概率论第八周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 19 日

习题 3.3

T1

解 (1). 记 $U=X+Y,V=X-Y$，因为 $(X,Y)\sim N(0,I_2)$，取 $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}U & V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=(X,Y)D$$

因此

$$(U,V)\sim N(0D,D^TI_2D)=N(0,2I_2)$$

所以 (U,V) 的联合密度函数为

$$f(u,v)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}$$

由 $\Sigma=2I_2$ 为对角阵知，U,V 相互独立，故 $f(u,v)=f_U(u)f_V(v)$，其中 $f_U(u)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}u^2},f_V(v)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}u^2}$

(2). 由第一问知，$U,V\sim N(0,2)$，且它们相互独立，所以

$$\mathbb{E}[X-Y|X+Y]=\mathbb{E}[V|U]\xlongequal{\text{独立}}\mathbb{E}[V]=0$$

又因为 $f_{V|U}(v|u)=\frac{f(u,v)}{f_U(u)}=f_V(v)$，所以

$$(V|U=u)\sim N(0,2),\quad \forall u\in\mathbb{R}$$

所以由 $\mathbb{E}[V]=0$ 知

$$\mathrm{Var}(V|U=u)=\mathbb{E}[(V-\mathbb{E}[V|U=u])^2|U=u]=\mathbb{E}[V^2|U=u]=\mathbb{E}[V^2]=\mathrm{Var}(V)=2$$

即 $\mathrm{Var}(V|U)=2$ □

T3

证明 记 $U=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k, V=\sum\limits_{k=1}^{n}b_kX_k$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathbb{E}[(U-\mathbb{E}[U])(V-\mathbb{E}[V])]\\
&=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_kX_k-\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}a_kX_k\right]\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_kX_k-\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}b_kX_k\right]\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_kX_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbb{E}\left[X_k\right]\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_kX_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\mathbb{E}\left[X_k\right]\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k\big(X_k-\mathbb{E}[X_k]\big)\sum_{k=1}^{n}b_k\big(X_k-\mathbb{E}[X_k]\big)\right]\\
&=\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_j\mathbb{E}[\big(X_k-\mathbb{E}[X_k]\big)\big(X_j-\mathbb{E}[X_j]\big)]\\
&=\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_j\sigma_{ij}
\end{aligned}$$

首先记 $A=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}^T$，则 $U=XA\sim N(0A,A^T\Sigma A)$，即 U 也服从正态分布，同理 V 也服从正态分布，由讲义中的定理 3.3.5 知，高斯变量 U,V 独立 $\iff$ $\mathrm{Cov}(U,V)=0$，故

$$U=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k, V=\sum_{k=1}^{n}b_kX_k\ \text{独立}\quad\iff\quad\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_j\sigma_{ij}=0$$

考虑 $D=(A,B)$，则

$$XD=(XA,XB)=(U,V)\sim N(0D,D^T\Sigma D)=N\left(0,\begin{pmatrix}A^T\Sigma A & A^T\Sigma B\\ B^T\Sigma A & B^T\Sigma B\end{pmatrix}\right)$$

记 $\begin{pmatrix}A^T\Sigma A & A^T\Sigma B\\ B^T\Sigma A & B^T\Sigma B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$，其中 Σ_{ij} 是数，且 $\Sigma_{12}=\Sigma_{21}$，由 $B\neq 0$ 和 Σ 正定知 $\Sigma_{22}=B^T\Sigma B\neq 0$，因为

$$\begin{pmatrix}1 & -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

设 $Y=(Y_1,Y_2)=(U,V)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}V & V\end{pmatrix}$,则 $Y\sim N\left(0,\begin{pmatrix}\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\right)$ 这就说明 $Y_1=U-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}V$ 与 $Y_2=V$ 独立，反解出 U,V 得

$$\begin{cases}U=Y_1+\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}Y_2\\ V=Y_2\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U|V] &= \mathbb{E}[Y_1 + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}Y_2|Y_2] = \mathbb{E}[Y_1|Y_2] + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}Y_2 \\ &= \mathbb{E}[Y_1] + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}Y_1 = \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}Y_2 \\ &= \frac{B^T\Sigma A}{B^T\Sigma B}V = \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_j b_k \sigma_{ij}}{\sum\limits_{j,k=1}^{n} b_j b_k \sigma_{jk}} V\end{aligned}$$

□

T5

解 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1, \overline{X}) &= \mathbb{E}\left[X_1 \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right] - \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_1X_i] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_i] \\ &= \frac{1}{n}\left[\mathbb{E}[X_1^2] - \left(\mathbb{E}[X_1]\right)^2\right] = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

又因为 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I)$，其中 $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \cdots, \mu)$，取 $D = (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$，则

$$\overline{X} = \boldsymbol{X}D \sim N(\boldsymbol{\mu}D, D^T\sigma^2 I_n D) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

所以

$$\rho(X_1, \overline{X}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, \overline{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(\overline{X})}} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

□

习题 3.4

T1

证明 由 $Z \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ 知，$f_Z(z) = \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}$，设 $Z = X + iY$，则 $f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}$，做变量替换

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$$

则 $f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{r}{\pi}e^{-r^2}$，且

$$Z^k\overline{Z}^l = R^k e^{ik\Theta} R^l e^{-il\Theta} = R^{k+l}e^{i(k-l)\Theta}$$

所以

$$\mathbb{E}[Z^k\overline{Z}^l] = \int_0^{+\infty} r^{k+l} \cdot \frac{r}{\pi}e^{-r^2}\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta}\mathrm{d}\theta$$

当 $k \neq l$ 时，关于 θ 的积分为零，故 $\mathbb{E}[Z^k\overline{Z}^l]=0, k\neq l$；当 $k=l$ 时

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^k\overline{Z}^l] &= 2\int_0^{+\infty} r^{2k+1}e^{-r^2}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(k+1) = k!
\end{aligned}
$$

□

T4

解 记 $H=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，由矩阵乘法公式

$$\left(H^k\right)_{ij} = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}j}$$

所以

$$\mathrm{tr}(H^k) = \sum_{s=1}^n \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}} a_{si_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}s} = \sum_{i_1,\cdots,i_k} a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_si_1}$$

因此

$$\mathbb{E}[\mathrm{tr}(H^k)] = \sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ki_1}]$$

而对于每一项 $a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_ki_1}\sim N(0,\Sigma)$，由 *Wick* 公式

$$\mathbb{E}[a_{i_1i_2}\cdots a_{i_ki_1}] = \sum_{P\in\mathcal{P}_2(n)}\prod_{(i,j)\in\mathcal{P}}\mathbb{E}[X_iX_j]$$

所以当 k 为奇数时，$a_1=a_3=a_5=0$；当 k 为偶数时

若 $k=2$，则期望展开式中共有 n^2 项，且有 n 项为 a_{ii}^2，$n(n-1)$ 项为 $a_{ij}a_{ji}$，所以

$$a_2 = \mathbb{E}[\mathrm{tr}(H^2)] = n\mathbb{E}[a_{11}^2] + n(n-1)\mathbb{E}[a_{12}^2] = 2n + n(n-1) = n(n+1)$$

$k=4,6$ 时，我不会做 □

T6

证明 设 $Y=QHQ^{-1}$，则 $\mathrm{tr}(Y^2)=\mathrm{tr}(QH^2Q^{-1})=\mathrm{tr}(H^2Q^{-1}Q)=\mathrm{tr}(H^2)$ 则

$$
\begin{aligned}
f(Y) &= 2^{-\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{1}{4}n(n+1)}e^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}\left((QHQ^{-1})^2\right)}\cdot|\det Q|\cdot|\det Q^{-1}| \\
&= 2^{-\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{1}{4}n(n+1)}e^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(Y^2)}
\end{aligned}
$$

所以 QHQ^{-1} 也服从 *GOE* 分布 □

习题 4.1

T1

证明 由 X 取值非负知 $X=\sum\limits_{i=0}^{\infty}X\cdot I_{i\le X<i+1}$，且对于 $\forall i\ge 0$，有

$$i\cdot I_{\{i\le X<i+1\}}\le X\cdot I_{\{i\le X<i+1\}}\le (i+1)I_{\{i\le X<i+1\}}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]&=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}X\cdot I_{\{i\le x<i+1\}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}[X\cdot I_{\{i\le x<i+1\}}]\\&\ge\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\mathbb{E}[I_{\{i\le X<i+1\}}]=\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{P}(i\le X<i+1)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(i\le X<i+1)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}\mathbb{P}(i\le X<i+1)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]&=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}X\cdot I_{\{i\le x<i+1\}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}[X\cdot I_{\{i\le x<i+1\}}]\\&\le\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\mathbb{E}[I_{\{i\le X<i+1\}}]=1+\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{E}[I_{\{i\le X<i+1\}}]\\&\xlongequal{\text{同上}}1+\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge j)\end{aligned}$$

□

T3(1).

证明 对任意 $x\in\mathbb{R}$，均有 $u(x)\ge u(a)+\lambda_a(x-a)$，所以 $u(X)\ge u(a)+\lambda_a(X-a)$，取 $a=\mathbb{E}[X]$，则

$$\mathbb{E}[u(X)]\ge\mathbb{E}\left[u(\mathbb{E}[X])+\lambda_a(X-\mathbb{E}[X])\right]=\mathbb{E}[u(\mathbb{E}[X])]=u(\mathbb{E}[X])$$

□

T4.

证明 因为

$$X^r=\int_0^X rt^{r-1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}rt^{r-1}\cdot I_{\{X>t\}}\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^r] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} rt^{r-1}\cdot I_{\{X>t\}}\mathrm{d}t\right] = \int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty} rt^{r-1}\cdot I_{\{X>t\}}\mathrm{d}t\mathrm{d}F \\ &\xlongequal{\text{Fubini}} \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} rt^{r-1}\cdot I_{\{X>t\}}\mathrm{d}F\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} rt^{r-1}\int_{\mathbb{R}} I_{\{X>t\}}\mathrm{d}F\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} rt^{r-1}\mathbb{P}(X>t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

T5.

证明 (1). 对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，因为

$$x^r\mathbb{P}(|X|\geq x) = x^r\int_{\mathbb{R}} I_{\{|X|\geq x\}}\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{\mathbb{R}} |X|^r I_{\{|X|\geq x\}}\mathrm{d}\mathbb{P}$$

设 $Y_n = |X|^r I_{\{X\geq n\}}, Y = |X|^r$，则 $|Y_n|\leq Y, \forall n,\omega$，且由题设 $\mathbb{E}[Y]<+\infty$，且

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty}|X|^r I_{\{X\geq n\}} = 0$$

所以由控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^r\mathbb{P}(|X|\geq x) &\leq \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|X|^r I_{\{|X|>n\}}\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} Y_n\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} Y_n\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}\mathbb{P} = 0\end{aligned}$$

(2). 由 $\mathbb{E}[|X|^r]<+\infty$ 知，对 $\forall\varepsilon>0, \exists M, \text{s.t. } \forall x\geq M, x^r\mathbb{P}(|X|\geq x)<\varepsilon$，因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|^s] &\xlongequal{\text{T4}} \int_0^{+\infty} st^{s-1}\mathbb{P}(|X|>t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^M st^{s-1}\mathbb{P}(|X|>t)\mathrm{d}t + \int_M^{+\infty} st^{s-1}\mathbb{P}(|X|>t)\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^M st^{s-1}\mathbb{P}(|X|>t)\mathrm{d}t + s\varepsilon\int_M^{+\infty} t^{-(r+1-s)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^M st^{s-1}\mathbb{P}(|X|>t)\mathrm{d}t + \frac{s\varepsilon}{(r-s)M^{r+1-s}} < +\infty\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[|X|^r]<+\infty$ 不一定成立，若 $\mathbb{P}(|X|\geq x)\sim\frac{1}{x^r\ln x}$ as $x\to+\infty$，则有

$$\lim_{x\to+\infty} x^r\mathbb{P}(|X|\geq x) = 0$$

但是由 *T4* 知，当 $r>1$ 时，$rx^{r-1}\mathbb{P}(|X|>x)\sim\frac{r}{x\ln x}$，而 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \ln\ln x\Big|_a^{+\infty}\to+\infty$，故此时 $\mathbb{E}[|X|^r]$ 发散！ □