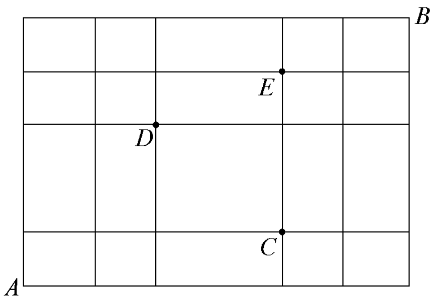
試題

如圖，6 條直街，5 條橫街，從 $A$ 走到 $B$，




(1)過 $C$ 的捷徑有幾條？　(2)不經過 $C$，$D$，$E$ 中任一點的捷徑有幾條？

【編碼】020999　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)40;(2)14

【解析】

(1)由不盡相異物的排列法則，可知過 $C$ 的捷徑有 $\frac{4!}{3!1!}\times\frac{5!}{2!3!}=4\times10=40$ 條．

(2)《方法 1》

設過 $C$，$D$，$E$ 的捷徑分別在 $S_1$，$S_2$，$S_3$ 集合中，則 $|S_1|=40$（由(1)已作出），

$|S_2|=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{3!2!}=6\times10=60$，$|S_3|=\frac{6!}{3!3!}\times\frac{3!}{2!}=20\times3=60$，

$|S_1\cap S_2|=0$，$|S_2\cap S_3|=\frac{4!}{2!2!}\times2\times\frac{3!}{2!}=6\times2\times3=36$，

$|S_3\cap S_1|=\frac{4!}{3!}\times1\times\frac{3!}{2!}=4\times3=12$，$|S_1\cap S_2\cap S_3|=0$，

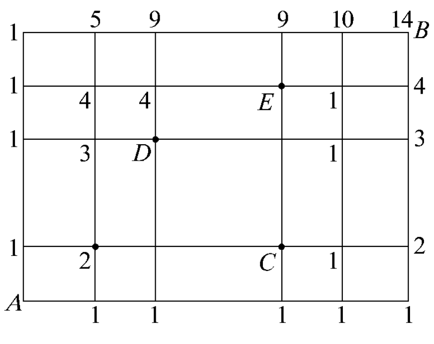
所以 $|S_1\cup S_2\cup S_3|=40+60+60-36-12=112$，

由 $A$ 到 $B$ 的捷徑，共有 $\frac{9!}{5!4!}=126$，

所以由 $A$ 到 $B$ 的捷徑，不過 $C$，$D$，$E$ 中任一點的捷徑，共有 $126-112=14$．

《方法 2》

由 $A$ 到 $B$ 走捷徑，逐一加上可分之路，如圖：




將 0，1，2，3 四個數字，依各種順序排列作成四位數，可作成幾個四位數？

【編碼】021000　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】18

【解析】
$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$．

首位不可填 0

用 1，2，3，4，5，6，7，8，9 等 9 個數字，寫出數字不重複的三位數，則： (1)這些數有幾個？(2)這些數中有多少個偶數？

【編碼】021001　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)504;(2)224

【解析】
(1)$P^9_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$．
(2)$4 \times 8 \times 7 = 224$．

先填末位

將 $aabbcc$ 排成一列，相同字母不相鄰的排法有幾種？

【編碼】021002　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

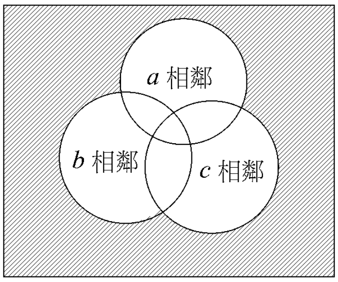
【解答】30

【解析】
$aabbcc$

$a$ 相鄰 $\Rightarrow$ $\boxed{aa}\,bbcc$ 有 $\dfrac{5!}{2!2!}$ 種，$a$ 相鄰且 $b$ 相鄰 $\Rightarrow$ $\boxed{aa}\,\boxed{bb}\,cc$ 有 $\dfrac{4!}{2!}$ 種，

$a$ 相鄰且 $b$ 相鄰且 $c$ 相鄰 $\Rightarrow$ $\boxed{aa}\,\boxed{bb}\,\boxed{cc}$ 有 3！種，

故共有 $\dfrac{6!}{2!2!2!} - 3 \cdot \dfrac{5!}{2!2!} + 3 \cdot \dfrac{4!}{2!} - 3! = 90 - 3 \times 30 + 3 \times 12 - 6 = 30$ 種．




有相同的足球 3 個，籃球 2 個，手球 1 個，
(1)分給 8 位小朋友，每人最多一個，則分法有多少種？
(2)將 6 個球排成一列且同一類的球不相鄰，則排法有多少種？

【編碼】021003　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)1680;(2)10

【解析】

(1)視 6 個球分給 8 位小朋友，每人最多一個，其中有 2 人沒有分到球，

視爲 3 個足球，2 個籃球，1 個手球，2 個「0」的不盡相異物排列，

∴ 排法有 $\frac{8!}{3!2!2!}=1680$ 種．

(2)先將 3 個足球排成一列，排法 1 種，而後在兩足球之間安插其他的球，

就可使足球不相鄰，但安插過程中，同一間隔不可放 2 個籃球，可分成下列四類：

①↓足↓足↓足，有 $\frac{3!}{2!}=3$ 種．

②足↓足↓足↓，有 $\frac{3!}{2!}=3$ 種．

③足↓↓足↓足，有 $2!\times 1=2$ 種．

④足↓足↓↓足，有 $1\times 2!=2$ 種．

故共有 $3+3+2+2=10$ 種．

甲、乙、丙三人在排成一列的十個座位上任選坐三個，則：

(1)三人均相鄰的坐法有多少種？ (2)三人均不相鄰的坐法有多少種？

【編碼】021004 【難易】中 【出處】康熹自命題

【解答】(1)48;(2)336

【解析】

(1)10 個座位選三個相鄰的方法有

(1，2，3)，(2，3，4)，(3，4，5)，…，(7，8，9)，(8，9，10)等 8 種，

3 人入座的方法有 3！種，∴ 所求坐法有 $8\times 3!=48$ 種．

(2)10 個座位選三個，其中有 7 個空位，

可視爲 7 個空位的前後共 8 個間隔，任取 3 個給甲、乙、丙三人入座，

↓□↓□↓□↓□↓□↓□↓□↓

∴ 坐法有 $P_3^8=8\times 7\times 6=336$ 種．

用 0，1，2，3，4，5 等 6 個數字，重複選取 3 個作三位數，

(1)大於 230 者有幾個？

(2)其中奇數者有幾個？

(3)又這些奇數的和多少？

【編碼】021005 【難易】中 【出處】康熹自命題

【解答】(1)125;(2)63;(3)25299

【解析】

(1)三位數大於 230 的有

①□□□　有 $3 \times 6 \times 6 = 108$．

↑

(3，4，5)

②□　□　□ 有 $1 \times 2 \times 6 = 12$．

↑　↑

2　(4，5)

③□□□個位塡入 1，2，3，4，5 等 5 種．

↑ ↑

2 3

∴　共有 $108 + 12 + 5 = 125$ 個．

(2)三位數大於 230 的奇數者有

①　□　□　□

↑　↑

(3，4，5)　(1，3，5)　有 $3 \times 6 \times 3 = 54$．

②□　□　□

↑　↑　↑

2　(3，4，5) (1，3，5)　有 $1 \times 3 \times 3 = 9$．

∴　共有 $54 + 9 = 63$ 個．

(3)個位數之和 $= (3 \times 6 + 1 \times 3)(1 + 3 + 5) = 189$,

十位數之和 $= 3 \times 3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 10 + 1 \times 3 \times (3 + 4 + 5) \times 10 = 1710$,

百位數之和 $= 3 \times 6 \times (3 + 4 + 5) \times 100 + 3 \times 3 \times 2 \times 100 = 23400$,

∴　總和 $= 189 + 1710 + 23400 = 25299$．

---

用 1，2，3，4，5 等 5 個數字作四位數，數字可重複，且四位數字和爲 16（如 5542），則此種四位數有多少個？

【編碼】021006　【難易】中　【出處】康熹自命題

【解答】35

【解析】

四位數數字和爲 16 者有

(5，5，5，1)，(5，5，4，2)，(5，5，3，3)，(5，4，4，3)，(4，4，4，4)，

經排列後，可知共有 $\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{4!} = 4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ 個．

---

甲、乙、丙、丁、…等 8 人排成一列，規定甲在乙、丙、丁之左，戊在甲、乙、丙、丁之右，則 8 人的排法有多少種？

【編碼】021007　【難易】中　【出處】康熹自命題

【解答】2016

【解析】

甲、乙、丙、丁、戊五人的順序爲甲□□□戊，中間三個空格排入乙、丙、丁三人，

先將□□□□□與另外三人排列之，排法有$\dfrac{8!}{5!}$種，

而 5 個空格最左邊排甲，最右邊排戊，中間插乙、丙、丁空格的安插法有 $1\times1\times3!$種，

故所求排法共有$\dfrac{8!}{5!}\times3!\ =2016$ 種．

---

甲、乙、丙、丁、…等 7 人排成一列，則下列排列數各多少？

(1)甲、乙二人均不與丁相鄰．

(2)甲、乙、丙三人均不與丁相鄰．

(3)甲不排在前兩位，乙不排在後兩位．

【編碼】021008　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)2400;(2)1440;(3)2640

【解析】

(1)甲、乙二人不與丁相鄰的排法

$=$ 全部 $-$(甲丁相鄰) $-$ (乙丁相鄰) $+$ (甲乙均與丁相鄰)

$=7!-6!\times2!-6!\times2!+5!\times2!=5040-1440-1440+240=2400$．

(2)甲、乙、丙三人不與丁相鄰的排法

$=$ 全部 $-$(甲丁) $-$ (乙丁) $-$ (丙丁) $+$ (甲丁乙) $+$ (甲丁丙) $+$ (乙丁丙)

$-$(甲乙丙均與丁相鄰)

$=7!-6!\times2!\times3+5!\times2!\times3-0=1440$．

(3)甲不排 1，2 兩位，乙不排 6，7 兩位的排法

$=$ 全部 $-$(甲排 1，2 位) $-$ (乙排 6，7 位) $+$ (甲排 1，2 位且乙排 6，7 位)

$=7!-2\times6!-2\times6!+2\times2\times5!=2640$．

---

有渡船 3 艘，每艘限載 6 人，試求下列之安全渡法？

(1) 6 人同時渡河．

(2) 7 人同時渡河．

(3) 8 人同時渡河．

(4) 9 人同時渡河．

【編碼】021009　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)729;(2)2184;(3)6510;(4)19194

【解析】

(1)每船限載 6 人，渡船 3 艘，每人搭乘有 3 種方法，

∴　6 人同時渡河的搭乘方法有 $3^6=729$ 種．

(2)7 人渡河，因 7 人不得同乘一船而 7 人同乘一船的方式有 3 種，

∴　7 人渡河搭乘方法有 $3^7-3=2184$ 種．

(3)8 人渡河，超載的情形有二類：

①8 人同搭乘一船方法有 3 種．

②8 人中有 7 人同搭乘一船，另一人搭另外一船，

其方法有 $\dfrac{P_7^8}{7!}\times 3\times 2=8\times 3\times 2=48$ 種．

$\therefore$ 8 人安全渡河方法有 $3^8-3-48=6510$ 種．

(4)9 人渡河，超載的情形有四類：

①9 人同搭乘一船，其搭乘方法有 3 種．

②9 人中，8 人同乘一船，另一人搭乘另一船，其搭乘方法有 $\dfrac{P_8^9}{8!}\times 3\times 2=54$ 種．

③9 人中，7 人同乘一船，另二人同搭乘另一船，其搭乘方法有 $\dfrac{P_7^9}{7!}\times 3\times 2=216$ 種．

④9 人中，7 人同乘一船，另二人分開各搭一船，其搭乘方法有 $\dfrac{P_7^9}{7!}\times 3\times 2=216$ 種．

故 9 人安全渡河方法有 $3^9-3-54-216-216=19194$ 種．

將 $a$，$a$，$b$，$b$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$ 等字母全取排列，則同字母不相鄰的排法有多少種？

【編碼】021010　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】10200

【解析】

先排 $a$，$a$，$c$，$d$，$e$，$f$ 等 6 個字母，分兩類：$aa$ 相鄰與 $aa$ 不相鄰，

排好後再將 3 個 $b$ 安插於間隔中．

(1) $aa$ 相鄰

$\downarrow\ a\ \boxed{b}\ a\ \downarrow\ c\ \downarrow\ d\ \downarrow\ e\ \downarrow\ f\ \downarrow$

先將 1 個 $b$ 排在 $aa$ 中間，再從 6 個 $\downarrow$ 處取 2 個給 $b$ 排，

排法有 $5\,!\times\dfrac{P_2^6}{2!}=120\times 15=1800$．

(2) $aa$ 不相鄰，

$\downarrow\ a\ \downarrow\ c\ \downarrow\ d\ \downarrow\ e\ \downarrow\ a\ \downarrow\ f\ \downarrow$

從 7 個 $\downarrow$ 處取 3 個給 $b$ 排，

排法有 $4!\times\dfrac{P_2^5}{2!}\times\dfrac{P_3^7}{3!}=240\times 35=8400$，

故同字不相鄰排法有 $1800+8400=10200$．

從「*tennessee*」的 9 個字母中，任取 4 個字母排列之，則其排法有多少種？

【編碼】021011　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】163

【解析】

9 個字母有 4$e$，2$n$，2$s$，1$t$，任取 4 個排列的方法分成五類：

(1)四同：*eeee* 排法有 1 種．

(2)三同一異：

$eee\begin{cases} n \\ s \\ t \end{cases}$ 排法有 $3\times\dfrac{4!}{3!}=12$ 種．

(3)二同二同：

$\begin{cases} eenn \\ eess \\ nnss \end{cases}$ 排法有 $3\times\dfrac{4!}{2!2!}=18$ 種．

(4)二同二異：

$\begin{cases} ee \\ nn \\ ss \end{cases}\begin{cases} ns \\ nt \\ st \end{cases}$ 排法有 $3\times 3\times\dfrac{4!}{2!}=108$ 種．

(5)四異：*enst* 等 4 字母排列，排法有 $4!=24$ 種．

故所求的排法有 $1+12+18+108+24=163$ 種．

---

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚等 7 人排成一列，有幾種排法？

(1)甲、乙、丙完全不相鄰． (2)甲、乙、丙相鄰． (3)甲、乙、丙排奇數位． (4)甲、乙、丙不完全相鄰． (5)甲不排首位，乙不排第二位，丙不排第三位． (6)甲在乙的右邊，且甲在丙的右邊． (7)甲、乙、丙均不與丁相鄰．

【編碼】021012　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)1440;(2)720;(3)576;(4)4320;(5)3216;(6)1680;(7)1440

【解析】

(1)　丁　戊　己　庚

╲╱　╲╱　╲╱　╲╱　╲╱

$\Rightarrow$ 間隔插入法：$P^5_3\times 4!=1440$（種）.

(2)甲、乙、丙視爲一體：$\boxed{甲乙丙}$丁戊己庚　$\Rightarrow$　$5!\times 3!=720$．

(3)○□○□○□○

甲、乙、丙排 1、3、5、7 四個位置中的三個，

可挑(1、3、5)，(1、3、7)，(1、5、7)，(3、5、7)等四種方法，

再排列，其餘四人任排　∴　$4\times 3!\times 4!=576$（種）.

(4)不完全相鄰 $=$(全部)$-$(完全相鄰)$=7!-720=5040-720=4320$（種）.

(5)$7!-3\times 6!+3\times 5!-4!=3216$．

(6) $\dfrac{7!}{3!}\times 2!=1680$

$2!$ → 乙、丙可互換

(7)《方法 1》

丁○□□□□□

□□□□□○丁

丁在旁邊時，○先選，有 $2\times 3\times 5!=720$，

$3$ → ○排戊、己、庚

$2$ → 首位或末位

○丁○□□□□

丁在中間時，$5\times \underbrace{P_2^3}_{\text{戊、己、庚排入○的位置}}\times 4!=720$，

$5$：丁在第 2，3，4，5，6 位，5 種選法

共有 $720+720=1440$ 種．

《方法 2》

甲、乙、丙三人不與丁相鄰的排法

=全部 $-$(甲丁)$-$(乙丁)$-$(丙丁)$+$(甲丁乙)$+$(甲丁丙)$+$(乙丁丙)$-$(甲乙丙均與丁相鄰)

$=7!-6!\times 2!\times 3+5!\times 2!\times 3-0=1440$ ．

---

7 本書分給 10 個人，每人至多一本，

(1)書本相同有幾種分法？　(2)書本不同有幾種分法？

【編碼】021013　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)120;(2)604800

【解析】

(1) $\dfrac{10!}{7!3!}=120$（不盡相異物的排列）.

(2)視爲 7 本書置入 10 個不同的位置 $=P_7^{10}=604800$（種）.

---

渡船三隻，每隻可載 6 人，依下述條件，求其安全過渡的方法？

(1) 5 人過渡．　(2) 6 人過渡．　(3) 8 人過渡．

【編碼】021014　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)243;(2)729;(3)6510

【解析】

(1) $3^5=243$ ．

(2) $3^6=729$ ．

(3) $3^8-3-8\times \underline{3\times 2}=6510$ ．

$3\times 2$：(7，1，0)，(7，0，1)，(1，7，0)，(1，0，7)
(0，1，7)，(0，7，1)

$8$：8 人選 1 人坐一船

---

6 本相異的書，分給 4 個兒童，有幾種方法？

(1)任意分配．　(2)甲沒分到．　(3)甲至少得一本．　(4)甲恰好得一本．

【編碼】021015　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)4096;(2)729;(3)3367;(4)1458

【解析】

(1) $4^6=4096$（種）.

(2)甲沒有，只能分給其他三人，故有 $3^6 = 729$ 種．

(3)甲至少得一本之方法 ＝(任分)－(甲沒有) $= 4^6 - 3^6 = 4096 - 729 = 3367$（種）.

(4) $6 \times 3^5 = 1458$（種）.

其餘五本任分給其他三人

6 本書選一本給甲

---

甲、乙、丙、…、庚 7 人排成一列，求下列排法：

(1)甲、乙、丙不可分開．

(2)甲、乙、丙完全不相鄰．

(3)甲、乙、丙不完全相鄰．

(4)甲不排首位，乙不排第二位，丙不排第三位．

(5)甲在乙左方或甲在丙左方．

【編碼】021016　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)720;(2)1440;(3)4320;(4)3216;(5)3360

【解析】

(1)$\boxed{\text{甲乙丙}}$ 丁戊己庚

將甲乙丙視爲一體，與丁戊己庚排列有 5!種方法，

再看甲乙丙三人位置可互換有 3!種方法，故共有 $5! \times 3! = 720$ 種方法．

(2)　丁　戊　己　庚

∨　∨　∨　∨　∨

將甲乙丙排入打「∨」的位置，有 $P^5_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 種方法，

再排丁戊己庚有 $4! = 24$ 種方法，故共有 $P^5_3 \times 4! = 60 \times 24 = 1440$ 種方法．

(3)(全部排法)－(完全相鄰的方法) $= 7! - 720 = 4320$（種）.

(4)$7! - 3 \cdot 6! + 3 \cdot 5! - 4! = 3216$ 種．

(5) $\dfrac{7!}{3!} \times 4 = 3360$．

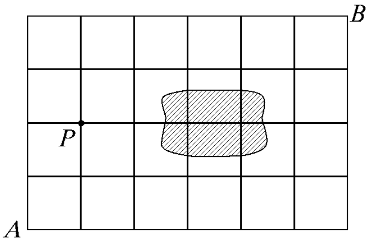
（甲乙丙之排法中，甲乙丙，甲丙乙，乙甲丙，丙甲乙，均滿足要求）

---

如圖，$A \to B$ 走捷徑，求：

(1)無障礙區時，必過 $P$ 之走法．

(2)不過障礙區之走法．



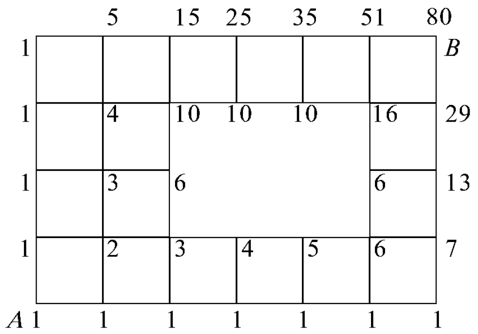

【編碼】021017　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)63;(2)80

【解析】

(1) $\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{7!}{2!\times 5!}=3\times 21=63$（種）.

(2)




共 80 種方法 .

有 10 個人排隊買電影票，票價每張 50 元，若這 10 個人中有 6 個人身上帶有 50 元鈔票，其餘 4 人只帶 100 元鈔票，今每個人限購一張票，問售票員不備零錢能將票順利售出而不發生找錢的困難的售票方法共有多少種？

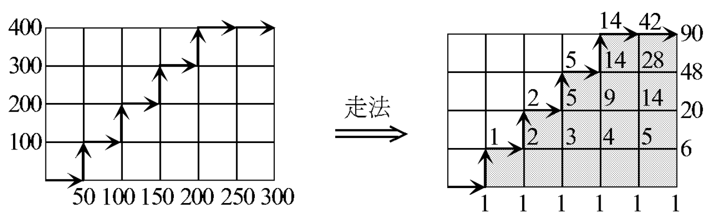
【編碼】021018　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】90

【解析】

10 人中有 6 人身上帶著 50 元，有 4 人帶著 100 元，

故售票員不備零錢能將票順利售出的方法相當於如圖捷徑的走法：




粗線右邊的走法均可，故售票法共有 90 種 .

有 6 個球投入 4 個箱子中，求下列投入法各多少種？

(1)球相同，箱子相同，每箱投入球數不限 .

(2)球不同，箱子不同，每箱投入球數不限 .

(3)球相同，箱子不同，每箱投入球數不限 .

(4)球相同，箱子不同，每箱至少投入一球 .

(5)球不同，箱子不同，每箱至少投入一球 .

【編碼】021019　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)9;(2)4096;(3)84;(4)10;(5)1560

【解析】

(1)球相同，箱子相同，則箱中投入球數決定其投入法有 (6，0，0，0)，(5，1，0，0)，

(4，2，0，0)，(4，1，1，0)，(3，3，0，0)，(3，2，1，0)，(3，1，1，1)，

(2，2，2，0)，(2，2，1，1)等，∴　共有 9 種投入法．

(2)球不同，箱子不同，則每一球均有 4 種不同投入法，∴　投入法有 $4^6 = 4096$ 種．

(3)球相同，箱子不同，則由(1)知(6，0，0，0)投入法有 $\dfrac{4!}{3!} = 4$ 種，

(5，1，0，0)：$\dfrac{4!}{2!} = 12$，(4，2，0，0)：$\dfrac{4!}{2!} = 12$，(4，1，1，0)：$\dfrac{4!}{2!} = 12$，

(3，3，0，0)：$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$，(3，2，1，0)：$4! = 24$，(3，1，1，1)：$\dfrac{4!}{3!} = 4$，

(2，2，2，0)：$\dfrac{4!}{3!} = 4$，(2，2，1，1)：$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$，

故投入法有 $4 + 12 + 12 + 12 + 6 + 24 + 4 + 4 + 6 = 84$ 種．

(4)球相同，箱子不同，每箱至少一球的投入法有(3，1，1，1)與(2，2，1，1)，

故投入法有 $\dfrac{4!}{3!} + \dfrac{4!}{2!2!} = 10$ 種．

(5)球不同，箱子不同，每箱至少一球的投入法 ＝(全部)－(有一箱沒有球)

$= 4^6 - (4 \times 3^6 - 6 \times 2^6 + 4 \times 1^6) = 4096 - 2916 + 384 - 4 = 1560$．

有 4 個<u>英國</u>人，2 個<u>美國</u>人，2 個<u>德國</u>人排成一列，要求同國籍者不相鄰的排法有多少種？

【編碼】021020　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】2304

【解析】

(1)先將 4 個<u>英國</u>人的位置以□□□□表之，2 個<u>美國</u>人的位置以△△表之，

2 個<u>德國</u>人的位置以○○表之，先排△△○○，排法有 $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 種，

全部列出有①△△○○　②○○△△

③△○△○　④○△○△

⑤△○○△　⑥○△△○

(2)將 4 個□安插於間隔中，使其同國籍不相鄰，

①↓△□△↓○□○↓　有 3 種

②↓○□○↓△□△↓　有 3 種

③↓△↓○↓△↓○↓　有 5 種

④↓○↓△↓○↓△↓　有 5 種

⑤↓△↓○□○↓△↓　有 4 種

⑥↓○↓△□△↓○↓　有 4 種，

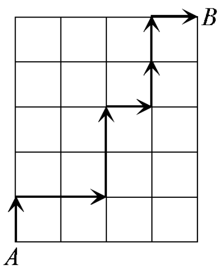
∴　「□」安插法有 $3 + 3 + 5 + 5 + 4 + 4 = 24$ 種．

(3)4 個□，2 個△，2 個○，同國不相鄰的排法有 24 種，

而將 4 個<u>英國</u>人填入 4□中排法有 4！種，2 個<u>美國</u>人填入 2△中排法有 2!種，

2 個<u>德國</u>人填入 2○中排法有 2!種，故所求的排法有 $24 \times 4! \times 2! \times 2! = 2304$ 種．

一塊長方形土地有如圖棋盤形街道，從 $A$ 到 $B$ 走捷徑，而所走過的路線恰好平分這塊土地的面積，試問走法有多少種？




【編碼】021021　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】12

【解析】

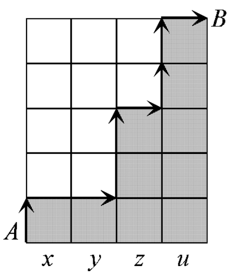
此長方形土地共有 $4\times5=20$ 個小正方形，平分此土地面積，

則每塊應含 10 個小正方形，令每一條捷徑下方的正方形個數爲 $x$，$y$，$z$，$u$，

則 $x+y+z+u=10$，且 $0\le x\le y\le z\le5$，此方程式每一組整數解表示一種走法，

例如，如圖陰影區域所示，$x=1$，$y=1$，$z=3$，$u=5$ 決定一種走法，方程式的整數解有

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| $z$ | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| $u$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |




共有 12 組解，即走法有 12 種．

用 0，1，2，3，4，5，6 七個數字中的四個做成四位數，問：

(1)共有幾個?

(2)偶數有幾個?

(3)奇數有幾個?

【編碼】021022　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)720;(2)420;(3)300

【解析】

(1)將 7 個數字任取 4 個的排列數扣除 0 在千位者即得，

0 在千位時，其餘三個位置由 1，2，…，6 中任取 3 個數字的排列數爲 $P_3^6$，

故總共的個數爲 $P_4^7-P_3^6=840-120=720$ ．

(2)個位數爲 0 之偶數有 $P_3^6=120$ 個，

個位數非 0 之偶數，

依序考慮其用過的數字、千位數、百位數、十位數， 則
個位數可為 2，4，6，
千位數不用 0 及用過的數字，則有 5 個數字可挑選，
百位數不用個位數及千位數，則有 5 個數字可挑選，
十位數不用個位數、千位數及百位數，則有 4 個數字可挑選，
由乘法原理知其個數為 $3 \times 5 \times 5 \times 4=300$，
故偶數共有 $120 + 300 = 420$ 個．

(3) $720-420=300$ ．

5 個男生，3 個女生排成一列，依下列情形，方法各幾種?
(1)男生全相鄰，女生也全相鄰．
(2)3 個女生不全相鄰．
(3)3 個女生中任意兩人都不相鄰．

【編碼】021023　【難易】中　【出處】康熹自命題

【解答】(1)1440;(2)36000;(3)14400

【解析】

(1) $\boxed{男}\boxed{女}$ 或 $\boxed{女}\boxed{男}$，其排列數 $2\times(5!\times3!)=1440$ ．

(2) 任意排列減去女生全相鄰的排列就是女生不全相鄰的排法，其方法數為
$8!-3!\times6!=36000$ ．

(3) 如圖：
〇男〇男〇男〇男〇男〇
先排男生有 5!種方法，在 6 個圓圈位置上由 3 個女生排在 3 個位置上，
有 $P_3^6=120$ 種方法，所以，總排列數為 $5!\times P_3^6=14400$ ．

大小相同的 10 個球中，有 5 個白球，3 個紅球，2 個黃球，分給 10 個小朋友，每人一球，方法有幾種?

【編碼】021024　【難易】易　【出處】康熹自命題

【解答】2520

【解析】

視 10 個小朋友分別在 1，2，3，…，9，10 這 10 個位置上，
再將 10 個球分別排放在 10 個位置上，
每種放法就是一種球分給小朋友的方法．
10 個球中，5 個白球，3 個紅球，2 個黃球排成一列，
不同的排法數為 $\dfrac{10!}{5!\,3!\,2!}=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{3!\,2!}=2520$，
所以，分給 10 個小朋友共有 2520 種分法．

甲、乙、丙、丁、戊、己等六個人排成一列，甲不在第一位，乙不在第二位，丙不在第三位，丁也不排第四位時，排法有幾種?

【編碼】021025　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】362 種

【解析】
設甲在第一位，乙在第二位，丙在第三位，
丁在第四位的排列分別形成集合 $A$， $B$， $C$， $D$，
則 $|A\cup B\cup C\cup D|=4\times 5!-6\times 4!+4\times 3!-2!=358$，
所以，符合條件的排列總數爲 $6!-358=362$ 種．

「善有善報惡有惡報」這 8 個字排成一列，
(1)有幾種方法?
(2)兩個「善」相鄰，兩個「惡」也相鄰，但「善」與「惡」不相鄰的排法，有多少種?
(3)相同的字都不相鄰的排法，有多少種?

【編碼】021026　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)2520 種;(2)120 種;(3)864 種

【解析】
(1) $\dfrac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}=2520$ ．

(2) $\dfrac{6!}{2!\,2!}-\dfrac{5!}{2!\,2!}\cdot 2=180-60=120$ ．

(3) $\dfrac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}-\dfrac{7!}{2!\,2!\,2!}\cdot 4+6\cdot\dfrac{6!}{2!\,2!}-4\cdot\dfrac{5!}{2!}+4!$
$=2520-2520+1080-240+24$
$=864$ ．

假設有 4 個人，每人拿出一張名片，再由 4 張名片中各取一張，但不得取回自己的名片，試求有多少取法?

【編碼】021027　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】9 種

【解析】
$4!-4\cdot 3!+6\cdot 2!-4\cdot 1!+1\cdot 0!=24-24+12-4+1=9$ ．

設 $x$，$y$，$z$，$u$ 均表非負整數，且 $x+y+z+2u^2=13$，則數對$(x，y，z，u)$的解共有幾個？

【編碼】021028　　【難易】中　　【出處】北一女中段考題

【解答】204

【解析】
$x+y+z+2u^2=13$，

| $u$ | $x+y+z$ | 解的個數 |
|---|---|---|
| 0 | 13 | $H_{13}^{3}=C_{13}^{15}=105$ |
| 1 | 11 | $H_{11}^{3}=C_{11}^{13}=78$ |
| 2 | 5 | $H_{5}^{3}=C_{5}^{7}=21$ |

$105+78+21=204$．

若正整數 $n$，$r$，滿足 $C_{r-1}^{n}:C_{r}^{n}:C_{r+1}^{n}=3:4:5$，求 $n$，$r$ 之値．

【編碼】021029　　【難易】易　　【出處】北一女中段考題

【解答】$n=62$，$r=27$

【解析】

(1)$C_{r-1}^{n}:C_{r}^{n}=3:4 \Rightarrow 3C_{r}^{n}=4C_{r-1}^{n} \Rightarrow 3\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=4\cdot\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{r}=\dfrac{4}{n-r+1} \Rightarrow 3n-7r+3=0$．

(2)$C_{r}^{n}:C_{r+1}^{n}=4:5 \Rightarrow 4C_{r+1}^{n}=5C_{r}^{n} \Rightarrow 4\cdot\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=5\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{r+1}=\dfrac{5}{n-r} \Rightarrow 4n-9r-5=0$．

(3)由(1)、(2)得$\begin{cases}3n-7r+3=0\\4n-9r-5=0\end{cases} \Rightarrow n=62，r=27$．

以圓內接正 12 邊形的 12 個頂點爲頂點的

(1)三角形有幾個？

(2)其中有幾個直角三角形？

(3)幾個正三角形？

【編碼】021030　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)220;(2)60;(3)4

【解析】

(1)$C_{3}^{12}=220$（個）.

(2)12 個頂點分成 6 組直徑，每組與其餘 10 點連接均可形成一直角三角形，

故有 $6\times10=60$ 個．

(3)$12\div3=4$（個）.

$x+y+z\le5$，求：　(1)有幾組非負整數解？　(2)幾組正整數解？

【編碼】021031　　【難易】易　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)56;(2)10

【解析】

令 $w=5-(x+y+z)\geq 0$，則 $x+y+z+w=5$，非負整數解有 $H^4_5=C^8_5=56$ 組，
令 $x=a+1$，$y=b+1$，$z=c+1$，則 $a+b+c+w=2$，有 $H^4_2=C^5_2=10$ 組正整數解 .

一列火車從第一車廂到第十車廂，指定其中三節車廂可以吸菸，則： (1)有幾種指定方法？ (2)若要求此三車廂兩兩分開，則有幾種指定的方法？

【編碼】021032 【難易】中 【出處】康熹自命題

【解答】(1)120;(2)56

【解析】

(1)$C^{10}_3=120$（種）.

(2) □ □ □ □ □ □ □

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

吸菸車廂填入∨位置，有 $C^8_3=56$ 種 .

五對夫婦中，任選 4 人，恰有一對夫婦，有幾種取法？

【編碼】021033 【難易】易 【出處】康熹自命題

【解答】120

【解析】

$$C^5_1(C^8_2-4)=120$$

其餘 8 人選到同一對夫婦

其餘 8 人選 2 人

五對夫婦選一對

一副撲克牌共有 52 張，自其中任取 4 張，
(1)4 張均為同一花色的取法有幾種？ (2)4 張恰為不同點數的兩對有幾種取法？

【編碼】021034 【難易】易 【出處】康熹自命題

【解答】(1)2860;(2)2808

【解析】

(1)

$$C^4_1\times C^{13}_4=2860$$

13 種點數擇 4

4 花色擇 1

(2)

$C_2^{13} \times C_2^4 \times C_2^4 = 2808$

第 2 對花色擇 2

第 1 對花色擇 2

13 種點數擇 2

---

$S = \{1，2，3，4，5，6，7，8，9\}$，且 $A = \{(x，y，z，u) \mid x > y > z > u，x，y，z，u \in S\}$，$B = \{(x，y，z，u) \mid x > y \geq z \geq u，x，y，z，u \in S\}$，則：　(1)$n(A) = ?$　(2)$n(B) = ?$

【編碼】021035　【難易】中　【出處】北一女中段考題

【解答】(1)$n(A)$=126;(2)$n(B)$=330

【解析】

(1)9 個數字選 4 個，有 $C_4^9 = 126$ 種可能，又 $x > y > z > u$，只有一種排法，

∴　$A$ 有 126 種可能，即 $n(A) = 126$．

(2)$\{x > y \geq z \geq u\} = \{x \geq y \geq z \geq u\} - \{x = y \geq z \geq u\}$，

9 個數字重複取 4 個，有 $H_4^9 = C_4^{12} = 495$ 種可能，

9 個數字重複取 3 個，有 $H_3^9 = C_3^{11} = 165$ 種可能，

∴　$B$ 有 $495 - 165 = 330$ 種可能，即 $n(B) = 330$．

---

從 5 雙尺寸不同的鞋子中任選 4 隻，則下列選法各多少種？

(1) 4 隻均不成雙．　(2) 4 隻中恰含一雙．　(3) 4 隻恰爲二雙．

【編碼】021036　【難易】中　【出處】康熹自命題

【解答】(1)80;(2)120;(3)10

【解析】

(1)4 隻均不成雙，先從 5 雙選出 4 雙，再從此 4 雙中每雙只取 1 隻，

∴　選法有 $C_4^5 \cdot 2^4 = 80$ 種．

(2)4 隻恰含 1 雙，先從 5 雙中選出 1 雙，再從剩下 4 雙中選出 2 雙，每雙各取 1 隻，

∴　選法有 $C_1^5 C_2^4 \cdot 2^2 = 120$ 種．

(3)4 隻恰爲 2 雙，只須從 5 雙中取出 2 雙即可，∴　選法有 $C_2^5 = 10$ 種．

---

有兩對夫婦及 4 位朋友甲、乙、丙、丁共 8 人，分乘三部車出遊，而 8 人中只有甲與兩對夫婦會開車．若夫婦必須同車且每車至少一人，最多四人，座位順序不考慮，則乘坐方法有多少種？

【編碼】021037　【難易】難　【出處】康熹自命題

【解答】150

【解析】

因兩對夫婦會開車且夫婦必須同車，先將兩對夫婦及甲安排在 3 部車上，乘坐法有 3!種，

剩下乙、丙、丁三人任意選坐的方法，每人均有 3 種，去掉 5 人同車的狀況，

即此三人不可與同一對夫婦同一車，∴　搭乘方法有 $3! \cdot (3^3 - C_1^2) = 150$ 種．

---

圓的內接正 $n$ 邊形，圓心與正 $n$ 邊形的 $n$ 個頂點共有 $n+1$ 個點，則此 $n+1$ 個點，求：　(1)可決定幾條直線？

(2)可決定幾個三角形？　(3)可決定幾個正三角形？

【編碼】021038　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)直線：$n$ 奇數有 $\frac{1}{2}(n^2+n)$條，$n$ 偶數有 $\frac{1}{2}(n^2-n)$條;(2)三角形：$n$ 奇數有 $\frac{1}{6}(n^3-n)$個，$n$ 偶數有 $\frac{1}{6}(n^3-4n)$個;(3)正三角形：$\begin{cases} ①n=3k，k\text{ 奇數有 }k\text{ 個，}k\text{ 偶數有 }4k\text{ 個} \\ ②n\neq 3k，0\text{ 個} \end{cases}$

【解析】

(1)①當 $n$ 奇數時，任兩頂點連線不過圓心，

$\therefore$ 直線有 $C_2^{n+1}=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n^2+n)$條．

②當 $n$ 偶數時，兩頂點連線過圓心者共有 $\frac{n}{2}$條，

$\therefore$ 直線有 $C_2^{n+1}-\frac{n}{2}\cdot C_2^3+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3n}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(n^2-n)$條．

(2)①當 $n$ 奇數時，無三點共線者，$\therefore$ 三角形有 $C_3^{n+1}=\frac{1}{6}(n^3-n)$ 個．

②當 $n$ 偶數時，有三點共線者不能決定三角形，

$\therefore$ 三角形有 $C_3^{n+1}-\frac{n}{2}\cdot C_3^3=\frac{1}{6}n(n^2-1)-\frac{n}{2}=\frac{1}{6}(n^3-4n)$個．

(3)①當 $n=3k$ 時，

(i) $k$ 爲奇數，有 $k$ 個正三角形，

(ii) $k$ 爲偶數，正三角形三頂點在圓上者有 $k$ 個，而正三角形一頂點爲圓心者有 $3k$ 個，

$\therefore$ 共有 $k+3k=4k$ 個正三角形．

②當 $n\neq 3k$ 時，沒有正三角形．

有 10 張卡片分別記有 1 至 10 的號碼，試求下列分法各多少種？

(1)分給 5 人，每人 2 張．

(2)分給 5 組，每組 2 張．

(3)分爲 5 張，3 張，2 張的三組．

(4)分爲 4 張，4 張，2 張的三組．

(5)分給 3 人，其中二人各得 4 張，另一人得 2 張．

【編碼】021039　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)113400;(2)945;(3)2520;(4)1575;(5)9450

【解析】

(1)分法有 $C_2^{10}C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2=\frac{10!}{(2!)^5}=113400$．

(2)分法有 $C^{10}_{2}C^{8}_{2}C^{6}_{2}C^{4}_{2}C^{2}_{2}\cdot\dfrac{1}{5!}=945$．

(3)分法有 $C^{10}_{5}C^{5}_{3}C^{2}_{2}=2520$．

(4)分法有 $C^{10}_{4}C^{6}_{4}C^{2}_{2}\cdot\dfrac{1}{2!}=1575$．

(5)分法有 $C^{10}_{4}C^{6}_{4}C^{2}_{2}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot 3!=9450$．

---

從 1，1，2，2，3，4，5 等 7 個數字中，任取 4 個數字排成四位數，則下列的個數各多少？

(1)大於 5000 者．　(2)大於 4300 者．　(3)所有四位數．　(4) 5 的倍數者．

【編碼】021040　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)42;(2)58;(3)270;(4)42

【解析】

(1)大於 5000 者：千位數排 5，再從剩下 6 個任選 3 個排在後三位，後三位分成兩類：

①二同一異：$C^{2}_{1}C^{3}_{1}\cdot\dfrac{3!}{2!}=18$．

②三異：$C^{4}_{3}\cdot 3!=24$．

∴　大於 5000 者有 $18+24=42$ 個．

(2)大於 4300 者：千位爲 5 者有 42 個，只須計算千位爲 4 者，

① $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$千位爲 4，百位爲 5，後二位排法分二同，二異兩類，

∴　有 $C^{2}_{1}\cdot\dfrac{2!}{2!}+C^{3}_{2}\cdot 2!=8$．

② $\boxed{4}\boxed{3}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$千位爲 4，百位爲 3，後二位排法與①同，有 $C^{2}_{1}\cdot\dfrac{2!}{2!}+C^{3}_{2}\cdot 2!=8$，

∴　大於 4300 者有 $42+(8+8)=58$ 個．

(3)所有四位數分成三種：

①二同二同：$C^{2}_{2}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=6$．

②二同二異：$C^{2}_{1}C^{4}_{2}\cdot\dfrac{4!}{2!}=144$．

③四異：$C^{5}_{4}\cdot 4!=120$．

∴　四位數有 $6+144+120=270$ 個．

(4)$\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{5}$ 5 的倍數者：個位爲 5，前三位分類計算，

$C^{2}_{1}C^{3}_{1}\cdot\dfrac{3!}{2!}+C^{4}_{3}\cdot 3!=42$ 個．

（二同一異）（三異）

---

若 $x$，$y$，$z$，$u\in\mathbb{N}$ 且 $1\le x$，$y$，$z$，$u\le 6$，則 $x+y+z+u=20$ 的整數解有幾組？

【編碼】021041　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】35

【解析】
令 $x'=x-1$，$y'=y-1$，$z'=z-1$，$u'=u-1$

$\Rightarrow\quad x'+y'+z'+u'=16$，$0\le\ x'$，$y'$，$z'$，$u'\le 5$，

非負整數解組數 $=$(全部)$-$( $x'\ge 6$ 或 $y'\ge 6$ 或 $z'\ge 6$ 或 $u'\ge 6$)

$=H^4_{16}-C^4_1H^4_{10}+C^4_2H^4_4=C^{19}_{16}-4\cdot C^{13}_{10}+6\cdot C^7_4$

$=969-1144+210=35$（組）.

$(x+y+z+t)^{10}$ 的展開式中，

(1)不同類項有多少項？

(2) $x^4y^3z^3$ 的同型項有幾項？

(3) $xy^2z^3t^4$ 的係數爲多少？

【編碼】021042　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)286;(2)12;(3)12600

【解析】

(1)$(x+y+z+t)^{10}$ 展開式之一般項爲 $x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}\cdot t^{\delta}$，

其中 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=10$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ 爲正整數或 0，

此式爲 $H^4_{10}=C^{13}_{10}=286$ 組解，即不同類項有 286 項．

(2)先由 $x$，$y$，$z$，$t$ 中，任取 3 個文字，再把次數 4，3，3 排列作爲文字的乘冪，

方法有 $C^4_3\cdot\dfrac{3!}{2!}=12$ 種，即同型項有 12 項．

(3)$(x+y+z+t)^{10}$ 展開未合併同類項前，每項之產生由各個括號取一文字相乘而得，

【例如】

$(x+y+z+t)^{10}$

$=(x+y+z+t)(x+y+z+t)(x+y+z+t)(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)$

$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$

取 $x\quad y\quad y\quad z\quad z\quad z\quad t\quad t\quad t\quad t$

由此 $x$，$y$，$y$，$z$，$z$，$z$，$t$，$t$，$t$，$t$ 之一種排列對應係數爲 1 的一項 $xy^2z^3t^4$，

故未合併前，$xy^2z^3t^4$ 共有 $\dfrac{10\,!}{2\,!\,3\,!\,4\,!}=12600$ 項，合併同類項得 $xy^2z^3t^4$ 之係數爲 12600．

有紅、黃、白、藍四色球，各 10 個，自其中任取 5 個，

(1)排成一列，有多少種排法？　(2)若同色球不相鄰，有多少種排法？

【編碼】021043　　【難易】難　　【出處】北一女中段考題

【解答】(1)1024;(2)324

【解析】

(1)如下表：

| 情形 | 方法 |
|---|---|
| 5 同 | $C_1^4 \cdot \dfrac{5!}{5!} = 4$ |
| 4 同 1 異 | $C_1^4 C_1^3 \cdot \dfrac{5!}{4!} = 60$ |
| 3 同 2 同 | $C_1^4 C_1^3 \cdot \dfrac{5!}{3!2!} = 120$ |
| 3 同 2 異 | $C_1^4 C_2^3 \cdot \dfrac{5!}{3!} = 240$ |
| 2 同 2 同 1 異 | $C_2^4 C_1^2 \cdot \dfrac{5!}{2!2!} = 360$ |
| 2 同 3 異 | $C_1^4 C_3^3 \cdot \dfrac{5!}{2!} = 240$ |

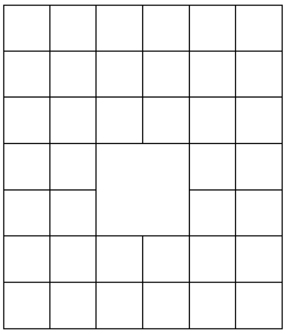
共有 $4 + 60 + 120 + 240 + 360 + 240 = 1024$．

(2)

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 |
|---|---|---|---|---|

$4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$．

此方格中，有幾個矩形？



【編碼】021044　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】411

【解析】

上下左右（不含空白）四個大矩形，

含有 $C_2^4 \cdot C_2^7 + C_2^7 \cdot C_2^3 + C_2^8 \cdot C_2^3 + C_2^8 \cdot C_2^3 = 357$ 個，

含中央空白部分有 $C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot C_1^3 \cdot C_1^3 = 108$ 個，

四個角落重疊的部分有 $C_2^4 \cdot C_2^3 + C_2^4 \cdot C_2^3 + C_2^3 \cdot C_2^3 + C_2^3 \cdot C_2^3 = 54$ 個，

共有 $357 + 108 - 54 = 411$ 個矩形．

將 9 件不同的玩具，依下列條件，求其方法數：

(1)平分給甲、乙、丙三人．　(2)平分成三堆．　(3)按甲 4 件，乙 3 件，丙 2 件．

(4)按 4，3，2 分成三堆．　(5)按 4，3，2 分給三人．　(6)按 4，4，1 分成三堆．

(7)按 4，4，1 分給三人．

【編碼】021045　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)1680;(2)280;(3)1260;(4)1260;(5)7560;(6)315;(7)1890

【解析】

(1)$C_3^9 \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 = 1680$． (2)$C_3^9 \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 \times \frac{1}{3!} = 280$． (3)$C_4^9 \cdot C_3^5 \cdot C_2^2 = 1260$．

(4)$C_4^9 \cdot C_3^5 \cdot C_2^2 = 1260$． (5)$C_4^9 \cdot C_3^5 \cdot C_2^2 \times 3! = 7560$． (6)$C_4^9 \cdot C_4^5 \cdot C_1^1 \times \frac{1}{2!} = 315$．

(7)$C_4^9 \cdot C_4^5 \cdot C_1^1 \times \frac{3!}{2!} = 1890$．

由「*mississippi*」等 11 個字母中，任取 4 個，求： (1)有幾種選法？ (2)幾種排法？

【編碼】021046 【難易】中 【出處】康熹自命題

【解答】(1)21;(2)176

【解析】
$m$ 一個，$i$ 四個，$s$ 四個，$p$ 二個．

| | 取法 | 排法 |
|---|---|---|
| 四異 | 1 | $1 \times 4! = 24$ |
| 三同一異 | $2 \times C_1^3 = 6$ | $6 \times \frac{4!}{3!} = 24$ |
| 二同二異 | $C_1^3 \cdot C_2^3 = 9$ | $9 \times \frac{4!}{2!} = 108$ |
| 二同二同 | $C_2^3 = 3$ | $3 \times \frac{4!}{2!2!} = 18$ |
| 四同 | 2 | $2 \times 1 = 2$ |
| 共有 | $1+6+9+3+2=21$ | $24+24+108+18+2=176$ |

將 9 件不同玩具，依下列分法，求其方法數：
(1)平分給三人． (2)平分成三堆． (3)甲 4 件，乙 4 件，丙 1 件．
(4)依 4，4，1 分成三堆．

【編碼】021047 【難易】中 【出處】康熹自命題

【解答】(1)1680;(2)280;(3)630;(4)315

【解析】
(1) $C_3^9 \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 = 1680$．

(2)$C_3^9 C_3^6 C_3^3 \times \frac{1}{3!} = 280$．

(3)$C_4^9 \cdot C_4^5 \cdot C_1^1 = 630$．

(4) $C_4^9 \cdot C_4^5 \cdot C_1^1 \times \frac{1}{2!} = 315$．

(1)有 10 間房間，第 1 間有 1 人，第 2 間有 2 人，…，第 10 間有 10 人，共 55 人，從這 55 人中任選 2 人，此 2 人不在同一房間的選法有多少種？
(2)甲、乙、丙、丁 4 人在排成一列的 14 個座位中，任意 2 人之間至少有 2 個空位，則坐法有多少種？

【編碼】021048 【難易】難 【出處】師大附中段考題

【解答】(1)1320;(2)1680

【解析】

(1)(任意選) − (2 人在同一房間) $= C_2^{55} - (C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{10})$（$\because \quad C_2^2 = C_3^3$）

$= C_2^{55} - (C_3^3 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{10}) = C_2^{55} - (C_3^4 + C_2^4 + \cdots + C_2^{10})$

$= \cdots = C_2^{55} - C_3^{11} = 1485 - 165 = 1320$ .

(2)將甲、乙、丙、丁視爲相同，以□ □ □ □表之，

∨□∨□∨□∨□∨

設 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$ 表 5 個間隔中座位的個數，

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 - 4 = 10$，其中 $x_1$，$x_5 \ge 0$，$x_2$，$x_3$，$x_4 \ge 2$，

令 $x_i' = x_i - 2$，$i = 2$，3，4，$x_1 + x_2' + x_3' + x_4' + x_5 = 4 \quad \Rightarrow \quad$ 共有 $H_4^5 = C_4^8 = 70$ 種坐法，

又甲、乙、丙、丁有 $4! = 24$ 種排法，$\therefore$ 共 $70 \cdot 24 = 1680$ 種坐法 .

平面上有 2 個同心圓，大圓上有 9 個點，小圓上有 3 個點，則： (1)此 12 個點最多可構成幾條直線？ (2)又最少可決定幾條直線？

【編碼】021049 【難易】難 【出處】康熹自命題

【解答】(1)66;(2)45

【解析】

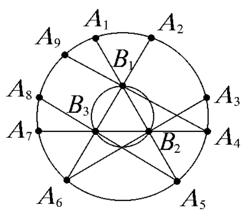
(1)所決定直線數最多表 12 點中無三點共線者，$\therefore$ 有 $C_2^{12} = 66$ 條直線 .

(2)所決定直線數最少，則 12 點中

①四點共線者有 3 組：($A_1$，$B_1$，$B_2$，$A_5$)，($A_2$，$B_1$，$B_3$，$A_6$)，($A_4$，$B_2$，$B_3$，$A_7$)，

②三點共線者有 3 組：($A_3$，$B_2$，$A_6$)，($A_4$，$B_1$，$A_9$)，($A_5$，$B_3$，$A_8$)，

$\therefore$ 直線有 $C_2^{12} - 3 \cdot C_2^4 + 3 - 3 \cdot C_2^3 + 3 = 66 - 18 + 3 - 9 + 3 = 45$ 條 .




從 1，2，3，4，⋯，15，16 中，任取四個不同的數，求滿足下列條件的方法各有幾種？

(1)四個數的積爲偶數 . (2)沒有連續的數 .

【編碼】021050 【難易】難 【出處】康熹自命題

【解答】(1)1750;(2)715

【解析】

1，2，3，⋯，16 中，任取四個不同的數，

(1)積爲偶數的方法數爲任取四個數的方法數減去四個全爲奇數的方法數

$= C_4^{16} - C_4^8 = 1750$ .

(2)沒有連續的數的取法，可考慮取到的數放入剩下 12 個數中（由左而右大小排列）

必須放入 4 個不相鄰的位置，這 4 個位置，可以從含首、末共 13 個間隔中取 4 個位置，

所以有 $C_4^{13}=715$ 種取法．

(1)$n$ 邊形有幾條對角線?

(2)圓上 10 個點構成的 10 邊形的對角線，在圓的內部最多有幾個交點?

【編碼】021051　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)$\dfrac{n(n-3)}{2}$;(2)210

【解析】

(1)$C_2^n-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$ ．

(2)任意四點恰一交點，此時 $C_4^{10}=210$ ．

6 種不同飲料，4 個杯子，每種飲料至少可倒 4 杯，每個杯子倒一種飲料，依下列情形，方法各有幾種?

(1)杯子相異，杯中飲料相異．

(2)杯子相異，杯中飲料可相同．

(3)杯子相同，杯中飲料相異．

(4)杯子相同，杯中飲料可相同．

【編碼】021052　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)360;(2)1296;(3)15;(4)126

【解析】

(1)從 6 種取 4 種不同的飲料，倒入 4 個固定位置的杯子（排列），方法數為 $P_4^6=360$ ．

(2)每個杯子可選擇任意一種飲料，所以重複 4 次選擇，方法數為 $6^4=1296$ ．

(3)杯子相同，只要任選 4 種飲料即可（組合），方法數為 $C_4^6=15$ ．

(4)可重複選 4 次飲料，方法數為 $H_4^6=C_4^9=126$ ．

將 4 個梨，5 個蘋果，分給 3 個人，依下列情形，方法各有幾種?

(1)每人所得不限．

(2)每人至少一個梨．

(3)每人至少一個梨或蘋果．

【編碼】021053　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)315;(2)63;(3)288

【解析】

(1)梨的分法 $H_4^3$ 種，蘋果的分法 $H_5^3$ 種，

所以，每人所得不限的分法數 $H_4^3\times H_5^3=C_4^6\times C_5^7=315$ ．

(2)每人先分一個梨，剩下一個梨的分法數有 3 種，也就是 $H_1^3=3$，

蘋果的分法數爲 $H_5^3=C_5^7=C_2^7=21$ 種，

共有 3 × 21 = 63 種分法．

(3)①梨與蘋果都任意分，方法數 $H_4^3 \times H_5^3=315$，

②梨與蘋果恰一人得到有 3 種方法，

梨與蘋果恰兩人得到時：

首先從三人中選兩人，有 $C_2^3=3$ 種選法；而選中的兩人來分梨與蘋果，

必須這兩人都有分到梨或是蘋果，其分法數爲 $H_4^2 \times H_5^2-2=28$．

（其中 $H_4^2$ 與 $H_5^2$ 分別表示梨與蘋果都任意分給兩人的方法數，

而減掉 2 是表示，兩人中的其中一人都沒分到的方法數）．

所以，梨與蘋果恰兩人得到的方法數爲 3 × 28 = 84．

③所以，每人至少一個梨或蘋果的分法總數爲 $315-3-84=228$．

方程式 $x+y+z+u=12$ 的解，滿足下列條件者，各有多少?

(1)正整數．

(2)非負整數．

(3)非負偶數．

(4)非負整數，且 $x \geq 2$， $y \geq 3$．

【編碼】021054　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)165;(2)455;(3)84;(4)120

【解析】

(1)正整數解有 $C_{4-1}^{12-1}=C_3^{11}=165$ 組．

(2)非負整數解有 $C_{4-1}^{12+4-1}=C_3^{15}=455$ 組．

(3)設 $x=2x'$， $y=2y'$， $z=2z'$， $u=2u'$，且 $x+y+z+u=12$，

即 $x'+y'+z'+u'=6$，其中 $x', y', z', u'$ 爲非負整數，

此方程式的解有 $C_{4-1}^{6+4-1}=C_3^9=84$ 組．

(4)設 $x'=x-2$， $y'=y-3$， $z'=z$， $u'=u$ 且 $x+y+z+u=12$，

即 $x'+y'+z'+u'=7$，其中 $x', y', z', u'$ 爲非負整數，

此方程式的解有 $C_{4-1}^{7+4-1}=C_3^{10}=120$ 組．

不等式 $x+y+z \leq 6$ 的非負整數解有多少組?

【編碼】021055　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】84

【解析】

直接利用 $x, y, z$ 均爲非負整數且 $x+y+z \leq 6$ 時，

$x+y+z$ 之值可爲 0，1，2，3，4，5，6，分別解之，

或取 $u=6-(x+y+z)$，再解之，如下：

《方法 1》

$x, y, z$ 均爲非負整數時，

若 $x+y+z=k$（其中 $k=0$，1，2，3，4，5，6），

則 $x+y+z=k$ 的解有 $C_{3-1}^{k+3-1}$ 組，

所以 $x+y+z\le 6$ 的解的總數爲

$$C_2^2+C_2^3+C_2^4+C_2^5+C_2^6+C_2^7+C_2^8$$

$$=C_3^3+C_2^3+C_2^4+C_2^5+C_2^6+C_2^7+C_2^8 \text{（其中 } C_3^3=C_2^2 \text{ ）}$$

$$=C_3^4+C_2^4+C_2^5+C_2^6+C_2^7+C_2^8$$

$=C_3^9=84$（由巴斯卡公式得之）

《方法 2》

若取 $u=6-(x+y+z)$，

則 $x+y+z+u=6$ 且 $x,\ y,\ z,\ u$ 都是非負整數，

其解有 $C_{4-1}^{6+4-1}=C_3^9=84$ 組．

不等式 $3\le x+y+z+u<8$ 的非負整數解有多少組?

【編碼】021056　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】315

【解析】

題意即 $3\le x+y+z+u\le 7$ 的非負整數解，其值爲 $H_7^5-H_2^5=315$ ．

(1)方程式 $x+y+z=8$ 的非負整數解有多少組？正整數解有多少組?

(2)方程式 $x+y+2z=8$ 的非負整數解有多少組？正整數解有多少組?

【編碼】021057　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】(1)45，21;(2)25，9

【解析】

(1)① $H_8^3=C_8^{10}=C_2^{10}=\dfrac{10\cdot 9}{2}=45$ ．

② $H_5^3=C_5^7=C_2^7=21$ ．

(2)① $x+y+2z=8$ 的非負整數解：

$$\left.\begin{array}{l} z=0\text{ 時, } H_8^2 \\ z=1\text{ 時, } H_6^2 \\ z=2\text{ 時, } H_4^2 \\ z=3\text{ 時, } H_2^2 \\ z=4\text{ 時, } H_0^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{共有 } H_0^2+H_2^2+H_4^2+H_6^2+H_8^2 \\ =C_0^1+C_2^3+C_4^5+C_6^7+C_8^9 \\ =1+3+5+7+9=25. \end{array}$$

② $x+y+2z=8$ 的正整數解：

$$\left.\begin{array}{l} z=1\text{時},\ H_4^2 \\ z=2\text{時},\ H_2^2 \\ z=3\text{時},\ H_0^2 \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} \text{共有 } & H_0^2+H_2^2+H_4^2 \\ &=C_0^1+C_2^3+C_4^5 \\ &=1+3+5=9. \end{aligned}$$

10 間相連的教室，選彼此不相鄰的 4 間教室放置蒸飯箱，共有多少選法?

【編碼】021058　　【難易】中　　【出處】康熹自命題

【解答】35

【解析】

設 $A$，$B$，$C$，$D$ 四間教室放蒸飯箱，如下，

$x\,A\,y\,B\,z\,C\,w\,D\,u$

分別在其間置入 $x$，$y$，$z$，$w$，$u$ 個教室，其中 $x,\ u\geq 0$，又 $y,\ z,\ w\geq 1$，

且 $x+y+z+w+u=6$，其解有 $H_3^5=C_3^7=35$ .

從 16 個象棋中，


選 5 個排成一列，共可排出多少不同的情況?

【編碼】021059　　【難易】難　　【出處】康熹自命題

【解答】12351

【解析】

①5 同：1 種 .

②4 同 1 異：$C_1^6\cdot\dfrac{5!}{4!}=30$ 種 .

③3 同 2 同：$C_1^5\cdot\dfrac{5!}{3!\,2!}=50$ 種 .

④3 同 2 異：$C_2^6\cdot\dfrac{5!}{3!}=300$ 種 .

⑤2 同 2 同 1 異：$C_2^6\cdot C_1^5\cdot\dfrac{5!}{2!\,2!}=2250$ 種 .

⑥2 同 3 異：$C_1^6\cdot C_3^6\cdot\dfrac{5!}{2!}=7200$ 種 .

⑦全異：$C_5^7\cdot 5!=2520$ 種 .

共有 1+30+50+300+2250+7200+2520=12351 .

因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的 7 天中，選擇 2 天停止供水．若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方式？

【編碼】021060　　【難易】易　　【出處】91 指考乙

【解答】15

【解析】
$C_2^6=15$ 種．

小英一家 5 口，從週一至週五，每人排定一天洗碗，那麼一週（週一至週五）的輪值表有多少種排法？

【編碼】021061　【難易】易　【出處】課本題

【解答】120

【解析】
$5!=120$ ．

班上 7 個女同學 $g_1, g_2, \cdots, g_7$ 等，想推派 4 個人觀摩甲、乙、丙、丁四個班級的班會活動（每班一人），下列各條件下，各有多少推派方法？
(1)任意推派．
(2) $g_2$ 不能去乙班觀摩．
(3) $g_1, g_2$ 必須推派出去．
(4) $g_1, g_2$ 不能同時推派出去．

【編碼】021062　【難易】中　【出處】教冊題

【解答】(1)840;(2)720;(3)240;(4)600

【解析】
(1) $P_4^7=840$ ．
(2)由任意推派減去 $g_2$ 派到乙班的方法數爲
$P_4^7-P_3^6=840-120=720$ ．
(3) $4\times3\times P_2^5=240$（ $g_1, g_2$ 之外再推派兩人）．
(4) $g_1, g_2$ 中只有 $g_1$ 或只有 $g_2$ 或兩人 $g_1, g_2$ 都不推派，其方法數爲
$2(4\times P_3^5)+P_4^5=600$ ．

有 4 件不同的禮物要分送給 10 個人中的 4 人，每人 1 件，方法有幾種？

【編碼】021063　【難易】易　【出處】課本題

【解答】5040

【解析】
$P_4^{10}=10\times9\times8\times7=5040$ ．

有 5 瓶不同的飲料，
(1)有 5 個人，每人拿取一瓶飲料，有幾種方法？
(2)有 3 個人，每人拿取一瓶飲料，有幾種方法？

【編碼】021064　【難易】易　【出處】課本題

【解答】(1)120;(2)60

【解析】

(1) $P_5^5=5!=120$ .

(2) $P_3^5=5\times4\times3=60$ .

電腦教室裡有 8 張桌子，老師買來了 6 部不同型號的電腦及 2 部不同型號的印表機，每張桌子放一部機器，

(1)若機器任意放置，有多少不同的方法？

(2)如果 8 張桌子排成兩排，每排四張，且每排各放一部印表機，則有多少不同的放法？

【編碼】021065　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)40320;(2)23040

【解析】

(1) $8!=40320$ .

(2)如圖所示，印表機中 2 部選 1 部放在第一排，另 1 部在第二排，

每一部印表機都有四個位置可放置，之後六部電腦在剩下的六個位置排列，

所以總排放的方法數有 $2\times(4\times4)\times6!=23040$ .


由 $a$，$a$，$a$，$a$，$b$，$c$，$d$ 共 7 個字母所組成的 7 位密碼有幾種？

【編碼】021066　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】210

【解析】

$\dfrac{7!}{4!}=7\times6\times5=210$ .

(1) 1，1，1，2，2，3，4 七個數排成一個七位數，有多少方法？

(2) 0，1，1，1，2，2，4 七個數排成一個七位數，有多少方法？

(3) 0，1，1，1，2，2，4 七個數排成一個七位偶數，有多少方法？

【編碼】021067　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)420 種;(2)360 種;(3)210 種

【解析】

(1) $\dfrac{7!}{3!\,2!}=420$ 種 .

(2) $\dfrac{7!}{3!\,2!}-\dfrac{6!}{3!\,2!}=420-60=360$ 種．

(3)在(2)中減去 1 在末位的排列法即可．

　1 在末位的七位數排列方法數爲 $\dfrac{6!}{2!\,2!}-\dfrac{5!}{2!\,2!}=180-30=150$，

　所以，所求的方法數有 $360-150=210$ 種．

6 本不同的書分給 10 個學生，每人至多一本，有多少分法？

【編碼】021068　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】151200

【解析】

所求的分法與 $abcdefgggg$ 的排列一一對應，

故所求的分法數爲 $\dfrac{10!}{4!}=151200$ ．

有 3 粒巧克力糖，2 粒牛奶糖及 1 粒水果糖，分給 6 個小朋友，每人 1 粒糖，方法有幾種？

【編碼】021069　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】60

【解析】

$\dfrac{6!}{3!\,2!}=60$ ．

由 26 個英文大寫字母 $A$，$B$，$C$，$\cdots$，$Z$ 作成的 3 位密碼有幾種？

【編碼】021070　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】17576

【解析】

$26^3=17576$ ．

投擲一個硬幣 $n$ 次，記錄每次的正、反，則有多少種可能的結果？

【編碼】021071　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】$2^n$

【解析】

$2^n$ ．

福利社有 4 種不同的飲料，3 種不同的麵包，甲、乙、丙、丁、戊五個同學，每個人任選一種飲料及一種麵包，有多少選法？

【編碼】021072　　【難易】易　　【出處】教冊題

【解答】$4^5 \times 3^5$ 種

【解析】
每個人各選一種飲料有 $4^5$ 選法，
每個人各選一種麵包有 $3^5$ 選法，
所以五個人的選擇共有 $4^5 \times 3^5$ 種方法．

2 枝不同的原子筆，4 枝不同的鉛筆分給甲、乙、丙三個人，每人最多 1 枝原子筆及最多 2 枝鉛筆，有多少分法？

【編碼】021073　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】324 種

【解析】
原子筆的分法有 $3^2 - 3 = 6$ 種，
鉛筆的分法有 $3^4 - 3 - 4 \times 3! = 54$ 種，
所以，所求的分法共 $6 \times 54 = 324$ 種．

5 本不同的書全部分給 3 個人，依下列情形，方法數各有幾種？
(1)每人恰 1 本．
(2)任意分．
(3)每人至多 1 本．
(4)每人至少一本．

【編碼】021074　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)0;(2)243;(3)0;(4)150

【解析】
(1) 0．
(2) $3^5 = 243$ ．
(3) 0．
(4)只有一人得到書的分法有 3 種，
只有兩人得到書的分法有 $3 \times (2^5 - 2) = 90$ 種，
所以每人至少一本書的分法數爲
$3^5 - 3 - 90 = 150$ 種．

(1)把編號 1～7 的 7 個球，放入編號 1～4 的 4 個籃子裡，每個籃子的球數沒有限制，有幾種方法？
(2)有 5 種不同的飲料，甲、乙、丙三人，每人選取一種飲料，有幾種方法？

【編碼】021075　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)16384;(2)125

【解析】

(1) $4^7=16384$ .

(2) $5^3=125$ .

有 5 本不同的書，分給甲、乙、丙三人，每人至多 3 本，有幾種方法？

【編碼】021076　　【難易】難　　【出處】課本題

【解答】210 種

【解析】

5 本書分給甲、乙、丙三人，每人至多 3 本的分法數爲

$3^5-3-5\times3!=243-3-30=210$ 種 .

寫出集合$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$中所有含 3 個元素的部分集合 .

【編碼】021077　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】見解析

【解析】

$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,4,5\}$，$\{2,3,4\}$，

$\{2,3,5\}$，$\{2,4,5\}$，$\{3,4,5\}$ .

設集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 20\}$，則：

(1) $A$ 中含有 16 個元素的部分集合有幾個？

(2) $A$ 中含有 4 個元素且皆爲偶數的部分集合有幾個？

【編碼】021078　　【難易】易　　【出處】教冊題

【解答】(1)4845;(2)210

【解析】

(1) $C_{16}^{20}=C_4^{20}=\dfrac{20\times19\times18\times17}{1\times2\times3\times4}=19\times17\times5\times3=4845$ .

(2) $C_4^{10}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}=210$ .

設圓上有 10 個相異點，則：

(1)以這些點爲端點的弦共有幾條？

(2)這些弦在圓內部的交點最多有幾個？

【編碼】021079　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)45 條;(2)210 個

【解析】
(1)任兩點都可決定一條弦，所以弦共有$C_2^{10}=45$條．
(2)任意兩弦在圓內的交點，都是一個圓內接四邊形的對角線交點，
所以交點最多有$C_4^{10}$點，即 210 個交點．

若 $n$ 爲正整數，且$C_8^n=C_{12}^n$，則 $n$ 之值爲何？

【編碼】021080　　【難易】易　　【出處】教冊題

【解答】20

【解析】
$n=8+12=20$ ．

(1)一個 10 人的社團，要選出 4 名幹部，計有社長、副社長、總務、公關各 1 人，有幾種方法？
(2)一個 10 人的社團，要選出 4 人小組籌辦聯誼活動，有幾種方法？

【編碼】021081　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)5040 種;(2) 210 種

【解析】
(1) $P_4^{10}=10\times9\times8\times7=5040$ ．
(2) $C_4^{10}=\dfrac{P_4^{10}}{4!}=\dfrac{5040}{24}=210$ ．

有 9 支相同的筆要分給 12 個人，每人至多 1 支，方法有幾種？

【編碼】021082　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】220 種

【解析】
$C_9^{12}=C_3^{12}=\dfrac{12\times11\times10}{1\times2\times3}=220$ ．

從 7 名男生及 5 名女生中，選 5 人組成社區服務隊，下列各種情況各有多少種選法？
(1)男、女至少各 2 人．
(2)男生甲與男生乙必須選出．
(3)男生至少選 3 人，且女生甲與女生乙不得同時選出．

【編碼】021083　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)560 種;(2)120 種;(3)511 種

【解析】
(1) $C_2^7\times C_3^5+C_3^7\times C_2^5=210+350=560$ ．

(2) $C_3^{10}=120$ .

(3)男生選 3 人，女生選 2 人的選法有 $C_3^7\times(C_2^5-1)=35\times9=315$ ,

男生選 4 人，女生選 1 人的選法有 $C_4^7\times C_1^5=175$ ,

男生選 5 人的選法有 $C_5^7=C_2^7=21$ ,

共有 $315+175+21=511$ 種選法 .

社團中有 9 個男生，7 個女生，男生中要選出 3 人，女生中要選出 2 人，組成 5 人工作小組，有多少種方法？

【編碼】021084 【難易】易 【出處】課本題

【解答】1764 種

【解析】

$C_3^9\times C_2^7=\dfrac{9\times8\times7}{1\times2\times3}\times\dfrac{7\times6}{1\times2}=1764$ .

10 個人聚會，

(1)有 3 杯汽水、3 杯可樂、2 杯果汁、2 杯牛奶，分給每人一杯，有多少種方法？

(2)分成 3 人、3 人、2 人、2 人四組玩遊戲，有多少種方法？

【編碼】021085 【難易】中 【出處】課本題

【解答】(1)25200 種;(2) 6300 種

【解析】

(1) $C_3^{10}\times C_3^7\times C_2^4\times C_2^2=120\times35\times6\times1=25200$ .

(2) $\dfrac{C_3^{10}\times C_3^7\times C_2^4\times C_2^2}{2!\times2!}=\dfrac{25200}{4}=6300$ .

5 本不同的書分給 3 個人，每人至少 1 本的方法有多少種？

【編碼】021086 【難易】難 【出處】課本題

【解答】150 種

【解析】

先求有人沒分到書的分法數爲

$C_1^3\times2^5-C_2^3\times1^5+C_3^3\times0^5=3\times32-3+0=93$ ,

故所求的方法數爲 $3^5-93=243-93=150$ .

開學時，某校高二有 8 個新來的學生，今欲將這 8 個學生分配到甲、乙、丙三班，其中甲班 4 人，乙班、丙班各 2 人，

(1)請問有多少編班方式？

(2)如果將這 8 位學生集合在操場，再將 8 個人分三組，其中一組有 4 人，另兩組各 2 人，請問有多少分法？

【編碼】021087 【難易】中 【出處】教冊題

【解答】(1)420;(2)210

【解析】

(1)編號方法數$C_4^8\times C_2^4\times C_2^2=70\times6\times1=420$ .

(2)分組方法數$\dfrac{C_4^8\times C_2^4\times C_2^2}{2!}=420\times\dfrac{1}{2}=210$ .

15 個相同的乒乓球放入 5 個不同的袋子，每個袋子至少兩個球，

(1)有多少放法？

(2)如果袋子都一樣，每個袋子至少兩個球，放法有幾種？

【編碼】021088　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)126 種;(2)7 種

【解析】

(1)袋子都不同時，每個袋子先各放入 2 球，其餘 5 個球再任意放，

有$C_5^{5+5-1}=C_5^9=C_4^9=126$種放法 .

(2)袋子都相同時，每個袋子先各放入 2 球，其餘 5 個球再任意放，此時考慮 5 個球最多放成五堆的方法數即是所求的結果 .

$$\begin{aligned}5&=5+0+0+0+0\\&=4+1+0+0+0\\&=3+2+0+0+0\\&=3+1+1+0+0\\&=2+2+1+0+0\\&=2+1+1+1+0\\&=1+1+1+1+1,\end{aligned}$$

共有 7 種方法 .

(1)有 5 種不同糖果，從中選 8 粒，有幾種方法？

(2)有 8 種不同糖果，從中選 5 粒，有幾種方法？

【編碼】021089　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)495 種;(2)792 種

【解析】

(1) $C_8^{(5-1)+8}=C_8^{12}=C_4^{12}=\dfrac{12\times11\times10\times9}{24}=495$ .

(2) $C_5^{(8-1)+5}=C_5^{12}=\dfrac{12\times11\times10\times9\times8}{120}=792$ .

設有紅、黃、藍三種顏色的球各兩個，今欲從其中任取 4 球，

(1)試問有多少取法？

(2)如果每種顏色的球都有 4 個時，有多少取法？

(3)如果每種顏色的球都有 3 個時，取法又有多少種？

【編碼】021090　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)6 種;(2)15 種;(3)12 種

【解析】

(1)每種球各兩個時，如 $aabbcc$，則取 4 球的情況，可能爲

①兩同兩同，其取法有 3 種，

②兩同兩異，其取法有 3 種，

所以共有 6 種取法．

(2)每色球都可任取法 0 個, 1 個, 2 個, 3 個, 4 個，

依重複組合的概念，取法有 $C_4^{3+4-1}=C_4^6=C_2^6=15$ 種．

(3)如果每色球都有 3 個時，(2)之中取 4 紅球、4 藍球、4 黃球的情況刪除即可，

所以共有 $15-3=12$ 種取法．

有 9 個相同的球，放入編號 1～5 的 5 個籃子裡，每個籃子的球數不限，有多少種方法？

【編碼】021091　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】715 種

【解析】

$C_9^{(5-1)+9}=C_9^{13}=C_4^{13}=\dfrac{13\times12\times11\times10}{24}=715$ ．

方程式 $x+y+z+u=10$ 之解，滿足下列條件者各有多少組？

(1)正整數解．

(2)非負偶數解．

(3)非負整數且 $x\ge2$ ， $y\ge3$ ．

【編碼】021092　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)84 組;(2)56 組;(3)56 組

【解析】

(1)原式化爲 $(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(u'+1)=10$ ，其中 $x', y', z', u'$爲非負整數解即可，

此時 $x'+y'+z'+u'=6$ ，

其解有 $C_6^{4+6-1}=C_6^9=C_3^9=84$ 組．

(2)原式化爲 $2x'+2y'+2z'+2u'=10$ ，其中 $x', y', z', u'$爲非負整數解即可，

此時 $x'+y'+z'+u'=5$ ，

其解有 $C_5^{4+5-1}=C_5^8=C_3^8=56$ 組解．

(3)原式化爲 $(x'+2)+(y'+3)+z+u=10$ ，其中 $x', y', z, u$ 爲非負整數解即可，

此時 $x'+y'+z+u=5$ ，

其解有 $C_5^{4+5-1}=C_5^8=C_3^8=56$ 組解．

(1) $x+y+z\le10$ 的非負整數解有幾組？

(2) $x+y+z+u^2=10$的非負整數解有幾組？

【編碼】021093　　【難易】難　　【出處】教冊題

【解答】(1)286 組;(2)152 組

【解析】
(1)原不等式之解與 $x+y+z+u=10$ 的非負整數解是一一對應的，
所以原不等式之解有 $C_{10}^{4+10-1}=C_3^{13}=286$ 組．
(2)分別求 $u=0,1,2,3$ 時的解即可，所求的解，其組數爲 $C_{10}^{3+10-1}+C_9^{3+9-1}+C_6^{3+6-1}+C_1^{3+1-1}$，
其值爲 $C_2^{12}+C_2^{11}+C_2^{8}+C_1^{3}=66+55+28+3=152$ ．

冰淇淋有香草、巧克力、草莓 3 種口味，欲從中取 5 球，若每種口味都要有，則有多少種方法？

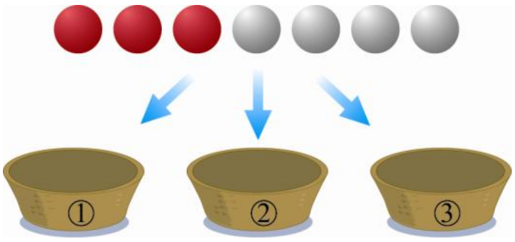
【編碼】021094　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】6 種

【解析】
《方法一》
$C_{(5-3)}^{3+(5-3)-1}=C_2^4=6$ ．

《方法二》
香草、巧克力、草莓 3 種口味先各取一個，然後剩下的兩個冰淇淋的取法，可利用窮舉法如下：
①兩個香草，②兩個巧克力，③兩個草莓，④香草、巧克力各一個，
⑤巧克力、草莓各一個，⑥香草、草莓各一個，共有 6 種取法．

有 3 個紅球、4 個白球，放入編號爲①，②，③的 3 個籃子裡，每個籃子裡至少要有 1 個球，有多少種方法？




【編碼】021095　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】93 種

【解析】
有籃子沒放到球的方法數爲 $3\times C_3^{(2-1)+3}\times C_4^{(2-1)+4}-3\times1+0=3\times C_3^4\times C_4^5-3=57$，
故所求方法數爲 $C_3^{(3-1)+3}\times C_4^{(3-1)+4}-57=C_3^5\times C_4^6-57=10\times15-57=93$ ．

將 5 個梨、6 個蘋果，分給甲、乙、丙三人，依下列情形各有多少分法？
(1)每人所得不限．
(2)每人至少一個蘋果．
(3)每人至少一個梨或一個蘋果．

【編碼】021096　　【難易】難　　【出處】教冊題

【解答】(1)588;(2)210;(3)465

【解析】

(1)梨、蘋果各任意分，分別有$C_5^{3+5-1}$，$C_6^{3+6-1}$種方法，

即有$C_5^7=C_2^7=21$與$C_6^8=C_2^8=28$種方法，

故所求的分法數爲$21\times28=588$．

(2)每人先分一個蘋果，然後仿(1)任意分 5 個梨與 3 個蘋果，所求的分法數爲

$C_5^{3+5-1}\times C_2^{3+3-1}=C_2^7\times C_2^5=21\times10=210$．

(3)從(1)中減去有人沒分到水果的情況即可，有人沒分到水果的方法數爲

$3\times C_5^{2+5-1}\times C_6^{2+6-1}-3=3\times C_5^6\times C_6^7-3=123$，

所求的分法數爲$588-123=465$．

從 10 人中，依下列情形選出 3 人，方法數各爲何？

(1)選出主席、司儀、記錄各 1 人．

(2)選出 3 人代表開會．

【編碼】021097　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)720;(2)120

【解析】

(1)相當於從 10 人中取出 3 人排一列，

方法數爲$P_3^{10}=10\times9\times8=720$．

(2)$C_3^{10}=\dfrac{P_3^{10}}{3!}=120$．

將 4 個不同的球，放入 5 個不同的籃子，依下列情形方法各有多少種？

(1)每個籃子至多放一個球．

(2)每個籃子所放的球數沒有限制．

【編碼】021098　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)120 種;(2)625 種

【解析】

(1)$P_4^5=5!=120$．

(2)$5^4=625$．

將相同的白球 5 個、紅球 3 個，

(1)分給 8 位小朋友，每人一球，方法有幾種？

(2)分給 10 位小朋友，每人最多一球，方法有幾種？

【編碼】021099　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)56 種;(2)2520 種

【解析】
(1)將 5 個相同的白球與 3 個相同的紅球全取排一列，
排法數爲 $\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6}{3!}=56$，
即分給 8 個小朋友，每人一球的方法數爲 56．
(2)將 2 人沒分到球的以∗表示，即 5 個白球、3 個紅球與 2 個∗全取，
排列數爲 $\frac{10!}{5!3!2!}=2520$ ．

設一集合有 8 個元素，試求：
(1)恰含 4 個元素的部分集合有幾個？
(2)所有的部分集合共有多少個？

【編碼】021100　【難易】易　【出處】課本題

【解答】(1)70 個;(2)256 個

【解析】
(1)恰含 4 個元素的部分集合有 $C_4^8=\frac{8\times7\times6\times5}{4!}=70$ 個．
(2)所有的部分集合共有 $2^8=256$ 個．

從 4 名女生，6 名男生中選出四位組成一工作小組，在下列情形各有多少種方法？
(1)恰爲 2 男 2 女．
(2)其中女生最多不超過 2 位．

【編碼】021101　【難易】易　【出處】課本題

【解答】(1)90 種;(2)185 種

【解析】
(1) $C_2^6\times C_2^4=15\times6=90$ ．
(2)女生最多不超過 2 位，情形有下列三種：
①2 男 2 女，②3 男 1 女，③4 男，
故方法共有 $C_2^6\times C_2^4+C_3^6\times C_1^4+C_4^6=90+80+15=185$ ．

(1)方程式 $x+y+z=10$ 的非負整數解有多少組？
(2)方程式 $x+y+z=8$ 的正整數解有多少組？

【編碼】021102　【難易】易　【出處】課本題

【解答】(1)66 組;(2)21 組

【解析】

(1) $C_{10}^{3+10-1}=C_{10}^{12}=C_{2}^{12}=66$ ．

(2)設 $x=x'+1$， $y=y'+1$， $z=z'+1$，代入 $x+y+z=8$，

得 $x'+y'+z'=5$ 之非負整數解有 $C_{5}^{3+5-1}=C_{5}^{7}=C_{2}^{7}=21$ ．

同時擲三粒相同的骰子，試問共有多少種可能結果？

【編碼】021103　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】56 種

【解析】

設 1 點～6 點出現次數分別爲 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$，

則滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3$ 其非負整數解的個數即爲所求，

爲 $C_{3}^{6+3-1}=C_{3}^{8}=56$，即從 6 個相異的點數中取 3 個的重複組合數．

5 件不同物品，分給甲、乙、丙、丁四人，每人所得不限，試求：

(1)甲恰得 1 件的分法有幾種？

(2)每人至少得 1 件，分法有幾種？

【編碼】021104　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)405 種;(2)240 種

【解析】

(1)先選 1 件給甲，另剩下 4 件任分給乙、丙、丁，

方法爲 $C_{1}^{5}\cdot 3^{4}=405$ ．

(2)由 5 件中任選 2 件視爲一包，與剩下 3 件共 4 物，分給甲、乙、丙、丁四人，

方法數爲 $C_{2}^{5}\cdot 4!=240$，或取捨原理求之，

即 $4^{5}-(C_{1}^{4}\cdot 3^{5}-C_{2}^{4}\cdot 2^{5}+C_{3}^{4}\cdot 1^{5}+0)=240$ ．

用 0，1，2，3，4，5，六個數字所組成的三位數，其中數字不得重複，試問：

(1)共有幾個？

(2)其中爲偶數者有幾個？

(3)其中爲奇數者有幾個？

【編碼】021105　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)100 個;(2)52 個;(3)48 個

【解析】

(1)此三位數，百位的排法（0 除外）有 5 種，剩下依序排十位、個位方法有 $P_{2}^{5}$ 種，

故共有 $5\times P_{2}^{5}=100$ 個，

也可以間接法扣除 0 在百位之情形，即 $P_{3}^{6}-1\times P_{2}^{5}=100$ 個．

(2)偶數情形：

百位不爲 0，且個位是 0, 2, 4 三者之一．

分爲：①個位數爲 0 時，有 $P_2^5=20$ 個．

②個位數爲 2 或 4 時，此時百位數有 4 種（不能爲 0 及個位使用過數字），

且十位數有 4 種，故有 $2\times4\times4=32$ ．

故偶數者有 52 個．

(3)奇數者有 $100-52=48$ 個，也可直接解 $P_1^3\times4\times4=48$ ．

將 6 件不同的禮物，依下列情形分配，方法各有幾種？

(1)分裝入 3 個相同袋子，其中一袋裝 4 件，另兩袋各裝 1 件．

(2)分給甲、乙、丙三人，每人各得 2 件．

(3)分給甲、乙、丙三人，每人至少得 1 件．

【編碼】021106　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)15 種;(2)90 種;(3)540 種

【解析】

(1) $\dfrac{C_4^6\cdot C_1^2\cdot C_1^1}{2!}=15$ ．

(2) $C_2^6C_2^4C_2^2=90$ ．

(3)6 件不同禮物，任意分給甲、乙、丙三人，方法有 $3^6$ ．

設 $A, B, C$ 依序表甲、乙、丙沒分到之方法之集合，

則所求 $|A'\cap B'\cap C'|=|(A\cup B\cup C)'|$，

又 $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$=C_1^3(3-1)^6-C_2^3(3-2)^6+0=189$，

故所求爲 $|A'\cap B'\cap C'|=3^6-189=540$ ．

設班聯會中有 7 個班代表，有 3 個人競選班聯會主席，每個班代表各投一票，試問下列情形各有多少種可能的投票結果？

(1)採記名投票，且沒有廢票．

(2)採記名投票，可能有廢票．

(3)採不記名投票，且沒有廢票．

【編碼】021107　　【難易】難　　【出處】課本題

【解答】(1)2187 種;(2)16384 種;(3)36 種

【解析】

(1)可視爲 7 個相異球放入 3 個不同箱子中，每箱放的球數沒有限制，

方法數有 $3^7=2187$ ．

(2)有廢票的情形，可增加一個箱子放廢票，

故視爲 7 個相異球任放入 4 個不同箱子中，方法數有 $4^7=16384$ ．

(3)視爲 7 個相同的球放入 3 個不同箱子中，每箱放的球數沒有限制，

方法數有 $C_7^{3+7-1}=C_7^9=C_2^9=36$ ．

有 3 個梨，5 個蘋果，分給 3 人，依下列情形方法各有幾種？

(1)每人所得不限．

(2)每人至少分得一個蘋果．

(3)每人至少分得一個梨或蘋果．

【編碼】021108　　【難易】難　　【出處】課本題

【解答】(1)210 種;(2)60 種;(3)141 種

【解析】

(1)梨的分法有 $C_3^{3+3-1}=C_3^5=10$，蘋果的分法有 $C_5^{3+5-1}=C_5^7=21$，

故全部的方法數爲 $10\times 21=210$．

(2)每人先分給 1 個蘋果，剩 2 個蘋果，再將 3 個梨、2 個蘋果分給 3 人，

每人所得不限的方法有 $C_3^{3+3-1}\cdot C_2^{3+2-1}=C_3^5\cdot C_2^4=60$．

(3)令 $u$ 表將 3 個梨、5 個蘋果任意分給 3 人（甲、乙、丙）所有方法所成集合，

又 $A, B, C$ 依序表甲、乙、丙三人沒分到梨及蘋果的方法，

則所求爲 $|A'\cap B'\cap C'|=|(A\cup B\cup C)'|$，

又 $|A\cup B\cup C|=C_1^3|A|-C_2^3|A\cap B|+C_3^3|A\cap B\cap C|$，

其中 $|A|$ 表將 3 個梨、5 個蘋果任意分給乙、丙二人的方法數，

故 $|A|=C_3^{2+3-1}\times C_5^{2+5-1}=4\times 6=24$，

而 $|A\cap B|=C_3^{1+3-1}\times C_5^{1+5-1}=1$，$|A\cap B\cap C|=0$，

故每人至少分得一個梨或蘋果的方法數爲

$$\begin{aligned}|A'\cap B'\cap C'|&=|U|-|A\cup B\cup C|\\&=210-(C_1^3\times 24-C_2^3\times 1+C_3^3\times 0)\\&=210-69=141\end{aligned}$$．

方程式 $x+y+z=10$，滿足下列條件的解各有幾組？

(1) $x$，$y$，$z$ 均爲正整數．

(2) $x$，$y$，$z$ 均爲正整數且 $x=y$．

(3) $x$，$y$，$z$ 均爲正整數且 $x<y$．

【編碼】021109　　【難易】難　　【出處】教冊題

【解答】(1)36 組;(2)4 組;(3)16 組

【解析】

(1)原式化爲 $(x-1)+(y-1)+(z-1)=7$，

此時 $x-1$，$y-1$，$z-1$ 都是非負整數，故解有 $C_7^{3+7-1}=C_7^9=C_2^9=36$（組）．

(2)將 $x=y$ 代入原式，得 $2y+z=10$，

因 $y, z$ 爲正整數，故 $2\le 2y\le 8$，即 $y=1, 2, 3, 4$，故解有 4（組）．

(3)由於所求 $x<y$ 且 $x, y$ 爲正整數解之組數，

與 $x>y$ 且 $x, y$ 爲正整數解之組數兩者相等，

由(1)(2)知所求解有 $\dfrac{36-4}{2}=16$（組）．

設三位數 $N=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$（$a$，$b$，$c$ 是阿拉伯數字且 $a\neq 0$），試分別求滿足下列條件的三位數各有幾個？

(1) $a>b>c$．

(2) $a \ge b > c$ .
(3) $a \ge b \ge c$ .

【編碼】021110　　【難易】中　　【出處】教冊題

【解答】(1)120 個;(2)165 個;(3)219 個

【解析】
(1) $a > b > c$ 的情形，即由 0～9 共 10 個數中，任取出相異 3 個由大而小順序排列，即與任取相異 3 個之方法相同，故所求三位數個數有 $C_3^{10} = 120$ 個．
(2) $a \ge b > c$ 可以考慮以下兩種情形：
① $a = b > c$ ，② $a > b > c$ ，
故所求三位數個數有 $C_2^{10} + C_3^{10} = 45 + 120 = 165$ 個．
(3)相當於由 0～9 共 10 個數中，取出 3 個的重複組合數，
但需扣除 $a = b = c = 0$（即 000）情形，
故所求三位數個數有 $C_3^{10+3-1} - 1 = C_3^{12} - 1 = 219$ 個．

---

從 16 個象棋子

，

(1)任意選取 5 個方法有幾種？
(2)任意選取 5 個排成一列方法有幾種？

（提示：由 5 

2 

2 

2 

2 

2 

1 

共 16 個字中選出 5 個，將 5 個字由同而異分類選取（即 5 同，4 同 1 異，3 同 2 同，3 同 2 異，2 同 2 同 1 異，2 同 3 異，5 異）後再排列之．）

【編碼】021111　　【難易】難　　【出處】教冊題

【解答】(1)243 種;(2)12351 種

【解析】
(1)①5 同：1 種．②4 同 1 異： $C_1^6 = 6$ ．③3 同 2 同： $C_1^5 = 5$ ．④3 同 2 異： $C_2^6 = 15$ ．
⑤2 同 2 同 1 異： $C_2^6 C_1^5 = 75$ ．⑥2 同 3 異： $C_1^6 \cdot C_3^6 = 120$ ．⑦全異： $C_5^7 = 21$ ．
選法數共有 $1 + 6 + 5 + 15 + 75 + 120 + 21 = 243$ ．
(2)排成一列之方法有

$$1 + C_1^6 \cdot \frac{5!}{4!} + C_1^5 \cdot \frac{5!}{3!\,2!} + C_2^6 \cdot \frac{5!}{3!} + C_2^6 \cdot C_1^5 \cdot \frac{5!}{2!\,2!} + C_1^6 \cdot C_3^6 \cdot \frac{5!}{2!} + C_5^7 \cdot 5!$$

$$= 1 + 30 + 50 + 300 + 2250 + 7200 + 2520 = 12351$$ ．

---

以 5 種顏色塗附圖，每個區域用一種顏色，試問每個區域的顏色相異的方法數．

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |

【編碼】021112　　【難易】易　　【出處】習作題

【解答】60 種

【解析】
由 5 種顏色中取 3 色依序塗上，得 $P_3^5=5\times4\times3=60$ 種．

有同樣大小的旗子六面，其中三面藍色，二面紅色，一面黃色．假如將這六面旗子任意排列順序，就可表示一種信號，試求可排出的信號數．

【編碼】021113　　【難易】易　　【出處】習作題

【解答】60 種

【解析】
三藍、二紅、一黃的排列數 $\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$ 種．

因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水．若要求停水的 2 天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方法？

【編碼】021114　　【難易】易　　【出處】習作題

【解答】15 種

【解析】
（全部方法）−（兩天相連的方法）$=C_2^7-6=15$ 種．

甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一列，試求：　(1)甲不排首位的排法數．　(2)甲不排首位，乙不排中的排法數．

【編碼】021115　　【難易】中　　【出處】習作題

【解答】(1)96 種;(2)78 種

【解析】
(1)（全部的排法）−（甲排首的排法）
$=5!-4!=96$ 種．
(2)（全部排法）−（甲排首）−（乙排中）+（甲排首且乙排中）
$=5!-4!-4!+3!=78$ 種．

甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一列，試求：　(1)甲乙相鄰的排法數．　(2)甲乙相鄰且丙丁相鄰的排法數．

【編碼】021116　　【難易】中　　【出處】習作題

【解答】(1)48 種;(2)24 種

【解析】
(1)甲乙相鄰的排法有 2!種，
甲乙、丙、丁、戊的排法有 4!種，得 $2!\times4!=48$ 種．
(2)甲乙相鄰有 2!種，丙丁相鄰有 2!種，

甲乙、丙丁、戊的排法有 3!種，得 $2!\times2!\times3!=24$ 種．

由 1, 2, 3, 4, 5, 6 共六個數字所組成（數字可重複）的四位數中， (1)恰有一個 1 的數字個數． (2)含有奇數個 1 的數字個數．

【編碼】021117 【難易】中 【出處】習作題

【解答】(1)500;(2)520

【解析】

(1)恰有一個 1 的方法數：

先排 1，$C_1^4=4$ 種；再排其他位置，$5^3$ 種，得 $4\times5^3=500$ ．

(2)恰有三個 1 的方法數：

先排 1，$C_3^4=4$ 種；再排另一位置，5 種，得 $4\times5=20$，

知 $500+20=520$（個）.

相同的原子筆 4 枝，鉛筆 3 枝，試求： (1)分給 7 位同學，每人恰得 1 枝筆的分法有幾種？ (2)分給 10 位同學，每人最多 1 枝筆的分法有幾種？

【編碼】021118 【難易】中 【出處】習作題

【解答】(1)35 種;(2)4200 種

【解析】

(1)由排列公式，得 $\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 種．

(2)原子筆 4 枝，鉛筆 3 枝，空氣 3 袋，得 $\dfrac{10!}{4!3!3!}=4200$ 種．

有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人，試求： (1)任選 5 人的方法數． (2)任選 5 人再排成一列的方法數．

【編碼】021119 【難易】中 【出處】習作題

【解答】(1)21 種;(2)2520 種

【解析】

(1) $C_5^7=\dfrac{7!}{5!2!}=21$ 種．

(2) $C_5^7\times5!=21\times120=2520$ 種．

有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列，試求： (1)甲在乙的左方的排法數． (2)甲在乙的左方且乙在丙的左方的排法數．

【編碼】021120 【難易】中 【出處】習作題

【解答】(1)2520 種;(2)840 種

【解析】

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列的排法 $7!=5040$ .

(1)甲在乙的左方，排列數爲原來的 $\frac{1}{2}$， $5040\times\frac{1}{2}=2520$ 種 .

(2)甲−乙−丙的排列數爲原來的 $\frac{1}{6}$， $5040\times\frac{1}{6}=840$ 種 .

由 6 位男生，4 位女生中選出一個 5 人委員會，試求： (1)男生女生至少各有 2 人的選法數． (2)男生最多有 2 人的選法數．

【編碼】021121 【難易】難 【出處】習作題

【解答】(1)180 種;(2)66 種

【解析】

(1)（男生 2 人女生 3 人）+（男生 3 人女生 2 人）

$=C_2^6\times C_3^4+C_3^6\times C_2^4=60+120=180$ 種 .

(2)（男生 1 人女生 4 人）+（男生 2 人女生 3 人）

$=C_1^6\times C_4^4+C_2^6\times C_3^4=6+60=66$ 種 .

設 $x+y+z=7$，試求下列各種解法的組數： (1)非負整數解． (2)正整數解．

【編碼】021122 【難易】難 【出處】習作題

【解答】(1)36 組;(2)15 組

【解析】

(1) $x+y+z=7$，得 $H_7^3=C_7^9=36$ 組 .

(2)令 $x=x_0+1$， $y=y_0+1$， $z=z_0+1$，其中 $x_0$，$y_0$，$z_0$ 是非負整數，

得 $(x_0+1)+(y_0+1)+(z_0+1)=7$，即 $x_0+y_0+z_0=4$，知 $H_4^3=C_4^6=15$ 組 .

將三件相同的禮物分給 5 個人，試求： (1)每人可重複取得的方法數． (2)每人最多一件的方法數．

【編碼】021123 【難易】難 【出處】習作題

【解答】(1)35 種;(2)10 種

【解析】

(1)甲 + 乙 + 丙 + 丁 + 戊 $=3$，得 $H_3^5=C_3^7=35$ 種 .

(2)由 5 人中任取 3 人，每人各分一件，得 $C_3^5\times1=10$ 種 .

某桌球隊要從 10 名選手中排出 5 名，分別參加五場單打友誼賽，10 名選手中近況特佳的有 3 位，教練決定任意安排他們分別在第一、三、五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共可以有多少種？

【編碼】021124 【難易】中 【出處】習作題

【解答】252 種

【解析】
第一、三、五場的 3 位選手 $3!=6$ 種，
第二、四場時，自其他 7 位選 2 位再排定 $C_2^7\cdot 2!=42$ 種，
得 $6\times 42=252$ 種．

---

甲、乙、丙、丁 4 人結伴旅行．
(1)照相時，4 人排成一列，方法有幾種？
(2) 4 人分工合作，每人負責交通、飲食、住宿、門票四項之一，分工的方法有幾種？

【編碼】021125　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)24;(2)24

【解析】
(1) $P_4^4=4!=4\times 3\times 2\times 1=24$ ．
(2)相當於將 4 人排成一列，故仍爲 $4!=24$ ．

---

班上有 40 位同學，要選出班長、學藝股長、服務股長各 1 人，有多少種方法？

【編碼】021126　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】59280

【解析】
相當於要從 40 人中，取出 3 人排成一列，方法數爲 $P_3^{40}=40\times 39\times 38=59280$ ．

---

有編號 1～7 的 7 個籃子．
(1)有編號 1～7 的 7 個球，要放到那 7 個籃子裡，每個籃子恰放一個球，有幾種方法？
(2)有編號 1～4 的 4 個球，要放到那 7 個籃子裡，每個籃子至多放一個球，有幾種方法？

【編碼】021127　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)5040;(2)840

【解析】
(1)原題意可視爲把 7 個相異的籃子全部取出排成一列，
　方法數爲 $P_7^7=7!=7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=5040$ ．
(2)原題意可視爲把 7 個相異的籃子取出 4 個排成一列，
　方法數爲 $P_4^7=7\times 6\times 5\times 4=840$ ．

---

(1)有編號 1～3 的 3 個紅球，另有 1 白球，1 黑球，共 5 個球排成一列，方法有幾種？


(2)有 3 紅球，1 白球，1 黑球，共 5 個球排成一列，方法有幾種？


【編碼】021128　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)120;(2)20

【解析】

(1)球有編號，視爲相異，故共有 5 個相異球，全部取出排成一列，共有$5!=120$種方法．

(2)3 個紅球未編號，表示不予區分，紅球視爲相同，於是在(1)的全部方法中，

每$3!$種方法在(2)中變成同一種，故方法數爲$\dfrac{5!}{3!}=5\times 4=20$種．

$$\left.\begin{array}{l} R_1BR_2R_3W \\ R_1BR_3R_2W \\ R_2BR_1R_3W \\ R_2BR_3R_1W \\ R_3BR_1R_2W \\ R_3BR_2R_1W \end{array}\right\} \to RBRRW$$

$R$（紅），$R$（黑），$W$（白）

---

有 8 件作品參加數學科展，預定選出優等 2 件，佳作 3 件，有多少種可能結果？

【編碼】021129　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】560 種

【解析】

先將優等 2 件標示爲 優$_1$，優$_2$，佳作 3 件標示爲 佳$_1$，佳$_2$，佳$_3$，

又落選 3 件標示爲 落$_1$，落$_2$，落$_3$．然後，優$_1$優$_2$佳$_1$佳$_2$佳$_3$落$_1$落$_2$落$_3$排成一列，

對應 8 件作品，有$8!$（種）.

① 優$_1$，優$_2$同爲優等，不再區分時，方法數成爲$\dfrac{8!}{2!}$．

② 佳$_1$，佳$_2$，佳$_3$同爲佳作，也不區分時，方法數成爲$\dfrac{\frac{8!}{2!}}{3!}=\dfrac{8!}{2!3!}$．

③最後 落$_1$，落$_2$，落$_3$同爲落選，又不區分時，方法數爲$\dfrac{8!}{2!3!3!}=560$．

---

由 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 作成的 4 位數字密碼有多少種？

【編碼】021130　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】10000 種

【解析】

從 10 個相異數字中，每次選取一個，得重複選取，且依次排成一列，

則選取 4 次的方法數爲$10^4=10000$（種）.

---

含 $n$ 個元素的集合有多少個部分集合？

【編碼】021131　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】$2^n$ 個

【解析】
設集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，要作成 $A$ 的一個部分集合，可以就 $A$ 中的每個元素選擇「取」、「不取」，由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 依序選擇，這是 2 中取 $n$ 的重複排列，故有 $2^n$ 個方法，即 $n$ 個元素的集合有 $2^n$ 個部分集合．

把編號 1～4 的 4 個球，放入編號 1～7 的 7 個籃子裡，每個籃子放的球數沒有限制，有幾種方法？

【編碼】021132　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】2401 種

【解析】
依序將編號爲 1，2，3，4 的球，逐一選取編號爲 1，2，3，4，5，6，7 的籃子（每一個球都必須放入一個籃子），故爲 7 中取 4 的重複排列，有 $7^4=2401$ 種方法．

某高中招收了 6 個轉學生，可編入甲、乙、丙班，但每班不得超過 4 人，問有多少編班的方法？

【編碼】021133　　【難易】難　　【出處】課本題

【解答】690

【解析】
① 6 人任意編入甲、乙、丙班的方法有 $3^6$（種）.
② 6 人集中在一班的情形有 3 種．
③ 1 人在一班，5 人在另一班的情形有

$$\overset{\substack{\text{單獨1人的選擇}\\ \downarrow}}{6}\times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{人數 (1, 5, 0) 與班級 (甲, 乙, 丙) 的對應}}}{3!}.$$

故編班的方法數爲① − (② + ③)，即 $3^6-(3+6\times 3!)=690$ ．

班上有 40 位同學，要推選 3 人籌辦旅行，有多少種推選方法？

【編碼】021134　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】9880

【解析】
$C_3^{40}=\dfrac{40!}{37!3!}=\dfrac{40\times 39\times 38}{3\times 2\times 1}=9880$ ．

把 7 個相同的球放入編號 1～11 的 11 個籃子裡，每個籃子至多放一個球，有幾種方法？

【編碼】021135　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】330

【解析】

相當於要從 11 個相異的籃子中取出 7 個，故有 $C_7^{11}=C_4^{11}=\dfrac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$ ．

在自助餐廳用餐，可從 5 樣葷菜中任選 2 樣，7 樣素菜中任選 3 樣，問取菜有多少種方法？

【編碼】021136　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】350

【解析】

利用組合及乘法原理知，方法數為 $C_2^5\times C_3^7=10\times35=350$ ．

有 8 本不同的書．

(1)分給甲、乙、丙三人，甲 3 本、乙 3 本、丙 2 本，有多少種方法？

(2)分成 3 本、3 本、2 本三袋，有多少種方法？

【編碼】021137　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)560;(2)280

【解析】

(1)利用組合及乘法原理知，方法數為 $C_3^8\times C_3^5\times C_2^2=56\times10\times1=560$ ．

(2)先將袋子標示為甲、乙、丙，依甲 3 本、乙 3 本、丙 2 本的分法有 $C_3^8\times C_3^5\times C_2^2$，

又甲、乙二袋同為 3 本，當甲、乙、丙的標籤去除時，甲、乙兩袋視為相同，

故每 $2!$ 種變成同一種，故方法數為 $\dfrac{C_3^8\times C_3^5\times C_2^2}{2!}=\dfrac{560}{2}=280$ ．

把編號 1～7 的 7 個球放入甲、乙、丙三個籃子裡，每個籃子至少放一個球，有多少種方法？

【編碼】021138　　【難易】難　　【出處】課本題

【解答】1806

【解析】

令 $U$ 表 7 個球任意放入 3 個籃子的所有方法所成集合，又 $A$，$B$，$C$ 依序表甲、乙、丙籃子中沒有球的方法，則所求為 $|A'\cap B'\cap C'|$，由笛摩根定律知 $A'\cap B'\cap C'=(A\cup B\cup C)'$，又由取捨原理知

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$=C_1^3(3-1)^7-C_2^3(3-2)^7+C_3^3(3-3)^7=3\times2^7-3\times1+0=381$ ．

故 $|A'\cap B'\cap C'|=|(A\cup B\cup C)'|=|U|-|A\cup B\cup C|=3^7-381=2187-381=1806$ ．

有紅、綠、藍、黃 4 種顏色的彩色筆供選擇，若要從中取 10 枝筆，則有多少方法？

【編碼】021139　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】286

【解析】

這是 4 中取 10 的重複組合，其方法數爲 $C_{10}^{4+10-1}=C_{10}^{13}=C_{3}^{13}=\dfrac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$ ．

(1)方程式 $x+y+z=8$ 的非負整數解有多少組？
(2)有 8 顆牛奶糖，任意分給甲、乙、丙 3 人，每人所得不限，有多少種方法？

【編碼】021140　　【難易】易　　【出處】課本題

【解答】(1)45;(2)45

【解析】
(1)有 3 個未知數，其和爲 8，故非負整數解的組數有 $C_{8}^{3+8-1}=C_{8}^{10}=C_{2}^{10}=45$ ．
(2)同爲牛奶糖分配時，各人所得的差別只在於顆數，
可令甲、乙、丙依序得 $x$，$y$，$z$ 顆，則 $x+y+z=8$，
其中 $x$，$y$，$z$ 爲非負整數，故方法數爲 $C_{8}^{3+8-1}=45$ ．

有 12 個相同的球，要放入編號 1～4 的 4 個籃子裡，每個籃子至少要放一個球，有多少種方法？

【編碼】021141　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】165

【解析】
設編號 1～4 的籃子中的球數依序爲 $x$，$y$，$z$，$u$，則 $x+y+z+u=12$ ．
其中 $x$，$y$，$z$，$u$ 都是正整數，於是 $(x-1)+(y-1)+(z-1)+(u-1)=8$ ．
此時，$x-1,\ y-1,\ z-1,\ u-1$ 都是非負整數，故方法數爲 $C_{8}^{4+8-1}=C_{8}^{11}=C_{3}^{11}=165$ ．

有 4 個梨、5 個蘋果．
(1)分給甲、乙、丙三人，每人所得不限，有多少種方法？
(2)分給甲、乙、丙三人，每人至少分得一個梨或蘋果，有多少種方法？

【編碼】021142　　【難易】中　　【出處】課本題

【解答】(1)315;(2)228

【解析】
(1)梨的分法有 $C_{4}^{3+4-1}=C_{4}^{6}=C_{2}^{6}=15$ ．
蘋果的分法有 $C_{5}^{3+5-1}=C_{5}^{7}=C_{2}^{7}=21$ ．
由乘法原理知，全部的方法數爲 $15\times21=315$ ．
(2)由取捨原理，甲沒分到或乙沒分到或丙沒分到的方法數爲
$3\times C_{4}^{2+4-1}\times C_{5}^{2+5-1}-3\times1+0=3\times C_{4}^{5}\times C_{5}^{6}-3=3\times5\times6-3=87$ ．

故每人都有分到的方法數為 $315-87=228$ .

用 0, 1, 2, 3, 4, 5 等六個數字所排成的三位數中，其中數字不重複者，
(1)總共有多少個？
(2)可被 3 整除的共有多少個？

【編碼】021143 【難易】難 【出處】康熹自命題

【解答】(1)100 個;(2)40 個

【解析】

(1)

| 百 | 十 | 個 |
|---|---|---|

$5\times 5\times 4=100$ 個 .
(2) $3k:\{0,\ 3\}$ , $3k+1:\{1,\ 4\}$ , $3k+2:\{2,\ 5\}$ ,
因數字不重複，又是 3 的倍數，
故由 $3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ 中各取 1 個，
① $3k$ 取 0 時， $\underbrace{C_1^1\times C_1^2\times C_1^2}_{\text{取數字}}\times\underbrace{(2\times 2\times 1)}_{\text{排數字}}=16$ ,
② $3k$ 取 3 時， $\underbrace{C_1^1\times C_1^2\times C_1^2}_{\text{取數字}}\times\underset{\text{排數字}}{3!}=24$ ,
故共 40 個 .

方程式 $x+y+z=10$ 的非負整數解中，滿足下列條件的各有幾組解？
(1) $x\geq 2$ .
(2) $x\geq 2$ 且 $y\leq 5$ .

【編碼】021144 【難易】難 【出處】康熹自命題

【解答】(1)45 組;(2)39 組

【解析】
(1)令 $x=x'+2$， $x'+2+y+z=10$ ,
即 $x'+y+z=8$ 的非負整數解有 $C_8^{3+8-1}=C_2^{10}=45$ 組 .
(2)先求 $x\geq 2$ 且 $y\geq 6$ 的情形，
即 $x'+2+y'+6+z=10$ ，其中 $x=x'+2$， $y=y'+6$，
而 $x'+y'+z=2$ 的非負整數解有 $C_2^{3+2-1}=C_2^4=6$ 組，
故所求為 $45-6=39$ 組 .