复分析第一周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 2 月 28 日

习题 1.2

T14

证明

1. 设 $z_i, i=1,2,3$ 是 L 上不同的三点，则当 $a=0$ 时，它们满足 $\bar{\beta}z_i+\beta\bar{z}_i+d=0$，作差可得

$$\begin{cases}\bar{\beta}(z_1-z_2)+\beta(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=0\\ \bar{\beta}(z_1-z_3)+\beta(\bar{z}_1-\bar{z}_3)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}=\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_3}$$

所以 z_1,z_2,z_3 三点共线，由 $z_i, i=1,2,3$ 的任意性知，L 是一条直线

2. 因为

$$\begin{aligned}0=az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d&=z\bar{z}+\frac{\bar{\beta}z}{a}+\frac{\beta\bar{z}}{a}+\frac{d}{a}\\&=\left(z+\frac{\beta}{a}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{\beta}}{a}\right)+\frac{d}{a}-\frac{|\beta|^2}{a^2}\\&=\left|z+\frac{\beta}{a}\right|^2+\frac{ad-|\beta|^2}{a^2}\end{aligned}$$

所以 L 是一个圆周，圆心为 $\left(-\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{a}\right),-\mathrm{Im}\left(\frac{\beta}{a}\right)\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{|\beta|^2-ad}}{a}$

□

T15

证明 因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda&\iff|z-z_1|=\lambda|z-z_2|\iff|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|\\&\iff|z|^2-z\bar{z}_1-\bar{z}z_1+|z_1|^2=\lambda^2(|z|^2-z\bar{z}_2-\bar{z}z_2+|z_2|^2)\\&\iff\left|z+\frac{\lambda^2z_2-z_1}{1-\lambda^2}\right|^2=\frac{\lambda^2|z_1-z_2|^2}{(1-\lambda^2)^2}\end{aligned}$$

所以轨迹是一个圆周，圆心 a 和半径 R 为

$$a=\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2},\quad R=\frac{\lambda|z_1-z_2|}{|1-\lambda^2|}$$

□

T18

证明 设 $(z+1)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则由 $(z+1)^n=1$ 知

$$\begin{cases}r^n=1\\ n\theta=2k\pi\end{cases}$$

所以 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}-1+i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=0,1,\cdots,n-1$，因此

$$|z_k|^2=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-1\right)^2+\sin^2\frac{2k\pi}{n}=2-2\cos\frac{2k\pi}{n}=4\sin^2\frac{k\pi}{n}$$

故 $|z_k|=2\sin\frac{k\pi}{n}$，又因为

$$0=(z+1)^n-1=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{n-k}z^{n-k}=z\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{n-k}z^{n-k-1}$$

所以 $(z+1)^n=1$ 的非零根，即 $z_k, k=1,2,\cdots,n-1$ 满足

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{n-k}z^{n-k-1}=0$$

由韦达定理

$$z_1z_2\cdots z_{n-1}=(-1)^{n-1}\binom{n}{1}=(-1)^{n-1}n$$

两边同时取模得

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\Longrightarrow\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

□

习题 1.3

T1

证明 由课本 *P15*，复数 z 的球面像为

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

因为 $\frac{1}{\bar{z}}=\frac{z}{|z|^2},\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|=\frac{1}{|z|}$，所以

$$\begin{cases}\frac{\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}}{1+\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2}=\frac{\frac{z+\bar{z}}{|z|^2}}{1+\frac{1}{|z|^2}}=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\\ \frac{\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}}{i\left(1+\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2\right)}=\frac{\frac{z-\bar{z}}{|z|^2}}{i\left(1+\frac{1}{|z|^2}\right)}=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}\\ \frac{\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2-1}{\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2+1}=\frac{\frac{1}{|z|^2}-1}{\frac{1}{|z|^2}+1}=-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\end{cases}$$

所以 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的球面像与 z 的球面像只有 z 坐标相差一个负号，故它们关于复平面对称 □

T2

证明 $(\Rightarrow)$：由课本 *P15*，复数 z 的球面像为

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

故它的直径对点为

$$\left(-\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},-\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)},-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

所以

$$\omega=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}=-\frac{z}{|z|^2}$$

故 $z\bar{\omega} = -\frac{z\bar{z}}{|z|^2} = -1$

$(\Leftarrow)$：因为 $z\bar{\omega} = -1$，所以 $\omega = -\frac{1}{\bar{z}}$，同 *T1* 可求得 ω 的球面像为

$$\left(-\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, -\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, -\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

所以 z 和 w 的球面像是直径对点 □

T3

证明 因为 z, ω 的球面像为

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), \quad \left(\frac{\omega+\bar{\omega}}{1+|\omega|^2}, \frac{\omega-\bar{\omega}}{i(1+|\omega|^2)}, \frac{|\omega|^2-1}{|\omega|^2+1}\right)$$

所以它们之间的距离为

$$\begin{aligned} d(z,\omega) &= \sqrt{\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2} - \frac{\omega+\bar{\omega}}{1+|\omega|^2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)} - \frac{\omega-\bar{\omega}}{i(1+|\omega|^2)}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - \frac{|\omega|^2-1}{|\omega|^2+1}\right)^2} \\ &= \frac{2|z-\omega|}{\sqrt{(|z|^2+1)(\omega^2+1)}} \end{aligned}$$

□

习题 1.5

T9

证明 若 $E \cap F \neq \varnothing$，则任取 $z \in E \cap F$，则 $\mathrm{d}(E,F) = |z-z| = 0$，因此我们假设 $E \cap F \neq \varnothing$，因为 $\mathrm{d}(E,F) = \inf\{|z-w| : z \in E, w \in F\}$，所以对 $\forall n > 0, \exists z_n \in E, w_n \in F, \text{s.t.}$

$$\mathrm{d}(E,F) \leq |z_n - w_n| < \mathrm{d}(E,F) + \frac{1}{n}$$

由于 $\{w_n\}$ 是紧集 F 内的点列，故 $\exists w_0 \in F$，以及 $\{w_n\}$ 的子列 $\{w_{n_k}\}, \text{s.t. } w_{n_k} \to w_0$，则对于 $\varepsilon = 1, \exists N, \text{s.t. } \forall k > N$，我们有

$$|w_{n_k} - w_0| < 1$$

因此当 $k > N$ 时

$$|z_{n_k} - w_0| \leq |z_{n_k} - w_{n_k}| + |w_{n_k} - w_0| < \mathrm{d}(E,F) + \frac{1}{n_k} + 1$$

这就说明了 $\{z_{n_k}\}$ 是有界点列，我们设 $z = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} |z_{n_k}|$，因此我们得到有界闭集 $\overline{B(0,z)} \cap E$，因此它是紧集，且

$$\{z_{n_k}\} \subseteq \overline{B(0,z)} \cap E$$

因此 $\exists z_0 \in \overline{B(0,z)} \cap E$，以及 $\{z_{n_k}\}$ 的子列 $\{z_{n_{k_l}}\}, \text{s.t. } z_{n_{k_l}} \to z_0$，因此对

$$\begin{cases} \forall n > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } \forall l > N_1, |z_{n_{k_l}} - z_0| < \frac{1}{n} \\ \forall n > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } \forall k > N_2, |w_{n_k} - w_0| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

取 $N_0 = \max\{k_{N_1}, N_2\}$，则 $\forall s > N_0$，考虑子列 $\{z_{n_{k_l}}\}, \{w_{n_{k_l}}\}$，对 $\forall s > N_0$，有

$$
\begin{aligned}
|z_0-w_0| &\le |z_0-z_{n_{k_s}}|+|z_{n_{k_s}}-w_{n_{k_s}}|+|w_{n_{k_s}}-w_0|\\
&\le \frac{1}{n}+\mathrm{d}(E,F)+\frac{1}{n_{k_s}}+\frac{1}{n}\\
&< \mathrm{d}(E,F)+\frac{3}{n}
\end{aligned}
$$

令 $n\to\infty$，则 $|z_0-w_0|\le \mathrm{d}(E,F)$，另一方面由定义，$|z_0-w_0|\ge \mathrm{d}(E,F)$，这样我们就找到了 $z_0\in E, w_0\in F, \mathrm{s.t.}\ \mathrm{d}(z_0,w_0)=\mathrm{d}(E,F)$ $\square$

若将 F 也换为闭集，则命题不一定成立，考虑 $E=\{z:\mathrm{Im}z=0\}, F=\{z:\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z=1\}$，则 E,F 都是闭集，且对于 $\forall\varepsilon>0, \exists z_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\in E, w_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}+i\varepsilon\in F$，则 $\mathrm{d}(z_\varepsilon,w_\varepsilon)=\varepsilon$，令 $\varepsilon\to 0^+$，故 $\mathrm{d}(E,F)=0$，但我们找不到两点 $z_0\in E, w_0\in F, \mathrm{s.t.}\ \mathrm{d}(z_0,w_0)=0$

习题 1.6

T3

证明 假设 A 是开集 E 的连通分支，要证 A 是开集，只需证 $A=A^\circ$，假设 $A\neq A^\circ$，则 $\exists x\in A\backslash A^\circ\subseteq\partial A$，由 $x\in E$ 知，$\exists r>0, \mathrm{s.t.}\ B(x,r)\subseteq E$，考虑 E 的子集

$$E' \overset{\mathrm{def}}{=} A\cup B(x,r)=A\sqcup B(x,r)\backslash A$$

接下来我们证明 E' 连通，假设 E' 不连通，则 $\exists E_1,E_2\subset E', \mathrm{s.t.}$

$$E'=E_1\sqcup E_2,\quad E_1\cap\bar{E}_2=\varnothing,\quad \bar{E}_1\cap E_2=\varnothing$$

Claim: $E_1\cap(B(x,r)\backslash\bar{A})\neq\varnothing, E_2\cap(B(x,r)\backslash\bar{A})\neq\varnothing$

proof of Claim: 否则，不妨设 $E_1\subseteq A^\circ$，我们考虑 $E_2'=E_2\backslash(B(x,r)\backslash A)$，这样我们就得到了

$$A=E_1\sqcup E_2',\quad \bar{E}_1\cap E_2'=\varnothing,\quad E_1\cap\bar{E}_2'=\varnothing$$

这就导出 A 不连通，故断言成立，因此 E_1,E_2 与 $B(x,r)$ 都有相交，则我们有

$$B(x,r)=(E_1\cap B(x,r))\sqcup(E_2\cap B(x,r))$$

由 $B(x,r)$ 连通可知，

$$\overline{(E_1\cap B(x,r))}\cap(E_2\cap B(x,r)),\quad (E_1\cap B(x,r))\cap\overline{(E_2\cap B(x,r))}$$

必有一个非空，不妨设前者非空，则 $\exists y\in\overline{(E_1\cap B(x,r))}\cap(E_2\cap B(x,r))$，因此

$$y\in E_2, y\in B(x,r), y\in\overline{E_1\cap B(x,r)}\subseteq\bar{E}_1$$

故 $y\in\bar{E}_1\cap E_2$，这与 $\bar{E}_1\cap E_2=\varnothing$ 矛盾！故 E' 是连通的，且 $A\subsetneqq E'\subseteq E$，这与 A 是 E 的连通分支矛盾，因此 $A\neq A^\circ$ 的假设不成立，故 $A=A^\circ$，故 A 是开集，即开集的连通分支是开集

假设 B 是闭集 F 的连通分支，要证 B 是闭集，只需证 $B=\bar{B}$，假设 $B\neq\bar{B}$，则 $\exists x\in\bar{B}\backslash B$，即 x 是 B 的聚点，故 $\exists\{x_n\}\subseteq B\subseteq F, \mathrm{s.t.}\ x_n\to x$，由由于 x 是闭集，所以 $x\in F$，我们考虑

$$F'=B\sqcup\{x\}\subseteq F$$

接下来我们证明 F' 连通，假设 F' 不连通，则 $\exists F_1,F_2\subset F', \mathrm{s.t.}$

$$F'=F_1\sqcup F_2,\quad F_1\cap\bar{F}_2=\varnothing,\quad \bar{F}_1\cap F_2=\varnothing$$

不妨设 $x\in F_1$，因为 $F_1\cap\bar{F}_2=\varnothing$，所以 $x\notin\bar{F}_2$，我们考虑 $F_1'=F_1\backslash\{x\}$，则

$$B=F_1'\sqcup F_2,\quad \bar{F}_1'\cap F_2=\varnothing,\quad F_1'\cap\bar{F}_2=\varnothing$$

这与 B 连通矛盾！故 F' 连通，则 $B\subsetneq F'\subseteq F$，这与 B 是闭集 F 的连通分支矛盾！因此 $B\neq\bar{B}$ 的假设不成立，故 $B=\bar{B}$，故 B 是闭集，即闭集的连通分支是闭集 □

习题 1.7

T3

证明 对任意 $f(E)$ 上的点列 $\{f(z_n)\}\subseteq f(E)$，则 $\{z_n\}$ 是紧集 E 中的点列，由 E 的紧集知，$\exists\{z_n\}$ 的子列 $\{z_{n_k}\}$ 以及 E 中的点 $z_0,\text{s.t. } z_{n_k}\to z_0$ as $k\to\infty$，考虑 $\{f(z_n)\}$ 的子列 $\{f(z_{n_k})\}$，由 f 连续知

$$\lim_{k\to\infty}f(z_{n_k})=f(\lim_{k\to\infty}z_{n_k})=f(z_0)$$

这就说明 $f(E)$ 中的任意点列都有收敛子列收敛到 $f(E)$ 中的点，故 $f(E)$ 是紧集 □