Žilinská univerzita v Žiline

Fakulta riadenia a informatiky

Analýza diferenčnej rovnice

Autori:
Matejko Peter
Mudrák Ľuboš
Rehák Tomáš
Zárecký Martin
Boďa Michal
Kapusta Peter

29. novembra 2013

Obsah

1 Úvod

Táto práca analyzuje riešenia diferenčnej rovnice

$$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n \tag{1}$$

v závislosti od hodnôt a a b, kde a a b sú reálne čísla, také, že $a + b > 0$.

2 Definície

2.1 Pojem diferencia

Definícia 2.1. Je daný bod x_0 a číslo $h > 0$. Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná v bodoch x_0 a $x_0 + h$. *Diferencia funkcie* $f(x)$ *v bode* x_0 je číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

2.2 Pojem diferenčná rovnica

Definícia 2.2. (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky $x \in M$ je definovaná funkcia $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y)$. Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y) = 0 \ ,$$

v ktorej neznámou funkciou $y = \varphi(x)$, nazývame diferenčnú rovnicu k-tého rádu a 1. typu definovanú v M.

Partikulárnym riešením tejto rovnice v M nazveme každú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu.

Všeobecným riešením nazývame množinu všetkých partikulárnych riešení.

Definícia 2.3. (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky $x \in M$ definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x + j) j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia $y_x = \varphi(x)$, nazývaná *diferenčná rovnica 2.typu* definovaná v M. Ak je závislosť g na y_x a y_{x+k} nekonštantná hovoríme, že rovnica *je k-tého rádu.* Riešenie rovnice v M nazývame každú funkciu $y_x = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie $\varphi(x)$ obsahoval všetky $x \in M$ a taktiež body $x + 1, x + 2, \ldots, x + k$.

2.2.1 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením $(n+k)$-tého člena pomocou k predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla $n = 1, 2, 3, \ldots$ a ďalej zaveďme všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti: $y_n = a_n$, takže rovnicu vieme prepísať do tvaru

   $$g(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0.$$

   Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k a_{n+k} :

   $$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}),$$

   kde G je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Týmto sme dostali všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť a_n, v ktorom je $(n+k)$-ty člen vyjadrený pomocou k predchádzajúcich členov $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}$ a premennej n.

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Vieme, že po dosadení členov do funkcie G vypočítame jednoznačne člen

   $$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \ldots, a_k),$$

   ďalším dosadením vypočítame

   $$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1})\text{atď}.$$

   Všeobecný n-tý člen a_n dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie n a daných k prvých čísiel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice k-tého rádu $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$ má obsahovať k všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

3 Vypracovanie

Popis problému
Analýzou diferenčnej rovnice (1) sme zistili, že sa jedná o homogénnu lineárnu diferenčnú rovnicu prvého stupňa druhého typu s nekonštantnými koeficientami. Ďalej sa budeme zaoberať riešeniami tejto rovnice s využitím poznatku, že sa jedná o rekurentný popis postupnosti. Dosadzovaním rôznych hodnôt za a a b budeme hľadať riešenia rovnice, a teda priameho vzorca pre členy postupnosti.

Prvých pár členov postupnosti má tvar :

$$
\begin{aligned}
&n = 1: && x_2 = (a+b)x_1 \\
&n = 2: && x_3 = (a+\tfrac{b}{2})x_2 = (a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&n = 3: && x_2 = (a+\tfrac{b}{3})x_3 = (a+\tfrac{b}{3})(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&n = 4: && x_2 = (a+\tfrac{b}{4})x_4 = (a+\tfrac{b}{4})(a+\tfrac{b}{3})(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&n = k-1: && x_k = (a+\tfrac{b}{k-1})x_{k-1} = (a+\tfrac{b}{k-1})(a+\tfrac{b}{k-2})\dots(a+\tfrac{b}{2})(a+b)x_1
\end{aligned}
$$

3.1 Triviálne riešenie

Nech $x_1 = 0$.
Potom dostávame triviálne riešenie $x_{n+1} = 0$ také, že každý člen postupnosti bude mať hodnotu 0. Ďalej budeme predpokladať, že $x_1 > 0$, a teda sa budeme zaoberať závislosťou od hodnôt a, b.

3.2 Všeobecné riešenie

$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$, $n \geq 1$ a nech $a + \frac{b}{n} = f(n)$, potom $x_{n+1} = f(n)x_n$, kde $n = 1 + k$, $k = 0, 1, 2, ...$

$$
\begin{aligned}
x_n &= f(n-1)x_{n-1} \\
x_{n-1} &= f(n-2)x_{n-2} \\
x_{n-2} &= f(n-3)x_{n-3} \\
&\vdots \\
x_{n-(k-1)} &= f(n-k)x_{n-k},
\end{aligned}
$$

a teda $x_2 = f(1)x_1$.

3.3 Závislosť od hodnôt a, b

Predpokladajme, že $b = 0$ a $a > 0$, teda rovnica (1) má tvar $x_{n+1} = a\,x_n$, čiže sa jedná o **geometrickú postupnosť** $x_n = ax_{n-1}$, kde a je koeficientom geometrickej postupnosti. V prípade, že $a = 1$ dostávame $x_n = x_{n-1}$.
Ďalej skúmajme prípad, kedy je $a = 0$. Prvých pár členov vyzerá následovne:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= bx_1 \\
x_3 &= \frac{b}{2}x_2 = \frac{b}{2}bx_1 = \frac{b^2}{2}x_1 \\
x_4 &= \frac{b}{3}x_3 = \frac{b^3}{3!}x_1 \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}x_1 \\
x_{n+1} &= \frac{b^n}{(n)!}x_1
\end{aligned}
$$

Čo sa podobá na Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti.
Položme $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$, potom $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = x_1 e^b \Rightarrow x_1 = e^{-b}$.
Môžeme teda prehlásiť, že ak $x_1 = e^{-b}$, potom riešením rovnice
(1) kde $a = 0$, $b > 0$ je **Poissonovo rozdelenie** $Po(\lambda)$ s parametrom $\lambda = b$.
Metódou matematickej indukcie sme teda dokázali, že $x_n \sim Po(b)$, keďže každý ďalší člen $x_{n+1} \sim Po(b)$, resp. $X \sim Po(b)$.

Ďalej skúmajme prípad, kedy $a \in (0;1)$. Z pôvodnej rovnice teda :

$$
\begin{aligned}
x_2 &= (a+b)x_1 \\
x_3 &= (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
x_4 &= (a+\frac{b}{3})x_3 = (a+\frac{b}{3})(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&\vdots \\
x_n &= (a+\frac{b}{n-1})(a+\frac{b}{n-2})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
x_{n+1} &= (a+\frac{b}{n})(a+\frac{b}{n-1})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&= \frac{a^n}{n!}(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})\dots(2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})x_1,
\end{aligned}
$$

kde x_1 je prvým členom postupnosti.

Vychádzajúc z $a+b>0$ nech $1+\frac{b}{a}=\alpha>0$

$$x_{n+1}=\frac{a^n}{n!}(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots(1+\alpha)\alpha x_1$$

Po rozšírení pravej strany jednotkou v tvare $\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$ dostávame :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{a^n(n+\alpha-1)!}{n!(\alpha-1)!}x_1 \\
x_{n+1} &= a^n\binom{n+\alpha-1}{n}x_1 \\
x_{n+1} &= \binom{n+\alpha-1}{n}(1-a)!^{\alpha}a^n = Pr(X=n),
\end{aligned}$$

kde $x_1=(1-a)^{\alpha} \Rightarrow x_1=(1-a)^{1+\frac{b}{a}}$. Môžeme teda povedať, že $x_{n+1}\sim NB(2,9)$, čiže $x_{n+1}\sim NB(1+\frac{b}{a};a)$, čo je **negatívne binomické rozdelenie**, pričom $a\in(0;1), a+b>0 \Rightarrow b\in(0;\infty), x_1=(1-a)^{a+\frac{b}{a}}$. Matematickou dedukciou je teda dokázané, že to platí aj pre x_n.

Následne je potrebné sa zaoberať prípadom, keď $a<0$. Nesmieme však zabudnúť na podmienku $a+b=0$. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo z také, že $a+\frac{b}{z+1}=0$. V tomto prípade platí, že pre všetky $n\geq z+1$ $x_{n+1}=0$. Keďže $\frac{b}{n}\to 0$ a $b>0$, $a+\frac{b}{n}\leq 0$ pre všetky dostatočne veľké n. Ak také z neexistuje, potom zvolením minimálneho n, takého, že $a+\frac{b}{n}<0$ dostávame $x_{n+1}<0$, čo je spor. Môžeme teda písať $z=-(1+\frac{b}{a})$, potom :

$$\begin{aligned}
x_2 &= (a+b)x_1 \\
x_3 &= (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&\vdots \\
x_n &= (a+\frac{b}{n-1})(a+\frac{b}{n-2})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
x_{n+1} &= (a+\frac{b}{n})(a+\frac{b}{n-1})\dots(a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\
&= \frac{a^n}{n!}(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})\dots(2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})x_1 \\
&= \frac{a^n}{n!}(-z+n-1)(-z+n-2)\dots(-z+1)(-z)x_1 \\
&= (-1)^n\frac{a^n}{n!}(n-1-z)(n-2-z)\dots(1-z)z*x_1 \\
&= \binom{z}{n}(-a)^n x_1
\end{aligned}$$

Nech je $A = -a > 0$. Ak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$ a $x_{n+1} = 0$ pre $n \geq z+1$ potom

$$x_1 \sum_{n=0}^{z} \binom{z}{n} A^n = 1.$$

Podľa binomickej vety, $\sum\limits_{n=0}^{z} \binom{z}{n} A^n = (1+A)^z$, potom $x_1 = (1+A)^{-z}$. Keďže každé kladné číslo môžeme zapísať ako $A = \frac{p}{1-p}$, kde $p \in (0,1)$ dostávame:

$$x_1 = (1 + \frac{p}{1-p})^{-z} = (1-p^z) \Rightarrow x_{n+1} = \binom{z}{n} p^n (1-p^{z-n})$$

a to môžeme zapísať ako:

$$X \sim Bin(z, \frac{a}{a-1}).$$

4 Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika

Výskyt poistných plnení je náhodný proces a teda nie je možné poznať ako sa bude vyvíjať. Pre poisťovňu je dôležité tento proces aspoň predpovedať, pretože na základe toho musí stanoviť výšku poistného pre jednotlivé zmluvy a takisto výšku rezerv. Súhrn strát ktoré poisťovňa utrpí môžeme vyjadriť vzorcom:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N}(t)X_j,\ \forall t \geq 0$$

S(t) – súhrn strát
X(j) – náhodná premenná predstavujúca výskyt poistnej udalosti, náhodné premenné X(j) sú nezávislé, ale vieme o nich, že sú z jedného rozdelenia pravdepodobnosti
N(t) – diskrétna náhodná premenná

Pri predpovedaní výpočtu poistného je dôležité nájsť vhodné rozdelenie pre počet poistných plnení a takisto rozdelenie výšky poistných plnení. Jednotlivé poistné udalosti sú náhodné a je možné predpokladať aj ich nezávislosť pre konkrétne zmluvy. V prípade počtu plnení sú známe diskrétne rozdelenia, ktoré sú na ich popisovanie najvhodnejšie.

4.1 Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$

Opisuje počet výskytu určitej náhodnej udalosti v n nezávislých pokusoch, pričom daný jav má stále rovnakú pravdepodobnosť p.

Náhodná premenná N má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n; p$ práve vtedy, ak pravdepodobnosť, že pri n nezávislých pokusoch nastane pozorovaný jav práve k krát, má tvar:

$$p_N(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, n.$$

4.2 Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$

Toto rozdelenie používame na aproximáciu málo pravdepodobných náhodných udalostí pri veľkom počte nezávislých opakovaní experimentu.

Náhodná premenná N má Poissonovo rozdelenie s parametrom λ, práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

4.3 Geometrické rozdelenie $Ge(p)$

Pri tomto rozdelení nezávisle opakujeme pokus, pričom pravdepodobnosť, že náhodná udalosť nastane, je p. Pokus budeme opakovať toľkokrát, kým prvýkrát nastane daná udalosť. Náhodná premenná N teda bude predstavovať počet opakovaní, kým nastala pozorovaná udalosť. Náhodná premenná N má geometrické rozdelenie s parametrom p práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = p(1-p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

4.4 Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$

Toto rozdelenie vychádza z geometrického rozdelenia, teda znova nezávisle opakujeme pokusy, pričom tentokrát neskončíme vtedy, keď náhodná udalosť nastane prvýkrát, ale až vtedy, keď nastane m-krát. Náhodná premenná N má negatívne binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami m a p práve vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \binom{k+m-1}{m-1} p^m (1-p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

5 Záver

Touto prácou sme sa dopracovali k riešeniam rovnice, ktorá rekurentným spôsobom popisuje postupnosť čísel. Zdanlivo nenápadná rovnica však našla svoje riešenia v teórii pravdepodobnosti, a to len vhodným dosadzovaním jednotlivých konštánt. Ukázalo sa, že jednotlivé rozdelenia pravdepodobnosti v nej obsiahnuté nachádzajú svoje uplatnenie v štatistike, a tým aj v teórii rizika a poisťovníctve.

> *Jednou z pozoruhodných vecí na javoch nášho sveta je, s akou neobyčajnou presnosťou mu vládnu matematické zákony.*
>
> R. Penrose

Literatúra

[1] *Prágerová, A.:* **Diferenční rovnice.** Polytechnická knižnice, Praha 1971.