实分析第十三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 26 日

作业 12A

T1.

证明

Lemma : 任意一个单调递增的函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 均可以写为一个单调递增的连续函数和一个跳跃函数的和

Proof Of Lemma : 对 $\forall x \in [a, b]$，定义 $\Delta(x) = F(x+0) - F(x-0)$，补充定义 $\Delta(a) = F(a+0) - F(a), \Delta(b) = F(b) - F(b-0)$，定义

$$\begin{cases} J(x) = \sum\limits_{y<x} \Delta(y) \\ F(x) = f(x) - J(x) \end{cases}$$

则根据定义，$J(x)$ 为跳跃函数，F 为单调增的连续函数

回到本题，由 *Jordan* 分解定理，$\exists g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ 单调递增，使得 $f = g - h$，而对于 $g, h, \exists g_1, h_1$ 连续，j_1, j_2 跳跃，使得 $g = g_1 - j_1, h = h_1 - j_2$，因此 $f = (g_1 - h_1) - (j_1 - j_2)$，因此 $j_1 - j_2$ 连续，而跳跃函数连续只能是恒为常值，因此 $f = g_1 - (h_1 + c)$，故 $g_1, h_1 + c$ 即为所求 $\square$

T2.

证明 (1). 设 $\Gamma = \{I_\alpha\}$ 为 E 的一个 *Vitali* 覆盖，则对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists I \in \Gamma, \text{s.t. } x \in I$ 且 $|I| < 2\varepsilon$，若 I 为闭区间，记 $I' = I$；若 I 为半开半闭区间，用 I 的闭包 I' 替换 I；若 I 为开区间，则我们可以适当地将 I 向内缩得到 $I', \text{s.t. } x \in I', |I'| < \varepsilon$，用 I' 替换 I，我们就得到了 $\Gamma' = \{I'_\alpha\}$ 仍是 E 的一个 *Vitali* 覆盖，因此可以假设 $\forall I \in \Gamma, I \subset G$

(2). 考虑 $\Gamma' = \{I_\alpha \in \Gamma : I_\alpha \subset G\}$，下面证明 Γ' 仍为 E 的一个 *Vitali* 覆盖

对 $\forall x \in E$，由 G 是开集知，$\exists \eta > 0, \text{s.t. } (x - \eta, x + \eta) \subset G$，任取 $b_n \searrow 0$，且 $b_1 < \eta$，由 Γ 是 E 的一个 *Vitali* 覆盖知，对 $b_1, \exists I_1 \ni x, |I_1| < b_1$，因此 $I_1 \subset (x - \eta, x + \eta) \subset G$，故 $I_1 \in \Gamma'$；对于 $b_2, b_3, \cdots$，同理我们可以找到 $I_2, I_3, \cdots \in \Gamma'$，所以我们找到了一列 $\{I_n\} \subset \Gamma', \text{s.t. } \lim\limits_{n\to\infty} |I_n| \to 0$，且 $x \in I_n, \forall n$，这就说明 Γ' 是 E 的一个 *Vitali* 覆盖 $\square$

T3.

证明 $(i) \Longrightarrow (ii)$: 若 f' 几乎处处存在，则

$$D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x), \quad \text{a.e } x \in (a, b)$$

因此 E_1^c 相对于 E 是满测集，故 E_1 是零测集

$(ii) \implies (i)$：定义

$$E_2(f) = \{x \in (a,b) : D^- f(x) > D_+ f(x)\}$$

考虑 $g(x) = -f(a+b-x)$，则 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 单调递增，因此 $E_1(g)$ 零测，又因为

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0^+} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \limsup_{h\to 0^+} -\frac{f(a+b-x+h)-f(a+b-x)}{h} \\ &= -\liminf_{h\to 0^+} \frac{f(a+b-x+h)-f(a+b-x)}{h}\end{aligned}$$

所以 $D^+g(x) = -D_+f(a+b-x)$，同理有 $D^-g(x) = -D_-f(a+b-x)$，因此

$$\begin{aligned}x \in E_1(g) \iff D^+g(x) > D_-g(x) &\iff -D_+f(a+b-x) > -D^-f(a+b-x) \\ \iff D^-f(a+b-x) > D_+f(a+b-x) &\iff a+b-x \in E_2(f)\end{aligned}$$

因此 $\forall x \in E_2(f), a+b-x \in E_1(g)$，故 $E_2(f)$ 也零测，所以 $E_1(f) \cup E_2(f)$ 零测，对 $\forall x \notin E_1(f) \cup E_2(f)$

$$D^+f(x) \geq D_+f(x) \geq D^-f(x) \geq D_-f(x) \geq D^+f(x)$$

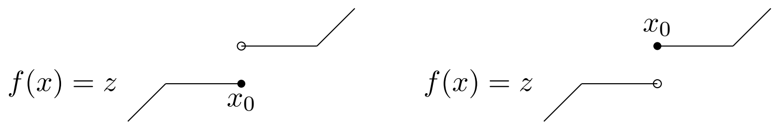
因此上面四个 *Dini* 导数相等，故 $\forall x \notin E_1(f) \cup E_2(f), f'$ 存在，故 f' 几乎处处存在 $\square$

T4.

证明 (1). 对 $\forall a \leq x \leq b$，有 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$，所以若 $z < f(a)$，则 $\{f \leq z\} = \varnothing$ 可测；若 $z \geq f(b)$，则 $\{f < z\} = [a,b]$ 可测；若 $f(a) \leq z < f(b)$

Case 1. $\exists x \in [a,b], \text{s.t. } f(x) = z$，考虑集合

$$A_z = \{y : y \in [a,b], f(y) \leq z\}$$



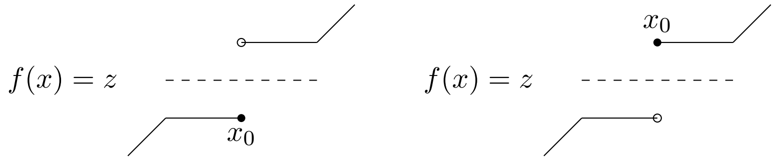
由于 $x \in A_z$，所以它非空，取 $x_0 = \sup\limits_{y \in A_z} y$，则 $f(x_0) \geq z$，且 $\forall x < x_0, f(x) \leq z, \forall x > x_0, f(x) > z$，否则与 x_0 是上确界矛盾！因此

$$\{f \leq z\} = [a, x_0) \text{ 或 } [a, x_0]$$

无论哪一种情形，$\{f \leq z\}$ 都可测

Case 2. $\nexists a \leq x \leq b, \text{s.t. } f(x) = z$，还是考虑集合

$$A_z = \{y : y \in [a,b], f(y) \leq z\}$$



由于 $f(a)\le z$，所以 $a\in A_z$，故 A_z 非空，取 $x_0=\sup\limits_{y\in A_z} y$，则 $\forall x<x_0, f(x)\le z, \forall x>x_0, f(x)>z$，否则与 x_0 是上确界矛盾！因此

$$\{f\le z\}=[a,x_0]\text{ 或 }[a,x_0)$$

无论哪一种情形，$\{f\le z\}$ 都可测

综上 f 可测

(2). 设 f 的不连续点集合为 Λ，对 $\forall x\in\Lambda$，我们有 $I_x\overset{\text{def}}{=}\big(f(x^-),f(x^+)\big)\subset[f(a),f(b)]$，且 $\forall x_1,x_2\in\Lambda, x_1\ne x_2$，则 $I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing$，所以

$$\bigsqcup_{x\in\Lambda} I_x\subset[f(a),f(b)]$$

由有理数的稠密性，在每个 I_x 中任取一个有理数 q_x，因此 I_x 与 q_x 一一对应，由 $[f(a),f(b)]$ 中的有理数可数知，Λ 可数，即 f 的不连续点集合至多可数 □

作业 12B

T1.

证明 (1). 因为

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\le\frac{(b-h)-(a-h)}{\sqrt{b-h}+\sqrt{a-h}}=\sqrt{b-h}-\sqrt{a-h}$$

(2). 使用数学归纳法，当 $n=1$ 时，取 $h=a_1$ 得 $\sqrt{b_1}-\sqrt{a_1}\le\sqrt{b_1-a_1}$；假设命题对 $\forall n<k$ 均成立，下面证明 $n=k$ 时也成立，取 $h=a_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}(b_i-a_i)\ge 0$，则

$$\sqrt{b_k}-\sqrt{a_k}\le\sqrt{b_k-h}-\sqrt{a_k-h}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(b_k-a_k)}-\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}(b_k-a_k)}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{b_k}-\sqrt{a_k})\le\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}(b_i-a_i)}+\sqrt{b_k}-\sqrt{a_k}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(b_k-a_k)}$$

由数学归纳法，命题对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 均成立 □

T2.

证明 考虑第 k 次操作后得到的 2^k 个闭区间，它们的长度均为 $\frac{1}{3^k}$，对于每个区间的左、右端点，它们的三进制展开中，前 k 项相同，从第 $k+1$ 项开始，左端点的三进制展开均为 0，右端点的三进制展开均为 2，即两个端点的三进制展开为

$$(a_1,\cdots,a_k,0,0,\cdots),\quad (a_1,\cdots,a_k,2,2,\cdots)$$

所以这两个端点在 *Cantor-Lebesgue* 函数上取值的差值为

$$\Delta F=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^k}$$

取第 k 次操作后得到的 2^k 个闭区间的端点 $(a_i,b_i),1\le i\le 2^k$，则

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{2^k}(b_i-a_i)=\lim_{k\to\infty}2^k\cdot\frac{1}{3^k}=0$$

但是对 $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{2^k}|f(b_i)-f(a_i)|=\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{2^k}=1$$

即对 $\varepsilon_0=1$，对 $\forall\delta>0$，取 $\left(\frac{2}{3}\right)^k<\delta$，则对于 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{2^k}$，有 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}|f(b_k)-f(a_k)|=1$，故它不是绝对连续函数 □

T3.

证明 (1). 假设结论不成立，则 $\exists\varepsilon_0,\text{s.t. }\forall\delta>0$，均存在一列两两不交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset[a,b]$，满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta$，但是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|\ge\varepsilon_0$

另一方面，由 $f\in AC[a,b]$ 知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}$ 对有限个两两不交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$，若 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$，就有 $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}$，记此时对应的 δ 为 δ'，则由假设，存在一列两两不交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset[a,b]$，满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta'$，但是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|\ge\varepsilon_0$，因此对 $\forall n\ge1$，均有

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta'\overset{f\in AC[a,b]}{\Longrightarrow}\sum_{k=1}^{n}|f(a_k)-f(b_k)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_k)-f(b_k)|\le\frac{\varepsilon_0}{2}$$

矛盾！

(2). 由 (1) 知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset[a,b]$ 两两不交，只要 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta$，则

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f(b_k - f(a_k))| < \varepsilon$. 因为 $Z \subset (a,b)$ 为零测集，所以对这个 δ，存在开集 $O \supset Z$, s.t. $m(O) < \varepsilon$，由 $d=1$ 时的开集结构定理，存在可数个两两不交的开区间 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, s.t. $O = \bigsqcup\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$，由于 f 在 $\overline{I}_\alpha$ 上连续知，$\exists m_\alpha, M_\alpha \in \overline{I}_\alpha$, s.t.

$$\begin{cases} m_\alpha = \min\limits_{x\in\overline{I}_\alpha} f(x) \\ M_\alpha = \max\limits_{x\in\overline{I}_\alpha} f(x) \end{cases}$$

且 $(m_\alpha, M_\alpha) \subset I_\alpha$（或者 $(M_\alpha, m_\alpha) \subset I_\alpha$），则 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}|m_\alpha - M_\alpha| \le \sum\limits_{\alpha\in\Lambda}|I_\alpha| = m(O) < \delta$，故

$$m\big(f(Z)\big) \le m\big(f(O)\big) = m\left(f\left(\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}|f(M_\alpha) - f(m_\alpha)| < \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得 $m(f(Z)) = 0$，因此绝对连续函数将零测集映为零测集 $\square$