



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY

Analýza diferenčnej rovnice

Autori:

Matejko Peter

Mudrák Ľuboš

Rehák Tomáš

Zárecký Martin

Boďa Michal

Kapusta Peter

28. novembra 2013

Obsah

1	Úvod	2
2	Definície	2
2.1	Pojem diferencia	2
2.2	Pojem diferenčná rovnica	2
2.2.1	Rekurentná formula	3
3	Vypracovanie	4
3.1	Triviálne riešenie	4
3.2	Všeobecné riešenie	4
3.3	Závislosť od hodnôt a, b	4
4	Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika	8
4.1	Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$	8
4.2	Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$	8
4.3	Geometrické rozdelenie $Ge(p)$	9
4.4	Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$	9
5	Záver	10

1 Úvod

Táto práca analyzuje riešenia diferenčnej rovnice

$$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n \quad (1)$$

v závislosti od hodnôt a a b , kde a a b sú reálne čísla, také, že $a + b > 0$.

2 Definície

2.1 Pojem diferenca

Definícia 2.1. Je daný bod x_0 a číslo $h > 0$. Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná v bodoch x_0 a $x_0 + h$. *Diferencia funkcie $f(x)$ v bode x_0* je číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

2.2 Pojem diferenčná rovnica

Definícia 2.2. (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky $x \in M$ je definovaná funkcia $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$. Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0,$$

v ktorej neznámou funkciou $y = \varphi(x)$, nazývame diferenčnú rovnicu k -tého rádu a 1. typu definovanú v M .

Partikulárnym riešením tejto rovnice v M nazveme každú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu.

Všeobecným riešením nazývame množinu všetkých partikulárných riešení.

Definícia 2.3. (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky $x \in M$ definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x+j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia $y_x = \varphi(x)$, nazývaná *diferenčná rovnica 2. typu* definovaná v M . Ak je závislosť g na y_x a y_{x+k} nekonštantná hovoríme, že rovnica je k -tého rádu. Riešenie rovnice v M nazývame každú funkciu $y_x = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie $\varphi(x)$ obsahoval všetky $x \in M$ a taktiež body $x+1, x+2, \dots, x+k$.

2.2.1 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením $(n+k)$ -tého člena pomocou k predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla $n = 1, 2, 3, \dots$ a ďalej zavedme všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti: $y_n = a_n$, takže rovnicu vieme prepísať do tvaru

$$g(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0.$$

Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k a_{n+k} :

$$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}),$$

kde G je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Týmto sme dostali všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť a_n , v ktorom je $(n+k)$ -ty člen vyjadrený pomocou k predchádzajúcich členov $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$ a premennej n .

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla a_1, a_2, \dots, a_k . Vieme, že po dosadení členov do funkcie G vypočítame jednoznačne člen

$$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \dots, a_k),$$

ďalším dosadením vypočítame

$$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}) \text{ atd'}.$$

Všeobecný n -tý člen a_n dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie n a daných k prvých čísiel a_1, a_2, \dots, a_k . Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami a_1, a_2, \dots, a_k .

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice k -teho rádu $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$ má obsahovať k všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

3 Vypracovanie

Popis problému

Analýzou diferenčnej rovnice (1) sme zistili, že sa jedná o homogénnu lineárnu diferenčnú rovnicu prvého stupňa druhého typu s nekonštantnými koeficientami. Ďalej sa budeme zaoberať riešeniami tejto rovnice s využitím poznatku, že sa jedná o rekurentný popis postupnosti. Dosadzovaním rôznych hodnôt za a a b budeme hľadať riešenia rovnice, a teda priameho vzorca pre členy postupnosti.

Prvých pár členov postupnosti má tvar :

$$\begin{aligned}n = 1 : \quad & x_2 = (a + b)x_1 \\n = 2 : \quad & x_3 = (a + \frac{b}{2})x_2 = (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\n = 3 : \quad & x_4 = (a + \frac{b}{3})x_3 = (a + \frac{b}{3})(a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\n = 4 : \quad & x_5 = (a + \frac{b}{4})x_4 = (a + \frac{b}{4})(a + \frac{b}{3})(a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\n = k - 1 : \quad & x_k = (a + \frac{b}{k-1})x_{k-1} = (a + \frac{b}{k-1})(a + \frac{b}{k-2}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1\end{aligned}$$

3.1 Triviálne riešenie

Nech $x_1 = 0$.

Potom dostávame triviálne riešenie $x_{n+1} = 0$, čiže každý člen postupnosti bude mať hodnotu 0. Ďalej budeme predpokladať, že $x_1 > 0$, a teda sa budeme zaoberať závislosťou od hodnôt a, b .

3.2 Všeobecné riešenie

$x_{n+1} = (a + \frac{b}{n})x_n$, $n \geq 1$ a nech $a + \frac{b}{n} = f(n)$, potom $x_{n+1} = f(n)x_n$, kde $n = 1 + k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}x_n &= f(n-1)x_{n-1} \\x_{n-1} &= f(n-2)x_{n-2} \\x_{n-2} &= f(n-3)x_{n-3} \\&\vdots \\x_{n-(k-1)} &= f(n-k)x_{n-k},\end{aligned}$$

a teda $x_2 = f(1)x_1$.

3.3 Závislosť od hodnôt a, b

Predpokladajme, že $b = 0$ a $a > 0$, teda rovnica (1) má tvar $x_{n+1} = ax_n$, čiže sa jedná o **geometrickú postupnosť** $x_n = ax_{n-1}$, kde a je koeficientom geometrickej postupnosti. V prípade, že $a = 1$ dostávame $x_n = x_{n-1}$.

Ďalej skúmame prípad, kedy je $a = 0$. Prvých pár členov vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}x_2 &= bx_1 \\x_3 &= \frac{b}{2}x_2 = \frac{b}{2}bx_1 = \frac{b^2}{2}x_1 \\x_4 &= \frac{b}{3}x_3 = \frac{b^3}{3!}x_1 \\&\vdots \\x_n &= \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}x_1 \\x_{n+1} &= \frac{b^n}{(n)!}x_1\end{aligned}$$

Čo sa podobá na Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti.

Položme $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$, potom $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = x_1 e^b \Rightarrow x_1 = e^{-b}$.

Môžeme teda prehlásiť, že ak $x_1 = e^{-b}$, potom riešením rovnice

(1) kde $a = 0$, $b > 0$ je **Poissonovo rozdelenie** $Po(\lambda)$ s parametrom $\lambda = b$.

Metódou matematickej indukcie sme teda dokázali, že $x_n \sim Po(b)$, keďže každý ďalší člen $x_{n+1} \sim Po(b)$, resp. $X \sim Po(b)$.

Ďalej skúmame prípad, kedy $a \in (0; 1)$. Z pôvodnej rovnice teda :

$$\begin{aligned}x_2 &= (a+b)x_1 \\x_3 &= (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\x_4 &= (a+\frac{b}{3})x_3 = (a+\frac{b}{3})(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&\vdots \\x_n &= (a+\frac{b}{n-1})(a+\frac{b}{n-2})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\x_{n+1} &= (a+\frac{b}{n})(a+\frac{b}{n-1})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&= \frac{a^n}{n!}(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})\dots(2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})x_1,\end{aligned}$$

kde x_1 je prvým členom postupnosti.

Vychádzajúc z $a + b > 0$ nech $1 + \frac{b}{a} = \alpha > 0$

$$x_{n+1} = \frac{a^n}{n!} (n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots (1 + \alpha) \alpha x_1$$

Po rozšírení pravej strany jednotkou v tvare $\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$ dostávame :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{a^n (n + \alpha - 1)!}{n! (\alpha - 1)!} x_1 \\ x_{n+1} &= a^n \binom{n + \alpha - 1}{n} x_1 \\ x_{n+1} &= \binom{n + \alpha - 1}{n} (1 - a)! a^n = Pr(X = n), \end{aligned}$$

kde $x_1 = (1-a)^\alpha \Rightarrow x_1 = (1-a)^{1+\frac{b}{a}}$ Môžeme teda povedať, že $x_{n+1} \sim NB(2, 9)$, čiže $x_{n+1} \sim NB(1 + \frac{b}{a}; a)$, čo je **negatívne binomické rozdelenie**, pričom $a \in (0; 1)$, $a + b > 0 \Rightarrow b \in (0; \infty)$, $x_1 = (1 - a)^{a+\frac{b}{a}}$. Matematickou dedukciou je teda dokázané, že to platí aj pre x_n .

Následne je potrebné sa zaoberať prípadom, keď $a < 0$. Nesmieme však zabudnúť na podmienku $a + b = 0$. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo z také, že $a + \frac{b}{z+1} = 0$. V tomto prípade platí, že pre všetky $n \geq z + 1$ $x_{n+1} = 0$. Keďže $\frac{b}{n} \rightarrow 0$ a $b > 0$, $a + \frac{b}{n} \leq 0$ pre všetky dostatočne veľké n . Ak také z neexistuje, potom zvolením minimálneho n , takého, že $a + \frac{b}{n} < 0$ dostávame $x_{n+1} < 0$, čo je spor. Môžeme teda písať $z = -(1 + \frac{b}{a})$, potom :

$$\begin{aligned} x_2 &= (a + b)x_1 \\ x_3 &= (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\ &\vdots \\ x_n &= (a + \frac{b}{n-1})(a + \frac{b}{n-2}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\ x_{n+1} &= (a + \frac{b}{n})(a + \frac{b}{n-1}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\ &= \frac{a^n}{n!} (n + \frac{b}{a})(n - 1 + \frac{b}{a}) \dots (2 + \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a})x_1 \\ &= \frac{a^n}{n!} (-z + n - 1)(-z + n - 2) \dots (-z + 1)(-z)x_1 \\ &= (-1)^n \frac{a^n}{n!} (n - 1 - z)(n - 2 - z) \dots (1 - z)z * x_1 \\ &= \binom{z}{n} (-a)^n x_1 \end{aligned}$$

Nech je $A = -a > 0$. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$ a $x_{n+1} = 0$ pre $n \geq z + 1$ potom

$$x_1 \sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = 1.$$

Podľa binomickej vety, $\sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = (1+A)^z$, potom $x_1 = (1+A)^{-z}$. Keďže každé kladné číslo môžeme zapísať ako $A = \frac{p}{1-p}$, kde $p \in (0, 1)$ dostávame:

$$x_1 = \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{-z} = (1-p^z) \Rightarrow x_{n+1} = \binom{z}{n} p^n (1-p^{z-n})$$

a to môžeme zapísať ako:

$$X \sim \text{Bin}\left(z, \frac{a}{a-1}\right).$$

4 Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika

Výskyt poistných plnení je náhodný proces a teda nie je možné poznať ako sa bude vyvíjať. Pre poisťovňu je dôležité tento proces aspoň predpovedať, pretože na základe toho musí stanoviť výšku poistného pre jednotlivé zmluvy a takisto výšku rezerv. Súhrn strát ktoré poisťovňa utrpí môžeme vyjadriť vzorcom:

$$S(t) = \sum_{j=1}^N (t)X_j, \quad \forall t \geq 0$$

$S(t)$ – súhrn strát

$X(j)$ – náhodná premenná predstavujúca výskyt poistnej udalosti, náhodné premenné $X(j)$ sú nezávislé, ale vieme o nich, že sú z jedného rozdelenia pravdepodobnosti

$N(t)$ – diskretná náhodná premenná

Pri predpovedaní výpočtu poistného je dôležité nájsť vhodné rozdelenie pre počet poistných plnení a takisto rozdelenie výšky poistných plnení. Jednotlivé poistné udalosti sú náhodné a je možné predpokladať aj ich nezávislosť pre konkrétne zmluvy. V prípade počtu plnení sú známe diskkrétne rozdelenia, ktoré sú na ich popisovanie najvhodnejšie.

4.1 Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$

Opisuje počet výskytu určitej náhodnej udalosti v n nezávislých pokusoch, pričom daný jav má stále rovnakú pravdepodobnosť p .

Náhodná premenná N má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n; p$ práve vtedy, ak pravdepodobnosť, že pri n nezávislých pokusoch nastane pozorovaný jav práve k krát, má tvar:

$$p_N(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n.$$

4.2 Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$

Toto rozdelenie používame na aproximáciu málo pravdepodobných náhodných udalostí pri veľkom počte nezávislých opakovaní experimentu.

Náhodná premenná N má Poissonovo rozdelenie s parametrom λ , práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

4.3 Geometrické rozdelenie $Ge(p)$

Pri tomto rozdelení nezávisle opakujeme pokus, pričom pravdepodobnosť, že náhodná udalosť nastane, je p . Pokus budeme opakovať toľkokrát, kým prvýkrát nastane daná udalosť. Náhodná premenná N teda bude predstavovať počet opakovaní, kým nastala pozorovaná udalosť. Náhodná premenná N má geometrické rozdelenie s parametrom p práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = p(1 - p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

4.4 Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$

Toto rozdelenie vychádza z geometrického rozdelenia, teda znova nezávisle opakujeme pokusy, pričom tentokrát neskončíme vtedy, keď náhodná udalosť nastane prvýkrát, ale až vtedy, keď nastane m -krát. Náhodná premenná N má negatívne binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami m a p práve vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \binom{k + m - 1}{m - 1} p^m (1 - p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

5 Záver

Touto prácou sme sa dopracovali k riešeniam rovnice, ktorá rekurentným spôsobom popisuje postupnosť čísel. Zdanlivo nenápadná rovnica však našla svoje riešenia v teórii pravdepodobnosti, a to len vhodným dosadzovaním jednotlivých konštánt. Ukázalo sa, že jednotlivé rozdelenia pravdepodobnosti v nej obsiahnuté nachádzajú svoje uplatnenie v štatistike, a tým aj v teórii rizika a poisťovníctve.

Jednou z pozoruhodných vecí na javoch nášho sveta je, s akou neobyčajnou presnosťou mu vládnu matematické zákony.

R. Penrose

Literatúra

- [1] *Prágerová, A.: Diferenční rovnice.* Polytechnická knižnice, Praha 1971.