实分析第八周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 17 日

周一

T1.

证明 (a). 首先我们有 $|f(x)| \le ||f||_\infty$ a.e $x \in E$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ 知，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \gg 1$, s.t. $\forall n \ge N_\varepsilon$，有

$$||f_n - f|| < \varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \le ||f_n - f|| < \varepsilon \text{ a.e } x \in E$$

由 ε 的任意性知，对 a.e $x \in E, \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$，即 $f_n(x) \to f(x)$ a.e $x \in E$

(b). 我们考虑将 $[-n, n]$ 进行 n^2 等分，并且对每一个 n 以及区间 $\left[-n + \frac{i-1}{n}, -n + \frac{i}{n}\right], i = 1, 2, \cdots, n^2$，记

$$f_{n,i}(x) = \chi_{\left[-n+\frac{i-1}{n}, -n+\frac{i}{n}\right]}$$

我们将所有 $\{f_{n,i}\}$ 如下排列

$$\begin{array}{lllllllll} f_{1,1} & & & & & & & & \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & & & & & \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} & f_{3,7} & f_{3,8} & f_{3,9} \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}$$

记新的函数列为 $\{f_n\}$，对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，都存在 N，使得

$$||f_N||_p^p = \int f_N^p \mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

且对于 $\forall n' \ge N, ||f_{n'}||_p^p \le \frac{1}{n}$ 这就说明 $||f_n||_p^p \to 0$，故 $||f_n||_p \to 0$，取 $f \equiv 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$$

但是对于 $\forall x \in \mathbb{R}^n$，它一定出现在 $\{[-n, n]\}$ 中无穷多次，所以存在无穷多个 f_{n_k}, s.t. $f_{n_k}(x) = 1$，这就说明 $f_{n_k}(x) \nrightarrow f(x) = 0$ $\square$

T2.

证明 (a). 首先，若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则若 $x \in E_n(\varepsilon_1)$，则 $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon_1 > \varepsilon_2$，故 $x \in E_n(\varepsilon_2)$，所以 $E_n(\varepsilon_1) \subseteq E_n(\varepsilon_2)$

$$\begin{aligned} x \in \limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon_1) &\iff \exists \text{无穷多个} n_j, \text{s.t. } x \in E_{n_j}(\varepsilon_1) \\ &\implies \exists \text{无穷多个} n_j, \text{s.t. } x \in E_{n_j}(\varepsilon_2) \\ &\iff x \in \limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon_2) \end{aligned}$$

因此 $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n(\varepsilon_1) \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} E_n(\varepsilon_2)$，接下来证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) \tag{1}$$

若 $x \in LHS$，则 $\exists k, \text{s.t. } x \in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)$，取 $\varepsilon < \frac{1}{k}$，则 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n(\varepsilon) \subseteq RHS$

若 $x \in RHS$，则 $\exists \varepsilon, \text{s.t. } x \in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n(\varepsilon)$，再取 $\frac{1}{k} < \varepsilon$，则 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) \subseteq LHS$

$(\Longleftarrow)$: 取 $\varepsilon = \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$，则 $m\left(\limsup\limits_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0, \forall k \geq 0$，所以

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0$$

因此我们有

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = m\left(\bigcup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$(\Longrightarrow)$: 已经证明了 (1) 式，即已知 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \limsup\limits_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0$，则对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，有

$$m\left(\limsup_{n\to\infty} E_k\left(\frac{1}{k}\right)\right) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0$$

因此对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\frac{1}{k} < \varepsilon$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n(\varepsilon) \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right)$，所以 $m\left(\limsup\limits_{n\to\infty} E_n(\varepsilon)\right) = 0$

(b). 选取单调递减的数列 $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}, \text{s.t. } \lim\limits_{j\to\infty} b_j = 0$，因为 $f_n \xrightarrow{m} f$，所以 $E_n(\varepsilon) \to 0 \text{ as } n \to \infty, \forall \varepsilon > 0$

对 $\varepsilon_1 = b_1, \exists n_1 \gg 1, \text{s.t. } m(E_{n_1}(b_1)) < \frac{1}{2}$

对 $\varepsilon_2 = b_2, \exists n_2 > n_1, \text{s.t. } m(E_{n_2}(b_2)) < \frac{1}{2^2}$

依此类推，对每个 $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$，得到一列单调递增的 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$，所以

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n_j}(b_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 < +\infty$$

由 *Borel-Cantelli* 引理，$m\left(\limsup\limits_{j\to\infty} E_{n_j}(b_j)\right)=0$，对 $\forall\varepsilon>0$，由 $b_j\searrow 0$ 知，$\exists K\gg 1,\text{s.t.}\ \forall k>K, b_k<\varepsilon$，所以 $\forall k>K$，由 (a) 知 $E_{n_k}(\varepsilon)\subseteq E_{n_k}(b_k)$，所以

$$
\begin{aligned}
x\in\limsup_{j\to\infty}E_{n_j}(\varepsilon) &\Longleftrightarrow \exists\text{无穷多个}n_j,\text{s.t. } x\in E_{n_j}(\varepsilon)\\
&\Longrightarrow \exists\text{无穷多个}n_j,\text{s.t. } x\in E_{n_j}(b_j)\\
&\Longrightarrow x\in\limsup_{j\to\infty}E_{n_j}(b_j)
\end{aligned}
$$

因此 $\limsup\limits_{j\to\infty}E_{n_j}(\varepsilon)\subseteq\limsup\limits_{j\to\infty}E_{n_j}(\varepsilon)$ □

T3.

证明

Case 1. 若 $m(E)<+\infty$，由 *Lebesgue* 定理知，$f_n\to f$ a.e $x\in E\Longrightarrow f_n\overset{m}{\to}f$，再由作业 4$b$ 可知 $f=g$ a.e $x\in E$

Case 2. 若 $m(E)=+\infty$，因为

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}[-k,k]^d\cap E$$

所以对于任意一个 $[-k,k]^d\cap E$，由 *Case 1* 知，$f=g$ a.e $x\in[-k,k]^d\cap E$，即存在零测集 $N_k\subseteq[-k,k]^d\cap E,\text{s.t. }\forall x\in N_k, f(x)\neq g(x),\forall x\in\left([-k,k]^d\cap E\right)\backslash N_k, f(x)=g(x)$，所以

$$\{f\neq g\}\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}N_k\Longrightarrow m(f\neq g)\le\sum_{k=1}^{\infty}m(N_k)=0$$

所以 $f=g$ a.e $x\in E$ □

周三

T1.

证明 不妨设 $I=[a,a+1]$

Case 1. a 为整数，因为 $\chi_{[a,a+1]}(x+a)=\chi_{[0,1]}(x)$，所以由平移不变性得

$$
\begin{aligned}
\int_{[a,a+1]}f(x)\mathrm{d}x &= \int f(x)\chi_{[a,a+1]}(x)\mathrm{d}x\\
&= \int f(x+a)\chi_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

第二行到第三行是由于 a 为整数时，$f(x+a)=f(x)$

Case 2. a 不是整数，则 $\exists! n \in [a, a+1] \cap \mathbb{Z}$，所以

$$
\begin{aligned}
\int_{[a,a+1]} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{[n,a+1]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{(a,n]} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{[n,a+1]} f(x)\mathrm{d}x + \int f(x)\chi_{(a,n]}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{[n,a+1]} f(x)\mathrm{d}x + \int f(x-1)\chi_{(a,n]}(x-1)\mathrm{d}x \\
&= \int_{[n,a+1]} f(x)\mathrm{d}x + \int f(x)\chi_{(a+1,n+1]}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{[n,a+1]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{(a+1,n+1]} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{[n,n+1]} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

再由 *Case 1* 立证 □

T2.

证明 (a). 因为

$$
\begin{aligned}
\chi_E(\boldsymbol{Ax}) = 1 &\iff \boldsymbol{Ax} \in E \qquad & \chi_E(\boldsymbol{Ax}) = 0 &\iff \boldsymbol{Ax} \notin E \\
&\iff x \in \boldsymbol{A}^{-1}(E) & &\iff x \notin \boldsymbol{A}^{-1}(E)
\end{aligned}
$$

所以 $\chi_E = \chi_{\boldsymbol{A}^{-1}(E)}$

(b). Case 1. $f(x) = \chi_E(x)$，其中 E 为可测集（且由可积知测度有限）

$$
\begin{aligned}
\int \chi_E(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x &= \int \chi_{\boldsymbol{A}^{-1}(E)}(x)\mathrm{d}x \\
&= m\big(\boldsymbol{A}^{-1}(E)\big) = |\det \boldsymbol{A}|^{-1} m(E) \\
&= |\det \boldsymbol{A}|^{-1} \int \chi_E(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Case 2. $f(x)$ 为简单函数，可设 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$ 为标准表示，则

$$
\begin{aligned}
\int f(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x &= \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int a_i \chi_{E_i}(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i m\big(\boldsymbol{A}^{-1}(E_i)\big) = |\det \boldsymbol{A}|^{-1} \sum_{i=1}^{N} a_i m(E_i) \\
&= |\det \boldsymbol{A}|^{-1} \int \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}\mathrm{d}x = |\det \boldsymbol{A}|^{-1} \int f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Case 3. $f(x)\geq 0$，由简单函数逼近定理，存在一族简单函数 $\{\varphi_k\},\varphi_k\nearrow f$，由 *MCT* 知

$$\begin{aligned}\int f(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x&=\int\lim_{k\to\infty}\varphi_k(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int\varphi_k(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{k\to\infty}|\det\boldsymbol{A}|^{-1}\int\varphi_k(x)\mathrm{d}x=|\det\boldsymbol{A}|^{-1}\int f\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Case 4. $f(x)$ 为一般函数，由简单函数逼近定理知，存在两族简单函数 $\{\varphi_k^{(1)}\},\{\varphi_k^{(2)}\},\varphi_k^{(1)}\nearrow f^+,\varphi_k^{(2)}\nearrow f^-$，由 *Case 3* 知

$$\begin{aligned}\int f(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x&=\int f^+(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x-\int f^-(\boldsymbol{A}x)\mathrm{d}x\\&=|\det\boldsymbol{A}|^{-1}\int f^+\mathrm{d}x-|\det\boldsymbol{A}|^{-1}\int f^-\mathrm{d}x\\&=|\det\boldsymbol{A}|^{-1}\int f\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□