

DINÁMICA DEL PLASMA EN LA ATMÓSFERA SOLAR CON TÉRMINOS RADIATIVOS

Carlos Andrés Bautista Torres

Trabajo de Investigación para optar al título de Magíster en Matemática Aplicada

Director

Fabio Duvan Lora Clavijo

Doctor en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Matemática Aplicada

Bucaramanga

2022

## Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica</b>	<b>17</b>
<b>2. Ecuación de transferencia de radiación</b>	<b>18</b>
2.1. Momentos canónicos de la radiación	19
2.1.1. Teorías de difusión y factor de Eddington	20
2.2. Aproximación de la presión de radiación en la atmósfera solar	21
2.3. Ecuación de radiación independiente del tiempo	22
2.4. Emisividad y opacidad en la atmósfera solar	23
2.4.1. Opacidad <i>bound-free</i>	25
2.4.2. Opacidad <i>scattering</i>	26
2.4.3. Opacidad total	26
<b>3. Ecuaciones de la Rad-MHD en la atmósfera solar</b>	<b>27</b>
<b>4. Código MAGNUS</b>	<b>28</b>
<b>5. Pruebas numéricas</b>	<b>28</b>
5.1. Prueba numérica en el régimen isotérmico	28
5.2. Prueba numérica para la opacidad y la pérdida de radiación	32

<b>6. Efectos de los términos radiativos en la propagación de ondas MHD no lineales</b>	<b>35</b>
6.1. Ondas de gravedad	36
6.1.1. Condiciones iniciales y de frontera	37
6.1.2. Análisis y resultados	38
6.2. Ondas de Alfvén en arcadas coronales	45
6.2.1. Condiciones iniciales y de frontera	46
6.2.2. Análisis y resultados	48
<b>7. Conclusiones y discusión</b>	<b>52</b>
7.1. Conclusiones	52
7.2. Discusión	55
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>55</b>
<b>Apéndices</b>	<b>65</b>

**Lista de Figuras**

Figura 1.	Espectro de radiación solar registrado en la atmósfera terrestre	11
Figura 5.1.	Intensidad específica de radiación para diferentes valores del parámetro $\varepsilon$	32
Figura 5.2.	Intensidad específica de radiación para $\varepsilon = 0.1$ y su respectivo error relativo	33
Figura 5.3.	Opacidad y energía de radiación en el régimen no isotérmico	34
Figura 6.1.	Propagación de una onda de gravedad sin términos radiativos	39
Figura 6.2.	Propagación de una onda de gravedad con términos radiativos	40
Figura 6.3.	Pérdida de radiación en ondas de gravedad con las ecuaciones de Rad-MHD	42
Figura 6.4.	Perturbación en la emisión de radiación registrada en la superficie solar	43
Figura 6.5.	Energía total de la onda de gravedad en función del tiempo	44
Figura 6.6.	Registro observacional de diferentes arcadas coronales	46
Figura 6.7.	Propagación de ondas de Alfvén sin términos radiativos	49
Figura 6.8.	Propagación de ondas de Alfvén con términos radiativos	50
Figura 6.9.	Energía total los pulsos de Alfvén en función del tiempo	51

**Lista de Tablas**

Tabla 1.	Cuadratura de Gauss-Legendre para las primeras cinco configuraciones	76
----------	--	----

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Reproducción teórica de la ecuación de transferencia de radiación	65
Apéndice B. Implementación numérica en el código MAGNUS	74
Apéndice C. Implementación de la prueba analítica en el régimen de difusión isotérmico	78

## Resumen

**Título:** Dinámica del Plasma en la Atmósfera Solar con Términos radiativos \*

**Autor:** Carlos Andrés Bautista Torres \*\*

**Palabras Clave:** Magnetohidrodinámica, Transferencia de Radiación, Métodos Numéricas, Atmósfera Solar

**Descripción:** La generación de radiación es un fenómeno que se da en todas las capas del Sol, desde el núcleo mediante fusión nuclear, hasta la corona solar con su espectro de emisión. Dicha radiación juega un papel importante en el estudio de la atmósfera solar y las diferentes estructuras que se forman en esta región, tales como fulguraciones, arcadadas coronales y el calentamiento coronal. Esto se debe a que la interacción materia-radiación abunda, especialmente en la fotosfera, donde el plasma está en equilibrio térmico local y la pérdida de calor por radiación no es despreciable. Para determinar la influencia de la radiación en la atmósfera solar, en este trabajo se realizó un análisis de la propagación de ondas magnetohidrodinámicas no lineales, considerando términos radiativos. Particularmente, se estudió la propagación de ondas de gravedad y la oscilación de ondas de Alfvén; el primer fenómeno enfocado en la atmósfera inferior y el segundo en arcadadas coronales. Para modelar dichos fenómenos, se utilizó un código que resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, el código MAGNUS, al cual se le incorporó un módulo para resolver la ecuación de transferencia de radiación considerando las teorías de opacidad *bound-free* y *scattering*. Con el fin de verificar el correcto funcionamiento del nuevo módulo, se realizaron pruebas numéricas en el régimen isotérmico, y considerando un perfil analítico de la temperatura. Finalmente, se determinó la influencia de los términos radiativos en la atmósfera solar, obteniendo pérdidas de energía de hasta 28.7% en la propagación de ondas de gravedad, dando evidencia de la gran importancia de considerar pérdidas de calor por radiación en simulaciones de la atmósfera baja.

---

\* Trabajo de Investigación

\*\* Facultad de Ciencias. Matemática Aplicada.  
Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctorado en Física.

### Abstract

**Title:** Plasma Dynamics in the Solar Atmosphere with Radiative Terms \*

**Author:** Carlos Andrés Bautista Torres \*\*

**Keywords:** Magnetohydrodynamics, Radiative Transfer, Numerical Methods, Solar Atmosphere

**Description:** Radiation generation is a phenomenon that occurs in all layers of the Sun, from the core through nuclear fusion to the solar corona with its emission spectrum. This radiation plays an essential role in studying the solar atmosphere and the different structures in this region, such as flares, coronal arcs, and coronal heating. The aforementioned is due to abundant matter-radiation interaction, especially in the photosphere, where the plasma is in local thermal equilibrium and heat loss by radiation is not negligible. In order to determine the influence of radiation in the solar atmosphere, in this work, we analyze the propagation of nonlinear magnetohydrodynamic waves, considering radiative terms. In particular, we studied the propagation of gravity waves and the oscillation of Alfvén pulses; the first phenomenon focused on the lower atmosphere and the second on coronal arcs. To model these phenomena, we used a code that solves the equations of Magnetohydrodynamics, the MAGNUS code, to which a module was incorporated to solve the radiation transfer equation considering the *bound-free* and *scattering* opacity theories. In order to verify the correct operation of the new module, we carried out numerical tests in the isothermal regime and considering an analytical temperature profile. Finally, the influence of radiative terms in the solar atmosphere was determined, obtaining energy losses of up to 28.7% in the propagation of gravity waves, giving evidence of the great importance of considering radiative heat losses in simulations of the lower atmosphere.

---

\* Research Thesis

\*\* Faculty of Science. Applied Mathematics.  
Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, PhD in Physics



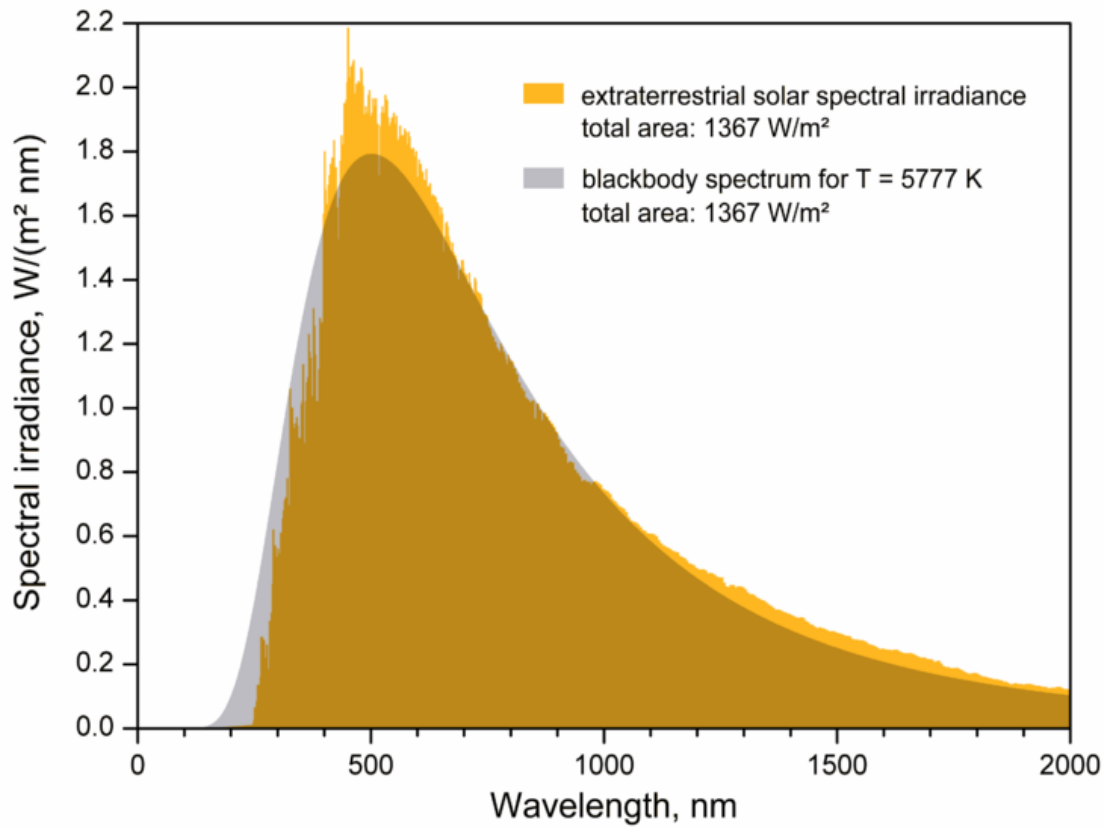
## Introducción

En la atmósfera solar se han observado una gran cantidad de fenómenos físicos, tales como las fulguraciones solares identificadas por el centro de predicción de clima espacial *NOAA* (Biesecker et al., 2002), o el calentamiento coronal, registrado por sondas espaciales como *SOHO* e *Hinode* (De Pontieu et al., 2009). Para poder explicar estos fenómenos, es importante considerar la pérdida de calor por radiación. La emisión de radiación se produce en todas las capas del Sol, dado que desde el núcleo, la radiación generada mediante fusión nuclear (alrededor del 98 % de la energía total), es dispersada continuamente a medida que se abre paso hacia las capas externas del Sol (Leenaarts, 2020). Al llegar a la atmósfera solar ocurre una transición, en la cual la mayoría de fotones se desplazan libremente debido a la baja densidad del plasma (Judge, 2015). Gracias a esto, es posible medir la energía radiativa proveniente del Sol, en la Tierra (Warren et al., 1998), obteniendo lo que se denomina como espectro de radiación o irradiancia solar (ver figura 1). Esta información que proviene de la superficie solar, permite el análisis del comportamiento del plasma en esta región, un ejemplo de ello es el estudio de fulguraciones solares propuesto por Kretzschmar (2011).

Debido a la detección de la radiación solar, es posible deducir que la aproximación de cuerpo negro es válida para modelar el plasma en la atmósfera solar (Kuhn, 1987). Como se aprecia en la figura 1 (Thuillier et al., 2009), se puede calcular la temperatura aproximada a la cual se encuentra el plasma en la superficie solar ( $\sim 5777\text{K}$ ). Esta se obtiene a partir de la comparación entre

la irradiancia solar observacional a las afueras de la atmósfera terrestre (región amarilla de la figura 1), con la irradiancia de un cuerpo negro perfecto a una temperatura de 5777K (región en gris). La medición de la radiación, y por ende las ecuaciones de transferencia de radiación (RTE por sus siglas en inglés) y de la magnetohidrodinámica (MHD), son relevantes para el modelado de la dinámica del plasma, sobre todo si se trata de las capas exteriores del Sol, donde ocurre la transición de un plasma ópticamente grueso a uno ópticamente delgado (Martínez-Sykora et al., 2015). Además se cree que la radiación juega un papel importante en diferentes fenómenos ocurridos en la atmósfera solar, siendo algunos de ellos, actualmente, problemas sin resolver. Uno de los ejemplos más conocidos es el calentamiento coronal (Klimchuk, 2006), en donde la temperatura aumenta abruptamente de  $\sim 6 \times 10^3 \text{K}$  en la fotosfera solar hasta  $\sim 1 \times 10^6 \text{K}$  en la corona solar, a tan solo  $\sim 1.4 \text{ Mm}$  (Gudiksen, 2004). Con base en lo anterior y en las evidencias observacionales, el acople de la ecuación de la RTE con el sistema de ecuaciones de la MHD sería el soporte teórico apropiado para describir la interacción materia-radiación en el Sol (Schrijver, 2001; Antolin and van Der Voort, 2012).

Para describir la dinámica del plasma, existen diferentes modelos cuya aplicabilidad depende de las características del mismo. Por ejemplo, si se considera el plasma fuertemente magnetizado, las ecuaciones que describen apropiadamente este tipo de plasmas, están dadas por las ecuaciones de Maxwell y de Fokker–Planck (Miyamoto, 1997). Por otra parte, si se considera el plasma como un fluido conductor, el modelo MHD describe apropiadamente el plasma, a partir de las ecuaciones de Maxwell y Navier-Stokes (Schnack, 2009). Con base en lo anterior, se han elaborado un sinnúme-



*Figura 1.* Espectro de radiación solar en comparación con el espectro de un cuerpo negro. La curva en amarillo corresponde a las observaciones registradas fuera de la atmósfera terrestre. La curva gris representa la radiación de cuerpo negro a una temperatura de 5777 K (Smerlak, 2010).

ro de modelos computacionales que permiten describir los diferentes fenómenos en la atmósfera solar. Inicialmente, los modelos más reconocidos se basaron en la MHD, como el trabajo realizado por Shibata et al. (1989) y Matsumoto et al. (1993), en donde se estudia el flujo magnético emergente en la atmósfera solar en simulaciones bidimensionales y tridimensionales, respectivamente. También se han realizado modelos basados en radiación hidrodinámica, que consideran relevante la interacción materia-radiación, pero desprecia la contribución del campo magnético. Uno de los

fenómenos más estudiados con este modelo, es la granulación de la superficie solar. En particular, el análisis de la evolución del patrón de convección granular a partir de modelos tridimensionales (Nordlund, 1982), y la estimación de las abundancias de hierro en la fotosfera solar (Atroshchenko and Gadun, 1994).

Posteriormente, en diversos trabajos se incorporó el aporte de la radiación en las ecuaciones de la MHD (Rad-MHD). Estos se han popularizado en las últimas dos décadas, no solo para el análisis de la atmósfera solar, sino también para el estudio de diferentes fenómenos astrofísicos. Un ejemplo de ello son simulaciones tridimensionales del colapso de una protoestrella, obteniendo que los modelos resistivos de Rad-MHD, son capaces de formar discos circunestelares alrededor de las protoestrellas (Tomida et al., 2012). Otro ejemplo es el análisis numérico de discos de acreción, considerando un tensor de Eddington variable, sobrellevando las limitaciones de la teoría de difusión de flujo limitado (Jiang et al., 2012). También se han desarrollado trabajos que se enfocan en optimizar la solución numérica, para resolver los diferentes fenómenos físicos de una manera más eficiente y aproximada a la realidad. Por ejemplo, se han analizado las ventajas de un código debidamente paralelizado, y del método de las “*características cortas*”, para simular la formación de gránulos en la zona convectiva y la fotosfera (Vögler et al., 2005). También se ha considerado el uso de mallas espaciales adaptativas para calcular la pérdida de calor por radiación (Bruls et al., 1999), obteniendo dos expresiones numéricas óptimas para la energía de radiación según la zona de la atmósfera solar (atmósfera superior o atmósfera inferior).

Hay otros trabajos que se centran en el análisis del espectro de emisión de la atmósfera supe-

rior. Tales como el estudio de la ionización del Hidrógeno y Helio en la cromosfera mediante simulaciones realizadas con el código Bifrost (Golding et al., 2016). O las simulaciones de las líneas espectrales  $H\alpha$ ,  $Mg_{II}K$ ,  $Ca_{II}K$  y  $Ca_{II}8542\text{ \AA}$ , realizadas con el algoritmo Multi3D (Björger et al., 2019). También se ha estudiado el flujo de calor a través de la corona solar con el código MURaM, el cual fue adaptado para llevar a cabo simulaciones de transición, entre el régimen de plasma ópticamente grueso y ópticamente delgado (Rempel, 2016). Por otra parte, hay una variedad de investigaciones que centran su análisis en la propagación de ondas MHD. Unas se enfocan en estudiar su amortiguamiento o resonancia, ya sea considerando un plasma totalmente ionizado (Goossens et al., 2011), uno parcialmente ionizado (Khodachenko et al., 2004), o simplemente enfocándose en una región específica, como la corona solar (Morton et al., 2014). Finalmente con el propósito de tener un compendio de las diversas aproximaciones y métodos numéricos que se han desarrollado para las diferentes simulaciones de la dinámica del plasma solar, Leenaarts (2020) proporciona una gran cantidad de conceptos, métodos y resultados obtenidos por los diferentes modelos computacionales basados en radiación hidrodinámica y Rad-MHD.

Para implementar un algoritmo con Rad-MHD, hay que tener en cuenta la definición de la intensidad de radiación. Esta variable depende no solo de la posición y del tiempo, sino también de dos ángulos que determinan la dirección de propagación ( $\theta, \phi \equiv \Omega$ ) y de una frecuencia asociada con la energía de cada fotón ( $\nu = 2\pi E/h$ ) (Mihalas and Weibel, 2013). A partir del análisis de la dinámica de la intensidad se define la RTE, la cual se debe considerar en el sistema de ecuaciones de la MHD. Sin embargo, el incluir la interacción materia radiación no solo implica añadir una ecuación

más al sistema inicial, sino que las ecuaciones de continuidad de la energía y momentum se ven modificadas por un término atribuido a la pérdida de calor y presión de radiación respectivamente, acoplando el sistema.

No obstante, el costo computacional de evolucionar dicho sistema en el tiempo es considerablemente alto si no se tiene en cuenta ninguna aproximación. Un indicio de ello se da al recordar que la intensidad depende de siete variables independientes  $(x, y, z, \theta, \phi, \nu, t)$ . Sin embargo, para estudiar fenómenos en la atmósfera solar, existen ciertas aproximaciones a considerar que simplifican la resolución de las ecuaciones. La primera aproximación se obtiene considerando la atmósfera solar como un cuerpo negro (ver figura 1), lo que permite estimar que la presión de radiación en la fotosfera es aproximadamente cinco órdenes de magnitud menor a la presión del gas, indicando que todo término fuente asociado con la presión de radiación es despreciable (Leenaarts, 2020). La segunda aproximación importante consiste en considerar la RTE independiente del tiempo, debido a que el tiempo que caracteriza la dinámica del plasma solar es mucho mayor al tiempo característico de los fotones atravesando la atmósfera solar.

Existen otras aproximaciones que dependen de la región de la atmósfera solar que se desea simular. En particular, la aproximación del plasma en equilibrio térmico local (LTE por sus siglas en inglés), en la zona convectiva y la fotosfera, y su versión opuesta, que corresponde al no equilibrio térmico local (*no-LTE*), presente en la atmósfera superior debido a que la radiación está en el régimen de libre circulación (Leenaarts, 2020). Ambas aproximaciones están asociadas a diferentes métodos numéricos: para el caso de LTE se requiere el método de “*características cortas*”, en el cual se

resuelve la ecuación de RTE en segmentos de recta cortos, permitiendo simular la dispersión de los fotones (Kunasz and Auer, 1988). Por otra parte, en la aproximación no-LTE es conveniente aplicar el método de “*características largas*”, el cual describe a los fotones que viajan en línea recta atravesando varios subdominios de la malla numérica antes de ser dispersados o absorbidos por la materia (Heinemann et al., 2006). Además del método de integración, el parámetro de opacidad está relacionado con el equilibrio térmico del plasma, pues en el régimen de LTE el plasma es ópticamente grueso. En este caso, el coeficiente de absorción que lo caracteriza se denomina “*opacidad de Rosseland*” (Nordlund, 1982). Sin embargo, a medida la radiación asciende, el plasma se torna ópticamente delgado con ciertas líneas de emisión, en este punto el coeficiente de absorción que mejor empalma con las condiciones del plasma se denomina “*opacidad de Planck*” (Abbett and Fisher, 2012).

La opacidad del plasma es crucial para calcular la pérdida de calor por radiación. Por esto, es importante utilizar un modelo de opacidad adecuado para describir la atmósfera solar. Muchos estudios relacionados con la emisión de radiación en las atmósferas estelares han utilizado funciones de distribución de opacidad (ODF por sus siglas en inglés), como Vögler et al. (2005) usando ATLAS9 de Kurucz (1993). No obstante, una forma más sencilla de expresar la opacidad del plasma a través de la atmósfera solar corresponde a la ley de opacidad de Kramers, que permite definir dicho parámetro como una función de la densidad y la temperatura del material, integrando en el espacio de frecuencia mediante una media armónica (Kippenhahn et al., 1990). Existen varias opacidades que siguen la ley de Kramers, dependiendo del fenómeno con el que estén relacionadas.

Por ejemplo, en la atmósfera solar, la principal opacidad se debe a la ionización de los átomos de hidrógeno (*opacidad bound-free*) (Chalonge, 1946; Haberreiter et al., 2008; Bhatia et al., 2020), seguida de la opacidad debido a la dispersión de Thomson ( *opacidad de dispersión*) (Haberreiter et al., 2008). Ambos modelos de opacidad se deben considerar para una correcta aproximación a la opacidad en las capas externas del Sol.

Con base en lo anterior, en este trabajo de investigación se estudia el efecto de la radiación en la propagación de ondas MHD utilizando el código MAGNUS (Lora-Clavijo et al., 2015; Navarro et al., 2017). Para ello, primero se describen las ecuaciones, junto con las teorías y aproximaciones consideradas en los capítulos 1 y 2. Luego se plantea el sistema de ecuaciones final en el capítulo 3. Dicho sistema de ecuaciones se incorpora en el código MAGNUS, el cual es descrito y probado en su componente de radiación en los capítulos 4 y 5. Posteriormente, se analizan las simulaciones de propagación de onda en la atmósfera solar en el capítulo 6, para finalmente exponer las respectivas conclusiones y discusión acerca de trabajos futuros en el capítulo 7. Al final del documento se encuentran los anexos, en donde se proporcionan detalles acerca de la deducción teórica e implementación numérica de la ecuación de transferencia de radiación.



### 1. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

Para modelar un plasma como fluido, es necesario contar con un sistema de ecuaciones que considere, tanto la dinámica del fluido, como las corrientes inducidas debido a la presencia de partículas eléctricamente cargadas. Para ello se combinan las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo [Schnack (2009)], bajo la aproximación de bajas frecuencias y velocidades

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{\mu} + \left( P + \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}|^2 \right) \mathbb{I} \right] = \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (E + P + |\mathbf{B}|^2) \mathbf{V} - \mathbf{B}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) - \eta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right] = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

en donde  $\rho$  representa la densidad de masa del plasma,  $\mathbf{V}$  el campo de velocidades,  $\mathbf{B}$  el campo magnético,  $\mu$  la permeabilidad magnética del medio y  $P$  la presión del gas.  $\mathbb{I}$  representa la matriz

identidad,  $\mathbf{g}$  la aceleración de la gravedad,  $\eta$  es la resistividad óhmica y  $E$  la densidad de energía total asociada al fluido. En este caso,  $E$  se considera como la suma entre la densidad de energía interna del plasma  $\rho e$ , su densidad de energía cinética y la densidad de energía atribuida al campo magnético ( $E = \rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2$ ). Las ecuaciones (1) y (2) representan la conservación de la masa y del momentum respectivamente, la expresión (4) determina la dinámica del campo magnético junto con la ligadura solenoidal descrita en la ecuación (5). Por último está la ecuación de conservación de la energía (3), deducida a partir de la primera ley de la termodinámica [Schnack (2009)]. Esta ecuación se verá modificada una vez se incorpore la ecuación de transferencia de radiación.

## 2. Ecuación de transferencia de radiación

La energía en forma de radiación electromagnética se comporta de manera diferente a la energía en forma de materia. No obstante, cuando se interpreta la radiación como un sistema de fotones, se puede analizar de forma similar a un sistema termodinámico de partículas fermiónicas. Por lo tanto, es posible realizar un tratamiento del sistema de fotones en el espacio de fase (ver anexo 1) que conlleva a la ecuación de Boltzmann para la radiación [Pomraning (2005)], definida como

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla I_v = j_v - \rho \kappa_v I_v, \quad (6)$$

siendo  $c$  la rapidez de la luz,  $I_v = I_v(x, y, z, \phi, \theta, t)$  la intensidad específica (energía por unidad de área, tiempo y frecuencia),  $\Omega$  un vector dirección,  $j_v$  el coeficiente de emisión o emisividad, y  $\kappa_v$  el coeficiente de absorción u opacidad del material. El subíndice  $v$  implica que la ecuación describe la

dinámica de los fotones a determinada frecuencia, y si se quiere obtener la contribución de todo el espectro electromagnético, es necesario integrar la ecuación con respecto a la variable  $\nu$ . También es importante mencionar que los términos a la izquierda de la ecuación (6) están relacionados con los denominados momentos canónicos de la radiación [Mihalas and Weibel (2013)], los cuales son un conjunto de variables de tipo escalar, vectorial y tensorial que caracterizan completamente un sistema de fotones.

## 2.1. Momentos canónicos de la radiación

Aunque los fotones carecen de masa y sea imposible determinar una “densidad de radiación” como tal, se pueden definir magnitudes asociadas a su energía, de la misma manera en que un sistema de partículas se caracteriza por tener una densidad, un flujo y una presión. Dichas magnitudes se definen a partir de la intensidad específica y se denominan momentos canónicos de la radiación:

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \Omega I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} \Omega \otimes \Omega I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega, \quad (9)$$

siendo  $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$  el diferencial de ángulo sólido. El momento cero,  $J_\nu$ , es una función escalar que representa la intensidad específica de radiación promediada en una esfera de ángulo

sólido. El segundo momento es el vector flujo de radiación, y el tercer momento es un tensor de segundo orden en el espacio tridimensional y se denomina presión de radiación. Las ecuaciones que determinan la dinámica de cada momento canónico de la radiación se obtienen integrando la ecuación (6) con respecto a la variable  $\Omega$  [Levermore and Pomraning (1981)] y usando las definiciones (7)-(9):

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial J_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_v = 4\pi(j_v - \rho \kappa_v J_v), \quad (10)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{P}_v = -\rho \kappa_v \mathbf{F}_v. \quad (11)$$

La ecuación de evolución para la presión depende de un momento tensorial de tercer orden [Castor (2003)]. En este punto se aprecia que para obtener la evolución en el tiempo de cada momento, se requiere conocer el momento inmediatamente siguiente, haciendo que el sistema de ecuaciones sea abierto. Con el fin de cerrar el sistema, se utiliza una condición de ligadura que relacione los momentos canónicos, y para esto hay que considerar una teoría de difusión de radiación.

**2.1.1. Teorías de difusión y factor de Eddington.** Las teorías de difusión son aproximaciones que se realizan dependiendo del sistema termodinámico que se esté analizando. Si se trabaja con materiales ópticamente gruesos, se considera un sistema en el régimen *LTE*. Pero si el material es ópticamente delgado, entonces el sistema se aproxima al régimen *no-LTE*. Para realizar dichas aproximaciones se considera cierta proporcionalidad entre la energía específica de radiación  $E_v$  y

la presión de radiación

$$P_V = D E_V, \quad (12)$$

donde  $D$  se denomina tensor de Eddington [Levermore (1984); Castor (2003)]. Los dos ejemplos más claros para los posibles valores de  $D$  se dan dependiendo de la opacidad del material con el cual está interactuando la radiación, entonces

$$P_V = \frac{1}{3} I E_V, \text{ para materiales ópticamente gruesos, y} \quad (13)$$

$$P_V = \Omega \otimes \Omega E_V, \text{ para materiales ópticamente delgados.} \quad (14)$$

No obstante, para determinar la presión, con el fin de realizar estudios de la atmósfera solar, es necesario considerar otros factores, como la aproximación a radiación de cuerpo negro y la relación entre la presión de radiación y la presión del plasma.

## 2.2. Aproximación de la presión de radiación en la atmósfera solar

Considerando que el espectro de radiación solar se puede modelar como un cuerpo negro, la presión de radiación en la superficie solar es

$$\frac{4\sigma}{3c} T^4 = 0.27 \text{ Pa}, \quad (15)$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann y  $T$  la temperatura en la fotosfera ( $T \approx 5700 \text{ K}$ ). Por

otra parte, la presión del gas en la fotosfera es de aproximadamente  $P_g \approx 10^4$  Pa [Leenaarts (2020)], lo cual implica que la presión de radiación en la atmósfera solar es despreciable con respecto a la presión del plasma y por lo tanto, la ecuación (11) ya no es relevante para ser implementada ( $D = 0$ ). Otro aspecto clave a considerar para modelar los fenómenos en la atmósfera solar, es la relación entre los tiempos característicos de la radiación y el plasma solar.

### 2.3. Ecuación de radiación independiente del tiempo

El rango de velocidades del plasma en la atmósfera solar oscila entre  $\sim 1 \text{ km s}^{-1}$  en la zona convectiva, y  $\sim 300 \text{ km s}^{-1}$  en fulguraciones solares en la cromosfera [Graham and Cauzzi (2015)]. Por lo tanto, la velocidad del plasma en la dinámica solar es considerablemente menor a la velocidad de la radiación ( $\sim 3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ ), lo cual implica que la escala temporal necesaria para modelar la dinámica del plasma es mucho mayor a las escalas de tiempo características de la radiación en la atmósfera solar [Leenaarts (2020)]. Esta diferencia se aprecia numéricamente en una malla temporal cuyo paso  $\Delta t$  es mucho mayor que la variación en la intensidad  $\Delta I$ , por lo tanto, el primer término a la izquierda de la igualdad en las ecuaciones (6) y (10), es prácticamente cero, dando como resultado una ecuación de transferencia de radiación independiente del tiempo

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = 4\pi(j_\nu - \rho \kappa_\nu J_\nu), \quad (16)$$

que se aplica para todos los valores de frecuencia, lo que permite generalizar la expresión, sumando en el rango de frecuencias, obteniendo la contribución al calor de radiación de todos los fotones independientemente de su energía,  $h\nu$ ,

$$Q_{rad} = - \int \nabla \cdot \mathbf{F}_v dv = -4\pi \int (j_v - \rho \kappa_v J_v) dv. \quad (17)$$

Esta es la ecuación que representa la pérdida de energía por radiación [Vögler et al. (2005)] y se incorpora al sistema de ecuaciones de la MHD como término fuente en la ecuación de conservación de la energía. Computacionalmente, el término de calor por radiación se puede obtener tanto con la divergencia del vector flujo de radiación, como por la diferencia entre la emisividad y el término de absorción (parte derecha de la ecuación (16)) [Stein and Nordlund (1998)]. Para los coeficientes  $j_v$  y  $k_v$  también se pueden considerar ciertas aproximaciones, válidas si se trata de fenómenos asociados a la radiación en la atmósfera solar.

#### 2.4. Emisividad y opacidad en la atmósfera solar

Teniendo en cuenta el espectro de emisión de radiación del Sol descrito en la figura 1, se observa que el coeficiente de emisión en la RTE está relacionado con la emisión de radiación de cuerpo negro,  $j_v \propto B_v$ , siendo

$$B_v(\nu, T) = \frac{j_v}{\rho \kappa_v} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (18)$$

la función de Plack, donde  $h$  es la constante de Planck,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura. Por otra parte, para determinar las expresiones para la opacidad en la fotosfera, es necesario recordar que el plasma en la atmósfera baja es muy denso en comparación con el plasma en la región superior. Esto permite considerar que la atmósfera inferior está en el régimen de

equilibrio térmico local, lo que implica que los fotones interactúan con la materia en un alto grado y por lo tanto, se infiere que el plasma es ópticamente grueso (Vögler et al., 2005). En este caso la opacidad media que mejor encaja se denomina opacidad de Rosseland

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}, \quad (19)$$

ya que se deduce a partir de la aproximación de difusión (Carson, 1976). Con respecto a la atmósfera superior (cromosfera, región de transición y corona solar), la aproximación para la radiación es la de libre circulación y baja dispersión con la materia. Por lo tanto la opacidad media se calcula como una media ponderada tradicional,

$$\kappa_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu}{\int_0^\infty B_\nu d\nu}, \quad (20)$$

a esta opacidad media se le conoce como opacidad de Planck y es la indicada para el estudio de la propagación de ondas MHDs en la corona solar (Leenaarts, 2020). Sin embargo existen otras aproximaciones que a menudo se usan en el estudio de atmósferas estelares, y que dependen del fenómeno del cual se origina la radiación. Estos modelos son de gran interés debido a que, en su deducción, ya está implícita la integración con respecto a la frecuencia (ecuaciones (19) y (20)), lo que permite un análisis computacional más rápido. Entre ellos se encuentra el modelo de opacidad *bound-free* y opacidad de *scattering*.



**2.4.1. Opacidad *bound-free*.** Para definir apropiadamente el término de opacidad *Bound-free*, primero hay que comprender en el concepto de la ley de Kramers. Dado que considerar una opacidad definida como la ecuación (19) o la (20) es numéricamente costoso, la ley de Kramers es de gran utilidad en el estudio de atmósferas estelares debido a que permite deducir una expresión para la opacidad independiente de la frecuencia, de tal manera que dependa exclusivamente de la densidad y la temperatura del material que se está estudiando (Phillips, 2013; Carroll and Ostlie, 2017). Esto es posible gracias a que se promedia la opacidad en el espacio de frecuencia al considerar un fenómeno específico que describe mayormente la dinámica de interacción materia-radiación (ej. ionización del átomo de hidrógeno).

La opacidad *bound-free*, describe adecuadamente plasmas en los cuales se da la excitación de los átomos mediante la absorción de fotones. Dichos electrones pasan de estar enlazados a un átomo, a estar libres, lo que da nombre a la opacidad. En el caso de la atmósfera solar, y otras atmósferas estelares, la opacidad *bound-free* es predominante debido a la ionización del átomo de hidrógeno  $H^-$  (Chalonge, 1946), la cual se define como

$$\kappa_{bf} = 4.3 \times 10^{21} Z(1 + X) \rho T^{-3.5} \text{ m}^2/\text{Kg}, \quad (21)$$

donde  $X = 0.7389$ ,  $Y = 0.2463$  y  $Z = 0.0148$  son las fracciones de masa en la fotosfera para el hidrógeno, el helio y los metales, respectivamente (Lodders, 2019).

**2.4.2. Opacidad *scattering*.** Como su nombre lo indica, es la opacidad asociada dispersión de los fotones, la cual ocurre cuando un fotón perturba a un electrón libre y este último oscila actuando como un dipolo para los fotones que se aproximen. Este tipo de opacidad también se tiene en cuenta en el estudio de la atmósfera solar (Haberreiter et al., 2008), sin embargo, no corresponde a una opacidad tipo ley de Kramers, pues es independiente de la densidad y temperatura. La opacidad *scattering* depende completamente de la fracción de masa del hidrógeno, más específicamente de la forma

$$\kappa_{es} = 0.02 (1 + X) \text{ m}^2/\text{Kg}. \quad (22)$$

Esta expresión para la opacidad es válida para temperaturas  $T \ll 10^8$  K. A mayor temperatura, mayor es la energía de interacción entre el fotón y el electrón, lo que ocasiona que el retroceso del electrón tras la interacción ya no sea despreciable, y la opacidad a considerar está asociada a la dispersión de Compton (Pols, 2011; Brown, 2015).

**2.4.3. Opacidad total.** Una vez establecidas las opacidades a tener en cuenta en el modelo de radiación, es necesario escoger una fórmula de ponderación para el cálculo de la opacidad total. Para ello, hay que considerar que la región de mayor interacción materia-radiación es la fotosfera, en donde la opacidad se calcula mediante una media armónica (tipo opacidad de Rosseland) (Kippenhahn et al., 1990). Por lo tanto, la opacidad total es aproximadamente

$$\frac{1}{\kappa} \approx \left( \frac{1}{\kappa_{bf}} + \frac{1}{\kappa_{es}} \right). \quad (23)$$

### 3. Ecuaciones de la Rad-MHD en la atmósfera solar

Para finalizar, el sistema de ecuaciones que se implementarán en el código MAGNUS-CAFE es el siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{\mu} + \left( P + \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}|^2 \right) \mathbb{I} \right] = \rho \mathbf{g}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (E + P + |\mathbf{B}|^2) \mathbf{V} - \mathbf{B}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) - \eta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right] = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + \mathcal{Q}_{rad}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) = 0, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (28)$$

en donde el término en rojo viene dado por la integral de la ecuación (16) en todo el espectro de frecuencias, y representa la pérdida de calor por radiación (Vögler et al., 2004; Tomida et al., 2012).

Para calcular numéricamente dicho término, se requiere considerar una gran cantidad de teorías y aproximaciones, como se observa a lo largo de este trabajo. Es por esto, que para calcular la pérdida de radiación en el código MAGNUS, se necesita incorporar un módulo completo enfocado

al cálculo de la opacidad, la profundidad óptica y finalmente, el término radiativo,  $Q_{rad}$ .

#### 4. Código MAGNUS

Inicialmente llamado CAFE, éste código fue diseñado para resolver las ecuaciones de la MHD ideal relativista para simulaciones de la dinámica del plasma en atmósferas estelares (Pimentel Diaz et al., 2019). Para ello, CAFE utiliza el método de volúmenes finitos, en donde el sistema de ecuaciones está escrito de forma conservativa. También proporciona varios esquemas de reconstrucción espacial tales como MINMOD, MC y MC- $\beta$ . Sin embargo, desde su construcción, se han realizado varias modificaciones con el fin de optimizar, actualizar y tener en cuenta más conceptos físicos que podrían ampliar la aplicabilidad del código y mejorar la precisión de la simulación, en comparación con los fenómenos observados en la atmósfera solar. En 2017, se incluyeron los efectos de resistividad eléctrica en el código CAFE (ahora CAFE-MAGNUS) Navarro et al. (2017), y años más tardes, se modificaron las ecuaciones para describir plasmas parcialmente ionizados (Wandurraga, 2022). Finalmente, con este trabajo se busca simular fenómenos astrofísicos más realistas al considerar la pérdida de energía por radiación, y para ello, primero hay que verificar la validez del módulo que calcula el término radiativo.

#### 5. Pruebas numéricas

##### 5.1. Prueba numérica en el régimen isotérmico

Actualmente existen pocas pruebas numéricas que validen el cálculo de la pérdida de calor por radiación, en especial cuando se trata de la ecuación de transferencia de radiación independiente del tiempo (71). Sin embargo, en Gudiksen et al. (2011) se encuentra una manera de comprobar

numéricamente la solución a la ecuación de transferencia de radiación en el régimen de difusión isotérmica. Para ello se asume que la función fuente es de la forma

$$S(\tau') = \left[ 1 - (1 - \sqrt{\varepsilon}) e^{-\sqrt{3\varepsilon}\tau'} \right] B, \quad (29)$$

de tal manera que si la profundidad óptica aumenta,  $\tau \rightarrow \infty$ , la función fuente se aproxima a la función de Planck  $S \approx B$  (aproximación válida en la atmósfera solar para valores grandes de  $\tau$ ), y si la profundidad óptica es baja,  $\tau \rightarrow 0$ , la función fuente se aproxima a  $S = \sqrt{\varepsilon}B$ , donde  $\varepsilon$  corresponde a la probabilidad de destrucción de fotones, que modula la función  $S(\tau)$  a baja profundidad óptica. La ecuación fuente (29) conlleva a una solución analítica para la intensidad de radiación (7) (ver procedimiento en el anexo 3), dando como resultado la expresión

$$J_{\text{an}}(\tau) = \left[ 1 - \frac{e^{-\sqrt{3\varepsilon}\tau}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \right] B, \quad (30)$$

la cual se compara con la solución numérica deducida a partir de la función de recurrencia para la intensidad específica

$$I_V(\tau, \mu) = I_V(\tau_0, \mu) e^{(\tau - \tau_0)/\mu} - \frac{1}{\mu} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{(\tau - \tau')/\mu} S_V d\tau', \quad (31)$$

que se encuentra a partir de la ecuación de transferencia de radiación independiente del tiempo (16) (ver anexos 1 y 2). Para realizar la prueba numérica se considera que la profundidad óptica está en el intervalo  $\tau \in [10^{-4}; 10^4]$ , teniendo en cuenta diversos valores para el parámetro de probabilidad

de destrucción del fotón, que oscilan en el rango de entre  $\varepsilon = 1$  y  $\varepsilon = 10^{-6}$  y dos direcciones de propagación  $\mu = \pm 1/\sqrt{3}$ , asociadas al parámetro  $\Omega$  mediante la relación  $\mu \equiv \cos(\Omega)$ . Por simplicidad, se asume  $B = 1.0$  y por consiguiente las condiciones de frontera son  $I^-(\tau, \mu) = 0.0$  y  $I^+(\tau, \mu) = 1.0$ , donde la función de recurrencia para  $I^-$  comienza desde  $\tau = 10^{-4}$  y para  $I^+$  empieza desde  $\tau = 10^4$ , como se describe en el anexo 3 y en la sección 3 de Kunasz and Auer (1988).

Si bien los valores del parámetro  $\mu$  parecen impuestos por las condiciones de la prueba numérica, estos valores están directamente relacionados con la definición numérica del momento cero de radiación, descrito en la ecuación (7). Debido a que en la definición del momento cero de radiación se presenta una integral en el espacio de ángulo sólido,

$$J(\tau, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \Omega, \mu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = J(\tau, \mu), \quad (32)$$

dicha integral se puede expresar numéricamente mediante el uso de la cuadratura de Gauss-Legendre (Lowan et al. (1942)), definida como

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(\mu_i), \quad (33)$$

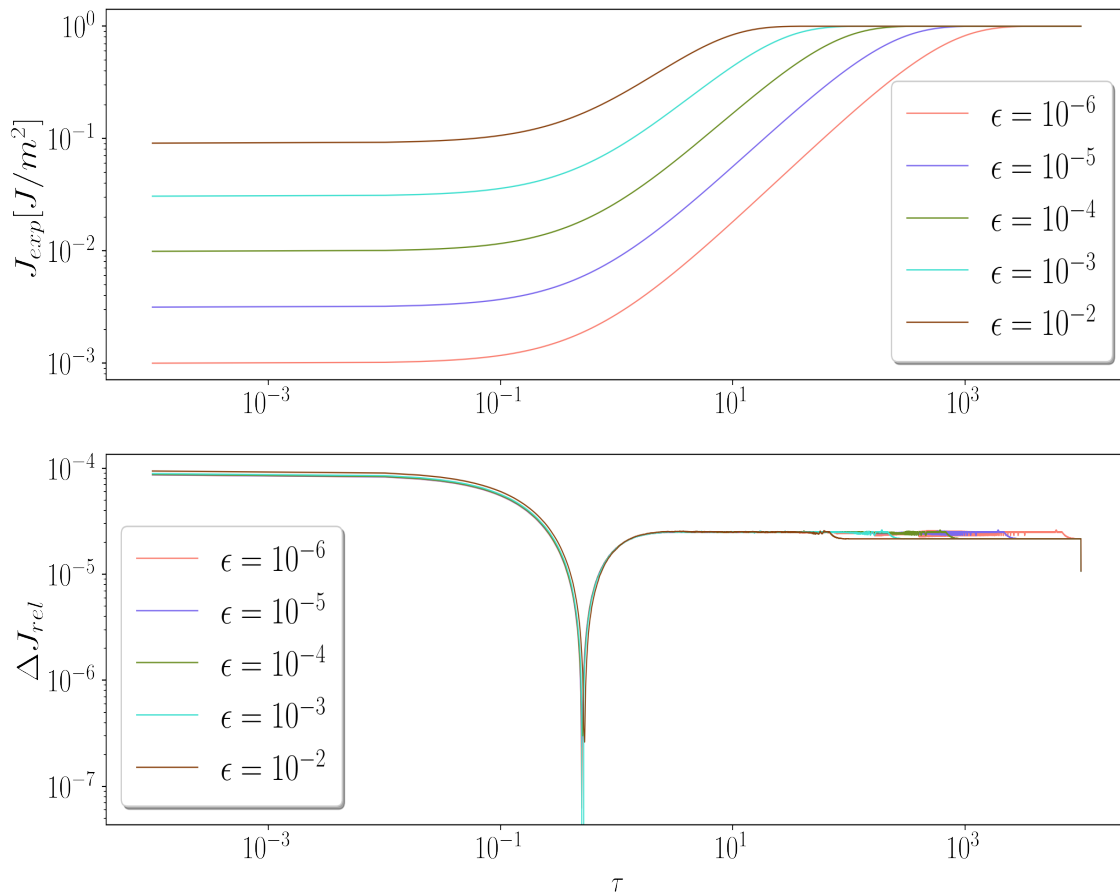
considerando el cambio de variable  $\mu = \cos(\Omega)$  y la función  $f(\mu) = I(\tau, \mu)$ . Esto implica que la integral en el ángulo sólido se representa numéricamente mediante la cuadratura de Gauss-Legendre para  $n = 2$ , siendo  $n$  el número de puntos escogidos en la ecuación (33). Si se desea

mayor precisión en el cálculo de la integral, se puede escoger un valor mayor para  $n$  (ver tabla 1 del anexo 2). Dado que para un valor de  $n = 2$  los coeficientes son  $w_1 = w_2 = 1$ , la expresión numérica del momento cero de radiación es

$$J(\tau, \mu) = \frac{1}{2} [I^+(\tau, \mu) + I^-(\tau, \mu)]. \quad (34)$$

Finalmente, para determinar la exactitud del cálculo de la intensidad de radiación, se compara la ecuación (30) con la expresión obtenida numéricamente (34), como se observa en la figura 5.1. En dicha imagen, en la parte superior, se observa el comportamiento de la intensidad de radiación  $J_{exp}$  para cinco diferentes valores del parámetro  $\varepsilon$ , indicando que a mayor profundidad óptica, dicha intensidad tiende a  $J_{exp} \rightarrow 1$  (sin la asunción de la función de Planck  $B = 1.0$ , la aproximación sería  $J_{exp} \rightarrow B$ ). En la gráfica inferior se aprecia el error relativo entre la curva analítica y la numérica, indicando que los errores son menores a  $10^{-4}$  para todos los casos, lo cual es un resultado satisfactorio ya que hay exactitud en el modelo.

Por otra parte, en la figura 5.2 se graficaron las intensidades  $I^+(\tau, \mu)$  e  $I^-(\tau, \mu)$  junto con el momento cero de radiación  $J_{exp}$  para  $\varepsilon = -1$ . En ella se evidencia un comportamiento similar al de la gráfica 5.1 del momento cero de radiación y su respectivo error relativo. Además se aprecia gráficamente la definición de  $J_{exp}$  en la expresión (34), ya que se puede visualizar la intensidad de radiación total como un promedio de las intensidades específicas  $I^+$  e  $I^-$ .

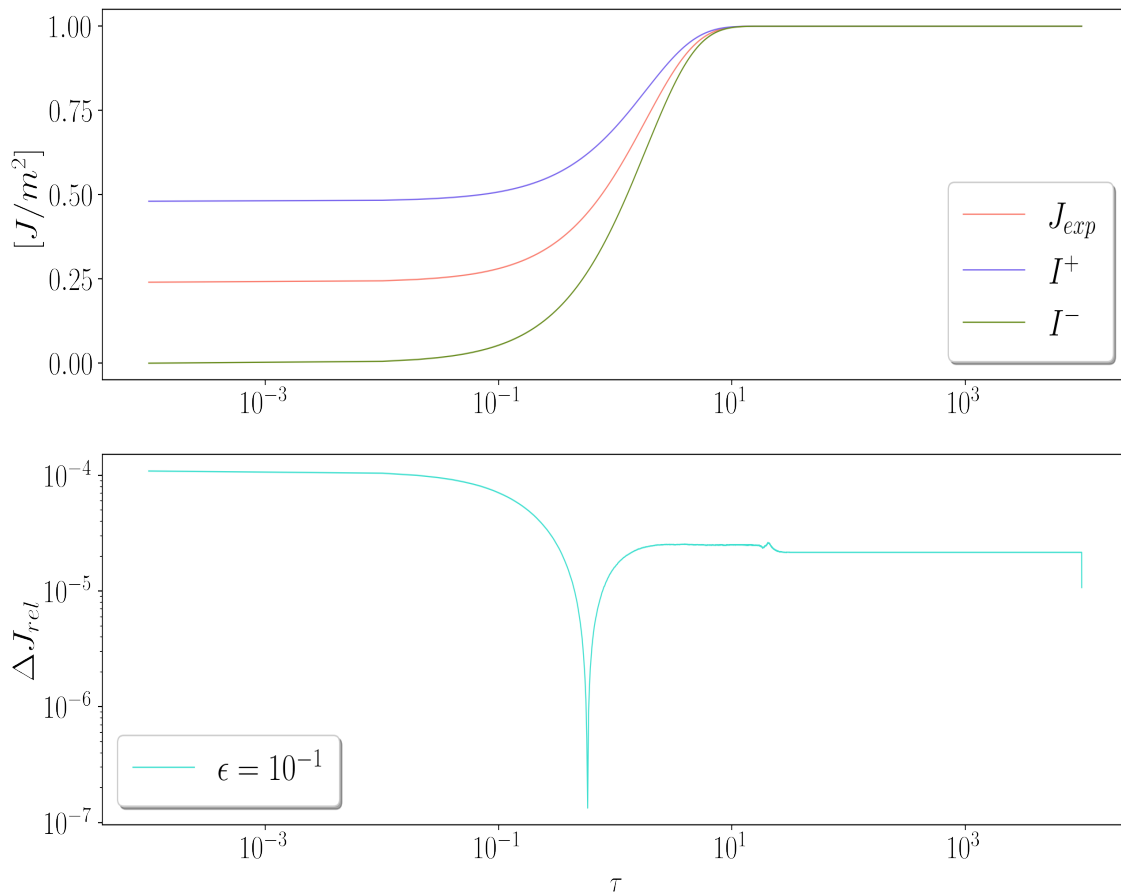


*Figura 5.1.* En esta figura se puede observar en parte superior, el comportamiento de la densidad de energía de radiación numérico dependiendo de los diferentes valores del parámetro  $\epsilon$ ,  $\epsilon \in [10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}]$ . En la parte inferior se aprecia la curva que representa el error relativo de la intensidad de radiación para los respectivos valores del parámetro  $\epsilon$ .

## 5.2. Prueba numérica para la opacidad y la pérdida de radiación

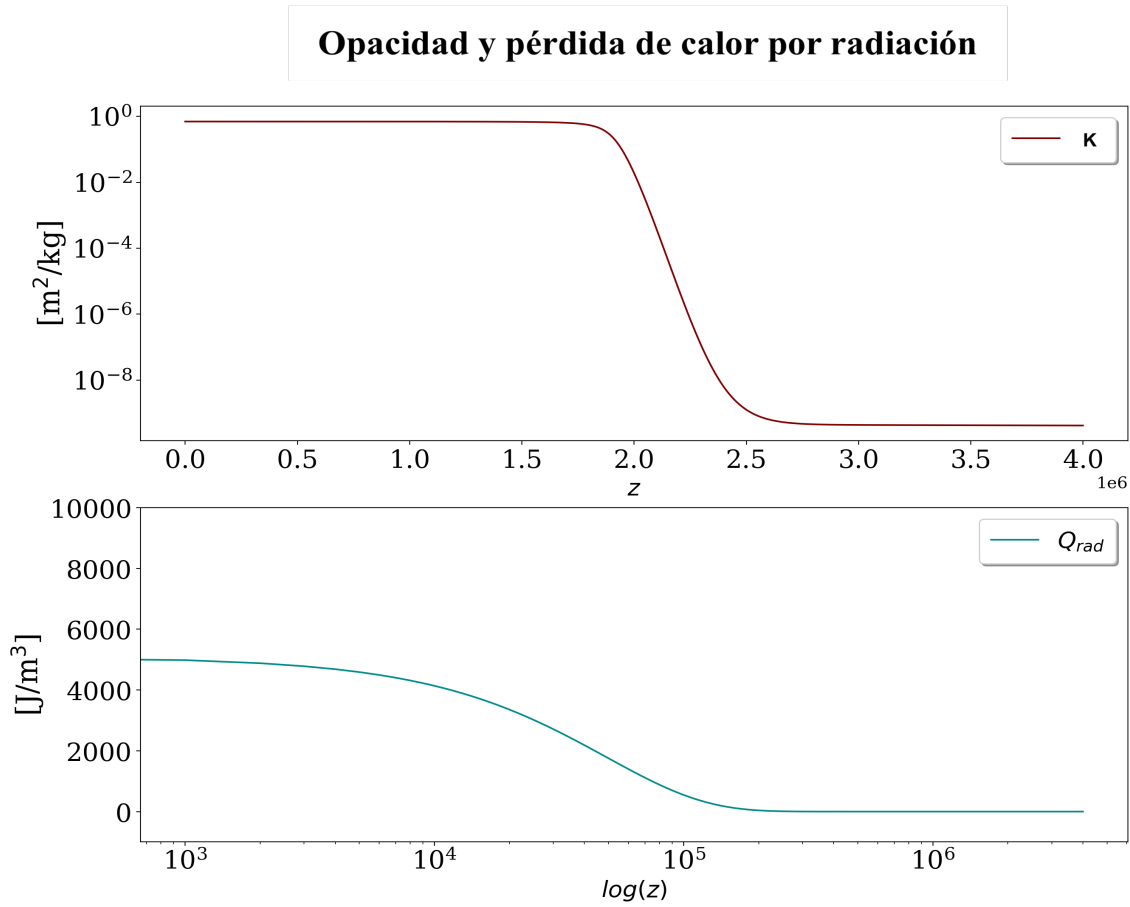
Según las propiedades del plasma en la atmósfera solar, la opacidad total tiene un comportamiento decreciente debido a la dependencia de la opacidad *bound-free* con respecto a la densidad de masa y la temperatura (ver ecuaciones (21) y (23)). La densidad de masa se reduce drásticamente desde la fotosfera hasta la corona solar (Noyes, 1971), y la temperatura, por el contrario, aumenta





*Figura 5.2.* En esta figura se aprecia el comportamiento del momento cero de radiación o densidad de energía de radiación para  $\epsilon = 1.0$ . En la parte superior se aprecia el comportamiento de la densidad de energía de radiación en comparación con las intensidades específicas, y en la parte inferior se presenta la gráfica del error relativo.

radicalmente en la región de transición por un fenómeno llamado calentamiento coronal (Klimchuk, 2015). Para modelar este comportamiento se usó un perfil teórico de la temperatura dado por Cargill et al. (1997) y Del Zanna et al. (2005), con el cual se estudió la propagación de pulsos de Alfvén en la atmósfera solar. Al implementar este modelo en la ecuación (21), se obtiene el comportamiento mostrado en el gráfico de la parte superior de la figura 5.3.



*Figura 5.3.* En la figura superior se describe la opacidad total,  $\kappa$ , a lo largo de la componente vertical, donde se observa un aumento en su magnitud en el régimen LTE, donde el plasma es ópticamente grueso. En la parte inferior se representa el término radiativo, también conocido como pérdida de calor por radiación, el cual presenta una tendencia similar a la opacidad.

Dada la opacidad total  $\kappa$ , se puede consecuentemente obtener el comportamiento de la curva de pérdida de radiación. Además, al basarse en la teoría que rige la ecuación de transferencia de radiación, entre mayor sea la opacidad, mayor será la pérdida de energía por radiación, lo que significa que el término radiativo es mayor en la parte baja de la atmósfera, como se puede apreciar en la

parte inferior de la figura 5.3. Por el contrario, en la atmósfera superior, la densidad del plasma es tan baja que los fotones atraviesan esta capa sin interacción alguna, haciendo que la pérdida de calor por radiación sea prácticamente nula en esta zona.

## 6. Efectos de los términos radiativos en la propagación de ondas MHD no lineales

Los resultados obtenidos en la sección anterior (5.2) corresponden a una estimación numérica de la pérdida de calor por radiación en lo que se denomina “*quiet Sun*”<sup>1</sup>, es decir, es una predicción asociada a una atmósfera que si bien está estratificada en su densidad y temperatura, no presenta ningún tipo de perturbación que genere la propagación de ondas magnetohidrodinámicas. No obstante, el estudio de las ondas MHD es de suma importancia debido a que son un posible mecanismo de transferencia de energía, que contribuye a resolver un problema abierto de física solar conocido como calentamiento coronal (Stein and Leibacher, 1974). Por esta razón, se han realizado estudios observacionales y simulaciones numéricas que permiten estudiar las características de dichas ondas. Un ejemplo de ello es la detección y simulación de ondas de gravedad en la atmósfera baja por parte de Straus et al. (2008), donde se determinó que el flujo de energía en la cromosfera es de aproximadamente  $5 \text{ kW m}^{-2}$ . Otro ejemplo es la simulación de ondas de gravedad hecha por Murawski et al. (2013), en donde se calculó el flujo de energía transportada a través de una atmósfera solar magnetizada. Aunque se han realizado simulaciones de estas ondas, la influencia del término

---

<sup>1</sup> En español *Sol tranquilo*, es un término que se asocia a un estado de la atmósfera solar en el cual la dinámica del plasma es baja (mínimo solar).

radiativo es usualmente omitida. Por tal motivo, en este trabajo se procedió a realizar simulaciones de dos fenómenos observables en la atmósfera solar, de tal manera que se pueda determinar la pérdida de energía transportada debido a la generación de radiación. El primer fenómeno es el transporte de energía por ondas de gravedad, el cual se simuló para la parte baja de la atmósfera solar. Y el segundo es la propagación de ondas de Alfvén en formaciones de arcadas coronales, las cuales abarcan varias decenas de megámetros de altitud, ocupando mayormente la atmósfera superior.

### 6.1. Ondas de gravedad

Para estudiar las ondas de gravedad de manera computacional, se asume una malla numérica 2.5D estratificada gravitacionalmente, en donde la densidad y la presión del plasma dependen de la altitud con respecto a la superficie del Sol. En consistencia con lo mencionado anteriormente, la condición de equilibrio magneto-hidrostático es de la forma

$$\frac{dp}{dz} + pg = 0, \quad (35)$$

siendo  $p$  la presión del plasma respecto a la altura y  $g$  la magnitud de la aceleración de la gravedad en la atmósfera solar. Dicha condición de equilibrio se complementa con la ecuación de estado,  $p = k_B \rho T / m_p$ , de modo que a partir de ambas expresiones se deducen las ecuaciones para la

densidad y la presión con respecto a la altura, obteniendo que

$$P(z) = P(z_0) \exp \left[ -\frac{m_p g}{k_B} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T(z')} \right], \quad (36)$$

donde  $m_p$  es la masa del protón,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura del plasma cuyo perfil se consideró de forma semi-observacional a partir de los datos obtenidos por Vernazza et al. (1981) para un “*quiet Sun*”. En cuanto al campo magnético, dadas las condiciones del Sol en su mínimo solar, se considera constante y en dirección vertical, con una magnitud acorde con las observaciones de la atmósfera solar (Murawski et al., 2013). Finalmente, para observar los efectos de la radiación, se agrega una perturbación de forma Gaussiana en la componente vertical del campo de velocidades, generando un pulso que se propaga ascendentemente transportando energía y momentum.

**6.1.1. Condiciones iniciales y de frontera.** La configuración inicial para esta simulación viene dada por un campo magnético constante en la dirección  $z$ ,

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z, \quad (37)$$

donde  $B_0 = 2.3 \times 10^{-3}$  T, y una perturbación en la componente vertical de la velocidad en forma

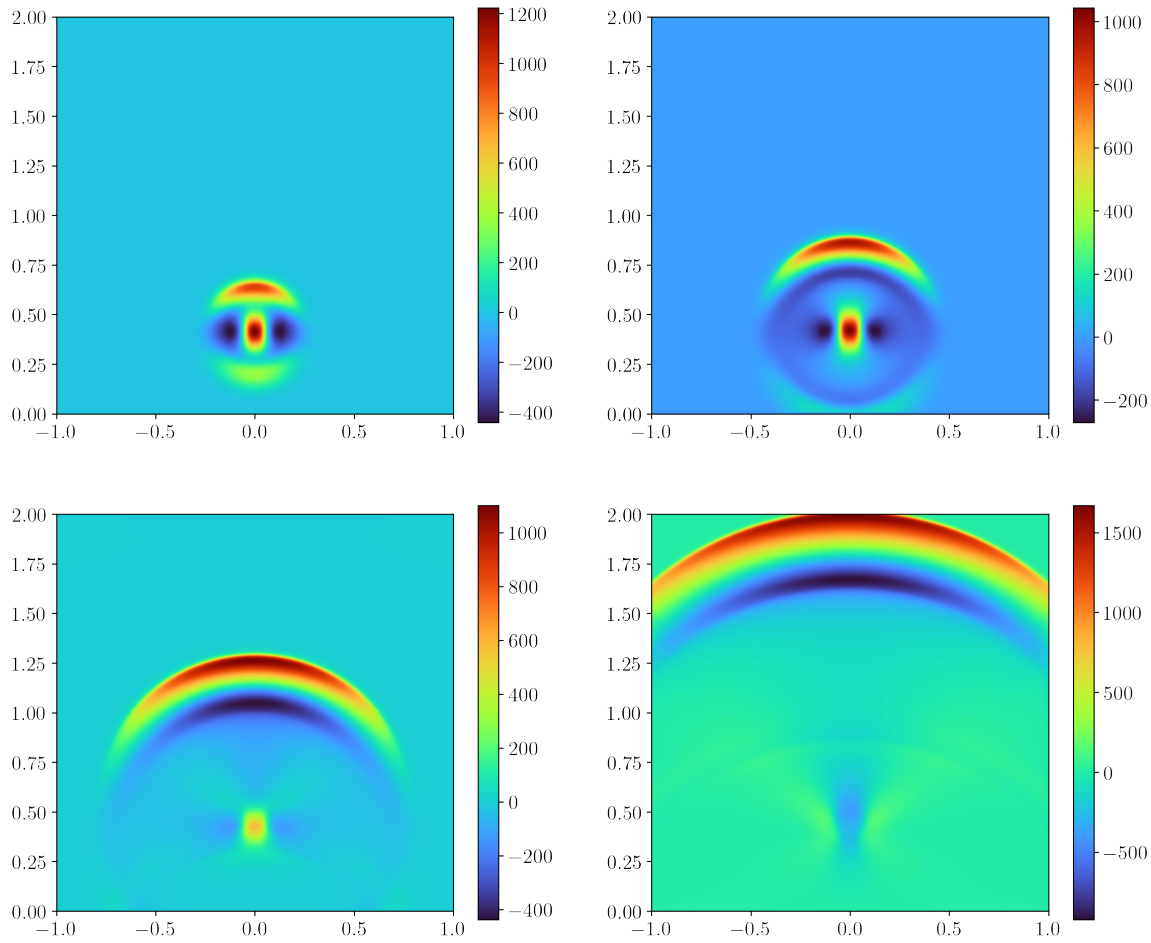
Gaussiana,

$$v_z = A \exp \left( [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2] / \omega \right), \quad (38)$$

donde  $A = 3 \text{ km s}^{-1}$  es la amplitud,  $z_0 = 500 \text{ km}$  la altitud inicial, y  $\omega = 100 \text{ km}$  el grosor del pulso. Por otra parte, la presión se calcula mediante la siguiente expresión (36), donde  $P(z_0) = 14 \text{ Pa}$  es la presión inicial y  $T$  es el perfil de temperatura dado por los datos observacionales publicados por Vernazza et al. (1981). Finalmente, la densidad de masa se obtiene a partir de la presión y la ecuación de estado.

Con respecto a los límites de frontera, se utilizaron condiciones de contorno fijadas en el tiempo en  $z = 0, 0 \text{ Mm}$ ,  $z = 2.0 \text{ Mm}$ , y el flujo de salida en las otras caras. El dominio en la dirección  $x$  se extiende desde  $x = -1, 0 \text{ Mm}$  hasta  $x = 1.0 \text{ Mm}$ , y la resolución de las imágenes mostradas en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 es de  $450 \times 900$ .

**6.1.2. Análisis y resultados.** Los resultados de la evolución temporal de la onda de gravedad sin pérdida de radiación se aprecian en la gráfica 6.1, en donde se ilustra la magnitud de la velocidad  $v_z$  en el plano  $(x, z)$ . En esta figura se pueden observar el pulso inicial propagándose a cuatro tiempos diferentes. En el recuadro superior izquierdo correspondiente a los 19 segundos, se observan dos frentes de onda en dirección vertical, uno ascendiente y otro de menor intensidad hacia la frontera inferior. Esto se debe a la estratificación de la atmósfera solar y posiblemente tam-

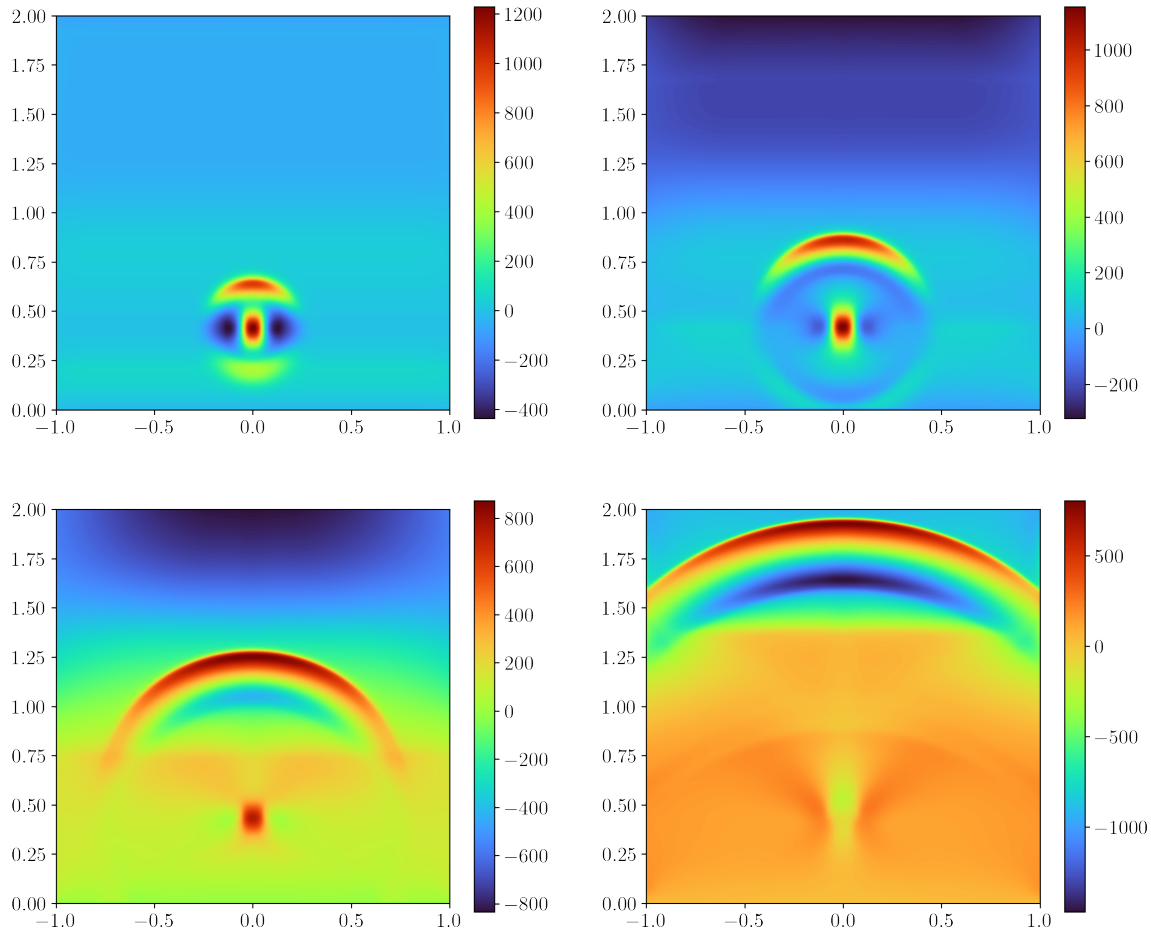


*Figura 6.1.* Propagación de la onda MHD a  $t = 19, 38, 68, 120$  s. La velocidad en la dirección  $z$ ,  $v_z$ , muestra la evolución del pulso inicial a través de la atmósfera solar. La última imagen muestra el comportamiento del frente de onda justo antes de llegar a la región de transición, donde la densidad del gas y la temperatura cambian drásticamente.

bién a la configuración inicial del campo magnético, el cual es positivo y constante en dirección  $z$ .

Este pulso parece reducir ligeramente su velocidad entre los 0.75 Mm y 1.25 Mm, como se observa en la escala de colores a los 38 y 68 segundos (recuadros superior derecho e inferior izquierdo).

Posteriormente, a los 120 segundos, su velocidad aumenta, e incluso es mayor con respecto a los tres tiempos anteriores.



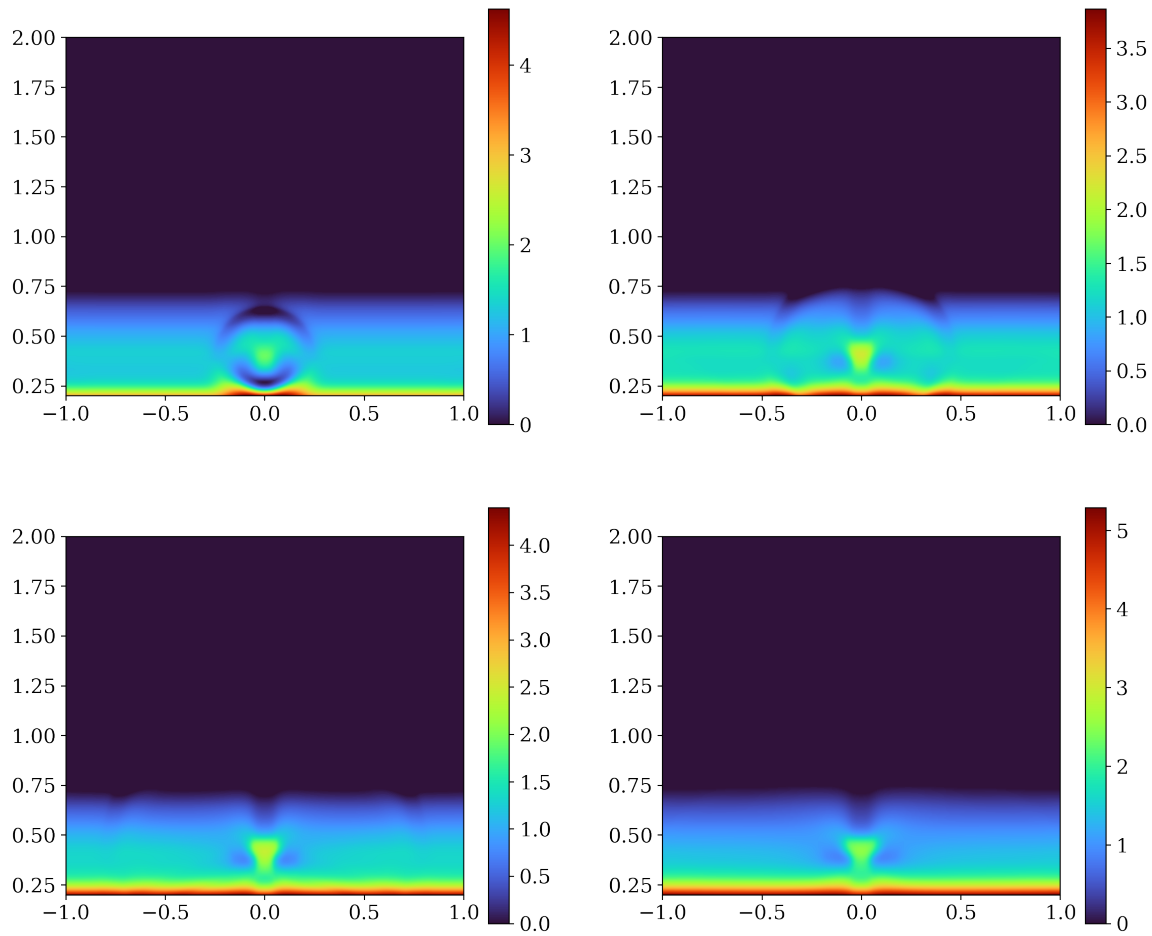
*Figura 6.2.* Propagación de la onda MHD a  $t = 19, 38, 68, 120$  s teniendo en cuenta pérdida de calor por radiación. La velocidad en la dirección  $z$ ,  $v_z$ , muestra la evolución del pulso inicial a través de la atmósfera solar. La última imagen muestra el comportamiento del frente de onda justo antes de llegar a la región de transición, donde la densidad del gas y la temperatura cambian drásticamente.

Cuando se implementa el término radiativo en el sistema de ecuaciones, los resultados de la simulación de la dinámica de las ondas cambian notoriamente, como se aprecia en la figura 6.2; en la cual se muestra la propagación de una onda de gravedad con las mismas condiciones iniciales indicadas previamente y en los mismos tiempos, 19, 38, 68, 120 s. Sin embargo, desde los primeros



19 s, se aprecia un ligero cambio en la zona superior de la simulación, el cual se remarca aún más a los 38 s, lo que indica que la pérdida de radiación no solo afecta al pulso sino a todo el plasma en general. En cuanto a la magnitud de la velocidad  $v_z$ , si bien inicialmente es la misma para ambos casos ( $\sim 1200$  m/s), posteriormente se ve drásticamente reducida, a tal punto que a los dos minutos, la velocidad máxima se reduce de  $\sim 1500$  a  $\sim 500$  m/s si se considera la pérdida de calor por radiación.

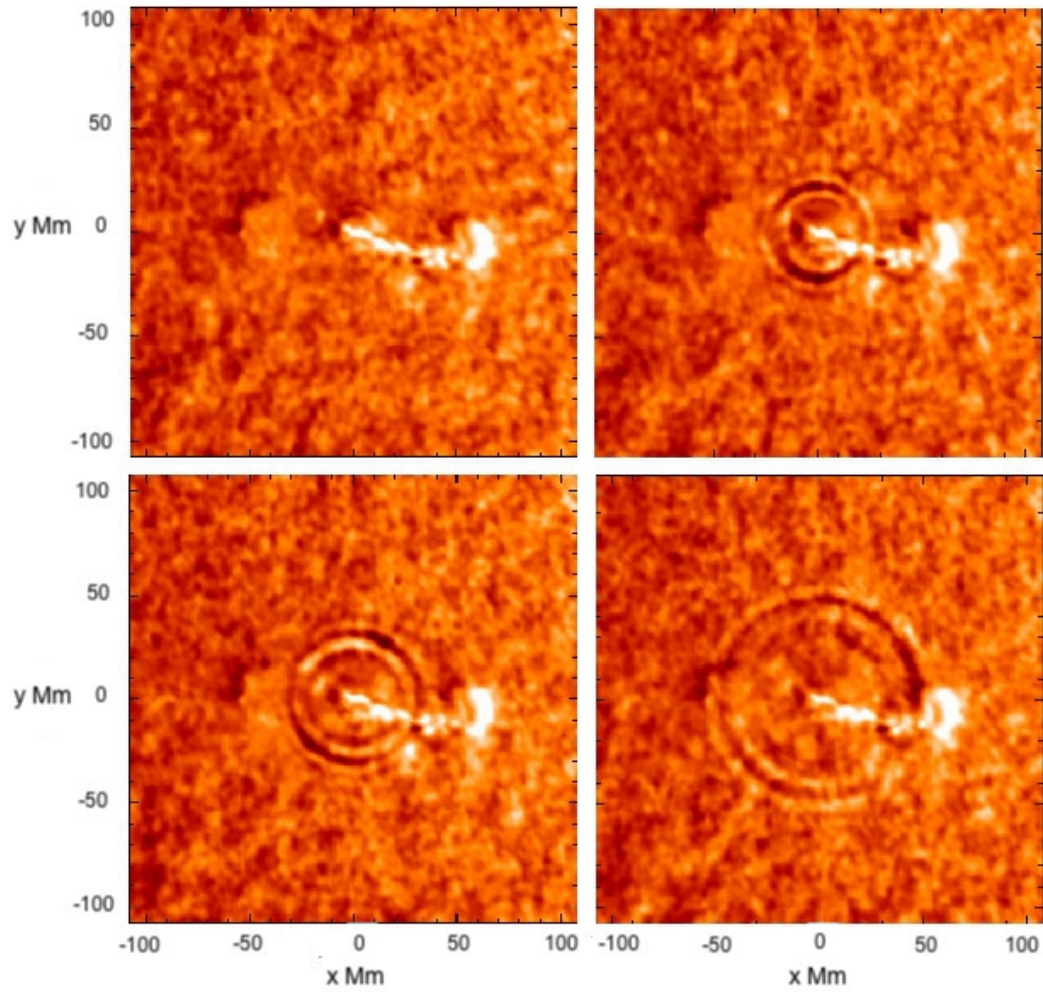
Por otra parte, se pudo llevar a cabo otro análisis interesante al observar el comportamiento de la pérdida de calor por radiación,  $Q_{rad}$ . En la gráfica 6.3 se puede apreciar que la pérdida de calor por radiación en la atmósfera superior es prácticamente nula, lo cual es consistente con la teoría de que en esta región el plasma posee una densidad tan baja que los fotones son liberados y no interactúan con la materia. También se observa cómo la propagación del pulso afecta la radiación que emana la superficie de la fotosfera, en aproximadamente  $z = 0.25$  Mm, en donde se forma un pulso centrado en  $x = 0.0$ , el cual se propaga a izquierda y derecha de la superficie solar, como ondas en la superficie de un estanque de agua (parte inferior de las sub-figuras en la gráfica 6.3). Este comportamiento se ha registrado a gran escala cuando se producen fulguraciones solares, las cuales están asociadas con la propagación de ondas de gravedad, debido a que en este fenómeno el plasma también se propaga de manera ascendente en la atmósfera solar. Cuando se forma una fulguración, se genera una perturbación en la emisión de radiación, tal y como se observa en la figura 6.4, en la cual se puede apreciar de manera frontal (plano  $x, y$ ) la estructura anillada de las ondas. Este fenómeno se logró observar a finales de la década de los 90s, y según el modelo más



*Figura 6.3.* Gráfica de las fluctuaciones en la densidad de energía de radiación,  $Q_{rad}$  [ $\text{J}/\text{m}^3$ ], a los 19, 38, 68, 120 [s] respectivamente. Se puede observar las diferentes alteraciones en la emisión de radiación a medida que la onda MHD se propaga a través de la atmósfera solar.

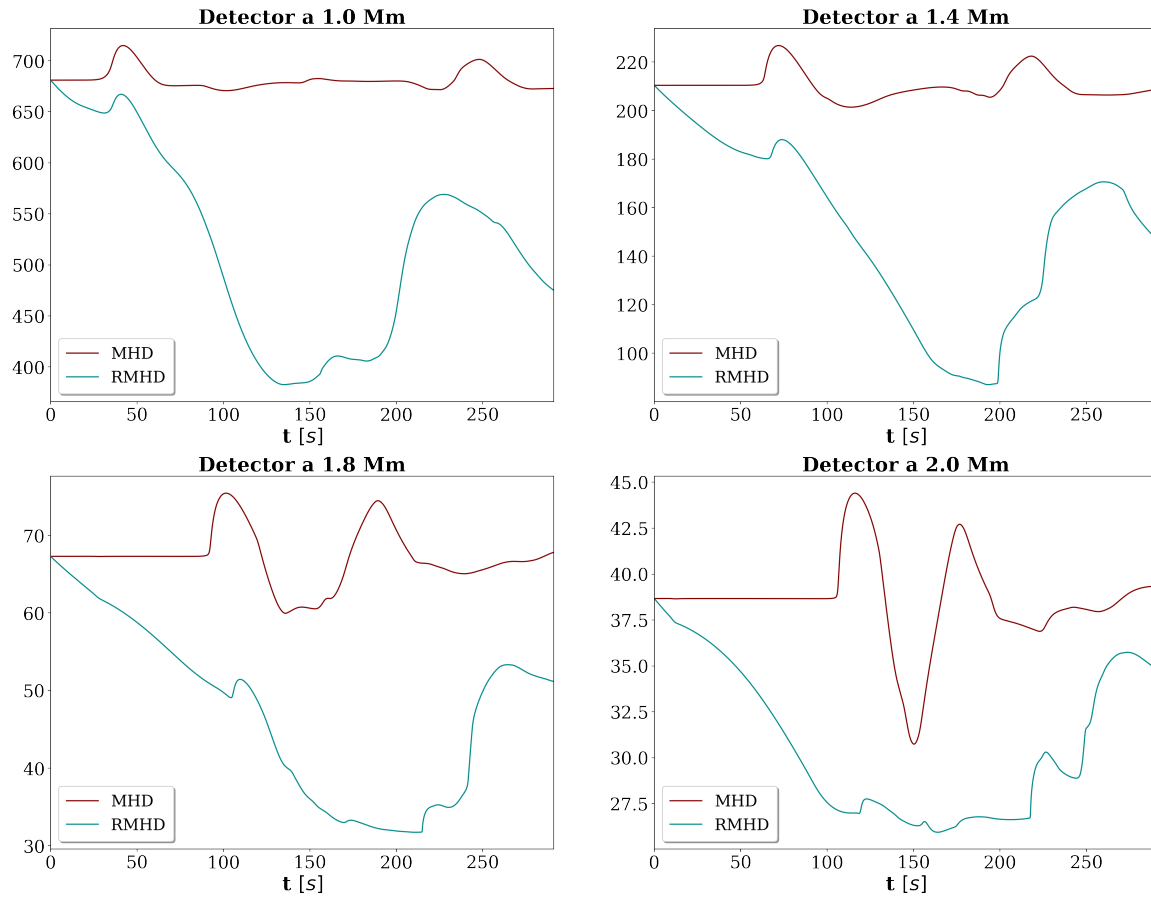
aceptado actualmente, la perturbación primaria genera electrones de alta energía, los cuales se canalizan hacia un tubo de flujo magnético y producen radiación en forma de rayos X y microondas, además de una onda de choque que calienta la superficie solar (Kosovichev and Zharkova, 1998).

Finalmente, aunque el análisis a las gráficas 6.1, 6.2 y 6.3 permite comprender el efecto de la radiación en la dinámica de la onda de gravedad, es conveniente observar el comportamiento de la



*Figura 6.4.* Perturbación en la emisión de radiación observada en la superficie solar revelada en los datos recogidos por el Michelson Doppler Imager (MDI) de Soho inmediatamente después de una llamarada o fulguración de tamaño moderado ocurrida el 9 de julio de 1996. **Imágenes tomadas por:** the Michelson Doppler Imager a bordo de: the European Space Agency/NASA Solar and Heliospheric Observatory (SOHO).

energía total del sistema. Para ello, se incorporaron en el código cuatro detectores de flujo de energía a cuatro alturas diferentes, 1.0, 1.4 y 1.8 Mm, como se aprecia en la figura 6.5. Las curvas rojas indican el comportamiento de la energía total (suma entre energía interna, cinética y magnética) sin considerar el término radiativo. En ellas se observa un comportamiento prácticamente constante,



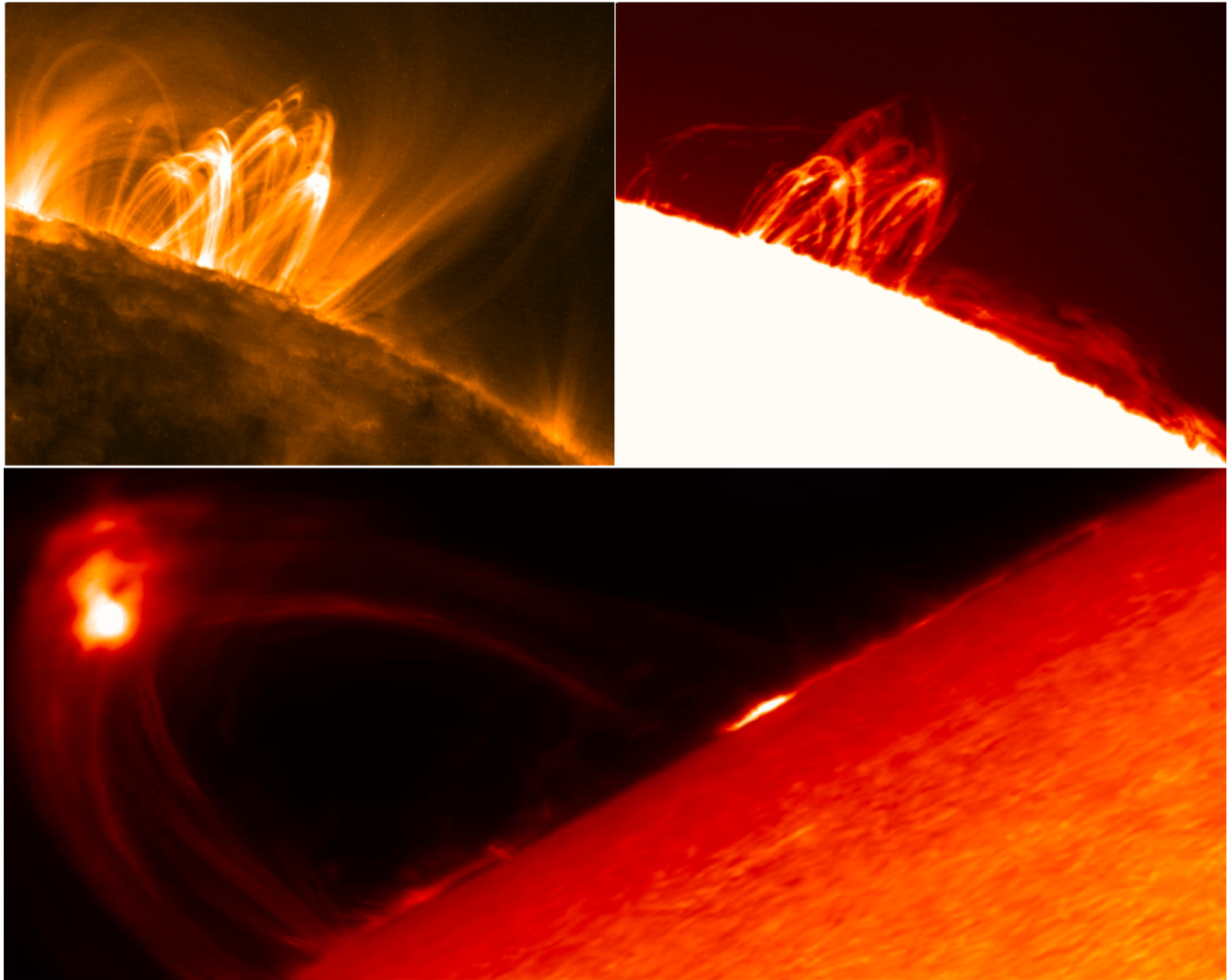
*Figura 6.5.* Energía total (interna, cinética y magnética) medida en cuatro detectores a 1.0, 1.4, 1.8 y 2.0 Mm. En esta figura se puede observar la reducción del flujo de energía a través del tiempo, mostrando una pérdida de energía final de 28.7 %, 28.6 %, 24.2 % y 11.0 % respectivamente.

que solo se ve afectado con el pasar de la onda gravitacional. Por otra parte, en azul se aprecia el comportamiento de la energía total al considerar pérdidas de calor por radiación. Estas curvas muestran cómo desde el inicio la energía se comienza a reducir y dicha reducción aumenta con el paso del tiempo. Al final de la simulación se obtuvo una reducción en la energía total de hasta 28.7 % en el detector ubicado a 1 Mm y de 28.6 %, 24.2 % y 11.0 % en los detectores localizados a 1.4, 1.8 y 2.0 Mm respectivamente, indicando que a mayor altitud, menor es la pérdida de energía.

## 6.2. Ondas de Alfvén en arcadas coronales

El segundo fenómeno de la atmósfera solar que se simula con el fin de corroborar el buen funcionamiento del código, es la propagación de pulsos de Alfvén en arcadas coronales. Estas formaciones, a diferencia de la onda de gravedad simuladas previamente, están ubicadas en gran parte en la corona solar, alcanzando decenas de megámetros de altitud, como se aprecia en la figura 6.6. En ella se observan dos formaciones de arcadas coronales; las dos fotografías superiores corresponden a arcadas formadas en septiembre del año 2000, y la fotografía inferior fue tomada a otro sistema de arcadas formado 17 años después. Ambas formaciones son tan grandes que se alcanza a percibir la curvatura del Sol.

Para simular las ondas de Alfvén se considera las mismas ecuaciones de estado y equilibrio magneto-hidrostático impuestas en la simulación de las ondas de gravedad. Esto se debe a que ambos eventos tienen como base una atmósfera solar gravitacionalmente estratificada. No obstante, para la generación de los pulsos de Alfvén se requiere una configuración diferente para el campo magnético y el campo de velocidades, además de una malla numérica considerablemente más grande, dada la magnitud espacial de las arcadas coronales.



*Figura 6.6.* Las dos imágenes superiores muestran el conjunto de arcadas AR9154, las cuales fueron observadas el 12 de septiembre del año 2000, alrededor de las 11:41 UT. Estas fotografías muestran un sistema de bucles corales a 1 millón de grados (arriba) y a unos 10.000 grados (abajo), los cuales se formaron después de lo que probablemente fue una fulguración C4.6 ocurrida a las 08:55 UT. La imagen inferior corresponde a las arcadas corales formadas a partir de la fulguración X8.2 el 10 de Septiembre de 2017. **Imágenes tomadas por:** the Transition Region and Coronal Explorer (TRACE) & the Swedish Solar Telescope (SST).

**6.2.1. Condiciones iniciales y de frontera.** Para reproducir el fenómeno de la arcada coronal de forma computacional, se propone una configuración del campo magnético de la forma

$$B_x = B_0 \cos(kx) \exp(-kz), \quad (39)$$

$$B_z = B_0 \sin(kx) \exp(-kz), \quad (40)$$

donde  $B_0 = 40$  G es la magnitud del campo magnético en la fotosfera, que se origina en los puntos base  $x = \pm L/2$ . La frecuencia angular es  $k = \pi/L$  siendo  $L$  una longitud característica,  $L = 50$  Mm. Por otra parte, la presión y la densidad se calculan de la misma manera que para las ondas de gravedad, a partir de la expresión (36) y la ecuación de estado

$$p = k_B \rho T / m_p, \quad (41)$$

siendo  $T$  el perfil de temperatura obtenido de Vernazza et al. (1981), el cual también se utiliza en esta simulación, ya que dicho perfil es válido desde la fotosfera hasta la corona solar, a aproximadamente 68 Mm. Por otra parte, el perfil de velocidades utilizado es nulo en las componentes  $v_x$  y  $v_z$ , pero de la forma

$$v_y = \frac{0.1 v_0}{1 + \left\{ [x^2 + (z - L/2)^2]^2 / r_0^4 \right\}}, \quad (42)$$

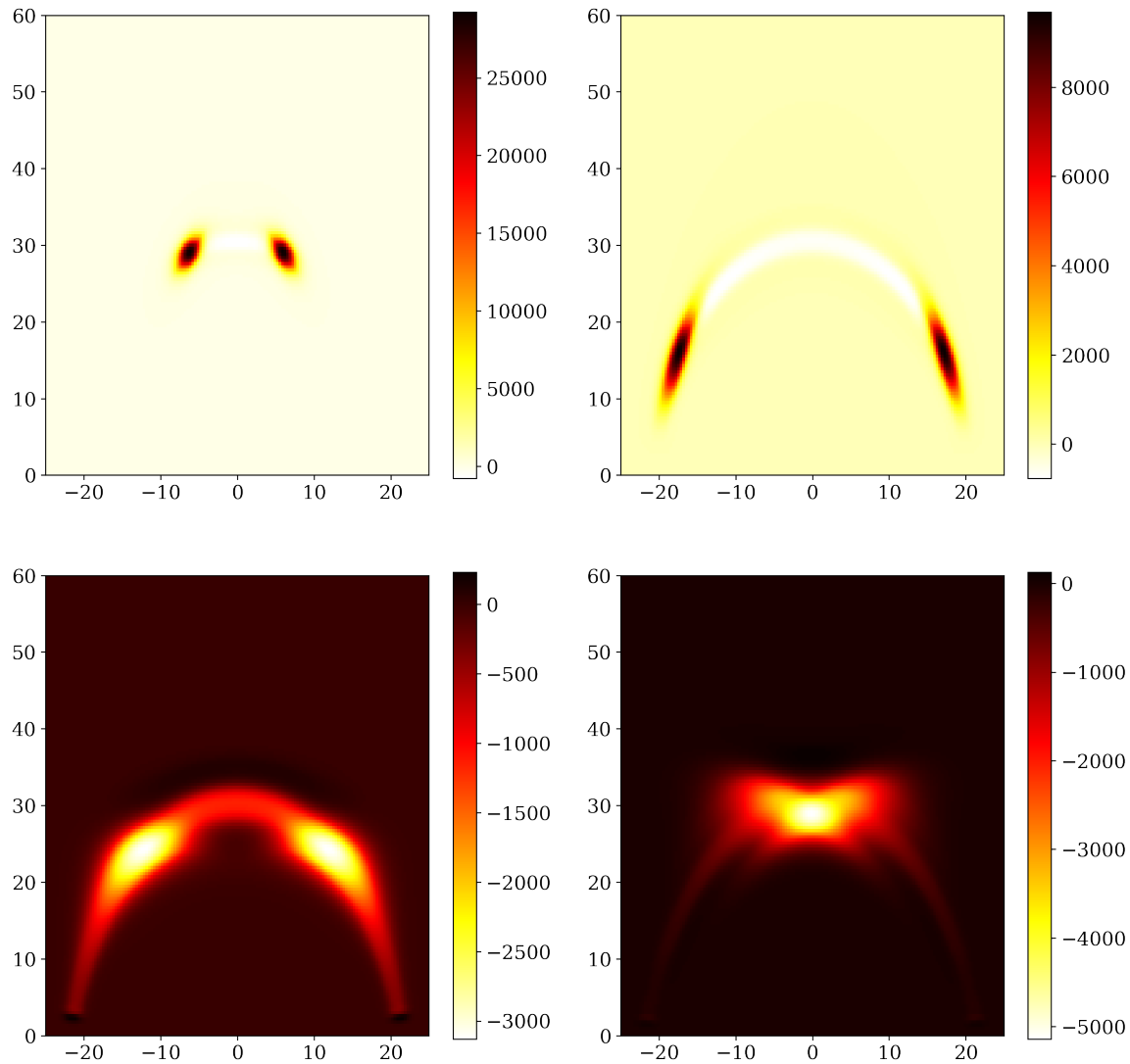
en la componente transversal, donde  $v_0 = 1 \text{ Mm} \cdot \text{s}^{-1}$  y  $r_0 = 1 \text{ Mm}$ . Finalmente, para esta simula-

ción se utilizaron condiciones de contorno fijadas en el tiempo en  $z = 0$  Mm,  $z = 50$  Mm, y el flujo de salida en las otras caras. El dominio en la dirección  $x$  se extiende desde  $x = -25$  Mm hasta  $x = 25$  Mm, y la resolución para las imágenes mostradas en las figuras 6.7 y 6.8 es de  $200 \times 200$ .

**6.2.2. Análisis y resultados.** Al igual que con la propagación de ondas MHD, en esta sección se presentan los resultados de la evolución temporal y flujo de energía del fenómeno. Primero se muestra en la figura 6.7 la velocidad transversal de propagación de pulsos de Alfvén ( $v_y$ ) en la formación de arcadas coronales, sin pérdidas de energía por radiación. En ella se observa cómo inicialmente los pulsos se separan, dirigiéndose cada uno hacia un lado del eje central en  $x = 0$  de la simulación, hasta que la distancia entre ellos es de aproximadamente 40 Mm. En este punto los pulsos se reflejan, su velocidad cambia de dirección, y se vuelven a unir formando un arco, similar al observado en la figura 6.6, en cuyo punto máximo se encuentra la región con mayor velocidad.

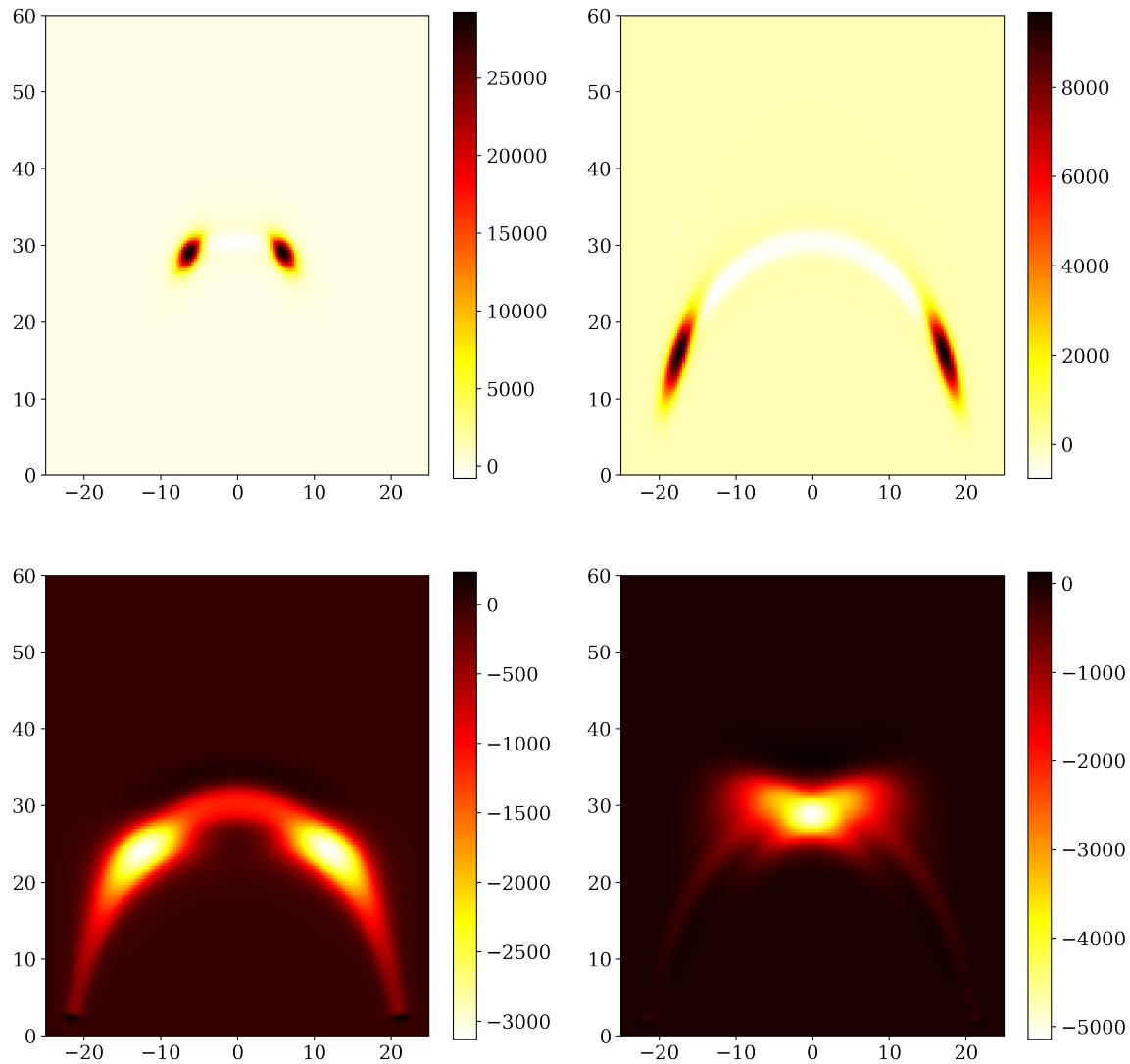
De la misma forma, se simuló la propagación de los pulsos de Alfvén teniendo en cuenta la pérdida de energía por la interacción materia y radiación, como se muestra en la figura 6.8. Al observar el comportamiento de los pulsos de Alfvén, y considerando que tanto las condiciones iniciales como los tiempos son los mismos, se puede deducir que el término radiativo tiene poco impacto en la simulación de la arcada coronal, pues las gráficas 6.7 y 6.8 son prácticamente idénticas.





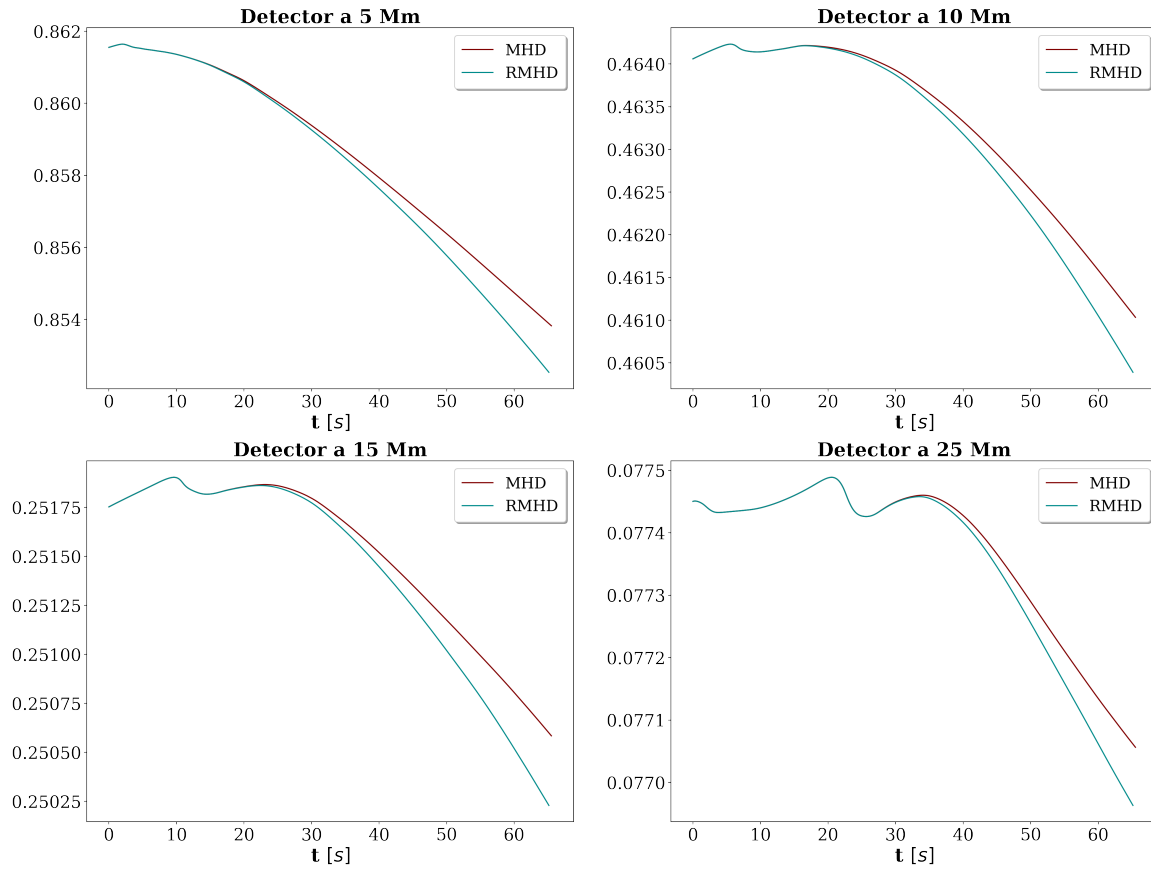
*Figura 6.7.* Velocidad transversal,  $v_y$   $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , de los pulsos de Alfvén a los 9, 27, 50 y 64 s, usando el sistema de ecuaciones MHD sin término radiativo. En los recuadros superiores se aprecia cómo inicialmente los pulsos se alejan hasta aproximadamente 40 Mm de distancia, y en los recuadros inferiores, se observa que los pulsos retornan hasta su punto de partida formando una arcada.

Para reafirmar la deducción previa, se puede analizar el flujo de energía total a diferentes altitudes de la atmósfera solar. En la figura 6.9 se observa la curva de densidad de energía total (interna, cinética y magnética) a 5, 10, 15 y 25 Mm de altura. En rojo se tienen las curvas de la simulación



*Figura 6.8.* Velocidad transversal,  $v_y$  m·s<sup>-1</sup>, de los pulsos de Alfvén a los 9, 27, 50 y 64 s, usando el sistema de ecuaciones MHD con término radiativo. En los recuadros superiores se aprecia cómo inicialmente los pulsos se alejan hasta aproximadamente 40 Mm de distancia, y en los recuadros inferiores, se observa que los pulsos retornan hasta su punto de partida formando una arcada.

MHD y en azul punteado las curvas de la simulación Rad-MHD. Se aprecia un comportamiento muy similar entre las dos curvas en las cuatro altitudes. Esto se debe en parte a que los pulsos de Alfvén son perpendiculares al plano en el cual se mide el flujo de energía, pero también es causado



*Figura 6.9.* Densidad de energía total (interna, cinética y magnética) medida en cuatro detectores a 5.0, 10 y 15 y 25 Mm. En esta figura se puede observar la similitud en el comportamiento de la energía total entre las simulaciones con y sin el término radiativo, con pérdidas de radiación no mayores a 0.15 % en cada detector.

por la baja interacción del plasma con la radiación en la atmósfera superior, lo que implica un parámetro de opacidad bajo y por ende, poca pérdida de calor por radiación.

## 7. Conclusiones y discusión

### 7.1. Conclusiones

En este trabajo de investigación se realizó un modelo magnetohidrodinámico con términos radiativos a partir del código CAFE-MAGNUS, con el cual se realizaron simulaciones de la propagación de ondas MHD a través de diferentes capas de la atmósfera solar. Con este modelo se determinaron los efectos que conlleva el incluir la ecuación de transferencia de radiación al sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica, para el estudio de la dinámica solar, encontrando porcentajes de pérdida de energía por emisión de radiación a diferentes altitudes desde la fotosfera, pasando por la cromosfera, hasta la corona solar.

Para determinar la pérdida de calor por radiación en la dinámica del plasma solar, primero se dedujo de forma satisfactoria, el término radiativo que describe apropiadamente la interacción materia-radiación en la atmósfera solar (Leenaarts, 2020). Para lograrlo, se consideraron las debidas aproximaciones que se ajustaban con las características y condiciones del plasma solar. Posteriormente se acopló la ecuación de transferencia de radiación en el sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica, sentando las bases teóricas para realizar el acople numéricamente en el código MAGNUS.

Para acoplar apropiadamente el término de interacción materia-radiación en el código, se creó una subrutina especial para el cálculo de  $Q_{rad}$  en función de las variables espaciales  $(x, y, z)$ . Para ello,

se implementó el cálculo del apéndice 2 y la función de recurrencia (77), la cual se calculó mediante el método de "*short characteristics*" (Olson and Kunasz, 1987). Posteriormente, con el fin de verificar la correcta implementación del cálculo numérico de la densidad de radiación, se realizó la prueba numérica de transferencia de radiación en el régimen de difusión isotérmica (Gudiksen et al., 2011), obteniendo excelentes resultados, con errores relativos del orden de  $10^{-4}$  a  $10^{-7}$  en la densidad de energía de radiación numérica con respecto a la teórica.

Naturalmente, se extrapoló la solución de una densidad de energía de radiación monocromática a una solución general, mediante el agrupamiento y sumatoria en el espacio de frecuencias. Además, se definió un perfil de temperatura que se ajusta a las características de la atmósfera solar (Del Zanna et al., 2005), y con el cual se determinó la opacidad y la pérdida total de calor por radiación en función de la altura de la atmósfera solar, desde la fotosfera hasta la corona, como se aprecia en la figura 5.3. Para este resultado también se tuvo en cuenta una teoría para el parámetro de opacidad que modela apropiadamente la interacción del plasma con la radiación emitida desde las capas internas del Sol. Este modelo basado en la ley de Kramers, permitió obtener una curva de calor de radiación, y disminuyó el costo computacional debido a su independencia con respecto a la frecuencia.

Posteriormente, para obtener una medida de la importancia del término radiativo en la dinámica del plasma solar, se simularon dos fenómenos específicos. El primero fue la propagación de ondas de gravedad, en el cual se realizó una simulación usando las ecuaciones de la MHD y otra con las

ecuaciones de Rad-MHD, para posteriormente comparar ambas simulaciones y apreciar el efecto que tiene la radiación en las ondas de gravedad. De esta manera se obtuvo que la reducción en el flujo de energía total transportada por la onda, se reduce en casi 29 % hasta los 1.4 Mm de altitud. Este comportamiento se ve reflejado en el análisis morfológico de las gráficas bidimensionales, en las cuales también se aprecia la reducción en la velocidad de la onda. Al ilustrar la evolución del calor de radiación, también se observó un fenómeno interesante, en el cual se muestra la generación de ondas de calor que se propagan transversales al pulso de gravedad a través de la superficie en la fotosfera, lo cual coincide en gran medida con los datos observados por la sonda SOHO en 1996.

Finalmente, el segundo fenómeno simulado fue el de la oscilación de pulsos de Alfvén en la formación de arcadas coronales. A diferencia de las ondas de gravedad, la dimensión de un evento de este tipo, es del orden de decenas, incluso cientos de megámetros, lo que permitió estudiar la interacción materia radiación en la atmósfera superior. Al realizar el mismo proceso comparativo realizado en la simulación anterior, se estableció que la pérdida por calor de radiación en este tipo de fenómenos sí es despreciable (0.15 %), debido a la baja opacidad en esta región y a la oscilación transversal del pulso, el cual no permite transferir grandes cantidades de energía a lo largo del eje  $z$ . Con este último análisis se pudo determinar que el término radiativo juega un papel importante en la dinámica del plasma en la región inferior de la atmósfera solar, en especial en la fotosfera. Por lo tanto, el estudio de fenómenos que ocurren en dicha zona, debe realizarse considerando la transferencia de radiación.

## 7.2. Discusión

Para los próximos trabajos que continúen esta línea de investigación, es importante analizar la influencia de la radiación en otros de los diferentes fenómenos que ocurren en el Sol, tales como la formación de manchas solares o de fulguraciones. También es importante analizar los diferentes mecanismos de reconexión magnética y calentamiento coronal, ya que al incluir la ecuación de transferencia de radiación, el balance entre los diferentes tipos de energía podría verse afectado.

Por otra parte, existen otros modelos de opacidad tales como la opacidad *bound-bound* que si bien no son dominantes en la atmósfera solar, podrían analizarse más detalladamente para verificar el nivel de impacto que tendrían en la dinámica del plasma. También existen funciones de distribución de opacidad que si bien implicarían un costo computacional alto, podrían compensarlo con una pérdida de calor más detallada, permitiendo registrar el rango de frecuencias que tienen un mayor aporte a la opacidad en las capas externas del Sol.

### Referencias Bibliográficas

- Abbett, W. P. and Fisher, G. H. (2012). Radiative cooling in mhd models of the quiet sun convection zone and corona. *Solar Physics*, 277(1):3–20.
- Antolin, P. and van Der Voort, L. R. (2012). Observing the fine structure of loops through high-resolution spectroscopic observations of coronal rain with the crisp instrument at the swedish solar telescope. *The Astrophysical Journal*, 745(2):152.
- Atroshchenko, I. and Gadun, A. (1994). Three-dimensional hydrodynamic models of solar granulation and their application to a spectral analysis problem. *Astronomy and Astrophysics*, 291:635–656.
- Bhatia, A., Pesnell, W., et al. (2020). A note on the opacity of the sun’s atmosphere. *Atoms*, 8(3):37.
- Biesecker, D., Myers, D., Thompson, B., Hammer, D., and Vourlidas, A. (2002). Solar phenomena associated with “eit waves”. *The Astrophysical Journal*, 569(2):1009.
- Bjørgen, J. P., Leenaarts, J., Rempel, M., Cheung, M. C., Danilovic, S., de la Cruz Rodríguez, J., and Sukhorukov, A. V. (2019). Three-dimensional modeling of chromospheric spectral lines in a simulated active region. *Astronomy and Astrophysics*, 631:A33.
- Brown, E. (2015). *Stellar astrophysics*. Open astrophysics bookshelf.



- Bruls, J., Vollmöller, P., and Schüssler, M. (1999). Computing radiative heating on unstructured spatial grids. *Astronomy and Astrophysics*, 348:233–248.
- Cargill, P., Spicer, D., and Zalesak, S. (1997). Magnetohydrodynamic simulations of alfvénic pulse propagation in solar magnetic flux tubes: Two-dimensional slab geometries. *The Astrophysical Journal*, 488(2):854.
- Carroll, B. W. and Ostlie, D. A. (2017). *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press.
- Carson, T. (1976). Stellar opacity. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 14(1):95–117.
- Castor, J. I. (2003). Radiation hydrodynamics. Technical report, Lawrence Livermore National Lab.(LLNL), Livermore, CA (United States).
- Chalonge, D. (1946). The opacity of the atmosphere of the sun and the negative hydrogen ion. *Physica*, 12(9-10):721–732.
- De Pontieu, B., McIntosh, S. W., Hansteen, V. H., and Schrijver, C. J. (2009). Observing the roots of solar coronal heating—in the chromosphere. *The Astrophysical Journal Letters*, 701(1):L1.
- Del Zanna, L., Schaekens, E., and Velli, M. (2005). Transverse oscillations in solar coronal loops induced by propagating alfvénic pulses. *Astronomy & Astrophysics*, 431(3):1095–1104.
- Golding, T. P., Leenaarts, J., and Carlsson, M. (2016). Non-equilibrium helium ionization in an mhd simulation of the solar atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 817(2):125.

- Goossens, M., Erdélyi, R., and Ruderman, M. S. (2011). Resonant mhd waves in the solar atmosphere. *Space science reviews*, 158(2-4):289–338.
- Graham, D. and Cauzzi, G. (2015). Temporal evolution of multiple evaporating ribbon sources in a solar flare. *The Astrophysical Journal Letters*, 807(2):L22.
- Gudiksen, B. V. (2004). *The coronal heating problem*. PhD thesis, Institutionen för astronomi.
- Gudiksen, B. V., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Hayek, W., Leenaarts, J., and Martínez-Sykora, J. (2011). The stellar atmosphere simulation code bifrost-code description and validation. *Astronomy & Astrophysics*, 531:A154.
- Haberreiter, M., Schmutz, W., and Hubeny, I. (2008). Nlte model calculations for the solar atmosphere with an iterative treatment of opacity distribution functions. *Astronomy & Astrophysics*, 492(3):833–840.
- Heinemann, T., Dobler, W., Nordlund, Å., and Brandenburg, A. (2006). Radiative transfer in decomposed domains. *Astronomy and Astrophysics*, 448(2):731–737.
- Jiang, Y.-F., Stone, J. M., and Davis, S. W. (2012). A godunov method for multidimensional radiation magnetohydrodynamics based on a variable eddington tensor. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 199(1):14.
- Judge, P. G. (2015). Uv spectra, bombs, and the solar atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 808(2):116.

- Khodachenko, M., Arber, T., Rucker, H. O., and Hanslmeier, A. (2004). Collisional and viscous damping of mhd waves in partially ionized plasmas of the solar atmosphere. *Astronomy and Astrophysics*, 422(3):1073–1084.
- Kippenhahn, R., Weigert, A., and Weiss, A. (1990). *Stellar structure and evolution*, volume 192. Springer.
- Klimchuk, J. A. (2006). On solving the coronal heating problem. *Solar Physics*, 234(1):41–77.
- Klimchuk, J. A. (2015). Key aspects of coronal heating. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2042):20140256.
- Kosovichev, A. and Zharkova, V. (1998). X-ray flare sparks quake inside sun. *Nature*, 393(6683):317–318.
- Kretzschmar, M. (2011). The sun as a star: observations of white-light flares. *Astronomy and Astrophysics*, 530:A84.
- Kuhn, T. S. (1987). *Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912*. University of Chicago Press.
- Kunasz, P. and Auer, L. H. (1988). Short characteristic integration of radiative transfer problems: formal solution in two-dimensional slabs. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 39(1):67–79.
- Kurucz, R.-L. (1993). Atlas9 stellar atmosphere programs and 2km/s grid. *Kurucz CD-Rom*, 13.

- Leenaarts, J. (2020). Radiation hydrodynamics in simulations of the solar atmosphere. *Living Reviews in Solar Physics*, 17(1):1–46.
- Levermore, C. (1984). Relating eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 31(2):149–160.
- Levermore, C. and Pomraning, G. (1981). A flux-limited diffusion theory. *The Astrophysical Journal*, 248:321–334.
- Lodders, K. (2019). Solar elemental abundances. *arXiv preprint arXiv:1912.00844*.
- Lora-Clavijo, F., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. (2015). Cafe: a new relativistic mhd code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 218(2):24.
- Lowan, A. N., Davids, N., and Levenson, A. (1942). *Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula*, volume 18. American Mathematical Society.
- Martínez-Sykora, J., De Pontieu, B., Hansteen, V., and Carlsson, M. (2015). The role of partial ionization effects in the chromosphere. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2042):20140268.
- Matsumoto, R., Tajima, T., Shibata, K., and Kaisig, M. (1993). Three-dimensional magnetohydrodynamics of the emerging magnetic flux in the solar atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 414:357–371.

- Mihalas, D. and Weibel, B. (2013). *Foundations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation.
- Miyamoto, K. (1997). *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Iwanami Book Service Center Tokyo.
- Morton, R., Verth, G., Hillier, A., and Erdélyi, R. (2014). The generation and damping of propagating mhd kink waves in the solar atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 784(1):29.
- Murawski, K., Ballai, I., Srivastava, A., and Lee, D. (2013). Three-dimensional numerical simulation of magnetohydrodynamic-gravity waves and vortices in the solar atmosphere. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436(2):1268–1277.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., and González, G. A. (2017). Magnus: a new resistive mhd code with heat flow terms. *The Astrophysical Journal*, 844(1):57.
- Nordlund, Å. (1982). Numerical simulations of the solar granulation. i-basic equations and methods. *Astronomy and Astrophysics*, 107:1–10.
- Noyes, R. W. (1971). Ultraviolet studies of the solar atmosphere. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 9(1):209–236.
- Olson, G. L. and Kunasz, P. (1987). Short characteristic solution of the non-lte line transfer problem by operator perturbation—i. the one-dimensional planar slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 38(5):325–336.
- Phillips, A. C. (2013). *The physics of stars*. John Wiley & Sons.

- Pimentel Diaz, O. M., Lora Clavijo, F. D., and Gonzalez Villegas, G. A. (2019). Numerical general relativistic mhd with magnetically polarized matter. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts# 233*, volume 233, pages 107–06.
- Pols, O. (2011). Stellar structure and evolution, utrecht university lecture notes.
- Pomraning, G. C. (2005). *The equations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation.
- Rempel, M. (2016). Extension of the muram radiative mhd code for coronal simulations. *The Astrophysical Journal*, 834(1):10.
- Schnack, D. D. (2009). *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*, volume 780. Springer.
- Schrijver, C. J. (2001). Catastrophic cooling and high-speed downflow in quiescent solar coronal loops observed with trace. *Solar Physics*, 198(2):325–345.
- Shibata, K., Tajima, T., Steinolfson, R., and Matsumoto, R. (1989). Two-dimensional magnetohydrodynamic model of emerging magnetic flux in the solar atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 345:584–596.
- Smerlak, M. (2010). A blackbody is not a blackbox. *European Journal of Physics*, 32.
- Stein, R. and Nordlund, Å. (1998). Simulations of solar granulation. i. general properties. *The Astrophysical Journal*, 499(2):914.

- Stein, R. F. and Leibacher, J. (1974). Waves in the solar atmosphere. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 12:407–435.
- Steiner, O., Grossmann-Doerth, U., Knölker, M., and Schüssler, M. (1995). Simulation of the interaction of convective flow with magnetic elements in the solar atmosphere. In *Reviews in Modern Astronomy*, volume 8, pages 81–102.
- Straus, T., Fleck, B., Jefferies, S. M., Cauzzi, G., McIntosh, S. W., Reardon, K., Severino, G., and Steffen, M. (2008). The energy flux of internal gravity waves in the lower solar atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 681(2):L125.
- Thuillier, G., Foujols, T., Bolsée, D., Gillotay, D. d., Hersé, M., Peetermans, W., Decuyper, W., Mandel, H., Sperfeld, P., Pape, S., et al. (2009). Solar/solspec: Scientific objectives, instrument performance and its absolute calibration using a blackbody as primary standard source. *Solar Physics*, 257(1):185–213.
- Tomida, K., Tomisaka, K., Matsumoto, T., Hori, Y., Okuzumi, S., Machida, M. N., and Saigo, K. (2012). Radiation magnetohydrodynamic simulations of protostellar collapse: protostellar core formation. *The Astrophysical Journal*, 763(1):6.
- Vernazza, J. E., Avrett, E. H., and Loeser, R. (1981). Structure of the solar chromosphere. iii-models of the euV brightness components of the quiet-sun. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 45:635–725.

- Vögler, A., Bruls, J., and Schüssler, M. (2004). Approximations for non-grey radiative transfer in numerical simulations of the solar photosphere. *Astronomy and Astrophysics*, 421(2):741–754.
- Vögler, A., Shelyag, S., Schüssler, M., Cattaneo, F., Emonet, T., and Linde, T. (2005). Simulations of magneto-convection in the solar photosphere-equations, methods, and results of the muram code. *Astronomy and Astrophysics*, 429(1):335–351.
- Wandurraga, P. C. (2022). *Construcción de un código MHD con dos fluidos para el estudio de la dinámica del plasma en la atmósfera solar*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander.
- Warren, H., Mariska, J., and Wilhelm, K. (1998). High-resolution observations of the solar hydrogen lyman lines in the quiet sun with the sumer instrument on soho. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 119(1):105.



## Apéndices

### Apéndice A. Reproducción teórica de la ecuación de transferencia de radiación

Para deducir la ecuación de transferencia de radiación, se parte de considerar un sistema de  $N_f$  fotones en el espacio de fase, ocupando un volumen  $\Delta V$ ,

$$N_f = f(x, y, z, \Omega, \nu, t) \Delta V, \quad (43)$$

donde  $f$  es una función de distribución dependiente de tres variables espaciales,  $x, y$  &  $z$ , una variable direccional,  $\Omega$ , otra variable relacionada a la energía del fotón,  $\nu$  y finalmente, el tiempo  $t$ . Posteriormente, para determinar su dinámica, se deriva la ecuación en función del tiempo, teniendo en cuenta la dependencia de la función de distribución. En este caso, se hará uso de un marco de referencia comóvil (sin usar el teorema de Liouville). Esto para demostrar que el resultado es independiente del marco de referencia que se utilice (Euleriano o Lagrangiano). Aplicando la regla de la cadena, se tiene que la variación del número de fotones en el tiempo es

$$\frac{dN_f}{dt} = \frac{df}{dt} \Delta V + f \frac{d\Delta V}{dt}, \quad (44)$$

donde  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta \Omega \Delta \nu$ . Por consiguiente, el segundo término de la expresión anterior toma

la forma

$$\frac{dN_f}{dt} = \frac{df}{dt} \Delta V + f \left[ \sum_{i=1}^5 \left( \frac{dq_i}{dt} \prod_{j \neq i}^5 q_j \right) \right], \quad (45)$$

siendo  $q_1 = \Delta x$ ,  $q_2 = \Delta y$ ,  $q_3 = \Delta z$ ,  $q_4 = \Delta \Omega$  y  $q_5 = \Delta v$ . Ahora, multiplicando por el factor  $\frac{q_i}{q_i}$  a cada componente  $i$  de la sumatoria, se obtiene que

$$\frac{dN_f}{dt} = \Delta V \left[ \frac{df}{dt} + f \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) \right]. \quad (46)$$

Por otra parte, considerando  $\Delta x = x_2 - x_1$ , el primer término en la sumatoria de la parte derecha, se puede expresar como

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - x_1), \quad (47)$$

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \dot{x}|_{x=x_2} - \dot{x}|_{x=x_1}, \quad (48)$$

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{\dot{x}|_{x_2} - \dot{x}|_{x_1}}{\Delta x} \Delta x, \quad (49)$$

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \Delta x. \quad (50)$$

Este procedimiento se realiza de manera análoga con los otros cuatro parámetros del espacio de

fase ( $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta \Omega$  y  $\Delta v$ ), y al reemplazar cada resultado en su respectivo término de la sumatoria de la ecuación (46), da como resultado

$$\frac{dN_f}{dt} = \Delta V \left[ \frac{df}{dt} + f \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \Omega} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right) \right], \quad (51)$$

en donde el primer término a la derecha de la ecuación anterior es una derivada total que se puede redefinir mediante derivadas parciales, para ello se utiliza la regla de la cadena debido a la dependencia de la función de distribución,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial \Omega} \dot{\Omega} + \frac{\partial f}{\partial v} \dot{v}, \quad (52)$$

lo que permite simplificar la expresión (51), al agrupar correctamente los términos relacionados entre sí, ej.  $\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} f = \frac{\partial(\dot{x}f)}{\partial x}$ , dando como resultado

$$\frac{dN_f}{dt} = \Delta V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{x}f)}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{y}f)}{\partial y} + \frac{\partial(\dot{z}f)}{\partial z} + \frac{\partial(\dot{\Omega}f)}{\partial \Omega} + \frac{\partial(\dot{v}f)}{\partial v} \right]. \quad (53)$$

Para simplificar aún más la ecuación (51), es necesario acudir a las características físicas del problema. Al recordar que se está tratando una función de distribución para los fotones, los cuales no varían ni su dirección, ni su frecuencia siempre y cuando no interactúen con otras partículas, se da la siguiente simplificación:  $\dot{\Omega} = \dot{v} = 0$ , y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dN_f}{dt} = \Delta V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{x}f)}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{y}f)}{\partial y} + \frac{\partial(\dot{z}f)}{\partial z} \right]. \quad (54)$$

Otro factor importante a considerar es que la rapidez de la luz es constante en el vacío, lo cual implica que se puede asociar la constante  $c$  con las variables  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  &  $\dot{z}$  de la siguiente forma

$$\dot{x} = c \Omega_x, \dot{y} = c \Omega_y, \dot{z} = c \Omega_z, \quad (55)$$

siendo  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  las componentes de un vector dirección  $\Omega$ , tal que  $|\Omega| = 1$ . Aplicando este concepto, la dinámica del número de fotones se ve simplificada a tan solo dos términos,

$$\frac{dN_f}{dt} = \Delta V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla \cdot \Omega f \right]. \quad (56)$$

Con el resultado expresado en la ecuación (56), se empieza a dar forma a la parte derecha de la ecuación de transferencia de radiación. Ahora hay que realizar un análisis de los términos fuente de esta ecuación.

### **Términos fuente de la ecuación de transferencia de radiación**

Los términos fuentes de la RTE están asociados a los fenómenos físicos que alteran el estado inicial del sistema de fotones. Dichos fenómenos se dan cuando la radiación interactúa con la materia; se conocen como absorción, emisión y dispersión. Sin embargo, el término de dispersión usualmente no se considera debido a su poca contribución como término fuente de la RTE, y por la alta complejidad de su cálculo. En el caso de la dinámica solar, dicha aproximación es completamente válida, por lo tanto, se tienen que deducir solo los términos de absorción y emisión.

**Absorción:** La absorción se da cuando una partícula masiva (generalmente un electrón de un átomo) absorbe completamente la energía de un fotón tras la interacción. La probabilidad de absorción depende tanto de la cantidad de fotones que se representa con la función de distribución  $f(x, y, z, \Omega, \nu)$  como de las propiedades de la materia asociadas mediante un coeficiente de extinción  $\alpha_\nu = \alpha(\nu)$ , el cual depende de la frecuencia, pues dependiendo de las propiedades de la materia, puede absorber fotones de determinada energía  $h\nu$ . Es por eso que cada elemento tiene una huella de líneas espectrales diferente.

$$\text{Abs} := c \alpha_\nu f(x, y, z, \Omega, \nu) \Delta V . \quad (57)$$

Cabe mencionar que el parámetro  $\alpha_\nu$  está relacionado con la opacidad de la forma  $\alpha_\nu = \kappa_\nu \rho$ , siendo  $\rho$  la densidad de masa.

**Emisión:** A diferencia de la probabilidad de absorción, la emisión de fotones solo depende de las propiedades de la materia, no depende de los fotones ya existentes, por lo tanto su definición es más sencilla,

$$\text{Ems} := q(x, y, z, \Omega, \nu) \Delta V , \quad (58)$$

donde la función  $q(x, y, z, \Omega, \nu)$  depende de las propiedades de la materia, por ejemplo, si la materia irradia debido a su temperatura, la función  $q$  se asocia con la función de Planck de cuerpo negro.

Uniendo las ecuaciones (56), (57) y (58), se obtiene que

$$\frac{dN_f}{dt} = \Delta V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla \cdot \Omega f \right] = \Delta V (q - c \alpha_v f), \quad (59)$$

donde la segunda igualdad es una ecuación de tipo continuidad, que se aproxima a la clásica ecuación de transferencia de radiación,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla \cdot \Omega f = q - c \alpha_v f. \quad (60)$$

Finalmente, realizando los cambios de variables  $I_v := c h \nu f(x, y, z, \Omega, \nu)$  y  $j_v := h \nu q(x, y, z, \Omega, \nu) = S_v \kappa_v \rho$ , en donde  $h$  es la constante de Planck,  $\nu$  el subíndice asociado a una intensidad específica (densidad de energía por unidad de tiempo, por unidad de área, por unidad de frecuencia),  $S_v$  la función fuente de radiación y  $k_v$  la opacidad. A partir de estas definiciones, se obtiene que

$$\boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla I_v = j_v - \alpha_v I_v}, \quad (61)$$

donde se tuvo en cuenta que el vector dirección  $\Omega$  es constante y conmuta con el operador nabla.

Esta definición coincide con la presentada en la ecuación (13) de el documento guía de este trabajo (Leenaarts, 2020).

**Ecuación de transferencia de radiación independiente del tiempo**

Si se considera el primer término en la parte izquierda de la ecuación (61) aproximadamente cero, tal y como se presenta en el estudio de la atmósfera solar a través de la Rad-MHD, la expresión se reduce a

$$\Omega \cdot \nabla I_V = j_V - \alpha_V I_V, \quad (62)$$

siendo la parte izquierda una representación de la derivada direccional, es decir, si se considera la definición de derivada direccional,

$$D_{\vec{v}} f = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \nabla f(x), \quad (63)$$

la cual representa la tasa de cambio de la función a lo largo de dicho vector, la ecuación (62) tomaría la forma

$$\frac{dI_V}{ds} = j_V - \alpha_V I_V, \quad (64)$$

siendo  $s$  la distancia recorrida en dirección  $\Omega$ . Recordando que el término fuente es  $j_V = S_V \kappa_V \rho$  y el coeficiente de extinción es  $\alpha_V = \kappa_V \rho$ , la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{dI_V}{ds} = -\kappa_V \rho (I_V - S_V), \quad (65)$$

ecuación presentada en el artículo de Vögler et al. (2004) el cual muestra cómo resolver la RTE mediante el método de opacidad multigrupo. Si se considera la profundidad óptica,  $d\tau = -\kappa_V \rho ds$ , descrita en la referencia Bruls et al. (1999), la expresión se reduce a

$$\frac{dI_V}{d\tau} = I_V - S_V. \quad (66)$$

### **Ecuación de transferencia de radiación en términos de los momentos de radiación**

Dada la definición de la intensidad específica de radiación, los momentos de radiación se definen como:

$$J_V(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_V(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega, \quad (67)$$

$$\mathbf{F}_V(\mathbf{r}, t) := \int_{4\pi} \Omega I_V(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega, \quad (68)$$

$$P_V(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{c} \int_{4\pi} \Omega \otimes \Omega I_V(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega, \quad (69)$$

siendo  $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$  el diferencial de ángulo sólido. El momento cero,  $J_V$ , es una función escalar que representa la intensidad específica de radiación promediada en una esfera de ángulo sólido. El segundo momento es el vector flujo de radiación, y el tercer momento es un tensor de segundo orden en el espacio tridimensional y se denomina presión de radiación. La ecuación que determina la dinámica del momento cero canónico de la radiación,  $J_V$ , se obtiene integrando



la ecuación (62) con respecto a la variable  $\Omega$  (Levermore and Pomraning, 1981) y usando las definiciones (67)-(69), dando como resultado

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = 4\pi\kappa_\nu\rho(S_\nu - J_\nu) . \quad (70)$$

La ecuación (70) ha sido frecuentemente descrita y utilizada en diferentes trabajos asociados al estudio de la radiación (Nordlund, 1982; Atroshchenko and Gadun, 1994; Steiner et al., 1995; Vögler et al., 2004; Bruls et al., 1999; Leenaarts, 2020), y representa la pérdida de calor por radiación, un término fuente en la ecuación de conservación de la energía,

$$Q_{rad} = -\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\rho \int \kappa_\nu(J_\nu - S_\nu) d\nu . \quad (71)$$

### Apéndice B. Implementación numérica en el código MAGNUS

Para calcular numéricamente la intensidad de radiación y posteriormente la energía perdida por emisión de radiación, es necesario contar con una expresión para la intensidad específica que al realizar la correspondiente discretización, funcione como una fórmula de recurrencia para calcular los valores de  $I_\nu$  en cada punto de la malla numérica. Para ello se parte de la ecuación de transferencia de radiación independiente del tiempo.

#### Deducción de la fórmula de recurrencia para la intensidad específica

Para hallar una expresión analítica de la intensidad específica de radiación, se parte de la expresión (66), la cual se puede agrupar fácilmente de la forma

$$\frac{dI_\nu}{d\tau} - I_\nu = -S_\nu, \quad (72)$$

y mediante el factor integrante  $e^{-\tau}$ , que pre-multiplica a cada término de la ecuación, es posible asociar los términos de la derecha de la siguiente manera:

$$\frac{d}{d\tau} (e^{-\tau} I_\nu) = -e^{-\tau} S_\nu, \quad (73)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d(e^{-\tau'} I_\nu) = - \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\tau'} S_\nu d\tau', \quad (74)$$

lo que permite resolver la integral a la derecha de la igualdad mediante el teorema fundamental del

cálculo,

$$e^{-\tau}I_V(\tau) - e^{-\tau_0}I_V(\tau_0) = - \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\tau'} S_V d\tau', \quad (75)$$

y finalmente obtener una expresión para  $I_V(\tau)$ , al multiplicar la igualdad por  $e^{\tau}$ ,

$$I_V(\tau) = I_V(\tau_0)e^{\tau-\tau_0} - \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\tau-\tau'} S_V d\tau'. \quad (76)$$

La expresión anterior está asociada con la intensidad específica de un haz de luz a lo largo de la dirección  $s$ , pero si se consideran otras direcciones, representadas mediante el parámetro  $\mu$ , la ecuación (76), se expresa de la siguiente forma:

$$I_V(\tau, \mu) = I_V(\tau_0, \mu)e^{(\tau-\tau_0)/\mu} - \frac{1}{\mu} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{(\tau-\tau')/\mu} S_V d\tau', \quad (77)$$

donde se realizó un cambio de variable en  $\tau$ , considerando la normalización,  $\tau \rightarrow \tau/\mu$ . Este cambio de variable también se aplicó a los parámetros  $\tau_0$  y  $\tau'$ . Finalmente, para calcular numéricamente la intensidad específica, se debe discretizar la ecuación (77) de la siguiente forma:

$$I_{i+1}(\mu) = I_i(\mu)e^{-\Delta\tau_i/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_i} S(t)e^{-(t-\tau_{i+1})/\mu} dt, \quad (78)$$

donde para calcular el valor de la intensidad en un punto de la malla, es necesario haber calculado la intensidad en el punto anterior, lo que significa que con un valor inicial, es posible calcular la

intensidad,  $I(\tau)$ , en toda la malla espacial. Cuando ya se obtiene el valor de la intensidad específica en cada dirección  $\mu$ , se procede a calcular el valor del momento cero de radiación. La definición de  $J_V$  expresada en la ecuación (67) es equivalente a

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_V(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mathbf{r}, \mu, t) d\mu \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i I(\mathbf{r}, \mu_i, t), \quad (79)$$

donde  $w_i$  es el valor de peso para su respectivo  $\mu_i$ . La precisión que se desee al momento de realizar la integral de ángulo sólido numéricamente depende del número de puntos  $n$  que se elija; entre más puntos, mayor precisión. Los valores más utilizados al usar la cuadratura de Gauss-Legendre se presentan en la tabla 1.

Nº de puntos	valores de $\mu_i$	Valores de peso $w_i$
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Tabla 1

*Tabla de las primeras 5 configuraciones para la realización de la integral en el espacio de ángulo sólido, usando la cuadratura de Gauss-Legendre.*

Una vez calculada la integral numérica para hallar  $J_\nu$ , se calcula la pérdida de calor por radiación realizando una sumatoria en el espacio de frecuencias

$$Q_{rad} = 4\pi\rho\kappa \sum_{\nu} (J_\nu - S_\nu) \Delta\nu \quad (80)$$

en el cual se plantea un intervalo acorde al espectro electromagnético del Sol, es decir, entre  $\lambda_{min} \sim 250$  nM y  $\lambda_{max} \sim 2500$  nM. Por otra parte, la función fuente es de la forma

$$S_\nu(\tau) = \left[ 1 - (1 - \sqrt{\epsilon}) e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau} \right] B(\nu, T), \quad (81)$$

siendo  $\epsilon = 0.01$  la probabilidad de destrucción del fotón,  $B$  la función de Planck y  $\tau$  la profundidad óptica, definida como

$$\tau = - \int_0^z k\rho dz, \quad (82)$$

y calculada numéricamente mediante un método de integración como la regla de Simpson, o el método de “*short characteristics*”.

### Apéndice C. Implementación de la prueba analítica en el régimen de difusión isotérmico

Es importante enfatizar que la siguiente prueba numérica se usa con el fin de evaluar la correcta implementación de la función de recurrencia (78), además del integrador usado en el segundo término de la misma. Sin embargo, para el estudio de la pérdida de calor por radiación fue necesario tener en cuenta la función de Planck y condiciones de frontera apropiadas.

#### Solución analítica para la prueba Numérica

Para realizar la prueba numérica del término completo de radiación expuesto en la referencia Gudiksen et al. (2011), se tomó como función fuente la expresión (81), es decir,

$$S(\tau') = \left[ 1 - (1 - \sqrt{\epsilon}) e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau'} \right] B, \quad (83)$$

siendo  $B$  la función de Planck, que por simplicidad se propone  $B = 1.0$  en unidades arbitrarias para todo cálculo. Para obtener una expresión analítica de la intensidad de radiación  $J(\tau)$ , es necesario remplazar la función fuente (81) en la expresión para la intensidad específica (77),

$$I(\tau, \mu) = I(\tau_0, \mu) e^{(\tau - \tau_0)/\mu} - \frac{1}{\mu} \int e^{(\tau - \tau')/\mu} \left[ 1 - (1 - \sqrt{\epsilon}) e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau'} \right] B d\tau', \quad (84)$$

donde la condición inicial para la intensidad específica es  $I(\tau_0) = 0$ , simplificando la expresión a

$$I(\tau) = -\frac{e^{\tau/\mu}}{\mu} \int e^{-\tau'/\mu} \left[ 1 - (1 - \sqrt{\epsilon}) e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau'} \right] B d\tau'. \quad (85)$$

Por otra parte, según el documento guía Gudiksen et al. (2011), para esta prueba numérica solo se consideran dos direcciones,  $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , lo que implica que se tienen dos expresiones para la intensidad específica, llámese  $I^+(\tau)$  la intensidad asociada a  $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , y  $I^-(\tau)$  la intensidad asociada a  $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Al solucionar la integral, la cual se resuelve fácilmente distribuyendo cada término, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$I^+(\tau) = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}\tau} \left[ \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)e^{-\sqrt{3}(\sqrt{\varepsilon}+1)\tau}}{\sqrt{3}(\sqrt{\varepsilon}+1)} + \frac{e^{-\sqrt{3}\tau}}{\sqrt{3}} \right] B, \quad (86)$$

$$I^-(\tau) = \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}\tau} \left[ \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)e^{\sqrt{3}(1-\sqrt{\varepsilon})\tau}}{\sqrt{3}(1-\sqrt{\varepsilon})} + \frac{e^{\sqrt{3}\tau}}{\sqrt{3}} \right] B. \quad (87)$$

Finalmente simplificando ambas expresiones, se tiene que

$$I^+(\tau) = \left[ 1 - \frac{e^{-\sqrt{3}\varepsilon\tau}}{1+\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{3}\varepsilon\tau}}{1+\sqrt{\varepsilon}} \right] B, \quad (88)$$

$$I^-(\tau) = \left[ 1 - \frac{e^{-\sqrt{3}\varepsilon\tau}}{1-\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{3}\varepsilon\tau}}{1-\sqrt{\varepsilon}} \right] B, \quad (89)$$

donde se puede apreciar que los denominadores del segundo y tercer término de cada intensidad específica están relacionados de la forma  $1 - \varepsilon = (1 + \sqrt{\varepsilon})(1 - \sqrt{\varepsilon})$ , por lo tanto, multiplicando

apropiadamente por la unidad a cada término de las ecuaciones (88) y (89), y posteriormente sumándolas, se obtiene

$$I^+(\tau) + I^-(\tau) = 2 \left[ 1 - \frac{(1 - \sqrt{\epsilon}) e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau}}{1 - \epsilon} \right] B, \quad (90)$$

$$I^+(\tau) + I^-(\tau) = 2 \left[ 1 - \frac{e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau}}{1 + \sqrt{\epsilon}} \right] B. \quad (91)$$

A partir de la definición (79), la cual indica que el primer momento de radiación  $J(\tau)$  se calcula promediando la intensidad específica en una esfera de ángulo sólido, la intensidad de radiación analítica para la prueba numérica es

$$J_{\text{an}}(\tau) = \frac{I^+(\tau) + I^-(\tau)}{2} = \left[ 1 - \frac{e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau}}{1 + \sqrt{\epsilon}} \right] B. \quad (92)$$

### Límites de la función fuente

La función (81) se puede reescribir como

$$S(\tau) = B - (1 - \sqrt{\epsilon}) B e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau}, \quad (93)$$

y cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , la exponencial negativa  $e^{-\sqrt{3\epsilon}\tau}$  anula el segundo término, haciendo  $S \approx B$ . Pero



si  $\tau \rightarrow 0$ , entonces  $e^{-\sqrt{3\varepsilon}\tau} \rightarrow 1$ , y la función fuente se reduce a

$$S(\tau) = B - (1 - \sqrt{\varepsilon}) B, \quad (94)$$

$$S(\tau) = \sqrt{\varepsilon} B. \quad (95)$$

Este comportamiento se ajusta con las propiedades del plasma en la atmósfera solar, el cual es ópticamente grueso en la atmósfera baja, por lo cual la función fuente se aproxima a la función de cuerpo negro.

### **Malla numérica y condiciones de frontera**

Para este test numérico se consideran dos condiciones de frontera, una para la intensidad  $I^-$  y otra para la intensidad  $I^+$ . Dichas condiciones están relacionadas con el hecho de que la función de recurrencia para  $I^-$  parte desde  $\tau_{min}$  y la función de recurrencia para  $I^+$  parte desde  $\tau_{max}$ ,

$$I^-(\tau_{min}) = 0, \quad (96)$$

$$I^+(\tau_{max}) = 1, \quad (97)$$

donde se tuvo en cuenta una malla uniforme adimensional de  $\tau \in [10^{-4}, 10^4]$ , con 10.000 de densidad.