# 近世代数 (H) 第十四周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 31 日

**Exercise 1** 假设存在域同构 $\delta : k \xrightarrow{\sim} k'$，若有域扩张 $K/k, K'/k'$，则 $|\delta\text{的延拓}| \le \dim_k K$

**Proof** 若 $\dim_k K = +\infty$，则命题显然成立，假设 $\dim_k K < +\infty$，因为有限维域扩张一定是有限生成的代数扩张，设生成元为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，考虑域扩张塔

$$k \subseteq k(\alpha_1) \subseteq \cdots \subseteq k(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = K$$

设 $\alpha_1$ 在 $k$ 上的最小多项式为 $g(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0$，假设 $\tilde{\delta} : k(\alpha_1) \to K'$ 为 $\delta$ 的延拓，即 $\tilde{\delta}|_k = \delta$，则由 $g(\alpha_1) = 0$ 知，$\tilde{\delta}(\alpha_1)$ 在 $k(\alpha_1)$ 中满足

$$\alpha_1^n + \delta(a_{n-1})\alpha_1^{n-1} + \cdots + \delta(a_1)\alpha_1 + \delta(a_0) = 0$$

即 $\tilde{\delta}(\alpha_1) \in \mathrm{Root}_{k(\alpha_1)}(\delta(g))$，故 $\exists \beta \in \mathrm{Root}_{K'}(\delta(g)), \text{s.t. } \tilde{\delta}(\alpha) = \beta$，又因为 $|\mathrm{Root}_{K'}(\delta(g))| \le \deg(\delta(g)) = n$，所以 $\delta$ 从 $k$ 到 $k(\alpha_1)$ 的延拓至多只有 $\deg g(x) = n$ 个

对 $\dim_k K$ 的维数使用第二数学归纳法，则对于每一个 $\tilde{\delta} : k(\alpha_1) \to k'(\beta)$，至多有 $\dim_{k(\alpha_1)} K$ 种延拓，所以 $|\delta\text{的延拓}| \le \dim_k k(\alpha_1) \cdot \dim_{k(\alpha_1)} K = \dim_k K$ □

**Exercise 2** 求 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的绝对 *Galois* 双射

**Solution** 先求 $\mathrm{Aut}(K)$，设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$，$f(x) = x^3 - 2$，因为 $\sigma(1) = 1 \Longrightarrow \sigma|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$，则在 $K$ 上 $\sqrt[3]{2}$ 满足 $f(\sqrt[3]{2}) = 0$，对 $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ 两边同时作用 $\sigma$ 得 $\sigma(\sqrt[3]{2})^3 - 2 = 0$，即 $\sigma(\sqrt[3]{2}) \in \mathrm{Root}_K(f) = \{\sqrt[3]{2}\}$ 所以只能是 $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$，故 $\sigma = \mathrm{Id}_K$，所以 $\mathrm{Aut}(K) = \{\mathrm{Id}_K\}$，故 $\mathrm{Aut}(K)$ 是平凡群，所以 $K$ 的绝对 *Galois* 双射为

$$\{\text{有限群} G \le \mathrm{Aut}(K)\} \xleftrightarrow{1:1} \{K/k\text{有限维 } \textit{Galois} \text{ 扩张}\}$$
$$\mathrm{Aut}(K) \longmapsto K$$

□

**Exercise 3** 考虑域扩张塔 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = (\mathbb{Q}, x^3 - 2)$，证明

1. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 不是 *Galois* 扩张
2. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ 是 *Galois* 扩张

**Proof** (1). 由上一题知，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{Id}_{\sqrt[3]{2}}\}$，故 $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})| = 1 < 3 = \dim_{\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{2})$，所以它不是 *Galois* 扩张

(2). 因为 $\omega$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 上的最小多项式为 $f(x)=x^2+x+1$，故 $\dim_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)=2$，下面证明 $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))|=2$，它小于等于域扩张的维数 2，只需证明它确实有两个元素，因为在 $\mathrm{Root}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)}(f)=\{\omega,\omega^2\}$，所以 $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}}$ 有两个延拓

$$\begin{aligned}\delta_1:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)&\longrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)\\ \omega&\longmapsto\omega\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\delta_2:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)&\longrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)\\ \omega&\longmapsto\omega^2\end{aligned}$$

所以我们找到了 $\delta_1,\delta_2\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$,即 $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))|=2=\dim_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$,所以它是 *Galois* 扩张 □

**Exercise 4** 设 $K/k$ 是 *Galois* 扩张，$G=\mathrm{Gal}(K/k),g(x)\in k[x]$ 不可约，则群作用 $G\curvearrowright\mathrm{Root}_K(g(x))$ 可迁

**Proof** 即证明 $\forall a,b\in\mathrm{Root}_K(g),\exists\sigma\in G,\text{s.t. }\sigma(a)=b$

因为 $a,b\in\mathrm{Root}_K(g)$，所以 $\exists\mathrm{Id}_k$ 的延拓

$$\begin{aligned}\delta:k(a)&\longrightarrow k(b)\\ a&\longmapsto b\end{aligned}$$

满足 $\delta|_k=\mathrm{Id}_k$，由延拓定理知存在 $\delta$ 的延拓 $\tilde{\delta}:K\to K$ 满足 $\tilde{\delta}|_{k(\alpha)}=\delta$，故 $\tilde{\delta}|_k=\mathrm{Id}_k$，所以 $\tilde{\delta}\in G$ 且 $\tilde{\delta}(a)=b$，因此 $a,b$ 位于相同的轨道上，由 $a,b$ 的任意性知，它是可迁的 □

**Exercise 5** 记 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=(\mathbb{Q},(x^2-2)(x^2-3)),G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$，考虑群作用

$$G\curvearrowright\mathrm{Root}_K\big((x^2-2)(x^2-3)\big)=\{\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3}\}\overset{\text{记为}}{=}\{a,b,c,d\}$$

求出 $G$ 的子群和 $K$ 的子域，并画出 $G$ 的子群格和 $K$ 的子域格

**Proof** 先前作业求过 $G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})=\{\delta_{0,1},\delta_{0,2},\delta_{1,1},\delta_{1,2}\}$，具体如下（$\forall\sigma\in G$ 都由域扩张的生成元决定，所以以下只写出生成元的像）

$$\begin{cases}\delta_{0,1}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})=(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})\\ \delta_{0,2}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})=(1,\sqrt{2},-\sqrt{3},-\sqrt{6})\\ \delta_{1,1}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})=(1,-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{6})\\ \delta_{1,2}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})=(1,-\sqrt{2},-\sqrt{3},\sqrt{6})\end{cases}$$

经计算可得 $\delta_{0,2},\delta_{1,1},\delta_{1,2}$ 的阶均为 2，所以 $G$ 有子群 $\{\mathrm{Id}\},<\delta_{0,2}>,<\delta_{1,1}>,<\delta_{1,2}>,G$，接下来求它们对应的不动子域

$\{\mathrm{Id}\}:K^{\{\mathrm{Id}\}}=K$

$<\delta_{0,2}>$: 因为 $\delta_{0,2}(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, 所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subseteq K^{<\delta_{0,2}>}$, 又因为 $[G:<\delta_{0,2}>]=2=[K^{<\delta_{0,2}>}:\mathbb{Q}]$,

且 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=2$，由维数公式

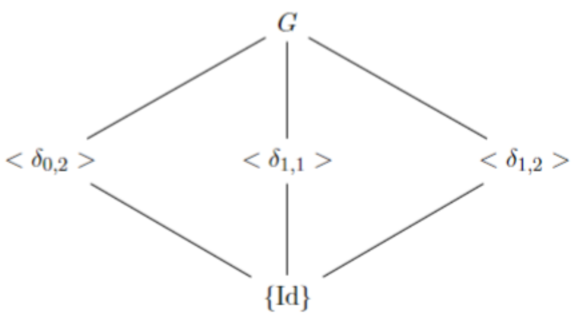
$$[K^{<\delta_{0,2}>}:\mathbb{Q}(\sqrt{2})]=\frac{[K^{<\delta_{0,2}>}:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]}=1$$

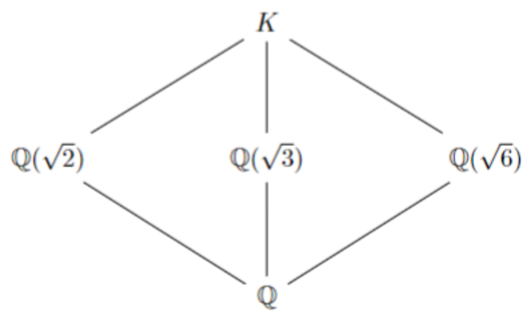
所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=K^{<\delta_{0,2}>}$

$<\delta_{1,1}>$: 因为 $\delta_{1,1}(\sqrt{3})=\sqrt{3}$，所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})\subseteq K^{<\delta_{1,1}>}$，同上的论述知 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=K^{<\delta_{1,1}>}$

$<\delta_{1,2}>$: 因为 $\delta_{1,2}(\sqrt{6})=\sqrt{6}$，所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{6})\subseteq K^{<\delta_{1,2}>}$，同上的论述知 $\mathbb{Q}(\sqrt{6})=K^{<\delta_{1,2}>}$

$G$ : 由定义知 $K^G=\mathbb{Q}$，所以




**Exercise 6** 设 $L,L'$ 均为格，$f:L\xrightarrow{\sim}L'$ 为偏序集同构，则 $f$ 保最小上界和最大下界，即

$$f(a\vee b)=f(a)\vee f(b),\quad f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b),\quad \forall a,b\in L$$

**Proof** 由 $f$ 是同态知 $a,b\leq a\vee b\Longrightarrow f(a),f(b)\preceq f(a\vee b)$，因此

$$\big(f(a)\vee f(b)\big)\preceq f(a\vee b)$$

另一方面，因为 $f(a),f(b)\preceq\big(f(a)\vee f(b)\big)$，所以 $a,b\leq f^{-1}\big(f(a)\vee f(b)\big)$，故 $a\vee b\leq f^{-1}\big(f(a)\vee f(b)\big)$，因此

$$f(a\vee b)\preceq f(a)\vee f(b)$$

所以 $f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$

由 $f$ 是同态知 $a\wedge b\leq a,b\Longrightarrow f(a\wedge b)\preceq f(a),f(b)$，因此

$$f(a\wedge b)\preceq f(a)\wedge f(b)$$

另一方面，因为 $\big(f(a)\wedge f(b)\big)\preceq f(a),f(b)$，所以 $f^{-1}\big(f(a)\wedge f(b)\big)\leq a,b$，故 $f^{-1}\big(f(a)\wedge f(b)\big)\leq a\wedge b$，因此

$$f(a)\wedge f(b)\preceq f(a\wedge b)$$

所以 $f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)$ □

**Exercise 7** 设 $K/k$ 是有限维 *Galois* 扩张，$G=\mathrm{Gal}(K/k)$，$H\leq G,\sigma\in G$，求证 $K^{\sigma H\sigma^{-1}}=\sigma(K^H)$

**Proof** 因为

$$\begin{aligned} x \in K^{\sigma H \sigma^{-1}} &\iff \forall \tau \in H, \sigma\tau\sigma^{-1}(x) = x \\ &\iff \forall \tau \in H, \tau(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x) \\ &\iff \sigma^{-1}(x) \in K^H \\ &\iff x \in \sigma(K^H) \end{aligned}$$

□

**Exercise 8** 设 $K/k$ 是有限维 *Galois* 扩张, $G = \mathrm{Gal}(K/k), H \leq G, E = K^H$, 则 $\mathrm{Gal}(E/k) = G_H/H$, 其中 $G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$

**Proof** 考虑映射

$$\begin{aligned} \theta : G_H &\longrightarrow \mathrm{Gal}(E/k) = \mathrm{Gal}(K^H/k) \\ \sigma &\longmapsto \sigma|_E \end{aligned}$$

首先验证 $\theta$ 是合理的：对于 $\forall \sigma \in G_H \leq G, (\sigma|_E)|_k = \mathrm{Id}_k$，故 $\sigma|_E \in \mathrm{Gal}(E/k)$；接下来证明它是满射，对 $\forall \tau \in \mathrm{Gal}(E/k)$，由 $K/k$ 是有限维 *Galois* 扩张知，$\tau$ 可以延拓到 $K$ 上的自同构 $\tilde{\tau}$，进而 $\theta(\tilde{\tau}) = \tau$；最后考虑 $\mathrm{Ker}(\theta)$，因为

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathrm{Ker}(\theta) &\iff \sigma|_E = \mathrm{Id}_E \\ &\iff \sigma \in \mathrm{Gal}(K/E) \cap G_H \\ &\iff \sigma \in H \end{aligned}$$

第二行到第三行是因为 $\mathrm{Gal}(K/E) = \mathrm{Gal}(K/K^H) = H, H \cap G_H = H$，由同态基本定理

$$G_H/H \simeq \mathrm{Gal}(E/k)$$

即 $G_H/H \simeq \mathrm{Gal}(K^H/k)$ □