习题 2 设 $X=\{x,y,z\},X$ 的下列子集族是不是拓扑？如果不是，请添加最少的子集，使它成为拓扑

(1) $\{X,\varnothing,\{x\},\{y,z\}\}$

(2) $\{X,\varnothing,\{x,y\},\{x,z\}\}$

(3) $\{X,\varnothing,\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\}\}$

解 (1) 是

(2) 不是，需要添加 $\{x\}=\{x,y\}\cap\{x,z\}$，此时 $\{X,\varnothing,\{x\},\{x,y\},\{x,z\}\}$ 是拓扑

(3) 不是，需要添加 $\{x\}=\{x,y\}\cap\{x,z\},\{y\}=\{x,y\}\cap\{y,z\},\{z\}=\{x,z\}\cap\{y,z\}$，变成离散拓扑 2^X

□

习题 4 设 τ 是 X 上的拓扑，A 是 X 的一个子集，规定

$$\tau'=\{A\cup u|u\in\tau\}\cup\{\varnothing\}$$

证明 τ' 也是 X 上的拓扑

证明 验证三条公理

(1) $X=A\cup X\in\tau',\varnothing\in\tau'$

(2) $\forall A\cup u_1,A\cup u_2\in\tau'(u_1,u_2\in\tau),(A\cup u_1)\cap(A\cup u_2)=A\cup(u_1\cap u_2)\in\tau'$

(3) $\forall A\cup u_\alpha\in\tau',\alpha\in\Lambda,\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cup u_\alpha)=A\cup\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}u_\alpha\right)\in\tau'$

□

习题 5 设 τ_1,τ_2 都是 X 上的拓扑，证明 $\tau_1\cap\tau_2$ 也是 X 上的拓扑

证明 验证三条公理

(1) $\varnothing,X\in\tau_1\cap\tau_2$

(2) 设 $u_1,u_2\in\tau_1\cap\tau_2$，则 $u_1\in\tau_1,u_2\in\tau_1\Longrightarrow u_1\cap u_2\in\tau_1$，同理 $u_1\cap u_2\in\tau_2$，故 $u_1\cap u_2\in\tau_1\cap\tau_2$

(3) 设 $u_\alpha,\alpha\in\Lambda\in\tau_1\cap\tau_2$，则 $u_\alpha\in\tau_1,\forall\alpha\in\Lambda$，所以 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}u_\alpha\in\tau_1$，同理 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}u_\alpha\in\tau_2$，故 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}u_\alpha\in\tau_1\cap\tau_2$

□

习题 6 $\mathbf{E}^2$ 的子集 $A=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle|x\in(0,1)\right\}$，求 $\overline{A}$

证明 我们断言

$$\overline{A}=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle|x\in(0,1]\right\}\cup\{(0,y)|y\in[-1,1]\}$$

Proof Of Claim：首先由函数的连续性知 $(1,\sin 1)$ 是 A 的聚点，其次对 $\forall y\in[-1,1]$，均能找到一个数列 $\{x_n^y\}_{n=1}^\infty$（可取 $x_n=2n\pi+\arcsin y$），使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\sin x_n=y\Longrightarrow\left(\frac{1}{x_n},\sin x_n\right)\to(0,y)$$

故 $\{(0,y)|y\in[-1,1]\}\subset\overline{A}$，至此我们证明了

$$B\overset{\text{def}}{=}\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle|x\in(0,1]\right\}\cup\{(0,y)|y\in[-1,1]\}\subset\overline{A}$$

下面我们证明 B 是闭集，再由 $\overline{A}$ 的最小性知它们相等，只需证明 B^c 是开集，对 $\forall(x,y)\in B^c$

Case 1. 若 $x<0$，则 $B((x,y),\frac{x}{2})\subset B^c$，故 $(x,y)\in(B^c)^\circ$

Case 2. 若 $x=0$，则 $|y|>1, B\left((x,y),\frac{|y|-1}{2}\right)\subset B^c$，故 $(x,y)\in(B^c)^\circ$

Case 3. 若 $x>0$，当 $x>1$ 时一定存在足够小的开球包含于 B^c，即 $(x,y)\in(B^c)^\circ$；当 $x\le 1$ 时，不妨设 $y\le 1$（$y>1$ 时也显然），记

$$\Gamma=\left\{(t,\sin\frac{1}{t})\middle|t\in[\frac{x}{2},1]\right\}$$

则 Γ 是闭集，(x,y) 是紧集，故 $d\overset{\text{def}}{=}\mathrm{d}((x,y),\Gamma)>0$，取 $B((x,y),\frac{d}{2})\subset B^c$，则 $(x,y)\in(B^c)^\circ$

综上 B^c 是开集，故 B 是闭集 □

习题 7 在 $\mathbb{R}$ 上规定第三题中的拓扑，子集 $A=\{0\}$，求 $\overline{A}$

证明 因为 $(-\infty,y)$是x的邻域 $\iff$ $y>x$，所以

$$\begin{aligned}x\in\overline{A}&\iff x\text{的任意邻域与}A\text{都有交点}\\&\iff\forall y>x,0\in(-\infty,y)\\&\iff x\ge 0\end{aligned}$$

故 $\overline{A}=[0,+\infty)$ □

习题 8 在度量空间中，记 $B[x_0,\varepsilon]=\{x\in X|\mathrm{d}(x,x_0)\le\varepsilon\}$，证明 $B[x_0,\varepsilon]$ 是闭集，举例说明 $\overline{B(x_0,\varepsilon)}=B[x_0,\varepsilon]$ 不一定成立

证明 只需证明 $B[x_0,\varepsilon]^c$ 是开集，这是因为 $\forall y\in B[x_0,\varepsilon]^c, B(x,\mathrm{d}(x_0,y)-\varepsilon)\subset B[x_0,\varepsilon]^c$

考虑 $(\mathbf{E}^1,\tau_e)$ 的子空间 $(\mathbb{Z},\tau_e)$，其中 $\overline{B(0,1)}=\{0\}$，但是 $B[0,1]=\{-1,0,1\}$ □

习题 10 设 $A_1,\cdots,A_n$ 都是 X 的闭集，而且 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，证明 $B\subset X$ 是 X 的闭集 $\iff$ $B\cap A_i$ 是 A_i 的闭集

证明 $(\Longrightarrow)$：因为 $B\cap A_i\subset A_i\subset X$，且由 B,A_i 是 X 的闭集知，$B\cap A_i$ 是 X 的闭集，所以 $B\cap A_i$ 是 A_i 的闭集

$(\Longleftarrow)$：因为 $B=B\cap X=B\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$ 为 X 中有限个闭集的并，故 B 是 X 的闭集 □

习题 11 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间，$A \subset Y, x \in Y$，证明：在 X 中，x 是 A 的聚点 $\iff$ 在 Y 中，x 是 A 的聚点

证明 记拓扑空间为 (X, τ)，回顾聚点定义：设 $A \subset X, x \in X$，若 x 的任意邻域 N 满足

$$N \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$$

则称 x 为 A 的聚点

首先证明聚点定义中的“邻域”可以改为“包含 x 的开集”

$(\Longrightarrow)$: 显然，因为包含 x 的开集也是邻域

$(\Longleftarrow)$: 若任意包含 x 的开集 u 满足 $u \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$，则对任意 x 的邻域 $N, \exists u \in \tau, \text{s.t. } x \in u \subset N$，所以 $N \cap (A \backslash \{x\}) \supseteq u \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$

所以

$$\begin{aligned} \text{在}X\text{中，}x\text{是}A\text{的聚点} &\iff \forall u \in \tau, x \in u \Longrightarrow u \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing \\ &\iff \forall u \in \tau, x \in (u \cap Y) \Longrightarrow (u \cap Y) \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing \\ &\iff \text{在}Y\text{中，}x\text{是}A\text{的聚点} \end{aligned}$$

□

习题 12 设 X 是拓扑空间，$B \subset A \subset X$，记 $\overline{B}_A, B_A^\circ$ 分别为 B 在 A 中的闭包和内部，$\overline{B}, B^\circ$ 分别为 B 在 X 中的闭包和内部，证明

(1) $\overline{B}_A = A \cap \overline{B}$

(2) $B_A^\circ = A \backslash (\overline{A \backslash B})$

(3) 如果 A 是 X 的开集，则 $B_A^\circ = B^\circ$

证明 (1) 记 B'_A 为 B 在 A 中的导集，则由习题 11 知，$B'_A = B' \cap A$，所以

$$\overline{B}_A = B \cap B'_A = B \cup (B' \cap A) = (B \cup B') \cap (B \cup A) = \overline{B} \cap A$$

(2) 因为 Y° 和 $\overline{Y^c}$ 互补，所以

$$B_A^\circ = A \backslash \overline{(A \backslash B)}_A \overset{(1)}{=} A \backslash (A \cap \overline{A \backslash B}) = A \cap (A \cap \overline{A \backslash B})^c = A \cap (A^c \cup (\overline{A \backslash B})^c) = A \cap (\overline{A \backslash B})^c = A \backslash (\overline{A \backslash B})$$

(3) 设 u 是 A 中的开集，则由 A 是 X 的开集知，u 是 X 中的开集，另一方面，设 $u \subset B$ 是 X 中的开集，则 $u = u \cap A$ 是 A 中的开集，所以

$$B_A^\circ = \bigcup_{\substack{u\text{ 是 }A\text{ 中开集} \\ u \subset B}} u = \bigcup_{\substack{u\text{ 是 }X\text{ 中开集} \\ u \subset B}} u = B^\circ$$

□

习题 15 证明：A 是拓扑空间 X 的稠密子集 $\iff$ X 的每个非空开集与 A 相交非空

证明 $(\Longrightarrow)$：对 $\overline{A} = X$ 两边同时取补得 $(A^c)^\circ = \varnothing$，假设存在 X 非空开集 u 与 A 相交为空集，则 $u \subset A^c$，这与 $(A^c)^\circ = \varnothing$ 矛盾！

$(\Longrightarrow)$：由题意知 A^c 中不包含任意 X 的开集，即 $(A^c)^\circ = \varnothing$，两边同时取补得 $\overline{A} = X$ □

习题 17 若 A 和 B 都是 X 的稠密子集，并且 A 是开集，则 $A \cap B$ 也是 X 的稠密子集

证明 假设 $A \cap B$ 不是 X 的稠密子集，由习题 15 知，存在 X 的非空开集 u，使得 $u \cap (A \cap B) = \varnothing$，又因为 A 是 X 的稠密子集，由习题 15 知，$u \cap A$ 非空，且它是 X 的开集，因此 $\varnothing = u \cap (A \cap B) = (u \cap A) \cap B$，由习题 15 知，这与 B 是 X 的稠密子集矛盾！ □