1 Описание физической модели

По условиям поставленной задачи, рассматриваемая физическая модель состоит из:

1) Ракеты-носителя (РН) массой $m_{\text{рн}}$ в виде материальной точки, находящейся в начальный момент времени на околоземной замкнутой орбите, на которую из внешних сил действует только центральное гравитационное поле Земли;

2) Космического аппарата (КА) массой $m_{\text{ка}}$ в виде материальной точки, в начальный момент времени удаленной от РН на расстояние равное начальной длине пружинного толкателя l_2 в направлении начального вектора скорости РН $\vec{v}_{\text{рн}}\big|_{t=t_0}$ и находящейся с РН в жесткой связи до начального момента времени;

3) Безмассового пружинного толкателя (ПТ), сила упругости которого действует по направлению $\vec{v}_{\text{рн}}\big|_{t=t_0}$ до момента достижения величины относительного расстояния между РН и КА $r_{\text{отн}}$ равной величине конечной длины пружинного толкателя l_1.

Данная физическая модель была описана, как система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}_{\text{рн}}}{dt} = -\mu \dfrac{\vec{r}_{\text{рн}}}{\left|\vec{r}_{\text{рн}}\right|^3} - \vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}\,0} \dfrac{F_{\text{упр}}}{m_{\text{рн}}} \\ \dfrac{d\vec{v}_{\text{ка}}}{dt} = -\mu \dfrac{\vec{r}_{\text{ка}}}{|\vec{r}_{\text{ка}}|^3} + \vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}\,0} \dfrac{F_{\text{упр}}}{m_{\text{ка}}} \\ \dfrac{d\vec{r}_{\text{рн}}}{dt} = \vec{v}_{\text{рн}} \\ \dfrac{d\vec{r}_{\text{ка}}}{dt} = \vec{v}_{\text{ка}} \\ F_{\text{упр}} = \begin{cases} k(l_0 - \Delta x), & \Delta x < l_1 \\ 0, & \Delta x \geq l_1 \end{cases} \\ \Delta x = \left|\vec{r}_{\text{рн}} - \vec{r}_{\text{ка}}\right|, \end{cases}$$

где μ – гравитационный параметр Земли ($\mu = 398\,600{,}4418 \cdot 10^9 \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$);

$\vec{r}_{\text{рн}}$ – радиус-вектор РН;

$\vec{e}_{\text{рн}_0}^{\text{ка}}$ – единичный вектор, по направлению совпадающий с вектором, который соединяет РН и КА;

$F_{\text{упр}}$ – абсолютная величина силы упругости пружинного толкателя;

$\vec{v}_{\text{ка}}$ – вектор скорости КА;

$\vec{r}_{\text{ка}}$ – радиус-вектор КА;

k – коэффициент упругости пружинного толкателя;

l_0 – длина пружины толкателя в недеформированном состоянии;

Δx – величина относительного расстояния между РН и КА.

Два первых дифференциальных уравнения описывают динамику поступательного движения центра масс РН и КА, два следующих – кинематику поступательного движения аппаратов. Два последних уравнения описывают временной закон силы упругости безмассового пружинного толкателя.

Первое слагаемое уравнений динамики поступательного движения, которое определяет вектор гравитационного ускорения, было получено из закона всемирного тяготения в векторном в виде:

$$\vec{F}_{g_m} = m\vec{a}_{g_m} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{\mu}{|\vec{r}|^2} m,$$

$$\vec{a}_{g_m} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

По условию задачи направление отделения КА рассматривалось с точки зрения входных данных, а не как постоянная величина. В связи с этим было приведено дальнейшее описание процесса вычисления проекций вектора $\vec{e}_{\text{рн}_0}^{\text{ка}}$ для произвольного случая задания его ориентации относительно вектора начальной скорости РН.

Единичный вектор $\vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}_0}$, определяющий направление действия силы пружинного толкателя $F_{\text{упр}}$, был получен путем последовательного поворота единичного начального вектора скорости РН $\vec{v}^{\,e}_{\text{рн}}\big|_{t_0}$ по двум углам ψ и ϑ (рисунок 1).

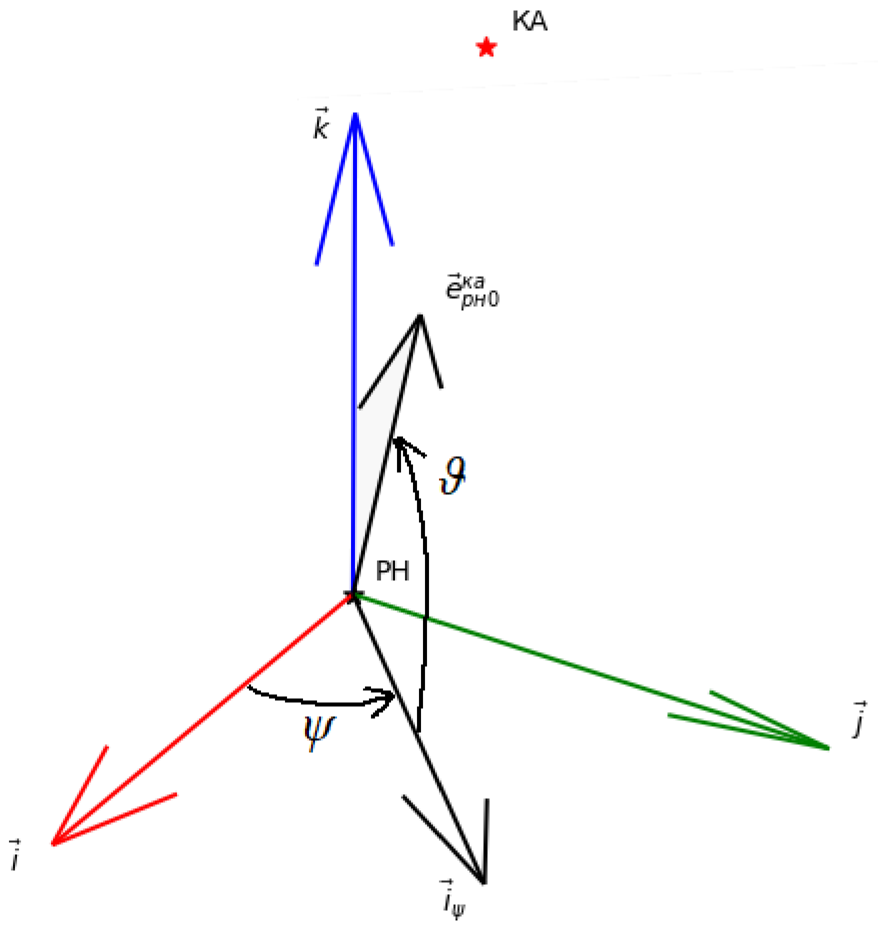

Рисунок 1 – Построение вектора $\vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}_0}$

Для этого были построены три единичных вектора:

$$\vec{\imath} = \vec{v}^{\,e}_{\text{рн}}\big|_{t_0} = \frac{\vec{v}_{\text{рн}}\big|_{t_0}}{\left|\vec{v}_{\text{рн}}\big|_{t_0}\right|}, \qquad \vec{\jmath} = -\frac{\vec{r}_{\text{рн}}\big|_{t_0}}{\left|\vec{r}_{\text{рн}}\big|_{t_0}\right|}, \qquad \vec{k} = \vec{\imath} \times \vec{\jmath}\,.$$

Первый поворот на угол ψ осуществляется вокруг вектора $\vec{k}$. Матрица поворота $\boldsymbol{R}_{\psi}$ может быть получена из формулы поворота Родрига:

$$\boldsymbol{R}_\psi = \boldsymbol{E} + (\sin\psi)\boldsymbol{K}_z + (1-\cos\psi)\boldsymbol{K}_z^2\,,$$

$$\boldsymbol{K}_z = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix},$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица порядка 3;

k_x, k_y, k_z – проекции вектора $\vec{k}$.

Второй поворот на угол $-\vartheta$ осуществляется вокруг вектора $\vec{\jmath}$, повернутого на угол ψ вокруг вектора $\vec{k}$:

$$\boldsymbol{R}_\vartheta = \boldsymbol{E} - (\sin\vartheta)\boldsymbol{K}_y^\psi + (1-\cos\vartheta)\left(\boldsymbol{K}_y^\psi\right)^2,$$

$$\boldsymbol{K}_y^\psi = \begin{bmatrix} 0 & -j_z^\psi & j_y^\psi \\ j_z^\psi & 0 & -j_x^\psi \\ -j_y^\psi & j_x^\psi & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\jmath}^{\,\psi} = \left[\, j_x^\psi,\ j_y^\psi,\ j_z^\psi \,\right] = \boldsymbol{R}_\psi \cdot \vec{\jmath}\,.$$

Таким образом, выражение для $\vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}_0}$:

$$\vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}_0} = \left(\boldsymbol{R}_\vartheta \boldsymbol{R}_\psi\right) \cdot \vec{v}^{\,e}_{\text{рн}}\Big|_{t_0}\,.$$

Для преобразования исходных данных в виде Кеплеровых элементов орбиты о местоположении и скорости ракеты-носителя (РН) в радиус-вектор и вектор скорости в проекциях на инерциальную геоцентрическую систему координат (ИГЦСК) ECI J2000 используется алгоритм, изложенный в источнике.

Таким образом, были определены начальные условия для решения однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) динамики и кинематики поступательного движения:

$$\begin{cases} \vec{v}_{\text{рн}}\big|_{t=t_0} = \vec{v}_{\text{рн}_0} \\ \vec{v}_{\text{ка}}\big|_{t=t_0} = \vec{v}_{\text{рн}_0} \\ \vec{r}_{\text{рн}}\big|_{t=t_0} = \vec{r}_{\text{рн}_0} \\ \vec{r}_{\text{ка}}\big|_{t=t_0} = \vec{r}_{\text{рн}_0} + l_2 \cdot \vec{e}^{\,\text{ка}}_{\text{рн}_0}\,. \end{cases}$$

2 Обоснование используемых численных методов

При выборе метода численного решения системы ОДУ рассматривалось сравнение методов Адамса-Башфорта пятого порядка (АБ5) и Рунге-Кутты четвертого порядка (РК4). Метод АБ5 одношаговый в отличие от многошагового РК4, следовательно, более легкий по количеству вычислений на шаг интегрирования. Однако для обеспечения устойчивости решения АБ5 необходимо закладывать более жесткие требования в сравнении с РК4: интегрируемая функция должна быть гладкой, а шаг интегрирования меньше, чем у РК4, что может нивелировать вычислительную простоту метода АБ5.

К тому же, в рассматриваемой для решения системе присутствует временная функция силы упругости пружинного толкателя, которая не является гладкой. В момент времени, когда относительное расстояние между аппаратами достигает значения конечной длины пружины l_1, происходит резкий скачок прикладываемой силы упругости, так как $l_1 \neq l_0$. Следовательно, формально метод АБ5 не применим для решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, для численного решения рассмотренной выше системы ОДУ был выбран явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

3 Описание структуры программной реализации

Программа для расчета результатов моделирования рассмотренной физической модели и их печати в разнообразных форматах была написана на языке программирования Python 3.12 с использованием математических библиотек scipy и numpy, и библиотеки для построения графиков matplotlib. Исходный текст программы был разбит по функциональному признаку на несколько отдельных файлов:

– main.py,

– core.py,

– simulation.py,

– utils.py.

В файле «main.py» находится точка входа в программу. Его функционал включает:

1) Запуск парсера командной строки для считывания путей до входной и выходной csv-таблиц;

2) Инициализацию входной структуры по данным csv-таблицы для запуска задачи моделирования;

3) Запуск задачи моделирования со сбором его результатов;

4) Запуск функции печати результатов моделирования.

Функции, которые запускаются из «main.py» находятся в файле «simulation.py». Здесь в виде классов описаны контейнеры входных данных и результатов моделирования, а также функции, которые описывают алгоритм решения задачи моделирования и печати его результатов.

Реализация математического аппарата программы моделирования находится в файле «core.py». Здесь в виде отдельных функций реализованы алгоритмы расчета:

– Проекций радиус-вектора и вектора скорости материальной точки по заданным Кеплеровым элементам орбиты;

– Проекций радиус-вектора искомой материальной точки относительно известных проекций исходной точки, по расстоянию и взаимной ориентации между ними;

– Правой части системы ОДУ для рассмотренной физической модели.

В файле «utils.py» находятся функции, реализующие процесс чтения/печати входных данных/результатов моделирования, как для случая работы с текстовыми файлами, так и для случая печати графического представления результатов с помощью плоских и пространственных графиков.