Отчёт по лабораторной работе

Лабораторная №3

Дерябина Мария Сергеевна

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть модели боевых действий - модели ланчестера. Вариант 37.

2 Задание

Между страной Х и страной У идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна имеет армию численностью 895000 человек,а в распоряжении страны армия численностью в 577000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t) и $Q(t)$ непрерывными функциями.

Необходимо построить графики изменения численности войск армии Х и армии У для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками.

$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$
$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$
Где $a = 0,34, b = 0,93, c = 0,54, h = 0,29, P(t) = 2sin(t), Q(t) = cos(t) + 3$

2. Модель ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$
$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$
Где $a = 0,31, b = 0,88, c = 0,41, h = 0,41, P(t) = 2sin(t), Q(t) = cos(t) + 3$

3 Теоретическая справка

В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

В случае, когда боевые действия идут между регулярными войсками, модель описывается следующим образом:

$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$

$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

В случае, когда боевые действия идут с участием регулярных войск и партизанских отрядов считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$

$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в первой системе.

В простейшей модели борьбы предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времент c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий.

Тогда модель принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение

$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$

$cxdx = bydy, cx^(2) - by^(2) = C$

Эволюция численности армий x и y проходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 3.1).

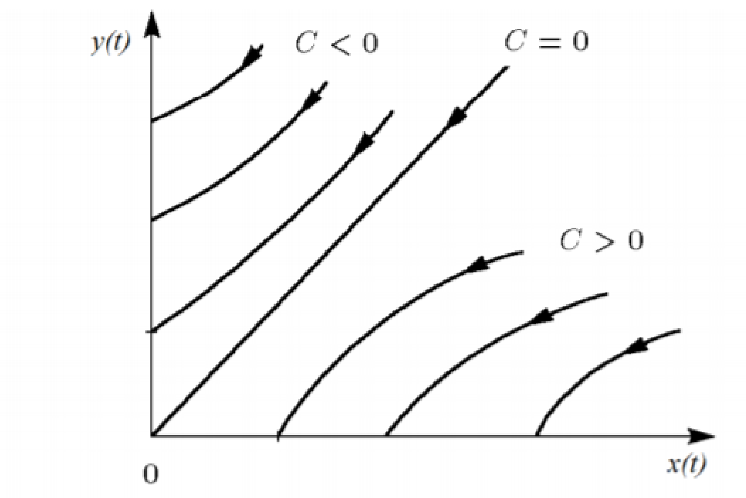

Figure 3.1: Первая модель

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, армия y выигрывает. Если начальная точка лежит ниже, выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases}$$

Эта система приводится к уравнению:

$$\frac{d}{dt}(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)) = 0$$

Оно имеет единственное решение при заданных начальных условиях:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0)) = C_1$$

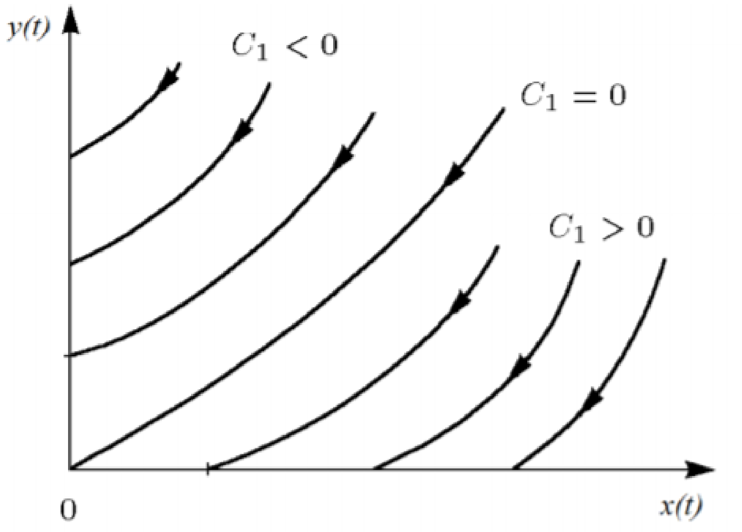

Figure 3.2: Вторая модель

Из рис. 3.2 видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Чтобы одержать победу, партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск $(x(0))$, должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

Рассмотренные простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, широко распространенным при описании многих естественно научных объектов.

4 Выполнение лабораторной работы

Для работы я использовала язык Python. Я задала необходимые начальные параметры и определила функции P(t) и Q(t). Написала функцию, которая описывает систему дифференциальных уравнений. Для решения системы использовала функцию solve_ivp() из библиотеки scipy.

4.1 Первая модель

На рис. 4.1 показан график изменения численности армий в первой модели

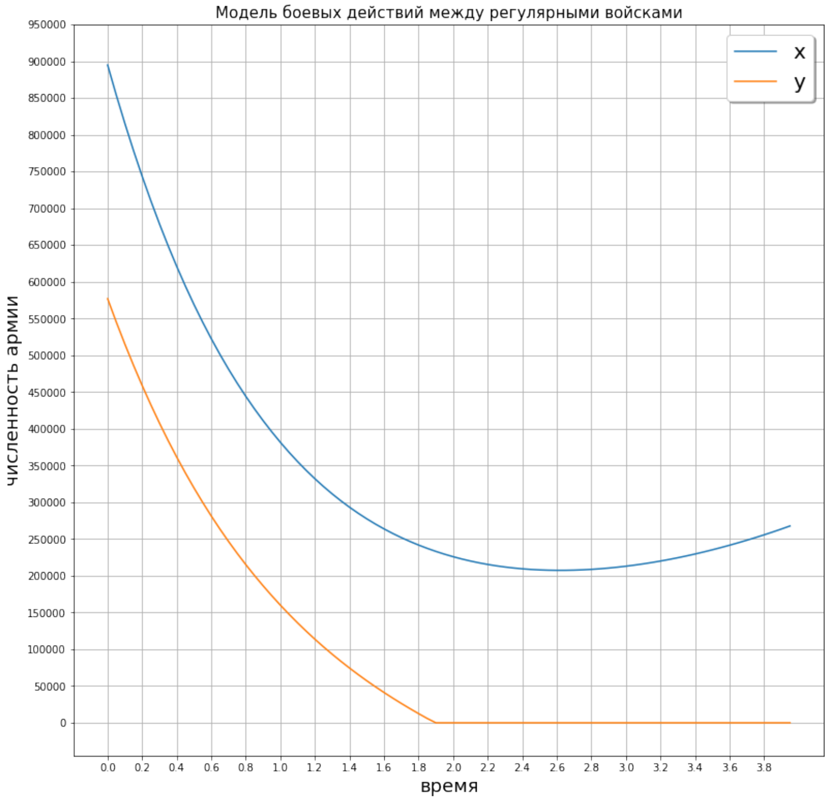

Figure 4.1: Модель боевых действий между регулярными войсками

Как видно из рисунка, в момент времени t=1.9 армия X уничтожила армию Y.

4.2 Вторая модель

На рис. 4.2 показан график изменения численности армий во второй модели

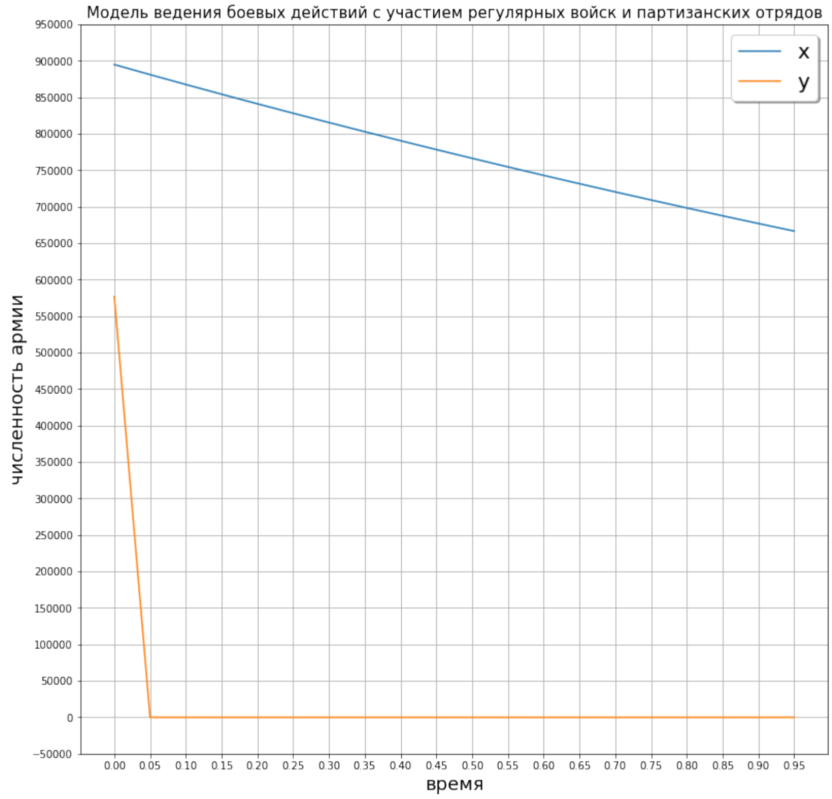

Figure 4.2: Модель ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Из рисунка видно, что уже к моменту времени t=0.05 регулярная армия X уничтожила партизанские отряды

5 Вывод

Я построила и проанализировала модели боевых действий, научилась решать системы дифференциальных уравнений на языке Python.