



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY

Analýza diferenčnej rovnice

Autori:

Matejko Peter

Mudrák Ľuboš

Rehák Tomáš

Zárecký Martin

Boďa Michal

Kapusta Peter

26. novembra 2013

Obsah

1	Zadanie	2
2	Definície	2
2.1	Pojem diferencia	2
2.2	Pojem diferenčná rovnica	2
2.2.1	Typy diferenčných rovníc	2
2.2.2	Rekurentná formula	3
3	Vypracovanie	3
3.1	Triviálne riešenie	3
3.2	Závislosť od hodnôt a, b	3
4	Záver	4

1 Zadanie

V závislosti od hodnôt a a b analyzujte riešenia danej diferenčnej rovnice $x_{n+1} = (a + \frac{b}{n}) x_n$ kde a a b sú reálne čísla, také, že $a + b > 0$. Výsledky ilustrujte na jednoduchých príkladoch.

Budeme skúmať dopady zmeny jednotlivých premenných a a b na riešenia danej diferenčnej rovnice.

2 Definície

2.1 Pojem diferenca

Definícia 2.1. Je daný bod x_0 a číslo $h > 0$. Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná v bodoch x_0 a $x_0 + h$. *Diferencia funkcie $f(x)$ v bode x_0* je číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

2.2 Pojem diferenčná rovnica

2.2.1 Typy diferenčných rovníc

Definícia 2.2. (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky $x \in M$ je definovaná funkcia $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$. Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0,$$

v ktorej neznámou funkciou $y = \varphi(x)$, nazývame diferenčnú rovnicu k -teho rádu a 1. typu definovanú v M .

Partikulárnym riešením tejto rovnice v M nazveme každú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu.

Všeobecným riešením nazývame množinu všetkých partikulárnych riešení.

Definícia 2.3. (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky $x \in M$ definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x+j) \text{ } j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia $y_x = \varphi(x)$, nazývaná *diferenčná rovnica 2. typu* definovaná v M . Ak je závislosť g na y_x a y_{x+k} nekonštantná hovoríme, že rovnica je k -teho rádu. Riešenie rovnice v M nazývame každú funkciu $y_x = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie $\varphi(x)$ obsahoval všetky $x \in M$ a taktiež body $x+1, x+2, \dots, x+k$.

2.2.2 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením $(n+k)$ -teho člena pomocou k predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla $n = 1, 2, 3, \dots$ a ďalej zaved'me všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti: $y_n = a_n$, takže rovnicu vieme prepísať ako

$$g(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0.$$

Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k a_{n+k} :

$$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}),$$

kde G je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Dostali sme vlastne všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť a_n , v ktorom je $(n+k)$ -ty člen vyjadrený pomocou k predchádzajúcich členov $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$ a premennej n .

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla a_1, a_2, \dots, a_k . Vieme, že po dosadení členov do funkcie G vypočítame jednoznačne člen

$$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \dots, a_k);$$

ďalším dosadením vypočítame

$$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}); \text{ atď.}$$

Všeobecný n -tý člen a_n dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie n a daných k prvých čísiel a_1, a_2, \dots, a_k . Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami a_1, a_2, \dots, a_k .

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice k -teho rádu $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$ má obsahovať k všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

3 Vypracovanie

3.1 Triviálne riešenie

Nech $x_1 = 0$

3.2 Závislosť od hodnôt a, b

4 Záver

Literatúra

- [1] *Prágerová, A.:* **Diferenční rovnice.** Polytechnická knižnice, Praha 1971.