



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY

---

## Analýza diferenčnej rovnice

---

*Autori:*

Matejko Peter

Mudrák Ľuboš

Rehák Tomáš

Zárecký Martin

Boďa Michal

Kapusta Peter

28. novembra 2013

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definície</b>	<b>2</b>
2.1	Pojem diferencia . . . . .	2
2.2	Pojem diferenčná rovnica . . . . .	2
2.2.1	Rekurentná formula . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Vypracovanie</b>	<b>4</b>
3.1	Triviálne riešenie . . . . .	4
3.2	Všeobecné riešenie . . . . .	4
3.3	Závislosť od hodnôt $a, b$ . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika</b>	<b>8</b>
4.1	Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$ . . . . .	8
4.2	Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$ . . . . .	8
4.3	Geometrické rozdelenie $Ge(p)$ . . . . .	9
4.4	Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$ . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Záver</b>	<b>10</b>

# 1 Úvod

Táto práca analyzuje riešenia diferenčnej rovnice

$$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n \quad (1)$$

v závislosti od hodnôt  $a$  a  $b$ , kde  $a$  a  $b$  sú reálne čísla, také, že  $a + b > 0$ .

## 2 Definície

### 2.1 Pojem diferencia

**Definícia 2.1.** Je daný bod  $x_0$  a číslo  $h > 0$ . Nech funkcia  $y = f(x)$  je definovaná v bodoch  $x_0$  a  $x_0 + h$ . *Diferencia funkcie  $f(x)$  v bode  $x_0$*  je číslo  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ . Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

### 2.2 Pojem diferenčná rovnica

**Definícia 2.2.** (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky  $x \in M$  je definovaná funkcia  $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$ . Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0,$$

v ktorej neznámou funkciou  $y = \varphi(x)$ , nazývame diferenčnú rovnicu  $k$ -tého rádu a 1. typu definovanú v  $M$ .

**Partikulárnym riešením** tejto rovnice v  $M$  nazveme každú funkciu  $y = \varphi(x)$ , ktorá pre všetky  $x \in M$  spĺňa danú rovnicu.

**Všeobecným riešením** nazývame množinu všetkých partikulárnych riešení.

**Definícia 2.3.** (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky  $x \in M$  definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x+j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia  $y_x = \varphi(x)$ , nazývaná *diferenčná rovnica 2. typu* definovaná v  $M$ . Ak je závislosť  $g$  na  $y_x$  a  $y_{x+k}$  nekonštantná hovoríme, že rovnica je  $k$ -tého rádu. Riešenie rovnice v  $M$  nazývame každú funkciu  $y_x = \varphi(x)$ , ktorá pre všetky  $x \in M$  spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie  $\varphi(x)$  obsahoval všetky  $x \in M$  a taktiež body  $x+1, x+2, \dots, x+k$ .

### 2.2.1 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením  $(n+k)$ -tého člena pomocou  $k$  predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla  $n = 1, 2, 3, \dots$  a ďalej zaved'me všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti:  $y_n = a_n$ , takže rovnicu vieme prepísať do tvaru

$$g(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0.$$

Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k  $a_{n+k}$  :

$$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}),$$

kde  $G$  je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Týmto sme dostali všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť  $a_n$ , v ktorom je  $(n+k)$ -ty člen vyjadrený pomocou  $k$  predchádzajúcich členov  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$  a premennej  $n$ .

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Vieme, že po dosadení členov do funkcie  $G$  vypočítame jednoznačne člen

$$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \dots, a_k),$$

ďalším dosadením vypočítame

$$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}) \text{ atd'}$$

Všeobecný  $n$ -tý člen  $a_n$  dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie  $n$  a daných  $k$  prvých čísiel  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice  $k$ -teho rádu  $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$  má obsahovať  $k$  všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

### 3 Vypracovanie

#### Popis problému

Analýzou diferenčnej rovnice (1) sme zistili, že sa jedná o homogénnu lineárnu diferenčnú rovnicu prvého stupňa druhého typu s nekonštantnými koeficientami. Ďalej sa budeme zaoberať riešeniami tejto rovnice s využitím poznatku, že sa jedná o rekurentný popis postupnosti. Dosadzovaním rôznych hodnôt za  $a$  a  $b$  budeme hľadať riešenia rovnice, a teda priameho vzorca pre členy postupnosti.

Prvých pár členov postupnosti má tvar :

$$n = 1 : \quad x_2 = (a + b)x_1$$

$$n = 2 : \quad x_3 = (a + \frac{b}{2})x_2 = (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1$$

$$n = 3 : \quad x_4 = (a + \frac{b}{3})x_3 = (a + \frac{b}{3})(a + \frac{b}{2})(a + b)x_1$$

$$n = 4 : \quad x_5 = (a + \frac{b}{4})x_4 = (a + \frac{b}{4})(a + \frac{b}{3})(a + \frac{b}{2})(a + b)x_1$$

$$n = k - 1 : \quad x_k = (a + \frac{b}{k-1})x_{k-1} = (a + \frac{b}{k-1})(a + \frac{b}{k-2}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1$$

#### 3.1 Triviálne riešenie

Nech  $x_1 = 0$ .

Potom dostávame triviálne riešenie  $x_{n+1} = 0$ , čiže každý člen postupnosti bude mať hodnotu 0. Ďalej budeme predpokladať, že  $x_1 > 0$ , a teda sa budeme zaoberať závislosťou od hodnôt  $a, b$ .

#### 3.2 Všeobecné riešenie

$x_{n+1} = (a + \frac{b}{n})x_n$ ,  $n \geq 1$  a nech  $a + \frac{b}{n} = f(n)$ , potom  $x_{n+1} = f(n)x_n$ , kde  $n = 1 + k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_n = f(n-1)x_{n-1}$$

$$x_{n-1} = f(n-2)x_{n-2}$$

$$x_{n-2} = f(n-3)x_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-(k-1)} = f(n-k)x_{n-k},$$

a teda  $x_2 = f(1)x_1$ .

### 3.3 Závislosť od hodnôt a, b

Predpokladajme, že  $b = 0$  a  $a > 0$ , teda rovnica (1) má tvar  $x_{n+1} = ax_n$ , čiže sa jedná o **geometrickú postupnosť**  $x_n = ax_{n-1}$ , kde  $a$  je koeficientom geometrickej postupnosti. V prípade, že  $a = 1$  dostávame  $x_n = x_{n-1}$ . Ďalej skúmame prípad, kedy je  $a = 0$ . Prvých pár členov vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}x_2 &= bx_1 \\x_3 &= \frac{b}{2}x_2 = \frac{b}{2}bx_1 = \frac{b^2}{2}x_1 \\x_4 &= \frac{b}{3}x_3 = \frac{b^3}{3!}x_1 \\&\vdots \\x_n &= \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}x_1 \\x_{n+1} &= \frac{b^n}{(n)!}x_1\end{aligned}$$

Čo sa podobá na Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti.

Položme  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$ , potom  $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = x_1 e^b \Rightarrow x_1 = e^{-b}$ .

Môžeme teda prehlásiť, že ak  $x_1 = e^{-b}$ , potom riešením rovnice

(1) kde  $a = 0$ ,  $b > 0$  je **Poissonovo rozdelenie**  $Po(\lambda)$  s parametrom  $\lambda = b$ .

Metódou matematickej indukcie sme teda dokázali, že  $x_n \sim Po(b)$ , keďže každý ďalší člen  $x_{n+1} \sim Po(b)$ , resp.  $X \sim Po(b)$ .

Ďalej skúmame prípad, kedy  $a \in (0; 1)$ . Z pôvodnej rovnice teda :

$$\begin{aligned}x_2 &= (a+b)x_1 \\x_3 &= (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\x_4 &= (a+\frac{b}{3})x_3 = (a+\frac{b}{3})(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&\vdots \\x_n &= (a+\frac{b}{n-1})(a+\frac{b}{n-2})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\x_{n+1} &= (a+\frac{b}{n})(a+\frac{b}{n-1})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&= \frac{a^n}{n!}(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})\dots(2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})x_1,\end{aligned}$$

kde  $x_1$  je prvým členom postupnosti.

Vychádzajúc z  $a + b > 0$  nech  $1 + \frac{b}{a} = \alpha > 0$

$$x_{n+1} = \frac{a^n}{n!} (n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots (1 + \alpha) \alpha x_1$$

Po rozšírení pravej strany jednotkou v tvare  $\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$  dostávame :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{a^n (n + \alpha - 1)!}{n! (\alpha - 1)!} x_1 \\ x_{n+1} &= a^n \binom{n + \alpha - 1}{n} x_1 \\ x_{n+1} &= \binom{n + \alpha - 1}{n} (1 - a)!^\alpha a^n = Pr(X = n), \end{aligned}$$

kde  $x_1 = (1-a)^\alpha \Rightarrow x_1 = (1-a)^{1+\frac{b}{a}}$  Môžeme teda povedať, že  $x_{n+1} \sim NB(2, 9)$ , čiže  $x_{n+1} \sim NB(1 + \frac{b}{a}; a)$ , čo je **negatívne binomické rozdelenie**, pričom  $a \in (0; 1)$ ,  $a + b > 0 \Rightarrow b \in (0; \infty)$ ,  $x_1 = (1 - a)^{a+\frac{b}{a}}$ . Matematickou dedukciou je teda dokázané, že to platí aj pre  $x_n$ .

Následne je potrebné sa zaoberať prípadom, keď  $a < 0$ . Nesmieme však zabudnúť na podmienku  $a + b = 0$ . Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo  $z$  také, že  $a + \frac{b}{z+1} = 0$ . V tomto prípade platí, že pre všetky  $n \geq z + 1$   $x_{n+1} = 0$ . Keďže  $\frac{b}{n} \rightarrow 0$  a  $b > 0$ ,  $a + \frac{b}{n} \leq 0$  pre všetky dostatočne veľké  $n$ . Ak také  $z$  neexistuje, potom zvolením minimálneho  $n$ , takého, že  $a + \frac{b}{n} < 0$  dostávame  $x_{n+1} < 0$ , čo je spor. Môžeme teda písať  $z = -(1 + \frac{b}{a})$ , potom :

$$\begin{aligned} x_2 &= (a + b)x_1 \\ x_3 &= (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\ &\vdots \\ x_n &= (a + \frac{b}{n-1})(a + \frac{b}{n-2}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\ x_{n+1} &= (a + \frac{b}{n})(a + \frac{b}{n-1}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\ &= \frac{a^n}{n!} (n + \frac{b}{a})(n - 1 + \frac{b}{a}) \dots (2 + \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a})x_1 \\ &= \frac{a^n}{n!} (-z + n - 1)(-z + n - 2) \dots (-z + 1)(-z)x_1 \\ &= (-1)^n \frac{a^n}{n!} (n - 1 - z)(n - 2 - z) \dots (1 - z)z * x_1 \\ &= \binom{z}{n} (-a)^n x_1 \end{aligned}$$

Nech je  $A = -a > 0$ . Ak  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$  a  $x_{n+1} = 0$  pre  $n \geq z + 1$  potom

$$x_1 \sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = 1.$$

Podľa binomickej vety,  $\sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = (1 + A)^z$ , potom  $x_1 = (1 + A)^{-z}$ . Keďže každé kladné číslo môžeme zapísať ako  $A = \frac{p}{1-p}$ , kde  $p \in (0, 1)$  dostávame:

$$x_1 = \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{-z} = (1 - p^z) \Rightarrow x_{n+1} = \binom{z}{n} p^n (1 - p^{z-n})$$

a to môžeme zapísať ako:

$$X \sim \text{Bin}\left(z, \frac{a}{a-1}\right).$$



## 4 Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika

Výskyt poisťných plnení je náhodný proces a teda nie je možné poznať ako sa bude vyvíjať. Pre poisťovňu je dôležité tento proces aspoň predpovedať, pretože na základe toho musí stanoviť výšku poisťného pre jednotlivé zmluvy a takisto výšku rezerv. Súhrn strát ktoré poisťovňa utrpí môžeme vyjadriť vzorcom:

$$S(t) = \sum_{j=1}^N (t)X_j, \forall t \geq 0$$

$S(t)$  – súhrn strát

$X(j)$  – náhodná premenná predstavujúca výskyt poisťnej udalosti, náhodné premenné  $X(j)$  sú nezávislé, ale vieme o nich, že sú z jedného rozdelenia pravdepodobnosti

$N(t)$  – diskretná náhodná premenná

Pri predpovedaní výpočtu poisťného je dôležité nájsť vhodné rozdelenie pre počet poisťných plnení a takisto rozdelenie výšky poisťných plnení. Jednotlivé poisťné udalosti sú náhodné a je možné predpokladať aj ich nezávislosť pre konkrétne zmluvy. V prípade počtu plnení sú známe diskretné rozdelenia, ktoré sú na ich popisovanie najvhodnejšie.

### 4.1 Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$

Opisuje počet výskytu určitej náhodnej udalosti v  $n$  nezávislých pokusoch, pričom daný jav má stále rovnakú pravdepodobnosť  $p$ .

Náhodná premenná  $N$  má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami  $n; p$  práve vtedy, ak pravdepodobnosť, že pri  $n$  nezávislých pokusoch nastane pozorovaný jav práve  $k$  krát, má tvar:

$$p_N(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \text{ pre } k = 1, 2, \dots, n.$$

### 4.2 Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$

Toto rozdelenie používame na aproximáciu málo pravdepodobných náhodných udalostí pri veľkom počte nezávislých opakovaní experimentu.

Náhodná premenná  $N$  má Poissonovo rozdelenie s parametrom  $\lambda$ , práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

### 4.3 Geometrické rozdelenie $Ge(p)$

Pri tomto rozdelení nezávisle opakujeme pokus, pričom pravdepodobnosť, že náhodná udalosť nastane, je  $p$ . Pokus budeme opakovať toľkokrát, kým prvýkrát nastane daná udalosť. Náhodná premenná  $N$  teda bude predstavovať počet opakovaní, kým nastala pozorovaná udalosť. Náhodná premenná  $N$  má geometrické rozdelenie s parametrom  $p$  práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = p(1 - p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

### 4.4 Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$

Toto rozdelenie vychádza z geometrického rozdelenia, teda znova nezávisle opakujeme pokusy, pričom tentokrát neskončíme vtedy, keď náhodná udalosť nastane prvýkrát, ale až vtedy, keď nastane  $m$ -krát. Náhodná premenná  $N$  má negatívne binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami  $m$  a  $p$  práve vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \binom{k + m - 1}{m - 1} p^m (1 - p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

## 5 Záver

Touto prácou sme sa dopracovali k riešeniam rovnice, ktorá rekurentným spôsobom popisuje postupnosť čísel. Zdanlivo nenápadná rovnica však našla svoje riešenia v teórii pravdepodobnosti, a to len vhodným dosadzovaním jednotlivých konštánt. Ukázalo sa, že jednotlivé rozdelenia pravdepodobnosti v nej obsiahnuté nachádzajú svoje uplatnenie v štatistike, a tým aj v teórii rizika a poisťovníctve.

*Jednou z pozoruhodných vecí na javoch nášho sveta je, s akou neobyčajnou presnosťou mu vládnu matematické zákony.*

R. Penrose

## Literatúra

- [1] *Prágerová, A.: Diferenční rovnice.* Polytechnická knižnice, Praha 1971.