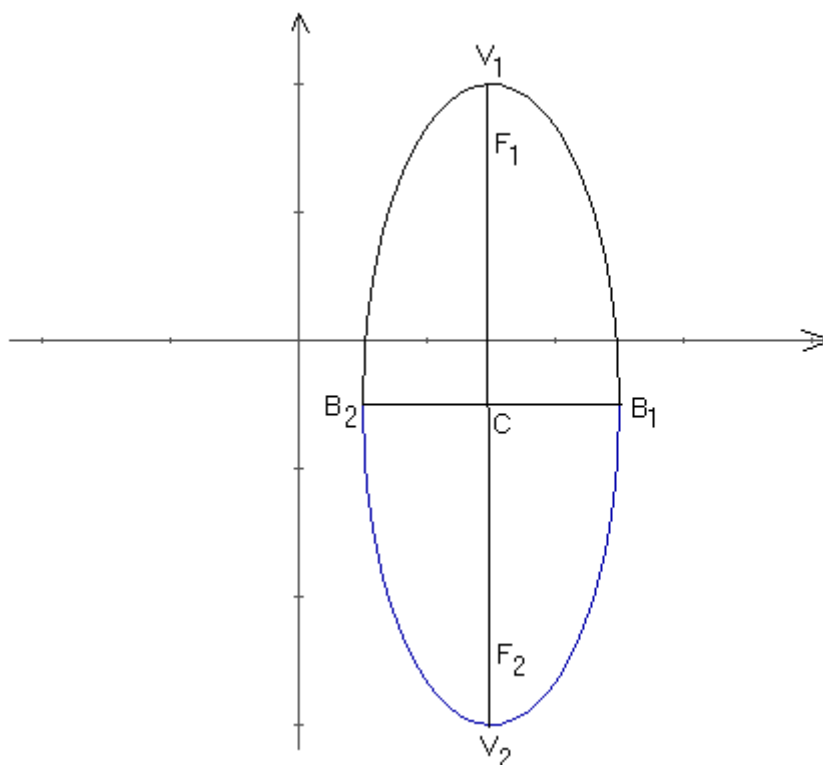
d) $h_a : 2x - 7y + 3 = 0$; $h_b : 3x + 5y - 6 = 0$; $h_c : 5x - 2y - 3 = 0$

e) $m_a : 14x + 4y - 1 = 0$; $m_b : 10x - 6y + 17 = 0$; $m_c : 4x + 10y + 13 = 0$

f) Area = $\frac{31}{2}$ (u de a)

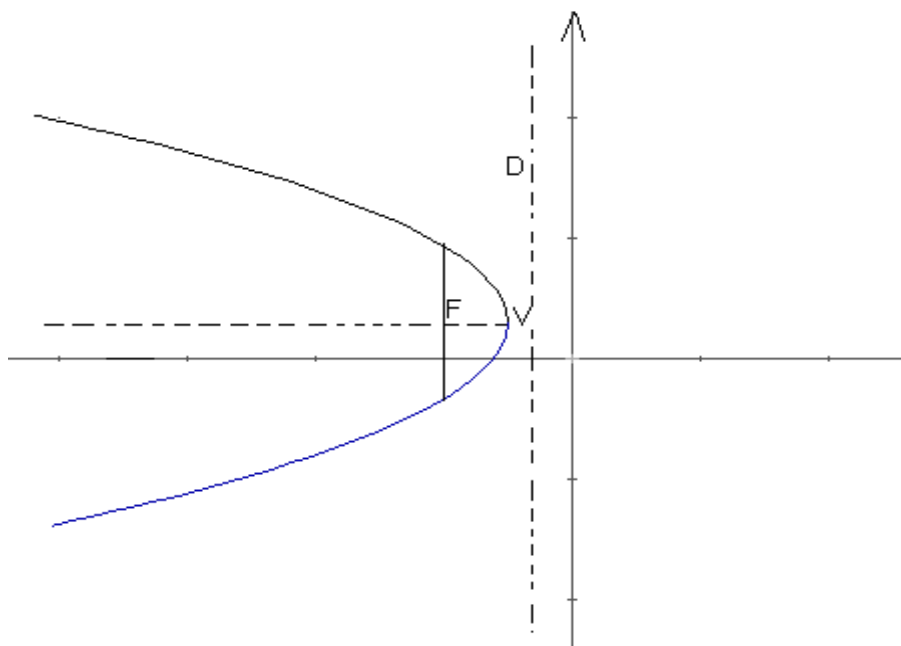
VIRGINIO GOMEZ

- 7) a) Cónica: Elipse
- Centro : $C(3, -1)$
- Vértices eje mayor: $V_1(3, 4)$; $V_2(3, -6)$
- Vértices eje menor: $B_1(5, -1)$; $B_2(1, -1)$
- Focos: $F_1(3, -1 + \sqrt{21})$; $F_2(3, -1 - \sqrt{21})$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$



VIRGINIO GOMEZ

b) Cónica :	Parábola
Vértice :	$V(-5, 3)$
Foco :	$F(-7, 3)$
Directriz :	$D : x = -3$
Eje de simetría :	$y = 3$
Long. lado. recto :	8

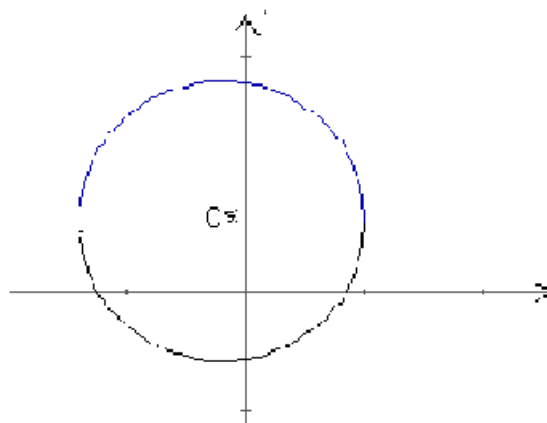


VIRGINIO GOMEZ

c) Cónica: Circunferencia

Centro: $C(-1, 9)$

Radio: $r = 1$



d) Cónica: Hipérbola

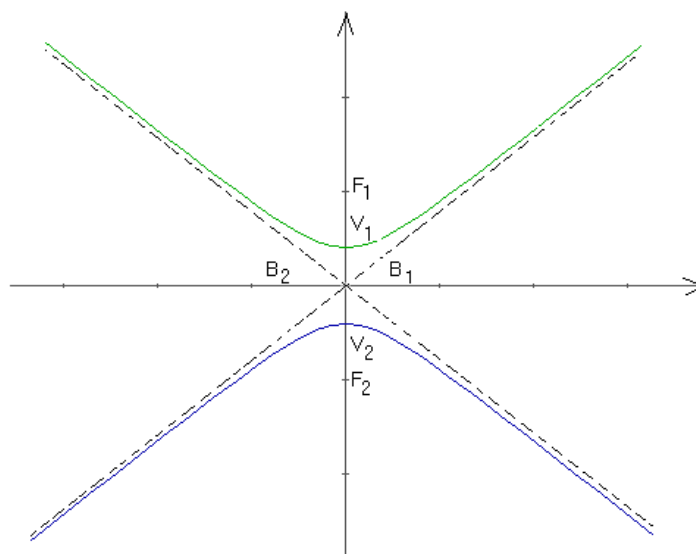
Vértices eje real: $V_1(0, 4)$; $V_2(0, -4)$

Vértices eje imaginario: $B_1(5, 0)$; $B_2(-5, 0)$

Focos: $F_1(0, \sqrt{41})$; $F_2(0, -\sqrt{41})$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$

Asíntotas: $y = \frac{4}{5}x$; $y = -\frac{4}{5}x$



VIRGINIO GOMEZ

Unidad N°3:

1) a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6\sqrt{6} - x\sqrt{x}}{\sqrt{6} - \sqrt{x}} = 18$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+1}{x+3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+1}{x+3} = -\infty$

Luego a la izquierda de -3 , $f(x)$ crece y a la derecha de -3 , $f(x)$ decrece.
Por lo tanto, no existe $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x+3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{x - 7} = 9$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 4x^2}{2x^2 + 3} = -2$

g) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 8$; $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 8$

$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 8$

$\therefore \exists \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 8$

$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 31$

$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x)$

$\therefore \text{No } \exists \lim_{x \rightarrow 10} f(x)$

VIRGINIO GOMEZ

- 2) a) Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = -1$
Asíntota oblicua: No existe.
- b) Asíntota vertical: $x = -2$
Asíntota horizontal: No existe.
Asíntota oblicua: $y = x - 3$
- c) Asíntota vertical: $x = -1$, $x = 3$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota oblicua: No existe.
- 3) a) i) $f(1) = 3$
ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$
iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$
Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$
- b) i) $f(2) = -1$
ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$
 \therefore Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$
iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$
Luego $f(x)$ es continua en $x = 2$

VIRGINIO GOMEZ

c) Para $x = 3$

$$i) \quad f(3) = 7$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 7$$

$$\therefore \text{Existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 3$

Para $x = 8$

$$i) \quad f(8) = -8$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = -27$$

$$\therefore \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 8} f(x)$$

Luego $f(x)$ es discontinua en $x = 8$

Por lo tanto, $f(x)$ es discontinua en el intervalo $[0, 10]$

4) a) $k = -\frac{1}{3}$

b) $k = -\frac{15}{7}$

c) $a = \frac{11}{2}$, $b = 2$

VIRGINIO GOMEZ

Unidad N°4:

1) a) $\frac{dy}{dx} = -4x^{-5} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 5$

b) $\frac{dy}{dt} = \frac{((2t+3)(7t-2t^5) + (t^2+3t)(7-10t^4))(t^3+2) - (t^2+3t)(7t-2t^5)(3t^2)}{(t^3+2)^2}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x^2+2x}\right)^4} \left(\frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x)(1)}{(x+1)^2}\right)$

d) $\frac{dy}{dt} = 6(t^5 - 5t^4 + t^2 - 1)^5(5t^4 - 20t^3 + 2t)$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 12x^3 - 2xy}{x^2 - 12y^5}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 24x(y^3 + 3x^2)^3}{12y^2(y^3 + 3x^2)^3 + 1 + 8y^3}$

g) $\frac{dy}{dx} = (3^x)(\ln 3)\left(\ln(x^3 + \sqrt{x^2+2})\right) + \left(\frac{3^x}{x^3 + \sqrt{x^2+2}}\right)\left(3x^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

h) $\frac{dy}{dt} = \left(e^{t^2+t}\right)(2t+1)(\log_4(t^3-t)) + \left(\frac{(e^{t^2+t})(\log_4 e)(3t^2-1)}{t^3-t}\right)$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{(4)(e^{4x})(\ln y) - (2^{xy})(\ln 2)(y) + 1}{(x)(2^{xy})(\ln 2) - \frac{e^{4x}}{y}}$

j) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln y - \ln(x+y) - \frac{x}{x+y}}{\frac{x}{x+y} - \frac{x}{y}}$

k) $\frac{dy}{dt} = 2 \sec^2(t^3+1) \operatorname{tg}(t^3+1) \operatorname{tg}(2-t^2) + \sec^2(t^3+1) \sec^2(2-t^2)(-2t)$

$$l) \frac{dy}{dx} = 5(\sin^4(\ln^3(3x^4 + 4x^2))) (\cos(\ln^3(3x^4 + 4x^2))) (3 \ln^2(3x^4 + 4x^2)) \left(\frac{12x^3 + 8x}{3x^4 + 4x^2} \right)$$

$$m) \frac{dy}{dx} = \frac{(\sec x)(\tan x) \ln(\tan y) + (\sin y)(\tan x)}{(\cos y) \ln(\cos x) - \frac{(\sec x)(\sec^2 y)}{\tan y}}$$

$$n) \frac{dy}{dt} = 5 (\operatorname{Arc} \tan t^3)^4 \left(\frac{3t^2}{1+t^6} \right) - \frac{2t - e^t}{\sqrt{1 - (t^2 - e^t)^2}}$$

$$o) \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\ln y}{x \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\operatorname{Arc} \sin y}{x}}{\frac{\ln x}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{\operatorname{Arc} \operatorname{cosec} x}{y}}$$

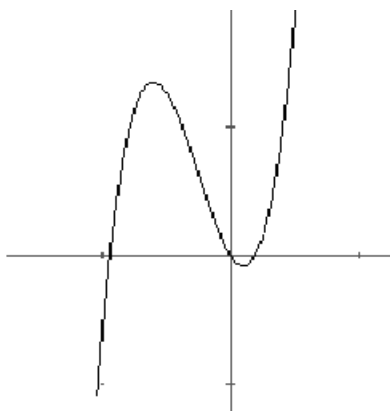
2) a) Puntos Críticos: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{19}{48} \right); \left(-3, \frac{27}{4} \right)$

Interv de crec y/o decrec: $f(x) \uparrow :] - \infty, -3[\cup] \frac{1}{2}, + \infty[$
 $f(x) \downarrow :] -3, \frac{1}{2}[$

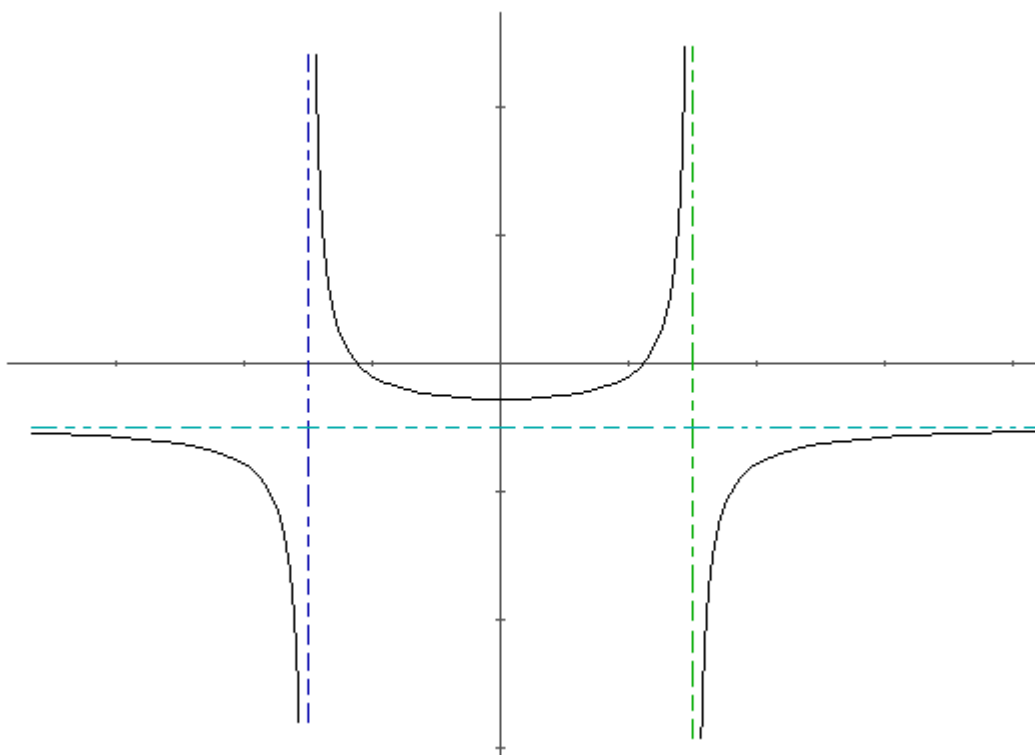
Punto de Inflexión: $\left(-\frac{5}{4}, \frac{305}{96} \right)$

Intervalo de Concavidad: $f(x) \cup :] -\frac{5}{4}, + \infty[$
 $f(x) \cap :] - \infty, -\frac{5}{4}[$

Punto de máx y/o mín: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{19}{48} \right)$ es un mínimo de $f(x)$
 $\left(-3, \frac{27}{4} \right)$ es un máximo de $f(x)$



b) Asíntota Vertical:	$x = -3$; $x = 3$
Asíntota Horizontal:	$y = -1$
Puntos Críticos:	$\left(0, -\frac{5}{9}\right)$
Interv de crecimiento y/o decrecim:	$f(x) \uparrow :]0, +\infty[$ $f(x) \downarrow :]-\infty, 0[$
Punto de Inflexión:	No existe Punto de Inflexión.
Intervalo de Concavidad:	$f(x) \cup :]-3, 3[$ $f(x) \cap :]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$
Punto de máximo y/o mínimo:	$\left(0, -\frac{5}{9}\right)$ es un mínimo de $f(x)$.



VIRGINIO GOMEZ

- 3) a) Debe amarrarse a 9 pies del poste mas bajo.
b) Cada corral debe medir $\frac{100}{3}$ metros de largo por 25 pies de ancho.
c) La distancia entre los aviones disminuye a una velocidad de 750 millas/hr.

- 4) a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)^2 - 9}{5-x} = -6$
b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{3 - \sqrt{2-x}}{x+7} = \frac{1}{6}$
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{27x} - x^2}{\sqrt{3x} - x} = 9$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \cot g x) = 0$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{\frac{2x}{5}} = \sqrt[3]{e^2}$

VIRGINIO GOMEZ