Finite Elemente

Pascal Kraft

31. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

0. Vorwort

0.1. Über dieses Skript

Dieses Skript ist als Mitschrieb der Vorlesung Finite Elemente im Wintersemester 2013/14 von Prof. Dr. Willy Dörfler entstanden.
Es wird versucht, das Skript möglichst aktuell zu halten, während die Vorlesung stattfindet.

0.2. Wer

Dieses Skript wurde erstellt von Pascal Kraft. Ihr erreicht mich mit Verbesserungsvorschlägen etc. unter pascal.kraft@web.de.

0.3. Und sonst so?

Dieses Skriptum darf frei weitergegeben werden. Als Grundlage dienen einige Style-Definitionen, die für die Analysis-Skripte auf `http://mitschriebwiki.nomeata.de/` verwendet werden. Ich habe mich dafür entschlossen, weil mir die Style-Definitionen in den Schmoeger-Skripten sehr gut gefallen.

1. Variationsgleichung

1.1. Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einen Wärmeleiter, der am einen Ende die Temperatur T_1 und am anderen Ende die Temperatur T_2 hat. O.B.d.A. $T_1 > T_2$. Dann fließt Wärme von 1 nach 2. Sei weiter Ω ein Gebiet,

$$u : (0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_{>0}$$

sei die Temperatur abhängig von Zeit und Ort. Eine Temperaturdifferenz erzeugt einen Wärmefluss $q = -a\nabla u$ ($a > 0$ Materialkonstante Wärmeleitfähigkeit). Es ergibt sich die Bilanzgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho = \int_{\partial V} q \cdot n$$

wobei V das Volumen, ρ die Dichte, q der Wärmefluss und n die äußere Normale ist. Es folgt

$$\int_V (\partial_t \rho + \nabla \cdot q) = 0 \quad \forall V \subset \Omega$$

und daraus, da das Integral für beliebige Gebiete V gilt, auch

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot q = 0$$

In oben beschriebenen Fall gelten $\rho = u$ und $q = -a \operatorname{grad} u$ also

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a\nabla u) = 0$$

in Ω. Wir erwarten einen Temperaturausgleich für große Zeiten, also einen stationären Zustand für $t \to \infty$, d.h. $\partial_t u \to 0$. Eingesetzt finden wir

$$\begin{aligned} -\nabla(a\nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= u^D && \text{auf } \partial\Omega \\ -a\Delta u &= 0 && (\text{falls } a \equiv const\ ) \end{aligned}$$

'Quantity of Interest': $\int_W q \cdot n$ wobei $W \subset \partial\Omega$ das Randstück mit interessantem Wärmefluss ist. Die 'Quantity of Interest' beschreibt einen Wärmestrom über einen Teil des Randes.

Elektrostatik

Wir bezeichnen mit ρ die Ladungsdichte, die ein elektrisches Feld E verursacht. Aus den Maxwellgleichungen folgt:

$$-\nabla \cdot (aE) = \rho$$

wobei a (in der Physik ϵ) die Permittivität darstellt. Oft fordert man ein „Wirbelfreies“ elektrisches Feld, also $rot(E) = \nabla \times E = 0$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \exists u : E &= -\nabla u \\ -\nabla \cdot (a \nabla u) &= \rho \text{ in } \Omega \\ u &= u^D \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Im Fall $\partial\Omega = \Gamma^D \dot{\cup} \Gamma^N$ setzen wir

$$\begin{cases} u^D & \text{auf } \Gamma^D \\ an \cdot \nabla u \equiv a \cdot \partial_n u = 0 & \text{auf } \Gamma^N \end{cases}$$

Strömung durch poröse Medien

Sei p eine Druckverteilung, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. *Darcy's law* besagt

$$q = -\kappa(\nabla p + \rho g \vec{i_z})$$

wobei κ eine Materialkonstante ist. f beschreibe die Quellen und Senken der Strömung.

$$-\nabla \cdot (\kappa(\nabla p + \rho g \vec{i_z})) = f \quad \text{ in } \Omega$$

Wir definieren die **piezometrische Höhe**: $u = \frac{p}{\rho g} + x_z$. Wir können das Problem nun in zwei Varianten beschreiben:

(1) **Ohne Sättigung:**

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f$$

in Ω mit Randbedingungen und

(2) **Mit Sättigung:**

$$-\nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) = f$$

Diese Form ist nicht linear und beschreibt die sich füllenden Poren durch die veränderliche Materialeigenschaft $\kappa(u)$.

Stationäre Wellen

Elektromagnetische Wellen bzw. elektrostatische Membranen erfüllen die Wellengleichung, können also wie folgt beschrieben werden:

$$\Phi : (0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \partial_t^2 \Phi - \nabla \cdot (c^2 \nabla \Phi) = 0$$

in Ω mit entsprechenden Randbedingungen. Im Falle einer eingespannten Membran ist diese Randbedingung zum Beispiel konstant 0. Nun schränken wir den Lösungsraum ein, betrachten also einen Spezialfall. Wir suchen ausschließlich Lösungen der Form

$$\Phi(t,x) = u(x) \exp^{i\omega t} \quad \omega \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}(\Phi), \mathrm{Im}(\Phi) \in \mathbb{R}$$

Durch Einsetzen finden wir

$$-\omega^2 u - \nabla \cdot (c^2 \nabla u) = 0$$

Im Fall einer eingespannten Membran und konstanter Wellengeschwindigkeit c ergibt sich zum Beispiel folgendes Problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Gesucht sind dabei $\omega, u \neq 0$ die das Problem lösen, es handelt sich also um ein Eigenwertproblem.

Reaktionsgleichungen

Chemische und biologische Reaktionen lassen sich oft folgendermaßen beschreiben:

$$u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

$$-\Delta u \quad = \exp^{-\frac{\lambda}{u}} \qquad \text{in } \Omega u \quad = u_0 > 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega$$

wobei u die Temperatur des ablaufenden Prozesses beschreibt.

Minimalflächengleichung

$u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3, F : [x_1, x_2] \to [x_1, x_2, u(x_1, x_2)]$

$$\begin{aligned} A(u) &= \textstyle\int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| \\ &= \textstyle\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \end{aligned}$$

mit Randbedingungen der Form $u(x) = g(x) \forall x \in \partial\Omega$. Ein Minimum erfüllt dann die Bedingung

$$-\nabla \cdot \underbrace{\left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right)}_{=\kappa(\nabla u)\nabla u} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Dabei ergibt sich das unangenehme Phänomen, dass ∇u in jedem Punkt ∞ sein kann, obwohl u bekannt ist. Ein Beispiel hierfür ist eine Halbkugel.

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Modellierung: Transportterm

$$q = \underbrace{-\nu \nabla u}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{bu}_{\text{Transport mit dem Fluss } b:\Omega\to\mathbb{R}^3}$$

$$-\nabla \cdot (\nu \nabla u) + \nabla \cdot (bu) = 0$$

Inkompressibel bedeutet $\nabla \cdot b = 0$.

$$\Rightarrow -\nabla \cdot (\nu \cdot \nabla u) + b \cdot \nabla u = 0$$

Da diese Gleichung einen Transport und einen Diffusionsterm enthält nennt man sie auch die **Transport-Diffusions-Gleichung**. Navier-Stokes (für konstantes ν):

$$\begin{aligned} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

mit entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen.

1.2. Das Dirichlet-Randwertproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien weiter $a, c, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ und $u^D : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Das **lineare Randwertproblem** in Divergenzform lautet:

$$-\nabla(a\nabla u) + cu = f \text{ in } \Omega \tag{1.1}$$
$$u = u^D \text{ auf } \partial\Omega \tag{1.2}$$

der Spezialfall $a = 1, c = 0$ führt auf

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \tag{1.3}$$
$$u = u^D \text{ auf } \partial\Omega \tag{1.4}$$

das **Poisson-Problem**.
Die Vorgabe von $u = u^D$ auf $\partial\Omega$ heißt **Dirichlet-Problem**. Man kann eine schwache Form wie folgt herleiten: Multipliziere die Differentialgleichung mit einer Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Ziel: Finde eine Lösung u dieses Problems!

Definition 1.1 (Sobolevräume)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\partial\Omega$ Lipschitz.

$$W^{1,2}(\Omega) := H^1(\Omega) := v : \Omega \to \mathbb{R}, v \text{ messbar }, ||v||_{W^{1,2}(\Omega)} < \infty \tag{1.5}$$
$$||v||_{W^{1,2}(\Omega)} := \left(||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$
$$||v||^2_{L^2(\Omega)} := \textstyle\int_\Omega |v|^2 \tag{1.7}$$
$$\tag{1.8}$$

Analog definiert man $W^{m,p}$ für $m \in \mathbb{R}, p \in [1, \infty]$. Detailliert wird dies zum Beispiel in Vorlesungen und Skripten zu Rand- und Eigenwertproblemen behandelt. Man nennt W **Sobolevräume** und L **Lebesqueräume**.

Definition 1.2
Seien $a, c \in L^\infty$ und $f \in L^2(\Omega)$.

$$A : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R} : A[v, w] := \int_\Omega (a\nabla v \cdot \nabla w + cvu)$$

sei eine Bilinearform und

$$F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, F[v] := \int_\Omega fv$$

sei linear.

Theorem 1.3 (Existenz einer Lösung)
Seien f, a, c wie in der obigen Definition. Sei ferner $a \geq a_0 > 0$ fast überall, $c \geq 0$ fast überall in $\overline{\Omega}$. Es gebe $u^D : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ welches die Randbedingung realisiert. Dann erfüllen A und F die folgenden Bedingungen:

(1) A ist koerziv, d.h.

$$A[v, v] \geq \alpha_0 ||v||^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

(2) A ist stetig

$$|A[v, w]| =\leq \alpha_A ||v||_{H^1(\Omega)} ||w||_{H^1(\Omega)}$$

(3) F ist stetig

$$|F[v]| =\leq \alpha_F ||v||_{H^1(\Omega)}$$

$\forall v, w \in H^1(\Omega), 0 < \alpha_0 < \alpha_A, 0 \leq \alpha_F$.
Dann existiert ein eindeutiges $u \in H^1(\Omega)$ welches das Variationsproblem löst und

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\alpha_F}{\alpha_0}$$

2. Ritz-Galerkin-Methode

Bisher haben wir Finite-Differenzen-Methoden(FDM) betrachtet.

Bemerkung 2.1 (Probleme mit FDM)

- Wir nutzen reguläre Gitter, dies kann zu Problemen bei kurvigem Rand und hoher Ordnung führen.
- a ist eventuell unstetig.
- Wir erhalten eventuell nichtreguläre Lösungen ($u \notin C^4$!)

2.1. Das diskrete Problem

$V_N \sqsubset V$ mit $\dim(V_N) = N \in \mathbb{N}$
Konformer Ansatz im Gegensatz zum nicht-konformen Ansatz.
$V_N \sqsubset V$. Im Folgenden sei immer $u^D = 0$.
Diskretes Problem: Suche $u_N \in V_N$ mit

$$A(u_N, u_N) = F[v_N] \forall v_N \in V_N$$

Mit Vorraussetzungen wie an A, F wie vorher folgt die Existenz von u_N nach Lax-Milgram. Außerdem finden wir

$$||u_N||_{H^1(\Omega)} \leq \underbrace{\frac{\alpha_F}{\alpha_0}}_{\text{unabhängig von } N}.$$

Sei $\psi_{i i \in 1,\dots,N}$ eine Basis von V_N. D.h. es existiert eine eindutige Darstellung

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_j$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Einsetzen ergibt

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j A[\psi_j, \psi_i] = F(\psi_i)$$

für $i = 1, \dots, N$. $\vec{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\vec{A} = [A[\psi_j, \psi_i]]_{ij}$

$$\vec{u} = [x_j]_j, \quad \vec{F} = [F[\psi_j]]_j, \quad \vec{A}\vec{u} = \vec{F}$$

Dabei handelt es sich für symetrisches $A[\cdot, \cdot]$ um ein lineares und positiv definites Gleichungssystem.

Definition 2.2 (Energienorm)
Für positiv definites A definiert man

$$||v||_E := (A[v, v])^{\frac{1}{2}}$$

Wir nennen $|| \cdot ||_E$ die **Energienorm**.

2.2. Das Lemma von Cea

Lemma 2.3 (Cea-Lemma)
A,F wie in Theorem 3 und u_N die jeweiligen Lösungen des kontinuierlichen beziehungsweise diskreten Problems. Dann

$$||u - u_N||_E = \inf_{v_N \in V_N} ||u - v_N||_E$$

D.h. u_N ist bestmöglich in V_N in der $||\cdot||_E$-Topologie.

Beweis: $V_N \in V_N$ beliebig.

$$A[u - u_N] = F[v_N] - F[v_N] = 0 \tag{2.1}$$

Diese Eigenschaft nennt man auch **Galerkin-Orthogonalität** des Fehlers.

$$\begin{aligned} ||u - u_N||_E^2 &= A[u - u_N, u - u_N] \overset{(1)}{=} A[u - u_N, u - n_N] \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} ||u - u_N||_E ||u - v_N||_E \\ &\to ||u - u_N||_E \leq ||u - v_N||_E \forall v_N \in V_N \end{aligned}$$

Abschließend erfolgt ein Grenzübergang zum Infimum.

Korollar 2.4 (Konvergenz)
Annahme: Es existiert ein linearer stetiger Operator.:

$$P_N : V \to V_N : ||v - P_N v||_V \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

für jedes feste $v \in V$. Dann gilt

$$||u - u_N||_V \to 0 \quad N \to \infty$$

Beweis (Koerzivität):

$$\begin{aligned} \alpha_0 ||u - u_N||_V^2 &\leq ||u - u_N||_E^2 \\ &= \inf_{v_N \in V_N} ||u - v_N||_E^2 \leq ||u - \underbrace{P_N u}_{\in V_N}||_E^2 \\ &= \alpha_1 ||u - P_N u||_V^2 \overset{N \to \infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5 (Quasi-Optimalität)
Im Allgemeinen erhält man das Resultat

$$||u - u_N||_V \leq C_S \inf_{v_N \in V_N} ||u - v_N||_V$$

mit einem $C_S > 0$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als **Quasi-Optimalität** und C_S als **Stabilitätskonstante**. Von Konvergenz sprechen wir in diesem Zusammenhang dann, wenn Stabilität und Approximierbarkeit gegeben sind. Dabei ist wichtig, dass von Stabilität nur gesprochen wird, wenn C_S nicht von N abhängt.

Wir werden P_N explizit konstruieren. Typischerweise gilt

$$u - P_N u||_V \leq C_I N^{-\kappa}$$

für ein $\kappa > 0$. C_I hängt dabei von u ab. Im Allgemeinen gilt

$$u \in \tilde{V} \sqsubset V = H_0^1(\Omega)$$

Oft, aber nicht immer, gilt außerdem

$$\tilde{V} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

u_N ist hier immer die exakte Lösung des Gleichungssystems. $\vec{A_{ij}}$, $\vec{F_j}$ benötigen exakte Integration.

Standpunkt: Die Fehler der Grundlegenden Numerik seien geringer als die Verfahrensfehler in den hier vorgestellten Schritten.

Annahme: das diskrete Problem sei

$$A_N[u_N, v_N] = F_N[v_N] \qquad \forall v_N \in V_N$$

Im Folgenden muss $V_N \sqsubset V$ muss im Folgenden nicht gelten.

2.3. Das Strang-Lemma

Lemma 2.6 (Das Strang-Lemma)
Seien A, F wie in Theorem 3, A_N symetrisch positiv definit, F_N stetige Linearform. A_N sei definiert auf $V + V_N$ mit

$$\beta_0 A[v_N, v_N] \leq A_N[v_n, v_N] \qquad \forall v_N \in V_N$$

für ein $\beta_0 > 0$. Dann gilt:

A. Sätze

Stichwortverzeichnis