近世代数 (H) 第十三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 27 日

Exercise 1 证明 $\mathbb{Z}^n \simeq < x_1, \cdots, x_n \mid x_i x_j = x_j x_i, \forall i \neq j >$

Proof 记 $G = < x_1, \cdots, x_n \mid x_i x_j = x_j x_i, \forall i \neq j >$ 考虑映射

$$\begin{aligned} f : \{x_1, \cdots, x_n\} &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ x_i &\longmapsto \boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

则 $f(x_i) + f(x_j) = f(x_j) + f(x_i)$，则 f 可延拓至群同态 $\tilde{f} : G \to \mathbb{Z}^n$，下面证明 $\tilde{f}$ 是双射

单射：若 $\tilde{f}(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) = 0$，则 $a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = 0$，由 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ 是一组基知 $a_1 = \cdots = a_n = 0$，即 $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) = 1_G$，故 $\tilde{f}$ 是单射

满射：对 $\forall a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$，它的原像为 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$

所以 $\tilde{f}$ 是群同构，即 $\mathbb{Z}^n \sim < x_1, \cdots, x_n \mid x_i x_j = x_j x_i, \forall i \neq j >$ □

Exercise 2 假设 $N \leq G, N$ 是有限生成的，G/N 也是有限生成的，证明：G 是有限生成的

Proof 由 G/N 是有限生成的知，$\exists g_1, \cdots, g_s \in G, \text{s.t. } S = \{g_1N, \cdots, g_sN\}$ 是 G/N 的生成元集；由 N 是有限生成的知，$\exists n_1, \cdots, n_t \in N, \text{s.t. } \{n_1, \cdots, n_t\}$ 是 N 的生成元集

Claim: G 有生成元集 $\{g_i n_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\}$，故 G 是有限生成的

对 $\forall g \in G$，因为 $G = \bigsqcup\limits_{i=1}^{s} g_i N$，所以 $\exists! 1 \leq i \leq s, \text{s.t. } g \in g_i N$，故

$$g = g_i(a_1 n_1 + \cdots + a_t n_t) = a_1 g_i h_1 + \cdots + a_t g_i h_t$$

□

Exercise 3 $A \in M_n(\mathbb{Z})$，则 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \iff \phi_A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ 是群同构

Proof 首先 ϕ_A 是群同态，所以 ϕ_A 是群同构 $\iff \phi_A$ 是双射，即 ϕ_A^{-1} 存在

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) &\iff \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \text{s.t. } AB = I_n \\ &\iff \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \text{s.t. } \phi_{AB} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}^n} \\ &\iff \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \text{s.t. } \phi_A \circ \phi_B = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}^n} \\ &\iff \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \text{s.t. } \phi_B = \phi_A^{-1} \\ &\iff \exists \phi_A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n \text{是群同构} \end{aligned}$$

□

Exercise 4 设 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}), A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{Z}), B = P^{-1}AQ$，则有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^m \arrow[r, "\phi_A"] & \mathbb{Z}^n \arrow[r, two heads, "\text{can}"] & \mathrm{Coker}(\phi_A) \\
\mathbb{Z}^m \arrow[u, "\phi_Q"] \arrow[r, "\phi_B"] & \mathbb{Z}^n \arrow[u, "\phi_P"] \arrow[r, two heads, "\text{can}"] & \mathrm{Coker}(\phi_B) \arrow[u, "\Phi_P"']
\end{tikzcd}$$

证明 Φ_P 是群同构，其中

$$\begin{aligned}\Phi_P : \mathrm{Coker}(\phi_B) &\longrightarrow \mathrm{Coker}(\phi_A)\\ \overline{\boldsymbol{v}} &\longmapsto \overline{\phi_P(\boldsymbol{v})}\end{aligned}$$

Proof 首先验证 Φ_P 的良定性：假设 $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}}'$，则 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Im}(\phi_B)$，因此 $\exists \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^m, \text{s.t. } \phi_B(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$，所以

$$\phi_P(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = \phi_P \circ \phi_B(\boldsymbol{\mu}) = \phi_A \circ \phi_Q(\boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{Im}(\phi_A)$$

所以 $\Phi_P(\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\boldsymbol{v}}') = \overline{\phi_P(\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\boldsymbol{v}}')} = \overline{\boldsymbol{0}}$，故 $\Phi_P(\overline{\boldsymbol{v}}) = \Phi_P(\overline{\boldsymbol{v}}')$

同态：对 $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{Z}^n$，因为

$$\Phi_P(\overline{\boldsymbol{v}}_1) + \Phi_P(\overline{\boldsymbol{v}}_2) = \overline{\phi_P(\boldsymbol{v}_1)} + \overline{\phi_P(\boldsymbol{v}_2)} = \overline{\phi_P(\boldsymbol{v}_1) + \phi_P(\boldsymbol{v}_2)} = \overline{\phi_P(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)} = \Phi_P(\overline{v}_1 + \overline{v}_2)$$

单射：若 $\Phi_P(\overline{v}) = \boldsymbol{0}$，则 $\phi_P(v) \in \mathrm{Im}(\phi_A)$，故 $\exists \boldsymbol{\mu} \in \mathrm{Im}(\phi_A), \text{s.t. } \boldsymbol{\mu} = \phi_P(\boldsymbol{v})$，由 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{Im}\phi_A$ 知，$\exists \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^m, \text{s.t. } \phi_A(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\mu}$，由 $\phi_A \circ \phi_Q = \phi_P \circ \phi_B$ 知

$$\boldsymbol{v} = \phi_P^{-1}(\boldsymbol{\mu}) = \phi_P^{-1} \circ \phi_A(\boldsymbol{\eta}) = \phi_P^{-1} \circ \phi_A \circ \phi_Q \circ \phi_Q^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = \phi_B(\phi_Q^{-1}(\boldsymbol{\eta}))$$

所以 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\phi_B$，故 $\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$，即 $\mathrm{Ker}\Phi_P = \{\boldsymbol{0}\}$

满射：对 $\forall \overline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathrm{Coker}(\phi_A), \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^n, \overline{\phi_P^{-1}(\boldsymbol{\mu})} \in \mathrm{Coker}(\phi_B)$ 为 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ 的原像

综上 Φ_P 是群同构 □

Exercise 5 $G_1, \cdots, G_n$ 是群，$N_1 \lhd G_1, \cdots, N_n \lhd G_n$，则

1. $(N_1 \times \cdots \times N_n) \lhd (G_1 \times \cdots \times G_n)$
2. $\frac{(G_1\times\cdots\times G_n)}{(N_1\times\cdots\times G_n)} \simeq (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_n/N_n)$

Proof

1. 因为 $N_i \lhd G_i$，所以对 $\forall x_i \in G_i, x_i N_i x_i^{-1} = N_i$，故对 $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$，有

$$(x_1, \cdots, x_n)(N_1 \times \cdots \times N_n)(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}) = (x_1 N_1 x_1^{-1}) \times \cdots \times (x_n N_n x_n^{-1}) = N_1 \times \cdots \times N_n$$

所以 $N_1 \times \cdots \times N_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$

2. 考虑满同态

$$\pi : G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_n/N_n)$$
$$(g_1, \cdots, g_n) \longmapsto (\overline{g}_1, \cdots, \overline{g}_n)$$

因为

$$\begin{aligned}(g_1, \cdots, g_n) \in \mathrm{Ker}\pi &\iff (\overline{g}_1, \cdots, \overline{g}_n) = (1, \cdots, 1)\\ &\iff g_1 \in N_1, \cdots, g_n \in N_n\\ &\iff (g_1, \cdots, g_n) \in N_1 \times \cdots \times N_n\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Ker}\pi = N_1 \times \cdots \times N_n$，由同态基本定理

$$\frac{(G_1 \times \cdots \times G_n)}{(N_1 \times \cdots \times G_n)} \simeq (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_n/N_n)$$

□

Exercise 6 G 是有限生成的扭群 $\iff$ G 是有限群

Proof $(\Longrightarrow)$: 设 g 是有限生成的扭群，则 $\exists s_1, \cdots, s_n \in G, \mathrm{s.t.}\ G =< s_1, \cdots, s_n >$，假设 G 是无限群，则 $\exists g \in G, \mathrm{s.t.}\ \forall n \neq 0, ng \neq 0_G$，由 $G =< s_1, \cdots, s_n >$，可设

$$g = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n$$

因为 G 是扭群，设 $s_1, \cdots, s_n$ 的阶为 $l_1, \cdots, l_n$，则

$$(l_1 \cdots l_n) g = a_1 l_2 \cdots l_n (l_1 s_1) + \cdots + a_n l_1 \cdots l_{n-1} (l_n s_n) = 0_G$$

矛盾！故 G 是有限群

$(\Longleftarrow)$: 因为 G 是有限群，所以 G 一定有限生成（取 G 为生成元集），只需证 G 是扭群，对 $\forall g \in G \backslash \{0_G\}$，因为 $(g) \leq G$，所以 $\mathrm{Ord}(g) \mid |G| < +\infty$，由 $g \in G\backslash\{0\}$ 的任意性即证 □

Exercise 7 设 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$，则 $t(G) = \mathbb{Z}_2 \times \{0\} = \{(\overline{0}, 0), (\overline{1}, 0)\}$，记

$$\begin{cases} F_1 = \overline{0} \times \mathbb{Z} = \{(\overline{0}, n) | n \in \mathbb{Z}\} \\ F_2 = \{(\overline{n}, n) | n \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

证明：$t(G)$ 仅有这两个补！

Proof 首先显然有 $G = t(G) \oplus F_1$，假设 F 是 $t(G)$ 的补，且 $F \neq F_1$，下面证明 $F = F_2$，因为 $(\overline{1}, 1) \in G$，且 $G = t(G) \oplus F_1$，因为

$$\begin{cases} (\overline{1}, 1) = (\overline{0}, 1) + (\overline{1}, 0) \\ (\overline{1}, 1) = (\overline{0}, 0) + (\overline{1}, 1) \end{cases}$$

由 $F\neq F_1$ 知，$(\overline{1},1)$ 只能是第二种分解，故 $(\overline{1},1)\in F_2$，因此 $F_2\supset\{(\overline{n},n)|n\in\mathbb{Z}\}$

设 $(\overline{a},b)\in F_2$，则 $(\overline{a},b)-a(\overline{1},1)=(\overline{0},b-a)\in F_2,(\overline{a},b)=(\overline{0},b-a)+a(\overline{1},1)$，所以 $(\overline{0},b-a)\in t(G)\cap F_2=(\overline{0},0)$，故 $b=a$，即 $(\overline{a},b)=(\overline{a},a)$，即 $F_2\subset\{(\overline{n},n)|n\in\mathbb{Z}\}$ □

Exercise 8 $D_8=<a,b\mid a^4=1=b^2=(ab)^2>$，以下考虑共轭作用

1. 取 $N_1=<a>,H_1=<b>$，算 $\rho_1:H_1\to\mathrm{Aut}(N_1)$
2. 取 $N_2=<a^2,b>,H_2=<ab>$，算 $\rho_2:H_2\to\mathrm{Aut}(N_2)$

Proof (1). 因为 $\forall a^4=b^2=1$，所以 $<a>=\{1,a,a^2,a^3\},<b>=\{1,b\}$，所以 $\rho_1(1)=\mathrm{Id}$，下面计算 $\rho_1(b)$，因为 $(ab)^2=b^2\Longrightarrow abab=b^2\Longrightarrow bab^{-1}=a^{-1}=a^3$，即 $\rho_1(b)(a)=bab^{-1}=a^3$

$$\begin{aligned}\rho_1(b):N_1&\longrightarrow N_1\\1&\longmapsto 1\\a&\longmapsto a^{-1}=a^3\\a^2&\longmapsto a^2\\a^3&\longmapsto a^{-3}=a\end{aligned}$$

因此

$$\rho_1(1)=\mathrm{Id},\quad \rho_1(b)=\text{求逆}$$

(2). 因为 $H_2=\{1,ab\},N_2=\{1,a^2,b,a^2b=ba^2\}$，其中 $a^2b=ba^2$ 是因为 $\rho_1(b)=ba^2b^{-1}=a^2$ 因为 $\rho_2(1)=\mathrm{Id}$，下面计算 $\rho_2(ab)$，经计算

$$\begin{aligned}\rho_2(ab):N_2&\longrightarrow N_2\\1&\longmapsto 1\\a^2&\longmapsto a^2\\b&\longmapsto ba^2\\a^2b&\longmapsto b\end{aligned}$$

因此

$$\rho_2(1)=\mathrm{Id},\quad \rho_2(ab)=\big(1\mapsto 1,a^2\mapsto a^2,b\mapsto a^2b,a^2b\mapsto b\big)$$

□