实分析第五周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 30 日

周一

T1.

解 考虑 $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$，则 $f(x)$ 几乎处处连续：仅仅在 $\{0,1\}$ 上不连续。假设存在连续函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\text{s.t. } f=g$ a.e，我们先证明 $g(1)=1$

***Claim*:** 对 $\forall\frac{1}{n}>0$，均存在 $x\in\left(1-\frac{1}{n},1\right),\text{s.t. } f(x)=g(x)$

否则，$\exists n_0>0,\text{s.t. }\forall x\in\left(1-\frac{1}{n_0},1\right),f(x)\neq g(x)$，这就说明

$$\left(1-\frac{1}{n_0},1\right)\subseteq\{f\neq g\}\Longrightarrow m(\{f\neq g\})\geq\frac{1}{n_0}>0$$

这与 $f=g$ a.e 矛盾！

由断言知，我们可以构造一个 $[0,1]$ 上的一个收敛到 1 的数列 $\{x_n\}$，且 $f(x_n)=g(x_n),\forall n$：首先我们在 $[0,1]$ 中任选 x_1 满足 $f(x_1)=g(x_1)=1$，由断言知，在 $(1-x_1,1)$ 中，我们一定能找到一个 x_2 满足 $f(x_2)=g(x_2)=1$，接下来在 $(1-x_2,x_2)$ 中同理选取 x_3，以此类推得到 $\{x_n\}\nearrow 1$，且 $f(x_n)=g(x_n)=1$ 因为 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续，所以

$$g(1)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

这就证明了 $g(1)=1$，由 g 的连续性知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. }\forall|x-1|<\delta$，有

$$|g(x)-g(1)|<\varepsilon$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则 $\forall x\in(1,1+\delta),g(x)>\frac{1}{2}$，但此时 $f(x)=0$，所以

$$(1,1+\delta)\subseteq m(\{f\neq g\})\Rightarrow m(\{f\neq g\})\geq m\big((1,1+\delta)\big)=\delta>0$$

这与 $f=g$ a.e 矛盾！ □

T2.

证明 我们在一开始定义可测函数时约定了 f 几乎处处有限，即 $f^{-1}(\pm\infty)$ 为零测集，则我们可以视 f 在 $E\backslash f^{-1}(\pm\infty)$ 上处处有限，则由 *Lusin* 定理，对 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 闭集 $F_\varepsilon\subseteq E\backslash f^{-1}(\pm\infty),\text{s.t. } f|_{F_\varepsilon}$ 连续，且

$$\big(E\backslash f^{-1}(\pm\infty)\big)\backslash F_\varepsilon<\varepsilon$$

注意到

$$\begin{aligned}E\backslash F_\varepsilon &= \left[E\backslash f^{-1}(\pm\infty)\sqcup f^{-1}(\pm\infty)\right]\backslash F_\varepsilon = \left[E\backslash f^{-1}(\pm\infty)\sqcup f^{-1}(\pm\infty)\right]\cap F_\varepsilon^c\\ &= \left[\left(E\backslash f^{-1}(\pm\infty)\right)\backslash F_\varepsilon^c\right]\sqcup\left[f^{-1}(\pm\infty)\backslash F_\varepsilon^c\right]\end{aligned}$$

又因为 $f^{-1}(\pm\infty)\backslash F_\varepsilon^c\subseteq f^{-1}(\pm\infty)$，且 $f^{-1}(\pm\infty)$ 是零测集，所以

$$m(E\backslash F_\varepsilon) = m\left(\left(E\backslash f^{-1}(\pm\infty)\right)\backslash F_\varepsilon^c\right)+m\left(f^{-1}(\pm\infty)\backslash F_\varepsilon^c\right)<\varepsilon+0=\varepsilon$$

所以在一开始我们就可以假设 f 处处有限 □

T3.

证明 (1).要证 $g_1(x)$ 是连续的，我们只需证明 $\mathrm{d}(x,A),\mathrm{d}(x,B)$ 是连续的，再结合连续函数的四则运算也连续即可，以下证明 $\mathrm{d}(x,A)$ 连续（$\mathrm{d}(x,B)$ 连续也同理）

因为 $\mathrm{d}(x,A)=\inf\limits_{y\in A}|x-y|$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x_2,A) &= \inf_{y\in A}|x_2-y|\le\inf_{y\in A}\left(|x_1-x_2|+|x_1-y|\right)\\ &= |x_1-x_2|+\inf_{y\in A}|x_1-y|\\ &= |x_1-x_2|+\mathrm{d}(x_1,A)\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}(x_2,A)-\mathrm{d}(x_1,A)\le|x_1-x_2|$$

交换 x_1,x_2 的位置，我们有 $\mathrm{d}(x_1,A)-\mathrm{d}(x_2,A)\le|x_1-x_2|$，所以

$$|\mathrm{d}(x_1,A)-\mathrm{d}(x_2,A)|\le|x_1-x_2|$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时，就有

$$|\mathrm{d}(x_2,A)-\mathrm{d}(x_1,A)|\le|x_2-x_1|<\varepsilon$$

因此 $\mathrm{d}(x,A)$ 在 E 上连续，同理，$\mathrm{d}(x,B)$ 在 E 上也连续

此外我们还需补充验证分母在定义域内不为零，否则函数没有定义，因为距离函数是非负的，所以分母为零当且仅当 $\mathrm{d}(x,A)=\mathrm{d}(x,B)=0$，由距离函数的定义，我们可以在 A 中找到一个子列 $\{x_n\}\to x$，具体如下：由下确界的定义，首先 $\exists x_1\in A,\text{s.t. }|x_1-x|<1$，其次 $\exists x_2\in A,\text{s.t. }|x_2-x|<\min\left\{|x_1-x|,\frac{1}{2}\right\}$，以此类推，故我们找到了 $A\supseteq\{x_n\}\to x$；同理，我们还可以找到 $B\supseteq\{y_n\}\to x$，由 f 在 F 上连续知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)$$

但这显然是不可能的，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\ge\frac{M}{3},\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le-\frac{M}{3}$，所以 $g_1(x)$ 的分母不为零

所以，由连续函数的四则运算仍连续知，$g_1(x)=\frac{M}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}(x,B)-\mathrm{d}(x,A)}{\mathrm{d}(x,B)+\mathrm{d}(x,A)}$ 在 E 上连续

另一方面，因为 $\mathrm{d}(x,A),\mathrm{d}(x,B)\geq 0$，所以 $-[\mathrm{d}(x,A)+\mathrm{d}(x,B)]\leq \mathrm{d}(x,B)-\mathrm{d}(x,A)\leq \mathrm{d}(x,A)+\mathrm{d}(x,B)$，故

$$-\frac{M}{3}\leq g_1(x)\leq \frac{M}{3}$$

接下来验证 $|f(x)-g_1(x)|\leq \frac{2M}{3},\forall x\in F$，对 $\forall x\in F$，我们分三种情况讨论

Case 1. $f(x)\in\left[\frac{M}{3},M\right]$，此时 $x\in A,\mathrm{d}(x,A)=0$，所以 $g_1(x)=\frac{M}{3}$，故

$$f(x)-g_1(x)\in\left[0,\frac{2M}{3}\right]$$

Case 2. $f(x)\in\left[-M,-\frac{M}{3}\right]$，此时 $x\in B,\mathrm{d}(x,B)=0$，所以 $g_1(x)=-\frac{M}{3}$，故

$$f(x)-g_1(x)\in\left[-\frac{2M}{3},0\right]$$

Case 3. $f(x)\in\left(-\frac{M}{3},\frac{M}{3}\right)$，此时

$$|f(x)-g_1(x)|\leq|f(x)|+|g_1(x)|\leq\frac{M}{3}+\frac{M}{3}=\frac{2M}{3}$$

记 $f(x)=f_1(x)$，考虑 $f_2(x)\overset{\text{def}}{=}f_1(x)-g_1(x)$，它在 F 上连续，且对 $\forall x\in F,|f_2(x)|\leq\frac{2M}{3}$，则重复上面的过程，我们找到 E 上的连续函数 $|g_2(x)|\leq\frac{2M}{3}\cdot\frac{1}{3}$，且 $|g_2(x)-f_2(x)|\leq\frac{2M}{3}\cdot\frac{2}{3}$，继续下去，我们得到两个函数列 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$，其中 f_n 在 F 上连续，g_n 在 E 上连续，满足

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)-g_{n-1}(x),\quad |f_n(x)|\leq M\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},|g_n(x)|\leq\frac{M}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

上面对 $f_n(x)$ 的估计是对 $\forall x\in F$，对 $g_n(x)$ 的估计是对 $\forall x\in E$，我们记 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$，因为

$$|g_n(x)|\leq\frac{M}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

所以函数项级数一致收敛，因为每个 $g_n(x)$ 在 E 上均连续，则 $g(x)$ 在 E 上也连续

对 $\forall x\in F,\forall N\in\mathbb{N}^*$，因为

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}g_n(x)\right|&=\left|f_1(x)-g_1(x)-\sum_{n=2}^{N}g_n(x)\right|=\left|f_2(x)-\sum_{n=2}^{N}g_n(x)\right|\\&=\cdots=|f_N(x)-g_N(x)|=|f_{N+1}(x)|\\&\leq M\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{N}\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$，我们有 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)=g(x),\forall x\in F$，最后我们有

$$|g(x)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=M,\quad\forall x\in E$$

所以 $g(x)$ 就是我们要找的 E 上的连续函数，满足 $|g(x)|\le M,\forall x\in E$，且 $g|_F=f$

(2).考虑辅助函数

$$h(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$$

下面证明 $f|_F$ 连续 $\iff$ $h|_F$ 连续

$(\Rightarrow)$：若 $f|_F$ 连续，则对 F 中的任意收敛点列 $\{x_n\}$，若 $x_n\to x$，则 $f(x_n)\to f(x)$，若 $f(x)=0$，则

$$|h(x_n)-h(x)|=\left|\frac{f(x_n)}{1+|f(x_n)|}\right|\le|f(x_n)|\to 0$$

若 $f(x)>0$（$f(x)<0$ 同理），则 $\exists N\gg 1,\text{s.t.}\ \forall n>N,f(x_n)>0$，故此时绝对值可去掉，此时我们有 $h(x)=f(x)(1+f(x))^{-1}$，由 $x(1+x)^{-1}$ 的连续性知，$h(x_n)\to h(x)$，故 $h|_F$ 连续

$(\Leftarrow)$：若 $h|_F$ 连续，则对 F 中的任意收敛点列 $\{x_n\}$，若 $x_n\to x$，则 $h(x_n)\to h(x)$，首先我们反解出 $f(x)$ 如下

$$f(x)=\frac{h(x)}{1-|h(x)|}$$

若 $h(x)=0$，则 $\exists N\gg 1,\text{s.t.}\ \forall n>N,|h(x_n)|\le\frac{1}{2}$，所以

$$|f(x_n)-f(x)|=\left|\frac{h(x_n)}{1-|h(x_n)|}\right|\le|h(x_n)|\to 0$$

若 $h(x)>0$（$h(x)<0$ 同理），则 $\exists N\gg 1,\text{s.t.}\ \forall n>N,h(x_n)>0$，故此时绝对值可以去掉，此时我们有 $f(x)=h(x)(1-h(x))^{-1}$，由 $x(1-x)^{-1}$ 的连续性知，$f(x_n)\to f(x)$，故 $f|_F$ 连续

由于 $|h(x)|=\left|\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\right|\le 1$，所以由第一问，$\exists\tilde{g}(x)$ 在 E 上连续，且 $\tilde{g}|_F=h$，考虑

$$g(x)=\frac{\tilde{g}(x)}{1-|\tilde{g}(x)|}$$

则 $g(x)$ 在 E 上连续，且 $g|_F=f$ □

T4.

证明 由 *Lusin* 定理以及作业 *T2*，对 $\forall\varepsilon>0,\exists F_\varepsilon\subseteq E$ 闭集，满足 $m(E\backslash F_\varepsilon)<\varepsilon$，且 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续，再由第三题证明的连续延拓定理，可以找到一个 E 上的连续函数 g，使得 $g|_{F_\varepsilon}=f$，故

$$\{x\in E:f(x)\neq g(x)\}\subseteq E\backslash F_\varepsilon\Longrightarrow m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})\le m(E\backslash F_\varepsilon)<\varepsilon$$

□

周三

T1.

证明 (1). 因为 $f_n \to f$ a.e $x \in E$，所以

$$E_0 \overset{\text{def}}{=} \{x \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}\big) = 0 \Longrightarrow m(E_0) = 0$$

因此，$\forall x \in E \backslash E_0, f_n \to f$，由 *Egorov* 定理知，存在闭集 $F_\varepsilon \subseteq E\backslash E_0$, s.t. $f_n|_{F_\varepsilon} \rightrightarrows f|_{F_\varepsilon}$，且 $m\big((E\backslash E_0)\backslash F_\varepsilon\big) < \varepsilon$，又因为 $E = (E\backslash E_0) \sqcup E_0$，所以

$$E\backslash F_\varepsilon = E \cap F_\varepsilon^c = \big((E\backslash E_0) \sqcup E_0\big) \cap F_\varepsilon^c = \big((E\backslash E_0) \cap F_\varepsilon^c\big) \sqcup \big(E_0 \cap F_\varepsilon^c\big) = \big((E\backslash E_0)\backslash F_\varepsilon\big) \sqcup \big(E_0\backslash F_\varepsilon\big)$$

因为 $E_0\backslash F_\varepsilon^c \subseteq E_0$，由零测集的子集仍为零测集知

$$m(E\backslash F_\varepsilon) = m\big((E\backslash E_0)\backslash F_\varepsilon\big) + m(E_0\backslash F_\varepsilon) < \varepsilon + 0 = \varepsilon$$

因此可以不妨设 $\{f_n\}$ 逐点收敛到 f

(2). 首先证明 $\{E_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ 单调递增：对 $\forall x \in E_k^n$，则对 $\forall j \geq k$，$|f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$，因此对 $\forall j \geq k+1$，$|f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$，因此 $x \in E_{k+1}^n$，这就说明了

$$E_1^n \subseteq E_2^n \subseteq E_3^n \subseteq \cdots \Longrightarrow E_k^n \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n$$

下面证明 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^n$，由 E_k^n 的定义知，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^n$ 中的点都是 E 中的点，所以只需证明左包含，因为 f_n 逐点收敛到 f，所以对固定的 $x_0 \in E$，对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists K_n \in \mathbb{N}^*$, s.t.

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{n}, \quad \forall k \geq K_n$$

因此 $x_0 \in E_{K_n}^n \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^n$，故 $E \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^n$，因此二者相等，所以

$$E_k^n \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n = E$$

$\square$

T2.

证明 (1). 记 $A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}, A_k = \left\{x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$，则

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$$

下证 $A_k \nearrow A$，即证明 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$

若 $x \in LHS$，则 $\exists k_0, \text{s.t.}\ x \in A_{k_0}$，因此 $|f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{k_0}$，故 $f(x) \neq g(x) \Longrightarrow x \in A$，故 $LHS \subseteq RHS$

若 $x \in RHS$，则 $|f(x)-g(x)| > 0$，故 $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.}\ |f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{k_0}$，因此 $x \in A_{k_0} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k_0}$，故 $RHS \subseteq LHS$

我们还有如下观察

$$|f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{k} \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{1}{2k} \text{ 或 } |f_n(x)-g(x)| \geq \frac{1}{2k}$$

假设不成立，则 $\frac{1}{k} > |f_n(x)-f(x)| + |f_n(x)-g(x)| \geq |f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{k}$，矛盾！因此

$$A_k \subseteq \left\{x \in E : |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\} \cup \left\{x \in E : |f_n(x)-g(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}$$

所以

$$m(A_k) \leq m\left(\left\{x \in E : |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in E : |f_n(x)-g(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}\right)$$

令 $n \to \infty$，则 $m(A_k) = 0$，所以

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0$$

(2). 考虑 $f_n = \chi_{[-n,n]}, f \equiv 1$，则 $f_n \to f, \forall x \in \mathbb{R}$，但是取 $\varepsilon = 1$，则对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$m\big(\{x \in E : |f_n - f| \geq 1\}\big) = \infty$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} m\big(\{x \in E : |f_n - f| \geq 1\}\big)$ 不可能为零，故 $\{f_n\}$ 不依测度收敛到 f

(3). 取 $E = (0,1], f \equiv 0$，接下来构造 $\{f_n\}$ 满足依测度收敛到 f，但在 E 上处处不收敛

Step 1. 将 E 二等分：$(0,1] = (0,0.5] \sqcup (0.5,1] \overset{\text{def}}{=} E_1^{(1)} \sqcup E_2^{(1)}$，定义 $f_i^{(1)} = \chi_{E_1^{(1)}}, i = 1,2$

Step 2. 将 E 四等分：$(0,1] = (0,0.25] \sqcup (0,25,0.5] \sqcup (0.5,0.75] \sqcup (0.75,1] \overset{\text{def}}{=} E_1^{(2)} \sqcup E_2^{(2)} \sqcup E_3^{(2)} \sqcup E_4^{(2)}$，定义 $f_i^{(2)} = \chi_{E_i^{(2)}}, i = 1,2,3,4$

以此类推，第 n 步将 E 进行 2^n 等分，并按从左到右顺序记为 $E_1^{(n)}, \cdots, E_{2^n}^{(n)}$，定义 $f_i^{(n)} = \chi_{E_i^{(n)}}, 1 \leq i \leq 2^n$，接下来我们按构造的先后顺序（$n$ 小的在前面，n 相同则 i 小的在前面）将 $\{f_i^{(n)}\}$ 重新排成一列

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_1^{(2)}, \cdots, f_4^{(2)}, \cdots, f_1^{(n)}, \cdots f_{2^n}^{(n)}, \cdots$$

其中 $f_i^{(n)}$ 为第 $2^n - 2 + i$ 个函数，下面证明 $\{f_i^{(n)}\}$ 依测度收敛到 f，但在 E 上处处不收敛

依测度收敛：因为 $|f_n - f| \leq 1$，所以只需对 $\varepsilon \in (0,1]$ 讨论即可：对 $\forall 2^k - 2 < n \leq 2^{k+1} - 2, \forall \varepsilon \in (0,1], \{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\} = E_{n-2^k+2}^{(k)}$，所以

$$m\big(\{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\}\big) = m(E_{n-2^k+2}^{(k)}) = \frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{n+2}$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} m\big(x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\big) = 0$$

在 E 上处处不收敛：取 $\varepsilon_0 = 1$，对 $\forall x \in E, \forall N \in \mathbb{N}^*$，则 $\exists 2^N - 2 < j \leq 2^{N+1} - 2, \text{s.t. } x \in E_j^{(N)}$，所以 $f_j^{(N)}(x) = 1$，此时 $j \geq N$，且 $|f_j^N(x) - f(x)| = 1$，由 x 的任意性知，$\{f_i^n\}$ 在 E 上处处不收敛 $\square$

T3.

证明 $(\Longrightarrow)$：设 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N+1} a_i \chi_{E_i}$ 为标准表示，且 $a_{N+1} = 0$，即 $\bigsqcup\limits_{i=1}^{N+1} E_i = \mathbb{R}^d$，且 $\{a_i\}$ 两两不同，则

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \mathrm{d}m(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i m(E_i) + 0 \cdot m(E_{N+1}) = 0$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i m(E_i) = 0$，而 φ 非负，且 $\{a_i\}$ 两两不同知 $a_i > 0, 1 \leq i \leq N$，进而有

$$m(E_1) = \cdots = m(E_N) = 0$$

所以 $\{\varphi \neq 0\} = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i \Longrightarrow m\big(\varphi \neq 0\big) = \sum\limits_{i=1}^{N} m(E_i) = 0$，所以 $\varphi = 0$ a.e $x \in \mathbb{R}^d$

$(\Longleftarrow)$：因为简单函数取值有限，所以可设 $\text{Range}(\varphi) = \{a_1, \cdots, a_{N+1}\}$，其中 $a_{N+1} = 0$，令 $E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) = a_k\}$，则 $\mathbb{R}^d = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N+1} E_{N+1}$，且 φ 有标准表示 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} a_N \chi_{E_i} + 0\chi_{E_{N+1}}$，又因为 $\varphi = 0$ a.e $x \in \mathbb{R}^d$，所以

$$m\big(\{\varphi \neq 0\}\big) = m\left(\bigsqcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} m(E_i) = 0 \Longrightarrow m(E_i) = 0, 1 \leq i \leq n$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mathrm{d}m(x) = 0 \cdot m(E_{N+1}) + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot 0 = 0$$

$\square$