近世代数 (H) 第十一周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 9 日

Exercise 1 证明 $K_4=\{\mathrm{Id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\simeq V_4$

Proof 因为 $V_4=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ 考虑映射

$$\begin{aligned}\phi: K_4 &\longrightarrow V_4\\ \mathrm{Id} &\longmapsto (1,1)\\ (12)(34) &\longmapsto (1,-1)\\ (13)(24) &\longmapsto (-1,1)\\ (14)(23) &\longmapsto (-1,-1)\end{aligned}$$

容易验证它保乘法，且为双射，故 ϕ 确实是群同构，即 $K_4\simeq V_4$ □

Exercise 2 设 $|G|<+\infty$ 且 G 是 *Abel* 群，求证：G 是单群 $\iff$ G 是素数阶循环群

Proof $(\Longrightarrow)$: 对 $\forall a\in G\backslash\{1_G\}$，由 G 是 *Abel* 群知 $\{1_G\}\neq(a)\lhd G$，且 G 是单群，故 $(a)=G$，且由 a 的任意性知，$\forall a\in G\backslash\{1_G\},\mathrm{Ord}(a)=|G|$，且由先前的结论：记 $\mathrm{Ord}(a)=n$，则 $\mathrm{Ord}(a^k)=\frac{n}{\gcd(n,k)}$，因此 $\forall 1\leq k<n,\gcd(n,k)=1$，则 $|G|=n$ 为素数

$(\Longleftarrow)$: 设 G 是素数 p 阶循环群，设 $G=(a)$，循环群的子群阶数一定是 p 的因子，因此 G 只有平方子群，即 G 为单群 □

Exercise 3 计算 A_4 中 (123) 和 (132) 的共轭类

Solution 因为

$$\begin{cases}(12)(34)(123)(34)(12)=(142)\\ (13)(24)(123)(24)(13)=(134)\\ (14)(23)(123)(23)(14)=(243)\end{cases}$$

所以 (123) 所在的 A_4 中的共轭类为 $\{(123),(142),(134),(243)\}$；又因为

$$\begin{cases}(12)(34)(132)(34)(12)=(124)\\ (13)(24)(132)(24)(13)=(143)\\ (14)(23)(132)(23)(14)=(234)\end{cases}$$

所以 (132) 所在的 A_4 中的共轭类为 $\{(132),(124),(143),(234)\}$;对型为 2^2 的元素,以 $(12)(34),(13)(24)$ 为例，在 A_4 中求解 $\sigma(12)(34)\sigma^{-1}=(13)(24)$，即 $(\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))=(13)(24)$，所以

$$\begin{cases}(\sigma(1)\sigma(2))=(13)\\(\sigma(3)\sigma(4))=(24)\end{cases}\Longrightarrow \sigma=(23),(132),(234),(1342)$$

其中 $(132),(234)\in A_4$，因此 $(12)(34),(13)(24)$ 在 A_4 中共轭，同理可证得型为 2^2 的元素是 A_4 中的一个共轭类，因此 A_4 共有 4 个共轭类

$$\begin{cases}\{\mathrm{Id}\}\\\{(132),(124),(143),(234)\}\\\{(123),(142),(134),(243)\}\\\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\end{cases}$$

Exercise 4 求证：A_4 无六阶子群

Proof 设 N 为 A_4 的六阶子群，则 $[A_4:N]=2$，由先前的习题知 $N\lhd A_4$，则 N 一定是 A_4 中若干个共轭类之并，但是由上题知，A_4 的 *4* 个共轭类中的元素个数为 $1,3,4,4$，这四个数无法组合出 6，矛盾！ $\square$

Exercise 5 任给群同态 $G\xrightarrow{\rho}S(Y)$，验证如下左作用 $G\curvearrowright Y$

$$g.y=\rho(g)(y)$$

Proof 首先明确 $\rho(g)$ 是 Y 的一个置换，且由群同态知，$\rho(1_G)=\mathrm{Id}_Y$

1. $1_G.y=\mathrm{Id}_Y(y)=y$

2. $\forall g,h\in G,(gh).y=\rho(gh)(y)=\rho(g)\circ\rho(h)(y)=\rho(g)(h(y))=g.h(y)=g.(h.y)$

因此确实是左作用 $\square$

Exercise 6 定义 $G\curvearrowright G/H$ 满足 $g.(aH)=gaH$，证明稳定化子 $G_{aH}=aHa^{-1},\forall a\in G$

Proof 因为

$$\begin{aligned}G_{gH}&=\{g\in G:g.aH=aH\}=\{g\in G:gaH=aH\}\\&=\{g\in G:a^{-1}ga\in H\}=\{g\in G:\exists h\in H,\text{s.t. }a^{-1}ga=h\}\\&=\{g\in G:\exists h\in H,\text{s.t. }g=aha^{-1}\}=aHa^{-1}\end{aligned}$$

$\square$

Exercise 7 考虑 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|a,b,c,d\in\mathbb{F}_2\right\}$，有群作用 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)\curvearrowright(\mathbb{F}_2)^2$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

有两个 G-轨道：$\left\{\begin{pmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}\overline{0}\\ \overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}\\ \overline{1}\end{pmatrix}\right\}\stackrel{\text{def}}{=}X$，证明存在群同构 $\rho: G\to S(X)$

Proof 将群作用的集合限制在 X 上，对于 $\forall A\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2),\boldsymbol{v}\in X$，定义映射

$$\begin{aligned} A^*: X &\longrightarrow X \\ v &\longmapsto Av \end{aligned}$$

则 A^* 是 X 上的一个置换（双射）：

1. 单射：若 $Av_1=Av_2$，由 A 可逆知 $v_1=v_2$

2. 满射：由 A 可逆知，$A^{-1}v\neq 0$，故 $A^{-1}v\in X$，所以 $v=A(A^{-1}v)$，故找到了原像

因此考虑

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow S(X) \\ A &\longmapsto A^* \end{aligned}$$

则它确实是群同构：对 $\forall A,B\in G,\rho(AB)=(AB)^*,\rho(A)\rho(B)=A^*\circ B^*$，对 $\forall v\in X$，因为

$$(AB)^*v=ABv=A(Bv)=A^*(BV)=A^*\circ B^*(v)$$

且 ρ 为单射，假设 $A^*=B^*$，因为

$$\begin{cases} A^*(\overline{1},\overline{0})^T=B^*(\overline{1},\overline{0})^T\Longrightarrow A,B\text{的第一列相同}\\ A^*(\overline{0},\overline{1})^T=B^*(\overline{0},\overline{1})^T\Longrightarrow A,B\text{的第二列相同}\end{cases}$$

所以 $A=B$，单射得证

另一方面 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)=3\times(3-1)=6=|S(X)|$，所以 ρ 是双射，故 ρ 是同构 $\square$