



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY

---

## Analýza diferenčnej rovnice

---

*Autori:*

Matejko Peter

Mudrák Ľuboš

Rehák Tomáš

Zárecký Martin

Boďa Michal

Kapusta Peter

27. novembra 2013

# Obsah

<b>1</b>	<b>Zadanie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definície</b>	<b>2</b>
2.1	Pojem diferencia . . . . .	2
2.2	Pojem diferenčná rovnica . . . . .	2
2.2.1	Typy diferenčných rovníc . . . . .	2
2.2.2	Rekurentná formula . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Vypracovanie</b>	<b>4</b>
3.1	Triviálne riešenie . . . . .	4
3.2	Všeobecné riešenie . . . . .	4
3.3	Závislosť od hodnôt $a, b$ . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Záver</b>	<b>8</b>

## 1 Zadanie

V závislosti od hodnôt  $a$  a  $b$  analyzujte riešenia danej diferenčnej rovnice  $x_{n+1} = (a + \frac{b}{n}) x_n$  kde  $a$  a  $b$  sú reálne čísla, také, že  $a + b > 0$ . Výsledky ilustrujte na jednoduchých príkladoch.

Budeme skúmať dopady zmeny jednotlivých premenných  $a$  a  $b$  na riešenia danej diferenčnej rovnice.

## 2 Definície

### 2.1 Pojem diferenca

**Definícia 2.1.** Je daný bod  $x_0$  a číslo  $h > 0$ . Nech funkcia  $y = f(x)$  je definovaná v bodoch  $x_0$  a  $x_0 + h$ . *Diferencia funkcie  $f(x)$  v bode  $x_0$*  je číslo  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ . Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

### 2.2 Pojem diferenčná rovnica

#### 2.2.1 Typy diferenčných rovníc

**Definícia 2.2.** (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky  $x \in M$  je definovaná funkcia  $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$ . Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0,$$

v ktorej neznámou funkciou  $y = \varphi(x)$ , nazývame diferenčnú rovnicu  $k$ -tého rádu a 1. typu definovanú v  $M$ .

**Partikulárnym riešením** tejto rovnice v  $M$  nazveme každú funkciu  $y = \varphi(x)$ , ktorá pre všetky  $x \in M$  spĺňa danú rovnicu.

**Všeobecným riešením** nazývame množinu všetkých partikulárnych riešení.

**Definícia 2.3.** (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky  $x \in M$  definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x+j) \text{ } j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia  $y_x = \varphi(x)$ , nazývaná *diferenčná rovnica 2. typu* definovaná v  $M$ . Ak je závislosť  $g$  na  $y_x$  a  $y_{x+k}$  nekonštantná hovoríme, že rovnica je  $k$ -tého rádu. Riešenie rovnice v  $M$  nazývame každú funkciu  $y_x = \varphi(x)$ , ktorá pre všetky  $x \in M$  spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie  $\varphi(x)$  obsahoval všetky  $x \in M$  a taktiež body  $x+1, x+2, \dots, x+k$ .

### 2.2.2 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením  $(n+k)$ -tého člena pomocou  $k$  predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla  $n = 1, 2, 3, \dots$  a ďalej zavedme všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti:  $y_n = a_n$ , takže rovnicu vieme prepísať ako

$$g(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0.$$

Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k  $a_{n+k}$  :

$$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}),$$

kde  $G$  je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Dostali sme vlastne všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť  $a_n$ , v ktorom je  $(n+k)$ -ty člen vyjadrený pomocou  $k$  predchádzajúcich členov  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$  a premennej  $n$ .

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Vieme, že po dosadení členov do funkcie  $G$  vypočítame jednoznačne člen

$$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \dots, a_k),$$

ďalším dosadením vypočítame

$$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \dots, a_{k+1};) \text{ atď.}$$

Všeobecný  $n$ -tý člen  $a_n$  dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie  $n$  a daných  $k$  prvých čísiel  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice  $k$ -teho rádu  $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$  má obsahovať  $k$  všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

### 3 Vypracovanie

#### Popis našej rovnice

$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$ , kde  $a, b \in R$ ,  $a + b > 0$ . Ide o rekurentný vzorec pre postupnosť.

#### Vypísanie prvých členov postupnosti

$$n = 1 : \quad x_2 = (a + b)x_1$$

$$n = 2 : \quad x_3 = \left(a + \frac{b}{2}\right)x_2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

$$n = 3 : \quad x_4 = \left(a + \frac{b}{3}\right)x_3 = \left(a + \frac{b}{3}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

$$n = 4 : \quad x_4 = \left(a + \frac{b}{4}\right)x_4 = \left(a + \frac{b}{4}\right)\left(a + \frac{b}{3}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

$$n = k - 1 : \quad x_k = \left(a + \frac{b}{k-1}\right)x_{k-1} = \left(a + \frac{b}{k-1}\right)\left(a + \frac{b}{k-2}\right) \dots \left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

#### 3.1 Triviálne riešenie

Nech  $x_1 = 0$ .

Potom dostávame triviálne riešenie  $x_{n+1} = 0$  a teda každý člen postupnosti bude mať hodnotu 0. Ďalej, v našom vypracovaní, budeme predpokladať, že  $x_1 > 0$  a teda sa budeme zaoberať závislosťou od hodnôt  $a, b$ .

#### 3.2 Všeobecné riešenie

$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$ ,  $n \geq 1$  a nech  $a + \frac{b}{n} = f(n)$ , potom  $x_{n+1} = f(n)x_n$ , kde  $n = 1 + k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_n = f(n-1)x_{n-1}$$

$$x_{n-1} = f(n-2)x_{n-2}$$

$$x_{n-2} = f(n-3)x_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-(k-1)} = f(n-k)x_{n-k}$$

a teda  $x_2 = f_1 x_1$ .

#### 3.3 Závislosť od hodnôt $a, b$

Nech  $b = 0$ ,  $x_1 > 0$ .

Potom rovnica  $x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$  nadobudne tvar  $x_{n+1} = ax_n$ , teda každý ďalší člen postupnosti  $x_{n+1}$  je  $a$ -násobkom predchádzajúceho člena  $x_n$ . Dosadením  $b = 0$  teda vzniká z našej rovnice Geometrická postupnosť.

Predpokladajme, že  $b = 0$  a  $a > 0$ , teda rovnica (\*) má tvar  $x_{n+1} = a \times x_n$ , čiže sa jedná o geometrickú postupnosť  $x_n = ax_{n-1}$ , kde  $a$  je koeficientom geometrickej postupnosti.

V prípade, že  $a = 1$  dostávame  $x_n = x_{n-1}$ .

Ďalej skúmame prípad, kedy je  $a = 0$ . Prvých pár členov vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}x_2 &= bx_1 \\x_3 &= \frac{b}{2}x_2 = \frac{b}{2}bx_1 = \frac{b^2}{2}x_1 \\x_4 &= \frac{b}{3}x_3 = \frac{b^3}{3!}x_1 \\&\vdots \\x_n &= \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}x_1 \\x_{n+1} &= \frac{b^n}{(n)!}x_1\end{aligned}$$

Čo sa podobá na Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti.

Položme  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$ , potom  $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = x_1 e^b \Rightarrow x_1 = e^{-b}$

Môžeme teda prehlásiť, že ak  $x_1 = e^{-b}$ , potom riešením rovnice  $x_{n+1} = (a + \frac{b}{n}) x_n$  kde  $a = 0$ ,  $b > 0$  je Poissonovo rozdelenie  $Po(\lambda)$  s parametrom  $\lambda = b$ .

Metódou matematickej indukcie sme teda dokázali, že  $x_n \sim Po(\lambda)$ , keďže každý ďalší člen  $x_{n+1} \sim Po(\lambda)$ .

Ďalej skúmame prípad, kedy  $a \in (0; 1)$ . Z pôvodnej rovnice teda :

$$\begin{aligned}x_2 &= (a + b)x_1 \\x_3 &= (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\x_4 &= (a + \frac{b}{3})x_3 = (a + \frac{b}{3})(a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\&\vdots \\x_n &= (a + \frac{b}{n-1})(a + \frac{b}{n-2}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\x_{n+1} &= (a + \frac{b}{n})(a + \frac{b}{n-1}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\x_{n+1} &= \frac{a^n}{n!}(n + \frac{b}{a})(n - 1 + \frac{b}{a}) \dots (2 + \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a})x_1,\end{aligned}$$

kde  $x_1$  je prvým členom postupnosti. Vychádzajúc z  $a + b > 0$  nech  $1 + \frac{b}{a} = \alpha > 0$   
 $x_{n+1} = \frac{a^n}{n!}(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots (1 + \alpha)\alpha x_1$

Po rozšírení pravej strany jednotkou v tvare  $\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$  dostávame :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{a^n (n+\alpha-1)!}{n!(\alpha-1)!} x_1 \\x_{n+1} &= a^n \binom{n+\alpha-1}{n} x_1 \\x_{n+1} &= \binom{n+\alpha-1}{n} (1-a)!^\alpha a^n = Pr(x=n),\end{aligned}$$

kde  $x_1 = (1-a)^\alpha \Rightarrow x_1 = (1-a)^{1+\frac{b}{a}}$  Môžeme teda povedať, že  $x_{n+1} \sim NB(2, 9)$ , čiže  $x_{n+1} \sim NB(1+\frac{b}{a}; a)$ , čo je negatívne binomické rozdelenie, pričom  $a \in (0; 1)$ ,  $a+b > 0 \Rightarrow b \in (0; \infty)$ ,  $x_1 = (1-a)^{a+\frac{b}{a}}$ . Matematickou dedukciou je teda dokázané, že to platí aj pre  $x_n$ .

Následne je potrebné sa zaoberať prípadom, keď  $a < 0$ . Nesmieme však zabudnúť na podmienku  $a+b=0$ . Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo  $z$  také, že  $a+\frac{b}{z+1}=0$ . V tomto prípade platí, že pre všetky  $n \geq z+1$   $x_{n+1}=0$ . Keďže  $\frac{b}{n} \rightarrow 0$  a  $b > 0$ ,  $a+\frac{b}{n} \leq 0$  pre všetky dostatočne veľké  $n$ . Ak  $z$  neexistuje, potom zvolenie  $n$  je minimum tak  $a+\frac{b}{n} < 0$ , dostaneme  $x_{n+1} < 0$ , čo je rozpor. Môžeme teda písať  $z = -(1+\frac{b}{a})$ , potom :

$$\begin{aligned}n=1 \quad x_2 &= (a+b)x_1 \\n=2 \quad x_3 &= (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&\vdots \\n=m \quad x_{m+1} &= (a+\frac{b}{m})(a+\frac{b}{m-1}) \dots (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&= \frac{a^m}{m!} (m+\frac{b}{a})(m-1+\frac{b}{a}) \dots (2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})x_1 \\&= \frac{a^m}{m!} (-z+m-1)(-z+m-2) \dots (-z+1)(-z)x_1 \\&= (-1)^m \frac{a^m}{m!} (m-1-z)(m-2-z) \dots (1-z)z * x_1 \\&= \binom{z}{m} (-a)^m x_1\end{aligned}$$

Nech je  $A = -a > 0$ . Ak  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$  a  $x_{n+1} = 0$  pre  $n \geq z+1$  potom

$$x_1 \sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = 1$$

Podľa binomickej formuly  $\sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = (1+A)^z$ , potom  $x_1 = (1+A)^{-z}$ .  
 Vzhľadom k tomu môžeme každé kladné číslo zapísať ako  $A = \frac{p}{1-p}$ ,  
 kde  $p \in (0, 1)$ . Potom  $x_1 = (1 + \frac{p}{1-p})^{-z} = (1-p^z) \Rightarrow x_{n+1} = \binom{z}{n} p^n (1-p^{z-n})$   
 a to môžeme zapísať ako  $X \sim \text{Bin}(z, \frac{p}{1-p})$



## 4 Závěr

### Literatúra

- [1] *Prágerová, A.:* **Diferenční rovnice.** Polytechnická knižnice, Praha 1971.