实分析第七周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 10 日

周一

T1.

证明 设 $A(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|, \tilde{A}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，则由非负函数的逐项积分定理，我们有

$$\int_E A(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |a_k(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

所以 $A(x)<+\infty$ a.e $x\in E$，因此 $\tilde{A}(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛，故 $\tilde{A}(x)$ 在 E 上几乎处处收敛。记 $\tilde{A}_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n(x)$，则 $\tilde{A}_k(x)\to\tilde{A}(x)$ a.e $x\in E$，且

$$|\tilde{A}_k(x)|\leq\sum_{n=1}^{k}|a_n(x)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|=A(x) \text{ a.e } x\in E$$

因此 $A(x)\in L^1(E)$ 即为 $\tilde{A}_k(x)$ 的控制函数，由控制收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \tilde{A}_k(x)\mathrm{d}x=\int_E A(x)\mathrm{d}x$$

对于上式，我们有

$$\begin{cases} LHS=\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\sum\limits_{n=1}^{k}a_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}\int_E a_k(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E a_k(x)\mathrm{d}x \\ RHS=\int_E A(x)\mathrm{d}x=\int_E\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|\mathrm{d}x \end{cases} \tag{1}$$

这样就证明了我们想要的结果 $\square$

T2.

证明 在上周作业中我们补充证明了条件可以从 $f_k\nearrow f,\forall x\in E$ 下降为 $f_k\nearrow f$ a.e $x\in E$，所以我们可以不妨假设 $f_k\nearrow f,\forall x\in E$

Case 1. $\int_E f\mathrm{d}x<+\infty$

因为 $0\leq f_k\leq f$，且 $f\in L^1(E)$，则我们可以取 f 为控制函数，由控制收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

Case 2. $\int_E f\mathrm{d}x = +\infty$

不妨设 $E=\mathbb{R}^d$，否则用 $f\chi_E$ 代替 f，由 $f_k\uparrow$ 知 $\int f_k(x)\mathrm{d}x\uparrow$，因此 $\{\int f_k(x)\mathrm{d}x\}$ 极限存在（可能为无穷），由 *Lebesgue* 积分的定义

$$\int f\mathrm{d}x = \sup\left\{\int \varphi\mathrm{d}x : 0\le\varphi\le f, \varphi \text{ simple}\right\} = +\infty$$

所以对 $\forall M>0$，存在简单函数 $0\le\varphi\le f$，使得 $M<\int\varphi\mathrm{d}x<+\infty$，令 $g_n(x)=\min\{f_n(x),\varphi(x)\}$，下面证明 $g_n(x)\to\varphi(x)$（逐点收敛）：对任意固定的 $x\in\mathbb{R}^d$

(a). 若 $\varphi(x)=f(x)$，则显然有 $g(x)=\min\{f_n(x),\varphi(x)\}=f_n(x)\to f(x)=\varphi(x)$

(b). 若 $\varphi(x)\neq f(x)$，则由 $\varphi\le f$ 知 $\varphi(x)<f(x)$，由 $f_n(x)\nearrow f(x)$ 知，对 $\varepsilon=f(x)-\varphi(x),\exists N_\varepsilon\gg 1,\text{s.t.}\ \forall n\ge N_\varepsilon$，有 $|f(x)-f_n(x)|=f(x)-f_n(x)<\varepsilon$，即 $f_n(x)>\varphi(x)$，这就说明当 $n\ge N_\varepsilon$ 时，$g_n(x)=\min\{f_n(x),\varphi(x)\}=\varphi(x)$，故 $g_n(x)\to\varphi(x)$

所以 $g_n(x)\to\varphi(x),\forall x\in\mathbb{R}^d$，又因为 $\varphi(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$，且由 $g_n(x)$ 的定义知 $|g_n(x)|\le\varphi(x)$，所以可取 $\varphi(x)$ 为控制函数，则由控制收敛定理知

$$\lim_{k\to\infty}\int g_k(x)\mathrm{d}x = \int\varphi(x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int f_n(x)\mathrm{d}x \ge \int\min\{f_n(x),\varphi(x)\}\mathrm{d}x = \int g_n(x)\mathrm{d}x$$

同时令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\mathrm{d}x \ge \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int\varphi(x)\mathrm{d}x > M$$

因为 M 是任意正数，这就说明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x)\mathrm{d}x=+\infty=\int f\mathrm{d}x$ □

T3.

解 (a). 设 $t=1-x$，则

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\log(1-t)}{t}\mathrm{d}t$$

因为 $\frac{\log(1-t)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1},\forall t\in(0,1)$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\log(1-t)}{t}\mathrm{d}t &= -\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{t^n}{n+1}\mathrm{d}t\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

上面过程中使用了非负函数列的逐项积分定理，其中 $a_n(x)=\frac{t^n}{n+1}$

(b). 设 $f_k(x)=\frac{x}{x^{2k}+x^2+1}$，则当 $k\to\infty$ 时

$$f_k(x)\to f(x)=\begin{cases}0, & x>1\\ \frac{1}{3}, & x=1\\ \frac{x}{x^2+1}, & 0<x<1\end{cases}$$

且当 $0<x<1$ 时，$f_k(x)=\frac{x}{x^{2k}+x^2+1}<x<1$；当 $x\geq 1$ 时，$f_k(x)=\frac{x}{x^{2k}+x^2+1}<\frac{x}{x^{2k}}=\frac{1}{x^3}$（当 $k\geq 2$ 时），因此我们可以取控制函数

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ \frac{1}{x^3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

因为 $\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$，所以 $g(x)\in L^1\big((0,+\infty)\big)$，由控制收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\log 2}{2}$$

□

T4.

证明 我们对 $[a,b]$ 进行一列逐步精细的划分（即下一个划分是对上一个划分的再细分），记为 $\{\pi_k\}$，设 $\pi_k: a=x_0<x_1<\cdots<x_{a_k}<b$（$a_k$ 为 π_k 的总分点数）并定义了

$$\varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{a_k}m_{ik}\chi_{I_i},\quad \psi_k(x)=\sum_{i=1}^{a_k}M_{ik}\chi_{I_i},\quad m_{ik}=\inf_{x\in I_i}f(x),\quad M_{ik}=\sup_{x\in I_i}g(x)$$

在上课中我们得到了 $\varphi_k\nearrow\tilde{\varphi}=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k,\psi_k\searrow\tilde{\psi}=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k$，且 $\tilde{\varphi}\leq f\leq\tilde{\psi},\tilde{\psi}=\tilde{\varphi}$ a.e $x\in[a,b]$

（此步骤是为了避开在分割点处 φ_k,ψ_k 的取值较为复杂，先挖去一个零测集）对于每个 π_k，它有有限个分割点，记 N 为所有 $\{\pi_k\}$ 的分割点全体，它是可数个有限点集的并，仍然可数，因此 $m(N)=0$，所以 $\tilde{\varphi}=\tilde{\psi}$ a.e $x\in[a,b]\backslash N$；下面我们证明：若 $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\psi}(x),x\in[a,b]\backslash N$，则 f 在 x 处连续

若 $x\in[a,b]\backslash N$,，且 $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\psi}(x)$，则因为 $x\notin N$，故 x 不是分割点，因此对于每个分割 π_k，存在唯一的闭区间包含 x，记为 I_k，且 I_k 是递降的，因为 $\{\pi_k\}$ 是逐步精细的划分，所以我们得到了一列递降的闭区间列

$$I_1\supset I_2\supset I_3\cdots,\quad x\in I_k,\forall k$$

由闭区间套定理，$\{x\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}I_k$，且

$$\varphi_k(x)=m(I_k),\psi(x)=M(I_k),\quad m(I_k)=\inf_{x\in I_k}f(x),M(I_k)=\sup_{x\in I_k}f(x)$$

由 $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\psi}(x)=f(x),\varphi_k\nearrow\tilde{\varphi},\psi_k\searrow\tilde{\psi}$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$

$$\begin{cases}\exists N_1\gg 1,\text{s.t. }\forall n\geq N_1,|\tilde{\varphi}(x)-\varphi_k(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow f(x)-m(I_n)<\frac{\varepsilon}{2}\\ \exists N_2\gg 1,\text{s.t. }\forall n\geq N_2,|\tilde{\psi}(x)-\psi_k(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow M(I_n)-f(x)<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $\forall n\geq N$，有

$$f(x)-\frac{\varepsilon}{2}<m(I_n)\leq M(I_n)<f(x)+\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow M(I_n)-m(I_n)<\varepsilon$$

因为 $M(I_n)-m(I_n)$ 表示 f 在 I_n 上的振幅，设 $I_n=[a_k,b_k]$，则取 $\delta=\min\{x-a_k,b_k-x\}>0$（$\delta>0$ 是因为 $x\in I_n^\circ$），我们有

$$\forall|x-x'|<\delta,x,x'\in I_n\Longrightarrow|f(x)-f(x')|<M(I_n)-m(I_n)<\varepsilon$$

由 ε 的任意性知，f 在 x 处连续，因此 $\forall x\in[a,b]\backslash N$，若 $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\psi}(x)$，则 f 在 x 处连续，记 f 在 $[a,b]\backslash N$ 上的连续点集合为 C_1，f 在 N 上的连续点集合为 C_2，则 $C_2\subset N\Longrightarrow m(C_2)\leq m(N)=0$；由于 $\tilde{\psi}=\tilde{\varphi}$ a.e $x\in[a,b]\backslash N$，所以

$$m(C_1)=m([a,b]\backslash N)=m([a,b])\Longrightarrow m\big([a,b]\backslash(C_1\sqcup C_2)\big)=m([a,b])-m(C_1)-m(C_2)=0$$

这就说明了 f 在 $[a,b]$ 上的不连续点构成一个零测集 □

周三

T1.

证明 因为 $(0,1]=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，由积分区域的可数可加性知

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)=2$$

所以 $f\in L^1(\mathbb{R})$，进而 $\frac{f(x-r_n)}{2^n}\in L^1(\mathbb{R})$，且积分值为 $\frac{1}{2^{n-1}}$，设 $F_k(x)=\sum_{n=1}^{k}2^{-n}f(x-r_n)$，则我们有 $F_k(x)\nearrow F(x),\forall x\in\mathbb{R}^n$，由单调收敛定理

$$\begin{aligned}\int F(x)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\int F_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int\sum_{n=1}^{k}2^{-n}f(x-r_n)\mathrm{d}x\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int 2^{-n}f(x-r_n)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^{n-1}}\\&=2<+\infty\end{aligned}$$

所以 F 是可积的，且对任意区间 I，总存在有理数 $r_i\in I^\circ$，所以对 $\forall M>0$

$$F(x)\geq\frac{f(x-r_i)}{2^i}>M\Longrightarrow x\in\left(r_i,r_i+\frac{1}{2^{2i}M^2}\right)$$

因此对于固定的 M，只需取 $x'\in\left(r_i,r_i+\frac{1}{2^{2i}M^2}\right)\cap I^\circ$，就有 $f(x')>M$，而由 $M>0$ 的任意性知，F 在任意区间 I 上均无界

若 $F=\tilde{F}$ a.e $x\in\mathbb{R}$，记 J 为上面的 $\left(r_i,r_i+\frac{1}{2^{2i}M^2}\right)\cap I^\circ$，则 $F=\tilde{F}$ a.e $x\in J$，所以 $\exists x\in J,\text{s.t. }\tilde{F}(x)=F(x)>M$，由 M 的任意性知，$\tilde{F}$ 在任意区间 I 上均无界 $\square$

T2.

证明 因为 $\begin{cases}|\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)|^p=1, & x\in E_1\sqcup E_2\\ |\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)|^p=0, & \text{else}\end{cases}$，所以

$$||f+g||_p=\left(\int|\chi_{E_1}+\chi_{E_2}|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=[m(E_1)+m(E_2)]^{\frac{1}{p}}$$

同理有

$$||f||_p=[m(E_1)]^{\frac{1}{p}},\quad ||f||_p=[m(E_2)]^{\frac{1}{p}}$$

记 $m(E_1)=a,m(E_2)=b$，即证明

$$(a+b)^t>a^t+b^t,\quad\forall 0<a,b<\infty,\forall t>1$$

即证 $1>\left(\frac{a}{a+b}\right)^t+\left(\frac{b}{a+b}\right)^t$，设 $x=\frac{a}{a+b}$，即证 $1>x^t+(1-x)^t,\forall x\in(0,1),\forall t>1$，设 $f(x)=x^t+(1-x)^t$，则 $f'(x)=t[x^{t-1}-(1-x)^{t-1}]$，因为 $t-1>0$ 为幂函数，所以当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，故 $\max\limits_{x\in(0,1)}f(x)<\max\{f(0),f(1)\}=1$，即得证 $\square$

T3.

证明 (a).Case 1. $(p,q)=(+\infty,1)$ 时，若不等式取等，则

$$\int_E|fg|\mathrm{d}x=||f||_\infty|g|\Longrightarrow\int_E|g|\cdot(|f|-||f||_\infty)\mathrm{d}x=0$$

即 $|g|(|f|-||f||_\infty)=0$ a.e $x\in E$，可能是 $|g|=0$ a.e $x\in E$，或者 $f=\pm||f||_\infty$ a.e $x\in E$，或者两个因子组合起来满足乘积为零 a.e $x\in E$

Case 2. $1<p,q<\infty$ 时

首先，当 $||f||_p=0$ 或 $||g||_q=0$ 时，*Hölder* 不等式取等（上课已证）

其次，若 $||f||_p,||g||_q\neq0$，记 $a=|\tilde{f}(x)|^p,b=|\tilde{g}(x)|^q$，问题约化为

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leq\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$

的取等条件：即 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{a}{b}+1-\frac{1}{p}$，设 $\frac{a}{b}=x, \frac{1}{p}=t, f(x)=x^t-tx-1+t$，求导得

$$f'(x)=tx^{t-1}-t=t(x^{t-1}-1)$$

因为 $t-1=\frac{1}{p}-1<0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $\min f(x)=f(1)=0$，即当 $\frac{a}{b}=1, a=b$ 时取等，因此取等条件为

$$|\tilde{f}(x)|^p=|\tilde{g}(x)|^q, \forall x\in E \Longrightarrow \frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p}=\frac{|g(x)|^q}{||g||_q^q}, \forall x\in E$$

(b). 当 $1<p<+\infty$ 时

在证明 *Minkowski* 不等式过程中，使用了 *Hölder* 不等式：

$$\left|\left||f|\cdot|f+g|^{p-1}\right|\right|_1 \le ||f||_p\cdot\left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q$$

若 $||f||_p=0$ 或 $\left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q=0$ 时，则此时 $f=0$ a.e $x\in E$ 或 $f+g=0$ a.e $x\in E$；若 $f=0$ a.e $x\in E$，则显然有 *Minkowski* 不等式成立；若 $f+g=0$ a.e $x\in E$ 时，取 $g=-f$，则未必有 *Minkowski* 不等式成立

若 $||f||_p, \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q$ 均不为零，则有 (a) 知，有

$$\frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p}=\frac{|f+g|^{(p-1)q}}{\left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q^q}=\frac{|f+g|^p}{\left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q^q} \tag{2}$$

而

$$||f||_p^p=\int_E|f|^p\mathrm{d}x, \quad \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_q^q=\int_E|f+g|^{(p-1)q}\mathrm{d}x=\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x$$

又因为证明过程中还使用了三角不等式：$|f+g|\le|f|+|g|$，取等时 f,g 始终同号，则 (2) 式即为

$$\frac{|f(x)|^p}{\int_E|f|^p\mathrm{d}x}=\frac{|f(x)+g(x)|^p}{\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x}$$

由 f,g 同号知，$|f|^p+|g|^p=|f+g|^p$，因此等号成立当且仅当

$$|f(x)|^p=\frac{\int_E|f|^p\mathrm{d}x}{\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x}, \quad |g(x)|^p=\frac{\int_E|g|^p\mathrm{d}x}{\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x}$$

这当且仅当

$$\frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p}=\frac{|g(x)|^p}{||g||_p^p}\text{ 且}f,g\text{同号} \iff \frac{|f(x)|}{||f||_p}=\frac{|g(x)|}{||g||_p}\text{ 且}f,g\text{同号}$$

当 $p=+\infty$ 时，即 $|f+g|$ 的本性上确界等于 $|f|$ 的本性上确界加上 $|g|$ 的本性上确界 □

T4.

证明 (a). 若 $p_2=+\infty$，对 $\forall f\in L^\infty(E),||f||_\infty<+\infty$，我们可以不妨设 $f\le ||f||_\infty \forall x\in E$，因为 $m(\{f>||f||_\infty\})=0$，而在零测集上积分并不影响积分值

$$\int_E |f|^{p_1}\mathrm{d}x\le \int_E ||f||_\infty \mathrm{d}x=m(E)\cdot ||f||_\infty$$

所以

$$||f||_{p_1}\le m(E)^{\frac{1}{p}}\cdot ||f||_\infty<+\infty$$

故 $f\in L^{p_1}(E)$，即 $L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)$

若 $0<p_1<p_2<\infty$，对 $\forall f\in L^{p_2}(E),||f||_{p_2}<+\infty$，设 $g(x)=\chi_E\equiv 1$，首先对 $\forall p>0$

$$\left(\int_E |\chi_E|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=m(E)^{\frac{1}{p}}<\infty\Longrightarrow \chi_E\in L^p(E),\forall p>0$$

对 $F=|f|^{p_1},g=\chi_E$ 使用 $H\ddot{o}lder$ 不等式，其中共轭指标取为 $\frac{p_2}{p_1},\frac{p_2}{p_2-p_1}$，我们有

$$\begin{aligned}||Fg||_1&\le ||F||_{\frac{p_2}{p_1}}||g||_{\frac{p_2}{p_2-p_1}}\\&=\left(\int_E |f|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\cdot m(E)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\end{aligned}$$

因为 $Fg\equiv F$，对上式两边同时开 p_1 次方得

$$\left(\int_E |f|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}}\le m(E)^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}\cdot\left(\int_E |f|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}}<+\infty$$

所以 $f\in L^{p_1}(E)$，故 $L^{p_2}(E)\le L^{p_1}(E)$

(b). 若 $0<p_1<p_2<\infty$，考虑

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{-a}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}|x|^{-b}, & |x|>1\\ 0, & |x|\le 1\end{cases}\tag{3}$$

上周作业已证明：$f\in L^1(\mathbb{R}^d)\iff a<d,g\in L^2(\mathbb{R}^d)\iff b>d$，注意到对于任意函数 f 均有

$$||f||_p^p=||f^p||_1$$

则 $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)\iff f^{p_1}\in L^1(\mathbb{R}^d)\iff ap_1<d$，同理 $f\in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)\iff ap_2<d$，选取 $\frac{d}{p_2}<a<\frac{d}{p_1}$，则 $p_1<\frac{d}{a}<p_2$，故此时 $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ 但 $f\notin L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$，同理当 $\frac{d}{p_2}<a<\frac{d}{p_1}$ 时，即 $p_1<\frac{d}{a}<p_2$ 时，$g\in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ 但 $g\notin L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$，故 $L^{p_1}(\mathbb{R}^d),L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ 没有包含关系

若 $p_1<p_2=+\infty$，取 $a<\frac{d}{p_1}$，则 $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$，但是 f 没有本性上确界，因为对 $\forall M>0$，当 $0<|x|<M^{-a}$ 时，就有 $f(x)>M$，故 $||f||_\infty=+\infty$；另一方面，取 $a<\frac{d}{p_1}$，则 $g\notin L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$，但

$||g||_\infty = 1, g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$，故 $L^{p_1}(\mathbb{R}^d), L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 没有包含关系 $\square$