复分析第五周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 27 日

习题 3.2

T1

解 (2). 因为

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z = \int_{|z|=2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{|z-1|=r}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}re^{i\theta}i\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}re^{i\theta}i\mathrm{d}z = 2\pi i + 2\pi i \\ &= 4\pi i\end{aligned}$$

(4). 取 $f(z)=e^z$

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2ai}\int_{|z|=2a}\left(\frac{e^z}{z-ai}-\frac{e^z}{z+ai}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2ai}\int_{|z|=2a}\frac{e^z}{z-ai}\mathrm{d}z + \frac{1}{2ai}\int_{|z|=2a}\frac{e^z}{z+ai}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2ai}\cdot 2\pi i\cdot\big(f(ai)-f(-ai)\big) \\ &= \frac{\pi}{a}\cdot(e^{ai}-e^{-ai}) = 2\pi i\frac{\sin a}{a}\end{aligned}$$

T2

证明 设 $\varphi(z)=zf(z)-A$，则 $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=0$，且当 $z\neq 0$ 时，$f(z)=\frac{\varphi(z)}{z}+\frac{A}{z}$，取 $g(z)=A$，则

$$\int_{|z|=R}\frac{A}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot g(0) = 2\pi i A$$

另一方面

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R}\frac{\varphi(z)}{z}\mathrm{d}z\right| &\le \int_{|z|=R}|\varphi(z)|\cdot\left|\frac{1}{z}\right|\cdot|\mathrm{d}z| \\ &\le \frac{1}{R}\cdot\sup_{|z|=R}|\varphi(z)|\cdot\int_{|z|=R}|\mathrm{d}z| \\ &= 2\pi\cdot\sup_{|z|=R}|\varphi(z)|\end{aligned}$$

由 *Cauchy* 积分定理，对 $\forall R, R' > r$，我们有

$$\int_{|z|=R} \frac{\varphi(z)}{z} \mathrm{d}z = \int_{|z|=R'} \frac{\varphi(z)}{z} \mathrm{d}z$$

即对 $\forall R > r$，积分值与 R 无关，令 $R \to +\infty$ 知

$$\int_{|z|=R} \frac{\varphi(z)}{z} \mathrm{d}z = 0$$

所以

$$\int_{|z|=R} f(z) \mathrm{d}z = \int_{|z|=R} \left(\frac{\varphi(z)}{z} + \frac{A}{z} \right) \mathrm{d}z = 2\pi i A$$

T3

证明 因为

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k} \mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} \mathrm{d}z$$

又因为

$$\int_{|z|=1} z^k \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta} \right)^k \cdot i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\theta} \mathrm{d}\theta$$

所以当 $k = -1$ 时，积分值为 $2\pi i$；$k \neq -1$ 时

$$i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{k+1} e^{i(k+1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

因此只有当 $2n - 2k - 1 = -1$ 时，积分值才不为零，此时 $n = k$，故

$$\int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} \mathrm{d}z = \binom{2n}{n} \cdot 2\pi i$$

令 $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$，则

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right)^{2n} \cdot \frac{i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta}{e^{i\theta}} \\
&= i \int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n} \mathrm{d}\theta = \frac{i}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \mathrm{d}\theta &= \binom{2n}{n} \cdot 2\pi i \cdot \frac{2^{2n}}{i} = 2\pi \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot 2^{2n} \\
&= 2\pi \cdot \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(2n)!!(2n)!!} = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
\end{aligned}$$

□

T4

证明 (1). 设 $z=re^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z=rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=zi\mathrm{d}\theta$，所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z$$

前面已经计算过 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=1$；又因为 $f\in H\big(B(0,R)\big)$，所以 $f\in C\big(B(0,R)\big)$，所以当 $z\in B(0,R)$ 时，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\ \forall|z|<\delta,|f(z)-f(0)|<\varepsilon$，因此当 $r<\delta$ 时（由 *Cauchy* 积分定理知，积分与 $r<R$ 无关）

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta-f(0)\right|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)-f(0)}{z}\mathrm{d}z\right|\\&\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)-f(0)|\cdot\left|\frac{1}{z}\right|\cdot|\mathrm{d}z|\\&\leq\frac{\varepsilon}{2\pi r}\int_{|z|=r}|\mathrm{d}z|=\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0^+$，即得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=f(0)$$

(2). 设 $x+iy=z=\rho e^{i\theta}$，所以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$，因此

$$\begin{aligned}\int_{|z|<r}f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\substack{0\leq\rho\leq r\\0\leq\theta\leq2\pi}}f(\rho e^{i\theta})\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^r\rho\left(\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^r\rho\cdot2\pi f(0)\mathrm{d}\rho\\&=2\pi f(0)\int_0^r\rho\mathrm{d}\rho=\pi r^2f(0)\end{aligned}$$

第二行到第三行是利用了 (1) 的结论，两边同除 πr^2 即证 □

T5

证明 由于 u 是 $B(0,R)$ 中的调和函数，且 $B(0,R)$ 是单连通区域，所以存在 u 的共轭调和函数 v，使得 $f=u+iv\in H\big(B(0,R)\big)$，再由上一题的第一问知

$$u(0)+iv(0)=f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta+i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

由于调和函数是实值函数，所以 u,v 对 θ 的积分是实数，则

$$u(0)+iv(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta+i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

的实部和虚部相对应，即 $u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$ □

习题 3.3

T3

证明 对 n 进行归纳：当 $n=1$ 时，$f'(z)\equiv 0$，显然 $f\equiv c$，其中 $c\in\mathbb{C}$ 为常数；假设结论对 $n-1$ 成立，下证 n 的情况：由 $f^{(n)}\equiv 0$ 知，可设 $f^{(n-1)}\equiv c$，考虑函数

$$\varphi(z)=f(z)-\frac{c}{(n-1)!}z^{n-1}\Longrightarrow\varphi^{(n-1)}(z)=f^{(n-1)}(z)-c=0$$

这就说明 $\varphi^{(n-1)}(z)$ 是常数，由归纳假设知，φ 是次数不大于 $n-1$ 的多项式，所以 $f(z)=\varphi(z)+\frac{c}{(n-1)!}z^{n-1}$ 也是次数不大于 $n-1$ 的多项式 □

T5

证明 假设 $\exists z_1,z_2\in D,z_1\neq z_2,\text{s.t. }f(z_1)=f(z_2)$，由 $f\in H(D)$ 知

$$\int_{z_1}^{z_2}f'(z)\mathrm{d}z=f(z_1)-f(z_2)=0$$

由 D 是凸域，则连接 z_1,z_2 的线段 $\gamma:z=tz_1+(1-t)z_2,t\in[0,1]$ 在 D 中，取上述积分路径为 γ，则

$$0=\int_{z_1}^{z_2}f'(z)\mathrm{d}z=(z_1-z_2)\int_0^1 f'(tz_1+(1-t)z_2)\mathrm{d}t$$

由 $\mathrm{Re}\big(f'(z)\big)>0$ 知，$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 f'\big(tz_1+(1-t)z_2\big)\mathrm{d}t\right)>0\Longrightarrow\int_0^1 f'(tz_1+(1-t)z_2)\mathrm{d}t\neq 0$，所以 $z_1=z_2$，这与它们不相等的假设矛盾！故 f 是 D 上的单叶函数 □

习题 3.4

T1

解 (1). 取 $f(z)=\frac{\sin z}{z+1}\in H\big(\overline{B(1,1)}\big)$，则

$$\int_{|z-1|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z=\int_{|z-1|=1}\frac{f(z)}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot f(1)=\pi i\sin 1$$

(2). 因为

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\int_{|z|=2}\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z-\frac{1}{2i}\int_{|z|=2}\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z$$

取 $f(z)=1\in H\big(\overline{B(i,0.5)}\big)\cap H\big(\overline{B(-i,0.5)}\big)$，则

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}&=\frac{1}{2i}\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z-\frac{1}{2i}\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot f(i)-\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot f(-i)\\&=\pi-\pi=0\end{aligned}$$

(3). 记 $D=\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{1}\leq 1$，取 $f(z)=\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\in H(D)$，则

$$\int_{4x^2+y^2=2y}\frac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-i)^2}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot f'(i)=2\pi i\cdot\left.\frac{e^{\pi z}(\pi z+\pi i-2)}{(z+i)^3}\right|_{z=i}=\frac{\pi^2 i-\pi}{2}$$

(4). 取 $f(z)=\frac{1}{z^2+4}\in H\left(\overline{B(0,1.5)}\right)$，则

$$\begin{aligned}\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+4)(z^2+1)}&=\frac{1}{2i}\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{f(z)}{z-i}\mathrm{d}z-\frac{1}{2i}\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{f(z)}{z+i}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\cdot f(i)-2\pi i\cdot f(-i)\right]\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0\end{aligned}$$

(5). 记 $\gamma_0:|z|=2,\varepsilon=\frac{1}{3},\gamma_1:|z|=\varepsilon,\gamma_2:|z-1|=\varepsilon$，由 *Cauchy* 积分定理

$$\int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}=\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}+\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}$$

对于 γ_1，取 $f(z)=\frac{1}{(z-1)^3(z-3)^5}\in H\left(\overline{B(0,\varepsilon)}\right)$；对于 γ_2，取 $g(z)=\frac{1}{z^3(z-3)^5}\in H\left(\overline{B(1,\varepsilon)}\right)$，由 *Cauchy* 积分公式

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}&=\frac{2\pi i}{2!}f''(0)+\frac{2\pi i}{2!}g''(1)\\&=\left(\frac{76}{3^6}-\frac{9}{2^6}\right)\pi i\end{aligned}$$

(6). 分情况讨论

Case 1. $|a|,|b|<R$，取 $\varepsilon<\min\{R-|a|,R-|b|,\frac{1}{2}|a-b|\}$，考虑 $\gamma_1:|z-a|=\varepsilon,\gamma_2:|z-b|=\varepsilon$，所以

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}&=\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}+\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}\\&=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left.\left(\frac{1}{z-b}\right)^{(n-1)}\right|_{z=a}+2\pi i\left.\left(\frac{1}{(z-a)^n}\right)\right|_{z=b}\\&=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a-b)^n}+2\pi i\cdot\frac{1}{(b-a)^n}\\&=-2\pi i\cdot\frac{1}{(b-a)^n}+2\pi i\cdot\frac{1}{(b-a)^n}=0\end{aligned}$$

Case 2. $|a|<R<|b|$，取 $f(z)=\frac{1}{z-b}$，则

$$\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)=-2\pi i\cdot\frac{1}{(b-a)^n}$$

Case 3. $|b|<R<|a|$，取 $g(z)=\frac{1}{(z-a)^n}$，则

$$\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}=2\pi i\cdot g(b)=2\pi i\cdot\frac{1}{(b-a)^n}$$

Case 4. $|a|, |b| > R$，由 *Cauchy* 定理知所求积分为零 $\square$