概率论第五周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 2 日

习题 2.6

T1

证明 因为 G_1, G_2 是概率母函数，所以 $G_1(1) = G_2(1) = 1$，且 G_1, G_2 的系数均非负，设 G_1, G_2 的第 i 项系数分别为 $\{a_i\}, \{b_i\}$，则 $G_1G_2, \alpha G_1 + (1-\alpha)G_2$ 的第 i 项系数分别为

$$\sum_{k=0}^{i} a_i b_{n-i}, \quad \alpha a_i + (1-\alpha) b_i$$

它们也非负，且

$$G_1(1)G_2(1) = 1, \quad \alpha G_1(1) + (1-\alpha)G_2(1) = 1$$

因此它们都是概率母函数

设 $G(s)$ 的系数为 $\{a_i\}$，因为 $\frac{G(\alpha s)}{G(\alpha)}$ 的第 i 项系数为 $\frac{a_i \alpha^i}{G(\alpha)} \geq 0$，且当 $s = 1$ 时，$\frac{G(\alpha s)}{G(\alpha)} = 1$，所以它是概率母函数 □

T3

证明 (1). 对 $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > k) = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^k$，所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > Y, Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k, Y = k) \\
&\xlongequal{\text{独立}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot \mathbb{P}(Y = k) \\
&= G(1-p)
\end{aligned}$$

□

T5

解 由定理 *2.6.4* 知，$G_S(s) = G_N(G_X(s))$，所以我们只需求 $G_X(s), G_N(s)$ 即可，因为

$$\begin{aligned}
G_X(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X = i) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s^i = \frac{s^N - 1}{N(s-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_N(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(N=i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} s^i (1-p)^{i-1} p = \frac{ps}{1-(1-p)s}
\end{aligned}
$$

所以 S 的母函数为

$$
G_S(s) = \frac{p(s^N - 1)}{N(s-1) - (1-p)(s^N - 1)}
$$

(2). 由 N 是合数，可设 $N = mn, 1 < m \le n < N$，因为

$$
\begin{aligned}
G_X(s) &= \frac{S^N - 1}{N(s-1)} = \frac{S^{mn} - 1}{mn(s-1)} \\
&= \frac{s^m - 1}{m(s-1)} \cdot \frac{1 + s^m + s^{2m} + \cdots + s^{(n-1)m}}{n} \\
&= \frac{1 + s + s^2 + \cdots + s^{m-1}}{m} \cdot \frac{1 + s^m + s^{2m} + \cdots + s^{(n-1)m}}{n}
\end{aligned}
$$

考虑 $G_1(s) = \frac{1}{m} \sum\limits_{i=0}^{m-1} s^i, G_2(s) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} s^{mi}$，考虑 $\{0, 1, \cdots, m-1\}, \{0, m, 2m, \cdots, (n-1)m\}$ 上的均匀分布 X_1, X_2，则

$$
S = X_1 + X_2
$$

且 X_1, X_2 独立，因为对 $\forall x \in \{0, 1, \cdots, N\}$，对 m 作带余除法有

$$
x = qm + r, \quad 0 \le r < m-1, 0 \le q \le n-1
$$

所以 $X = x \iff X_1 = r, X_2 = qm$，故

$$
\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{mn} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \mathbb{P}(X_1 = r)\mathbb{P}(X_2 = qm)
$$

□

习题 3.1

T1

解 (1). 设 $x = \cos^2\theta$，其中 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x = -2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$，且此时 $\sin\theta > 0$，故

$$
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-2C\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \pi C = 1
$$

因此，$C = \frac{1}{\pi}$

(2). 设 $e^{-x} = t$，则 $-e^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$$
\int_{\mathbb{R}} C e^{-x-e^{-x}} \mathrm{d}x = C \int_0^{+\infty} t e^{-t} \mathrm{d}t = C = 1
$$

因此，$C = 1$ $\square$