МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра №806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовой работа
по курсу «Численные методы»

Аппроксимация функций с использованием вейвлет-анализа

Выполнил: Почечура А.А.
Группа: 8О-406Б
Преподаватель: Ревизников Д.Л.

Москва, 2023

Условие

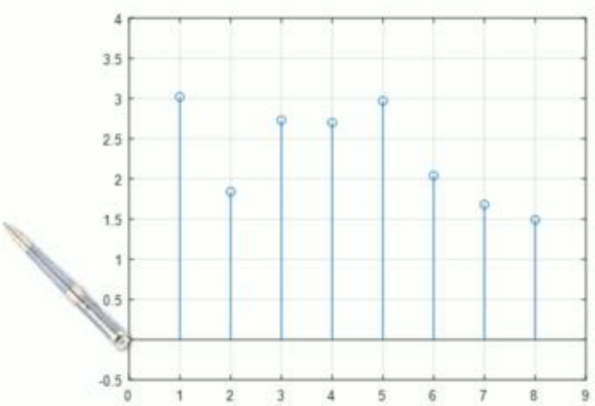
В задании требуется программно реализовать один из вейвлетов и применить его к функции, после чего получить вейвет-базис данной функции. Затем нужно восстановить функцию по полученному базису. Также нужно продемонстрировать неполное восстановление функции по базису (не учитывать маловажные параметры) Для демонстрации работы требуется привести графики исходной и восстановленной функции, графики параметров базиса, на который раскладывается функция после применения вейвлет-преобразования, а также скейлограмму данного преобразования.

Метод решения

Для выполнения поставленной задачи мною был выбран самый простой вейвлет – вейвлет Хаара. Базис, по которому раскладывается функция при применении этого вейвлета, и его частотные функции приведены ниже:

Вейвлет Хаара

$N = 2^n \qquad X = [x_1, x_2, \dots, x_8]^T$

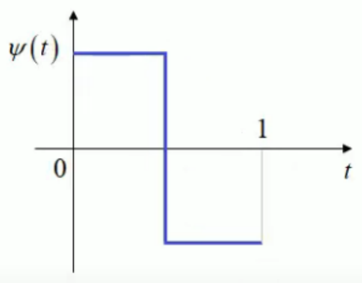


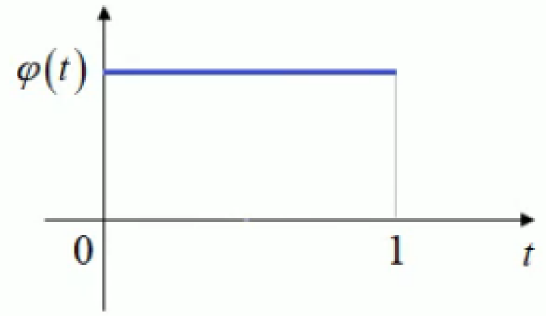
$$\underbrace{(x_1, x_2)}_{S_1};\ \underbrace{(x_3, x_4)}_{S_2};\ \underbrace{(x_5, x_6)}_{S_3};\ \underbrace{(x_7, x_8)}_{S_4}$$

$$\varphi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ \psi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ A = \begin{vmatrix}\varphi \\ \psi\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

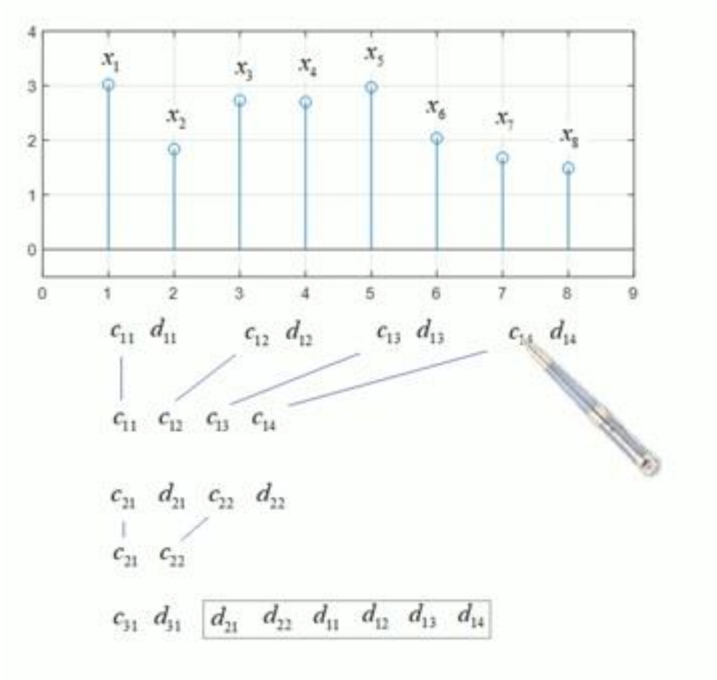
$$c_{11} = (\varphi, S_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$
$$d_{11} = (\psi, S_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

$X = [x_1, x_2, \dots, x_8]^T$

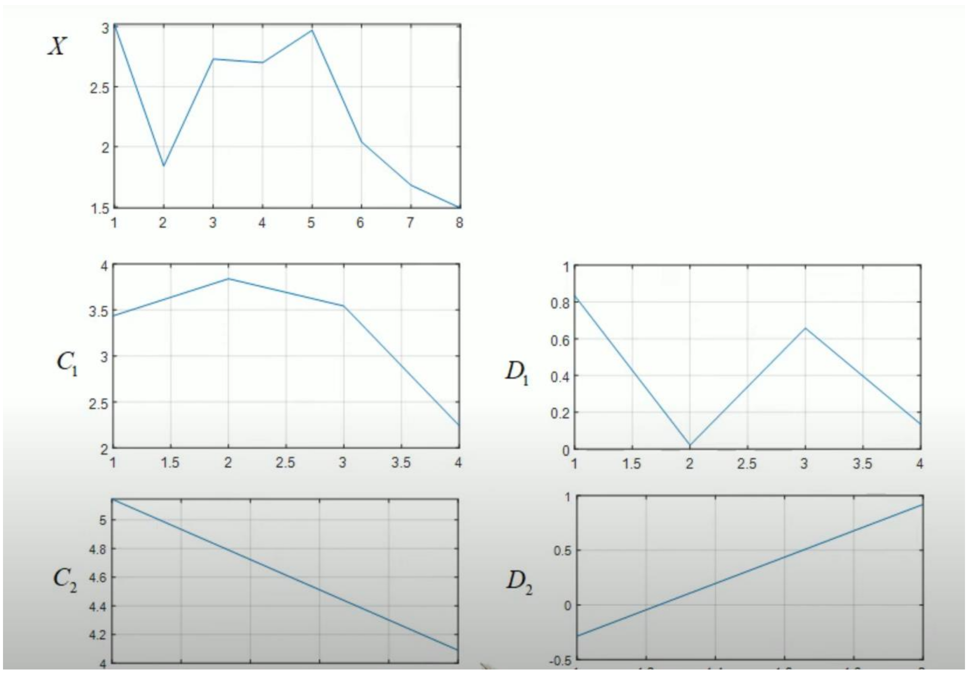




Процесс преобразования сводится к последовательному разложению функции на параметры *c* и *d* следующим образом:



Параметры *c*, полученные на каждом этапе, характеризуют процесс сжатия функции, а параметры *d* сохраняют направление, которые было сжато:



Описание программы

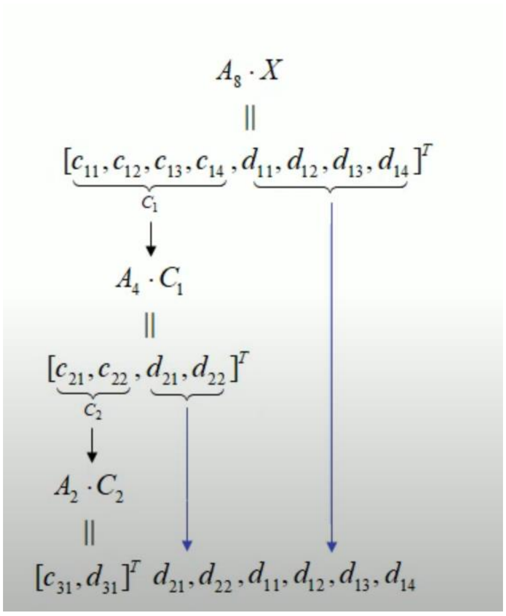
Для получения параметров *c* и *d* будем использовать матрицы следующего вида:

$$c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$$

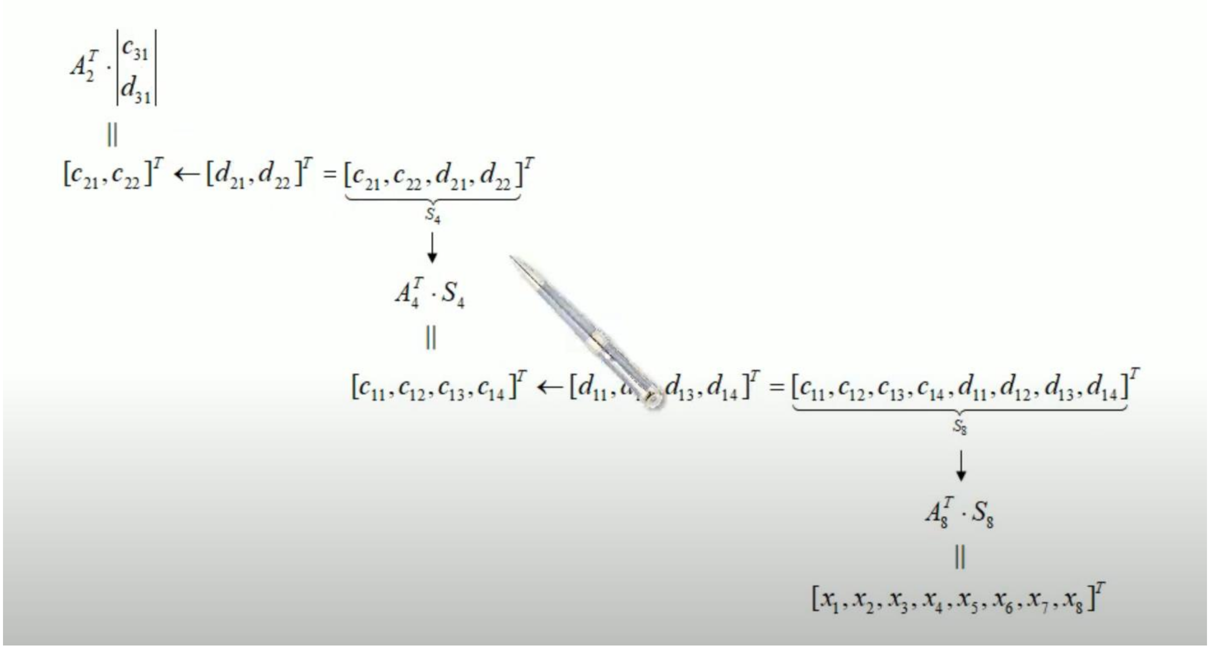
$$A_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad A_8 \cdot X$$

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Сам процесс получения коэффициентов выглядит следующим образом:

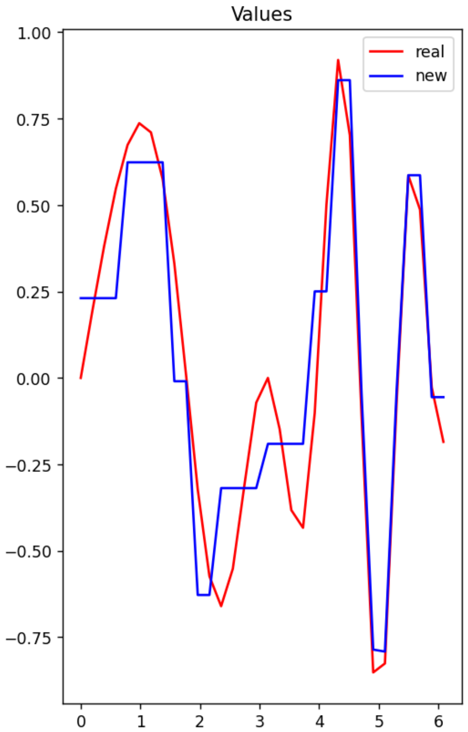


После получения разложения функции на вейвлет-базис, нужно сделать обратное преобразование. Реализовано будет оно схожим образом, только матрицы будут использоваться уже обратные, а т.к. они разреженные, то обратные им будут транспонированные. Алгоритм выглядит следующим образом:



Результаты работы

График исходной функции ***sin(x) * cos(x * x / 2)*** и функции, полученной после прямого и обратного преобразования с помощью вейвлета Хаара (при обратном преобразовании учитывались только значимые коэффициенты, поэтому график сходится не полностью).



Графики параметров *c* и *d* для разложения данной функции (для количества точек: 16, 8 и 4):

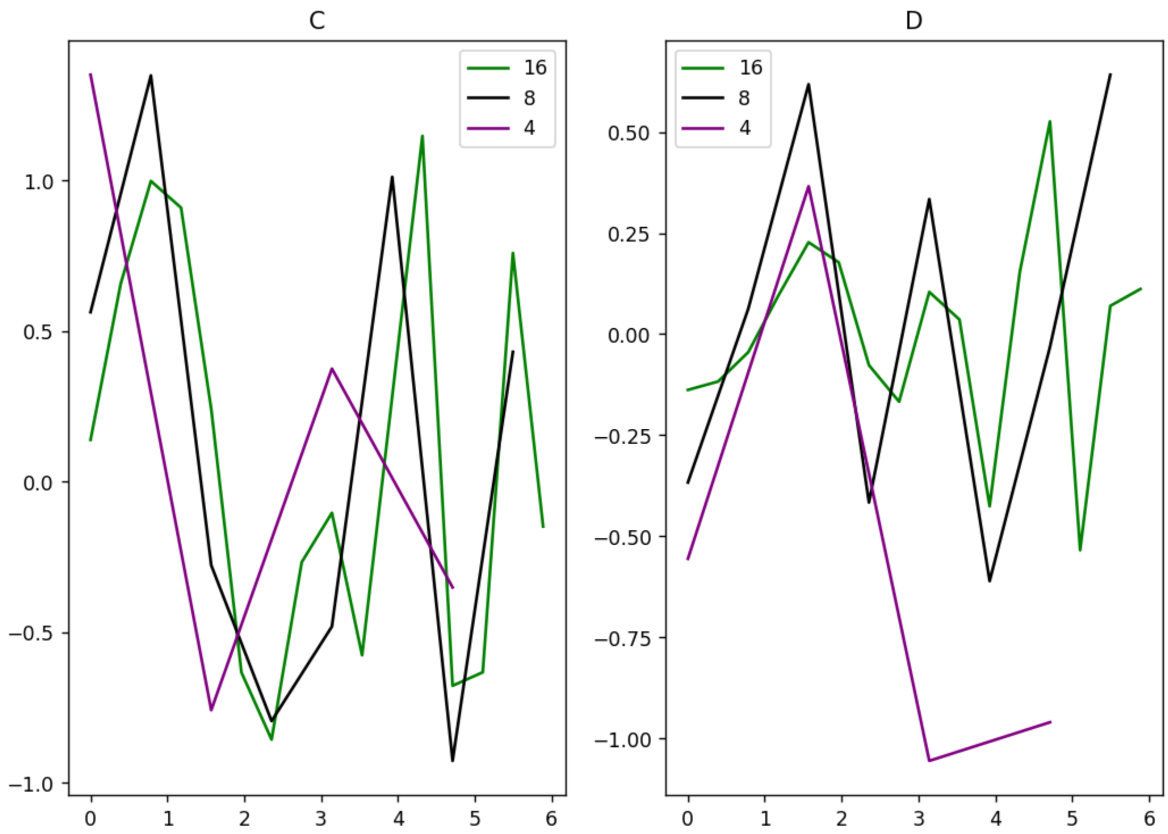
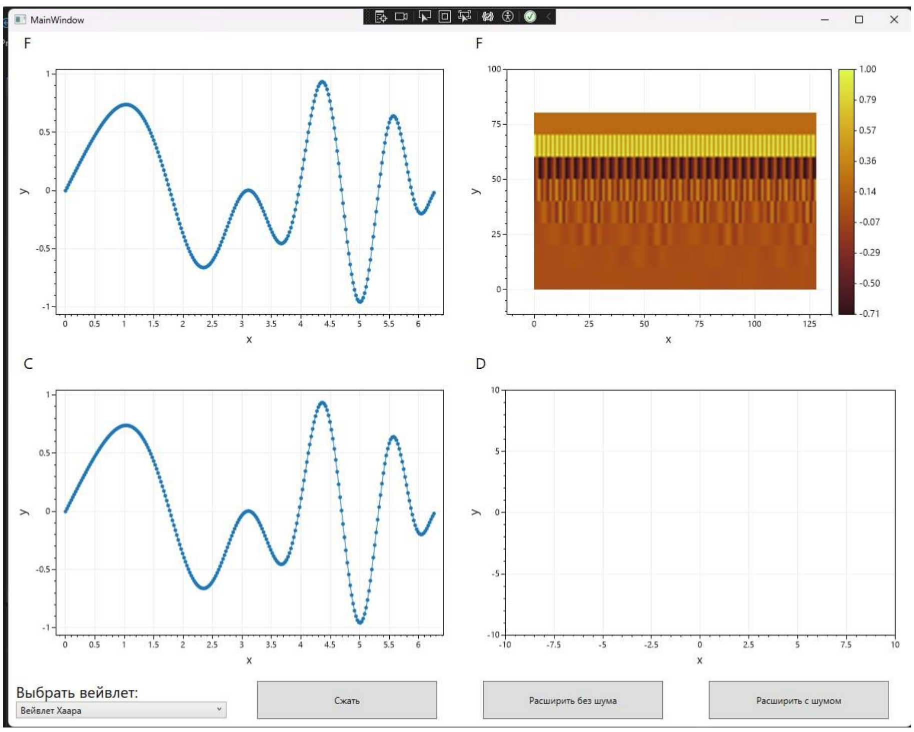


График скейлограммы:



Выводы

Вейвлет-преобразование – это очень хороший способ сжатия информации. Оно имеет большое преимущество перед преобразованием Фурье за счёт того, что каждый коэффициент вейвлет-базиса отвечает за конкретный участок функции. Это свойство вейвлетов даёт нам возможность работать с непериодическими функциями (которые, например, могут иметь резкий скачок). Также с помощью вейвлет-преобразования можно эффективно сжимать изображения и удалять шумы.

Литература

1. Нагорнов О.В. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ: уч. пособие. Москва, НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ», 2010. 115 с.

2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения: уч. пособие. Москва, Институт космических исследований РАН, 1996. 232 с.