复分析第十二周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 25 日

习题 5.1

T2

解 (1). 设 $s = z - 1$，则 $s \in B(0,1)\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s+1}\right)' \\
&= -\frac{1}{s}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^n\right)' = -\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)s^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

(3). 对 $\forall \gamma \in B(2,\infty)$，因为 $\Delta_\gamma \mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = 0$，所以 $\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ 在 $B(2,\infty)$ 中可以选出全纯的单值分支，考虑主支

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{z-1}{z-2}\right) &= \log\left(\frac{1-\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}\right) = \log(1-\frac{1}{z}) - \log(1-\frac{2}{z}) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{nz^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n}z^{-n}
\end{aligned}$$

(5). 因为 $\left|\frac{5}{z}\right| < 1$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n(1-\frac{5}{z})^n} = \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}\left(-\frac{5}{z}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}\cdot(-1)^k z^{-(n+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}z^{-(n+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}5^k\binom{n+k-1}{k}z^{-(n+k)}
\end{aligned}$$

$\square$

T4

证明 设 $f=u+iv$，则

$$|G|=\iint_G 1\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又因为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=u_xv_y-u_yv_x=u_x^2+v_x^2 \xlongequal{f'=u_x+iv_x} |f'|^2$$

又因为 $f'(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}na_nz^{n-1}$，所以

$$\begin{aligned}|G|&=\iint_D|f'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}na_nz^{n-1}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}m\bar{a}_m\overline{z}^{n-1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}nma_n\bar{a}_m\iint_D z^{n-1}\overline{z}^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{z=\rho e^{i\theta}}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}nma_n\bar{a}_m\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta\int_r^R\rho^{n+m-1}\mathrm{d}\rho\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi n^2|a_n|^2\int_r^R\rho^{2n-1}\mathrm{d}\rho=\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n|a_n|^2(R^2-r^2)\end{aligned}$$

$\square$

习题 5.2

T1

证明 假设存在，由习题 4.3.1 知，f 在 $\overline{B(0,1)}$ 上全纯，故 f 一定有界，矛盾！ $\square$

T2

解 (1). 设 $g(z)=\sin z-\cos z$，令 $g(z)=0$，即 $\sin(z-\frac{\pi}{4})=0$，因此 $z=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 为 $f(x)$ 的极点，且

$$g'(\frac{\pi}{4}+k\pi)=(-1)^k\sqrt{2}\neq 0$$

所以 $\frac{\pi}{4}+k\pi$ 是 $g(z)$ 的 *1* 阶零点，即为 $f(z)=\frac{1}{g(z)}$ 的 *1* 阶极点；对于 ∞，因为对 $\forall R\geq 0$，$f(z)$ 均不在 $B(R,\infty)$ 中全纯，因此 ∞ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点

(3). 取 $z_n=1-\frac{1}{n\pi},\xi_n=1-\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，易知 $\lim\limits_{z\to 1}\sin\frac{1}{1-z}$ 不存在，则 1 为 $\sin\frac{1}{z-1}$ 的本性奇点；对于 ∞，因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\sin\frac{1}{1-z}=0$，所以 ∞ 为 f 的可去奇点

(5). 考虑 $g(z)=\frac{1}{f(z)}=z(e^{-z}-1)=(-1)^n\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{(n-1)!}=z^2\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 全纯且 $\phi(0)\neq 0$，则 0 为 $g(z)$ 的二阶零点，故为 $f(z)$ 的二阶极点；对于 ∞，因为 $f(\frac{1}{z})=\frac{z}{e^{-\frac{1}{z}}-1}$，因为 $\lim\limits_{z\to 0}e^{-\frac{1}{z}}$ 不存在，所以 ∞ 为 $f(z)$ 的本性奇点

(7). 可能的奇点为 $z=0,\infty$，以及 $\cos\frac{1}{z}=0\Longrightarrow z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$，因为 $\lim\limits_{z\to\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}} f(z)$ 不存在，所以 $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ 是本性奇点，而 $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\to 0$，故 0 为非孤立奇点；对于 ∞，因为 $f(\frac{1}{z})=\sin\frac{1}{\cos z}\xrightarrow{z\to 0}\sin 1$，所以 ∞ 是可去奇点 □

习题 5.3

T1

证明 首先由 f 是亚纯函数知，f 在 $B(0,1)$ 中只有有限多个奇点，且均为极点，因此可设 f 在 $B(0,1)$ 内的极点为 $z_1,\cdots,z_n$，阶数为 $m_1,\cdots,m_n$，则

$$g(z)=f(z)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{z-z_i}{1-\overline{z}_i z}\right)^{m_i}$$

在 $\overline{B(0,1)}$ 内全纯，由 $|f(z)|=1,\forall z\in\partial B(0,1)$ 知，$|g(z)|=1,\forall z\in\partial B(0,1)$，接下来求 $g(z)$

Case 1. 若 $g(z)\neq 0,\forall|z|<1$，则 $h(z)=\frac{1}{g(z)}$ 在 $B(0,1)$ 中全纯，由最大模原理，$|z|<1$ 时

$$|h(z)|\leq\max_{|z|=1}|h(z)|=1$$

即 $\frac{1}{|g(z)|}\geq 1,\forall|z|\leq 1$，但由最大模原理，$|g(z)|\leq\max\limits_{|z|=1}|g(z)|=1$，则 $|g(z)|\equiv 1$，因此 $g(z)=e^{i\theta}$

Case 2. 若 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中有零点，由零点的孤立性知至多有有限多个，设为 $a_1,\cdots,a_s$，重数为 $k_1,\cdots,k_s$，令

$$h(z)=\frac{g(z)}{\prod\limits_{j=1}^{s}\left(\frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}\right)^{k_j}}$$

则此时 $h(z)$ 全纯，且 $h(z)\neq 0,\forall|z|<1$，由 Case 1 知 $h(z)=e^{i\theta}$，综上我们有

$$g(z)=e^{i\theta}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}\right)^{k_j}$$

其中 $a_1,\cdots,a_s$ 为 $g(z)$ 的根，重数为 $k_1,\cdots,k_s$，故

$$f(z)=e^{i\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\overline{z}_i z}{z-z_i}\right)^{m_i}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}\right)^{k_j},\quad |z|\leq 1$$

将 f 的定义域扩充到 $\mathbb{C}$ 上，因为 z_i 为 f 的 m_i 阶极点，$\overline{a}_j^{-1}$ 为 f 的 k_j 阶极点，且 f 只有这些奇点，因此 f 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，综上我们找出了所有满足题意的 f □

T2

证明 $(\Longleftarrow)$：全纯函数的复合仍是全纯函数

$(\Longrightarrow)$：由 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯且无零点知 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，考虑 $g(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z+c_0$，其中 z_0 为 $\mathbb{C}$ 上任意一点，$e^{c_0}=f(z_0)$，所以 $g'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(f(z)e^{-g(z)}\right)=f'(z)e^{-g(z)}+f(z)e^{-g(z)}\cdot g'(z)=e^{-g(z)}\left[-g'f(z)+f'(z)\right]=0$$

因此 $f(z)e^{-g(z)}\equiv f(z_0)e^{-g(z_0)}=1$，故 $f(z)=e^{g(z)},\forall z\in\mathbb{C}$ □

T5

证明 (1). 考虑 $f_1(z)=f(z),f_2(z)=\overline{f(\overline{z})}$，先证 $f_2\in H(\mathbb{C})$，设 $f_1(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f_2(x,y)=u(x,-y)-iv(x,-y)$，则对于 f_2 而言，$u_1=u(x,-y),v_1=-v(x,-y)$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=0$$

且 u_1,v_1 实可微，故 $f_2\in H(\mathbb{C})$. 由 $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ 知，$\forall z\in\mathbb{R},f_1(z)=f_2(z)$，由唯一性定理知 $f_1\equiv f_2$，因此 $\forall y\in\mathbb{R},f(iy)=\overline{f(-iy)}$，又因为 $f(i\mathbb{R})\subset i\mathbb{R}$，则对 $\forall y\in\mathbb{R},\exists a\in\mathbb{R},\text{s.t.}$

$$f(iy)=ia\Longrightarrow\begin{cases}\overline{f(iy)}=-ia\\-f(iy)=-ia\end{cases}$$

因此对 $\forall z\in i\mathbb{R}$，有 $\overline{f(z)}=-f(z)\Longrightarrow f(z)=\overline{f(\overline{z})}=-f(\overline{z})$，而在虚轴上，$\overline{z}=-z$，所以 $f(z)=-f(-z),\forall z\in i\mathbb{R}$，由唯一性定理知 $f(z)=-f(-z),\forall z\in\mathbb{C}$，因此 f 是奇函数

(2). 由 (1) 知 $f(z)=\overline{f(\overline{z})}$，又因为 $f(i\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$，所以对 $\forall y\in\mathbb{R},\exists a\in\mathbb{R},\text{s.t.}$

$$f(iy)=a\Longrightarrow\begin{cases}\overline{f(iy)}=a\\\overline{f(-iy)}=a\end{cases}$$

即对 $\forall z\in i\mathbb{R},f(z)=f(-z)$，由唯一性定理知 $f(z)=f(-z),\forall z\in\mathbb{C}$，因此 f 是偶函数 □

T6

解 设 $g(z)=f(z)-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)^2}-(z+z^2)$，则 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，且

$$\lim_{|z|\to\infty}g(z)=0$$

则 $g(z)$ 为常数，故 $g(z)\equiv g(0)=f(0)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，即

$$f(z)=\frac{5}{4}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}+z+z^2$$

□