习题 1 设 X 上有一列度量 $\{\mathrm{d}_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义

$$\mathrm{d}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\mathrm{d}_n(x,y)}{1+\mathrm{d}_n(x,y)}$$

证明 d 是 X 上的度量

证明 验证三条公理

(1) 正定性：$\mathrm{d}(x,y)=0 \iff \forall n\in\mathbb{N},\frac{\mathrm{d}_n(x,y)}{1+\mathrm{d}_n(x,y)}=0 \iff \forall n\in\mathbb{N},\mathrm{d}_n(x,y)=0 \iff x=y$

(2) 对称性：由 $\{\mathrm{d}_n\}$ 的对称性保证

(3) 三角不等式：首先证明 $\tilde{\mathrm{d}}_n(x,y)\overset{\text{def}}{=}\frac{\mathrm{d}_n(x,y)}{1+\mathrm{d}_n(x,y)}$ 满足三角不等式，注意到函数 $t\mapsto\frac{t}{1+t}$ 在 $t\geq 0$ 单调增，则

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}_n(x,y)&=\frac{\mathrm{d}(x,y)}{1+\mathrm{d}(x,y)}\leq\frac{\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)}{1+\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)}\\&\leq\frac{\mathrm{d}(x,z)}{1+\mathrm{d}(x,z)}+\frac{\mathrm{d}(z,y)}{1+\mathrm{d}(z,y)}=\tilde{\mathrm{d}}_n(x,z)+\tilde{\mathrm{d}}_n(z,y)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tilde{\mathrm{d}}_n(x,y)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}[\tilde{\mathrm{d}}_n(x,z)+\tilde{\mathrm{d}}_n(z,y)]\\&=\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)\end{aligned}$$

□

习题 2 证明：离散度量空间完备

证明 设 (X,d) 是离散度量空间,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ 是基本列,则对 $\varepsilon=\frac{1}{2},\exists N\in\mathbb{N},\text{s.t. }\forall m,n\geq N,\mathrm{d}(x_m,x_n)<\frac{1}{2}$，而由离散度量的定义知，$\forall m,n\geq N,x_m=x_n=x_N$，所以 $x_n\to x_N$，由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意性知，离散度量空间完备 □

习题 3 证明：$T:X\to Y$ 连续 $\iff \forall u\overset{\text{开集}}{\subset}Y,T^{-1}(u)\overset{\text{开集}}{\subset}X$

证明 $(\Longrightarrow)$: 设 u 是 Y 中的任意开集,对 $\forall x_0\in T^{-1}(u)$,由 u 是开集知,$\exists\varepsilon>0,\text{s.t. }B(Tx_0,\varepsilon)\subset u$,又因为 $T:X\to Y$ 连续,所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. }\forall\mathrm{d}(x,x_0)<\delta,\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$,这就说明 $B(x_0,\delta)\subset T^{-1}(u)$,由 x_0 的任意性知 $T^{-1}(u)$ 是开集

$(\Longleftarrow)$: 对 $\forall x_0\in X$，下面证明 T 在 x_0 处连续，对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $B(Tx_0,\varepsilon)\subset Y$ 是开集，所以 $T^{-1}\big(B(Tx_0,\varepsilon)\big)$ 也是开集，而 $x_0\in T^{-1}\big(B(Tx_0,\varepsilon)\big)$，所以 $\exists\delta>0,\text{s.t. }B(x_0,\delta)\subset T^{-1}\big(B(Tx_0,\varepsilon)\big)$，即 $\forall\mathrm{d}(x,x_0)<\delta,\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$，即 $T:X\to Y$ 连续 □

习题 4 证明 $C[0,1]$ 可分

证明 首先由 *Weierstrass* 一致逼近定理知

$$\mathcal{P}(0,1)\overset{\text{def}}{=}\{[0,1]\text{上的多项式}\}\overset{\text{dense}}{\subset}C[0,1]$$

则对 $\forall f(x)\in C[0,1],\forall\varepsilon>0,\exists g(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0\in\mathcal{P}[0,1]$, s.t. $\mathrm{d}(f,g)=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$

定义 $\tilde{\mathcal{P}}[0,1]\overset{\text{def}}{=}\{[0,1]$上的有理系数多项式$\}$,则由有理数的稠密性知,$\exists\{b_i\}_{i=1}^m\subset\mathbb{Q}$, s.t. $|a_i-b_i|<\frac{\varepsilon}{2m}$,记 $h(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\in\tilde{\mathcal{P}}[0,1]$，则

$$\max_{t\in[0,1]}|g(t)-h(t)|=\max_{t\in[0,1]}\left|\sum_{i=0}^m(b_i-a_i)t^i\right|\le\sum_{i=0}^m|b_i-a_i|<\frac{\varepsilon}{2m}\cdot m=\frac{\varepsilon}{2}$$

所以 $\mathrm{d}(f,h)\le\mathrm{d}(f,g)+\mathrm{d}(g,h)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，由 $f(x)\in C[0,1]$ 的任意性知 $\tilde{\mathcal{P}}[0,1]\overset{\text{dense}}{\subset}C[0,1]$，且 $\tilde{\mathcal{P}}[0,1]$ 与集合 $\{(a_1,\cdots,a_n,\cdots)|a_i\in\mathbb{Q}\}$ 等势，该集合可视为为可数个可数集合之并，故可数，因此我们找到了 $C[0,1]$ 的可数子集，故它可分 □

习题 5 证明：以下等价

(1) A 是闭集

(2) $\overline{A}=A$

(3) $\forall\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A$，若 $x_n\to x_0$，则 $x_0\in A$

证明 $(1)\Longrightarrow(2)$: 因为 A 是闭集，所以 A^c 是开集，对 $\forall x\in A^c,\exists\varepsilon>0$, s.t. $B(x,\varepsilon)\subset A^c$，由接触点和闭包的定义知，$x\notin\overline{A}$，即 $A^c\cap\overline{A}=\varnothing\Longrightarrow\overline{A}\subset A$，由 A 是闭集知，$\overline{A}=A$

$(2)\Longrightarrow(3)$: 由 $x_n\to x_0$ 知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N,x_n\in B(x_0,\varepsilon)$，这说明 $\forall\varepsilon>0,B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$，即 $x_0\in\overline{A}=A$

$(3)\Longrightarrow(1)$: 即证明 A^c 是开集，假设 A^c 不是开集，则 $\exists x_0\in A^c$, s.t. $B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing,\forall\varepsilon>0$，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，取 $x_n\in B(x_0,\frac{1}{n})\cap A$，则 $x_n\to x_0$，但是 $x_0\notin A$，矛盾！ □