概率论第四周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 23 日

习题 2.1

T1

解 记骰子点数为 n 为事件 A_n，则 $(X|A_n) \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$，因此

$$\mathbb{P}((X=k)\cap A_n) = \mathbb{P}(X=k|A_n)\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k>n\text{时}\binom{n}{k}=0$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{6}\mathbb{P}((X=k)\cap A_n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

X 的分布列如下 □

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{21}{128}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{33}{128}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{29}{384}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{384}$

表 1: X 的分布列

T3

证明

我们首先证明，若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $X_1+\cdots+X_{n-1}$ 和 X_n 相互独立：对 n 归纳，当 $n=2$ 时显然，当 $n=3$ 时，假设 X_1 的值域为 $\{x_i\}_{i\in I}$，则对 $\forall s,t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1+X_2=s, X_3=t) &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1=x_i, X_2=s-x_i, X_3=t)\\
&= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1=x_i)\mathbb{P}(X_2=s-x_i)\mathbb{P}(X_3=t)\\
&= \mathbb{P}(X_3=t)\sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1=x_i)\mathbb{P}(X_2=s-x_i)\\
&= \mathbb{P}(X_3=t)\mathbb{P}(X_1+X_2=s)
\end{aligned}$$

此时命题也成立,假设当 $n=k-1$ 时命题成立,下证 $n=k$ 时命题成立,即已知 $X_1,\cdots,X_k$ 相互独立,$X_1+\cdots+X_{k-2}$ 和 X_{k-1} 独立（也和 X_k 独立，因为地位完全等价），我们证明 $X_1+\cdots+X_{k-1}$ 和 X_k 独立，记 X_{k-1} 的值域为 $\{x_i\}_{i\in I}$，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-1}=s, X_k=t) &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-2}=s-x_i, X_{k-1}=x_i, X_k=t)\\
&= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-2}=s-x_i)\mathbb{P}(X_{k-1}=x_i)\mathbb{P}(X_k=t)\\
&= \mathbb{P}(X_k=t)\sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-2}=s-x_i)\mathbb{P}(X_{k-1}=x_i)\\
&= \mathbb{P}(X_k=t)\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-1}=s)
\end{aligned}$$

所以命题对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 均成立，回到本题，同样我们对 n 归纳，当 $n=2$ 时，设 X_1 的值域为 $\{x_i\}_{i\in I}$，对 $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1+X_2=s) &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1=x_i)\mathbb{P}(X_2=s-x_i)\\ &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1=-x_i)\mathbb{P}(X_2=x_i-s)\\ &= \mathbb{P}(X_1+X_2=-s)\end{aligned}$$

其中第二行由 X_i 关于 0 对称保证，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2\ge x) &= \sum_{s\ge x}\mathbb{P}(X_1+X_2=s)\\ &= \sum_{s\ge x}\mathbb{P}(X_1+X_2=-s)\\ &= \sum_{-s\le -x}\mathbb{P}(X_1+X_2=-s)=\mathbb{P}(S_2\le -x)\end{aligned}$$

假设命题对 $n=k-1$ 成立，下面证明 $n=k$ 时，假设 X_k 的值域为 $\{x_i\}_{i\in I}$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_k=s) &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-1}=s-x_iX_k=x_i)\\ &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{k-1}=x_i-s)\mathbb{P}(X_k=-x_i)\\ &= \mathbb{P}(S_n=-s)\end{aligned}$$

第二行要求 $X_1+\cdots+X_{k-1}$ 与 X_k 相互独立，我们前面已经证过，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_k\ge x) &= \sum_{s\ge x}\mathbb{P}(S_k=s)\\ &= \sum_{s\ge x}\mathbb{P}(S_k=-s)\\ &= \sum_{-s\le -x}\mathbb{P}(S_k=-s)=\mathbb{P}(S_k\le -x)\end{aligned}$$

由数学归纳法知，命题对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 均成立

若 X_1, X_2 不独立，考虑一次掷骰子，ω 表示点数

$$X_1(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=1,2,3\\ -1, & \omega=4,5,6\end{cases}\qquad X_2(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=1,2\\ -1, & \omega=3,4\\ 0, & \omega=5,6\end{cases}$$

因此 X_1, X_2 均关于 0 对称，且

$$(X_1+X_2)(\omega)=\begin{cases}2, & \omega=1,2\\ 0, & \omega=3\\ -1, & \omega=5,6\\ -2, & \omega=4\end{cases}$$

显然 $\mathbb{P}(S_2\ge 2)=\frac{1}{3}\ne\frac{1}{6}=\mathbb{P}(S_2\le -2)$ □

T4

解 我们有约束条件 $p_1+\cdots+p_n=1$，设

$$L(\boldsymbol{p},\lambda)=-\sum_{k=1}^{n}p_k\ln p_k+\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}p_k-1\right)$$

则对 $\forall 1\le k\le n$，我们有

$$L_{p_k}=-1-\ln p_k+\lambda=0$$

与约束条件联立可得 $p_1=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 时，取得极值，且我们有 $L_{p_ip_j}=-\frac{1}{p_i}\delta_{ij}$，即海森矩阵

$$H=\begin{pmatrix}-p_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & -p_n^{-1}\end{pmatrix}$$

是负定矩阵，所以当 $p_1=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 时，信息熵 $H(X)=\ln n$ 取得极大值；最后考虑边界情况，即 $\exists p_i=0$ 时，此时 $p_i\ln p_i=0$，假设有 $k\le n$ 个 $p_k=0$，不妨设 $p_{n-k+1}=\cdots=p_n=0$，则 $p_1+\cdots+p_{n-k}=1$，同上过程我们知

$$\left(-\sum_{i=1}^{n-k}p_i\ln p_i\right)_{\max}=\ln(n-k)\le\ln n$$

综上，当 $p_1=\cdots=p_k=\frac{1}{n}$ 时，信息熵 $H(X)$ 最大 □

习题 2.2

T1

解 因为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]&=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\\&=\sum_{l=0}^{n-3}(l+3)(l+2)(l+1)\binom{n}{l+3}p^{l+3}q^{n-3-l}=\sum_{l=0}^{n-3}(l+3)(l+2)(l+1)\cdot\frac{n!}{l!(n-3-l)!}\cdot p^{l+3}q^{n-3-l}\\&=n(n-1)(n-2)p^3\sum_{l=0}^{n-3}\frac{(n-3)!}{l!(n-3-l)!}p^{l+3}q^{n-3-l}=n(n-1)(n-2)p^3\sum_{l=0}^{n-3}\binom{n-3}{l}p^{l+3}q^{n-3-l}\\&=n(n-1)(n-2)p^3\end{aligned}$$

再结合 $\mathbb{E}[X(X-1)]=n(n-1)p^2,\mathbb{E}[X]=np$，以及期望的线性性，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^3]&=\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]+3\mathbb{E}[X(X-1)]+\mathbb{E}[X]\\&=n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)p^2+np\\&=p^3n^3+3p^2(1-p)n^2+p(p-1)(2p-1)n\end{aligned}$$

□

T2

解 因为

$$\mathbb{E}[X^\alpha]=\sum_{n=1}^{\infty}n^\alpha\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{n+1}$$

又因为 $\frac{n^{\alpha-1}}{n+1}\sim n^{\alpha-2}$, as $n\to\infty$，且当 $\alpha-2<-1$ 时，即 $\alpha<1$ 时，级数收敛，$\mathbb{E}[X^\alpha]<\infty$；当 $\alpha-2\ge-1$，即 $\alpha\ge1$ 时，级数发散，$\mathbb{E}[X^\alpha]=+\infty$ □

T4

证明 因为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=n)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{n=i}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq i) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>n)
\end{aligned}
$$

第二行到第三行可换序是因为期望要求无穷求和绝对收敛 □

T5

解 对 $\forall 1\leq i<j\leq n$，设 I_{ij} 表示事件“第 i,j 名成员掷出相同点数”的示性函数，则

$$
\mathbb{E}[I_{ij}] = \mathbb{P}(I_{ij}=1) = 6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}
$$

设随机变量 S_n 表示小组所得总分，则 $S_n = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} I_{ij}$，所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}[I_{ij}] \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\mathbb{E}[I_{ij}] = \frac{n(n-1)}{12}
\end{aligned}
$$

接下来我们证明 I_{ij}, I_{kl} 之间两两独立

Case 1. i,j,k,l 为四个不同的数，所以

$$
\mathbb{P}(I_{ij}I_{kl}) = 36\times\frac{1}{6^4} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \mathbb{P}(I_{ij})\mathbb{P}(I_{kl})
$$

Case 2. i,j,k,l 为三个不同的数，不妨设 $j=k$，所以

$$
\mathbb{P}(I_{ij}I_{jl}) = 6\times\frac{1}{6^3} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \mathbb{P}(I_{ij})\mathbb{P}(I_{jl})
$$

所以 I_{ij}, I_{kl} 之间两两独立，则 $\mathbb{E}[I_{ij}I_{kl}] = \mathbb{E}[I_{ij}]\mathbb{E}[I_{kl}]$，因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S_n) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} I_{ij} - \mathbb{E}[S_n]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}(I_{ij}-\mathbb{E}[I_{ij}])\right)^2\right] \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}\left[(I_{ij}-\mathbb{E}[I_{ij}])^2\right] + \sum_{\substack{i<j,k<l\\(i,j)\neq(k,l)}}\mathbb{E}\left[(I_{ij}-\mathbb{E}[I_{ij}])(I_{kl}-\mathbb{E}[I_{kl}])\right]
\end{aligned}
$$

对于 $(i,j)\neq(k,l)$，由于 I_{ij},I_{kl} 相互独立，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(I_{ij}-\mathbb{E}[I_{ij}])(I_{kl}-\mathbb{E}[I_{kl}])]&=\mathbb{E}[I_{ij}I_{kl}]+\mathbb{E}[I_{ij}]\mathbb{E}[I_{kl}]-\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{ij}]I_{kl}]-\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{kl}]I_{ij}]\\&=2\mathbb{E}[I_{ij}]\mathbb{E}[I_{kl}]-2\mathbb{E}[I_{ij}]\mathbb{E}[I_{kl}]=0\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Var}(S_n)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}[(I_{ij}-\mathbb{E}[I_{ij}])^2]=\binom{n}{2}\mathrm{Var}(I_{12})$$

又因为

$$\mathrm{Var}(I_{12})=\mathbb{E}[I_{12}^2]-\mathbb{E}[I_{12}]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$$

所以

$$\mathrm{Var}(S_n)=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{5}{36}=\frac{5n(n-1)}{72}$$

□

习题 2.3

T1

解 设随机变量 X_k 表示进行 k 次操作后 A 缸中的红球数，若 $X_{k-1}=m$，则 A 缸中有 m 个红球，$n-m$ 个蓝球；B 缸中有 $n-m$ 个红球，m 个蓝球，所以

$$\begin{cases}\mathbb{P}(X_k=m+1|X_{k-1}=m)=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{(n-m)^2}{n^2}\\\mathbb{P}(X_k=m|X_{k-1}=m)=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{2m(n-m)}{n}\\\mathbb{P}(X_k=m-1|X_{k-1}=m)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m^2}{n^2}\end{cases}$$

记 $p_m=\mathbb{P}(X_{k-1}=m)$，则 $\mathbb{P}(X_k=m)=\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m+1)+\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m)+\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m-1)$，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k]&=\sum_{m=0}^{n}m\mathbb{P}(X_k=m)\\&=\sum_{m=0}^{n}m\left[\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m+1)+\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m)+\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m-1)\right]\\&=\sum_{m=0}^{n}\left[(m-1)\mathbb{P}(X_k=m-1,X_{k-1}=m)+m\mathbb{P}(X_k=m,X_{k-1}=m)+(m+1)\mathbb{P}(X_k=m+1,X_{k-1}=m)\right]\\&=\sum_{m=0}^{n}\mathbb{P}(X_{k-1}=m)\left[(m-1)\cdot\frac{m^2}{n^2}+m\cdot\frac{2m(n-m)}{n}+(m+1)\cdot\frac{(n-m)^2}{n^2}\right]\\&=\sum_{m=0}^{n}p_m\left(m+1-\frac{2m}{n}\right)=\left(1-\frac{2}{n}\right)\mathbb{E}[X_{k-1}]+1\end{aligned}$$

由初值 $\mathbb{E}[X_0]=n$，解得

$$\mathbb{E}[X_k]=\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\frac{n}{2}$$

□

T2

证明 设 $V=\{v_i\}_{i=1}^N$，对 $\forall v_i$，对 $\forall W\subseteq V,v_i$ 等可能落入或不落入 W 中，即 $\mathbb{P}(\{v_i\in W\})=\mathbb{P}(\{v_i\in W^c\})=\frac{1}{2}$，且

$\{v_i \in W\}_{i=1}^N$ 相互独立，则（下面我们记 e 的两个顶点为 $v_1^{(e)}, v_2^{(e)}$）

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_W] &= \mathbb{E}\left[\sum_{e\in E} I_W(e)\right] = \sum_{e\in E} \mathbb{E}[I_W(e)] \\
&= \sum_{e\in E} \mathbb{P}(\{v_1^{(e)} \in W, v_2^{(e)} \in W^c\} \cap \{v_1^{(e)} \in W^c, v_2^{(e)} \in W\}) \\
&= \sum_{e\in E} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{|E|}{2}
\end{aligned}
$$

所以 $\exists W \subseteq V, \text{s.t. } N_W \geq \frac{|E|}{2}$，否则 $\mathbb{E}[N_W] < \frac{|E|}{2}$ 矛盾！ $\square$

T3

解 设第 $1 \leq i \leq k$ 个球的标号为 X_i，和数为 S_k，则 $S_k = X_1 + \cdots + X_k$，因为 $\mathbb{E}[X_1] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot j = \frac{n+1}{2}$，所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_k] &= \mathbb{E}\left[X_1 + \cdots + X_k\right] \\
&= k\mathbb{E}[X_1] = \frac{k(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

又因为对 $\forall 1 \leq i < j \leq k$

$$
\mathbb{E}[X_i^2] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot j^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
$$

$$
\mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_{i\neq j} \frac{1}{\binom{n}{2}} \cdot ij = \frac{1}{\binom{n}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right]
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_k^2] &= \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_k)^2] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[X_k^2] + 2 \sum_{1\leq i<j\leq k} \mathbb{E}[X_i X_j] \\
&= k\mathbb{E}[X_1^2] + 2 \cdot \frac{1}{2}\binom{k}{2}\mathbb{E}[X_1 X_2] \\
&= k \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{k(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{k(k-1)(n+1)(3n+2)}{12} \\
&= \frac{k(n+1)[(3n+2)k+n]}{12}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathrm{Var}(S_k) = \mathbb{E}[S_k^2] - \mathbb{E}[S_k]^2 = \frac{k(n+1)(n-k)}{12}
$$

$\square$

T6

证明 构造相互独立的随机变量 $\varepsilon_i \sim B(1, p_i)$，设 $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{\omega}$，构造随机变量 $|\boldsymbol{v}|^2$，则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\boldsymbol{v}|^2] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{\omega}\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - p_i)\boldsymbol{v}_i\right|^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{v}_i|^2 \mathbb{E}[(\varepsilon_i - p_i)^2] + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \mathbb{E}[(\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j)]
\end{aligned}
$$

对于上式第二项，因为 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 相互独立，所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\varepsilon_i-p_i)(\varepsilon_j-p_j)] &= \mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j]-p_j\mathbb{E}[\varepsilon_i]-p_i\mathbb{E}[\varepsilon_j]+p_ip_j \\
&= \mathbb{E}[\varepsilon_i]\mathbb{E}[\varepsilon_j]-p_j\mathbb{E}[\varepsilon_i]-p_i\mathbb{E}[\varepsilon_j]+p_ip_j \\
&= \mathbb{E}[\varepsilon_i-p_i]\mathbb{E}[\varepsilon_j-p_j] \\
&= [p_i\cdot(1-p_i)+(1-p_i)\cdot(0-p_i)]\cdot[p_j\cdot(1-p_j)+(1-p_j)\cdot(0-p_j)] \\
&= 0\cdot 0=0
\end{aligned}$$

又因为

$$\mathbb{E}[(\varepsilon_i-p_i)^2]=p_i\cdot(1-p_i)^2+(1-p_i)(0-p_i)^2=p(1-p)$$

所以

$$\mathbb{E}[|\boldsymbol{v}|^2]=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{v}_i|^2p_i(1-p)\le\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p)\le\frac{n}{4}$$

所以一定存在一组 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$, s.t.

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{\omega}\right|\le\frac{\sqrt{n}}{2}$$

$\square$