



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY

Analýza diferenčnej rovnice

Autori:

Matejko Peter

Mudrák Ľuboš

Rehák Tomáš

Zárecký Martin

Boďa Michal

Kapusta Peter

28. novembra 2013

Obsah

1	Zadanie	2
2	Definície	2
2.1	Pojem diferencia	2
2.2	Pojem diferenčná rovnica	2
2.2.1	Typy diferenčných rovníc	2
2.2.2	Rekurentná formula	3
3	Vypracovanie	4
3.1	Triviálne riešenie	4
3.2	Všeobecné riešenie	4
3.3	Závislosť od hodnôt a, b	4
4	Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika	8
4.1	Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$	8
4.2	Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$	8
4.3	Geometrické rozdelenie $Ge(p)$	8
4.4	Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$	9
5	Záver	10

1 Zadanie

V závislosti od hodnôt a a b analyzujte riešenia danej diferenčnej rovnice $x_{n+1} = (a + \frac{b}{n}) x_n$ kde a a b sú reálne čísla, také, že $a + b > 0$. Výsledky ilustrujte na jednoduchých príkladoch.

Budeme skúmať dopady zmeny jednotlivých premenných a a b na riešenia danej diferenčnej rovnice.

2 Definície

2.1 Pojem diferenca

Definícia 2.1. Je daný bod x_0 a číslo $h > 0$. Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná v bodoch x_0 a $x_0 + h$. *Diferencia funkcie $f(x)$ v bode x_0* je číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

2.2 Pojem diferenčná rovnica

2.2.1 Typy diferenčných rovníc

Definícia 2.2. (Diferenčné rovnice 1. typu) Nech pre všetky $x \in M$ je definovaná funkcia $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$. Rovnica tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0,$$

v ktorej neznámou funkciou $y = \varphi(x)$, nazývame diferenčnú rovnicu k -tého rádu a 1. typu definovanú v M .

Partikulárnym riešením tejto rovnice v M nazveme každú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu.

Všeobecným riešením nazývame množinu všetkých partikulárnych riešení.

Definícia 2.3. (Diferenčné rovnice 2. typu) Nech je pre všetky $x \in M$ definovaná funkcia

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}), \text{ kde } y_{x+j} = \varphi(x+j) \text{ } j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Rovnicu tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0,$$

v ktorej neznáma funkcia $y_x = \varphi(x)$, nazývaná *diferenčná rovnica 2. typu* definovaná v M . Ak je závislosť g na y_x a y_{x+k} nekonštantná hovoríme, že rovnica je k -tého rádu. Riešenie rovnice v M nazývame každú funkciu $y_x = \varphi(x)$, ktorá pre všetky $x \in M$ spĺňa danú rovnicu. K tomu je nutné, aby definičný obor funkcie $\varphi(x)$ obsahoval všetky $x \in M$ a taktiež body $x+1, x+2, \dots, x+k$.

2.2.2 Rekurentná formula

Rekurentnú formulu vieme získať z diferenčnej rovnice vyjadrením $(n+k)$ -tého člena pomocou k predchádzajúcich členov rovnice.

Majme danú diferenčnú rovnicu:

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0.$$

1. Nech definičný obor tejto rovnice sú prirodzené čísla $n = 1, 2, 3, \dots$ a ďalej zavedme všeobecnejšie označenie pre členy postupnosti: $y_n = a_n$, takže rovnicu vieme prepísať do tvaru

$$g(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0.$$

Predpokladajme, že túto rovnicu vieme jednoznačne rozriešiť vzhľadom k a_{n+k} :

$$a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}),$$

kde G je funkcia, ktorú sme dostali riešením pôvodnej rovnice. Týmto sme dostali všeobecný rekurentný vzorec pre postupnosť a_n , v ktorom je $(n+k)$ -ty člen vyjadrený pomocou k predchádzajúcich členov $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$ a premennej n .

2. Pozrime sa na riešenie, keď máme vopred dané (ľubovoľné) čísla a_1, a_2, \dots, a_k . Vieme, že po dosadení členov do funkcie G vypočítame jednoznačne člen

$$a_{k+1} = G(1, a_1, a_2, \dots, a_k),$$

ďalším dosadením vypočítame

$$a_{k+2} = G(2, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}) \text{ atd'.$$

Všeobecný n -tý člen a_n dostaneme vypočítaním elementárnej funkcie n a daných k prvých čísiel a_1, a_2, \dots, a_k . Táto funkcia je práve partikulárnym riešením diferenčnej rovnice s počiatočnými podmienkami a_1, a_2, \dots, a_k .

Touto druhou úvahou sa súčasne znovu potvrdzuje, že všeobecné riešenie rovnice k -teho rádu $a_{n+k} = G(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$ má obsahovať k všeobecných konštánt, ktoré je možno si ľubovoľne zvoliť.

3 Vypracovanie

Popis problému

$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$, kde $a, b \in R$, $a + b > 0$. Ide o rekurentný vzorec pre postupnosť.

Vypísanie prvých členov postupnosti

$$n = 1 : \quad x_2 = (a + b)x_1$$

$$n = 2 : \quad x_3 = \left(a + \frac{b}{2}\right)x_2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

$$n = 3 : \quad x_4 = \left(a + \frac{b}{3}\right)x_3 = \left(a + \frac{b}{3}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

$$n = 4 : \quad x_4 = \left(a + \frac{b}{4}\right)x_4 = \left(a + \frac{b}{4}\right)\left(a + \frac{b}{3}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

$$n = k - 1 : \quad x_k = \left(a + \frac{b}{k-1}\right)x_{k-1} = \left(a + \frac{b}{k-1}\right)\left(a + \frac{b}{k-2}\right) \dots \left(a + \frac{b}{2}\right)(a + b)x_1$$

3.1 Triviálne riešenie

Nech $x_1 = 0$.

Potom dostávame triviálne riešenie $x_{n+1} = 0$, čiže každý člen postupnosti bude mať hodnotu 0. Ďalej budeme predpokladať, že $x_1 > 0$ a teda sa budeme zaoberať závislosťou od hodnôt a, b .

3.2 Všeobecné riešenie

$x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$, $n \geq 1$ a nech $a + \frac{b}{n} = f(n)$, potom $x_{n+1} = f(n)x_n$, kde $n = 1 + k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_n = f(n-1)x_{n-1}$$

$$x_{n-1} = f(n-2)x_{n-2}$$

$$x_{n-2} = f(n-3)x_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-(k-1)} = f(n-k)x_{n-k}$$

, a teda $x_2 = f(1)x_1$.

3.3 Závislosť od hodnôt a, b

Nech $b = 0$, $x_1 > 0$.

Potom rovnica $x_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) x_n$ nadobudne tvar $x_{n+1} = ax_n$, teda každý ďalší člen postupnosti x_{n+1} je a -násobkom predchádzajúceho člena x_n . Dosadením $b = 0$ teda vzniká z našej rovnice **geometrická postupnosť**.

Predpokladajme, že $b = 0$ a $a > 0$, teda rovnica (*) má tvar $x_{n+1} = a \times x_n$, čiže sa jedná o geometrickú postupnosť $x_n = ax_{n-1}$, kde a je koeficientom geometrickej postupnosti. V prípade, že $a = 1$ dostávame $x_n = x_{n-1}$.

Ďalej skúmame prípad, kedy je $a = 0$. Prvých pár členov vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}x_2 &= bx_1 \\x_3 &= \frac{b}{2}x_2 = \frac{b}{2}bx_1 = \frac{b^2}{2}x_1 \\x_4 &= \frac{b}{3}x_3 = \frac{b^3}{3!}x_1 \\&\vdots \\x_n &= \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}x_1 \\x_{n+1} &= \frac{b^n}{(n)!}x_1\end{aligned}$$

Čo sa podobá na Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti.

Položme $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$, potom $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = x_1 e^b \Rightarrow x_1 = e^{-b}$.

Môžeme teda prehlásiť, že ak $x_1 = e^{-b}$, potom riešením rovnice $x_{n+1} = (a + \frac{b}{n}) x_n$ kde $a = 0$, $b > 0$ je **Poissonovo rozdelenie** $Po(\lambda)$ s parametrom $\lambda = b$.

Metódou matematickej indukcie sme teda dokázali, že $x_n \sim Po(\lambda)$, keďže každý ďalší člen $x_{n+1} \sim Po(b)$.

Ďalej skúmame prípad, kedy $a \in (0; 1)$. Z pôvodnej rovnice teda :

$$\begin{aligned}x_2 &= (a + b)x_1 \\x_3 &= (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\x_4 &= (a + \frac{b}{3})x_3 = (a + \frac{b}{3})(a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\&\vdots \\x_n &= (a + \frac{b}{n-1})(a + \frac{b}{n-2}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\x_{n+1} &= (a + \frac{b}{n})(a + \frac{b}{n-1}) \dots (a + \frac{b}{2})(a + b)x_1 \\x_{n+1} &= \frac{a^n}{n!}(n + \frac{b}{a})(n - 1 + \frac{b}{a}) \dots (2 + \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a})x_1,\end{aligned}$$

kde x_1 je prvým členom postupnosti.

Vychádzajúc z $a + b > 0$ nech $1 + \frac{b}{a} = \alpha > 0$

$$x_{n+1} = \frac{a^n}{n!}(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots (1 + \alpha)\alpha x_1$$

Po rozšírení pravej strany jednotkou v tvare $\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!}$ dostávame :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{a^n (n+\alpha-1)!}{n!(\alpha-1)!} x_1 \\x_{n+1} &= a^n \binom{n+\alpha-1}{n} x_1 \\x_{n+1} &= \binom{n+\alpha-1}{n} (1-a)!^\alpha a^n = Pr(x=n),\end{aligned}$$

kde $x_1 = (1-a)^\alpha \Rightarrow x_1 = (1-a)^{1+\frac{b}{a}}$ Môžeme teda povedať, že $x_{n+1} \sim NB(2, 9)$, čiže $x_{n+1} \sim NB(1+\frac{b}{a}; a)$, čo je negatívne binomické rozdelenie, pričom $a \in (0; 1)$, $a+b > 0 \Rightarrow b \in (0; \infty)$, $x_1 = (1-a)^{a+\frac{b}{a}}$. Matematickou dedukciou je teda dokázané, že to platí aj pre x_n .

Následne je potrebné sa zaoberať prípadom, keď $a < 0$. Nesmieme však zabudnúť na podmienku $a+b=0$. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo z také, že $a+\frac{b}{z+1}=0$. V tomto prípade platí, že pre všetky $n \geq z+1$ $x_{n+1}=0$. Keďže $\frac{b}{n} \rightarrow 0$ a $b > 0$, $a+\frac{b}{n} \leq 0$ pre všetky dostatočne veľké n . Ak z neexistuje, potom zvolenie n je minimum tak $a+\frac{b}{n} < 0$, dostaneme $x_{n+1} < 0$, čo je rozpor. Môžeme teda písať $z = -(1+\frac{b}{a})$, potom :

$$\begin{aligned}n=1 \quad x_2 &= (a+b)x_1 \\n=2 \quad x_3 &= (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&\vdots \\n=m \quad x_{m+1} &= (a+\frac{b}{m})(a+\frac{b}{m-1}) \dots (a+\frac{b}{2})(a+b)x_1 \\&= \frac{a^m}{m!} (m+\frac{b}{a})(m-1+\frac{b}{a}) \dots (2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})x_1 \\&= \frac{a^m}{m!} (-z+m-1)(-z+m-2) \dots (-z+1)(-z)x_1 \\&= (-1)^m \frac{a^m}{m!} (m-1-z)(m-2-z) \dots (1-z)z * x_1 \\&= \binom{z}{m} (-a)^m x_1\end{aligned}$$

Nech je $A = -a > 0$. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = 1$ a $x_{n+1} = 0$ pre $n \geq z+1$ potom

$$x_1 \sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = 1$$

Podľa binomickej formuly $\sum_{n=0}^z \binom{z}{n} A^n = (1+A)^z$, potom $x_1 = (1+A)^{-z}$.
 Vzhľadom k tomu môžeme každé kladné číslo zapísať ako $A = \frac{p}{1-p}$,
 kde $p \in (0, 1)$. Potom $x_1 = (1 + \frac{p}{1-p})^{-z} = (1-p^z) \Rightarrow x_{n+1} = \binom{z}{n} p^n (1-p^{z-n})$
 a to môžeme zapísať ako $X \sim \text{Bin}(z, \frac{p}{1-p})$.

4 Využitie rozdelení pravdepodobností v poisťovníctve a teórii rizika

Výskyt poisťných plnení je náhodný proces a teda nie je možné poznať ako sa bude vyvíjať. Pre poisťovňu je dôležité tento proces aspoň predpovedať, pretože na základe toho musí stanoviť výšku poisťného pre jednotlivé zmluvy a takisto výšku rezerv. Súhrn strát ktoré poisťovňa utrpí môžeme vyjadriť vzorcom:

$$S(t) = \sum_{j=1}^N (t)X_j, \text{ (prevsetky)} t \geq 0$$

$S(t)$ – súhrn strát

$X(j)$ – náhodná premenná predstavujúca výskyt poisťnej udalosti, náhodné premenné $X(j)$ sú nezávislé, ale vieme o nich, že sú z jedného rozdelenia pravdepodobnosti

$N(t)$ – diskretná náhodná premenná

Pri predpovedaní výpočtu poisťného je dôležité nájsť vhodné rozdelenie pre počet poisťných plnení a takisto rozdelenie výšky poisťných plnení. Jednotlivé poisťné udalosti sú náhodné a je možné predpokladať aj ich nezávislosť pre konkrétne zmluvy. V prípade počtu plnení sú známe diskretné rozdelenia, ktoré sú na ich popisovanie najvhodnejšie.

4.1 Binomické rozdelenie $Bi(n, p)$

Opisuje počet výskytu určitej náhodnej udalosti v n nezávislých pokusoch, pričom daný jav má stále rovnakú pravdepodobnosť p .

Náhodná premenná N má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n; p$ práve vtedy, ak pravdepodobnosť, že pri n nezávislých pokusoch nastane pozorovaný jav práve k krát, má tvar:

$$p_N(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \text{ pre } k = 1, 2, \dots, n.$$

4.2 Poissonovo rozdelenie $Po(\lambda)$

Toto rozdelenie používame na aproximáciu málo pravdepodobných náhodných udalostí pri veľkom počte nezávislých opakovaní experimentu.

Náhodná premenná N má Poissonovo rozdelenie s parametrom λ , práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

4.3 Geometrické rozdelenie $Ge(p)$

Pri tomto rozdelení nezávisle opakujeme pokus, pričom pravdepodobnosť, že náhodná udalosť nastane, je p . Pokus budeme opakovať toľkokrát, kým prvýkrát

nastane daná udalosť. Náhodná premenná N teda bude predstavovať počet opakovaní, kým nastala pozorovaná udalosť. Náhodná premenná N má geometrické rozdelenie s parametrom p práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = p(1 - p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

4.4 Negatívne binomické rozdelenie $NBi(m, p)$

Toto rozdelenie vychádza z geometrického rozdelenia, teda znova nezávisle opakujeme pokusy, pričom tentokrát neskončíme vtedy, keď náhodná udalosť nastane prvýkrát, ale až vtedy, keď nastane m -krát. Náhodná premenná N má negatívne binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami m a p práve vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$p_N(k) = \binom{k + m - 1}{m - 1} p^m (1 - p)^k, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots$$

5 Záver

Literatúra

- [1] *Prágerová, A.: Diferenční rovnice.* Polytechnická knižnice, Praha 1971.