Žilinská univerzita v Žiline

Fakulta riadenia a informatiky

Analýza diferenčnej rovnice

Autori:
Matejko Peter
Mudrák Ľuboš
Rehák Tomáš
Zárecký Martin
Boďa Michal
Kapusta Peter

27. novembra 2013

Obsah

1 Zadanie **2**

2 Definície **2**
2.1 Pojem diferencia 2
2.2 Pojem diferenčná rovnica 2
2.2.1 Typy diferenčných rovníc 2
2.2.2 Rekurentná formula 3

3 Vypracovanie **4**
3.1 Triviálne riešenie 4
3.2 Všeobecné riešenie 4
3.3 Závislosť od hodnôt a, b 4

4 Záver **7**

1 Zadanie

V závislosti od hodnôt a a b analyzujte riešenia danej diferenčnej rovnice $x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$ kde a a b sú reálne čísla, také, že $a + b > 0$. Výsledky ilustrujte na jednoduchých príkladoch.

Budeme skúmať dopady zmeny jednotlivých premenných a a b na riešenia danej diferenčnej rovnice.

2 Definície

2.1 Pojem diferencia

Definícia 2.1. Je daný bod x_0 a číslo $h > 0$. Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná v bodoch x_0 a $x_0 + h$. *Diferencia funkcie $f(x)$ v bode x_0* je číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

2.2 Pojem diferenčná rovnica

2.2.1 Typy diferenčných rovníc

Definícia 2.2. (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky $x \in M$ je definovaná funkcia $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y)$. Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y) = 0 \ ,$$

v ktorej neznámou funkciou $y = \varphi(x)$, nazývame diferenčnú rovnicu k-tého rádu a 1. typu definovanú v M.

Partikulárnym riešením tejto rovnice v M nazveme každú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu.

Všeobecným riešením nazývame množinu všetkých partikulárnych riešení.

Definícia 2.3. (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky $x \in M$ definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x + j) j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia $y_x = \varphi(x)$, nazývaná *diferenčná rovnica 2.typu* definovaná v M. Ak je závislosť g na y_x a y_{x+k} nekonštantná hovoríme, že rovnica *je k-tého rádu.* Riešenie rovnice v M nazývame každú funkciu $y_x = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie $\varphi(x)$ obsahoval všetky $x \in M$ a taktiež body $x + 1, x + 2, \ldots, x + k$.

2.2.2 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením $(n+k)$-tého člena pomocou k predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla $n = 1, 2, 3, \ldots$ a ďalej zaveďme všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti: $y_n = a_n$, takže rovnicu vieme prepísať ako

   $$g(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0.$$

   Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k a_{n+k} :

   $$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}),$$

   kde G je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Dostali sme vlastne všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť a_n, v ktorom je $(n+k)$-ty člen vyjadrený pomocou k predchádzajúcich členov $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}$ a premennej n.

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Vieme, že po dosadení členov do funkcie G vypočítame jednoznačne člen

   $$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \ldots, a_k;),$$

   ďalším dosadením vypočítame

   $$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1};)\text{atď}.$$

   Všeobecný n-tý člen a_n dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie n a daných k prvých čísiel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice k-teho rádu $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$ má obsahovať k všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

3 Vypracovanie

Popis našej rovnice
$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$, kde $a, b \in R$, $a + b > 0$. Ide o rekurentný vzorec pre postupnosť.

Vypísanie prvých členov postupnosti

$$
\begin{aligned}
n = 1: &\quad x_2 = (a+b)x_1 \\
n = 2: &\quad x_3 = (a+\tfrac{b}{2})x_2 = (a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
n = 3: &\quad x_2 = (a+\tfrac{b}{3})x_3 = (a+\tfrac{b}{3})(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
n = 4: &\quad x_2 = (a+\tfrac{b}{4})x_4 = (a+\tfrac{b}{4})(a+\tfrac{b}{3})(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
n = k-1: &\quad x_k = (a+\tfrac{b}{k-1})x_{k-1} = (a+\tfrac{b}{k-1})(a+\tfrac{b}{k-2})\dots(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1
\end{aligned}
$$

3.1 Triviálne riešenie

Nech $x_1 = 0$.
Potom dostávame triviálne riešenie $x_{n+1} = 0$ a teda každý člen postupnosti bude mať hodnotu 0. Ďalej, v našom vypracovaní, budeme predpokladať, že $x_1 > 0$ a teda sa budeme zaoberať závislosťou od hodnôt a, b.

3.2 Všeobecné riešenie

$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$, $n \geq 1$ a nech $a + \frac{b}{n} = f(n)$, potom $x_{n+1} = f(n)x_n$, kde $n = 1 + k$, $k = 0, 1, 2, ...$

$$
\begin{aligned}
x_n &= f(n-1)x_{n-1} \\
x_{n-1} &= f(n-2)x_{n-2} \\
x_{n-2} &= f(n-3)x_{n-3} \\
&\vdots \\
x_{n-(k-1)} &= f(n-k)x_{n-k}
\end{aligned}
$$

a teda $x_2 = f_1 x_1$.

3.3 Závislosť od hodnôt a, b

Nech $b = 0$, $x_1 > 0$.
Potom rovnica $x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$ nadobudne tvar $x_{n+1} = ax_n$, teda každý ďalší člen postupnosti x_{n+1} je a-násobkom predchádzajúceho člena x_n. Dosadením $b = 0$ teda vzniká z našej rovnice Geometrická postupnosť.

Predpokladajme, že $b = 0$ a $a > 0$, teda rovnica (*) má tvar $x_{n+1} = a \times x_n$, čiže sa jedná o geometrickú postupnosť $x_n = ax_{n-1}$, kde a je koeficientom geometrickej postupnosti.

V prípade, že $a = 1$ dostávame $x_n = x_{n-1}$.

Ďalej skúmajme prípad, kedy je $a = 0$. Prvých pár členov vyzerá následovne:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= bx_1 \\
x_3 &= \tfrac{b}{2}x_2 = \tfrac{b}{2}bx_1 = \tfrac{b^2}{2}x_1 \\
x_4 &= \tfrac{b}{3}x_3 = \tfrac{b^3}{3!}x_1 \\
&\vdots \\
x_n &= \tfrac{b^{n-1}}{(n-1)!}x_1 \\
x_{n+1} &= \tfrac{b^n}{(n)!}x_1
\end{aligned}
$$

Čo sa podobá na Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti.

Položme $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$, potom $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = x_1 e^b \Rightarrow x_1 = e^{-b}$

Môžeme teda prehlásiť, že ak $x_1 = e^{-b}$, potom riešením rovnice $x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$ kde $a = 0$, $b > 0$ je Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$ s parametrom $\lambda = b$.
Metódou matematickej indukcie sme teda dokázali, že $x_n \sim Po(\lambda)$, keďže každý ďalší člen $x_{n+1} \sim Po(\lambda)$.

Ďalej skúmajme prípad, kedy $a \in (0; 1)$. Z pôvodnej rovnice teda :

$$
\begin{aligned}
x_2 &= (a+b)x_1 \\
x_3 &= (a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1) \\
x_4 &= (a+\tfrac{b}{3})x_3 = (a+\tfrac{b}{3})(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&\vdots \\
x_n &= (a+\tfrac{b}{n-1})(a+\tfrac{b}{n-2})\dots(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
x_{n+1} &= (a+\tfrac{b}{n})(a+\tfrac{b}{n-1})\dots(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
x_{n+1} &= \tfrac{a^n}{n!}(n+\tfrac{b}{a})(n-1+\tfrac{b}{a})\dots(2+\tfrac{b}{a})(1+\tfrac{b}{a})x_1,
\end{aligned}
$$

kde x_1 je prvým členom postupnosti. Vychádzajúc z $a + b > 0$ nech $1 + \frac{b}{a} = \alpha > 0$
$x_{n+1} = \frac{a^n}{n!}(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots(1+\alpha)\alpha x_1$

Po rozšírení pravej strany jednotkou v tvare $\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$ dostávame :

$$x_{n+1} = \frac{a^n(n+\alpha-1)!}{n!(\alpha-1)!}x_1$$

$$x_{n+1} = a^n\binom{n+\alpha-1}{n}x_1$$

$$x_{n+1} = \binom{n+\alpha-1}{n}(1-a)!^{\alpha}a^n = Pr(x=n),$$

kde $x_1 = (1-a)^{\alpha} \Rightarrow x_1 = (1-a)^{1+\frac{b}{a}}$ Môžeme teda povedať, že $x_{n+1} \sim NB(2,9)$, čiže $x_{n+1} \sim NB(1+\frac{b}{a};a)$,čo je negatívne binomické rozdelenie, pričom $a \in (0;1), a+b > 0 \Rightarrow b \in (0;\infty), x_1 = (1-a)^{a+\frac{b}{a}}$. Matematickou dedukciou je teda dokázané, že to platí aj pre x_n.

Následne je potrebné sa zaoberať prípadom, keď $a < 0$. Nesmieme však zabudnúť na podmienku $a + b = 0$. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo z také, že $a + \frac{b}{z+1} = 0$. V tomto prípade platí, že pre všetky $n \geq z+1$ $x_{n+1} = 0$. Kedže $\frac{b}{n}(???)0$

4 Záver

Literatúra

[1] *Prágerová, A.:* **Diferenční rovnice.** Polytechnická knižnice, Praha 1971.