Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"

Розрахункова графічна робота

"Виконання кусочно-лінійної апроксимації"

Варіант №99

Виконав
студент групи ІО-91
Діденко Владислав

Київ - 2021

99	$-\lvert 2-x^3 \rvert - \ln 3$	$-\ln(x+3)-2$	-1	+1	x_{min}

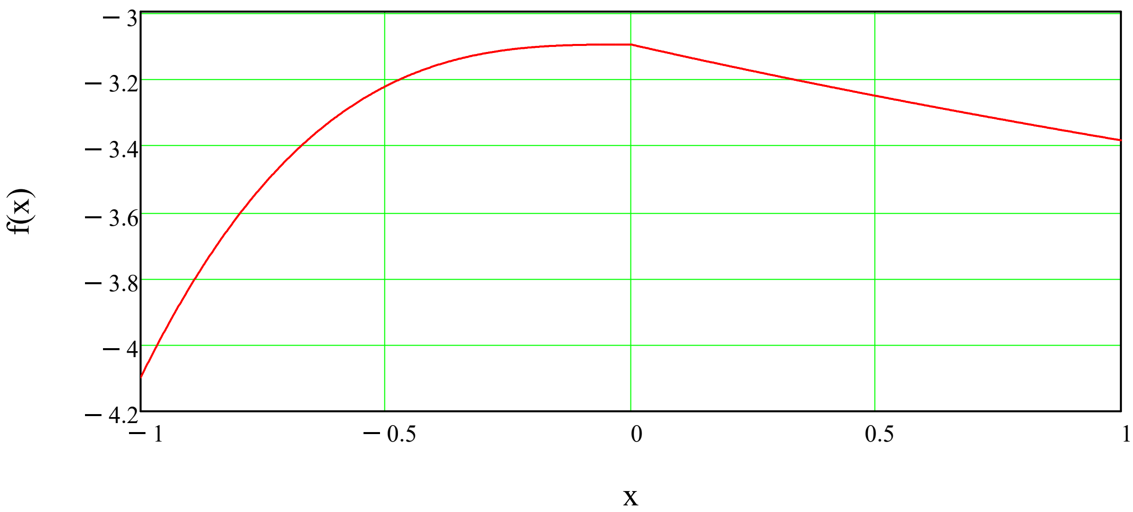
1. Побудувати графік функції y=f(x) для діапазону зміни аргументу $x_{min}<=x<=x_{max}$. Значення y=f(x), x_{min} та x_{max} узяти з таблиці варіантів.

$$f(x) := \begin{cases} -\left|2-x^3\right| - \ln(3) & \text{if } x \le 0 \\ -\ln(x+3) - 2 & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$$

$$x_{max} := 1$$

$$x_{min} := -1$$

Графік функції f(x)



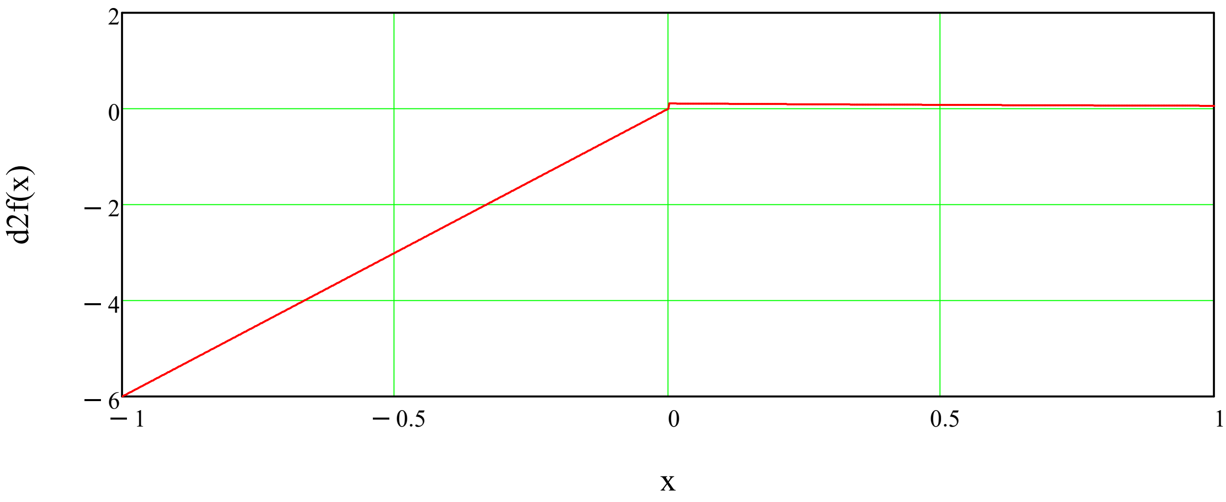
2. Визначити другу похідну функції $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ та побудувати її графік для діапазону зміни аргументу $x_{min}<=x<=x_{max}$.

$$d2f(x) := \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) & \text{if } x \le 0 \\ \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$$

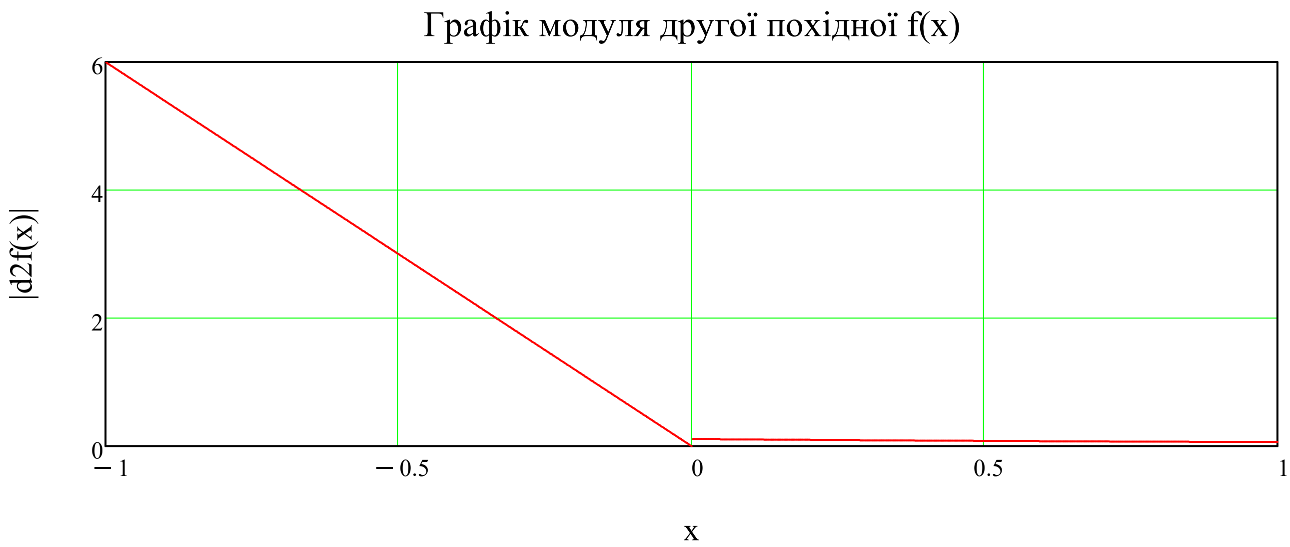
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(-\left|2-x^3\right| - \ln(3)\right) \rightarrow 6\cdot x\cdot \mathrm{signum}\left(2-x^3, 0\right) - 18\cdot x^4\cdot \Delta\left(2-x^3\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(-\ln(x+3) - 2\right) \rightarrow \frac{1}{(x+3)^2}$$

Графік другої похідної f(x)



3. Побудувати графік модулю другої похідної функції $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ для діапазону зміни аргументу x_{min}<=x<=x_{max}.



4. Проаналізувати графік неліниної залежності функції y=f(x), з'ясувавши характер опуклості та вгнутості функції по частинам, наявність точок перегинання та наявність точок розриву першого роду другої похідної функції.

4.1 Точки перегину

$d2f(xa) = 0$

$x0 := Find(xa)$

$x0 = 4.2218 \times 10^{16}$ - точка перегину.

4.2 Опуклість та вгнутість

Функція f(x) опукла на інтервалі (x_{min} ; 0)
Функція f(x) вгнута на інтервалі (0 ; x_{max})

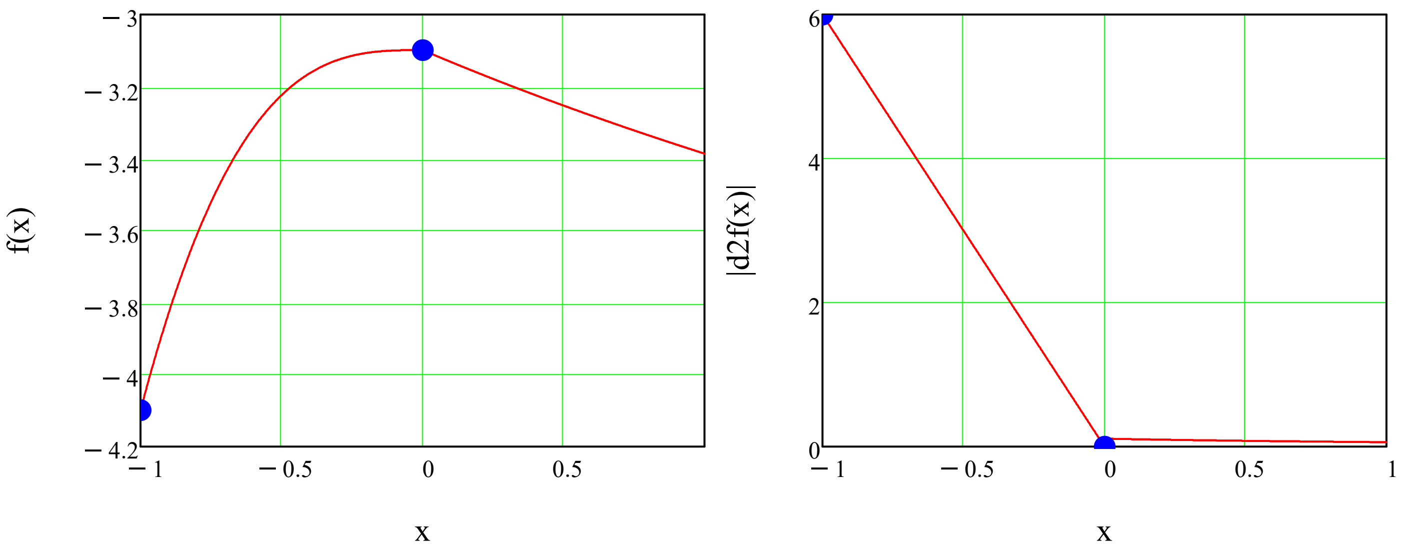
4.3 Точки розриву першого роду другої похідної функції

Функція має одну точку розриву першого роду: x = 0

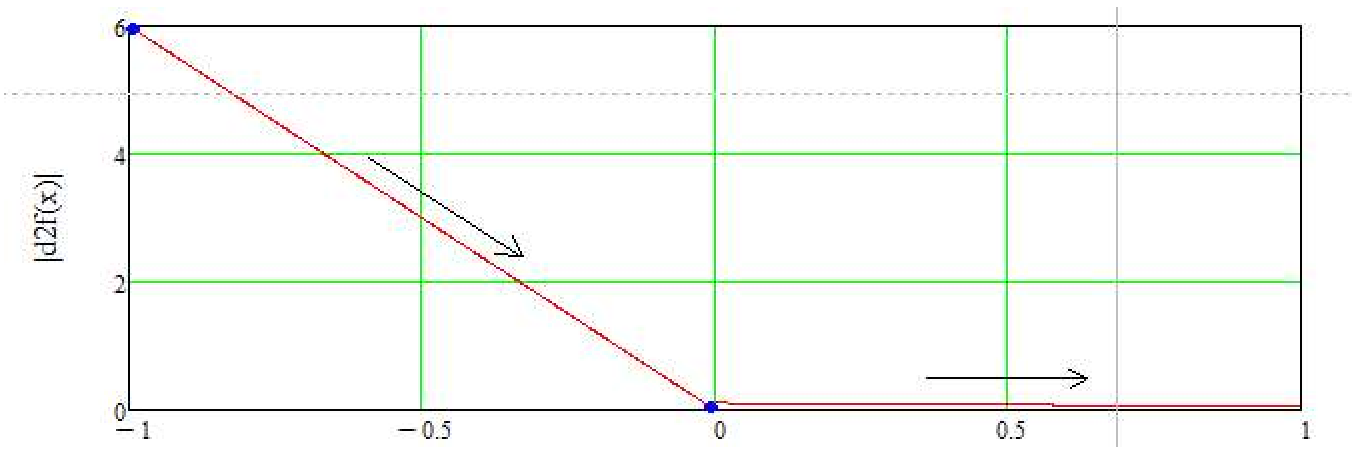
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(-\left|2 - x^3\right| - \ln(3)\right) \to 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}(-\ln(x+3) - 2) \to \frac{1}{9}$$

5. Обрати початкову точку(або початкові точки) апроксимації для подальших розрахунків, зазначивши її (або їх) на графіках $y = f(x)$ та $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$, визначивши абсцису цієї початкової точки $x0^1$ (або абсциси початкових точок $x0^1, x0^2$ тощо).

$x_{01} := x_{min} \quad x_{02} := 0$



6. По графіку $\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|$ обрати напрямок (або напрямки) розрахунків значень $h_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1,n) від початкової точки(або від початкових точок) та зазначити його(або їх) на цьому графіку у вигляді стрілок над графіком $\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|$.



7. Визначити методику розрахунку значень h_i (i=1,n) та обрати формулу для розрахунку значень: $h_i = \sqrt{\dfrac{8\Delta f_{max}}{A_i}}$ або $h_i = \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$, де A_i - максимальне по модулю значення другої похідної на i-й частині ломаної лінії, що розраховується.

Для розрахунку h_i (i=1,n) обираємо формулу $\sqrt{\dfrac{8\Delta f_{max}}{A_i}}$ для точок, що лежать біля точки перегину, та $\sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$ для інших

8. Підібрати таке значення похибки Δf_{max}, при якому в результаті розрахунків h_i (i=1,n) отримаємо n=8 або n=9, тобто отримаємо апроксимуючу ломану лінію з 8 або з 9 частин. Виконати розрахунок усіх значень h_i (i=1,n) та здійснити нумерацію вузлів (вершин ломаної лінії), починаючи з номера 0.

$\Delta f_{max} := 0.0049685$ $\qquad X_0 := x_{min} = -1$ $\qquad A_1 := \left|d2f\left(X_0\right)\right| = 6$

$h_1 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_1}} = 0.1151$ $\qquad X_1 := X_0 + h_1 = -0.8849$ $\qquad A_2 := \left|d2f\left(X_1\right)\right| = 5.3094$

$h_2 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_2}} = 0.1224$ $\qquad X_2 := X_1 + h_2 = -0.7625$ $\qquad A_3 := \left|d2f\left(X_2\right)\right| = 4.5752$

$h_3 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_3}} = 0.1318$ $\qquad X_3 := X_2 + h_3 = -0.6307$ $\qquad A_4 := \left|d2f\left(X_3\right)\right| = 3.7843$

$h_4 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_4}} = 0.1449$ $\qquad X_4 := X_3 + h_4 = -0.4858$ $\qquad A_5 := \left|d2f\left(X_4\right)\right| = 2.9147$

$h_5 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_5}} = 0.1651$ $\qquad X_5 := X_4 + h_5 = -0.3206$ $\qquad A_6 := \left|d2f\left(X_5\right)\right| = 1.9238$

$h_6 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_6}} = 0.2033$ $\qquad X_6 := X_5 + h_6 = -0.1173$ $\qquad A_7 := \left|d2f\left(X_6\right)\right| = 0.7041$

$h_7 := \sqrt{\dfrac{8\Delta f_{max}}{A_7}} = 0.2376$ $\qquad X_7 := X_6 + h_7 = 0.1203$ $\qquad A_8 := \left|d2f\left(X_7\right)\right| = 0.1027$

Оскільки вийшли за межі, то $\quad X_7 := 0$

$X_8 := x_{max}$ $\qquad A_9 := \left|d2f\left(X_8\right)\right| = 0.0625$

$h_8 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_9}} = 1.1278$ $\qquad X_7 := X_8 - h_8 = -0.1278$

Оскільки вийшли за межі, то $\quad X_7 := 0$

9. Здійснити розрахунок абсцис $x_i(1,n)$, починаючи з x_0, початкових ординат $y_i^p(0,n)$, вузлів апроксимації(вершин ломаної лінії), що належать функції y=f(x), та кінцевих ординат $y_i^k(0,n)$, вузлів апроксимації з урахуванням корекції, яку здійснюють для отримання знакозмінної похибки апроксимації.

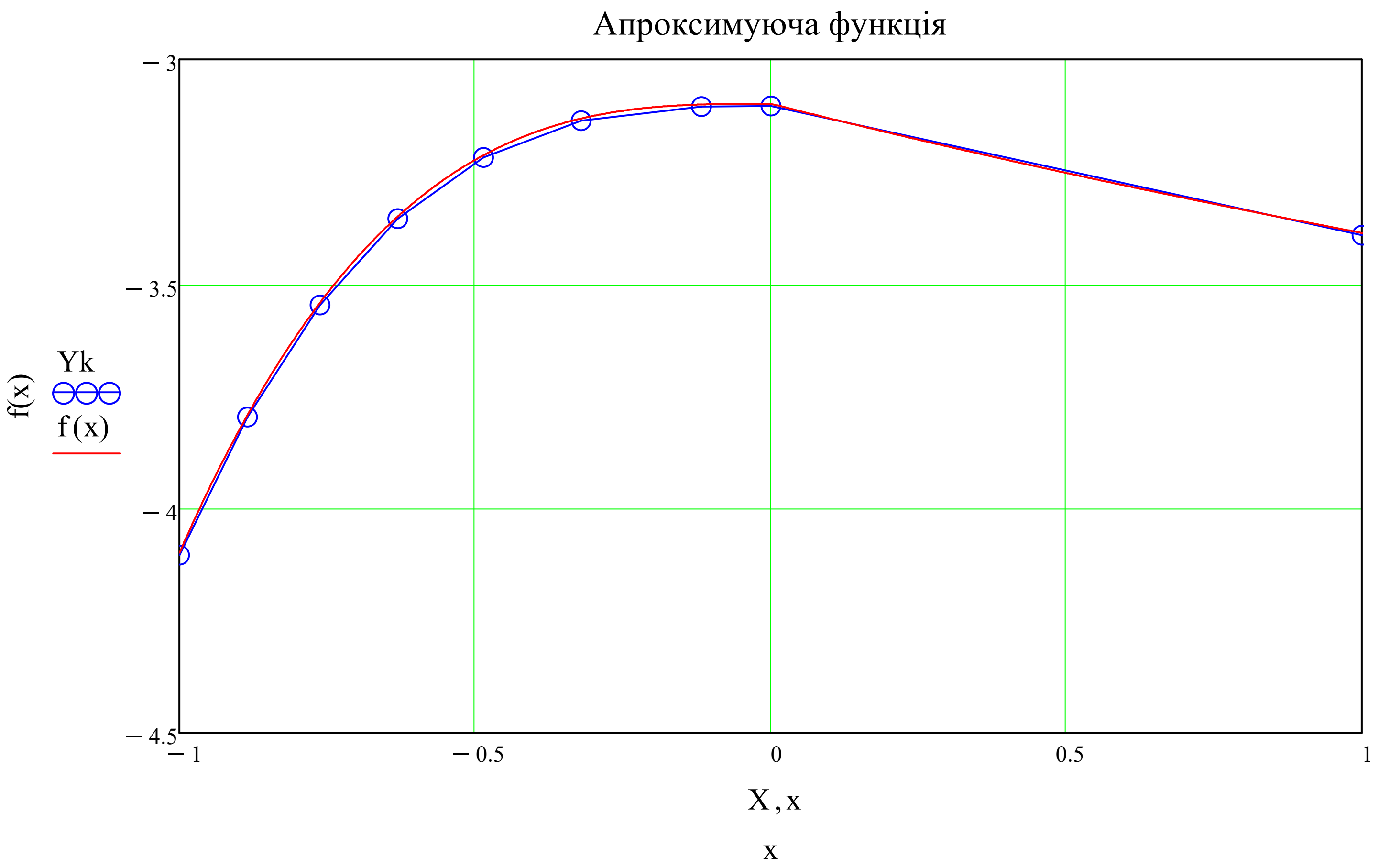
Виходячи з 8-го завдання, шукаємо ординати вершин ломаної лінії:

$j := 0 .. 8$

$Yp_j := f\left(X_j\right)$ $\qquad Yk_j := Yp_j - \Delta f_{max}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.8849 \\ -0.7625 \\ -0.6307 \\ -0.4858 \\ -0.3206 \\ -0.1173 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Yp = \begin{pmatrix} -4.0986 \\ -3.7915 \\ -3.542 \\ -3.3495 \\ -3.2132 \\ -3.1316 \\ -3.1002 \\ -3.0986 \\ -3.3863 \end{pmatrix} \qquad Yk = \begin{pmatrix} -4.1036 \\ -3.7965 \\ -3.547 \\ -3.3545 \\ -3.2182 \\ -3.1365 \\ -3.1052 \\ -3.1036 \\ -3.3913 \end{pmatrix}$$

10. Побудувати графік апроксимуючої функції (ломаної лінії) y=φ(x), використовуючи отримані значення $x_i(1,n)$ та $y_i^k(0,n)$.



11. Здійснити розрахунок значень кутових коефіцієнтів (значень тангенсів кутів нахилу), k_i(i=1,n) лінійних частин ломаної лінії.

Знаходимо кутові коефіцієнти шляхом ділення різниці ординат на різницю абсцис:

$i := 0..7 \qquad k_i := \dfrac{Yk_i - Yk_{i+1}}{X_i - X_{i+1}} \qquad k_i =$

2.6679
2.0393
1.4602
0.9402
0.4945
0.1542
0.0138
-0.2877

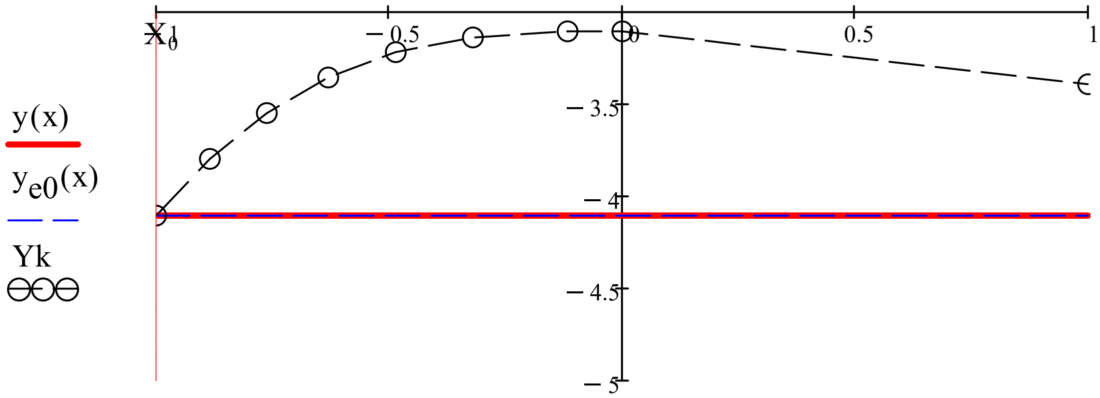
12. Виконати розкладання апроксимуючої функції (ломаної лінії) y=φ(x) на окремі доданки (лінійні та елементарні нелінійні {лінійні з обмеженням на нульовому рівні)}, починаючи з точки, яка має абсцису x_0^a. Значення x_0^a узяти з таблиці варіантів.

13. Над кожним елементарним нелінійним доданком зазначити його квадрант (I, II, III, IV) та режим {на відкривання (на В) чи на закривання (на З)}

$$x_{min} = -1 \qquad X_0 = -1$$

$$x_{a_0} := X_0$$

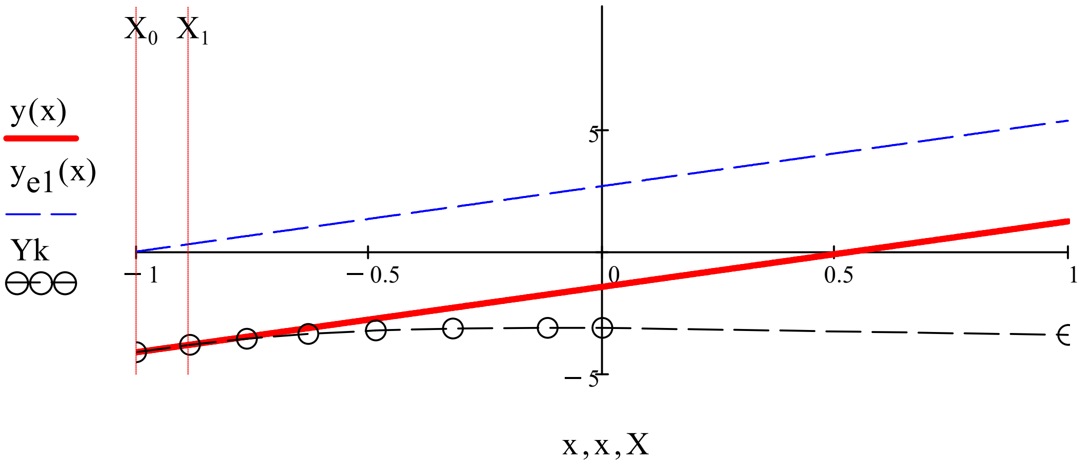
$$y_{e0}(x) := Yk_0 \qquad y(x) := y_{e0}(x)$$



$$b_0 := k_0 = 2.6679$$

$$y_{e1}(x) := b_0 \cdot (x - X_0)$$

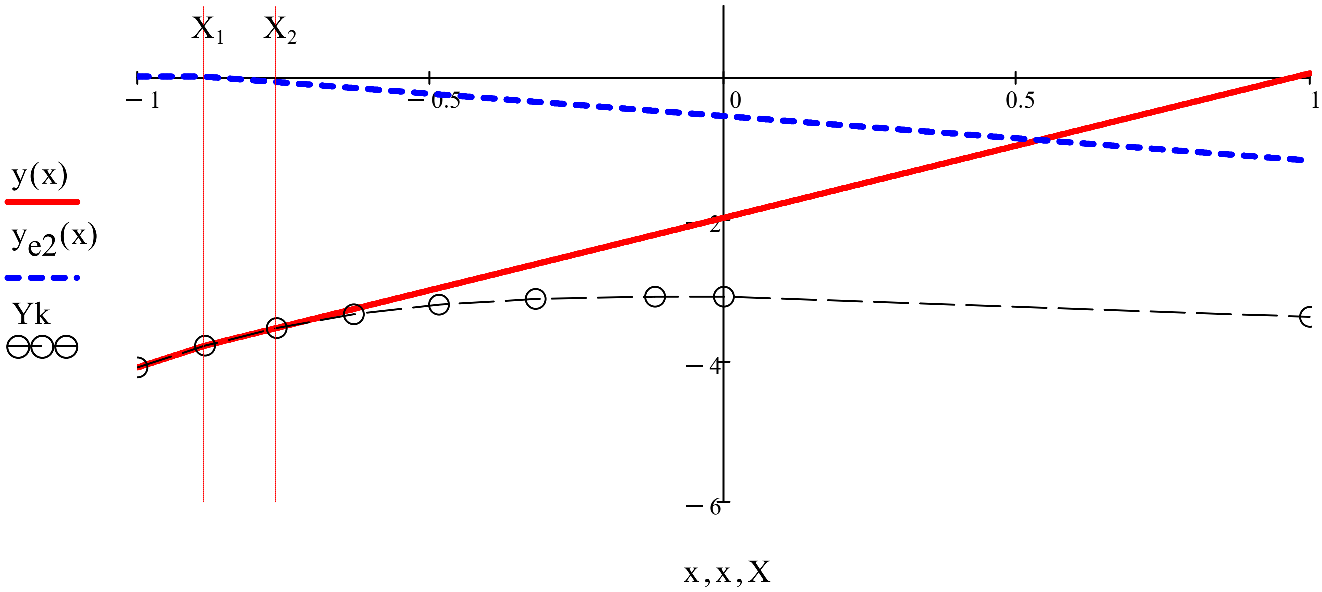
$$y(x) := y(x) + y_{e1}(x)$$



$$b_1 := k_1 - k_0 = -0.6287$$

$$y_{e2}(x) := \begin{cases} b_1 \cdot (x - X_1) & \text{if } x - X_1 \ge 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e2}(x)$$

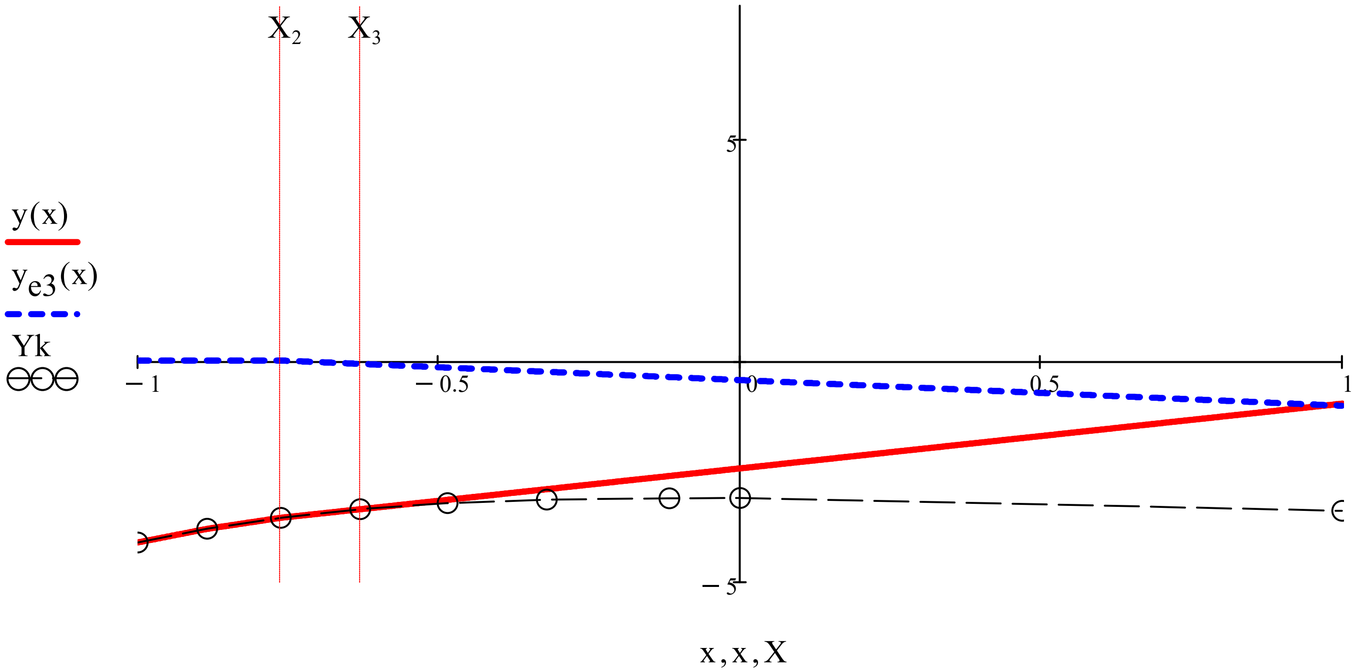


IV квадрант, на закривання

$$b_2 := k_2 - k_1$$

$$y_{e3}(x) := \begin{cases} b_2 \cdot (x - X_2) & \text{if } x - X_2 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e3}(x)$$

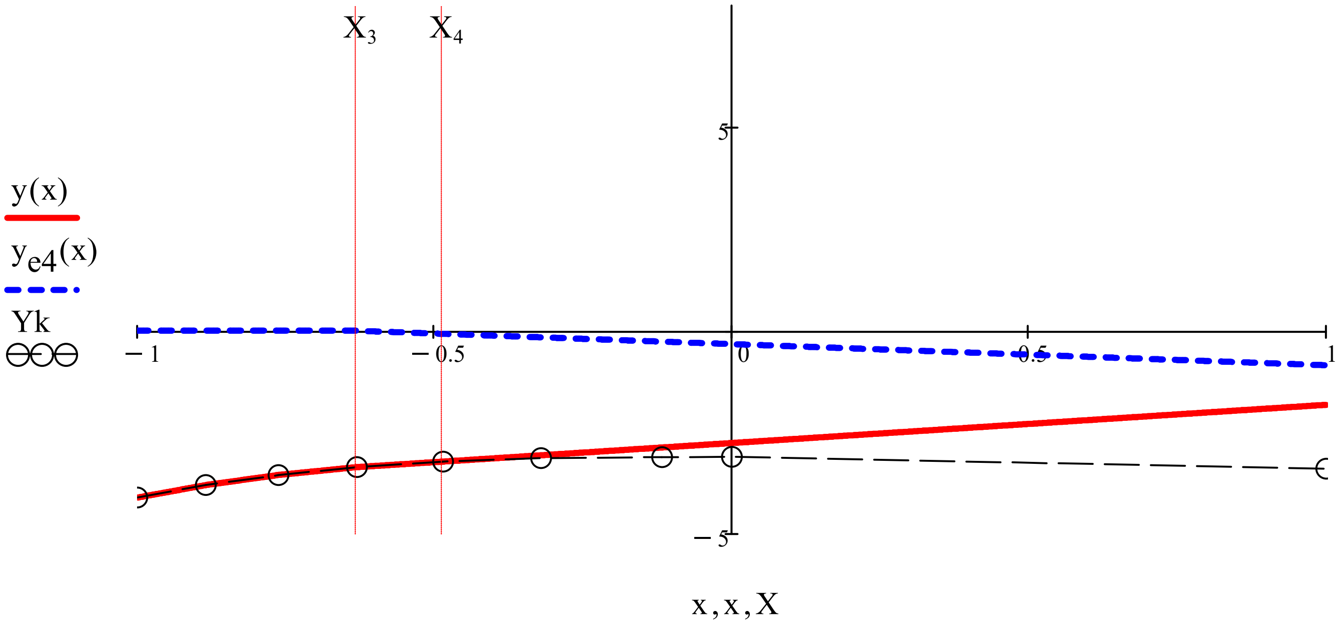


IV квадрант, на закривання

$$b_3 := k_3 - k_2$$

$$y_{e4}(x) := \begin{cases} b_3 \cdot (x - X_3) & \text{if } x - X_3 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e4}(x)$$

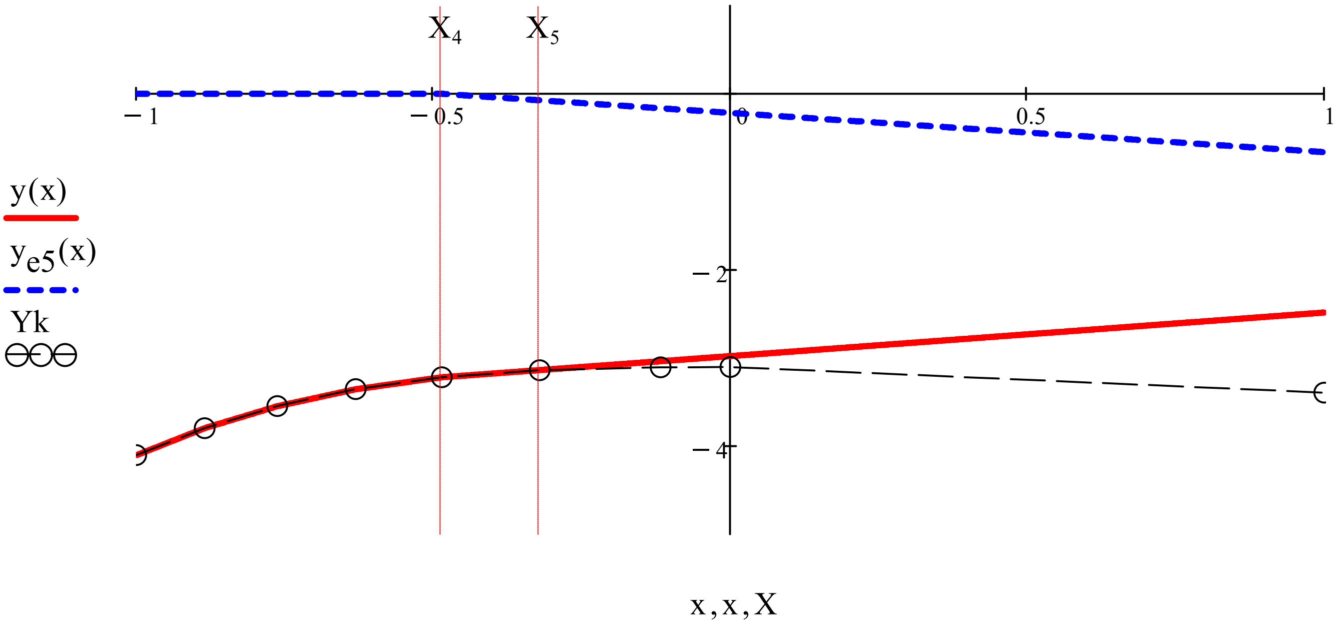


IV квадрант, на закривання

$$b_4 := k_4 - k_3$$

$$y_{e5}(x) := \begin{cases} b_4 \cdot (x - X_4) & \text{if } x - X_4 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e5}(x)$$

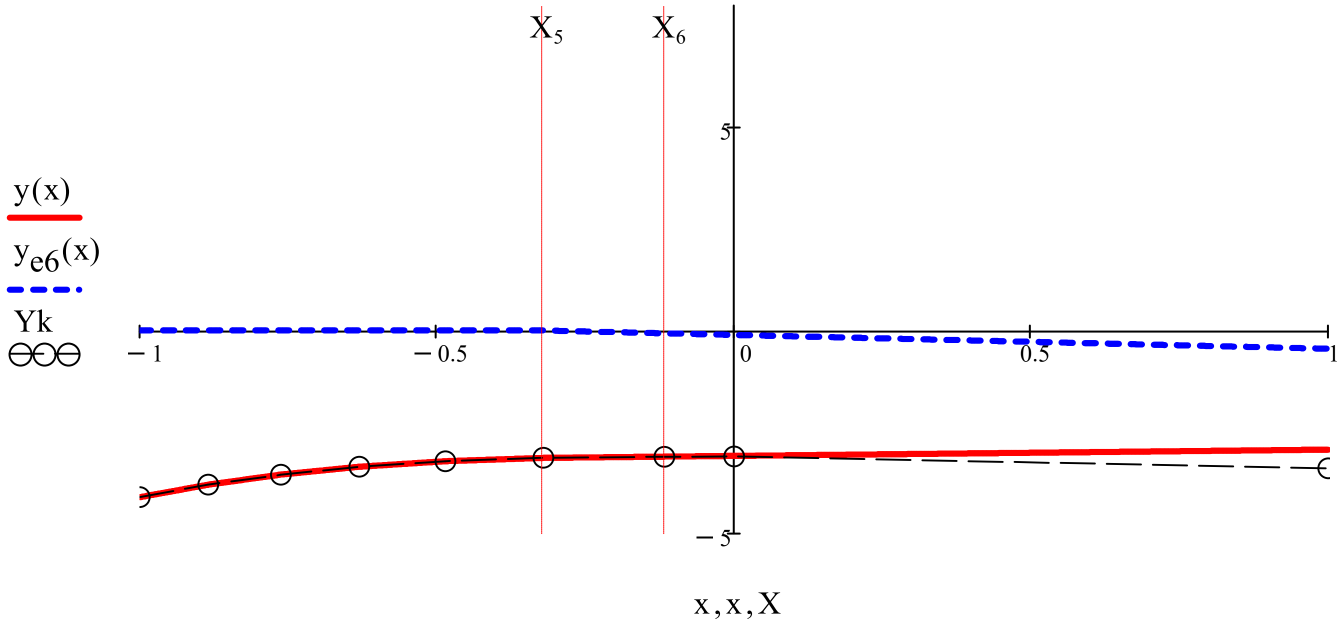


IV квадрант, на закривання

$$b_5 := k_5 - k_4$$

$$y_{e6}(x) := \begin{cases} b_5 \cdot (x - X_5) & \text{if } x - X_5 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e6}(x)$$

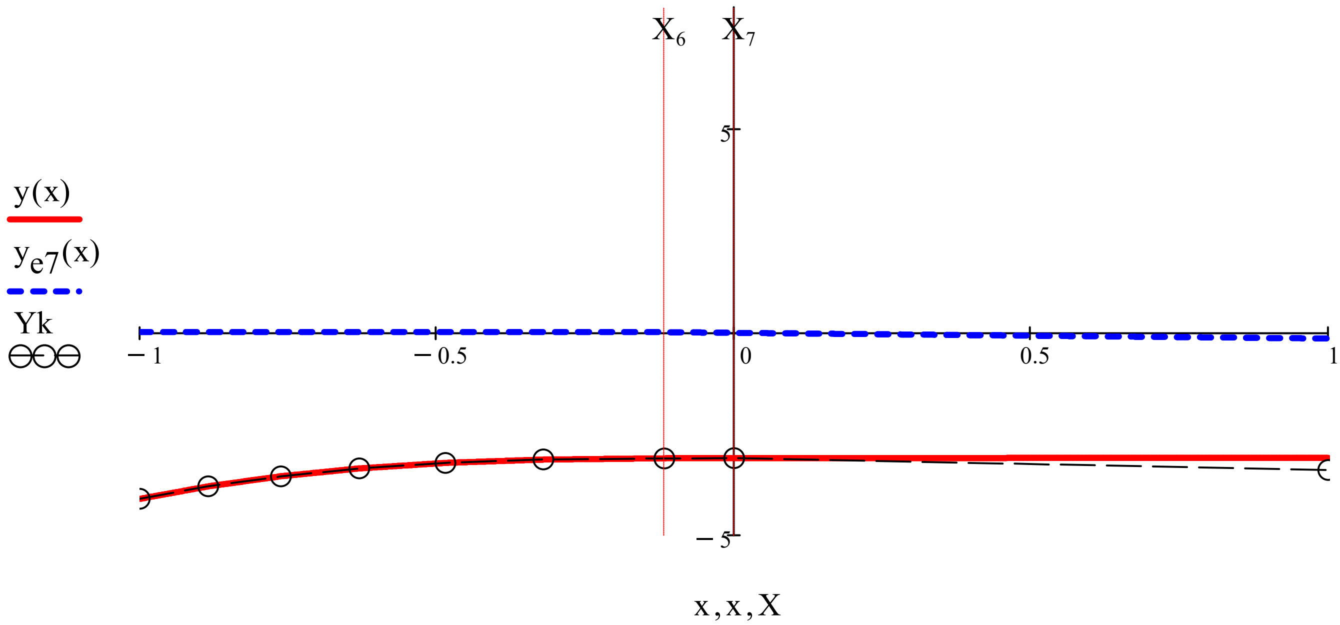


IV квадрант, на закривання

$$b_6 := k_6 - k_5$$

$$y_{e7}(x) := \begin{vmatrix} b_6 \cdot (x - X_6) & \text{if } x - X_6 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e7}(x)$$

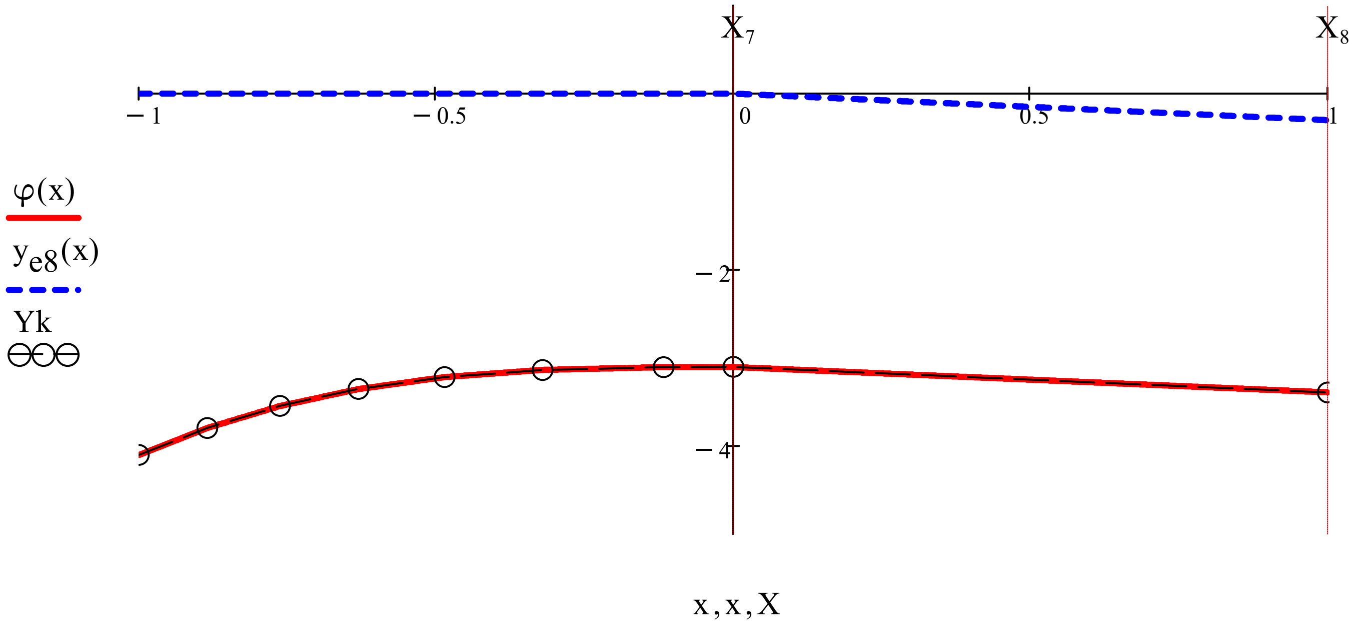


IV квадрант, на закривання

$$b_7 := k_7 - k_6$$

$$y_{e8}(x) := \begin{vmatrix} b_7 \cdot (x - X_7) & \text{if } x - X_7 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$\varphi(x) := y(x) + y_{e8}(x)$$



IV квадрант, на відкриття

14. Здійснити розрахунок наступних значень:

- значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку
- значення $b_0=k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку
- значення $b_i=k_i-k_{i-1}$ та X_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку

1) значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку:

$$\varphi\left(x_{a_0}\right) = -4.1036$$

2) значення $b_0=k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку:

$$b_0 = 2.6679 \qquad k_0 = 2.6679 \qquad X_0 = -1$$

3) значення $b_i=k_i-k_{i-1}$ та X_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку:

$k1 := 1 .. 7$

$Xref_{k1} := X_{k1}$

$b_{k1} =$

-0.6287
-0.5791
-0.52
-0.4456
-0.3403
-0.1404
-0.3015

$Xref_{k1} =$

-0.8849
-0.7625
-0.6307
-0.4858
-0.3206
-0.1173
0