数学分析 B2

笔记本

作者：涂嘉乐 PB23151786

时间：2024 春

授课教师：汪琥庭

前言

在大一上学期刚开学的时候，一次学长组织的 LaTeX 入门讲座让我接触了这个排版工具，并经过一个学期的不断使用，我对 LaTeX 的使用越来越熟练。再加上自身打字速度不算很慢，于是大一下学期开学时，决定在汪老师的课堂上使用 LaTeX 记笔记。

这是我第一次选汪老师的课，从选课时预选人数的爆满到开课后不断有同学找汪老师个性化，都体现出了汪老师教学能力以及讲课水平的突出，并在自己跟着汪老师学习数分 B2 的一学期里，也深深地为汪老师的水平感到叹为观止。这份笔记是我在汪老师上课时记的，内容主要为汪老师上课内容，以及自己的一些理解与感悟，笔记可能会有不少地方打错了，欢迎指正，本人邮箱：tjl20050214@mail.ustc.edu.cn。之后有时间也会对笔记进行进一步完善。

对于笔记的内容，主要是以汪老师上课顺序为主，可能与数分课本存在一定出入，但是总体还是一致的。因为第 17 讲时是于助教代课，我没有跟着记下来，所以之后的课都向前平移一讲，最后共计 49 讲。由于上课的时间有限，所以更多的内容可以翻阅汪老师的讲义。对于第 9、10 章后的好题鉴赏，这部分内容是我在复习期中考时摘录的觉得不错的题目，之后可能会对后续章节进行补充与完善。本笔记用的模版是 ElegantBook，封面是深秋时节科大西区的也西湖。

最后，感谢汪老师以及于俊骜、母子跃、王若言三位助教为我们带来了体验极佳的数分 B2 课堂，感谢我的舍友对笔记内容进行校正（可能仍然存在错误）。同时也仅以此笔记纪念我数分 B2 的学习过程以及逝去的中科大大一时光。

编者

2024 年 6 月 24 日

目录

第八章：空间解析几何 **1**

第 1 讲：三维向量的五种运算 1

第 2 讲：空间的平面与直线 3

第 3 讲：向量、平面、直线习题课 6

第 4 讲：二次曲面与旋转曲面 9

第 5 讲：空间解析几何综述 13

第九章：多变量函数的微分学 **17**

第 6 讲：多元函数的极限与连续性 17

第 7 讲：偏导数与全微分 19

第 8 讲：可微的条件与高阶偏导数 21

第 9 讲：复合 (隐) 函数微分法 23

第 10 讲：多元函数微分法习题课 (I) 26

第 11 讲：方向导数与梯度 29

第 12 讲：多元函数微分学的几何应用 31

第 13 讲：多元函数的 Taylor 公式及其应用 33

第 14 讲：函数的极值与最值 35

第 15 讲：多元函数的条件极值及应用 38

第 16 讲：多元函数微分学复习与小结 40

好题鉴赏 42

第十章：多变量函数的重积分 **45**

第 17 讲：二重积分 (double integal) 45

第 18 讲：二重积分的计算与证明 48

第 19 讲：二重积分的一般变量代换 51

第 20 讲：三重积分 54

第 21 讲：重积分的计算与证明 58

第 22 讲：重积分应用举例 61

第 23 讲：n 重积分 65

好题鉴赏 69

第十一章：曲线积分与曲面积分 **71**

第 24 讲：第一类曲线积分 71

第 25 讲：第一类曲面积分 74

第 26 讲：曲线、曲面积分的计算与证明 77

第 27 讲：第二类曲线积分 80

第 28 讲：Green 公式及其应用 84

第 29 讲：第二类曲面积分 87

第 30 讲：Gauss 公式及其应用 90

第 31 讲：Stokes 公式及其应用 93

第 32 讲：场论初步 96

第 33 讲：多变量积分的复习与小结 98

第十二章：Fourier 分析 **103**
第 34 讲：$f(x)$ 的 Fourier 级数及其应用 103
第 35 讲：$2l$ 周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开 106
第 36 讲：函数列的均方收敛与 Parseval 等式 108
第 37 讲：Parseval 等式的拓展 111
第 38 讲：Fourier 级数综述 114
第 39 讲：Fourier 变换 117

第十三章：反常积分和含参变量的积分 **121**
第 40 讲：反常积分及其收敛性判断 121
第 41 讲：含参正常积分的分析性质 123
第 42 讲：含参反常积分的一致收敛性 126
第 43 讲：几个重要的反常积分 130
第 44 讲：Gamma 函数与 Beta 函数 133

终章：期末总复习 **137**
第 45 讲：总复习课 (一) 137
第 46 讲：总复习课 (二) 140
第 47 讲：总复习课 (三) 142
第 48 讲：总复习课 (四) 145
第 49 讲：总复习课 (五) 148

第八章：空间解析几何

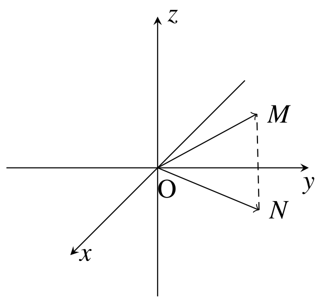
第 1 讲：三维向量的五种运算

(一)、三维直角坐标系与三维向量的线性运算

直角坐标系

从空间一点 O 出发，作三条两两垂直 (正交) 的射线，并确定单位与方向，构成 $O-xyz$ 直角坐标系。其中，xoy, yoz, xoz 坐标面两两正交，并将整个空间分割成八个卦限。

设 M 为空间任一点，过 M 点分别作 x,y,z 轴的垂面，可得 x,y,z 轴上的三个垂足 A,B,C, 设 A,B,C 代表的实数为 a,b,c, 则点 M 与有序数组 (a,b,c) 一一对应，记作 $M(a,b,c)$。坐标原点为 $O(0,0,0)$，在 x,y,z 轴正方向上分别取三个单位向量 i,j,k, 则根据向量的平行四边形法则，有 $\overrightarrow{OA}=ai, \overrightarrow{OB}=bj, \overrightarrow{OC}=ck$。过 M 作平面 xoy 的垂足 N，则 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=ai+bj$，再根据平面向量的三角形法则，有 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=ai+bj+ck\triangleq(a,b,c)$，从而，点 M、向量 $\overrightarrow{OM}$、有序数组 (a,b,c) 一一对应。



显然，我们有 $i=(1,0,0), j=(0,1,0), k=(0,0,1)$，且 $i\perp j, j\perp k, k\perp i$，由勾股定理，$|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{ON}|^2+|\overrightarrow{NM}|^2=(a^2+b^2)+c^2 \Rightarrow |\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，称 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，称 $|\overrightarrow{OM}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}|=|(a,b,c)|$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模。我们记模为零的向量为 $\theta=(0,0,0)$，模为 1 的向量成为单位向量。设向量 $\overrightarrow{\alpha}=(a,b,c)\neq\theta$，则 $|\overrightarrow{\alpha}|\neq 0$，记与 $\overrightarrow{\alpha}$ 同向的单位向量为

$$\overrightarrow{\alpha^{\circ}}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

设 $P(x_1,y_1,z_1), Q(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_2i+y_2j+z_2k)-(x_1i+y_1j+z_1k)=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$

即空间中的任一个向量 $\overrightarrow{QP}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，均可用单位向量 i,j,k 线性表示出来，因此，称 i,j,k 为三维向量空间的标准正交基。在任一个有限维的向量空间中，一旦选定了基向量，则无限的问题便可以有限化表示了。

三维向量的运算法则

向量的加法、减法及数乘三种运算统称为向量的线性运算。

定义 8.1 (加法与数乘)

设 $\overrightarrow{\alpha}=(a_1,b_1,c_1), \overrightarrow{\beta}=(a_2,b_2,c_2), \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

则 $\overrightarrow{\alpha}\pm\overrightarrow{\beta}=(a_1i+b_1j+c_1k)\pm(a_2i+b_2j+c_2k)=(a_1\pm b_1)i+(a_2\pm b_2)j+(a_3\pm b_3)k=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$

$\lambda_1\overrightarrow{\alpha}=\lambda_1(a_1i+b_1j+c_1k)=\lambda_1a_1i+\lambda_1b_1j+\lambda_1c_1k=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$

我们称 $\lambda_1\overrightarrow{\alpha}$ 为数 λ_1 与向量 $\overrightarrow{\alpha}$：$\lambda_1(a_1,b_1,c_1)=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$

可以统一为 $\lambda_1\overrightarrow{\alpha}+\lambda_2\overrightarrow{\beta}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)+(\lambda_2a_2,\lambda_2b_2,\lambda_2c_2)=(\lambda_1a_1+\lambda_2b_2,\lambda_1b_1+\lambda_2a_2,\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)$ ♣

(二)、向量 $\overrightarrow{\alpha}$ 与向量 $\overrightarrow{\beta}$ 的内积与外积

定义 8.2 (内积与外积)

设 $\overrightarrow{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\overrightarrow{\beta}=(a_2,b_2,b_2)$

$\overrightarrow{\alpha}$ 与 $\overrightarrow{\beta}$ 的内积为 $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$，可记作 $(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})$ 或 $<\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}>$

$\overrightarrow{\alpha}$ 与 $\overrightarrow{\beta}$ 的外积为 $\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}$ 且 $\begin{cases}\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\perp\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\perp\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\text{ 构成右手系}\\|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}|=|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|sin(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})\end{cases}$

外积的坐标表示：$\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}=(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$

♣

注

1. $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})$ 的规定源于物理中力做功的运算，$\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\cdot}$ 是一个数，因此我们称内积 $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\cdot}$ 为数量积，或者称为点乘
2. $|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}|=|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|sin(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})$ 且 $\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\perp\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\perp\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}$ 构成右手系的规定来源于物理中力矩的运算，$\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}$ 是一个新向量，故称 $\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}$ 为向量积或叉乘

定理 8.1

1. $\overrightarrow{\alpha}\perp\overrightarrow{\beta}\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$
2. $\overrightarrow{\alpha}//\overrightarrow{\beta}\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}=\theta\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha}=\lambda\overrightarrow{\beta}$

♡

证明

1. $(\Rightarrow)$: 若 $\overrightarrow{\alpha}\perp\overrightarrow{\beta}$，则 $cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0\Rightarrow\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=|\overrightarrow{\alpha}|\cdot|\overrightarrow{\beta}|cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0$
   由 $ij=jk=ki=0,\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{\beta}=(a_1i+b_1j+c_1k)\cdot(a_2i+b_2j+c_2k)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$
   $(\Leftarrow)$: 若已知 $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0$，则 $|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0$
   ①若 $|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|\neq0$，则 $cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0$，从而 $\overrightarrow{\alpha}\perp\overrightarrow{\beta}$
   ②若 $|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|=0$，不妨设 $\overrightarrow{\alpha}=\theta$，因为零向量 θ 垂直于任意向量，故 $\overrightarrow{\alpha}\perp\overrightarrow{\beta}$
2. $(\Rightarrow)$ 若 $\overrightarrow{\alpha}//\overrightarrow{\beta}$，则 $sin(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0\Rightarrow|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}|=|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|sin(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0\Rightarrow\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}=\theta$
   所以，$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$，即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},\exists\lambda\in\mathbb{R},s.t.\overrightarrow{\alpha}=\lambda\overrightarrow{\beta}$
   $(\Leftarrow)$ 若 $\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}=\theta$，则 $|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|sin(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=0$
   ①若 $|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|\neq0$，则 $sin(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha}//\overrightarrow{\beta}$
   ②若 $|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|=0$，不妨设 $\overrightarrow{\alpha}=0$，而零向量平行于任意向量，故 $\overrightarrow{\alpha}//\overrightarrow{\beta}$

(三)、例题

设 $\overrightarrow{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\overrightarrow{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\overrightarrow{\gamma}=(a_3,b_3,c_3)$

例题 8.1 证明：*Cauchy* 不等式 $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

证明 利用 $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})$ 得，$\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}\leq|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|\Rightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

注 在 n 维向量空间中，用相同的方法可得到 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leq\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$

例题 8.2 证明：$|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}|^2=|\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2-(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})^2$

证明 $|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}|^2=(|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|sin(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))^2=|\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2(1-cos^2(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}))=|\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2-|\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2cos(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})^2=|\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2-$

$(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})^2$

例题 8.3 证明：$(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\gamma}=(\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\gamma})\cdot\overrightarrow{\alpha}=(\overrightarrow{\gamma}\times\overrightarrow{\alpha})\cdot\overrightarrow{\beta}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

证明 $(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\gamma}=(\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix})\cdot(a_3,b_3,c_3)=a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a_3&b_3&c_3\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_3&b_3&c_3\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

$(\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\gamma})\cdot\overrightarrow{\alpha},(\overrightarrow{\gamma}\times\overrightarrow{\alpha})\cdot\overrightarrow{\beta}$ 同理

例题 8.4 证明：三个向量 $\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$

证明 $(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\gamma}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=V(\Omega)$，其中 Ω 表示以向量 $\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\gamma}$ 为棱的平行六面体的有向体积，而体积为零当且仅当 $\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\gamma}$ 共面。

例题 8.5 $\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}$ 与 $\lambda_1\overrightarrow{\alpha}+\lambda_2\overrightarrow{\beta},\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 总是共面的

证明 利用 $(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})\cdot(\lambda_1\overrightarrow{\alpha}+\lambda_2\overrightarrow{\beta})=\lambda_1\overrightarrow{\alpha}\cdot(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})+\lambda_2\overrightarrow{\beta}(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})=0$

由例 4，$\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}$ 与 $\lambda_1\overrightarrow{\alpha}+\lambda_2\overrightarrow{\beta},\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 共面

第 2 讲：空间的平面与直线

(一)、平面 (plane) 的五种表示形式

1. 向量式：
   设平面 π 过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与已知的非零向量 $\overrightarrow{n}=(A,B,C)$ 垂直，则 π 唯一确定，设 $P(x,y,z)$ 为 π 中任一点，则 $\overrightarrow{M_0p}\perp\overrightarrow{n}$，于是有
   $$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}=0$$
   这就是平面 π 的向量式方程
2. 点法式：
   垂直于平面 π 的非零向量 $\overrightarrow{n}$，称之为 π 的法向量，当 π 有法向量 $\overrightarrow{n}$ 且过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 时，由向量式，有 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}=0$，而 $\overrightarrow{M_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，即有点法式方程
   $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
3. 一般式：
   在点法式中，设 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则由点法式得直线的一般式
   $$Ax+By+Cz+D=0$$
4. 截距式：

在一般式中，若 $D \neq 0$，设 $d = -D$，令 $\begin{cases} \dfrac{d}{A} = a \\ \dfrac{d}{B} = b \\ \dfrac{d}{C} = c \end{cases}$ 则有截距式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

a, b, c 称之为 π 在 Ox, Oy, Oz 轴上的截距

5. 三点式：
$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 是不共线的三点，则由 A, B, C 三点确定的平面 π 为

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

其中 $P(x, y, z)$ 是 π 上的动点坐标
这是因为 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面 $\Rightarrow (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(二)、空间直线 (line) 的五种表示形式

1. 向量式：
设 $\overrightarrow{l} = (l, m, n) \neq \theta$ 为已知向量，直线 $L//\overrightarrow{\tau}$，且 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则有 L 的向量式方程

$$\overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{M_0P} = \theta$$

其实，$P(x, y, z)$ 是 L 上的动点坐标

2. 点向式：
平行于直线 L 的任意非零向量都称为 L 的方向向量，设 $P(x, y, z)$ 为 L 上任意一点，$M(x_0, y_0, z_0)$ 为 L 上的已知点，则 $\overrightarrow{M_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$，由向量式知

$$\overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{M_0P} = \theta \Leftrightarrow \tau//\overrightarrow{M_0P} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

3. 参数式：
在点向式中，令比值为 t，则有 L 的参数式：$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt，\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

4. 交面式：
设平面 $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与平面 $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行，则 π_1, π_2 的交线 L 方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

5. 两点式：设 $Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_2(x_2, y_2, z_2)$ 为不同的两点，则 Q_1, Q_2 确定的空间直线 L 为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

其中，$P(x, y, z)$ 为 L 上的动点坐标

(三)、面面、线线、线面间的关系

命题 8.1 (面面、线线、线面间的关系)

设 $\begin{cases} \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)\neq\theta \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)\neq\theta \\ L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}, \overrightarrow{\tau_1}(l_1,m_1,n_1)\neq\theta \\ L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}, \overrightarrow{\tau_2}(l_2,m_2,n_2)\neq\theta \end{cases}$，则我们有如下关系

1. $\pi_1//\pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\theta$
2. $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$
3. π_1 与 π_2 的夹角 $\alpha\in[0,\pi]$，$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\overrightarrow{n_1^{\circ}}\cdot\overrightarrow{n_2^{\circ}}$
4. $L_1//L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}//\overrightarrow{\tau_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}\times\overrightarrow{\tau_2}=\theta \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$
5. $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}\perp\overrightarrow{\tau_2} \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
6. L_1 与 L_2 的夹角 $\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}], \cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\tau_1}\cdot\overrightarrow{\tau_2}|}{|\overrightarrow{\tau_1}||\overrightarrow{\tau_2}|}=|\overrightarrow{\tau_1^{\circ}}\cdot\overrightarrow{\tau_2^{\circ}}|$
7. $L_1\perp\pi_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}//\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}\times\overrightarrow{n_1}=\theta \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{l_1}=\dfrac{B_1}{m_1}=\dfrac{C_1}{n_1}$
8. $L_1//\pi_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}\perp\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_1}\cdot\overrightarrow{n_1}=0 \leftrightarrow A_1l_1+B_1m_1+C_1n_1=0$
9. L_1 与 π_1 的夹角 $\beta\in[0,\dfrac{\pi}{2}], \cos(\dfrac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{l_1}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{l_1}|}=|\overrightarrow{n_1^{\circ}}\cdot\overrightarrow{l_1^{\circ}}|$

(四)、例题

例题 8.6 分别求已知点 $M(1,-1,-2)$ 关于点 $A(1,0,1)$，平面 $\pi: 3x+4y-5z-1=0$ 及直线 $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ 的对称点 Q

解 (1). 设 $Q(x,y,z)$ 为 $M(1,-1,-2)$ 关于 $A(1,0,1)$ 的对称点，则 $A(1,0,1)$ 是线段 MQ 的中点，由中点坐标表示法，有

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=1 \\ \dfrac{y-1}{2}=0 \\ \dfrac{z-2}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

即 $Q(1,1,4)$ 为所求的对称点

(2). 设 $Q(x,y,z)$ 为 $M(1,-1,-2)$ 关于 π 的对称点，$\overrightarrow{n}=(3,4,-5)$，则

$$\overrightarrow{MQ}//\overrightarrow{n} \Rightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+4t \\ z=-2-5t \end{cases}$$

而 MQ 的中点 $N(\dfrac{x+1}{2},\dfrac{y-1}{2},\dfrac{z+2}{-5})$ 在平面 $\pi: 3x+4y-5z-1=0$ 上，即

$$3(\frac{x+1}{2})+4(\frac{y-1}{2})-5(\frac{z+2}{-5})-1=0 \Rightarrow t=\frac{12}{25}$$

则 $M(1,-1,-2)$ 关于 π 的对称点 $Q(\dfrac{61}{25},\dfrac{23}{25},-\dfrac{10}{25})$

(3). 设 $Q(x,y,z)$ 为 $M(1,-1,-2)$ 关于 $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ 的对称点

则线段 MQ 的中点 $N(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-2}{2})$ 在直线 L 上，从而有

$$\frac{\frac{x+1}{2}-1}{-1}=\frac{\frac{y-1}{2}-1}{2}=\frac{\frac{z-2}{2}-1}{0}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=5\\ z=4\end{cases}$$

另一方面，$\overrightarrow{MQ}\perp\vec{\tau},\vec{\tau}=(-1,2,0)\Rightarrow\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{\tau}=0$，即

$$-1(x-1)+2(y+1)+0(z+2)=0\Rightarrow -x+2y=-3$$

联立解得，$Q(\frac{13}{5},-\frac{1}{5},4)$

例题 8.7 设 $A(1,0,1),B(0,1,1),C(2,0,3),D(1,1,1)$ 为已知的四点 (1). 求四面体 $\Omega:A-BCD$ 的体积 $V(\Omega)$

(2). 求 B,C,D 三点确定的三角形面积 (3). 求 B,C,D 三点确定的平面方程

解 (1).$V(\Omega)$ 是以 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$，而 $\overrightarrow{BC}=(2,-1,2),\overrightarrow{BD}(1,0,0),\overrightarrow{BA}=(1,-1,0)$

所以，$V(\Omega)=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BA}|=\frac{1}{6}abs(\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&0&0\\1&-1&0\end{vmatrix})=\frac{1}{3}$

(2). 以 B,C,D 三点构成的三角形面积 $S_\triangle=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|$

因为 $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&-1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0i+2j+k=(0,2,1)$，所以 $S_\triangle=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(3). 设 $P(x,y,z)$ 为所求平面 π 中的任一点，则 $\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ 共面 $\Rightarrow(\overrightarrow{BP}\times\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BD}=0$

即

$$\begin{vmatrix}x-0&y-1&z-1\\2&-1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2y+z-3=0$$

第 3 讲：向量、平面、直线习题课

(一)、例题

例题 8.8 证明：点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

证明 在 π 中任取点 $Q(a,b,c)$，则有 $Aa+Bb+Cc+D=0$

所以，$d=|\overrightarrow{QM_0}\cdot\cos\alpha|=\frac{|\overrightarrow{QM_0}||\vec{n}||\cos\alpha|}{|\vec{n}|}=\frac{|\overrightarrow{QM_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{(x_0-a,y_0-b,z_0-c)\cdot(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Aa+Bb+Cc)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ □

例题 8.9 证明：点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|},\text{ 其中}\begin{cases}M_1(x_1,y_1,z_1)\in L\\ \vec{\tau}=(l,m,n)\end{cases}$$

证明 $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|\cdot|\sin\alpha|=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}||\vec{\tau}||\sin\alpha|}{|\vec{\tau}|}=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|}$ □

例题 8.10 求直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$ 在平面 $\pi:x-2y+3z+1=0$ 中的投影直线 L 的方程

解 过 L 上已知点 $M_1(1,-1,2)$ 作 π 的垂面 π_1，则 π_1 的法向量 $\vec{n_1}=\vec{n}\times\vec{\tau}$，其中 $\begin{cases}\vec{n}=(1,-2,3)\\ \vec{\tau}=(1,1,2)\end{cases}$

所以，$\vec{n_1}=(-7,1,3)$，由平面的点法式方程知

$$\pi_1:-7(x-1)+(y+1)+3(z-2)=0\Rightarrow\pi_1:-7x+y+3z+2=0$$

而所求的投影直线 L_1 正是平面 π 与垂面 π_1 的交线，即

$$L_1:\begin{cases}x-2y+3z+1=0\\-7x+y+3z+2=0\end{cases}$$

例题 8.11 证明 $L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+2=0\end{cases}$ 为异面直线

证明 先分别求出 L_1,L_2 的方向向量

$$\begin{cases}(1,1,-1)\times(2,1,-1)=(0,-1,-1)\Rightarrow \text{取 } \vec{s_1}=(0,1,1)\\(1,2,-1)\times(1,2,2)=(6,-3,0)\Rightarrow \text{取 } \vec{s_2}=(2,1,0)\end{cases}$$

再分别随意在 L_1,L_2 上找两个点 $M_1(1,0,0)\in L_1,M_2(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3})\in L_2\Rightarrow\overrightarrow{M_1M_2}=(-\frac{1}{3},0,-\frac{4}{3})$

若二者为异面直线，则 $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s_1},\vec{s_2}$ 不共面，即混合积不为零

$$(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&0\\-\frac{1}{3}&0&-\frac{4}{3}\end{vmatrix}=\frac{7}{3}\neq0$$

故 L_1,L_2 是异面直线 □

例题 8.12 设 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{0},L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$

(1) 证明 L_1,L_2 是异面直线 (2). 求 L_1 与 L_2 间公垂线段的长度 d (3). 求公垂线 L 的方程 (4). 求一个平面 π，使得 $L_1//\pi,L_2//\pi$ 且 π 与 L_1,L_2 等距

解

1. 因为 $M_1(1,0,3),M_2(-1,2,1)\Rightarrow\overrightarrow{M_2M_1}=(2,-2,2)$

   计算混合积

   $$(\overrightarrow{s_1\times s_2})\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\2&-2&2\end{vmatrix}=4\neq0$$

   故 L_1,L_2 是异面直线

2. 设公垂线为 L，则 $L\perp L_1,L\perp L_2$，设 $\vec{s}$ 是 L 的方向向量，则 $\vec{s}\perp\vec{s_1},\vec{s}\perp\vec{s_2}\Rightarrow\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=(-1,-2,1)$

   设公垂线段为 CD，则 CD 的长度为 $\overrightarrow{M_2M_1}$ 在方向向量 $\vec{s}$ 上的投影，即

   $$d=|CD|=\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

   注 求异面直线 L_1,L_2 间公垂线段长的公式为

   $$d=\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$$

3. 设 L_1,L 所在的平面为 π_2，L_2,L 所在的平面为 π_3，则 $\begin{cases}\vec{n_2}=\vec{s}\times\vec{s_1}=(1,2,5)\\\vec{n_3}=\vec{s}\times\vec{s_2}=(2,-2,-2)\end{cases}$

   将 $M_1(1,0,3)\in\pi_2,M_2(-1,2,1)\in\pi_3$ 代入得 $\begin{cases}\pi_2:x+2y+5z-16=0\\\pi_3:x-y-z-4=0\end{cases}$

   显然，平面 π_2,π_3 的交线即为公垂线 L，故 L 的方程为

   $$\begin{cases}x+2y+5z-16=0\\x-y-z-4=0\end{cases}$$

4. 因为 $L_1//\pi,L_2//\pi$，所以 π 的法向量 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=(-1,-2,1)$

而 π 与 L_1, L_2 等距，故 M_1M_2 的中点 $Q(0,1,2)$ 在 π 上，由直线的点法式方程得

$$\pi : x + 2y - z = 0$$

例题 8.13 试证明 $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}$

证明 $LHS = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 \sin^2\theta} = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} = RHS$ □

例题 8.14 试证明 $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \theta$

证明 我们称 $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$ 为二重向量积，且有以下恒等式

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$$

将 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的坐标设出来，展开即可

所以，

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = 0$$

□

注 二重向量积 $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$ 不具有结合律：$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$

例题 8.15 (1). 求数 λ，使直线 $L_1 : \dfrac{x-1}{\lambda} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z-3}{-3}$ 与直线 $L_2 : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-9}{-4} = \dfrac{z+14}{7}$ 相交 (2). 求出 L_1 与 L_2 的交点 M_0 (3). 求出 L_1, L_2 确定的平面方程

解

1. 设 $\overrightarrow{s_1} = (\lambda, 5, -3), \overrightarrow{s_2} = (3, -4, 7), M_1(1, -4, 3) \in L_1, M_2(-3, 9, -14) \in L_2$，首先 $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ 不平行
   则 L_1, L_2 相交 $\Leftrightarrow \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共面，即混合积为零
$$(\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \lambda & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -4 & 13 & -17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$
2. 将 L_1, L_2 改写为参数方程的形式，即 $L_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, L_2 : \begin{cases} x = -3 + 3s \\ y = 9 - 4s \\ z = -14 + 7s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$
   设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 L_1, L_2 的交点，则
$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2t = -3 + 3s \\ y_0 = -4 + 5t = 9 - 4s \\ z_0 = 3 - 3t = -14 + 7s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(3, 1, 0)$$
3. 设 L_1, L_2 确定的平面为 π，法向量为 $\overrightarrow{n}$，由 $\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = (23, -23, -23)$，取 $\overrightarrow{n} = (1, -1, -1)$
   且交点 $M_0(3, 1, 0)$ 在 π 上，由平面的点法式方程知，
$$\pi : x - y - z - 2 = 0$$

例题 8.16 求直线 $L : \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi : x + y + z = 0$ 上的投影直线方程 L_1

解 直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{s} = (1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -2, -2)$，且 $M_0(0, 1, 0) \in L$

设过 L 且垂直于平面 π 的平面为 π_1，则 π_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{s} \times \overrightarrow{n} = (0, -2, 2)$

且点 $M_0(0, 1, 0)$ 在 π_1 上，根据平面方程的点法式，$\pi_1 : -y + z + 1 = 0$，此时，投影直线 L_1 的方程为

$$\begin{cases} -y + z + 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

第 4 讲：二次曲面与旋转曲面

(一)、二次曲面 (quadric)

定义 8.3 (隐式曲面)

很多时候，我们无法通过 $z=f(x,y)$ 的形式表示空间中的一个曲面，更一般的，我们有曲面的一般方程

$$F(x,y,z)=0$$

这样表达的曲面称为隐式曲面 ♣

例如，$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$，它是隐式球面，它的显式表示为 $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}, x^2+y^2\le 1$

定义 8.4 (二次曲面)

若

$$F(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J$$

且 $(A,B,C,D,E,F)\neq\theta=(0,0,0,0,0,0)$ 时，称 $F(x,y,z)=0$ 为二次曲面

当 $D=E=F=0$ 且 $A^2+B^2+C^2>0$ 时，二次曲面的对称轴都平行于坐标轴

当 $D^2+E^2+F^2>0$ 时，二次曲面的对称轴不都平行于坐标轴 ♣

球面

设球心在 $M_0(a,b,c)$，半径 $R\ge 0$ 的球面 Σ 上任一点的坐标为 $Q(x,y,z)$，则 $|\overrightarrow{M_0Q}|^2=R^2$

由此得到球面标准方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

将球面标准方程展开，可以得到球面方程的一般式

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0,\ \frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D=R^2\ge 0$$

注 $R=0$ 时，球面退缩为一点

椭球面

中心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的椭球面方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

经坐标平移 $\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\\z'=z-z_0\end{cases}$ 可化为 $O'-x'y'z'$ 坐标轴中的标准椭球面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

称 $z=z_0+c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$ 为上半椭球面，$z=z_0-c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$ 为下半椭球面

圆柱面

空间中圆柱面的方程为

$$x^2+y^2=R^2(R\ge 0)$$

圆柱面是由直线连续移动构成的，这类曲面称为直纹面 (ruled surface)

注 若要在空间中表示 xoy 平面中的圆 $x^2+y^2=R^2$，则应写成 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$，即圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与平面 $z=0$ 的交线

抛物柱面

空间中抛物柱面的方程为

$$y^2=2px\text{或}x^2=2py$$

而 $\begin{cases} y^2=2px \\ z=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x^2=2py \\ z=0 \end{cases}$ 是空间中的抛物线——交面式

椭圆锥面

空间中椭圆锥面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

而 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \\ z=c\neq 0 \end{cases}$ 是空间中的椭圆，$\begin{cases} z=\pm ay \\ x=0 \end{cases}$ 是空间中的相交直线

椭圆抛物面

空间中椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

这是因为沿着平行于 xoy 平面的方向切下去，我们会得到一个空间中的椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \\ z=z_0>0 \end{cases}$

而沿着平行于 z 轴的平面切下去，我们会得到一个抛物线，如 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \\ y=0 \end{cases}$

双曲抛物面 (马鞍面)

空间中双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

这是因为当沿着平面 $z=z_0>0$ 切下去时，我们得到一簇实轴在 x 轴的双曲线，当沿着平面 $z=z_0<0$ 切下去时，我们得到一簇实轴在 y 轴的双曲线，而竖着切时，我们又得到了一簇抛物线

易证明，马鞍面是直纹面：

证明 因为 $z=(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})\Rightarrow\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda} \end{cases}$，$\lambda\neq 0$，这是两个平面的交线

由此看出，马鞍面确实是由一系列直线连接移动构成的 □

单叶双曲面

空间中单叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(\text{两正一负})$$

这是因为用垂直于 z 轴的平面取切单页双曲面，切平面都是椭圆，而用平行于 z 轴的平面取切单叶双曲面，切平面是双曲线

易证明，单叶双曲面是直纹面：

证明 因为 $(\frac{y}{b}-\frac{z}{c})(\frac{y}{b}+\frac{z}{c})=(1-\frac{x}{a})(1+\frac{x}{a})\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda(1-\frac{x}{a})\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}(1+\frac{x}{a})\end{cases}$，$\lambda\neq 0$，这是两个平面的交线

由此看出，单叶双曲面确实是由一系列直线连接移动构成的 □

双叶双曲面

空间中双叶双曲面的方程为

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(\text{一正两负})$$

它与单叶双曲面类似，但从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1\geq 0$ 知，$z\geq c$ 或 $z\leq -c$，因此它由两部分组成，故称为“双叶”

(二)、旋转曲面 (rotation surface)

定义 8.5

设 $L:z=f(y)$ 是一条平面连续曲线，将 L 绕 oz 轴旋转一周，所得的曲面记作 Σ，称 Σ 为旋转曲面 ♣

我们可以由 $z=f(y)$ 推导出旋转曲面的方程：

设 $M(x,y,z)$ 是 Σ 上任意一点，过点 M 作 oz 轴的垂面 π 交 oz 轴与 $Q(0,0,z)$，交曲线 L 与 $A(0,y,z)$，则

$$|QM|^2=|QA|^2\Rightarrow x^2+y^2=y_1^2\Rightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

故 $z=f(y_1)=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$ 为 Σ 的方程，即曲线 $z=f(x,y)$ 绕 oz 轴旋转一周的旋转曲面中，z 保持不变，且多一个变量用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替

同理，曲线 $z=f(y)$ 绕 oy 轴旋转一周的曲面为

$$f(y)=\pm\sqrt{x^2+z^2}$$

(三)、例题

例题 8.17 球面三角形的余弦定理

设单位球面三角形 ABC 是过球心 $O(0,0,0)$ 的三个平面 π_1,π_2,π_3 与单位球面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$ 相交而成的球面上的三角形 ABC，如下图

则有球面三角形的余弦定理：$\begin{cases}\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{cases}$

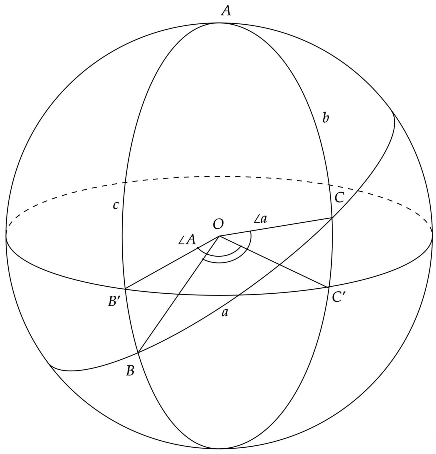


图 8.1: 球面三角形

证明 我们只证明 $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$，另外两式类似

设 $\begin{cases}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\text{ 确定平面 }\pi_1\text{，法向量 }\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\text{ 确定平面 }\pi_2\text{，法向量 }\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\text{ 确定平面 }\pi_2\text{，法向量 }\overrightarrow{n_3}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\end{cases}$

则

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}) = \frac{\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_3}}{|\overrightarrow{n_2}||\overrightarrow{n_3}|} = \frac{(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|}\cdots①$$

根据向量外积的 Lagrange 恒等式：

$$(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{a})(\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{b}) - (\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{a})$$

因为 $\begin{cases}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = 1\cdot1\cdot\sin b\\ |\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 1\cdot1\cdot\sin c\end{cases}$

所以，
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\\ &= (|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA}|\cos 0)(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|\cos a) - (|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos c)(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos b)\\ &= \cos a - \cos b\cos c\end{aligned}$$

代入①得

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c} \Rightarrow \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

□

例题 8.18 求直线 $L:\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 分别绕 y 轴，z 轴旋转一周所得的旋转曲面

解 绕 y 轴旋转，y 保持不动，将 L 中的 z 改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 则旋转曲面 Σ_1 为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

绕 z 轴旋转，z 保持不动，将 L 中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 则旋转曲面 Σ_1 为

$$\frac{z^2}{b^2}+\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})}{a^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

例题 8.19 求直线 $L:\begin{cases}y=kx(k\neq0)\\ z=0\end{cases}$ 分别绕 x 轴，y 轴旋转一周的旋转曲面 Σ_1,Σ_2

解 绕 x 轴旋转时，x 保持不变，将 y 改写成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$，则 $\Sigma_1:\pm\sqrt{y^2+z^2}=kx$，即 $\Sigma_1: y^2+z^2=k^2x^2$

绕 y 轴旋转时，y 保持不变，将 x 改写成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，则 $\Sigma_2: y=\pm k\sqrt{x^2+z^2}$，即 $\Sigma_2: y^2=k^2x^2+k^2z^2$

第 5 讲：空间解析几何综述

(一)、坐标系的平移与旋转

例题 8.20 设有二次曲面 $\Sigma: 4x^2+25y^2+4z^2-16x-50y-16z-43=0$

(1). 指出 Σ 是何种二次曲面　(2). 将上述 Σ 的一般式化为参数式

解 (1). 配方得

$$4(x-2)^2+25(y-1)^2+4(z-2)^2=100 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-2)^2}{5^2}=1$$

Σ 是中心在 $M_0(2,1,2)$ 的旋转体和椭球面

若令 $\begin{cases} x-2=x' \\ y-1=y' \\ z-2=z' \end{cases}$，则 $M_0=O'$，即将坐标系的原点平移到椭球面的中心 M_0 处，在新的坐标系 $O'-x'y'z'$ 下，旋转椭球面 Σ 化为

$$\frac{x'^2}{5^2}+\frac{y'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{5^2}=1$$

(2). 令 $\begin{cases} \dfrac{x'}{5}=\sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{y'}{2}=\sin\theta\sin\varphi \\ \dfrac{z'}{5}=\cos\theta \end{cases}$，则 $\begin{cases} x=5\sin\theta\cos\varphi+2 \\ y=\sin\theta\sin\varphi+1 \\ z=\cos\theta+2 \end{cases}$ 其中，$\begin{cases} \theta\in[0,2\pi] \\ \varphi\in[0,2\pi] \end{cases}$

定义 8.6 (坐标变换)

若保持坐标系的原点不动，让坐标系进行旋转变换，设 $O-xyz$ 坐标系中，基向量为 i,j,k，在 $O-x'y'z'$ 坐标系中，基向量为 i',j',k'，且 i,j,k 与 i',j',k' 的夹角如下表所示

	i	j	k
i'	α_1	β_1	γ_1
j'	α_2	β_2	γ_2
k'	α_3	β_3	γ_3

设 $\overrightarrow{OM}=(a,b,c)\neq\theta$，则

$$\overrightarrow{OM}^\circ=\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\left(\frac{a}{|\overrightarrow{OM}|},\frac{b}{|\overrightarrow{OM}|},\frac{c}{|\overrightarrow{OM}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\cos\alpha\cdot i+\cos\beta\cdot j+\cos\gamma\cdot k$$

即单位向量 $\overrightarrow{OM}^\circ$ 可用它的三个方向余弦作为坐标，由表格知：

$$\begin{cases} i'=\cos\alpha_1\cdot i+\cos\beta_1\cdot j+\cos\gamma_1\cdot k \\ j'=\cos\alpha_2\cdot i+\cos\beta_2\cdot j+\cos\gamma_2\cdot k \\ k'=\cos\alpha_3\cdot i+\cos\beta_3\cdot j+\cos\gamma_3\cdot k \end{cases}$$

设点 Q 在 $O-xyz$ 中的坐标为 $Q(x,y,z)$，在 $O-x'y'z'$ 中为 $Q(x',y',z')$，则 $\overrightarrow{OQ}=xi+yj+zk=x'i'+y'j'+z'k'$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=x'(\cos\alpha_1\cdot i+\cos\beta_1\cdot j+\cos\gamma_1\cdot k)+y'(\cos\alpha_2\cdot i+\cos\beta_2\cdot j+\cos\gamma_2\cdot k)+z'(\cos\alpha_3\cdot i+\cos\beta_3\cdot j+\cos\gamma_3\cdot k)\\&=(x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3)i+(x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3)j+(x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3)k\end{aligned}$$

即 $\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{cases}$，设 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$，则有

$$X = AX'$$

其中 A 的各行各列都是单位向量，且任两行 (列) 正交

注 在线性代数中，我们称 A 这样的矩阵为正交矩阵，称上述变换为正交线性变换，简称正交变换

不难验证，正交矩阵 A 满足 $AA^T = I_n$ 或 $A^T = A^{-1}$，几何中的旋转或物理中刚体的旋转，在代数中对应正交变换

在旋转前后，老坐标 x, y, z 与新坐标 x', y', z' 之间的对应关系是正交变换关系

例题 8.21 设有二次曲面 $\Sigma : xy = z$ (1). 指出 Σ 是何种曲面 (2). 求 Σ 的参数式

解 (1). 若保持 oz 轴不变，让 xoy 坐标平面绕 z 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$，得到坐标 $O - x'y'z'$，则

	i	j	k
i'	45°	45°	90°
j'	135°	45°	90°
k'	90°	90°	0°

即 $\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{3\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ z = x'\cos\frac{\pi}{2} + y'\cos\frac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z' \end{cases}$

所以，$\Sigma : z = xy$ 可化为

$$z' = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

即在 $O - x'y'z'$ 中，Σ 是双曲抛物面 (马鞍面)

(2).Σ 在新坐标系中的参数式为 $\begin{cases} x' = x' + 0y' \\ y' = 0x' + y' \\ z' = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \end{cases}$，$x', y'$ 为参数

(二)、柱面坐标系与球面坐标系

定义 8.7 (柱面坐标系)

空间 $\mathbb{R}^3$ 中任一点 $Q(x, y, z)$ 都可看作是在半径为 r 的某个圆柱面：$x^2 + y^2 = r^2$ 上

而圆柱面 $x^2 + y^2 = r^2$ 上的点都可以用 r, θ, z 这三个数构成的有序数组表示，即

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

称 (r, θ, z) 为点 Q 的柱面坐标

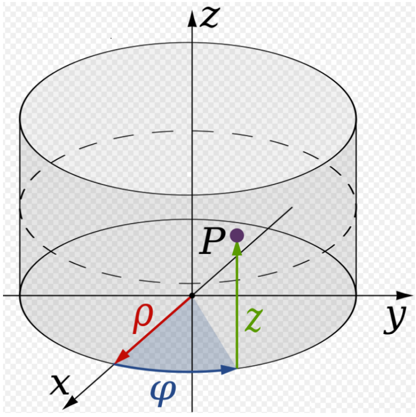


图 8.2: 柱坐标系

定义 8.8 (球面坐标系)

空间中一点 $Q(x,y,z)$ 都可看作是在半径为 r 的球面上 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=r^2(r\geq 0)$

其中，$|\overrightarrow{OQ}|=r$，设 $\overrightarrow{OQ}$ 与 oz 轴的夹角为 θ，$\overrightarrow{OQ}$ 在 xoy 平面中的投影 $\overrightarrow{OA}$ 与 ox 轴正向的夹角为 φ

则 $|\overrightarrow{OA}|=r\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$，$\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi),r\in[0,+\infty)$

我们称三元有序数组 (θ,φ,r) 为球面坐标

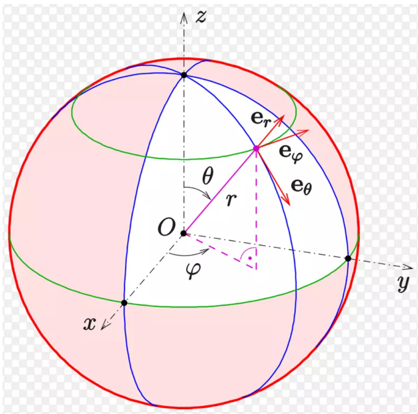


图 8.3: 球坐标系

例题 8.22 将直角坐标系下的球面方程 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 用柱面坐标系、球面坐标系表示

解 柱面坐标系：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \Rightarrow r^2+z^2=R^2 \\ z=z \end{cases}$

球面坐标系：$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow r^2=R^2\text{，即 } r=R \\ z=r\cos\theta \end{cases}$

例题 8.23 将双叶双曲面 $\Sigma: x^2-y^2-z^2=1$ 用柱面坐标系、球面坐标系表示

解 柱面坐标系：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \Rightarrow r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-z^2=1 \Rightarrow r^2\cos 2\theta-z^2=1 \\ z=z \end{cases}$

球面坐标系：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow 2x^2-(x^2+y^2+z^2) = 1 \Rightarrow 2(r\sin\theta\cos\varphi)^2-r^2 = 1 \Rightarrow r^2(2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1) = 1$

(三)、空间曲线 $\Gamma : \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 的参数式表示

例题 8.24 将空间中的大圆 $P : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-a^2 = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ 化成参数式

解 因为 $z = -(x+y) \Rightarrow x^2+y^2+[-(x+y)]^2 = a^2$，配方得

$$(x+\frac{y}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}y}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$$

令 $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \dfrac{\sqrt{3}y}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$，$\theta \in [0,2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \\ y = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ z = \dfrac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta) \end{cases}$，$\theta \in [0,2\pi)$

例题 8.25 将空间中的直线 $L : \begin{cases} x+y+z+5 = 0 \\ x-y-2z-1 = 0 \end{cases}$ 用参数方程表示

解 由直线方程可解得 $\begin{cases} \text{x=x} \\ y = -3x-9 \\ z = 2x+4 \end{cases}$，令 $x = t$，即 $\begin{cases} \text{x=t} \\ y = -3t-9 \\ z = 2t+4 \end{cases}$

注 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 Γ 的参数式中只有一个参数 (一个自由度)，且 Γ 的参数式表示不唯一

例题 8.26 $\Gamma : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = bt \end{cases}$，$(\theta \in [0,+\infty), a > 0, b > 0$ 为常数)

Γ 表示的空间光滑曲线称之为螺旋线，并称 $k = 2\pi b$ 为一个螺距

此题中，$x^2+y^2 = a^2$，因此 Γ 上的点都在圆柱面 $x^2+y^2 = a^2$ 上

此外，$z = bt \Rightarrow z_t' = b$ 即质点在作圆周运动的同时还向上作匀速运动

注 无论是在物理中，还是在几何中，参数增加的方向被认定为曲线 P 的正向，相反的方向是曲线 P 的负向

第九章：多变量函数的微分学

第 6 讲：多元函数的极限与连续性

(一)、多元函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)(n \geq 2)$ 的例子

1. $z = ax + by + c, (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq +\infty\}$
2. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq R^2\}$
3. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 　这是 n 维标准正态分布概率密度函数
4. $u = \ln(a^2 - x^2 - y^2 - z^2), x^2 + y^2 + z^2 < a^2$，定义域 $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ 为开球体
5. $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}dt, (x > 0, y > 0)$ 　β 函数
6. $u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ 　n 元线性函数
7. $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n(n-1)}x_{n-1}x_n)$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

这是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

在多元函数中，最简单的是二元函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D$，且 $z = f(x, y)$ 有直观图像——空间的曲面，因此，二元函数是今后重点讨论的多元函数。

(二)、平面点集的若干概念

二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 D 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集

定义 9.9

1. 邻域
   点 M_0 的邻域：$U(M_0, \delta) \triangleq \{M||MM_0| = \rho(M, M_0) < \delta\}$
   即 $U(M_0, \delta) = \{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$，其中 $M_0(x_0, y_0), M(x, y)$
2. 内点
   D 的内点 M_0：$M_0 \in D$ 且 $\exists\delta > 0$，使得 $U(M_0, \delta) \subset D$
3. 外点
   D 的外点 M_0：$M_0 \in D$ 且 $\exists\delta > 0$，使得 $U(M_0, \delta) \cap D = \varnothing$
4. 边界点
   M_0 的任意 δ 邻域中都同时含有 D 的内点以及外点
   记点集 D 的边界点全体为 ∂D，称为 D 的边界
5. 开集与闭集
   全由内点组成的点集称为开集，开集 D 的余集 D^c 称为闭集，闭集的余集是开集
6. 道路连通
   若 D 中任两点 A, B，都能用 D 中的连续曲线连接，则称 D 是道路连通的
7. 区域
   称连通的开集为开区域，简称区域；开区域 D 与 D 的边界 ∂D 的并称为闭区域，记作 $\overline{D} = D + \partial D$
8. 有界集

若 $\exists R>0$，使 $D\subset U(O,R)$，则称 D 是有界集，其中 $O(0,0)$

例 1 $U(M_0,\delta)$、$x^2+y^2+z^2<a^2$、$\mathbb{R}^2$ 都是开集，且前二者为有界集，$\mathbb{R}^2$ 是无界集
而 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geq\delta^2,(\mathbb{R}^2)^c=\varnothing,x^2+y^2+z^2\geq a^2$ 都是闭集
此外，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq\delta^2,x^2+y^2+z^2\leq a^2$ 是有界闭集 (区域)

例 2 空集 $\varnothing$ 由零个内点组成，因此是开集，但 $(\mathbb{R}^2)^c=\varnothing$ 知，$\varnothing$ 又是闭集。在所有点集中，即开又闭的仅有 $\varnothing,\mathbb{R}^n$ 两个。

(三)、二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的极限与连续性

定义 9.10 (聚点与孤立点)

若对 $\forall\delta>0$，$U(M_0,\delta)$ 中都有点集 D 中的点，则称 M_0 是 D 的聚点 (极限点)，M_0 这个聚点可以属于 D，也可以不属于 D

设点 $M_0\in D$，且 $\exists\delta>0$ 时，$U(M_0,\delta)$ 中除 M_0 外无 D 中的点，则称 M_0 是 D 的孤立点

定义 9.11 (二元函数的极限与连续性)

1. 设 $f(x,y)$ 定义在点集 D 上，$M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，a 是一个常数，若对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $M\in D,0<|MM_0|<\delta$ 时，$|f(M)-a|<\epsilon$ 恒成立，则称 a 是 M 趋于 M_0 时 $f(x,y)$ 的极限，记作
$$\lim_{M\to M_0}f(M)=a\text{或}\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=a\text{或}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$$
2. 设 $f(x,y)$ 在点集 D 上有定义，$M_0(x_0,y_0)\in D$，若对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $M\in D,|MM_0|<\delta$ 时，
$$|f(M)-f(M_0)|<\epsilon$$
恒成立，则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 处连续，若 f 在 D 中的每一点都连续，则称 f 在 D 中连续。
若 δ 仅与 ϵ 有关，则称 f 在 D 上一致连续

注

1. 由于多元函数极限与一元函数的极限定义方式相同，因此，一元函数极限中的四则运算法则、夹逼准则、及极限的唯一性、局部有界性、保号性、保序性等都可推广到多元函数的极限中来
2. 若 M_0 是 D 的聚点，则必有 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)=f(\lim\limits_{M\to M_0}M)$，即极限符号与函数符号可交换

例题 9.27 若 $M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的孤立点，则 $f(M)$ 在 M_0 处必连续

证明 对 $\forall\epsilon>0$，因为 M_0 是 D 的孤立点，所以 $\exists\delta>0$，使得 $U(M_0,\delta)$ 中除 M_0 外无 D 中的点，当 $M\in D$，$|MM_0|<\delta$ 时，$|f(M)-f(M_0)|=|f(M_0)-f(M_0)|=0<\epsilon$ 恒成立，所以 $f(x,y)$ 在孤立点处必连续 □

我们构造函数 $f(x,y)=\sqrt{\cos^2\pi x+\cos^2\pi y-2}$，它的定义域是 D 中所有的整点，每个整点都是 D 的孤立点，也都是 $f(x,y)$ 的连续点，从而 $f(x,y)$ 在 D 上连续

例题 9.28 试证明 (1). $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$ (2). $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在 (3). $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在

证明 (1). 由均值不等式，$x^4+y^2\geq2x^2|y|\Rightarrow0\leq\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}\leq\dfrac{|y|}{2}$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{|y|}{2}=0$，由夹逼准则知，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$

(2). 取 $y=kx^2,k$ 为常数，即动点 $M(x,y)$ 沿抛物线 $y=kx^2$ 趋于 $O(0,0)$，则
$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

当 k 取不同的值时，即动点从不同的抛物线趋于 $(0,0)$ 时，函数有不同的极限，这与极限存在的唯一性矛盾！故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在，从而 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2},x^2+y^2>0\\0,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处不连续

(3). 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}]^{\frac{xy}{x+y}}$

设 $u=xy$，则当 $x\to0,y\to0$ 时，$u=xy\to0$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

另一方面，取 $y=-x+kx^2$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=-x+kx^2}}\frac{-x^2+kx^3}{kx^2}=-\frac{1}{k}$

即 k 取不同值时，$M(x,y)$ 沿 $y=-x+kx^2$ 趋于 $O(0,0)$ 时，函数有不同的极限，与极限存在的唯一性矛盾！故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在 □

(四)、多元函数的主要性质

1. 连续多元函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍是连续多元函数
2. 在复合有意义的前提下，连续多元函数的复合函数仍是连续函数
3. 有界闭区域 D 上的连续多元函数具有“五性”：
   ①有界性 ②最值性 ③介值性 ④零值性 ⑤一致连续性

第 7 讲：偏导数与全微分

(一)、多元函数的偏导数 (partial derivative)

定义 9.12 (偏增量与偏导数)

在多元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 中，设 $M_0(x_0,y_0),M_1(x_0+\Delta x,y_0),M_2(x_0,y_0+\Delta y)\in D$，则
$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 是固定 y，仅让 x 变化而使 z 产生的增量，记 $\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$
$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 是固定 x，仅让 y 变化而使 z 产生的增量，记 $\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$
分别称作因变量 z 关于自变量 x,y 的偏增量，并称极限

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},\ \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

分别为因变量 z 关于自变量 x,y 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数，也记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=f'_x(M_0)=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f(x,y_0)'_x\Big|_{x_0}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=f'_y(M_0)=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f(x_0,y)'_y\Big|_{y_0}$$

♣

$f'_x(M_0),f'_y(M_0)$ 实际上就是在点 M_0 处，因变量 z 关于 x,y 的相对瞬时变化率，即

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x_0},f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x_0,y)}{dy}\right|_{y_0}$$

同理，若 $u=f(x,y,z)$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中有定义，则

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{df(x,y_0,z_0)}{dx}\right|_{x_0},f'_y(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{df(x_0,y,z_0)}{dy}\right|_{y_0},f'_z(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{df(x_0,y_0,z)}{dz}\right|_{z_0}$$

总之，多元函数的偏导数，就是将多元函数中其余的自变量固定，只把因变量对一个自变量求导的结果

例题 9.29 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2>0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f'_x(0,0), f'_y(0,0), f'_x(1,1)$

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^4+0}-0}{\Delta x}=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\frac{0^2\cdot\Delta y}{0^4+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0$

$f'_x(1,1)=(f(x,1))'_x=(\dfrac{x^2}{x^4+1})'\Big|_{x=1}=0$

例题 9.30 设 $z=x^2-xy+y^2+x^y+y^x+3$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}, z'_y(1,2)$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y+yx^{y-1}+y^x\ln y, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+x^y\ln x+xy^{x-1}, z'_y(1,2)=z(1,y)'\Big|_{y=2}=(y^2+5)'\Big|_{y=2}=4$

例题 9.31 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$

解 因为 $z'_x(0,0)=(z(x,0))'_x=(|x|)'\Big|_{x=0}$ 不存在，x 和 y 地位等价，即 $z'_y(0,0)$ 也不存在

(二)、多元函数全微分与可微性

定义 9.13 (多元函数的全微分)

设 $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$，D 是区域，$M_0(x_0,y_0), M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$

若存在常数 A,B，使得 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处的全增量可表示为

$\Delta z=f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho)$，其中 $\rho=\rho(M,M_0)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 是可微的，并称 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 M_0 处的全微分，记作

$$dz\Big|_{M_0}=A\Delta x+B\Delta y=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

即在 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微的条件下，有

$$\Delta z=dz\Big|_{M_0}+o(\rho)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho)$$

对于多元函数，我们也可以同样定义其全微分。

若多元函数在区域 D 中的每一点都可微，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上可微

注 全微分的几何意义：

$z=f(x,y)$ 在点 $(x_0.y_0)$ 处的全微分在几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切平面上的点的 z 坐标的增量

(三)、可微的必要条件

定理 9.2 (连续是可微的必要条件)

若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在 M_0 处必连续，反之未必

即可微一定连续，不连续一定不可微

证明 若 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$A\Delta x+B\Delta y\to 0, \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0\Rightarrow o(\rho)\to 0$

从而 $\Delta z \to 0$，即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$，$f(x,y)$ 在 M_0 处连续 □

反例：函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 处连续，但在 $O(0,0)$ 处不可微

定理 9.3 (可偏导是可微的必要条件)

若 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 必存在，且 $f'_x(x_0,y_0)=A, f'_y(x_0,y_0)=B$
即可微偏导一定存在，偏导不存在不一定不可微

证明 已知 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，从而有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

令 $\Delta y=0$，则 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$，当 $\Delta x\to 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} A+\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=A=f'_x(x_0,y_0)$$

同理，令 $\Delta x=0$，我们有

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0} B+\frac{o(|\Delta y|)}{|\Delta y|}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}=B=f'_y(x_0,y_0)$$

□

反例：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2>0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处可偏导，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，但却不可微

证明 使用反证法，假设 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处可微，则全增量

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

即

$$f(\Delta x,\Delta y)-0=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho)=o(\rho)\Rightarrow f(\Delta x,\Delta y)=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=o(\rho)$$

由 $o(\rho)$ 知，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}=0$，但该极限不存在

理由如下，若令 $\Delta y=k\Delta x, k\neq 0$，k 为常数，则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}=\frac{(\Delta x)^2k\Delta x}{[(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2]}=\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

与极限存在的唯一性矛盾，即 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不可微 □

第 8 讲：可微的条件与高阶偏导数

(一)、$z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的条件

定理 9.4

$z=f(x,y)$ 在 M_0 处可微的充要条件是

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y]}{\rho}=0$$

证明 $(\Rightarrow)$ 若 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+o(\rho)$$

即

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-(f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$$

$(\Leftarrow)$ 若 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z-(f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y)}{\rho}=0$，则

$$\Delta z-(f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y=o(\rho)\Rightarrow\Delta z=f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+o(\rho)=Ax+By+o(\rho)$$

□

定理 9.5

若 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处存在且连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微

证明 已知 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处存在且连续

从而有
$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\\&=f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

利用 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 的连续性知，$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)\\\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y'(x_0,y_0)\end{cases}$

因此我们有 $\begin{cases}f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)+\alpha_1,\alpha_1\to0(when\ \Delta x,\Delta y\to0)\\f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)+\alpha_2,\alpha_2\to0(when\ \Delta x,\Delta y\to0)\end{cases}$

即 $\Delta z=(f_x'(M_0)+\alpha_1)\Delta x+(f_y'(M_0)+\alpha_2)\Delta y=f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$

接下来我们需要证明 $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=o(\rho)$，考虑极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\alpha_1\cos\theta+\alpha_2\sin\theta=0+0=0$$

即 $\Delta z=f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+o(\rho)$，即 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处可微 □

反例：$z=f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2>0\\0,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处可微，但 f_x',f_y' 在该点不连续

(二)、高阶偏导数

设 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x^y+3x+4y,(x>0,y\in\mathbb{R})$

则 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y+yx^{y-1}+3\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y+x^y\ln x+4\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=(\dfrac{\partial z}{\partial x})_y'=(2x+y+yx^{y-1}+3)_y'=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\\\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=(\dfrac{\partial z}{\partial y})_x'=(1+yx^{y-1}\ln x+x^{y-1})_x'=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y\partial x}=(\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x})_x'=(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)_x'=(y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x+yx^{y-2}\\\dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}=(\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y})_x'=(1+yx^{y-1}\ln x+x^{y-1})_x'=y(y-1)x^{y-2}+yx^{y-2}+(y-1)x^{y-2}\end{cases}$$

不难看出，$\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}$，更一般的结论如下

定理 9.6

若 $f(x,y)$ 在区域 D 中的高阶偏导数连续，则高阶偏导数与求偏导的顺序无关

证明 下证明，若 $\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$ 连续，则 $\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$

设 $f(x,y)\in C^2(D)$，且 $M_0(x_0,y_0)$ 为 D 中任一点，设 $M_1(x_0+h,y_0+k),M_2(x_0+h,y_0),M_3(x_0,y_0+k)$

令 $\begin{cases} m(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0) \\ n(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(x_0+h)-m(x_0)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0) \\ n(y_0+k)-n(y_0)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0) \end{cases}$

即对 $\forall h,k\neq 0$，有 $m(x_0+h)-m(x_0)\equiv n(y_0+k)-n(y_0)$，由拉格朗日中值定理，$\exists\theta_1,\theta_2\in(0,1)$，使得

$$m'_x(x_0+\theta_1 h)h\equiv n'_y(y_0+\theta_2 k)k$$

即

$$[f'_x(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta_1 h,y_0)]h=[f'_y(x_0+h,y_0+\theta_2 k)-f'_y(x_0,y_0+\theta_2 k)]k$$

再次使用拉格朗日中值定理，$\exists\theta_3,\theta_4\in(0,1)$，使得

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_3 k)hk=f''_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_2 k)hk$$

令 $h\to 0,k\to 0$，则

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

由 M_0 在 D 中的任意性知，$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ □

(三)、例题

在求偏导时，我们需要将其他变量当作常数，仅对所求分量求导即可

例题 9.32 证明函数 $u=\dfrac{1}{r},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 满足 Laplace 方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$

证明 $u=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

由对称性知，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$，所以，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ □

例题 9.33 证明 $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^3 t}}(x>0,t>0,\text{常数}a>0)$ 满足热传导方程：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

证明 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{4a\sqrt{\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}(-1+\dfrac{x^2}{2a^2 t}),\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}(-\dfrac{x}{2a^2 t}),\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}(-1+\dfrac{x^2}{2a^2 t})$

所以，$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ □

例题 9.34 对 $\varphi,\psi\in C^2(I),u=\varphi(x-at)+\varphi(x+at)$ 满足波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

证明 令 $\begin{cases} v=x-at \\ w=x+at \end{cases}$，则 $u=\varphi(v)+\psi(w)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x}+\varphi'(W)\dfrac{\partial w}{\partial x}=\varphi(v)+\varphi(w)$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(v)\dfrac{\partial v}{\partial x}+\varphi''(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}=\varphi(v)+\varphi(w)$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial t}+\varphi'(w)\dfrac{\partial w}{\partial t}=-a\varphi'(v)+a\varphi'(w)$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi''(v)\dfrac{\partial v}{\partial t}+\varphi''(w)\dfrac{\partial w}{\partial t}=(-a)^2\varphi''(v)+a^2\varphi''(w)$

所以，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ □

第 9 讲：复合 (隐) 函数微分法

(一)、复合函数微分法

定理 9.7

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中可微，且 $\begin{cases} u=g(x,y) \\ v=h(x,y) \end{cases}$ 都在区域 E 中可微，当复合 $f(g(x,y),h(x,y))$ 有意义时，z 通过中间变量 u,v，变成 x,y 的多元复合函数，且有求偏导数的链式法则如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdots ① \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\cdots ② \end{cases}$$

且无论 u,v 是 $f(u,v)$ 的自变量，还是作为复合函数 $f(g(x,y),h(x,y))$ 的中间变量，总有

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\cdots ③$$

这正是一阶微分的形式不变性

证明 ①②：固定 y，让 x 有增量 Δx，则 $\begin{cases} \Delta u_x=g(x+\Delta x,y)-g(x,y) \\ \Delta v_x=h(x+\Delta x,y)-h(x,y) \end{cases}$

所以，$\Delta z_x=f(u+\Delta u_x,v+\Delta v_x)-f(u,v)=\dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u_x+\dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v_x+o(\rho),\rho=\sqrt{(\Delta u_x)^2+(\Delta v_x)^2}$

从而有 $\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\Delta u_x}{\Delta x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\Delta v_x}{\Delta x}+\dfrac{o(\rho)}{\Delta x}$，且 $\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u_x}{\Delta x}=\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v_x}{\Delta x}=\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}\dfrac{\rho}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{(\dfrac{\Delta u_x}{\Delta x})^2+(\dfrac{\Delta v_x}{\Delta x})^2}=0 \end{cases}$

所以，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，同理有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

③：当 u,v 作为 $f(u,v)$ 的自变量时，由 $z=f(u,v)$ 可微知，$dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$

当 u,v 作为复合函数 $f(g(x,y),h(x,y))$ 的中间变量时，由 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ 知

$$dz=(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+\frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

即一阶微分的形式不变性成立 □

(二)、隐函数微分法

例 1: 方程 $3x+4y-5z+7=0$ 即可确定函数 $z=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{7}{5}$，也可确定函数 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y-\frac{7}{4}$ 及 $x=-\frac{4}{3}y+\frac{5}{3}z-\frac{7}{3}$

因为 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$，$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}=-1,\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=-1$

上述的三个函数，都是方程 $F(x,y,z)=3x+4y-5z+7=0$ 所确定的隐函数

定理 9.8 (隐函数存在定理)

设方程 $F(x,y)=0$ 满足 $\begin{cases} ①f(x,y)\in C^1(D)，\text{D 为区域} \\ ②F(x_0,y_0)=F(M_0)=0,M_0\in D \\ ③F_y'(M_0)=F_y'(x_0,y_0)\neq 0 \end{cases}$，则方程 $F(x,y)=0$ 可在点 M_0 的某个邻域

$U(M_0,\delta)$ 中唯一确定隐函数 $y=\varphi(x)$，且 $\begin{cases} ①\varphi(x_0)=y_0 \\ ②\dfrac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\in C(D) \end{cases}$

对于三元及多元函数也是如此，以三元函数为例

设方程 $F(x,y,z)=0$ 满足 $\begin{cases} ①f(x,y,z)\in C^1(D)\text{，D 为区域} \\ ②F(x_0,y_0,z_0)=F(M_0)=0, M_0\in D \\ ③F'_z(M_0)\neq 0 \end{cases}$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 可在点 M_0 的某个

邻域 $U(M_0,\delta)$ 中唯一确定隐函数 $z=\varphi(x,y)$，且 $\begin{cases} ①\varphi(x_0,y_0)=z_0 \\ ②\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \end{cases}$

♡

证明 不妨设 $F'_y(x_0,y_0)=F'_y(M_0)>0$，则 $F(x_0,y)$ 在 y_0 的附近严格单调增

即在 $M_0(x_0,y_0)$ 附近形成了一条唯一存在的严格单增平面曲线，设该曲线的表达式为

$$y=\varphi(x),(x,y)\in U(M_0,\delta)$$

则 $y=\varphi(x)$ 即为所求的隐函数，显然 $y=\varphi(x)$ 穿过点 $M_0(x_0,y_0)$，即 $\varphi(x_0)=y_0$

$F(x,\varphi(x))=0$ 两边同时对 x 求导得

$$F'_x+F'_y\frac{d\varphi(x)}{dx}=0\Rightarrow\varphi'(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

又因为 $F\in C^1(D)$，$\varphi'(x)$ 是连续函数 □

注 上述隐函数 $y=\varphi(x)$ 只是理论上存在，实际问题中未必能求出来！但是隐函数的导数或偏导数是能够从已知的方程 $F(x,y)=0$ 或 $F(x,y,z)=0$ 中求出来！

例如，若已知 $z=\varphi(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数，则 $F(x,y,\varphi(x,y))=0$，两边同时对 x,y 分别求导 $\Rightarrow\begin{cases} F'_x+F'_z\varphi'_x(x,y)=0\Rightarrow\varphi'_x(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \\ F'_y+F'_z\varphi'_y(x,y)=0\Rightarrow\varphi'_y(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \end{cases}$

定理 9.9 (隐函数存在定理 (方程组))

1. 设由三个变量，两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

其中 F,G 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有连续偏导数，且满足

$$F(M_0)=G(M_0)=0,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}=\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{M_0}\neq 0$$

则该方程组在点 M_0 的某邻域内确定唯一的隐函数 $y=y(x),z=z(x)$，它们满足

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0 \\ G(x,y(x),z(x))=0 \end{cases},\begin{cases} y_0=y(x_0) \\ z_0=z(x_0) \end{cases}$$

且它们有连续导数

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

2. 设由四个变量，两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

其中 F,G 在点 $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内有连续偏导数，且满足

$$F(M_0)=G(M_0)=0,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\bigg|_{M_0}=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_{M_0}\neq 0$$

则该方程组在点 M_0 的某邻域内确定唯一的隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，它们满足

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases},\ \begin{cases} u_0=u(x_0,y_0) \\ v_0=v(x_0,y_0) \end{cases}$$

且它们有连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

♡

(三)、例题

例题 9.35 球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限可确定三个隐函数：$x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}, y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，求证 $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$

证明 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$，则 $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=(-\frac{F'_y}{F'_x})(-\frac{F'_z}{F'_y})(-\frac{F'_x}{F'_z})=-1$

例题 9.36 设 $F(x,y)\in C^2(D)$，D 是区域，函数 $y=\varphi(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 唯一确定，证明

$$\varphi''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(\frac{\partial F}{\partial x})^2}{(\frac{\partial F}{\partial y})^3}$$

证明 $\varphi'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\triangleq y'_x$

$$\begin{aligned}
\varphi''(x)&=(-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)})'_x\\
&=-\frac{(F'_x(x,y))'_xF'_y(x,y)-(F'_y(x,y))'_xF'_x(x,y)}{(F'_y(x,y))^2}\\
&=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}\cdot y'_x)F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}\cdot y'_x)F'_x}{F_y^2}\\
&=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}\cdot-\frac{F'_x}{F'_y})F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}\cdot-\frac{F'_x}{F'_y})F'_x}{F_y^2}\\
&=-\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(\frac{\partial F}{\partial x})^2}{(\frac{\partial F}{\partial y})^3}
\end{aligned}$$

这里使用了二阶偏导连续，$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}$ □

第 10 讲：多元函数微分法习题课 (I)

(一)、一阶微分形式不变形及微分法则

1. 设 $z=f(u,v)$ 可微，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=f'_1du+f'_2dv$$

其中，u, v 是自变量，或是中间变量，我们约定第一分量 (此处为 u) 的偏导为 f_1'

2. 设 $z = f(u, v) = u \pm v$，则

$$dz = f_u' du + f_v' dv = du \pm dv = d(u \pm v)$$

3. 设 $z = f(u, v) = u \cdot v$，则

$$dz = f_u' du + f_v' dv = v du + u dv = d(u \cdot v)$$

4. 设 $z = f(u, v) = \frac{u}{v}, v \neq 0$，则

$$dz = f_u' du + f_v' dv = \frac{1}{v} du + \frac{-u}{v^2} dv = \frac{v du - u dv}{v^2} = d(\frac{u}{v})$$

(二)、例题

例题 9.37 设方程 $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$ 确定了隐函数 $u = f(x, y, z)$，求 du

解 (I) 原方程两边取全微分：$d(u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3) = d(0)$

$\Rightarrow d(u^3) - 3d[(x+y)u^2] + d(z^3) = 0$

$\Rightarrow 3u^2 du - 3[u^2 d(x+y) + (x+y)d(u^2)] + 3z^2 dz = 0$

$\Rightarrow 3u^2 du - 3[u^2(dx+dy) + 2(x+y)u du] + 3z^2 dz = 0$

解得 $du = \dfrac{3u^2(dx+dy) - 3z^2 dz}{3u^2 - 6(x+y)u} = \dfrac{u^2 dx + u^2 dy - z^2 dz}{u^2 - 2(x+y)u}$

对比 dx, dy, dz 的系数，我们可以得到 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$

解 (II) 令 $F(x, y, z, u) = u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3$，则 $\begin{cases} F_u' = 3u^2 - 6u(x+y) \neq 0 \\ F_x' = -3u^2 \\ F_y' = -3u^2 \\ F_z' = 3z^2 \end{cases}$

而 $du = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy + \dfrac{\partial u}{\partial z} dz = (-1)\dfrac{F_x'}{F_u'} dx + (-1)\dfrac{F_y'}{F_u'} dy + (-1)\dfrac{F_z'}{F_u'} dz$

代入即得 $du = \dfrac{u^2 dx + u^2 dy - z^2 dz}{u^2 - 2(x+y)u}$

解 (III) $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$ 两边同时对 x, y, z 分别求偏导，视 u 为 x, y, z 的函数

对 x 求偏导：$3u^2 u_x' + (-3)u^2 + (-3)(x+y) \cdot 2u \cdot u_x' + 0 = 0 \Rightarrow u_x' = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

对 y 求偏导：$3u^2 u_y' + (-3)u^2 + (-3)(x+y) \cdot 2u \cdot u_y' + 0 = 0 \Rightarrow u_y' = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

对 z 求偏导：$3u^2 u_z' + (-3)(x+y)2u \cdot u_z' + 3z^2 = 0 \Rightarrow u_z' = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

代入全微分公式即可

例题 9.38 设 $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2), f \in C^2(D)$，D 为区域，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, du, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$

解 $du = f_1' d(x+y+z) + f_2' d(x^2+y^2+z^2)$

$du = f_1'(dx+dy+dz) + f_2'(2x dx + 2y dy + 2z dz) = (f_1' + 2x f_2')dx + (f_1' + 2y f_2')dy + (f_1' + 2z f_2')dz$

此处将 $x+y+z, x^2+y^2+z^2$ 视为两个新变量 v, w，使用了全微分公式，此外，还可对上式再次进行微分，可以得到二阶全微分与偏微分的关系

所以，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1' + 2x f_2', \dfrac{\partial u}{\partial y} = f_1' + 2y f_2', \dfrac{\partial u}{\partial z} = f_1' + 2z f_2'$

接下来求二阶偏导，因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1'(x+y+z, x^2+y^2+z^2) + 2x f_2'(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}''(1+0+0) + f_{12}''(2x+0+0) + 2 \cdot f_2' + 2x(f_{21}''(1+0+0) + f_{22}''(2x+0+0))$

即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + 4x f_{12}'' + 4x^2 f_{22}'' + 2f_2'$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = (\frac{\partial u}{\partial x})'_x = (f'_1 + 2x f'_2)'_x = f''_{11} + f''_{12} \cdot 2y + 2x(f''_{21} + f''_{22} \cdot 2y)$$

例题 9.39 设 $u = u(x,y) \in C^2$，试证明 PDE：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

在线性变换 $\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = 3x - y \end{cases}$ 下，可化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$

注 PDE：partial differential equation 偏微分方程

证明 由题设知，$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \\ y = \frac{1}{4}(3\xi - \eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4}, \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{3}{4}, \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{-1}{4} \end{cases}$

所以，$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}$

$\Rightarrow 8\frac{\partial u}{\partial \xi} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = (\frac{\partial u}{\partial \xi})'_\eta = (\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y})'_\eta = \frac{1}{4}(\frac{\partial u}{\partial x})'_\eta + \frac{3}{4}(\frac{\partial u}{\partial y})'_\eta$

注意，要先对 x 求导，再用 x 对 ξ, η 求导

$= \frac{1}{4}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(-\frac{3}{4})) + \frac{3}{4}(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot (\frac{-1}{4}))$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$

代入原方程，即有 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$

例题 9.40 设 $\begin{cases} u = f(ux, v + y) \\ v = g(u - x, v^2 y) \end{cases}$ 确定的隐函数组为 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

求 u, v 关于 x, y 的雅可比 (Jacobi) 行列式 $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \triangleq \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

注 三阶 Jacobi 行列式：$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \triangleq \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}$

解 原方程组两边同时取全微分，$\begin{cases} du = f'_1 d(ux) + f'_2 d(v + y) \\ dv = g'_1 d(u - x) + g'_2 d(v^2 y) \end{cases}$

即 $\begin{cases} du = f'_1(xdu + udx) + f'_2(dv + dy) \\ dv = g'_1(du - dx) + g'_2(2vydv + v^2 dy) \end{cases}$

如果能把 du, dv 解出来，我们就可以知道 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y

写为线性方程组，我们用 Carmer 法则：$\begin{cases} (f'_1 \cdot x - 1)du + f'_2 dv = -(uf'_1 dx + f'_2 dy) \\ g'_1 du + (2vyg'_2 - 1)dv = g'_1 dx - g'_2 v^2 dy \end{cases}$

令 $D = \begin{vmatrix} f'_1 \cdot x - 1 & f'_2 \\ g'_1 & 2vyg'_2 - 1 \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} -(uf'_1 dx + f'_2 dy) & f'_2 \\ g'_1 dx - g'_2 v^2 dy & 2vyg'_2 - 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} f'_1 \cdot x - 1 & -(uf'_1 dx + f'_2 dy) \\ g'_1 & g'_1 dx - g'_2 v^2 dy \end{vmatrix}$

则 $du = \frac{D_1}{D}, dv = \frac{D_2}{D}$，对比 dx, dy 系数即得。

例题 9.41 由 $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ 确定了隐函数组 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$，求 du, dv

解 两边同时取全微分：$\begin{cases} F'_x dx + F'_y dy + F'_u du + F'_v dv = 0 \\ G'_x dx + G'_y dy + G'_u du + G'_v dv = 0 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

解线性方程组 $\begin{cases}F'_u du+F'_v dv=-(F'_x dx+F'_y dy)\\ G'_u du+G'_v dv=-(G'_x dx+G'_y dy)\end{cases}$ 即可。

第 11 讲：方向导数与梯度

(一)、多元函数的方向导数

记函数 u 在 M_0 处沿 $\overrightarrow{l}$ 方向的方向导数为 $\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}$

定义 9.14 (方向导数)

设 $u=f(x,y)$ 定义在 $U(M_0,\delta)$ 中，$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(M_0,\delta),\overrightarrow{l}=\overrightarrow{M_0M}=(\Delta x,\Delta y)$

$\rho=|MM_0|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},M_0(x_0,y_0)$，定义 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿 $\overrightarrow{l}$ 的方向的方向导数为

$$\lim_{|MM_0|\to0^+}\frac{f(M)-f(M_0)}{|MM_0|}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}\triangleq\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}$$

类似地，我们也可以定义三元函数的方向导数：

设 $u=(x,y,z)$ 定义在 $U(M_0,\delta)$ 中，

$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\triangleq M(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta,z_0+\rho\cos\gamma)\in U(M_0,\delta),\overrightarrow{l}=\overrightarrow{M_0M}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}\triangleq\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta,z_0+\rho\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

♣

例题 9.42 设 $u=\sqrt{x^2+y^2},M_0(0,0),\overrightarrow{l}=\overrightarrow{M_0M}$

此时 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha),\alpha\in[0,2\pi)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}=1$$

但是 $u'_x(0,0)=\left.(\sqrt{x^2+y^2})'_x\right|_{x=0}=\left.(|x|)'_x\right|_{x=0},u'_x(0,0)=\left.(\sqrt{x^2+y^2})'_y\right|_{y=0}=\left.(|y|)'_y\right|_{y=0}$ 不存在

例题 9.43 设 $u=f'_x(x_0,y_0)=A\in\mathbb{R}$

则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A\triangleq\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}\\ \lim\limits_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{-\Delta x}=-A\triangleq\left.\frac{\partial u}{\partial -\overrightarrow{l}}\right|_{M_0}\end{cases}$

即偏 x 导数存在，则沿 x 轴正负方向的方向导数均存在，但沿其它方向的方向导数皆未知

对于三元函数，设 $f'_x(x_0,y_0,z_0)=f'_x(M_0)=A\in\mathbb{R}\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}=A=f'_x(M_0),\left.\frac{\partial u}{\partial -\overrightarrow{l}}\right|_{M_0}=-A=-f'_x(M_0)$

定理 9.10

若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta,\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}=z'_x(M_0)\cos\alpha+z'_y(M_0)\cos\beta=(z'_x(M_0),z'_y(M_0))(\cos\alpha,\cos\beta)$$

即对任意方向 $\overrightarrow{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，只要函数可微，方向导数皆存在

我们也称上述 $(z'_x(M_0), z'_y(M_0))$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 处的梯度 (Gradient)，记为 $grad(z)\Big|_{M_0}$ 它是所有方向导数的基向量

证明 因为 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处可微

$\Rightarrow \Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\Delta y + o(\rho)$

两边同时除以 ρ，即 $\dfrac{\Delta z}{\rho} = z'_x(M_0)\dfrac{\Delta x}{\rho} + z'_y(M_0)\dfrac{\Delta y}{\rho} + \dfrac{o(\rho)}{\rho}$

两边同时取极限，得

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z}{\rho} = \frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta$$

定理 9.11

设 $u=f(x,y,z)$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中，$\vec{l}^{\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$(基) 已知

$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = M(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma) \in U(M_0,\delta)$

$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma = (u'_x, u'_y, u'_z)\Big|_{M_0}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) \triangleq grad(u)\Big|_{M_0}\cdot\vec{l}^{\circ}$

证明 因为 $u=u(x,y)$ 在 M_0 处可微

$\Rightarrow \Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\Delta y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}\Delta z + o(\rho)$

即 $\dfrac{\Delta z}{\rho} = u'_x(M_0)\dfrac{\Delta x}{\rho} + u'_y(M_0)\dfrac{\Delta y}{\rho} + u'_z(M_0)\dfrac{\Delta z}{\rho} + \dfrac{o(\rho)}{\rho}$

两边同时取极限，得

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma$$

对于梯度，我们有多种表示：

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = grad(u), (u'_x, u'_y, u'_z)\Big|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u\Big|_{M_0} = \nabla u\Big|_{M_0}$$

(二)、梯度的意义

$\nabla u\Big|_{M_0} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{M_0}$ 是一个向量，它的模 $\Big|\nabla u|_{M_0}\Big| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$ 为方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0}$ 的最大值，即方向导数沿着梯度方向，值最大；沿着梯度方向的逆方向，值最小，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0}\right)_{max} = \Big|\nabla u|_{M_0}\Big|, \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0}\right)_{min} = -\Big|\nabla u|_{M_0}\Big|$$

这是因为方向导数可以写为梯度与某个方向的单位向量的内积

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = grad(u)\Big|_{M_0}\cdot\vec{l}^{\circ} = \Big|grad(u)|_{M_0}\Big|\cdot|\vec{l}^{\circ}|\cos\theta$$

当二者同向，即 $\cos\theta = 1$ 时，方向导数最大，二者反向，即 $\cos\theta = -1$ 时，方向导数最小

定理 9.12

设 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right), u, v$ 皆可微，则

1. $\nabla(u\pm v) = \nabla u + \nabla v$
2. $\nabla ku = k\nabla u, k\in\mathbb{R}$

3. $\nabla(u\cdot v)=v\nabla u+u\nabla v$
4. $\nabla(\frac{u}{v})=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$
5. $\nabla(f(u))=f'(u)\nabla u$

证明 (1).$\nabla(u+v)=(\frac{\partial(u+v)}{\partial x},\frac{\partial(u+v)}{\partial y},\frac{\partial(u+v)}{\partial z})=(u'_x+v'_x,u'_y+v'_y,u'_z+v'_z)=(u'_x,u'_y,u'_z)+(v'_x,v'_y,v'_z)=\nabla u+\nabla v$

$$(4).\nabla(\frac{u}{v})=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\frac{u}{v}=(\frac{\partial\frac{u}{v}}{\partial x},\frac{\partial\frac{u}{v}}{\partial y},\frac{\partial\frac{u}{v}}{\partial z})=(\frac{u'_xv-v'_xu}{v^2},\frac{u'_yv-v'_yu}{v^2},\frac{u'_zv-v'_zu}{v^2})$$
$$=\frac{v(u'_x,u'_y,u'_z)-u(v'_x,v'_y,v'_z)}{v^2}=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$$
$$(5).\nabla f(u)=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})f(u)=(\frac{\partial f(u)}{\partial x},\frac{\partial f(u)}{\partial y},\frac{\partial f(u)}{\partial z})=(f'(u)\cdot u'_x,f'(u)\cdot u'_y,f'(u)\cdot u'_z)$$
$$=f'(u)(u'_x,u'_y,u'_z)=f'(u)\nabla u$$
□

第 12 讲：多元函数微分学的几何应用

(一)、光滑的曲面与光滑的曲线

(1). 球面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2-a=0(z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2})\Rightarrow$ 隐式曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$

称 $\begin{cases}x=x+0y\\y=0x+y\\z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\end{cases}$ 为参数式曲面，它的一般表达形式为 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}\quad(u,v)\in D$

令 $\overrightarrow{r}=(x,y,z),\overrightarrow{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，则我们可以将其写为

$$(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\Leftrightarrow\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u,v)$$

若 $\nabla F=(F'_x,F'_y,F'_z)\neq\theta$ 且 $F\in C^1(D)$，则称 $F(x,y,z)=0$ 是 D 上的光滑曲面

逐片光滑曲面：由有限片光滑曲面连接而成

(2). 空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ (交面式)$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}$ (a>0, 常数)

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt6}(3\cos t-\sin t)\\y=\frac{2a}{\sqrt6}\sin t\\z=-\frac{a}{\sqrt6}(3\cos t+\sin t)\end{cases}\quad t\in[0,2\pi)\text{，称之为单参数式}$$

令 $\overrightarrow{r}=(x,y,z),\overrightarrow{r(t)}=(x(t),y(t),z(t))$

则我们得到曲线的向径式：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad t\in I\Rightarrow\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(t),t\in I$

定义 9.15 (向量值函数的极限与导数)

若 $\overrightarrow{r'}(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))\neq\theta$，且 $x'(t),y'(t),z'(t)\in C^1(I)$

则称曲线 $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(t)$ 为 I 上的光滑曲线，称 $\overrightarrow{r'}(t)=\overrightarrow{r}(t)$ 为切向量

向量值函数 $\alpha(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ 在 t_0 处的极限与导数：

极限：设 $\beta=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 为常向量，且 $t\to t_0$ 时，$\alpha(t)\to\beta$，即

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\xrightarrow{t\to t_0}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\to\theta=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(t\to t_0)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x(t)-a\\y(t)-b\end{pmatrix}\xrightarrow{t\to t_0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x(t)-a\\y(t)-b\end{vmatrix}\xrightarrow{t\to t_0}0\Leftrightarrow\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}\xrightarrow{t\to t_0}0\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a\\ \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{t\to t_0}\alpha(t)=\beta\Leftrightarrow\lim_{t\to t_0}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{t\to t_0}x(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0}y(t)\end{pmatrix}\text{即对每一分量取极限}$$

导数：$\alpha'(t_0)\triangleq\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x(t_0)\\y(t_0)\end{pmatrix}}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\begin{pmatrix}x(t)-x(t_0)\\y(t)-y(t_0)\end{pmatrix}}{t-t_0}$

$$=\lim_{t\to t_0}\begin{pmatrix}\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\\ \dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\\ \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(t_0)\\y'(t_0)\end{pmatrix}\text{，即对每一分量求导}$$

(二)、空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线与法平面

$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}(t_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0)),\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t_0+\Delta t)=(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t),z(t_0+\Delta t))$

$\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t}=\dfrac{\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}}{\Delta t}=(\dfrac{x(t_0+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\dfrac{y(t_0+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\dfrac{z(t_0+\Delta t)-z(t)}{\Delta t})\overset{\Delta t\to 0}{=}(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))=\vec{\tau}(t_0)$

我们称 $\vec{\tau}(t_0)$ 为 Γ 在 t_0 处的切向量，切向量永远指向曲线的正向

由点向式可得，过 M_0 处的 Γ 的切线 T 的方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},(x,y,z)\in T$$

法平面：过切点 M_0 且与切线 T 垂直的平面 π，它的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0,(x,y,z)\in\pi$$

(三)、光滑曲面 $\Sigma:\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C^1D$

求曲面的法线：

若曲线在曲面上：设 $\Gamma_1:\begin{cases}x=x_1(t)\\y=y_1(t)\\z=z_1(t)\end{cases},\Gamma_2:\begin{cases}x=x_2(t)\\y=y_2(t)\\z=z_2(t)\end{cases}$ 且 $\Gamma_1,\Gamma_2\subset\Sigma$ 且都过 M_0

设 $\Sigma:F(x,y,z)=0$，则 $\begin{cases}F(x_1(t),y_1(t),z_1(t))=0\\F(x_2(t),y_2(t),z_2(t))=0\end{cases}$

两边同时取全微分，得 $\begin{cases}F'_xx'_1(t)+F'_yy'_1(t)+F'_zz'_1(t)=0\\F'_xx'_2(t)+F'_yy'_2(t)+F'_zz'_2(t)=0\end{cases}$

设 $(F'_x, F'_y, F'_z)\Big|_{M_0} \triangleq \overrightarrow{n} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\Gamma_1} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\Gamma_2} \end{cases}$

由点法式知，Σ 上点 M_0 处的切平面 π 为

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(z-z_0) = 0, (x,y,z) \in \pi$$

称过点 M_0 且垂直于切平面 π 的直线为法线 (normal line)，记为 N，它的方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}, (x,y,z) \in N$$

例题 9.44 设光滑曲线 L 为 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$，$M_0(x_0,y_0,z_0) \in L$，求过 M_0 的切线 T 与法平面 $\pi_{法}$

解 设 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) (\text{实际上，这样设就已经假设了 } \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0) \\ z = z(x) \end{cases}$

则 $\overrightarrow{\tau} = (1, y'_x(M_0), z'_x(M_0)) \neq \theta$，再让 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 两边对 x 求导

所以，$\begin{cases} F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \\ G'_x \cdot 1 + G'_y \cdot y'_x + G'_z \cdot z'_x = 0 \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = -F'_x \\ G'_y \cdot y'_x + G'_z \cdot z'_x = -G'_x \end{cases}$

由 *Cramer* 法则，$y'_x = \dfrac{\begin{vmatrix} -F'_x & F'_z \\ -G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, z'_x = \dfrac{\begin{vmatrix} F'_y & -F'_x \\ G'_y & -G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}$

所以，过 M_0 的切线 T 方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{y'_x(M_0)} = \frac{z-z_0}{z'_x(M_0)}$$

过 M_0 的法平面 $\pi_{法}$ 方程为

$$x - x_0 + y'_x(M_0)(y-y_0) + z'_x(M_0)(z-z_0) = 0$$

第 13 讲：多元函数的 Taylor 公式及其应用

(一)、复习

(1). 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，则 $\exists \delta > 0$，使 $\forall x \in U(x_0, \delta)$，有

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^n)$$

(2). 设 $f(x) \in C^{n+1}(I), x_0 \in I$，则对 $\forall x \in I$，有

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{n+1}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \theta \in (0,1)$$

(二)、二元函数 $z=f(x,y)$ 的 Taylor 公式

定义 9.16 (二元函数 $z=f(x,y)$ 的 Taylor 公式)

设 $f\in C^{n+1}(D)$，D 为凸区域，即 D 中任意两点均可用 D 中的直线连接 $M_0(x_0,y_0),Q(x_1,y_1),M(x_0+h,y_0+k)\in D$，则

$$f(x,y)=f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m}{m!}f(M_0)+\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}}{(n+1)!}f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)),\theta\in(0,1)$$

♣

证明 设 $\overrightarrow{M_0Q}//\overrightarrow{M_0M}\Leftrightarrow(x_1-x_0,y_1-y_0)//(h,k)\Leftrightarrow\frac{x_1-x_0}{h}=\frac{y_1-y_0}{k}=t\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_0+kt\\ y_1=y_0+ht\end{cases}\quad t\in[0,1]$

所以，$z=f(Q)=f(x_1,y_1)=f(x_0+kt,y_0+ht)\triangleq\varphi(t)\in C^{n+1}([0,1])$(Q 在线段 M_0M 上)

$$\varphi(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{(m)}(0)t^m}{m!}+\frac{\varphi^{(m+1)}(0+\theta(t-0))}{(n+1)!}t^{n+1}$$

特别地，$t=1$ 时，$\varphi(1)=f(x_0+h,y_0+k)\triangleq f(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}+\frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(n+1)!}$

当 $n=0,t=0$ 时，$\varphi(0)=f(x_0,y_0)=f(M_0)$

当 $n=1,t=0$ 时，$\varphi^{(1)}(0)=\varphi^{(1)}(t)\Big|_{t=0}=[f'_x(x_0+ht,y_0+kt)h+(f'_y(x_0+ht,y_0+kt)k]\Big|_{t=0}$

$$=f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k=h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}+k\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}\triangleq(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^1f(M_0)$$

当 $n=2,t=0$ 时，$\varphi^{(2)}(0)=[f''_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)h^2+f''_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)kh+f''_{yx}(x_0+ht,y_0+kt)hk+f''_{yy}(x_0+ht,y_0+kt)k^2]\Big|_{t=0}$

$$\begin{aligned}&=h^2f''_{xx}(M_0)+2hkf''_{xy}(M_0)+k^2f''_{yy}(M_0)\\&=(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_{M_0}\\&=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(M_0)\end{aligned}$$

依此类推，$\varphi^{(m)}(0)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^mf(M_0)$，$\frac{\varphi^(n+1)(\theta)}{(n+1)!}=\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}}{(n+1)!}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ □

注 · 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的泰勒展开式中，单项 $(x-x_0)^m(y-y_0)^n$ 的系数为 a，那么偏导数

$$\frac{\partial^{m+n}f(x_0,y_0)}{\partial x^m\partial y^n}=m!\cdot n!\cdot a$$

· 取 Taylor 公式的 $n=2$，则 $(\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{h^2+k^2})$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)f'_x(M_0)+(y-y_0)f'_y(M_0)+\frac{1}{2}[f''_{xx}(M_0)h^2+2f''_{xy}(M_0)hk+f''_{yy}(M_0)k^2]+o(\rho^2)$$

当 $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$ 时，M_0 为 f 的驻点，此时

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(\rho)$$

其中，$A=f''_{xx}(M_0),B=f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0),C=f''_{yy}(M_0)$

我们记 $\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\triangleq Hf(M_0)$ 为 f 在 M_0 处的 Hession(海森) 矩阵

进一步，$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{A}{2}[h^2+\frac{2B}{A}hk+\frac{C}{A}k^2]+o(\rho^2)$

$$=\frac{A}{2}[(h+\frac{Bk}{A})^2+\frac{AC-B^2}{A^2}k^2]+o(\rho^2)$$

①若 $\begin{cases} A > 0 \\ AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$，则 $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0, \forall (x,y) \in U(M_0,\rho) \Rightarrow f(M_0)$ 为 f 的极小值

②若 $\begin{cases} A < 0 \\ AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$，则 $f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0, \forall (x,y) \in U(M_0,\rho) \Rightarrow f(M_0)$ 为 f 的极大值

称①中 $Hf(M_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 为正定的，记作 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} > 0$，②中 $Hf(M_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 为负定的，记作 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} < 0$

定义 9.17 (多元函数的微分中值定理)

由二元函数的 Taylor 公式，取 $n = 0$，即有 $f(x,y) = f(M_0) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$，即

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x - x_0)f'_x(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)) + (y - y_0)f'_y(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$$

♣

(三)、例题

例题 9.45 求 $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的所有极值

解 因为 $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ 且 $\mathbb{R}^2$ 为凸区域

1° 求出 f 的所有驻点：

令 $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases}$(正规方程组)$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 得到四个驻点 $M_1(1,0), M_2(1,2), M_3(-3,0), M_4(-3,2)$

2° 对 M_1 计算 $Hf(M_1) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & -6y+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$ 极小值 $f(M_1) = f(1,0) = -5$

对 M_2 计算 $Hf(M_2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 且 $\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 < 0$，此时 $f(x,y) - f(M_2)$ 不保号，所以不是极值

对 M_3 计算 $Hf(M_3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ 且 $\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -72 < 0$，此时 $f(x,y) - f(M_2)$ 不保号，所以不是极值

对 M_4 计算 $Hf(M_4) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ 极大值 $f(M_2) = f(-3,2) = 31$

推广：$f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ s \end{pmatrix} + o(\rho^2)$

第 14 讲：函数的极值与最值

(一)、管中窥豹

讨论下列五个二元函数在原点处的极值与最值

(1).$z = x^2 + y^2$　(2).$z = \sqrt{x^2 + y^2}$　(3).$z = x^3 + y^3$　(4).$z = x^4 + y^4$　(5).$z = xy$

解

(1).$f(x,y) = x^2 + y^2, f(0,0) = 0, O(0,0)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的内点，且 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall (x,y) \in U(0,\delta)$，总有

$$f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 \geq 0(\text{保号})$$

$\Rightarrow f(0,0)=0$ 为 f 的极小值，也是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值，且 $\begin{cases} f_x'(0,0)=2x\Big|_{(0,0)}=0 \\ f_y'(0,0)=2y\Big|_{(0,0)}=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ 为驻点

(2).$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2=x^2+y^2, f(0,0)=0$，且 $\exists\delta>0$，对 $\forall(x,y)\in U(O,\delta)$，总有

$$f(x,y)-f(0,0)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$$

$\Rightarrow f(0,0)=0$ 为 f 的极小值，也是 f 的最小值

但从 $\begin{cases} f_x'(0,0)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(0,0)}\neq 0 \\ f_y'(0,0)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(0,0)}\neq 0 \end{cases}$ 知，$O(0,0)$ 非驻点

(3).$f(x,y)=x^3+y^3, f(0,0)=0$，且 $\forall\delta>0$，在 U 中，总有

$$f(x,y)-f(0,0)=x^3+y^3(\text{不保号})$$

$\Rightarrow f(0,0)$ 不是极值，但从 $\begin{cases} f_x'(0,0)=3x^2\Big|_{(0,0)}=0 \\ f_y'(0,0)=3y^2\Big|_{(0,0)}=0 \end{cases}$ 知，$O(0,0)$ 为驻点

(4). $f(x,y)=x^4+y^4, f(0,0)=0$，且 $\exists\delta>0$，对 $\forall(x,y)\in U(O,\delta)$，总有

$$f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^4\geq 0(\text{保号})$$

$\Rightarrow f(0,0)=0$ 为 f 的极小值，也是 f 的最小值，且 $\begin{cases} f_x'(0,0)=4x^3\Big|_{(0,0)}=0 \\ f_y'(0,0)=4x^3\Big|_{(0,0)}=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ 为驻点

对比 (1)(4)，我们考虑其二阶偏导

在 (1) 中，$f_{xx}''=2=A>0, f_{xy}''=0=B, f_{yy}''=2=C>0 \Rightarrow Hf(M_0)\triangleq\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}>0$

即 $f(0,0)=0$ 为极小值

在 (4) 中，$f_{xx}''=12x^2=A>0, f_{xy}''=0=B, f_{yy}''=12y^2=C>0 \Rightarrow Hf(M_0)\triangleq\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

因此，海森矩阵的行列式为零时，极值不确定

(5).$f(x,y)=xy, f(0,0)=0, f(x,y)-f(0,0)=xy$ 不保号 $\Rightarrow f(0,0)=0$ 非极值

从 $\begin{cases} f_x'=y=0 \\ f_y'=x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases} \Rightarrow M_0(x_0,y_0)=O(0,0)$，此时 $\begin{cases} A=f_{xx}''(M_0)=0 \\ B=f_{xy}''(M_0)=1 \\ C=f_{yy}''(M_0)=0 \end{cases}$

而 $\Delta=AC-B^2=-1<0$，非极值

(二)、多元函数极值存在的条件

定理 9.13 (极值存在的必要条件)

可微函数 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 有极值的必要条件：$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ 即 M_0 是 f 的驻点

注 推广到三元函数也成立，即可微函数的极值点一定是驻点

证明 固定 $y=y_0$，则一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处有极值，且 $f_x'(x,y_0)$ 存在，根据费马定理，$f_x'(x_0,y_0)=0$

同理，固定 $x=x_0$，可以得到 $f_y'(x_0,y_0)=0$ □

定理 9.14 (极值存在的充分条件)

二阶连续可微函数 $f(x,y)$ 在驻点处有极值的充分条件:

$$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}>0\text{或}<0\text{，即正定或负定}$$

证明 由 Taylor 公式，$f(x,y)=f(M_0)+f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)+\frac{1}{2!}(Ah^2+2hkB+k^2c)+o(\rho^2)$

将 $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$ 代入，化简得 $f(M)-f(M_0)=\frac{A}{2}[(h+\frac{Bk}{A})^2+\frac{AC-B^2}{A^2}k^2]+o(\rho^2)$ □

接下来我们对多元函数的海森矩阵进行介绍

设 $f\in C^2,u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),n\in N^*$，若 $\exists M_0$，使得 $\forall i,f'_{x_i}(M_0)=0$，且

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(M_0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0 & \cdots & x_n-x_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n}\\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_0\\ x_2-x_0\\ \cdots\\ x_n-x_0\end{pmatrix}$$

当 $Hf(M_0)>0$(正定) 时，$f(M_0)$ 为极小值；当 $Hf(M_0)<0$(负定) 时，$f(M_0)$ 为极大值

特别地，$n=1$ 时，$u=f(x_1),f'_{x_1}(x_0)=0\Rightarrow Hf(M_0)=\begin{pmatrix}a_{11}\end{pmatrix}=f''_{11}(x_0)$，这正是我们先前学过的单变量函数的极值判断方法

(三)、例题

例题 9.46 证明不等式 $\frac{x^2+y^2}{4}\le e^{x+y-2}(x,y\ge 0)$

证明 等价于证明 $f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)}{e^{x+y}}$ 在 $x\ge 0,y\ge 0$ 处有最大值 $\frac{4}{e^2}$

我们先求出 $f(x,y)$ 在 $D:\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$ 内部的所有驻点，令 $\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}$

$\begin{cases}2x-(x^2+y^2)=0\\ 2y-(x^2+y^2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=1\end{cases}$ 内点 $M_2(1,1)$ 为驻点，除此之外，我们还要考虑边界点

当 $y=0$ 时，$f(x,0)=x^2e^{-x}$ 在 $(0,+\infty)$ 中有驻点 $x=2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=0$

当 $x=0$ 时，$f(0,y)=y^2e^{-y}$ 在 $(0,+\infty)$ 中有驻点 $y=2$，$\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=0$

且 $f(0,0)=0,f(2,0)=\frac{4}{e^2},f(0,2)=\frac{4}{e^2},f(1,1)=\frac{2}{e^2}$

$f(x)_{max}=\frac{4}{e^2}$，即 $\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}\le\frac{4}{e^2}$

例题 9.47 求方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的极值与最值

例题 9.48 求方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值与最值

解 法 (I)：用初等数学的方法，配方得

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=16$$

即 $\exists\delta_1>0$，在 $z=2+\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}\le 2+\sqrt{16}=6$，当且仅当 $x=1,y=-1$ 时，z 取得最大值 6

$\exists\delta_2>0$，在 $z=2-\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}\ge 2-\sqrt{16}=-2$，当且仅当 $x=1,y=-1$ 时，z 取得最小值 -2

法 (II)：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10\Rightarrow\begin{cases}F'_x=2x-2\\ F'_y=2y+2\\ F'_z=2z-4\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{2x-2}{2z-4} = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \\ z_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{2y+2}{2z-4} = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$$

此时，将 $x_0 = 1, y_0 = -1$ 代入方程解得 $z_1 = 6, z_2 = -2$，因此我们得到两个驻点 $M_1(1,-1,6), M_2(1,-1,-2)$

计算海森矩阵：$A_1 = z''_{xx}(M_1) = -\dfrac{1}{4}, B_1 = z''_{xy}(M_1) = 0, C_1 = z''_{yy}(M_1) = -\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow Hf(M_1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow z(M_1) = 6 \text{ 为极大值，也是最大值}$$

对 M_2 进行相同的验证可得 $z(M_2) = -2$ 为极小值，也是最小值

第 15 讲：多元函数的条件极值及应用

(一)、条件极值的 Lagrange 乘数法

对比下列两个问题：

(无约束条件) 求 $z = f(x,y)$ 在凸区域中的极 (最) 值

(有约束条件) 求目标函数 $z = f(x,y)$ 在条件约束 $\varphi(x,y) = 0$ 下的极 (最) 值，其中 $f, \varphi \in C^2(D)$，D 为凸区域

注 n 元函数求条件极值时，最多有 n-1 个约束条件

解 设 $M_0(x_0,y_0)$ 是 $z = f(x,y)$ 的一个极值点，则 $f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0$

设 $\varphi(M_0) = \varphi(x_0,y_0) = 0, \varphi'_y(M_0) \neq 0$ (这意味着存在隐函数 $y = \varphi(x)$)

则条件 $\varphi(x,y) = 0$ 隐含着函数 $y = \varphi(x)$，且 $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x_0} = (-\dfrac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)})\Big|_{M_0} = -\dfrac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}$

因此我们得到 $z = f(x,\varphi(x))$ 在 x_0 处有极值，且 f 可微，由费马定理

$$z'(x_0) = 0 \Rightarrow f'_x(x_0,\varphi(x_0)) + f'_y(x_0,\varphi(x_0))\varphi'(x_0) = 0$$

$$f'_x(x_0,\varphi(x_0)) + f'_y(x_0,\varphi(x_0))(-\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}) = 0$$

我们令 $\dfrac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = -\lambda$，则 $f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0 \end{cases}$ (必要条件)

我们设 $Lagrange$ 函数 $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), (x,y) \in D$

令 $\begin{cases} L'_x(M_0) = 0 \\ L'_y(M_0) = 0 \\ L'_\lambda(M_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 求出 L 的驻点，同时也是 f 的驻点 (但不一定是极值点)

(二)、例题

例题 9.49 将长为 $a(a > 0)$ 的铁链分成 n 段 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求 $u = x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值，并证明平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq (\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n})^{\frac{1}{2}}$$

解 目标函数 $u = x_1x_2\cdots x_n \in C^2(\mathbb{R}^n)$，条件 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$

作 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda) = x_1x_2\cdots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a)$

令各偏导为零，则 $\begin{cases} L'_{x_1} = x_2x_3\cdots x_n + \lambda = 0 \\ L'_{x_2} = x_1x_3\cdots x_n + \lambda = 0 \\ \qquad\vdots \\ L'_{x_n} = x_1x_1\cdots x_{n-1} + \lambda = 0 \\ L'_{\lambda} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$ 对前 n 个方程进行处理，得 $\begin{cases} x_1x_2\cdots x_n = -\lambda x_1 \\ x_1x_2\cdots x_n = -\lambda x_2 \\ \qquad\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n = -\lambda x_n \end{cases}$

因为 $\lambda \neq 0$，所以 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

代入最后一个方程得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$，得到驻点 $M_0(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \cdots, \frac{a}{n})$

而在边界处函数值为 0，且驻点唯一，即为所求极大值点，同时也是最大值，即

$$u_{max} = \frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n}\cdots\frac{a}{n} = (\frac{a}{n})^n \geq x_1x_2\cdots x_n \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

另一方面，我们将自变量改写为 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}$，可以得到

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}$$

化简得

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

另一方面，由柯西不等式 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(1^2+1^2+\cdots+1^2) \geq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$

化简得

$$(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n})^{\frac{1}{2}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

□

例题 9.50 求 $z = xy$ 在条件 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的最值

解 法 (I)：使用拉格朗日乘数法，设 $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1]$

令 $\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda(x-1) \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{4\lambda}{4\lambda^2 - 1} \\ y = \frac{-2\lambda}{4\lambda^2-1} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

得到三个驻点 $M_1(0,0), M_2(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), M_3(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$，求得函数值 $z(M_1) = 0, z(M_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, z(M_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

因为 $z = xy$ 在有界闭集 $D = \{(x,y)|(x-1)^2 + y^2 = 1\}$ 上连续，而函数在有界闭集上必能取得最大值和最小值，且极 (最) 值在驻点中取得，即最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，最小值 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

法 (II)：$y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2} \Rightarrow z = \pm x\sqrt{1-(x-1)^2} = \pm\sqrt{2x^2 - x^4}$，当做一元函数求极值即可

但是这种方法不通用，一般情况下没法完全用一个变量表示另一个变量。

例题 9.51 求 $O(0,0,0)$ 到曲面 $\Sigma : (x-y)^2 - z^2 = 1$ 的最短距离 d

解 目标函数 $d^2 = |OQ|^2$，$Q(x,y,z)$ 是 Σ 上任一点，$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

条件：

$$Q \in \Sigma \Leftrightarrow (x-y)^2 - z^2 = 1$$

作 $L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1]$

令 $\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ L'_y = 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \\ L'_z = 2z - 2z\lambda = 0 \\ L^\lambda_z = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$ 由 $L'_z = 0$ 知，$2z(1-\lambda) = 0$

①若 $\lambda=1$，则 $\begin{cases}2x+2(x-y)=0\\2y-2(x-y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

代入曲面 Σ，$-z^2=1$，矛盾！

②若 $z=0$，则 $\begin{cases}x=-\lambda(x-y)\\y=\lambda(x-y)\\(x-y)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\\z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\\z=0\end{cases}\Rightarrow$ 驻点 $M_1(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),M_2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

我们代入计算 $|OM_1|^2=|OM_2|^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d_{min}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

例题 9.52 求 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 $\pi:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$ 与三个坐标面围成的四面体 Ω 的体积 $V(\Omega)$ 的最小值

解 因为 $V(\Omega)=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2}{x_0}\dfrac{b^2}{y_0}\dfrac{c^2}{z_0}=\dfrac{a^2b^2c^2}{6}\dfrac{1}{x_0y_0z_0}$，我们只需求 $x_0y_0z_0$ 的最大值

使用基本不等式，因为 $\sqrt[3]{\dfrac{x_0^2}{a^2}\dfrac{y_0^2}{b^2}\dfrac{z_0^2}{c^2}}\le\dfrac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}{3}=\dfrac{1}{3}$

$x_0y_0z_0=\sqrt{x_0^2y_0^2z_0^2}=abc\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}\dfrac{y_0^2}{b^2}\dfrac{z_0^2}{c^2}}\le abc\cdot(\dfrac{1}{3})^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{27}}abc$

即 $V(\Omega)_{min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$

第 16 讲：多元函数微分学复习与小结

(一)、微分学关系图

先看几个例子：

(1).$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 有极限且连续，但不可偏导 $\Rightarrow f$ 不可微

但该函数在原点沿着每个方向的方向导数均存在，值恒为 1，即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial\vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\sin\alpha)}{\rho}=1$$

(2).$z=f(x,u)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},x^2+y^2>0\\0,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可偏导：$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$

但无极限，不连续 $\Rightarrow f$ 不可微

对比 (1)(2)，我们可以知道，多元函数中可偏导与连续没有必然联系

(3). 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中偏导存在且有界，则 $f(x,y)$ 在 D 中连续

证明 对 $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$，设 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$，则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$$

使用微分中值定理：$\Delta z=f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\quad\theta_1,\theta_2\in(0,1)$

令 $\Delta x,\Delta y\to0$，因为偏导有界，则

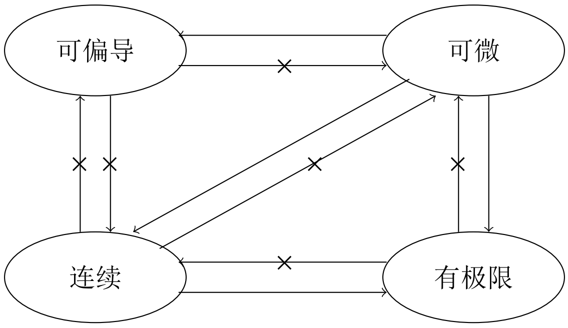
$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)<M_1\Delta x+M_2\Delta y\to0$$

即 f 在 D 中连续 $\Leftrightarrow f\in C(D)$ □

注 若 $f_x'(M_0)$ 存在，则函数沿着 x 轴正负方向的方向导数均存在，即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial i}\right|_{M_0}=f_x'(M_0),\left.\dfrac{\partial z}{\partial(-i)}\right|_{M_0}=-f_x'(M_0)$

若 $f_y'(M_0)$ 存在，则函数沿着 y 轴正负方向的方向导数均存在，即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial j}\right|_{M_0}=f_y'(M_0),\left.\dfrac{\partial z}{\partial(-j)}\right|_{M_0}=-f_y'(M_0)$

综上，我们可以总结可偏导，可微，连续，有极限之间的关系如下：



注 (1). 若一个函数的各个偏导数均存在且连续，我们可以推出该函数可微

(2). 若一个函数的各个偏导数均存在且有界，我们可以推出该函数连续

(二)、例题

例题 9.53 求显式曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)\in D$ 的切平面 π 的方程，其中 D 为显区域，且 $f\in C^1(D)$

解 令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z,(x,y)\in D$，则 $F\in C^1(\Omega)$

且过 $Q_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的切平面的法向量

$$\vec{n}(Q_0)=\nabla F\Big|_{Q_0}=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{Q_0}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)\neq\theta$$

由平面的点法式知，$\pi: f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(y-y_0)+(-1)(z-z_0)=0$

注 (1). 当 ρ 较小时，曲面的全增量可以用切平面的全增量来代替 (局部线性化)，即

$$\Delta z_{曲}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+o(\rho)\approx f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y=\Delta z_{切}$$

(2). 由梯度求出来曲面在某点的法向量为在该点的外法向量，即指向曲面外侧

例题 9.54 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是二次曲面 $\Sigma: ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$ 上任意取定的一点，试证明过 M_0 的切平面 $\pi_{切}$ 为

$$\pi_{切}: axx_0+byy_0+czz_0+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f\frac{z+z_0}{2}+g=0$$

其中 a,b,c,d,e,f,g 为常数，且 $(a,b,c)\neq\theta$

证明 因为 $\vec{n}(M_0)=\nabla F\Big|_{M_0}$，其中 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g$

所以 $\vec{n}(M_0)=(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))=(2ax_0+d,2by_0+e,2cz_0+f)$

由点法式，

$$\pi_{切}: (2ax_0+d)(x-x_0)+(2by_0+e)(y-y_0)+(2cz_0+f)(z-z_0)=0$$

展开得

$$2ax_0x+2by_0y+2cz_0z+dx+ey+fz=(2ax_0^2+2by_0^2+2cz_0^2+2dx_0+2ey_0+2fz_0+2g)-dx_0-ey_0-fz_0-2g$$

即

$$\pi_{切}: axx_0+byy_0+czz_0+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f\frac{z+z_0}{2}+g=0$$

□

例题 9.55 求 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在曲线 $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿内法向 $\vec{n}$ 的方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial\vec{n}}\Big|_{M_0} 及 (\frac{\partial z}{\partial\vec{l}}\Big|_{M_0})_{max}, (\frac{\partial z}{\partial\vec{l}}\Big|_{M_0})_{min}$$

解 (1).L 在 M_0 的外法向 $\vec{n}_{外}=\nabla z\Big|_{M_0}=(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2})\Big|_{M_0}=(\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{b})=\frac{\sqrt{2}}{ab}(b,a)$

因此，我们取内法向 $\vec{n}_{内}=(-b,-a)\Rightarrow\vec{n}^{\circ}_{内}=(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

则 $\left.\frac{\partial l}{\partial \overrightarrow{n}}\right|_{M_0}=z_x'(M_0)\cos\alpha+z_y'(M_0)\cos\beta=(z_x'(M_0),z_y'(M_0))(\cos\alpha,\cos\beta)=\nabla z\Big|_{M_0}\cdot\overrightarrow{n}^\circ_{内}$

(2). 方向导数的最大值与最小值：$\left.\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_{M_0}=\nabla z\Big|_{M_0}\cdot\overrightarrow{l}^\circ=|\nabla z\Big|_{M_0}||\overrightarrow{l}^\circ|\cos\theta$

当梯度与方向同向时，方向导数取得最大值，即为梯度的模长；当梯度与方向反向时，方向导数取得最小值，即为梯度的模长的相反数

例题 9.56 已知 $\Sigma:\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$，在 Σ 上求一点 $Q(x,y,z)$，使 Q 到平面 $\pi:x+y+2z-9=0$ 的距离最远及最近

解 法 (I): 几何法，找到与平面 π 平行且与椭球面相切的两个平面即可

过 Q 点的切平面为 $\pi_{切}:\frac{x_0x}{4}+y_0y+z_0z=1\Rightarrow\overrightarrow{n}_{切}=(\frac{x_0}{4},y_0,z_0)//(1,1,2)$

所以，$\frac{0.25x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0}{2}$，代入 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2=1$，解得 $\begin{cases}x_0=\pm\frac{4}{3}\\ y_0=\pm\frac{1}{3}\\ y_0=\pm\frac{2}{3}\end{cases}$ 即 $Q_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}),Q_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

法 (II): 代数法，条件极值，使用 Lagrange 乘数法，求 Q 到 π 的距离平方的极值即可，$d^2=\frac{(x_0+y_0+2z_0-9)^2}{1^2+1^2+2^2}$

设 $L(x,y,z,\lambda)=(x+y+2z-9)^2+\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2+z^2-1)$

则 $\begin{cases}L_x'=2(x+y+2z-9)+\frac{\lambda x}{2}=0\\ L_y'=2(x+y+2z-9)+2\lambda y=0\\ L_z'=4(x+y+2z-9)+2\lambda z=0\\ L_\lambda'=\frac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\\ z=-\frac{2}{3}\end{cases}$

经计算，$M_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 到平面 $x+y+2z-9=0$ 的距离 $d_1=\sqrt{6}$

$M_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 到平面 $x+y+2z-9=0$ 的距离 $d_2=2\sqrt{6}$

例题 9.57 求证：$(\frac{x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m}{n})^{\frac{1}{m}}\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}(x_1,\cdots,x_n>0)$

证明 令 $x_1+\cdots+x_n=a$，使用 n 元平均值不等式

$$(\frac{x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m}{n})^{\frac{1}{m}}\geq(\sqrt[n]{x_1^mx_2^m\cdots x_n^m})^{\frac{1}{m}}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\sqrt[n]{\frac{a}{n}\frac{a}{n}\cdots\frac{a}{n}}=\frac{a}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

当且仅当 $x_1^m=x_2^m=\cdots=x_n^m$ 时，即 $x_1=x_2=\cdots=x_m$ 时取等

好题鉴赏

例题 9.58 设 $u=u(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且满足方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，且 $u(x,2x)=x,u_1'(x,2x)=x^2$，求 $u_{11}''(x,2x)\quad u_{12}''(x,2x)\quad u_{22}''(x,2x)$

解 对 $u(x,2x)=x$ 两边求导，得

$$u_1'(x,2x)+u_2'(x,2x)\cdot\frac{\partial(2x)}{\partial x}=1\Rightarrow u_1'(x,2x)+2u_2'(x,2x)=1$$

由题设，$u_1'(x,2x)=x^2$，代入上式得 $u_2'(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$

接下来我们对 $u_1'(x,2x)=x^2,u_2'(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$ 两边同时对 x 求导，即

$\begin{cases}2x=u_{11}''(x,2x)+2u_{12}''(x,2x)\\ -x=u_{21}''(x,2x)+2u_{22}''(x,2x)\end{cases}$，由题设知 $\begin{cases}u_{11}''(x,2x)=u_{22}''(x,2x)\\ u_{12}''(x,2x)=u_{21}''(x,2x)(二阶偏导连续)\end{cases}$

解得 $u_{11}''(x,2x)=u_{22}''(x,2x)=-\frac{4}{3}x$，$u_{12}''(x,2x)=\frac{5}{3}x$

注 我们平时求导时，用 u_1' 来简写对第一分量求偏导，但如果第一分量不同时，需要完整写出以防混淆

如 $u(x,y)$ 与 $u(y,x)$ 的 u_1' 分别为 $u_1'(x,y)$ 与 $u_1'(y,x)$

例题 9.59 设函数 $f=f(x,y)$ 满足 $f(x,x^2)\equiv 1$，若 $f_y'(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$

解 因为 $f_y'(x,y)=x^2+2y$，两边同时对 y 积分得

$$f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x)$$

又因为 $f(x,x^2)\equiv 1$，代入得 $2x^4+\varphi(x)=1\Rightarrow\varphi(x)=1-2x^4$

所以，$f(x,y)=x^2+2y-2x^4+1$

注 在求 y 的偏导数时，把自变量 x 当做常数，所以积分后要加上含有 x 的任意函数 $\varphi(x)$，而不是任意常数 C

例题 9.60 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的可微函数，且 $f(1,1)=0$，且对 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，都有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\le|x-y|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le|x-y|$$

求证，$|f(2,0)\le 2|$

证明 依题意，取 $y=x$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$

因此，由微分中值理知，

$$f(x,x)-f(1,1)=f_x'(\theta,\theta)(x-1)+f_y'(\theta,\theta)(y-1)=0,\theta\in[1,x]$$

即 $f(x,x)=f(1,1)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0,0)=0$

因此，

$$|f(2,0)|=|f(2,0)-f(0,0)|=|\int_0^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)dx|\le\int_0^2|\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)|dx\le\int_0^2 xdx=2$$

注 当只有一个自变量在变化时，我们可以将多元函数的差写为偏导的积分，即

$$f(x_0,a)-f(x_0,b)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)dy,f(a,y_0)-f(b,y_0)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)dx$$

若各偏导均恒为零，则 $f=const$

例题 9.61 设函数 $u=f(x,y,z)$ 在凸的开区域 Ω 上可微 (开区域：任意两点的连线段仍在区域内)，并且存在正数 $M>0$，使 $|grad(u)|\le M$，试证明对 Ω 中任意两点 A,B，均有

$$|f(A)-f(B)|\le M\cdot\rho(A,B)$$

证明 设 $A(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z),B(x_0,y_0,z_0)$，则 $\rho(A,B)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$

设 $\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z),t\in[0,1]$

则 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且

$$|f(A)-f(B)|=|\varphi(1)-\varphi(0)|=\varphi'(\xi)=|f_x'(\xi)\Delta x+f_y'(\xi)\Delta y+f_z'(\xi)\Delta z|,0\le\xi\le 1$$

其中，$M_\xi(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z),\xi\in[0,1]$，即

$$|f(A)-f(B)|=|gradf(M_\xi)\cdot(\Delta x,\Delta y,\Delta z)|\le|gradf(M_\xi)|\cdot|(\Delta x,\Delta y,\Delta z)|\le M\cdot\rho(A,B)$$

□

例题 9.62 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有直到二阶的所有连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$$

求证：$f(x,y)$ 不可能在 D 内取得极大值

证明 反证法，假设 $f(x,y)$ 在 D 内某点 (x_0,y_0) 取得极大值，则一元函数 $f(x,y_0),f(x_0,y)$ 分别在 $x=x_0,y=y_0$ 处取得极大值，而由极值点的性质知

$$f_{xx}''(x_0,y_0)\le 0,f_{yy}''(x_0,y_0)\le 0$$

这与题设 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ 矛盾！故 $f(x,y)$ 不可能在区域 D 内取得极大值 □

例题 9.63 设在 $\mathbb{R}^3$ 上定义的 $u=f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续，试证明：u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续

证明 分析：要证明 u 连续，即需要对 $|f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y,z)|$ 进行估算，为了充分利用题目条件，我们引入两个中间函数值 $f(x,y+k,z+l),f(x,y,z+l)$

$$|f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y,z)|\le|f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y+k,z+l)|+|f(x,y+k,z+l)-f(x,y,z+l)|$$
$$+|f(x,y,z+l)-f(x,y,z)|$$

对上式第一部分，由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在闭区间 $(x,x+h)$ 上的连续性知，$\exists C_1>0,s.t.\dfrac{\partial f}{\partial x}<C_1$
所以
$$|f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y+k,z+l)|=\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 h,y+k,z+l)\cdot h<C_1h$$

对上式第二部分，由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在闭区间 $(y,x+k)$ 上的连续性知，$\exists C_2>0,s.t.\dfrac{\partial f}{\partial y}<C_2$
所以
$$|f(x,y+k,z+l)-f(x,y,z+l)|=|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_2 k,z+l)\cdot k|<C_2k$$

对上式第三部分，因为 $f(x,y,z)$ 关于 z 连续，所以对 $\forall\dfrac{\varepsilon}{3}>0,\exists\delta_0>0$，当 $|(z+l)-z|\le\delta_0$ 时，有
$$|f(x,y,z+l)-f(x,y,z)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

取 $\delta=\min\{\dfrac{\varepsilon}{3C_1},\dfrac{\varepsilon}{3C_2},\delta_0,1\}$，则当
$$|x-x_0|<\delta,|y-y_0|\le\delta,|z-z_0|\le\delta$$
就有
$$|f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y,z)|<\varepsilon$$

□

第十章：多变量函数的重积分

第 17 讲：二重积分 (double integal)

(一)、概念

1. 从计算曲边梯形的面积产生定积分：$\int_a^b f(x)dx$
2. 从计算曲顶柱体的体积 $V(\Omega)$ 产生二重积分：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

定义 10.18 (二重积分)

设 D 是 xoy 平面的有界闭区域，$z=f(x,y)$ 在 D 上有定义、有界，则以 $z=f(x,y)$ 为顶，以区域 D 为底的曲顶柱体 Ω 的体积定义为

$$V(\Omega) \triangleq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

♣

计算 $V(\Omega)$ 的“八字方针”

1. 分割：将 D 分割成 n 个部分

$$D = D_1 \sqcup D_2 \cdots \sqcup D_n$$

设 D_i 的面积为 $\Delta\sigma_i$，直径为 $d_i, i=1,2,\cdots,n$，令 $\lambda = \max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$

2. 近似：任取 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$，则体积通过局部线性化可近似于一个柱体的体积，即

$$V_(D_i) = f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

3. 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \approx V(\omega)$$

4. 极限：对求和取极限，令 $\lambda\to 0$，假如极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在且唯一，则将上述极限定义为 $V(\Omega) \triangleq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

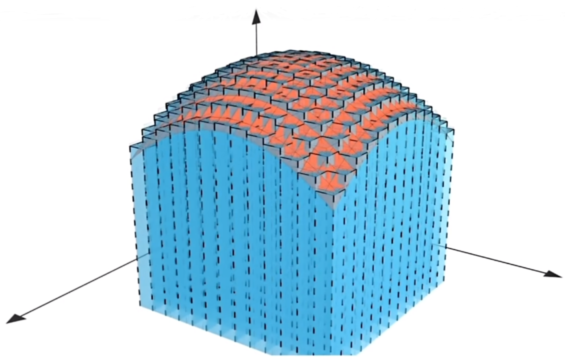


图 10.4: 二重积分

注

1. 二重积分符号中的 $d\sigma$ 为面积元素，$f(x,y)$ 为被积函数

2. 二重积分还可以简写为 $\int_D f$
3. 若二重积分有定义，则区域 D 有界
4. 二重积分的物理意义：设平面薄片 D 的面密度为 $z = f(x,y)$，有界且连续，则平面薄片 D 的总质量为
$$M = \iint_D f(x,y)d\sigma$$
5. 若二重积分有定义，我们称 f 在 D 中黎曼可积，记 $f \in R(D)$($R(D)$ 是一个线性空间)
6. $f \in C(D) \Rightarrow f \in R(D)$，反之未必
7. 若被积函数恒为 1，即 $f(x,y) \equiv 1$ 则二重积分的大小为区域 D 的面积

(二)、二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的性质

性质

1. 若 $f \in R(D)$，则 f 在 D 中必有界，反之未必

反例：设 $D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } (x,y) \text{ 是区域 } D:[0,1]\times[0,1] \text{ 中的二维有理点 (即 } x,y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

则
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \begin{cases} S(D) > 0 & f(\xi_i,\eta_i) = 1, \forall i \\ 0 & else \end{cases}$$

2. 设 $f,g \in R(D)$，c_1, c_2 为常数，则
$$\iint_D (c_1 f + c_2 g)d\sigma = c_1\iint_D f d\sigma + c_2\iint_D g d\sigma$$

证明 $LHS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(c_1 f(\xi_i,\eta_i) + c_2 g(\xi_i,\eta_i))\Delta\sigma_i$
$$= c_1\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + c_2\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$
$$= c_1\iint_D f d\sigma + c_2\iint_D g d\sigma = RHS$$
□

3. 区域的可加性：
$$\iint_{D_1\sqcup D_2} f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma$$
4. 保序性：设 $f,g \in R(D)$，且 $f(x,y) \geq g(x,y), \forall(x,y) \in D$，则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq \iint_D g(x,y)d\sigma$$
5. 若 $f \in R(D)$，则 f 在 D 中必有界 (有界是黎曼可积的必要条件)，即
$$\exists M > 0, s.t. |f(x,y)| \leq M, \forall(x,y) \in D \Leftrightarrow -M \leq f(x,y) \leq M$$
因此，任意一个黎曼可积函数的积分都可以写为两个非负黎曼可积函数之差，即
$$\iint_D f d\sigma = \iint_D (f+M)d\sigma - \iint_D M d\sigma$$
6. 若 $f \in R(D)$，则 f 在 D 中有界 $\Rightarrow f$ 在 D 中有上下确界 A,B，即
$$A \leq f(x,y) \leq B$$

由二重积分的保序性知，同时积分得

$$\iint\limits_D A d\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \leq \iint\limits_D B d\sigma$$

由此我们可以得到二重积分的估值公式

$$B \cdot S(D) \leq \iint\limits_D f d\sigma \leq A \cdot S(D)$$

7. 二重积分中值定理

定理 10.15 (二重积分中值定理)

设 $f \in C(D)$，则必有点 $(\xi_0, \eta_0) \in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = f(\xi_0, \eta_0) \cdot S(D)$

证明 因为 $f \in C(D)$，所以 f 在 D 中有最小值 m，最大值 M，即 $m \leq f(x,y) \leq M, \forall (x,y) \in D$
同时积分得 $\iint\limits_D m d\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \leq \iint\limits_D M d\sigma$，即

$$m \cdot S(D) \leq \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \leq M \cdot s(D) \Rightarrow m \leq \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \leq M$$

由 f 在 D 中的介值性，$\exists (\xi_0, \eta_0) \in D$，使

$$f(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y) d\sigma$$

□

8. 绝对可积性：

$$|\iint\limits_D f(x,y) d\sigma| \leq \iint\limits_D |f(x,y)| d\sigma$$

证明 因为 $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$，所以同时求二重积分得

$$-\iint\limits_D |f(x,y)| d\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \leq \iint\limits_D |f(x,y)| d\sigma \Rightarrow |\iint\limits_D f(x,y) d\sigma| \leq \iint\limits_D |f(x,y)| d\sigma$$

□

(三)、例题

例题 10.64 设 $f \in R(D)$，且 D 为 $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases}$，试证明

$$\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy) dx \triangleq \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy (\text{把 x 看作常量，先对 y 积分})$$

证明 取定 $[a,b]$ 中的 x_0，则平面 $x = x_0$ 与曲顶柱体相交，交面是一个曲边梯形，因此我们可以先求曲边梯形的面积，它的大小为

$$\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$$

再对 x 从 a 累加到 b，得到曲顶柱体的体积

$$V(\Omega) = \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy) dx \triangleq \iint\limits_D f(x,y) d\sigma$$

□

注 同理，我们可以把 y 看作常量，先对 x 积分：若 $f \in R(D)$，且 D 为 $\begin{cases} \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d (\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx)dy$$

例题 10.65 计算 $I = \iint\limits_D \sin(x+y)d\sigma$，D 为由 $x=0, y=0, x+y=\pi$ 围成的区域

解 法 (I)：视 D 为上下型区域 (先 y 后 x)，则

$$I = \int_0^\pi (\int_0^{\pi-x} \sin(x+y)dy)dx = \int_0^\pi (-\cos(x+y)\Big|_0^{\pi-x})dx = \int_0^\pi (1+\cos x)dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$$

法 (I)：视 D 为左右型区域 (先 x 后 y)，则

$$I = \int_0^\pi (\int_0^{\pi-y} \sin(x+y)dx)dy = \int_0^\pi (-\cos(x+y)\Big|_0^{\pi-y})dy = \int_0^\pi (1+\cos y)dy = \pi + \sin y\Big|_0^\pi = \pi$$

例题 10.66 求 $I = \iint\limits_D \frac{\sin y}{y}d\sigma$，D 为 $y=x, y^2=x$ 围成的区域

解 因为 $u = \frac{\sin y}{y}$ 的原函数不是初等函数，所以本题不可以先对 y 积分，所以只能先 x 后 y

$$I = \iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dx = \int_0^1 (\int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y}dx)dy = \int_0^1 (\frac{\sin y}{y}(y-y^2))dy = \int_0^1 \sin y(1-y)dy = 1 - \sin 1$$

第 18 讲：二重积分的计算与证明

(一)、复习

二重积分的黎曼和

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

①当用矩形网格法分割 D 时，$d\sigma = dxdy$, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} \text{D 是上下型时} & \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy)dx \\ \text{D 是左右型时} & \int_c^d (\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx)dy \end{cases}$$

特别地，若 D 是矩形且 $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y), a \le x \le b, c \le y \le d$ 时，有

$$\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy$$

此时，二重积分可以化为两个定积分的乘积

②当用蜘蛛网格法分割 D 时 (极坐标系)，$d\sigma = dxdy = rdrd\theta$，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，此时有

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

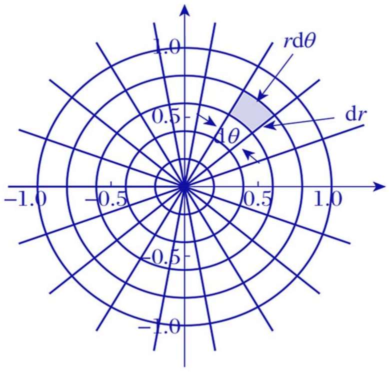


图 10.5: 极坐标下的分割

注 ①直角坐标系转换成极坐标系时，圆盘域 $D:^2+y^2\le a^2$ 会化为矩形域 $D_{r\theta}: 0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi$

②$dxdy = d(r\cos\theta)d(r\sin\theta) = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)$

$= \cos\theta\sin\theta(dr)^2 + r\cos^2\theta drd\theta - r\sin^2\theta d\theta dr - r^2\cos\theta\sin\theta(d\theta)^2$

因为微分的乘积满足外积的运算规则，即 $(dr)^2 = 0, (d\theta)^2 = 0, d\theta dr = -drd\theta$

所以，原式 $= r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)drd\theta = rdrd\theta$

(二)、改变积分顺序

1. $\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$

区域 D 为 $\{(x,y)|a-\sqrt{a^2-y^2}\le x\le a+\sqrt{a^2-y^2}, 0\le y\le a\} = \{(x,y)|(x-a)^2+y^2=a^2, y\ge 0\}$，即上半圆

则 $x\in[0,2a], \varphi_1(x)=0, \varphi_2(x)=\sqrt{a^2-(a-x)^2}=\sqrt{2ax-x^2}$，改变积分顺序得

$$\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$$

2. $\int_0^1 dy\int_{\frac12}^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{\frac12}^{\frac1y} f(x,y)dx$

区域 D 为 $\{(x,y)|\frac12\le x\le 1, 0\le y\le 1\}\sqcup\{(x,y)|\frac12\le x\le\frac1y, 1\le y\le 2\}$，可改写为

$$\{(x,y)|\frac12\le x\le 1, 0\le y\le\frac1x\}$$

因此，

$$\int_0^1 dy\int_{\frac12}^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{\frac12}^{\frac1y} f(x,y)dx = \int_{\frac12}^1 dx\int_0^{\frac1x} f(x,y)dy$$

(三)、计算与证明

例题 10.67 证明椭球体 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $V(\Omega)=\frac43\pi abc$

证明 上半椭球体 $\Omega_1: 0\le z\le c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

接下来我们求上半椭球体的体积，即以椭圆域 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 为底的曲顶柱体的体积

所以，$V(\Omega_1)=\iint\limits_D c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}dxdy$，使用广义极坐标变换 (包含伸缩) 令 $\begin{cases}\frac{x}{a}=r\cos\theta\\ \frac{y}{b}=r\sin\theta\end{cases}$

$\Rightarrow f(x,y)=c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}=c\sqrt{1-r^2}, dxdy=abrdrd\theta, D_{r\theta}=\{(r,\theta)|0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$\Rightarrow \iint_{D_{r\theta}} c\sqrt{1-r^2}abrdr = abc(\int_0^{2\pi} 1d\theta)(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr) = 2\pi abc \cdot -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}abc$$

则 $V(\Omega) = 2V(\Omega_1) = \frac{4}{3}\pi abc$ □

例题 10.68 证明 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (paissen 积分)

证明 设 $I_a = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx(a>0)$

则 $I_a^2 = (\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx)(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}dy)$

$= \int_{-a}^{a} e^{-y^2}(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx)dy$ (对 y 而言，$(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx)$ 是一个常数)

$= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ (对 $(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx)$ 而言，e^{-y^2} 是一个常数)

引理 10.1

若 $f(x,y) \le 0$，且 $D_1 \supset D \supset D_2$，则

$$\iint_{D_1} fd\sigma \le \iint_{D} fd\sigma \le \iint_{D_2} fd\sigma$$

证明 因为 $\iint_{D_1} fd\sigma - \iint_{D} fd\sigma = \iint_{D_1-D} fd\sigma \ge 0$ □

使用夹逼的思想，因为

$$\iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \le \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{x^2+y^2\le(\sqrt{2}a)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

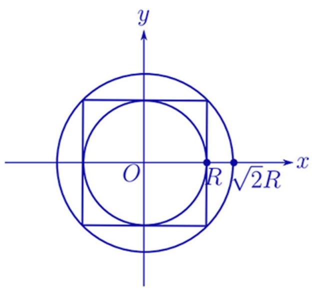


图 10.6: 道高一尺魔高一丈

使用极坐标变换

$$\iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \int_0^{2\pi}(\int_0^a e^{-r^2}rdr)d\theta = (\int_0^{2\pi} 1d\theta)(\int_0^a re^{-r^2}dr) = \pi(1-e^{-a^2})$$

$$\iint_{x^2+y^2\le(\sqrt{2}a)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2}rdr)d\theta = (\int_0^{2\pi} 1d\theta)(\int_0^{\sqrt{2}a} re^{-r^2}dr) = \pi(1-e^{-2a^2})$$

即

$$\pi(1-e^{-a^2}) \le \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \pi(1-e^{-2a^2})$$

令 $a\to\infty$，由夹逼定理知，

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

□

例题 10.69 若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, μ,σ 为常数，$\sigma>0$，试证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

证明 令 $\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=s$，即 $x=\mu+\sqrt{2}\sigma s, dx=\sqrt{2}\sigma ds$

所以，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-s^2}\sqrt{2}\sigma ds=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=1$ □

(四)、二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的奇偶对称性

1. 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇、连续函数，且 D 关于 $x=0$ 对称，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$$
2. 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇、连续函数，且 D 关于 $y=0$ 对称，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$$
3. 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶、连续函数，且 D 关于 $x=0$ 对称，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy, D_1\text{是 D 在 x>0 部分}$$
4. 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶、连续函数，且 D 关于 $y=0$ 对称，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy, D_2\text{是 D 在 y>0 部分}$$

证明

1. 设 D 为左右型区域 (先 x 后 y)，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d(\int_{-\psi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx)dy=\int_c^d 0dy=0$$
2. 设 D 为上下型区域 (先 y 后 x)，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b(\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)}f(x,y)dy)dx=\int_a^b 0dx=0$$
3. 设 D 为左右型区域 (先 x 后 y)，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d(\int_{-\psi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx)dy=\int_c^d(2\int_0^{\psi(y)}f(x,y)dx)dy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$$
4. 设 D 为上下型区域 (先 y 后 x)，则
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d(\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)}f(x,y)dy)dx=\int_a^b(2\int_0^{\varphi(x)}f(x,y)dy)dx=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

□

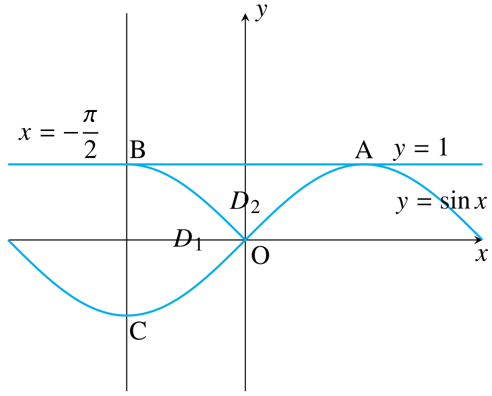
第 19 讲：二重积分的一般变量代换

(一)、复习：计算下列二重积分

1. $\iint\limits_D x(1+ye^{x^4y^6})dxdy, D$ 为 $y=\sin x, x=-\dfrac{\pi}{2}, y=1$ 围成的区域

2. $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy, D$ 为 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分的区域

解 (1). 作辅助线 $\overset{\frown}{OB}$(曲线)，使 $\overset{\frown}{OB}$ 与 $\overset{\frown}{OC}$ 关于 x 轴对称，设曲边 $\triangle_{BOC}=D_1$，曲边 $\triangle_{BOA}=D_2$，则 D_1,D_2 分别关于 x,y 轴对称



即

$$I=\iint\limits_{D_1\sqcup D_2}x(1+ye^{x^4+y^6})dxdy=\iint\limits_{D_1}x(1+ye^{x^4+y^6})dxdy+\iint\limits_{D_2}x(1+ye^{x^4+y^6})dxdy$$

由奇偶对称性知，

$$\iint\limits_{D_2}x(1+ye^{x^4+y^6})dxdy=0$$

所以，

$$I=\iint\limits_{D_1}x(1+ye^{x^4+y^6})dxdy=\iint\limits_{D_1}xdxdy+\iint\limits_{D_1}xye^{x^4+y^6}dxdy=\iint\limits_{D_1}xdxdy+0(\text{奇偶对称性})$$

$$\Rightarrow I=\iint\limits_{D_1}xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\int_{\sin x}^{-\sin x}xdy)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-2x\sin xdx=-2$$

(2). 作极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

所以，

$$I=\iint\limits_{D_{r\theta}}\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}rdrd\theta=(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta)(\int_0^1 r^2dr)=\frac{\pi}{6}$$

注 当被积函数有对称性时，可以考虑对被积区域进行对称性划分

(二)、二重积分的一般变量代换

定理 10.16 (二重积分的一般变量代换)

$$\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy\overset{\substack{x=x(u,v)\\ y=y(u,v)}}{\Longrightarrow}\iint\limits_{D_{uv}}f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

要求变换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$，$u,v\in D_{uv}$ 满足：

1. $x(u,v),y(u,v)\in C^1(D_{uv})$

2. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ 有可逆变换 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

由条件 1 知，$\begin{cases} dx = dx(u,v) = x'_u du + x'_v dv \\ dy = dy(u,v) = y'_u du + y'_v dv \end{cases}$，所以

$$dxdy = (x'_u du + x'_v dv)(y'_u du + y'_v dv) = (x'_u y'_v - x'_v y'_u)dudv = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

一般地，面积元素要求为正，因此通常对雅可比行列式加绝对值

所以，通过变量代换，我们有

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

注 微分的乘法满足外积，即 $du \cdot du = 0, du \cdot dv = -dv \cdot du$

例题 10.70 广义极坐标变换：$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} a, b > 0$

解

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} drd\theta = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} drd\theta = abrdrd\theta$$

我们称 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ 为膨胀系数

(三)、例题

例题 10.71 二维正态分布概率密度函数：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2\right]}$$

其中，σ_1, σ_2 为 x, y 的标准差，μ_1, μ_2 为 x, y 的期望值，$\rho \in [-1, 1]$ 为 x, y 的相关系数

试证明

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$$

证明 先对中括号内的多项式进行配方，即

$$(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 = (\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2})^2$$

令 $\begin{cases} \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2} = s \\ \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2} = t \end{cases}$ 则 $dxdy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} dsdt = \dfrac{1}{\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}} dsdt = \dfrac{dsdt}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & -\frac{\rho}{\sigma_2} \\ 0 & \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_2} \end{vmatrix}} = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}} dsdt$

所以，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s^2+t^2)} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}} dsdt = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s^2+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}s^2} ds)(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}t^2} dt) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}s^2} ds)^2$$

令 $z = \dfrac{s}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$，则

$$\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}s^2}ds\right)^2 = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\sqrt{2(1-\rho^2)}dz\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 1$$

□

例题 10.72 试证明：$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$

证明 从 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有反函数组 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$，这是因为条件 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$

函数组两边分别对 x,y 求导得 $\begin{cases} 1 = x'_u u'_x + x'_v v'_x \\ 0 = y'_u u'_x + y'_v v'_x \end{cases}$，$\begin{cases} 0 = x'_u u'_y + x'_v v'_y \\ 1 = y'_u u'_y + y'_v v'_y \end{cases}$

写成矩阵的形式，即

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1, \forall (x,y) \in D$$

□

例题 10.73 计算 $I = \displaystyle\iint_D xydxdy$

其中，D 是第一象限中 $xy = a, xy = b, y^2 = cx, y^2 = dx (b > a > 0, d > c > 0)$ 围成的区域，它是一个曲边四边形

解 令 $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y^2}{x} = v \end{cases}$，则 $\begin{cases} a \le u \le b \\ c \le v \le d \end{cases}$，$dxdy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = \dfrac{dudv}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \dfrac{dudv}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix}} = -\dfrac{dudv}{3v}$

所以，

$$I = \iint\limits_{\substack{a \le u \le b \\ c \le v \le d}} \frac{u}{3v}dudv = \frac{1}{3}\left(\int_a^b udu\right)\left(\int_c^d \frac{1}{v}dv\right)$$

例题 10.74 计算 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$，$D: x^2 + y^2 \le x$

解 作极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则 $dxdy = rdrd\theta$

$D: x^2 + y^2 \le x \Rightarrow r^2 \le r\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le \cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

所以，

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta} \frac{(r\cos\theta)^2}{r^2} rdr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

第 20 讲：三重积分

(一)、三重积分的概念

定义 10.19 (三重积分)

设空间 $\mathbb{R}^3$ 中的立体 Ω 为有界闭区域，点 (x,y,z) 处的体密度为 $f(x,y,z)$(有界)，则 Ω 的总质量

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta V_i\triangleq\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV\text{，也可以简写为}\int_{\Omega}f$$

♣

计算三重积分的“八字方针”

1. 分割：将 Ω 分成 n 个部分

$$\Omega=\Omega_1\sqcup\Omega_2\sqcup\cdots\sqcup\Omega_n$$

且 Ω_i 的体积为 ΔV_i，直径为 d_i，设 $\lambda=\max\{d_1,\cdots,d_n\}$

2. 近似：任取 $(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\in\Omega_i$，作积

$$f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\Delta V_i\approx\Delta M_i$$

3. 求和：

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta V_i\approx M$$

4. 极限：若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta V_i$$

存在且唯一，则

$$M\triangleq\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta V_i\triangleq\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV\triangleq\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$$

注　我们称 dV 为体积元，$f(x,y,z)$ 为被积函数

若三重积分存在，则称函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是黎曼可积的，记为 $f\in R(\Omega)$，下面给出黎曼可积的充分、必要条件：

①若 $f\in R(\Omega)$ 或 $R(D)\Rightarrow f$ 在 Ω 或 D 上必有界

②若 $f\in C(\Omega)$ 或 $C(D)\Rightarrow f\in R(\Omega)$ 或 $R(D)$

③$f\in R(\Omega)$ 或 $R(D)\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S}(T)=\underline{S}(T))=0$

(二)、三重积分的八大性质

性质 设 $f,g\in R(\Omega),c_1,c_2$ 为任意常数

1. 求被积区域的体积

$$\iiint\limits_{\Omega}1dV=V(\Omega)$$

证明 $\iiint\limits_{\Omega}1dV\triangleq\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}1\cdot\Delta V_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}V(\Omega)=V(\omega)$ □

推广：$\iiint\limits_{\Omega}cdV=c\cdot V(\Omega)$，这里 c 为任意常数

2. 三重积分的线性性质

$$\iiint\limits_{\Omega}c_1fdV+\iiint\limits_{\Omega}c_2gdV=c_1\iiint\limits_{\Omega}fdV+c_2\iiint\limits_{\Omega}gdV$$

3. 积分区域的可加性

$$\iiint\limits_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} f dV = \iiint\limits_{\Omega_1} f dV + \iiint\limits_{\Omega_2} f dV$$

4. 保序性：设 $f, g \in R(\Omega)$，且 $f(x,y,z) \geq g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Omega$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dV \geq \iint\limits_{D} g(x,y) dV$$

5. 若 $f \in R(\Omega)$，则 f 在 D 中必有界 (有界是黎曼可积的必要条件)，即

$$\exists M > 0, s.t. |f(x,y,z)| \leq M, \forall (x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow -M \leq f(x,y,z) \leq M$$

因此，任意一个黎曼可积函数的积分都可以写为两个非负黎曼可积函数之差，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f dV = \iiint\limits_{\Omega} (f+M) dV - \iiint\limits_{D} M dV$$

6. 三重积分中值定理

定理 10.17 (三重积分中值定理)

若 $f \in C(\Omega)$，则 $\exists M_0 \in \Omega$，使得

$$\iiint\limits_{\Omega} f dV = f(M_0) \cdot V(\Omega)$$

证法与二重积分类似，此处省略

其中，$f(M_0) = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f dV$ 称为 f 在 Ω 上的积分平均

7. 绝对可积性

$$|\iiint\limits_{\Omega} f dV| \leq \iiint\limits_{\Omega} |f| dV$$

8. 若 $f \in R(\Omega)$，则 f 在 Ω 中有界 $\Rightarrow$ f 在 Ω 中有上下确界 A,B，即

$$A \leq f(x,y,z) \leq B$$

由三重积分的保序性知，同时积分得

$$\iiint\limits_{D} A dV \leq \iiint\limits_{D} f(x,y,z) dV \leq \iiint\limits_{\Omega} B dV$$

由此我们可以得到三重积分估值公式：

$$A \cdot V(\Omega) \leq \iiint\limits_{\Omega} f dV \leq B \cdot V(\Omega)$$

(三)、三重积分的计算方法

(1). 长方体分割法：设 Ω 为 $\begin{cases} z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \\ (x,y) \in D_{xy} \begin{cases} f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \end{cases}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$$

注 一旦将三重积分写为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ 的形式，则默认采用长方体分割法

例题 10.75 计算 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $V(\Omega)$

解

$$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz$$

$$=\int_{-a}^{a}(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}1dz)dy)dx$$

$$=\int_{-a}^{a}(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy)dx$$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

注意到被积函数以及被积区间的形式，我们可以采用广义极坐标变换

令 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$，则 $dxdy=abrdrd\theta$，$\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$原式=2c\iint\limits_{D_{r\theta}}\sqrt{1-r^2}abrdrd\theta$$

$$=2abc(\int_0^{2\pi}1d\theta)(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr)$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc$$

命题 10.2 (三重积分的计算方法)

三重积分的“先一后二”法：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz)dxdy$$

其中，D_{xy} 是 $z=z(x,y)$ 在 xoy 平面上的投影

三重积分的“先二后一”法：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_1}^{z_2}(\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)dxdy)dz$$

♠

例题 10.76 试证明：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2} f(z)dV=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-z^2)f(z)dz$$

证明

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2} f(z)dV=\int_{-a}^{a}(\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-z^2}f(z)dxdy)dz$$

$$=\int_{-a}^{a}(f(z)\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-z^2}1dxdy)dz$$

$$=\int_{-a}^{a}f(z)\pi(a^2-z^2)dz$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-z^2)f(z)dz$$

□

例题 10.77 用先二后一法求椭球体的体积 $V(\Omega)$

解 $V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz=\int_{-c}^{c}(\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}}1dxdy)dz$

此时，z 固定，我们将椭圆化简成标准形式，即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\Leftrightarrow \frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2}\le 1$$

由椭圆面积为 πab 得，

$$\int_{-c}^{c}(\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} 1dxdy)dz=\int_{-c}^{c}\pi a(\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})b(\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})dz=2\pi ab\int_0^c 1-\frac{z^2}{c^2}dz=\frac{4}{3}\pi abc$$

例题 10.78 使用广义球坐标变换法 (a=b=c=1 时为标准球坐标变换) $\begin{cases}x=ar\sin\theta\cos\varphi\\ y=br\sin\theta\sin\varphi\\ z=cr\cos\theta\end{cases}$ 求椭球体的体积

解 此时 $dxdydz=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}drd\theta d\varphi=\begin{vmatrix}x'_r & x'_\theta & x'_\varphi\\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi\\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi\end{vmatrix}drd\theta d\varphi=abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

所以

$$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\int_0^1 abcr^2\sin\theta dr)d\theta d\varphi=abc(\int_0^{\pi}d\theta)(\int_0^{2\pi}d\varphi)(\int_0^1 r^2dr)=\frac{4}{3}\pi abc$$

第 21 讲：重积分的计算与证明

(一)、三重积分的换元积分法

定理 10.18 (三重积分的换元积分法)

设 $\begin{cases}x=x(u,v,w)\in C^1(\Omega_{uvw})\\ x=y(u,v,w)\in C^1(\Omega_{uvw})\\ x=z(u,v,w)\in C^1(\Omega_{uvw})\end{cases}$，且 $\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

♡

证明 承认微分的乘积满足外积的运算规则，即 $dxdy=-dydx,(dx)^2=0$

$$\begin{aligned}dxdydz&=(x'_udx+x'_vdv+x'_wdw)(y'_udx+y'_vdv+y'_wdw)(z'_udx+z'_vdv+z'_wdw)\\&=(x'_uy'_vz'_w-x'_vy'_uz'_w+x'_wy'_uz'_v-x'_wy'_vz'_u+x'_vy'_wz'_u-x'_vy'_uz'_w)dudvdw\\&=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}dudvdw\end{aligned}$$

我们规定体积元为正，所以需要对行列式取绝对值，即有

$$dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

□

推论 10.1 (球坐标变换与柱坐标变换)

①球坐标变换

我们可以将直角坐标系上的点 $Q(x,y,z)$ 看作半径为 r 的球上的一点，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

设 $\theta\in[0,\pi]$ 为 $\overrightarrow{OQ}$ 与 z 轴正向的夹角，$\varphi\in[0,2\pi]$ 为 $\overrightarrow{OQ}$ 在 xoy 平面上的投影与 x 轴正方向的夹角

我们有球坐标变换：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$，它的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

②柱坐标变换

我们可以将直角坐标系上的点 $Q(x,y,z)$ 看作中心轴在 oz 轴的柱面上，且柱面的半径 $r = \sqrt{x^2+y^2}$

设 $\theta \in [0, 2\pi]$ 为 $\overrightarrow{OQ}$ 在 xoy 平面上的投影与 x 轴正方向的夹角

我们有柱坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$，它的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

此外，同二阶行列式一样，我们有

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 1$$

(二)、例题

例题 10.79 计算曲面 $\Sigma : (x^2+y^2)^2 + z^4 = y$ 围成的立体 Ω 的体积 $V(\Omega)$

解 $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz, f(x,y,z) \equiv 1$ 关于 x,y,z 分别是偶函数

且 $\Omega : (x^2+y^2)^2 + z^4 \le y$ 仅在 $y > 0$ 时有图像，Ω 关于 $x = 0, z = 0$ 对称，我们设 Ω_0 是 Ω 在第一卦限的部分，则

$$V(\Omega) = 4\iiint\limits_{\Omega_0} 1dxdydz$$

作球坐标变换，设 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$，则 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

由 $(x^2+y^2)^2 + z^4 \le y$ 知，$r^4\sin^4\theta + r^4\cos^4\theta \le r\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow 0 \le r \le (\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta})^{\frac{1}{3}}$

$$V(\Omega) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta})^{\frac{1}{3}}} r^2\sin\theta dr)d\theta)d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}r^3\sin\theta\Big|_0^{(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta})^{\frac{1}{3}}} d\theta)d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta)d\varphi = \frac{4}{3}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta) = \frac{4}{3}\cdot I_0$$

接下来我们对 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta$ 进行计算

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\tan\theta(\text{令}\tan\theta = v) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^2}{1+v^4}dv(\text{令}\frac{1}{u} = v) \\
&= \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u^2}\cdot(-\frac{1}{u^2})du}{1+\frac{1}{u^4}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^4}dv
\end{aligned}$$

即

$$2I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{v^2+1}{1+v^4}dv = \int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{v^2}}{v^2+\frac{1}{v^2}}dv = \int_0^{+\infty}\frac{d(v-\frac{1}{v})}{(v-\frac{1}{v})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{v-\frac{1}{v}}{\sqrt{2}})\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

所以，$V(\Omega) = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

例题 10.80 设 $(a,b,c)\neq\theta=(0,0,0)$ 是常向量，化简

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f(ax+by+cz)dxdydz, f\in C(\Omega)$$

解 取正交阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, \lambda = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0$$

作正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$$

对比第一行有

$$\frac{a}{\lambda}x+\frac{b}{\lambda}y+\frac{c}{\lambda}z = u \Rightarrow ax+by+cz = \lambda u$$

因为正交矩阵的行列式为 ±1，所以

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|}dudvdw = dudvdw$$

而经过正交变换后，$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$ 变为 $\Omega_{uvw}: u^2+v^2+w^2\le R^2$(正交变换为旋转或镜面反射)

所以

$$I = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f(\lambda u)dudvdw = \int_{-R}^{R} f(\lambda u)(\iint\limits_{v^2+w^2\le R^2-u^2} dvdw)du = \int_{-R}^{R} f(\lambda u)\cdot\pi(R^2-u^2)du$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{若 f 为奇函数} \\ 2\pi\displaystyle\int_0^R (R^2-u^2)f(\lambda u)du & \text{若 f 为偶函数} \\ \pi\displaystyle\int_{-R}^{R} f(\lambda u)\cdot(R^2-u^2)du & \text{其他}\end{cases}$$

例题 10.81 试证明

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)dxdy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(\lambda u+c)du$$

其中 $f\in C(D),\lambda=\sqrt{a^2+b^2}$

证明 令 $A=\begin{pmatrix}\frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda}\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}$，作正交变换 $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda}\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，由正交变换，$dxdy=dudv$

则

$$\frac{a}{\lambda}x+\frac{b}{\lambda}y=u\Rightarrow ax+by=\lambda u$$

所以，

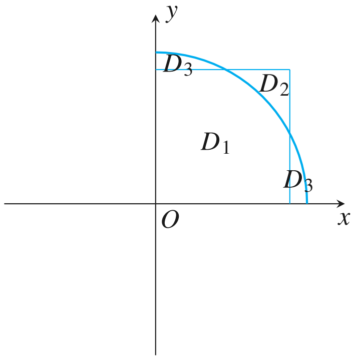
$$I=\iint\limits_{u^2+v^2\le 1} f(\lambda u+c)dudv=\int_{-1}^{1}f(\lambda u+c)(\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}dv)du=2\int_{-1}^{1}f(\lambda u+c)\sqrt{1-u^2}du$$

例题 10.82 试证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}dxdy<(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{x^2}dx)^2$$

证明 $RHS=(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{x^2}dx)(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{y^2}dy)=\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}(e^{y^2}\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{x^2}dx)dy=\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{x^2+y^2}dx)dy=\iint\limits_{[-\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2}]^2}e^{x^2+y^2}dxdy$

化简后，被积函数一致，且积分区域都关于 x,y 轴对称，我们仅比较第一象限即可



将圆区域分为 D_1+D_3，将矩形区域分为 D_1+D_2，因为 D_1 为二者共有，所以我们只需比较积分

$$\iint\limits_{D_2}e^{x^2+y^2}dxdy\text{与}\iint\limits_{D_3}e^{x^2+y^2}dxdy$$

因为

$$S(D_1\cup D_3)=S(D_1\cup D_2)=\frac{1}{4}\pi\Rightarrow S(D_2)=S(D_3)$$

所以

$$\iint\limits_{D_2}e^{x^2+y^2}dxdy>\iint\limits_{D_2}e^{1}dxdy=\iint\limits_{D_3}e^{1}dxdy>\iint\limits_{D_3}e^{x^2+y^2}dxdy$$

□

第 22 讲：重积分应用举例

(一)、转动惯量的平行轴定理

定理 10.19 (转动惯量的平行轴定理)

$$J_k = J_c + md^2$$

其中，k 轴与 c 轴平行且 c 轴过物体 Ω 质心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$，Ω 的质量 $m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z)dV$ 已知，d 是 k 轴与 c 轴的距离

证明 适当建立坐标系：让 k 轴与 z 轴重合，且让质心在 y 轴上，则 $J_k = J_z, G = (0, d, 0)$

$$J_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV$$

由质心坐标知，
$$\begin{cases} \bar{x} = \iiint\limits_{\Omega} x\rho(x, y, z)\dfrac{1}{m}dV = 0 \\ \bar{y} = \iiint\limits_{\Omega} y\rho(x, y, z)\dfrac{1}{m}dV = d \Rightarrow \iiint\limits_{\Omega} y\rho(x, y, z)dV = md \\ \bar{z} = \iiint\limits_{\Omega} z\rho(x, y, z)\dfrac{1}{m}dV = 0 \end{cases}$$

所以

$$J_c = \iiint\limits_{\Omega} [(x - 0)^2 + (y - d)^2 + (z - z)^2]\rho(x, y, z)dV$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) - 2d \iiint\limits_{\Omega} y\rho(x, y, z)dV + d^2 \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z)dV = J_z + (-2d)md + d^2m$$

即

$$J_k = J_c + md^2$$

□

(二)、均匀球体对球外一点的力

设 Ω 为半径为 R 的均匀球体，体密度为 ρ_0，球心坐标为 $O(0, 0, 0)$ 则
Ω 对球外一质点 $Q(0, 0, z)$ 的引力 $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$，其中质点 Q 的质量为 m_0

$$d\overrightarrow{F} = -\frac{k(m_0\rho_0 dV)}{(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}, \frac{z - a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}\right) = (dF_x, dF_y, dF_z)$$

所以

$$F_x = \iiint\limits_{\Omega} dF_x = \iiint\limits_{\Omega} -\frac{k(m_0\rho_0 dV)}{(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\alpha = \iiint\limits_{\Omega} -\frac{kx(m_0\rho_0 dV)}{(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^2}$$

因为 Ω 关于 $x = 0$ 坐标面对称，且 f 为连续奇函数 $\Rightarrow F_x = 0$，同理，$F_y = 0$
另一方面

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} \frac{(z - a)km_0\rho_0 dV}{(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

使用柱坐标变换，设 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \Rightarrow dV = rdrd\theta dz \\ z = z \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
F_z &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{km_0\rho_0 r dr}{(r^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} dr\right)dz \\
&= 2\pi km_0\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)(-1)(r^2+(z-a)^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz \\
&= -2\pi km_0\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} - \frac{1}{a-z}\right)dz \\
&= -2\pi km_0\rho_0\left[\left(-\frac{1}{a}\right)\int_{-R}^{R} \frac{(z-a)dz}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} + 2R\right] \\
&= -2\pi km_0\rho_0\left[\left(-\frac{1}{a}\right)\int_{-R}^{R} (z-a)d\left(\sqrt{R^2-2az+a^2}\right)\right] \\
&= -2\pi km_0\rho_0\left(\frac{2R^3}{3a^2} - 2R + 2R\right) \\
&= -\frac{(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0)m_0k}{a^2} \\
&= -\frac{kM_0m_0}{a^2}
\end{aligned}
$$

所以，$\overrightarrow{F} = (0, 0, -\dfrac{km_0M_0}{a^2})$

因此，均匀球体对球外一点的引力等效于质量在球心的质点对球外一点的引力

(三)、求物体的质量

例题 10.83 设物体 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ 的体密度 $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$，求物体 Ω 的质量 M

解

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dV = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dV = \iiint_\Omega x^2 dV + \iiint_\Omega y^2 dV + \iiint_\Omega z^2 dV$$

因为

$$\iiint_\Omega z^2 dV = \int_{-c}^{c} z^2 dz \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} 1dxdy$$

由椭圆的面积为 πab 知，

$$\int_{-c}^{c} z^2 dz \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} 1dxdy = \int_{-c}^{c} z^2\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\, b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

同理有 $\begin{cases} \displaystyle\iiint_\Omega x^2 dV = \frac{4}{15}\pi a^3bc \\ \displaystyle\iiint_\Omega y^2 dV = \frac{4}{15}\pi ab^3c \end{cases} \Rightarrow M = \dfrac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$

(四)、求三元函数在三维物体上的积分平均

例题 10.84 求 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ 在物体 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le x+y+z$ 上的积分平均 $\bar{f}$

解 积分平均为在区域内的积分值除以区域的测度 (此处为被积区域的体积)，即

$$\bar{f} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV}{V(\Omega)}$$

因为 $\Omega : (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-\frac{1}{2})^2 \le (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \Rightarrow V(\Omega) = \frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

另一方面

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV = \iiint\limits_{\Omega} x^2 dV + \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV + \iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$$

考虑上式第三项，即

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \iint\limits_{\Omega_0} 1dxdy = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} z^2\pi(\frac{\sqrt{3}}{2} - (z-\frac{1}{2})^2)dz = \frac{\sqrt{3}}{5}\pi$$

其中，$\Omega_0 = (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \le (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (z-\frac{1}{2})^2$ 为圆盘域

同理，由对称性知 $\begin{cases} \iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \frac{\sqrt{3}}{5}\pi \\ \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV = \frac{\sqrt{3}}{5}\pi \end{cases} \Rightarrow \bar{f} = \frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{5}\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi} = \frac{6}{5}$

(五)、求物体的体积

例题 10.85 求 $\Omega : (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}} + (\frac{z}{c})^{\frac{2}{3}} \le 1$ 的体积 $V(\Omega)$

解 作变换 $\begin{cases} \frac{x}{a} = u^3 \\ \frac{y}{b} = v^3 \\ \frac{z}{c} = w^3 \end{cases} \Rightarrow dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw = \begin{vmatrix} 3au2 & 0 & 0 \\ 0 & 3bv^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3cw^2 \end{vmatrix} dudvdw = 27abcu^2v^2w^2dudvdw$

所以

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{1} dV = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1} 27abcu^2v^2w^2dudvdw$$

注意到被积函数以及被积区间的形式，我们作球坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$，则

$$V(\Omega) = 27abc(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi)(\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta)(\int_0^1 r^8 dr)$$

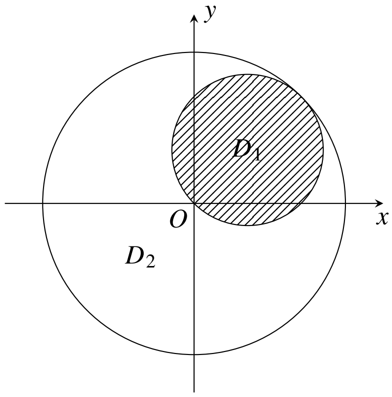
因为

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta - \cos^4\theta)d\theta, \int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta - \sin^7\theta)d\theta$$

结合 Walls 公式立得，$V(\Omega) = \frac{4\pi}{35}$

例题 10.86 求以 $z = f(x,y) = |\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2|$ 为顶，以 $D : x^2+y^2 \le 1$ 为底的曲顶柱体的体积 $V(\Omega)$

解 对被积函数配方得：$\frac{x+y}{\sqrt{2}} - (x^2+y^2) = -(x^2+y^2-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}) = -[(x-\frac{1}{\sqrt{8}})^2 + (y-\frac{1}{\sqrt{8}})^2 - \frac{1}{4}]$



$$V(\Omega)=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D |\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2|dxdy=\iint_{D_1}(\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})dxdy$$

其中，$D_1:(x-\frac{1}{\sqrt{8}})^2+(y-\frac{1}{\sqrt{8}})^2\le(\frac{1}{2})^2$，$D_2=D-D_1$

设 $g(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)$，则

$$V(\Omega)=\iint_{D_1} g(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}-g(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} g(x,y)d\sigma-\iint_{D_1+D_2} g(x,y)d\sigma$$

我们对上式第一部分加上 $\iint_{D_1} g(x,y)d\sigma$，第二部分减去 $\iint_{D_1} g(x,y)d\sigma$

$$V(\Omega)=2\iint_{(x-\frac{1}{\sqrt{8}})^2+(y-\frac{1}{\sqrt{8}})^2\le1} g(x,y)dxdy-\iint_{x^2+y^2\le1} g(x,y)dxdy$$

对上式第一部分作极坐标变换，设 $\begin{cases} x-\frac{1}{\sqrt{8}}=r\cos\theta \\ y-\frac{1}{\sqrt{8}}=r\sin\theta \end{cases}\Rightarrow dxdy=rdrd\theta$

所以

$$V(\Omega)=2\iint_{r^2\le1}(\frac{1}{4}-r^2)rdrd\theta=2(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r}{4}-r^3dr)=\frac{1}{16}\pi$$

对于上式第二部分，因为被积区域 $(x^2+y^2\le1)$ 关于 $x+y=0$ 对称，所以

$$\iint_{D_1+D_2}[\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)]d\sigma=\iint_{x^2+y^2\le1} x^2+y^2d\sigma=-\frac{\pi}{2}$$

所以，$V(\Omega)=\frac{\pi}{16}-(-\frac{\pi}{2})=\frac{9}{16}\pi$

第 23 讲：n 重积分

(一)、n 维球体的体积

半径为 a 的 n 维球体 $B_n(a):x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le a^2$ 的体积

$$V(B_n(a))=\frac{(\sqrt{\pi}a)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},\forall n\in\mathbb{N}^*$$

其中，$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,(x>0)$ 为伽玛函数

证明 一维球体：$B_1(a): x_1^2 \le a^2 \Rightarrow x_1 \in [-a, a], V(B_1(a)) = 2a$

二维球体：$B_2(a): x_1^2 + x_2^2 \le a^2 \Rightarrow V(B_2(a)) = \pi a^2$

三维球体：$B_3(a): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le a^2 \Rightarrow V(B_2(a)) = \iiint\limits_{B_3(a)} 1 dxdydz = \frac{4}{3}\pi a^3$

n 维球体：$B_n(a): x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le a^2 \Rightarrow V(B_n(a)) = \int \cdots \int_{B_n(a)} 1 dx_1 \cdots dx_n$

作线性变换，先转化为 n 维单位球 $\begin{cases} x_1 = au_1 \\ x_2 = au_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = au_n \end{cases} \Rightarrow dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} du_1 du_2 \cdots du_n$

$$= \begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix} du_1 du_2 \cdots du_n = a^n du_1 du_2 \cdots du_n$$

所以，$V(B_n(a)) = a^n \int \cdots \int\limits_{B_n(1)} 1 du_1 du_2 \cdots du_n = a^n V(B_n(1))$

$$\begin{aligned}
V(B_1(1)) &= \iint\limits_{u_1^2+u_2^2\le 1} \Big(\int \cdots \int\limits_{u_3^2+\cdots+u_n^2 \le (1-u_1^2-u_2^2)} 1 du_3 \cdots du_n \Big) \\
&= \iint\limits_{u_1^2+u_2^2\le 1} (1 - u_1^2 - u_2^2)^{n-2} V(B_{n-2}(1)) du_1 du_2 \\
&= V(B_{n-2}(1)) \iint\limits_{u_1^2+u_2^2\le 1} (1 - u_1^2 - u_2^2)^{n-2} du_1 du_2 \quad \text{作极坐标变换} \\
&= V(B_{n-2}(1)) \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr \Big) d\theta \\
&= 2\pi V(B_{n-2}(1)) \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{n}{2}-1} \frac{d(1 - r^2)}{-2} \\
&= -\pi V(B_{n-2}(1)) \frac{(1 - r^2)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}} \Big|_0^1 \\
&= \frac{2\pi}{n} V(B_{n-2}(1))
\end{aligned}$$

分奇偶讨论，利用递推关系

$$V(B_{2n}(1)) = \frac{2\pi}{2n} V(B_{2n-2}(1)) = \frac{2\pi}{2n} \frac{2\pi}{2n-2} V(B_{2n-4}(1)) = \frac{2\pi}{2n} \frac{2\pi}{2n-2} \cdots \frac{2\pi}{6} \frac{2\pi}{4} V(B_2(1)) = \frac{\pi^n}{n!}$$

$$V(B_{2n-1}(1)) = \frac{2\pi}{2n-1} \frac{2\pi}{2n-3} \cdots \frac{2\pi}{5} \frac{2\pi}{3} V(B_1(1)) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!}$$

所以，$\begin{cases} V(B_{2n}(1)) = \dfrac{\pi^n}{n!} \\ V(B_{2n-1}(1)) = \dfrac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(B_{2n}(a)) = a^{2n} \dfrac{\pi^n}{n!} \\ V(B_{2n-1}(a)) = a^{2n-1} \dfrac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!} \end{cases}$ □

由此，我们可以得到四、五维球体体积：$V(B_4(a)) = \frac{\pi^2}{2!} a^4, V(B_5(a)) = \frac{8\pi^2}{15} a^5$

(二)、正交变换化简 n 重积分

例题 10.87 设 $f \in C, (a_1, \cdots, a_{99})$ 为已知的非零向量，化简 99 重积分

$$I = \underset{x_1^2+\cdots+x_{99}^2 \le a^2}{\int\cdots\int} f(a_1x_1 + \cdots + a_{99}x_{99})dx_1 \cdots dx_{99}$$

解 令 $\lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{99}^2} > 0$，且设正交阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\lambda} & \frac{a_2}{\lambda} & \cdots & \frac{a_{99}}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,99} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{99,1} & a_{99,2} & \cdots & a_{99,99} \end{pmatrix}$$

作正交变换，则将球体 $x_1^2 + \cdots + x_{99}^2 \le a^2$ 变为球体 $u_1^2 + \cdots + u_{99}^2 \le a^2$，且有 $\lambda u_1 = a_1x_1 + \cdots + a_{99}x_{99}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{99} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{99} \end{pmatrix} \Rightarrow dx_1dx_2\cdots dx_n = \frac{du_1du_2\cdots du_{99}}{\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{99})}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_{99})}\right|} = \frac{du_1du_2\cdots du_{99}}{|\det(A)|} = du_1du_2\cdots du_{99}$$

因此

$$I = \underset{u_1^2+\cdots+u_{99}^2 \le a^2}{\int\cdots\int} f(\lambda u_1)du_1\cdots du_{99} = \int_{-a}^{a} f(\lambda u_1)\Big(\underset{u_2^2+\cdots+u_{99}^2 \le a^2-u_1^2}{\int\cdots\int} 1du_2\cdots du_{99}\Big)du_1$$

因为 $V(B_{98}(a)) = \dfrac{(\sqrt{\pi}a)^{98}}{\Gamma(\frac{98}{2}+1)}, \Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$，所以

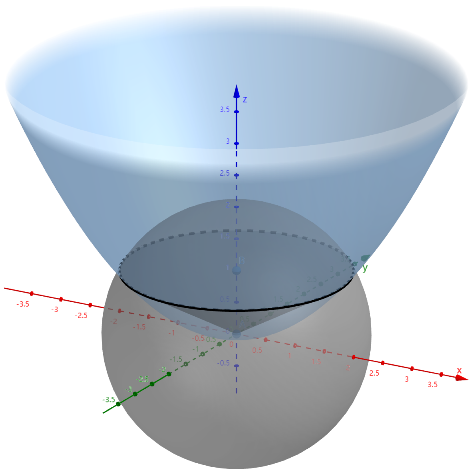
$$I = \int_{-a}^{a} f(\lambda u_1) \cdot \frac{(\sqrt{\pi}\sqrt{a^2-u_1^2})^{98}}{49!}du_1 = \frac{\pi^{49}}{49!}\int_{-a}^{a} f(\lambda u_1)(a^2-u_1^2)^{49}du_1$$

(三)、复习

例题 10.88 Ω 是由 $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与 $\Sigma_2 : x^2 + y^2 = 3z$ 所围成的区域，计算积分

$$I = \iiint\limits_{\Omega} zdV$$

解



联立 Σ_1 与 Σ_2：$x^2 + y^2 = 4 - z^2 = 3z \Rightarrow z = 1$ 或 -4(舍去)

则 Σ_1 与 Σ_2 的交线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$ 且区域在 xoy 平面的投影为圆盘 $x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$

法 I： 先一后二法

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}\left(\int_{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le(\sqrt{3})^2}[4-x^2-y^2-\frac{1}{9}(x^2+y^2)^2]dxdy$$

作极坐标变换

$$I=\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{3}}r(4-r^2-\frac{1}{9}r^4)dr\right)=\frac{13}{4}\pi$$

法 II： 先二后一法

$$I=\int_0^1 z\left(\iint\limits_{x^2+y^2\le 3z}1dxdy\right)dz+\int_1^2 z\left(\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}1dxdy\right)dz=\int_0^1 z(3z\pi)dz+\int_0^1 z\pi(4-z^2)dz=\frac{13}{4}\pi$$

法 III： 柱坐标变换法，作 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，则 $dxdydz=rdrd\theta dz$

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}}zdz\right)rdr\right)d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}[4-r^2-(\frac{r^2}{3})^2]rdr\right)=\frac{13}{4}\pi$$

法 IV： 球坐标变换法，作 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$，则 $dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

我们将被积区域分为两部分，一部分是球椎体 $\begin{cases} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{3}] \\ \varphi\in[0,2\pi] \end{cases}$，另一部分是除了椎体的部分

由限制条件 $x^2+y^2\le 3z$ 得，$r\le\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$，则 $\begin{cases} r\in[0,\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}] \\ \theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}] \\ \varphi\in[0,2\pi] \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^2 r\cos\theta r^2\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi+\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}}r\cos\theta r^2\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\sin\theta\right)\left(\int_0^2 r^3dr\right)+\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\frac{1}{4}(\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta})^4d\theta\right)$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{2^4}{4}+\frac{2\pi}{4}\cdot 3^4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5\theta}{\sin^7\theta}d\theta=3\pi-\frac{\pi}{2}\cdot 3^4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^5\theta d\cot\theta=\frac{13}{4}\pi$$

例题 10.89 用定积分的方法求椭球体体积

解 用平行于 yoz 平面的平面切椭球体，得到的切面面积记为 $A(x)$，则

$$A(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})$$

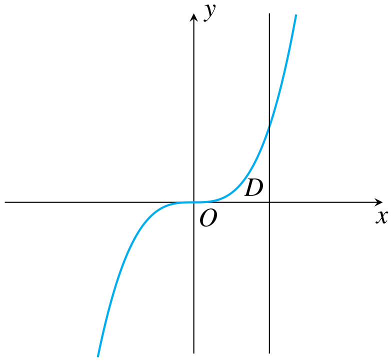
$$V(\Omega)=\int_{-a}^{a}A(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

好题鉴赏

例题 10.90 设平面区域 D 由曲线 $y = x^3, y = 0, x = 1$ 围成，试求连续函数 $f(x, y)$，使其满足

$$f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

解 积分区域 D 为



因为在给定有界区域 D 中，连续函数 $f(x, y)$ 的二重积分为定值，我们设 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = A$，即

$$f(x,y) = xy + A$$

对上式两边同时在 D 上求二重积分得

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D xydxdy + \iint\limits_D Adxdy$$

所以

$$A = \iint\limits_D xydxdy + A\iint\limits_D dxdy$$

计算上式第一部分：

$$\iint\limits_D xydxdy = \int_0^1 (\int_0^{x^3} xydy)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{x^3} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{16}$$

计算上式第二部分：

$$A\iint\limits_D dxdy = A\int_0^1 (\int_0^{x^3} dy)dx = A\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}A$$

解得 $A = \dfrac{1}{12} \Rightarrow f(x,y) = xy + \dfrac{1}{12}$

例题 10.91 (Poincaré 不等式) 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，$f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y)|a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ 上连续可微，且有 $f(x, \varphi(x)) = 0$，则存在 $M > 0$，使得

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy \le M\iint_D (f'_y(x,y))^2dxdy$$

证明 先证明积分形式的柯西不等式

引理 10.2

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le (\int_a^b [f(x)]^2dx)(\int_a^b [g(x)]^2dx)$$

proof of lemma：因为对 $\forall t \in \mathbb{R}$，有 $[t \cdot f(x) - g(x)]^2 \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [t \cdot f(x) - g(x)]^2dx \ge 0$

以 t 为主元整理得

$$\int_a^b [f(x)]^2dx \cdot t^2 - 2\int_a^b f(x)g(x)dx \cdot t + \int_a^b [g(x)]^2dx \geq 0$$

这是一个关于 t 的二次方程，由判别式恒负知

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b [f(x)]^2dx)(\int_a^b [g(x)]^2dx)$$

则引理得证。特别地，我们取 $g(x) = 1$，则有以下结论

推论 10.2

$$(\int_a^b f(x)dx)^2 \leq (b-a)\int_a^b [f(x)]^2dx$$

回到本题，我们先对被积函数进行放缩：

$$\begin{aligned}
f^2(x,y) &= [f(x,y) - f(x,\varphi(x))]^2 \\
&= (\int_{\varphi(x)}^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt)^2 \\
&\leq (y-\varphi(x))\int_{\varphi(x)}^y [\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)]^2dt
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint_D f^2(x,y)dxdy &= \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy)dx \\
&\leq \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [y-\varphi(x)]\int_{\varphi(x)}^y [\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)]^2dt)dy)dx \\
&= \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [y-\varphi(x)]dy\int_{\varphi(x)}^y [\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)]^2dt
\end{aligned}$$

交换积分次序：$\begin{cases}\varphi(x) \leq t \leq y \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq y \leq \psi(x) \\ \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\end{cases}$

所以

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy \leq \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)]^2dt\int_t^{\psi(x)} [y-\varphi(x)]dy$$

因为 $\int_t^{\psi(x)} [y-\varphi(x)]dy \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [y-\varphi(x)]dy = \frac{1}{2}[y-\varphi(x)]^2\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = \frac{1}{2}[\varphi(x)-\psi(x)]^2$

另一方面，$\varphi(x),\psi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \exists M > 0, s.t. \frac{1}{2}[\varphi(x)-\psi(x)]^2 < M$

所以

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy \leq M\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]^2dy = M\iint_D [\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]^2dxdy$$

□

第十一章：曲线积分与曲面积分

第 24 讲：第一类曲线积分

(一)、概念与主要性质

定义 11.20 (线积分)

设曲细杆的 L 的方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$，且 $r(t) = (x(t), y(t)) \in C^1[\alpha, \beta], r'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq \theta$，设 L 的线密度为 $\varphi(x, y), \forall (x, y) \in L$，求细杆的质量 M

1. 分割：

$$L = L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_n$$

其中 $L_i : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in [t_{i-1}, t_i]$ 的长度

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |r'(t)| dt$$

取 $\lambda = \max\{\Delta s_1, \cdots, \Delta s_n\}$

2. 近似：任取 $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$，则 $\varphi(x, y) = \varphi(x(\tau_i), y(\tau_i))$，作积得

$$\Delta M_i = \varphi(x(\tau_i), y(\tau_i)) \Delta s_i$$

3. 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x(\tau_i), y(\tau_i)) \Delta s_i \approx M$$

4. 极限：若极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x(\tau_i), y(\tau_i)) \Delta s_i$$

存在且唯一，则

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x(\tau_i), y(\tau_i)) \Delta s_i$$

我们称上述 M 为 $\varphi(x, y)$ 在曲线 L 上的线积分 (curvilinear integral)，记为

$$\int_L \varphi(x, y) ds$$

♣

注　推广至三元及以上函数，线积分也是如此定义

$$\int_\Gamma \varphi(x, y, z) ds \triangleq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \Delta s_i$$

考虑一维情况，在区间 $x \in [a, b]$ 上的定积分实际上是线积分的一种特例，此时 $ds = dx$

定理 11.20 (线积分中值定理)

若 $\varphi(x, y) \in C(L)$，则 $\exists M_0(x_0, y_0) \in L$，使得

$$\int_L \varphi(x, y) ds = \varphi(M_0) \cdot S(L) \Leftrightarrow \varphi(M_0) = \frac{\int_L \varphi(x, y) ds}{S(L)}$$

我们称 $\varphi(M_0) = \varphi(x_0, y_0)$ 为 $\varphi(x, y)$ 在曲线段 L 上的积分平均

♡

(二)、线积分的计算方法

推论 11.3 (线积分的计算方法)

设 L 为光滑曲线，$\varphi(x,y)$ 在 L 上连续，$L: r(t)=(x(t),y(t))\in C^1[\alpha,\beta]$，则

$$\int_L \varphi(x,y)ds=\int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t))|r'(t)|dt=\int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

♡

证明 由 $\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}|r'(t)|dt$ 及积分中值定理

$$\int_L \varphi(x,y)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n \varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta s_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n \varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\theta_i)|\Delta t_i$$

我们将其写为黎曼和的形式，想办法凑出 $|r'(\tau_i)|$，则

$$\int_L \varphi(x,y)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n \varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\tau_i)|\Delta t_i+\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n \varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))(|r'(\theta_i)|-|r'(\tau_i)|)\Delta t_i$$

下证上式第二部分为零

一方面，因为 φ 在 L 上有界 $\Rightarrow \exists M>0, s.t.|\varphi|\le M$，另一方面，$|r'(t)|$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续 $\Rightarrow |r'(t)|$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon>0)$，对 $\forall\tau_i,\theta_i\in[\alpha,\beta]$，只要 $|\tau_i-\theta_i|<\delta(\varepsilon)$，就有 $||r'(\theta)|-|r'(\tau)||<\varepsilon$

我们作分割 $T:\lambda<\delta(\varepsilon)$，则方 $\theta_i,\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ 时，$|\theta_i-\tau_i|\le\lambda<\delta(\varepsilon)$

此时

$$\left|\sum_{i=1}^n \varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))(|r'(\theta_i)|-|r'(\tau_i)|)\Delta t_i-0\right|<\sum_{i=1}^n|\varphi(x,y)|\cdot\varepsilon\Delta t_i=M\varepsilon\sum_{i=1}^n\Delta t_i=M(\beta-\alpha)\cdot\varepsilon\to0$$

所以

$$\int_L \varphi(x,y)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n \varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\tau_i)|\Delta t_i=\int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t))|r'(t)|dt$$

□

推论 11.4 (两种特殊的线积分)

若 $L: y=f(x)\in C^1[a,b]$，则 $I=\int_a^b \varphi(x,f(x))\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

若 $L:\rho=\rho(\theta)\in C^1[\alpha,\beta]$，则 $I=\int_\alpha^\beta \varphi(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}d\theta$

♡

(三)、例题

例题 11.92 设 L 为 $\begin{cases}z^2=2ax\\9y^2=16xz\end{cases}$，求从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(2a,\frac{8}{3}a,2a)$ 的 L 的长度 $S(L)$

解 取被积函数为常值函数 $\varphi(x,y,z)\equiv1$，则

$$S(L)=\int_L 1ds$$

将 L 用参数方程表示：$\begin{cases}x=x\\y=\frac{4}{3}\sqrt{x\sqrt{2ax}}=\frac{4}{3}(2a)^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}，\ 0\le x\le2a\\z=\sqrt{2ax}\end{cases}$

此时，$ds=\sqrt{(x_x')^2+(y_x')^2+(z_x')^2}=\sqrt{1+(\sqrt[4]{2a}x^{-\frac{1}{4}})^2+(\sqrt{2a}\frac{1}{2\sqrt{x}})^2}=1+\sqrt{\frac{a}{2x}}dx$

所以

$$S(L_1)=\int_0^{2a}(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}})dx=4a$$

注　求长度则取被积函数恒等于 1，求参数方程时，常取 x 或 y 或 z 为参数 t

例题 11.93 求 $\int_L (x+y+z)ds$，L 由从 $A(1,1,0)$ 到 $B(1,0,0)$ 的直线，与 $\overset{\frown}{BC}\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\ (0\le t\le 2\pi)\\ z=t\end{cases}$ 组成

解 由于 L 在 $AB,\overset{\frown}{BC}$ 上分别光滑，所以分段计算 $L=L_1+L_2$

其中 $L_1:\begin{cases}x=1+0y\\ y=y\\ z=0+0y\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\ (0\le t\le 2\pi)\\ z=t\end{cases}$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_{L_1+L_2}(x+y+z)ds\\&=\int_{L_1}(x+y+z)ds+\int_{L_2}(x+y+z)ds\\&=\int_0^1(1+y)\sqrt{(x_y')^2+(y_y')^2+(z_y')^2}dy+\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}dt\\&=\int_0^1(1+y)\sqrt{0+1+0}dy+\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+1}dt\\&=\int_0^1(1+y)dy+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)dt\\&=(y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1+\sqrt{2}\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{2\pi}\\&=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi^2\end{aligned}$$

例题 11.94 求 $\oint_L x^2ds$，L 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，a 为非负常数

解　由 L 上 x,y,z 的轮换对称性知，对应的线积分也具有轮换对称性

此时 $f(x,y,z)=x^2+0y^2+0z^2\to f(y,z,x)=y^2+0z^2+0x^2\to f(z,x,y)=z^2+0x^2+0y^2$，即

$$I=\oint_L x^2ds=\oint_L y^2ds=\oint_L z^2ds$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{3}\oint_L a^2ds=\frac{a^2}{3}\oint_L 1ds=\frac{a^2}{3}S(L)=\frac{2\pi}{3}a^3$$

例题 11.95 求 $\oint_L (xy+xz+yz)ds$，L 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，a 为非负常数

解　因为

$$xy+yz+xz=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]=-\frac{1}{2}a^2$$

所以

$$I=\oint_L -\frac{1}{2}a^2ds=-\frac{1}{2}S(L)=-\pi a^3$$

例题 11.96 求 $\oint_L xds$，L 为对数螺线 $r=ae^{k\varphi}$ 在圆 $r=a$ 的内部部分

解 $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi = ae^{k\varphi}\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi = ae^{k\varphi}\sin\varphi \end{cases}$，而 $ds = \sqrt{[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2} = \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi = ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$

所以

$$I = \int_{-\infty}^{0} ae^{k\varphi}\cos\varphi \cdot ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi = a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^{0}\cos\varphi e^{2k\varphi}d\varphi = \frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$$

第 25 讲：第一类曲面积分

(一)、概念与主要性质

定义 11.21 (第一类曲面积分)

设**有界光滑**曲面 Σ 的参数方程为

$$r(u,v) = (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in C^1(D_{uv})$$

且 $r'_u \times r'_v \neq \theta = (0,0,0)$ 设 Σ 上点 (x,y,z) 处的面密度为 $f(x,y,z)$，求曲面薄片 Σ 的总质量 M

1. 分割：局部线性化，用切平面代替曲面

$$\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n$$

设 Σ_i 面积为 Δs_i，直径为 $\Delta d_i, i = 1,2,\cdots,n$，记 $\lambda = \max\{d_1,\cdots,d_n\}$

2. 近似：任取 $(\xi_i,\eta_i) \in D_{i,uv}$，作积

$$f(x(\xi_i,\eta_i), y(\xi_i,\eta_i), z(\xi_i,\eta_i)) \cdot \Delta s_i \approx \Delta M_i$$

3. 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i), y(\xi_i,\eta_i), z(\xi_i,\eta_i)) \cdot \Delta s_i \approx M$$

4. 极限：若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i), y(\xi_i,\eta_i), z(\xi_i,\eta_i)) \cdot \Delta s_i$$

存在且唯一，则

$$M = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i), y(\xi_i,\eta_i), z(\xi_i,\eta_i)) \cdot \Delta s_i$$

我们称上述 M 为 $r(u,v)$ 在曲面 Σ 上的第一类曲面积分，记为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds$$

♣

注 • 我们称曲面积分中的 ds 为面积元

• r'_u 表示固定 v 的 u 曲线上点的方向向量，r'_v 表示固定 u 的 v 曲线上点的方向向量，$r'_u \times r'_v$ 表示曲面在 $(u,v) = (x,y,z)$ 处的切向量，而 $\left|r'_u \times r'_v\right| dudv$ 表示曲面在该点处的面积微元

定理 11.21 (曲面积分的积分中值定理)

设 $f \in C(\Sigma)$，Σ 为**有界光滑**闭曲面，则 $\exists (x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$，使得

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds = f(x_0,y_0,z_0)S(\Sigma) \Leftrightarrow f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds}{S(\Sigma)}$$

我们称 $\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds}{S(\Sigma)}$ 为 f 在 Σ 上取值的积分平均

(二)、曲面积分的计算方法

从定义式中无法直接计算曲面积分，接下来我们对曲面积分进行进一步处理。对于 Δs_i 有

$$\begin{aligned}\Delta s_i &= |r'_u \times r'_v|dudv \\ &= |r'_u(\theta_i,\alpha_i)\times r'_v(\theta_i,\alpha_i)|\Delta\sigma_i \quad \Delta\sigma_i = S(D_{i,uv})\end{aligned}$$

同线积分相同，为了凑出黎曼和的形式，我们需要拆添项

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\Delta s_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))|r'_u(\theta_i,\alpha_i)\times r'_v(\theta_i,\alpha_i)|\Delta\sigma_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))|r'_u(\xi_i,\eta_i)\times r'_v(\xi_i,\eta_i)|\Delta\sigma_i \\ &+ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))(|r'_u(\theta_i,\alpha_i)\times r'_v(\theta_i,\alpha_i)| - |r'_u(\xi_i,\eta_i)\times r'_v(\xi_i,\eta_i)|)\Delta\sigma_i \\ &= \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r'_u(u,v)\times r'_v(u,v)|dudv \quad \text{(上式第二部分趋于零)}\end{aligned}$$

使用恒等式

$$|a\times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a\cdot b)^2$$

则有

$$|r'_u \times r'_v| = \sqrt{|r_u|^2|r_v|^2 - (r'_u\cdot r'_v)^2} \triangleq EG - F^2$$

推论 11.5 (曲面积分的计算方法)

设 Σ 为光滑曲面，$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，且 $r'_u\times r'_v \neq \theta = (0,0,0)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

这里我们约定 $\begin{cases} E = |r'_u|^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 \\ G = |r'_v|^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 \\ F = r'_u\cdot r'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \end{cases}$

(三)、曲面积分的例子

例题 11.97 设 Σ 为球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$，求球面的表面积 $S(\Sigma)$

解 法 (I)(经纬度表示法)：设 Σ 为 $\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = a\cos\theta\sin\varphi \\ z = a\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}] \\ \varphi\in[-\pi,\pi] \end{cases}$

所以，$\Sigma: r(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta)$

$$\begin{aligned}
ds &= |r'_\theta \times r'_\varphi| d\theta d\varphi \\
&= |(-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta) \times (-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0)| d\theta d\varphi \\
&= \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{matrix} \right\| d\theta d\varphi \\
&= \left|(-a^2\cos^2\theta\cos\varphi, -a^2\cos^2\theta\sin\varphi, -a^2\sin\theta\cos\theta)\right| d\theta d\varphi \\
&= a^2\cos\theta d\theta d\varphi
\end{aligned}$$

所以

$$S(\sigma) = \iint\limits_{\Sigma} 1 ds = \iint\limits_{\substack{-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ -\pi\le\varphi\le\pi}} a^2\cos\theta d\theta d\varphi = a^2 (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta)(\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi) = 4\pi a^2$$

法 (II)(球坐标表示法)：设 Σ 为 $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$

所以

$$S(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} 1 ds = \iint\limits_{D_{\theta,\varphi}} \left|r'_\theta \times r'_\varphi\right| d\theta d\varphi = \iint\limits_{D_{\theta\varphi}} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi$$

而 $\begin{cases} E = |r'_\theta|^2 = |(a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)|^2 = a^2 \\ G = |r'_\theta|^2 = |(-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)|^2 = a^2\sin^2\theta \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = a^2\sin\theta \\ F = r'_\theta \cdot r'_\varphi = 0(\text{经线和纬线恒正交}) \end{cases}$

因此

$$S(\Sigma) = a^2 (\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta)(\int_0^{2\pi} d\varphi) = 4\pi a^2$$

法 (III)(直角坐标表示法)：计算上半球面，设 Σ_1 为 $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$

所以

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{1 + (\frac{-x}{z})^2 + (\frac{-y}{z})^2} dxdy = \frac{a}{z} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

即

$$S(\Sigma_1) = \iint\limits_{\Sigma_1} 1 ds = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

作极坐标变换，则

$$S(\Sigma_1) = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^{a} a\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr) = 2\pi a$$

注 • 若 $\Sigma : z = z(x, y)$(显式表示)，$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D_{xy}$，则

$$\begin{cases} r'_x = (1,0,z'_x) \\ r'_y = (0,1,z'_y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = |r'_x|^2 = 1+z_x^2 \\ G = |r'_y|^2 = 1+z_y^2 \Rightarrow ds = \sqrt{EG-F^2}dxdy = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\ F = r'_x \cdot r'_y = z'_x z'_y \end{cases}$$

- 计算 $|r'_u \times r'_v|$ 时，可以用叉乘算出向量再取模或者直接计算 $\sqrt{EG-F^2}$
- $V(\Omega) = \int_0^a S(\Sigma_a)da = \frac{4}{3}\pi a^3$，即球体的体积可以看作一个个球壳表面积的累加，我们对 n 维球体的体积

$V(B_n(a)) = \frac{(\sqrt{\pi}a)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ 求微分，即可得到 n 维球体的表面积 $S(B_n(a)) = d(V(B_n(a)))$

第 26 讲：曲线、曲面积分的计算与证明

在一定的条件下，重积分、曲线、曲面积分都具有 $\begin{cases} \text{①奇偶对称性} \\ \text{②轮换对称性} \end{cases}$

(一)、例题

推论 11.6 (曲线积分与曲面积分的奇偶对称性)

- 若 $f \in C(L)$，且 L 关于 $y=0$ 对称，L 光滑，则

$$\begin{cases} \text{若 } f(x,-y) = -f(x,y)，\text{则 } I = \int_L f(x,y)ds = 0 \\ \text{若 } f(x,-y) = f(x,y)，\text{则 } I = \int_L f(x,y)ds = 2\int_{L_1} f(x,y)ds，L_1 \text{ 是 L 的 } y>0 \text{ 部分} \end{cases}$$

- 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续，且 Σ 关于 $z=0$ 坐标面对称，则

$$\begin{cases} \text{若 } f(x,y,z) = -f(x,y,-z)，\text{则 } \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds = 0 \\ \text{若 } f(x,y,z) = f(x,y,-z)，\text{则 } \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds = 2\iint\limits_{\Sigma^+} f(x,y,z)ds，\Sigma^+ \text{ 是 } \Sigma \text{ 在 } z>0 \text{ 的部分} \end{cases}$$

♡

证明 设 L 的方程为 $x = \varphi(y) \in C^1[-h,h]$，则 $ds = \sqrt{[\varphi'(y)]^2+1}dy$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{-h}^{h} f(\varphi(y),y)\sqrt{[\varphi'(y)]^2+1}dy$$
$$= \int_{-h}^{0} f(\varphi(y),y)\sqrt{[\varphi'(y)]^2+1}dy + \int_0^h f(\varphi(y),y)\sqrt{[\varphi'(y)]^2+1}dy$$

考虑上式第一部分，令 $y=-v$，

$$\int_{-h}^{0} f(\varphi(y),y)\sqrt{[\varphi'(y)]^2+1}dy = \int_h^0 f(\varphi(-v),-v)\sqrt{[\varphi'(-v)]^2+1}d-v$$

因为 $f(x,y)$ 关于 $x=0$ 对称，所以 $\varphi(-v) = \varphi(v), [-\varphi'(-v)]^2 = [\varphi'(v)]^2$

$$\int_h^0 f(\varphi(-v),-v)\sqrt{[\varphi(-v)]^2+1}d-v = \int_0^h f(\varphi(-v),-v)\sqrt{[\varphi'(v)]^2+1}dv = \int_0^h -f(\varphi(v),-v)\sqrt{[\varphi'(v)]^2+1}dv$$

代入原式，即得

$$I = \int_L f(x,y)ds = 0$$

□

例题 11.98 计算重积分

$$\iint\limits_D \frac{|xy|(x^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}d\sigma, D: x^4+y^4 \le a^2$$

解 因为 D 具有轮换对称性，所以

$$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma=\iint\limits_D \frac{|xy|(y^{\frac{2}{7}}+1)}{y^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{2}{7}}+2}$$

因此

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{|xy|(y^{\frac{2}{7}}+1)}{y^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{2}{7}}+2}+\frac{|xy|(x^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D |xy|d\sigma$$

另一方面，被积函数 $|xy|$ 分别是 x,y 的偶函数，且被积区域关于 $x=0, y=0$ 都对称，所以

$$I=\frac{1}{2}\cdot 4\iint\limits_{D_1} xyd\sigma, D_1 \text{为 D 在第一象限的部分}$$

设 $\begin{cases} x=\sqrt{r}\cos\theta \\ y=\sqrt{r}\sin\theta \end{cases}$，则 $x^4+y^4=r^2\le a^2 \Rightarrow \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial r,\theta}\right|drd\theta=\begin{vmatrix} \dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{r\cos\theta}} & -\dfrac{r\sin\theta}{2\sqrt{r\cos\theta}} \\ \dfrac{\sin\theta}{2\sqrt{r\sin\theta}} & \dfrac{r\cos\theta}{2\sqrt{r\sin\theta}} \end{vmatrix}drd\theta=\frac{1}{4\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}drd\theta$$

所以

$$I=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{r^2\sin\theta\cos\theta}\cdot\frac{1}{4\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}drd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a rdr=\frac{\pi}{8}a^2$$

例题 11.99 计算重积分

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dV, \Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$$

解 因为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$ 具有轮换对称性，所以

$$I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dV=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)dV=\iiint\limits_\Omega (z^2+x^2)dV$$

即

$$I=\frac{2}{3}\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dV$$

再利用被积函数分别关于 x,y,z 为偶函数，被积区域也关于 $x=0,y=0,z=0$ 对称，则

$$I=\frac{16}{3}\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz, \Omega_1 \text{为第一卦限的部分}$$

使用球坐标变换

$$I=\frac{16}{3}\iiint\limits_{\Omega_1} r^4\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^a r^4dr=\frac{16}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{a^2}{5}=\frac{8\pi}{15}a^2$$

例题 11.100 计算曲面积分

$$\oiint\limits_\Sigma (x^2+y^2)ds, \Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$$

解 因为 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 具有轮换对称性，所有

$$I=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}a^2ds=\frac{2}{3}a^2S(\Sigma)=\frac{8}{3}\pi a^4$$

例题 11.101 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{\sqrt{|x|}+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}ds,\Sigma:|x|+|y|+|z|=a,a>0$$

解 因为 $\dfrac{y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}$ 是关于 y 的连续的奇函数，且 Σ 关于 $y=0$ 坐标面对称，所以

$$\oiint_{\Sigma}\frac{y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}=0$$

由于 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=a$ 具有轮换对称性，则

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}ds=\oiint_{\Sigma}\frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}ds=\oiint_{\Sigma}\frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}ds$$

即

$$I=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}1ds=\frac{1}{3}S(\Sigma)=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}a)^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2$$

例题 11.102 计算 $\Sigma:(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ 的面积 $S(\Sigma)$

解 分析：首先 Σ 只在 $xy>0$ 有定义，即 xy 同号，即图像只在第一、三、五、七卦限

又因为 $(x,y,z),(-x,-y,z)$ 都在 Σ 上，$(x,y,z),(x,y,-z)$ 都在 Σ 上，即 Σ 关于 $z=0$ 和 z 轴对称

所以，只需要计算 Σ 在第一卦限部分 Σ_1 的面积 $S(\Sigma_1)$，再乘以 4 倍即可

作球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$，则 $(x^2+y^2+z^2)^2=r^4=2a^2r\sin\theta\cos\varphi r\sin\theta\sin\varphi$

$$\Rightarrow r=a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$$

$$\Rightarrow \Sigma_1: r(\theta,\varphi)=(x,y,z)=(a\sin^2\theta\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi},a\sin^2\theta\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi},a\sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin 2\varphi})$$

$$\Rightarrow S(\Sigma_1)=\iint_{\Sigma_1}\sqrt{EG-F^2}d\theta d\varphi$$

而 $\begin{cases}E=|r'_\theta|^2\\ G=|r'_\varphi|^2\\ F=r'_\theta\cdot r'_\varphi\end{cases}$，经计算，$EG-F^2=a^4\sin^4\theta$

$$S(\Sigma_1)=\iint_{\Sigma_1}a^2\sin^2\theta d\theta d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi^2}{8}a^2$$

所以

$$S(\Sigma)=4S(\Sigma_1)=\frac{\pi^2}{2}a^2$$

例题 11.103 求 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在 Σ 上的平均值 $\bar{f}$，Σ 是立体 $\Omega:0\le x,y,z\le 1$ 的全表面

解

$$\bar{f}=\frac{\oiint_{\Sigma}(x+y+z)ds}{S(\Sigma)}$$

一方面，我们有 $S(\Sigma)=6\cdot 1^2=6$

另一方面 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6$，其中 $\Sigma_1:y=0,\Sigma_2:x=0,\Sigma_3:z=0,\Sigma_4:y=1,\Sigma_5:x=1,\Sigma_6:z=1$

所以

$$\oiint_{\Sigma} f\,ds=\iint_{\Sigma_1} f\,ds+\cdots+\iint_{\Sigma_6} f\,ds$$

我们将被积函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 看作 y 的函数，对于 $\Sigma_1:y=0=0x+0z$，则

$$\iint_{\Sigma_1} f\,ds=\iint_{y=0}(x+y+z)ds=\int_0^1(\int_0^1(x+z)\sqrt{1^2+0^2+0^2}dx)dz=1$$

同理可得，$x=0$ 或 $z=0$ 时，积分值也为 1，即 $\iint_{\Sigma_2} f\,ds=\iint_{\Sigma_3} f\,ds=1$

对于 $\Sigma_4:y=1=1+0x+0z$，则

$$\iint_{\Sigma_4} f\,ds=\iint_{y=1}(x+z+1)ds=\int_0^1(\int_0^1(x+z+1)\sqrt{1^2+0^2+0^2}dx)dz=2$$

同理可得，$x=1$ 或 $z=1$ 时，积分值也为 2，即 $\iint_{\Sigma_5} f\,ds=\iint_{\Sigma_6} f\,ds=2$

因此 $\oiint_{\Sigma} f\,ds=3\times 1+3\times 2=9$，故

$$\bar{f}=\frac{\oiint_{\Sigma}(x+y+z)ds}{S(\Sigma)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

例题 11.104 求 $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}ds$，其中 L 是双纽线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\geq 0)$

解 作极坐标变换 $\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$ 其中 $\rho(\theta)=a\sqrt{\cos 2\theta}$

令 $\rho(\theta)=0$，得 $\theta\in\pm\frac{\pi}{4}$，即 $\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

且 $\begin{cases}f(x,y)=x\sqrt{x^2-y^2}=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\cdot\sqrt{\rho^2(\theta)\cos 2\theta}=a^2\cos\theta(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\\ ds=\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}d\theta=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta\end{cases}$

因此，

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}\sqrt{2}a^3$$

第 27 讲：第二类曲线积分

(一)、概念与主要性质

定义 11.22 (第二类曲线积分)

设向量场 (力场) $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在区域 Ω 中连续，L^+ 是 $\mathbb{R}^3$ 的**有向光滑**曲线

$\overrightarrow{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$，且 $r'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))\neq\theta$，且 $L^+\in\Omega$，试求 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 沿 L^+ 的正向做的功 W

1. 分割：局部以直代曲

$$L=L_1\sqcup\cdots\sqcup L_n$$

设 L_i 的弧长为 ΔS_i，用向量表示为 $\overrightarrow{\Delta S_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$，$\lambda = \max\{|\Delta S_1|, \cdots, |\Delta S_n|\}$

2. 近似：任取 $(\xi_i, \tau_i, \eta_i) \in L_i$，作积得

$$\overrightarrow{A}(\xi_i, \tau_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} = \Delta W_i$$

3. 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A}(\xi_i, \tau_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} \approx W$$

4. 极限：若极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A}(\xi_i, \tau_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{\Delta S_i}$$

存在且唯一，则有

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A}(\xi_i, \tau_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} \triangleq \int_L \overrightarrow{A}(x, y, z) \cdot d\overrightarrow{S}$$

我们称 $\int_L \overrightarrow{A}(x, y, z) \cdot d\overrightarrow{S}$ 为向量场 $\overrightarrow{A}$ 沿着曲线 L^+ 的曲线积分 ♣

注 我们称上述 $d\overrightarrow{S}$ 为有向弧长元

(二)、第二类曲线积分的计算方法

(1). 对坐标的曲线积分

$$\int_L \overrightarrow{A}(x, y, z) d\overrightarrow{S} = \int_L (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

(2). 因为 $|d\overrightarrow{S}| = |(dx, dy, dz)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = ds$——弧长元

所以 $\sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 + (\frac{dz}{ds})^2} = 1$，令 $\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos\alpha \\ \frac{dy}{ds} = \cos\beta \\ \frac{dz}{ds} = \cos\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = \cos\alpha ds \\ dy = \cos\beta ds \\ dz = \cos\gamma ds \end{cases}$，代入对坐标的曲线积分得

$$\int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t))\cos\alpha(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\cos\beta(t) + R(x(t), y(t), z(t))\cos\gamma(t)] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

其中，$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为单位法向量，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是关于 x,y,z 的函数

性质

1. 若有向曲线 L^+ 为 x 轴 $[a, b]$ 上的直线，则 $dy = dz = 0$，所以

$$\int_{L^+} \overrightarrow{A}(x, y, z) d\overrightarrow{S} = \int_{[a,b]} P(x, 0, 0) dx + 0 + 0 = \int_a^b P(x, 0, 0) dx$$

所以，一元函数的定积分是一种特殊的第二类曲线积分

2. 负负得正

$$\int_{L^+} \overrightarrow{A}(x, y, z) d\overrightarrow{S} = -\int_{L^-} \overrightarrow{A}(x, y, z) d\overrightarrow{S}$$

定理 11.22 (格林公式)

设 $P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$，D 是 xoy 平面内的区域，则

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

其中，∂D 为 D 的正向边界，即沿着 ∂D 走时，D 总在左侧 (逆时针)

证明 Case1：设 D 是上下型，即 $\begin{cases}x\in[a,b]\\ y\in[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]\end{cases}$

记 $L_1:\begin{cases}x\in[a,b]\\ y=\varphi_1(x)\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=b\\ y\in[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x\in[b,a]\\ y=\varphi_2(x)\end{cases}$，$L_4:\begin{cases}x=a\\ y\in[\varphi_2(x),\varphi_1(x)]\end{cases}$

所以

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx=\int_{L_1}P(x,y)dx+\int_{L_2}P(x,y)dx+\int_{L_3}P(x,y)dx+\int_{L_4}P(x,y)dx$$

因为在 L_2,L_4 上，x 恒为定值，$\Rightarrow dx=0$，所以

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} P(x,y)dx&=\int_{L_1}P(x,y)dx+\int_{L_3}P(x,y)dx\\&=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx+\int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx\\&=-\int_a^b[P(x,\varphi_2(x))-P(x,\varphi_1(x))]dx\\&=-\int_a^b(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy)dx\\&=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\end{aligned}$$

Case2：设 D 是左右型，即 $\begin{cases}x\in[\varphi_1(y),\varphi_2(y)]\\ y\in[c,d]\end{cases}$

记 $L_1:\begin{cases}x\in[\varphi_1(y),\varphi_2(y)]\\ y=c\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=\varphi_2(y)\\ y\in[c,d]\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x\in[\varphi_2(y),\varphi_1(y)]\\ y=d\end{cases}$，$L_4:\begin{cases}x=\varphi_1(y)\\ y\in[d,c]\end{cases}$

所以

$$\oint_{\partial D} Q(x,y)dy=\int_{L_1}Q(x,y)dy+\int_{L_2}Q(x,y)dy+\int_{L_3}Q(x,y)dy+\int_{L_4}Q(x,y)dy$$

因为在 L_1,L_3 上，y 恒为定值，$\Rightarrow dy=0$，所以

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} Q(x,y)dy&=\int_{L_2}Q(x,y)dy+\int_{L_4}Q(x,y)dy\\&=\int_c^d Q(\varphi_2(y),y)dy+\int_d^c Q(\varphi_1(y),y)dy\\&=\int_c^d[Q(\varphi_2(y))-Q(\varphi_1(y),y)]dy\\&=\int_c^d(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx)dy\\&=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy\end{aligned}$$

所以，若 D 既是上下型，又是左右型时，即 D 是曲边矩形时，Case1 和 Case2 同时成立，相加得

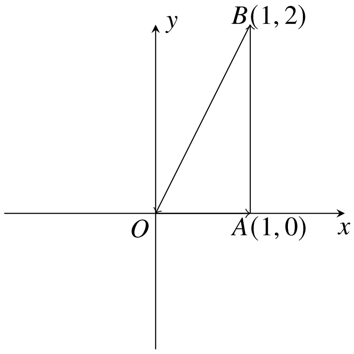
$$\oint_{\partial D} Pdx + \oint_{\partial D} Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

更一般地，若 D 可化为有限个曲边矩形域的无交并，则格林公式均成立 □

注 若 $a < b$，记 $x \in [b, a]$ 表示 x 从 b 积分积到 a

(三)、计算下列线积分

例题 11.105 L 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上的有向闭曲线，如图



试求曲线积分

$$\oint_L xydx + x^2dy$$

解 $\oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$，其中

L_1 为 $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ $0 \le x \le 1$，L_2 为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases}$ $0 \le y \le 2$，L_3 为 $\begin{cases} x = x \\ y = 2x \end{cases}$，特别注意 $x : 1 \to 0$

所以 $\begin{cases} \int_{L_1} xydx + x^2dy = \int_0^1 0dx + 0 = 0 \\ \int_{L_2} xydx + x^2dy = \int_0^2 1^2dy = 2 \\ \int_{L_3} xydx + x^2dy = \int_1^0 x(2x)dx + x^2d(2x) = -\int_0^1 4x^2dx = -\frac{4}{3} \end{cases}$

因此

$$\oint_L xydx + x^2dy = 0 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

称上述曲面积分为闭曲线在立场内的环流量，简称环量

例题 11.106 计算 $I = \oint_{\partial D} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$，$\partial D$ 为 $x^2 + y^2 = a^2$ 的正向

解 设 ∂D 为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$，则

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t)d(a\cos t) + a\cos td(a\sin t)}{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

在该向量场下，无论是大圆还是小圆，环流量均为 2π

例题 11.107 设 L^+ 为包含原点的任意**正向光滑闭**曲线，求证

$$I = \oint_{\partial D} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \equiv 2\pi$$

证明 取任意小的 $\varepsilon > 0$，使正向圆周 $l^+ : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ 在 L^+ 所围的区域内部

这两条闭曲线 (圆 l^+ 和 L^+) 围城了一个多连通区域 (内部有洞)，设该区域为 D，我们在 D 上使用 Green 公式

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$\oint_{L^+ + l^-} Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2})dxdy = \iint_D dxdy = 0$$

所以

$$\oint_{L^+} + \oint_{l^-} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \oint_{L^+} = 2\pi \\ \oint_{l^+} = 2\pi \end{cases}$$

□

第 28 讲：Green 公式及其应用

(一)、Green 公式

定理 11.23 (Green 公式)

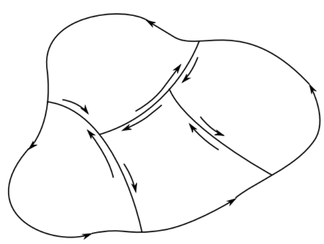
设 D 是 xoy 平面中连续光滑的闭曲线 L 围成的区域，向量场 $\overrightarrow{A}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \in C^1(D)$，则有

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

其中 $L = \partial D$ 是 D 的正向边界

证明 Case 1：若 D 是曲边矩形域时，于第 27 讲已证明

Case 2：若 D 由有限个曲边矩形域组成时，则在曲边矩形的交界线 L_i 处，分别沿两个不同方向 L_i^+, L_i^- 积分，即积分上下限对调，和为零。累加可化为最外圈 ∂D 的曲线积分，即格林公式仍成立



Case 3：若 D 是有洞的多连通域时，任意作辅助线将该区域连接起来形成多个单连通区域，在各个单连通区域分别使用格林公式，而在辅助线上的积分被正反方向计算两次，和为零，累加可化为外圈与内圈的曲线积分之和，即格林公式仍成立 □

注 若为有洞的多连通区域如圆环，正向边界指的是：外边界逆时针，内边界顺时针

命题 11.3

设 $\overrightarrow{A}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \in C^1(D)$，D 是 xoy 平面中的单连通区域，则以下四个命题等价

①$\overrightarrow{A}(x,y)$ 是 D 中的无旋场，即 $\nabla \times \overrightarrow{A}(x,y) \equiv \theta$

②$\overrightarrow{A}(x,y)$ 是 D 中的保守场 ($\overrightarrow{A}(x,y)$ 在 D 中做功，功量与路径无关的场)

③$\overrightarrow{A}(x,y)$ 是 D 中的有势场，即 $\overrightarrow{A}(x,y)$ 是 D 中的梯度场，即

$$\exists\varphi(x,y)=C^1(D),s.t.d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

称此时的 $\varphi(x,y)$ 为向量场 $\overrightarrow{A}(x,y)$ 的势函数 (原函数)

④ODE(常微分方程)$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为恰当方程 (全微分方程)，即

$$\exists\varphi(x,y)\in C^1(D),s.t.d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\Leftrightarrow\varphi(x,y)=const \text{ ——隐式通解}$$

证明 ①⇒②：已知 $\overrightarrow{A}(x,y)$ 在 D 中无旋，即

$$\nabla\times\overrightarrow{A}(x,y)\equiv 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P(x,y) & Q(x,y) & 0\end{vmatrix}=\theta$$

因为没有 k 方向的分量，故 $\dfrac{\partial}{\partial z}P(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial z}Q(x,y)=0$，化简得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$

要证明 $\overrightarrow{A}(x,y)$ 是 D 中的保守场，即证明做功与路径无关

考虑从 A 到 B 的两条曲线 L_1,L_2，即证明 $\int_{L_1}=\int_{L_2}$

即证明 $\int_{L_1}+\int_{L_2^-}=0$，由 Green 公式

$$\int_{L_1+L_2^-}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D 0dxdy=0$$

②⇒③：由②保证线积分的值只与起点和终点无关，设 $A,B\in D$，我们令

$$\varphi(x,y)=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

下证明 $d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，即证 $\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=P(x,y)\\ \dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}$

只证明 $\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$，其余情况类似

因为

$$\varphi(x+\Delta x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy$$

由条件知线积分值与路径无关，对于上式第二项，取水平路径 $\begin{cases}x\in[x,x+\Delta x]\\ y=y\end{cases}$，则

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy=\int_x^{x+\Delta x}P(x,y)dx(\text{y 为定值})$$

因此

$$\varphi(x+\Delta x,y)=\varphi(x,y)+\int_x^{x+\Delta x}P(x,y)dx$$

令 $\Delta x\to 0$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}P(x,y)dx}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x\le\xi\le x+\Delta x}}\frac{P(\xi,y)\cdot\Delta x}{\Delta x}=P(x,y)$$

此时有

$$\overrightarrow{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=(\varphi_x',\varphi_y')=\nabla\varphi$$

③⟹④：已知 $\overrightarrow{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 为 D 中的有势场，即 $\exists\varphi(x,y)\in C^1(D)$，使得

$$d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

其中 $\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$，此时我们令

$$d\varphi(x,y)=Pdx+Qdy=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv 0\Rightarrow\varphi=g(y)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv 0\Rightarrow\varphi=h(x)\end{cases}\Rightarrow\varphi(x,y)\text{ 只能恒为常数}$$

④⟹①：已知 $Pdx+Qdy=0$ 为恰当方程，即 $\exists\varphi\in C^1(D)$，使得 $d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

此时有 $\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}$，我们要证 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D$

因为 $\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\in C(D)\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\in C(D)\end{cases}$，由偏导连续知，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D$ □

注 上述命题要求单连通区域，即区域内没洞，这样才能保证②⟹③中任取的点 A,B 和曲线 L_1,L_2 能取到

根据②⟹③的思路，我们可以快速找到势函数：取定一点 (x_0,y_0)，只通过水平线加上垂直线到达 (x,y)，此时 dy,dx 分别为零

$$\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy\text{或}\varphi(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx$$

(二)、Green 公式的应用

推论 11.7 (使用 Green 公式求区域面积)

我们取 $\begin{cases}P(x,y)=-y\\ Q(x,y)=x\end{cases}$，则 $\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1\end{cases}$

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D 2dxdy=2S(D)$$

例题 11.108 计算椭圆 D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ 的面积

设 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$，$t\in[0,2\pi]$，则

$$\begin{aligned}S(D)&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-b\sin td(a\cos t)+a\cos td(b\sin t)]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\sin^2t+\cos^2t)dt\\&=\frac{1}{2}ab\cdot 2\pi\\&=\pi ab\end{aligned}$$

例题 11.109 设 L^+ 是包含原点的任意一条正向闭路，求证 $\oint_{L^+}\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=2\pi$

证明 令 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，因为原点是奇点 (各分量偏导均为零，所以需要将原点去掉)

取 $\forall\varepsilon>0$ 充分小，使 $l^+:x^2+y^2=\varepsilon^2$ 包含在 L^+ 内

这两条闭曲线 (圆 l^+ 和 L^+) 围城了一个多连通区域 (内部有洞)，设该区域为 D，我们在 D 上使用 Green 公式

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$\oint_{L^+ + l^-} Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2})dxdy = \iint_D dxdy = 0$$

因为前面已证任意圆周上该积分值均为 2π，即 $\oint_{l^+} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi$，所以

$$(\oint_{L^+} + \oint_{l^-})\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \oint_{L^+} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi \\ \oint_{l^+} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi \end{cases}$$

□

第 29 讲：第二类曲面积分

(一)、概念与主要性质

定义 11.23

设流体的流速 $\overrightarrow{A}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \in C(\Omega)$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，设有向曲面 $\Sigma: r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in D_{uv}, r'_u \times r'_v \neq \theta$，$\Sigma \subset \Omega$，且 Σ 光滑，求单位时间内流体通过 Σ 的流量 Φ

1. 分割：
$$\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n$$
记 ΔS_i 为 Σ_i 对应的切平面的面积，则 $\Delta S_i = |r'_u \times r'_v|dudv$，$d_i$ 为 Σ_i 的直径，记 $\lambda = \max\{d_1, \cdots, d_n\}$
2. 近似：任取 $(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \in \Sigma_i$，作积
$$\overrightarrow{A}(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{n}\Delta S_i$$
若流速 $\overrightarrow{A}(\xi_i, \eta_i, \tau_i) = \overrightarrow{v_0}$，曲面的单位法向量为 $\overrightarrow{n^\circ}$，单位时间通过曲面 Σ 的流量可以写为
$$|\overrightarrow{v_0}|\cos\theta \cdot S(\Sigma) = |\overrightarrow{v_0}||\overrightarrow{n^\circ}|\cos\theta S(\Sigma) = \overrightarrow{v_0} \cdot \overrightarrow{n} S(\Sigma) = \overrightarrow{v_0} \cdot \overrightarrow{S(\Sigma)n^\circ}$$
3. 求和：
$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A}(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{n}\Delta S_i \approx \Phi$$
4. 极限：
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A}(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{n}\Delta S_i = \Phi$$
若上述极限存在且唯一，则我们记 Σ 在向量场 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 上的曲面积分为
$$\iint_\Sigma \overrightarrow{A}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{n}dS = \iint_\Sigma \overrightarrow{A}(x,y,z)d\overrightarrow{S} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A}(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \cdot \overrightarrow{n}\Delta S_i$$
我们记 $d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{n}dS$，称为有向面积元

♣

性质

1. $\iint\limits_{\Sigma}(C_1\overrightarrow{A}(x,y,z)+C_2\overrightarrow{B}(x,y,z))\cdot\overrightarrow{n}dS=c_1\iint\limits_{\Sigma}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}+C_2\iint\limits_{\Sigma}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$
2. $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}=\iint\limits_{\Sigma_1}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}+\iint\limits_{\Sigma_2}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}$

(二)、第二类曲面积分的计算方法

我们先对 $d\overrightarrow{S}$ 进行分析：

$$d\overrightarrow{S}=\overrightarrow{n}^{\circ}dS=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)ds=(\cos\alpha ds,\cos\beta ds,\cos\gamma ds)=(dydz,dzdx,dxdy)$$

因此，对第二类曲面积分可以进一步化简

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

此外，第二类曲面积分可以化简为三个第二类曲面积分相加的形式：

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)d\overrightarrow{S}=\iint\limits_{\Sigma}[(P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R)]\cdot d\overrightarrow{S}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(P,0,0)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)+\iint\limits_{\Sigma}(0,Q,0)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)+\iint\limits_{\Sigma}(0,0,R)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+\iint\limits_{\Sigma}Qdzdx+\iint\limits_{\Sigma}Rdxdy$$

推论 11.8 (曲面积分化简为参数域上的二重积分)

设 Σ 有参数式 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C^1(D_{uv})$，则

$$\overrightarrow{n}^{\circ}dS=(\pm1)\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}\cdot ds=(\pm1)\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}|r'_udu\times r'_vdv|=\pm r'_u\times r'_vdudv$$

所以

$$I=\pm\iint\limits_{D_{uv}}(P,Q,R)\cdot(r'_u\times r'_v)dudv=\pm\iint\limits_{D_{uv}}\begin{vmatrix}P&Q&R\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}dudv$$

特别地，若所给曲面为显式曲面 $z=z(x,y)$ 时，我们有 $\begin{cases}x=x\\y=y\\z=z(x,y)\end{cases}\quad(x,y)\in D_{xy}$

因此 $r(x,y)=r(x,y,z(x,y))\Rightarrow\begin{cases}r'_x=(1,0,z'_x)\\r'_y=(0,1,z'_y)\end{cases}$，此时

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\overrightarrow{A}(x,y,z)\cdot d\overrightarrow{S}=\pm\iint\limits_{D_{xy}}\begin{vmatrix}P&Q&R\\1&0&z'_x\\0&1&z'_y\end{vmatrix}dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}[R-Pz'_x-Qz'_y]dxdy$$

取正号，则 $\cos\gamma>0$，即为曲面上侧

注 上述积分中的正负号与法向量取的是内法向量还是外法向量有关，如取球面的上侧，则取正号。
也与 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的符号有关

例题 11.110 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ 的上侧，求向量场 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$ 通过 Σ 的通量 Φ

解 Step1：写出 Φ 的表达式

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{A}(x,y,z)\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

Step2：化简计算

法 I：Σ 为显式曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow D_{xy}: x^2+y^2\le a^2, z>0$，因此

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{x^2+y^2\le a^2} [(a^2-x^2-y^2)^2 - x^2\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} - y^2\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}]dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le a^2} (a^2-x^2-y^2)dxdy \quad (\text{上式后两项为奇函数，二重积分值为零}) \\
&= \iint_{D_{r\theta}} (a^2-r^2)rdrd\theta \\
&= (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^a (a^2r-r^3)dr) \\
&= \frac{\pi}{2}a^4
\end{aligned}$$

法 II：$\Sigma : r(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$ $\begin{cases}\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \varphi\in[0,2\pi]\end{cases}$

所以

$$\begin{aligned}
\Phi &= +1\iint_{D_{\theta\varphi}} \begin{vmatrix} (a\sin\theta\cos\varphi)^2 & (a\sin\theta\sin\varphi)^2 & (a\cos\theta)^2 \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)]d\theta d\varphi \\
&= a^4\int_0^{2\pi}[\frac{1}{4}+\frac{3\times 1}{4\times 2}\times\frac{\pi}{2}(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)]d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}a^4
\end{aligned}$$

上述过程使用了结论 $\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}xdx = \int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}xdx = 0, \forall n\in\mathbb{N}$

法 III：$\overrightarrow{A}=(x^2,y^2,z^2)$，上半球面单位 (外) 法向量 $\overrightarrow{n}=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$

$$\Phi = \iint_{\Sigma}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}dS = \iint_{\Sigma}(\frac{x^3}{a}+\frac{y^3}{a}+\frac{z^3}{a})ds \overset{\text{偶倍奇零}}{=} 0+0+\iint_{\Sigma}\frac{z^3}{a}dS = \iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

$$= \frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\le a^2}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+(\frac{-x}{z})^2+(\frac{-y}{z})^2}dxdy = a\iint_{x^2+y^2\le a^2}(a^2-x^2-y^2)dxdy = \frac{\pi}{2}a^4$$

注 第二类曲面积分计算小口诀：一代二投三定号——先代入求得表达式，再将被积曲面进行投影得到二重积分的被积区域，最后根据法向量的方向确定正负。

(三)、曲面 Σ 的定向

有向曲面 Σ 的两侧由 Σ 的单位法向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 来具体确定：

$$\begin{cases}\text{若 } \cos\gamma\ge 0(\le 0) \text{ 恒成立，则表示 } \Sigma \text{ 取上侧 (下侧)} \\ \text{若 } \cos\beta\ge 0(\le 0) \text{ 恒成立，则表示 } \Sigma \text{ 取右侧 (左侧)} \\ \text{若 } \cos\alpha\ge 0(\le 0) \text{ 恒成立，则表示 } \Sigma \text{ 取前侧 (后侧)}\end{cases}$$

若为参数式 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，其中

$$\overrightarrow{n^\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}=\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}i+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}j+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}k}{|r'_u\times r'_v|}$$

所以 $\begin{cases} \text{若 } \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\geq 0(\leq 0) \text{ 在 } D_{uv} \text{ 上恒成立，表示 } \Sigma \text{ 取上侧 (下侧)}\\ \text{若 } \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\geq 0(\leq 0) \text{ 在 } D_{uv} \text{ 上恒成立，表示 } \Sigma \text{ 取右侧 (左侧)}\\ \text{若 } \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\geq 0(\leq 0) \text{ 在 } D_{uv} \text{ 上恒成立，表示 } \Sigma \text{ 取前侧 (后侧)}\end{cases}$

第 30 讲：Gauss 公式及其应用

(一)、Gauss 公式

定理 11.24 (Gauss 公式)

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中分片光滑的有向曲面 Σ 围成的有界闭区域，$\overrightarrow{A}(x,y,z)=(P,Q,R)\in C^1(\Omega)$，则有

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV$$

其中 Σ 的法向量 $\overrightarrow{n}$ 朝外，$\Sigma=\partial\Omega$

证明 **Case 1**：① 若 Ω 为上下型 (z 型) 曲面长方体，即侧面为柱体，设顶面和底面 $\Sigma_1: z=z_1(x,y),\Sigma_2: z=z_2(x,y)$，由侧面是柱体知 Σ_3 上有 $\cos\gamma=0$(γ为与 z 轴的夹角) $\Rightarrow \cos\gamma dS=dxdy=0\Rightarrow \iint_{\Sigma_3} Rdxdy=0$，因此

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} Rdxdy &= \iint_{\Sigma_1} Rdxdy+\iint_{\Sigma_2} Rdxdy+\iint_{\Sigma_3} Rdxdy\\ &=(-1)\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))dxdy+\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))dxdy\\ &=\iint_{D_{xy}}[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz]dxdy\\ &=\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dV\end{aligned}$$

②③ Ω 为左右型 (y 型) 和前后型 (x 型) 曲面长方体时，我们同理可得

$$\begin{cases}\displaystyle\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} Pdydz=\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}dV\\ \displaystyle\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} Qdzdx=\iiint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}dV\end{cases}$$

Case 2：当 Ω 同时为上下型、左右型、前后型时，上述三式同时成立，相加得

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV$$

Case 3：当 Ω 可分成有限个曲面长方体的无交并时，在相邻曲面长方体的交面上，曲面积分分别从正反两

面计算了一次，故抵消，最终得到在曲面边界的曲面积分，因此 Gauss 公式恒成立，即

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dV$$

□

定义 11.24 (散度)

若 $\overrightarrow{A}(x, y, z) = (P, Q, R)$，我们记 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$，我们称

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \triangleq div(\overrightarrow{A})$$

为向量场 $\overrightarrow{A}(x, y, z)$ 的散度 (divergence)

♣

有了散度的定义，我们可以进一步对 Gauss 公式化简，即

定理 11.25 (Gauss 公式的向量形式)

$$\oiint_{\partial\Omega} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n^{\circ}} ds = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \overrightarrow{A})dV$$

物理意义：上式左侧表示单位时间内流出 Ω 的流量，上式右侧表示单位时间内在 Ω 内产生的流量，即流量是守恒的

♡

(二)、Gauss 公式的应用

推论 11.9 (利用 Gauss 公式计算体积)

① 当 $P = x, Q = y, R = z$ 时，我们有

$$\oiint_{\partial\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1)dV = 3V(\Omega)$$

因此，$V(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{\partial\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$

② 令 $\begin{cases} P = x \\ Q = R = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} Q = y \\ P = R = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} R = z \\ P = Q = 0 \end{cases}$ 我们有

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = \oiint_{\partial\Omega} xdydz = \oiint_{\partial\Omega} ydzdx = \oiint_{\partial\Omega} zdxdy$$

哪个好算用哪个即可

♡

例题 11.111 计算椭球面 $\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成立方体 Ω 的体积 $V(\Omega)$

解 Step 1：：将 Σ 参数化：$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$，$\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$

根据推论 11.7，我们有

$$
\begin{aligned}
V(\Omega) &= \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \\
&= \pm\frac{1}{3}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} d\theta d\varphi \\
&= \pm\frac{1}{3}\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & b\sin\theta\sin\varphi & c\cos\theta \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} d\theta d\varphi \\
&= \pm\frac{1}{3}\iint_{D_{\theta\varphi}}\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & b\sin\theta\sin\varphi & c\cos\theta \\ a\cos\theta\cos\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & -c\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\varphi \\
&= \frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^3\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\sin\theta\cos^2\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)d\theta\right)d\varphi \\
&= \frac{4}{3}\pi abc
\end{aligned}
$$

命题 11.4 (第二 Green 公式)

设 Ω 是由分片光滑有向曲面 $\Sigma=\partial\Omega$ 围成的有界闭区域，$a(x,y,z), b(x,y,z)\in C^2(\Omega), \vec{n}$ 是单位向量

$$\oiint_{\partial\Omega}\left(a\frac{\partial b}{\partial\vec{n}} - b\frac{\partial a}{\partial\vec{n}}\right)ds = \iiint_{\Omega}(a\triangle b - b\triangle a)dV$$

这里 $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$

$\triangle a = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}, \triangle b = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)b = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}$

证明 因为 $\frac{\partial b}{\partial\vec{n}} = \nabla b\cdot\vec{n} = (b'_x, b'_y, b'_z)\cdot\vec{n}$，所以

$$
\begin{aligned}
\oiint_{\partial\Omega} a\frac{\partial b}{\partial\vec{n}}ds &= \oiint_{\partial\Omega} a(b'_X, b'_y, b'_z)\cdot\vec{n}ds \\
&= \oiint_{\partial\Omega}(ab'_x, ab'_y, ab'_z)\cdot\vec{n}ds \\
&= \iiint_{\Omega}\nabla\cdot(ab'_x, ab'_y, ab'_z)dV \qquad \text{(使用了 Gauss 公式的向量形式)} \\
&= \iiint_{\Omega}[(ab'_x)'_x + (ab'_y)'_y + (ab'_z)'_z]dV \\
&= \iiint_{\Omega}[(ab''_{xx} + ab''_{yy} + ab''_{zz}) + (a'_xb'_x + a'_zb'_z + a'_zb'_z)]dV \\
&= \iiint_{\Omega}[a\triangle b + (\nabla a\cdot\nabla b)]dV\cdots①
\end{aligned}
$$

同理我们有

$$\oiint_{\partial\Omega} b\frac{\partial a}{\partial\vec{n}}ds = \iiint_{\Omega}[b\triangle a + (\nabla b\cdot\nabla a)]dV\cdots②$$

①+②得

$$\oiint_{\partial\Omega}(a\frac{\partial b}{\partial \vec{n}}-b\frac{\partial a}{\partial \vec{n}})ds=\iiint_{\Omega}(a\triangle b-b\triangle a)dV$$

□

例题 11.112 计算 $I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为上半球面:$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧 (球面外侧)

解 为了使用 Gauss 公式，我们需要补面：$\Sigma_0^+:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$，方向朝 (-k) 方向，则

$$I=\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^+}-\iint_{\Sigma_0^+}$$

由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0^+}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial y^2}{\partial y}+\frac{\partial z^2}{\partial z})dV=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)dV\overset{\text{奇偶性}}{=}\iiint_{\Omega}2zdV$$

作球坐标变换可算得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0^+}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{\pi}{2}a^4$$

另一方面，在 Σ_0^+ 上有 $dydz=dzdx=0,z=0$，因此

$$\iint_{\Sigma_0^+}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0+0+0=0$$

即 $I=\frac{\pi}{2}a^4$

第 31 讲：Stokes 公式及其应用

(一)、Stokes 公式

定理 11.26 (Stokes 公式)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，$\vec{A}(x,y,z)\in C^1(\Omega)$，有向光滑曲面 $\Sigma\subset\Omega$，记 $\Gamma=\partial\Sigma$，且 Γ 的正向与 Σ 的正面 (侧) 成右手系

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}ds$$

在物理中我们通常写成向量式，即

$$\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=\iint_{\Sigma}rot(\vec{A})\cdot\vec{n}ds$$

其中 $\vec{\tau}ds=(dx,dy,dz)=d\vec{s}$，$\vec{n}ds=(dydz,dzdx,dxdy)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

♡

证明 设 Γ 在 xoy 平面投影为 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ t:a\to b\end{cases}$，设 Σ 为 $z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$，则 Γ 的参数表示为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(x,y)\\ t:a\to b\end{cases}$

因此我们有

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \int_a^b P(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))x'(t)dt$$

另一方面，我们补一项 0dy，使用 Green 公式：

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z(x,y))dx + 0dy = \iint_{D_{xy}} (\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y})dxdy = -\iint_{D_{xy}} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

我们将上式右边的 D_{xy} 上的二重积分视为 Γ 上的第二类曲面积分：

$$-\iint_{D_{xy}} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})dxdy = -\iint_{\Sigma} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})\cos\gamma ds$$

因为 $\Gamma: F(x,y,z) = z - z(x,y)$，Γ 上的单位法向量为

$$\overrightarrow{n} = \frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}$$

从上式我们可以看出 $\cos\beta = \frac{-z'_y}{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = -z'_y\cos\gamma \Rightarrow z'_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$，继续化简得

$$-\iint_{\Sigma} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})\cos\gamma ds = -\iint_{\Sigma} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot(-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}))\cos\gamma ds = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

同理我们有 $\begin{cases} \text{若 } \Sigma: y = y(x,z) \text{ 时，我们有 } \oint_{\Sigma} Q(x,y,z)dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz \\ \text{若 } \Sigma: x = x(y,z) \text{ 时，我们有 } \oint_{\Sigma} R(x,y,z)dz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx \end{cases}$

三式相加得

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz + \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds$$

□

特别地，当 Σ 为 xoy 平面中的平面区域 D 时，我们有 $z = 0, dydz = dzdx = 0$，因此

$$\oint_{\partial D} P(x,y,0)dx + Q(x,y,0)dy = \iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

即 Stokes 公式是 Green 公式在空间中的推广，为方便表示 Stokes 公式，我们引入旋度的概念

定义 11.25 (旋度)

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \triangleq rot(\overrightarrow{A})$$

称上式为向量场 $\overrightarrow{A}$ 的旋度，当 $rot(\overrightarrow{A}) \equiv \theta$ 时，称 $\overrightarrow{A}$ 为无旋场

♣

注 ① 梯度：$\nabla u = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})u = (u'_x, u'_y, u'_z)$

② 散度：$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

③ 旋度：$\nabla\times\overrightarrow{A}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(P,Q,R)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

当我们要求封闭曲线上的第二类曲线积分时，我们应该马上联想到狭义 Stokes 公式

(二)、例题

例题 11.113 Σ 为 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的上侧，Γ 是 Σ 的正向边界，求 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y^2,z^2,x^2)$ 绕 Γ 一周作的功量 W

解　法 I:

$$W=\oint_{\Gamma}\overrightarrow{F}(x,y,z)d\overrightarrow{s}=\oint_{\Gamma}y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

因为 $\Gamma:x+y+z-1=0$，$\overrightarrow{n}=\frac{(F'_x,F'_y,F'_z)}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

又因为 Γ 的正向边界和 Σ 的法向量方向构成右手系，使用 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma}y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}ds=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}ds=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)ds$$

在 Σ 上有 $x+y+z=1$，代入得

$$W=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}1ds=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot S(\Sigma)=-1$$

法 II: 因为 Σ 具有轮换对称性，所以

$$\oint_{\Sigma}y^2dx=\oint_{\Sigma}z^2dy=\oint_{\Sigma}x^2dz$$

所以仅计算其中一项再乘以 3 即可

将 Γ 写为 $\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$，其中 $\Gamma_1:\begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$,$\Gamma_2:\begin{cases}y+z=1\\ x=0\end{cases}$，$\Gamma_3:\begin{cases}z+x=1\\ y=0\end{cases}$

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}y^2dx&=\oint_{\Gamma_1}y^2dx+\oint_{\Gamma_2}y^2dx+\oint_{\Gamma_3}y^2dx\\&=\int_0^1(1-x)^2dx+0+0\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

因此，$W=3\times(-\frac{1}{3})=-1$

例题 11.114 设 L 是 $\Sigma_1:z=3x^2+4y^2$ 与 $\Sigma_2:4x^2+y^2=4y$ 的交线，从 z 轴正向来看，L 的方向是顺时针，求向量场 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(y(z+1),xz,xy-z)$ 沿 L 的环量 W

解　因为

$$W=\oint_{L}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{s}=\oint_{L}y(z+1)dx+xzdy+(xy-z)dz\overset{Stokes}{=}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y(z+1) & xz & xy-z\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(-1)dxdy$$

投影到 xoy 平面，第二类曲面积分化为二重积分，因为法向量朝下故需要乘以-1，即

$$\iint_{\Sigma}(-1)dxdy=-\iint_{x^2+\frac{(y-2)^2}{4}\le 1}(-1)dxdy=S(D)=\pi\cdot 1\cdot 2=2\pi$$

第 32 讲：场论初步

(一)、场论初步

两种特殊的区域

1. 曲面单连通域 $\Omega:\Omega$ 中的任一闭路 L 都可在 Ω 中张成一片以 L 为边界的光滑曲面 Σ

   例： 去心的球体 Ω 是曲面单连通域，但非空间单连通域

   例： 平面区域的单连通域也是曲面单连通域
2. 空间单连通域 $\Omega:\Omega$ 中的任一闭曲面 Σ，都可在 Ω 中连续缩成一点

   例： 实心的轮胎型域是空间单连通域，但非曲面单连通域

   例： 球体、$\mathbb{R}^3$、第一卦限、上半球体即是曲面单连通域，也是空间单连通域

命题 11.5 (场论初步)

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面单连通域，设 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(P,Q,R)\in C^1(\Omega)$，则下面三个命题等价：

1. $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的无旋场，即 $\nabla\times\overrightarrow{A}\equiv\theta,\forall(x,y,z)\in\Omega$
2. $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的保守场 (做功与路径无关，即任意沿闭路的环量为零)
3. $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的有势场 (梯度场)

证明 (①⇒②)：已知 $\nabla\times\overrightarrow{A}\equiv\theta$，要证沿 Ω 中的任一闭路 L 的环量 $\oint_L\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\tau}ds\equiv 0$

而 $\oint_L\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\tau}ds=\oint_L(P,Q,R)\cdot(dx,dy,dz)=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$，使用 Stokes 公式

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{n}ds=\iint_{\Sigma}\theta\cdot\overrightarrow{n}ds=\iint_{\Sigma}0ds=0$$

(②⇒③)：已知 $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的保守场，即做功只与起点和终点无关，我们令

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz,(x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\in\Omega$$

先前已证 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y,z),\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y,z),\frac{\partial\varphi}{\partial z}=R(x,y,z)$，即有

$$\nabla\varphi=(\varphi_x',\varphi_y',\varphi_z')=(P,Q,R)=\overrightarrow{A}\Leftrightarrow d\varphi(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

(③⇒①)：已知 $\overrightarrow{A}=(P,Q,R)$ 为有势场，即 $\exists\varphi(x,y,z)\in C^2(\Omega)$，使得 $d\varphi(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz$

我们要证 $\nabla\times\overrightarrow{A}\equiv\theta,\forall(x,y,z)\in\Omega$，而

$$\nabla\times\overrightarrow{A}=\begin{vmatrix}i&j&k\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i&j&k\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\varphi_x'&\varphi_y'&\varphi(z)'\end{vmatrix}=(\varphi_{zy}''-\varphi_{yz}'')i+(\varphi_{xz}''-\varphi_{zx}'')j+(\varphi_{yx}''-\varphi_{xy}'')k=\theta$$

这是因为二阶偏导连续，混合偏导相等，因此 $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的无旋场 □

注 ① 势函数只要有一个，就有无数个，因为若有势函数 $\varphi(x,y,z)$，则 $\varphi(x,y,z)+C$，均为势函数，C 为任意常数，可以理解为与势能零点的选取有关

② 势能零点一般选取 $(0,0,0)$，若原点能取到，若取不到，我们常取 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

③ 做题时上述三个命题，我们一般验证 $\overrightarrow{A}$ 为无旋场，因为最方便

例题 11.115 设 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(x^2-yz,y^2-xz,z^2-xy)$

① 证明 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 是有势场，并求出所有势函数

② 计算 $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,0,2)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$

解 ① 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 均有意义，且 $\overrightarrow{A}\in C^1(\mathbb{R}^{\not{}})$，而 $\mathbb{R}^3$ 是曲面单连通域，且

$$\nabla\times\overrightarrow{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy\end{vmatrix}=[-x-(-x)]i+[-y-(-y)]j+[-z-(-z)]k\equiv\theta,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

故 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有势场，也是 $\mathbb{R}^3$ 中的保守场，令

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

因为做功与路径无关，我们取一条特殊 (好算) 的折线：$(x_0,y_0,z_0)\to(x,y_0,z_0)\to(x,y,z_0)\to(x,y,z)$

设 $L_1:\begin{cases}x\in[x_0,x]\\ y=y_0\\ z=z_0\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=x\\ y\in[y_0,y]\\ z=z_0\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z\in[z_0,z]\end{cases}$，则有

$$\varphi(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

在本题中，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz\\ &=\int_0^x(x^2-0\cdot0)dx+\int_0^y(y^2-x\cdot0)dy+\int_0^z(z^2-xy)dz\\ &=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-xyz\end{aligned}$$

故所求的所有势 (原) 函数为 $\varphi(x,y,z)+C=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{3}z^3-xyz+C$

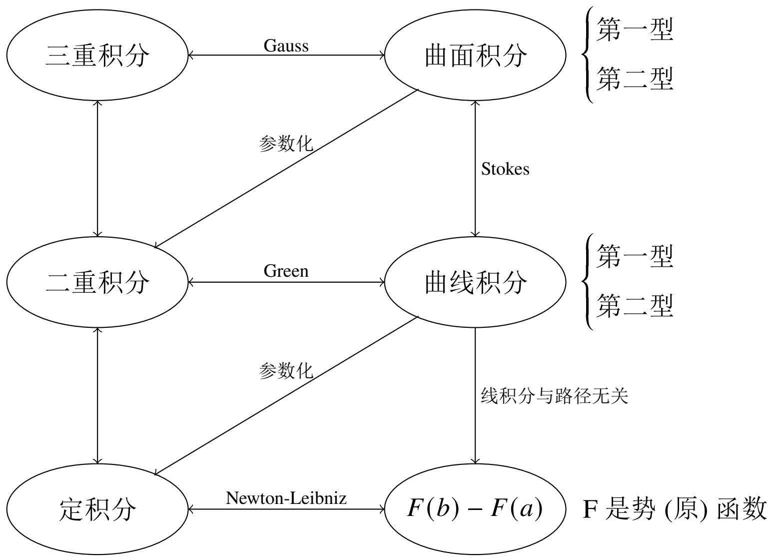
② 由第一题知

$$\begin{aligned}\int_{(1,1,1)}^{(2,0,2)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz&=\left(\int_{(1,1,1)}^{(0,0,0)}+\int_{(0,0,0)}^{(2,0,2)}\right)(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz\\ &=-\int_{(1,1,1)}^{(0,0,0)}d\varphi(x,y,z)+\int_{(0,0,0)}^{(2,0,2)}d\varphi(x,y,z)\\ &=\varphi(2,0,2)-\varphi(1,1,1)\\ &=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

注
- 使用势函数做题时，我们要证明区域 Ω 内向量场 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 为无旋场以及 Ω 是曲面单连通区域
- 在有势场内有

$$\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz=\int_A^B d\varphi=\varphi(B)-\varphi(A)$$

(二)、积分关系图



上图中的积分“四大公式”可统一为广义的 Stokes 公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$$

例题 11.116 设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的两点，证明：线积分

$$\int_{L_{M_1M_2}}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

与路径无关，并求上述积分的值

证明 取 $\Omega=x^2+y^2+z^2\leq a^2-\{(0,0,0)\}$，则 Ω 为曲面单连通域，$M_1,M_2\in\Omega$

且 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$ 在 Ω 中有势函数 $\varphi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

即 $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的有势场，且 Ω 为曲面单连通域，故 $\overrightarrow{A}$ 是 Ω 中的保守场，即线积分

$$\int_{L_{M_1M_2}}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

与路径无关，因此我们有

$$\int_{L_{M_1M_2}}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_{M_1}^{M_2}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_{M_1}^{M_2}d\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\varphi(M_2)-\varphi(M_1)=a^2-a^2=0$$

注 本题的势函数可以直接看出，故直接指出势函数再进行验证即可，否则要先证明向量场 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 为保守场

第 33 讲：多变量积分的复习与小结

(一)、Green 公式

定理 11.27 (Green 公式)

设 $P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$，D 是 xoy 平面中由分段光滑的正向曲线 $L=\partial D$ 围成的有界闭区域，则

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

使 $\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ 不连续的点称为奇点，否则称为常点，若区域内有奇点，则格林公式不成立

例题 11.117 计算

$$I=\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

其中 L 是正向圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$

解 **解法 1：** 参数化曲线 L: $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases} t\in[0,2\pi]$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{(-a\sin t)d(a\cos t)+a\cos td(a\sin t)}{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)dt}{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\\&=2\pi\end{aligned}$$

解法 2： 格林公式：因为

$$I=\oint_L\frac{-ydx+xdy}{a^2}=\frac{1}{a^2}-ydx+xdy=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}[1-(-1)]dxdy=\frac{2S(D)}{a^2}=2\pi$$

注　可以把曲线方程先代入被积表达式后再用 Green 公式以减少计算量，本题不可直接用 *Green* 公式，因为被积函数 $\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}$ 在原点偏导不连续，即原点是奇点

例题 11.118 证明平面上的第二 Green 公式

$$\oint(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}})ds=\iint\limits_D(v\triangle u-u\triangle v)dxdy$$

其中，$u(x,y),v(x,y)\in C^2(D),D$ 是 xoy 平面中由分段光滑的正向曲线 $L=\partial D$ 围成的有界闭区域

证明 设平面上有一由分段光滑的正向曲线 $L=\partial D$ 围成的有界闭区域，设 ∂D 上一点的正向单位切向量 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则在该点上的外法单位向量 $\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$

因为

$$v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=v\nabla u\cdot\vec{n}=v(u'_x,u'_y)\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)=(vu'_x,vu'_y)\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)$$

所以

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}ds&=\oint_{\partial D}(vu'_x,vu'_y)(\cos\beta ds,-\cos\alpha ds)\\&=\oint_{\partial D}(vu'_x,vu'_y)\cdot(dy,-dx)\\&=\oint_{\partial D}(-vu'_y)dx+(vu'_x)dy\quad\text{使用 Green 公式}\\&=\iint\limits_D[\frac{\partial(vu'_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-vu'_y)}{\partial y}]dxdy\\&=\iint\limits_D v(u''_{xx}+u''_{yy})+(u'_xv'_x+u'_yv'_y)dxdy\\&=\iint\limits_D(v\triangle u+\nabla u\cdot\nabla v)dxdy\cdots①\end{aligned}$$

由对称性知

$$\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}ds=\iint\limits_D(u\triangle v+\nabla v\cdot\nabla u)dxdy\cdots②$$

①–②即得第二 Green 公式

$$\oint(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}})ds=\iint\limits_D(v\triangle u-u\triangle v)dxdy$$

□

注 若曲线上一点处的正向单位切向量 $\overrightarrow{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则对于弧长元 ds，我们有 $\begin{cases} \cos\alpha ds = dx \\ \cos\beta ds = dy \end{cases}$

(二)、Gauss 公式

定理 11.28 (Gauss 公式)

数学形式： 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中分片光滑的有向曲面 Σ 围成的有界闭区域，$\overrightarrow{A}(x,y,z) = (P,Q,R) \in C^1(\Omega)$，则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dV$$

其中 Σ 的法向量 $\overrightarrow{n}$ 朝外，$\Sigma = \partial\Omega$

物理形式： 设 $\overrightarrow{A}(x,y,z) = (P,Q,R) \in C^1(\Omega)$，$\Omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中有向分片光滑曲面 $\Sigma = \partial\Omega$ 围成的有界闭区域，则

$$\oiint_{\partial\Omega} = \overrightarrow{A}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{n} ds = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \overrightarrow{A}(x,y,z)dV$$

♡

例题 11.119 计算积分

$$I = \iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

Σ 为上半球面的 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 上侧

解 设 $I_1 = \iint_{\Sigma} x^2dydz, I_2 = \iint_{\Sigma} y^2dzdx, I_3 = \iint_{\Sigma} z^2dxdy$

在 I_1 中，我们令 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，其中 Σ_1, Σ_2 分别为 Σ 的前侧和后侧：$x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}, x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$，所以

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Sigma_1} x^2dydz + \iint_{\Sigma_2} x^2dydz \\ &= \iint_{\substack{y^2+z^2 \le a^2 \\ z \ge 0}} (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})^2dydz + (-1)\iint_{\substack{y^2+z^2 \le a^2 \\ z \ge 0}} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})^2dydz \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理，$I_2 = 0$，下面我们计算 I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= +\iint_{\substack{y^2+z^2 \le a^2 \\ z \ge 0}} (\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2dxdy \\ &= \iint_{\substack{y^2+z^2 \le a^2 \\ z \ge 0}} (a^2 - x^2 - y^2)dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} (\int_0^a (a^2 - r^2)rdr)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}a^4 \end{aligned}$$

注 本题中我们将前半球和后半球分别投影到 yoz 平面上，而一个是从前面投影的，另一个是从后面投影的，所以两者符号相反

对于第二类曲面积分，我们有“偶 (函数) 零奇 (函数) 倍”

(三)、Stokes 公式

定理 11.29 (狭义 Stokes 公式)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，$\overrightarrow{A}(x,y,z) \in C^1(\Omega)$，有向光滑曲面 $\Sigma \subset \Omega$，记 $\Gamma = \partial\Sigma$，且 Γ 的正向与 Σ 的正面 (侧) 成右手系

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{n} ds$$

在物理中我们通常写成向量式，即

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\tau} ds = \iint_{\Sigma} rot(\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{n} ds$$

其中 $\overrightarrow{\tau} ds = (dx, dy, dz) = d\overrightarrow{s}$，$\overrightarrow{n} ds = (dydz, dzdx, dxdy) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ♡

更一般地我们有广义 Stokes 公式，他将四大积分公式：牛顿-莱布尼兹公式、Green 公式、Gauss 公式、狭义 Stokes 公式统一起来

定理 11.30 (广义 Stokes 公式)

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

其中，ω 称为 (外) 微分形式，$d\omega$ 称为 ω 的外微分，$\partial\Omega$ 是 Ω 的正向边界 ♡

证明 (1°) Green 公式

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

我们记 $\omega = Pdx + Qdy$，它是一次外微分形式，则

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) = d(Pdx) + d(Qdy) = (dP)(dx) + (dQ)(dy)$$

$$= (P'_x dx + P'_y dy)dx + (Q'_x dx + Q'_y dy)dy = 0 + (-1)P'_y dxdy + Q'_x dxdy + 0 = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

即 Green 公式是广义 Stokes 公式的一种特例

(2°) 狭义 Stokes 公式

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

我们记 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$，则

$$d\omega = d(Pdx + Qdy + Rdz) = (dP)(dx) + (dQ)(dy) + (dR)(dz)$$

$$= (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + (Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dy + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dz = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

即狭义 Stokes 公式是广义 Stokes 公式的一种特例

(3°) Gauss 公式

$$\oiint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dV$$

我们记 $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$，它是二次微分形式 (有两个微分的乘积)，则

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) \\ &= (dP)dydz + (dQ)dzdx + (dR)dxdy \\ &= (P'_x dx + P'_y dydz + P'_z dz)dx + (Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dzdx + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dxdy \\ &= (P'_x dxdydz + Q'_y dydzdx + R'_z dzdxdy) \\ &= (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz \end{aligned}$$

即狭义 Stokes 公式是广义 Stokes 公式的一种特例

(4°) Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) \Leftrightarrow F(x)\Big|_a^b = \int_a^b dF(x)$$

我们记 $\Omega = F(x)$，它是零次微分形式，$\Omega = [a,b], \partial\Omega = a$ 或 b，则我们可以将 N-L 公式写为

$$\int_{\partial[a,b]} \omega = \int_\Omega d\omega$$

即 Newton-Leibniz 公式是广义 Stokes 公式的一种特例

注 ① 在微分的微分中，我们有如下运算规则：$d(Pdx) = dPdx$，即把 dx 视为常数因子

② 微分的乘积满足向量的外积运算法则，即 $dxdx = 0, dxdy = -dydx$

③ 有几个微分相乘就是几次微分形式，如 $dxdy$ 为二次微分形式，若没有微分如 $F(x)$，则为零次微分形式，微分形式最高为三次即 $dxdydz$

第十二章：Fourier 分析

第 34 讲：$f(x)$ 的 Fourier 级数及其应用

(一)、$f(x)$ 在点 x_0 处的 Taylor 级数 (设 $f \in C^{\infty}(U(x_0,\delta))$)

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \xlongequal[n\to\infty]{\text{若}R_n(x)\to 0} f(x), \forall x \in U(x_0,\delta)$$

(二)、$f(x)$ 的 Fourier 级数：$f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

首先我们对三角函数系：$1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx \cdots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交性进行讨论

定义 12.26

我们定义两个函数 $f(x), g(x) \in C^1[a,b]$ 上的一种内积

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

若上述内积为零，则我们称 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交

♣

性质

1. $(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0, (1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$
2. $(\cos mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$
3. $(\cos mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \begin{cases} \pi & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

   因此，$(\cos nx, \cos nx) = |\cos nx|^2 = \pi \Rightarrow |\cos nx| = \sqrt{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. $(\sin mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]dx = \begin{cases} \pi & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

   因此，$(\sin nx, \sin nx) = |\sin nx|^2 = \pi \Rightarrow |\sin nx| = \sqrt{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $(1,1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi \Rightarrow |1|^2 = 2\pi \Rightarrow |1| = \sqrt{2\pi}$

   综上，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots$ 在某些特定情况下为一组标准正交基

(三)、$f(x)$ 的 Fourier 系数与 Fourier 级数 (设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数)

已知 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则

1. 两边同时在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx)$

   $\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
2. 两边乘以 $\cos mx$ 后同时在 $[-\pi,\pi]$ 上积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx) = 0 + a_m \cdot \pi + b_m \cdot 0$$

$$\Rightarrow a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx\quad(m\geq 1)$$

3. 两边乘以 $\sin mx$ 后同时在 $[-\pi,\pi]$ 上积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx)=0+a_m\cdot 0+b_m\cdot\pi$$

$$\Rightarrow b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx\quad(m\geq 1)$$

综上，我们有付式系数 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx\end{cases}$，且 a_n,b_n 由 $f(x)$ 唯一确定

注 $f(x)$ 的傅里叶级数能否收敛到 $f(x)$ 本身，这需要用狄利克雷收敛定理来回答，现仅做介绍

定理 12.31 (Dirichlet 收敛定理)

1. 设 $f(x)$ 为 2π 周期函数，且对 $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$ 中，$f(x)$ 逐段光滑 (可微)，即 $[a,b]$ 中，$f(x)$ 为有限段光滑曲线，在子区间端点处 $f(x)$ 为连续或第一类间断 (左右极限均存在)，则 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\begin{cases}f(x) & x\text{是 f(x) 的连续点}\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{不是 f(x) 的连续点}\end{cases}$$

2. 若 $f(x)$ 还满足在 $(-\infty,+\infty)$ 中处处连续，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\xlongequal[\text{绝对收敛}]{\text{处处、一致收敛}}f(x)$$

(四)、例题

例题 12.120 设 $f(x+2\pi)\equiv f(x),\forall x\in\mathbb{R}$，且 $f(x)=|x|,-\pi\leq x\leq\pi$，求出 $f(x)$ 的傅式级数，并指出收敛的结果

解 依题意知 $f(x)$ 满足 Dirichlet 收敛定理且 $f(x)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 上处处连续，且

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nxdx\xlongequal{\text{奇函数}}0$$

又因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$$

当 $n\geq 1$ 时

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\frac{4}{(2k-1)^2\pi} & n=2k-1\end{cases}$$

因此

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x\xlongequal[\text{绝对收敛}]{\text{处处、一致收敛}}f(x)\xlongequal{x\in[0,\pi]}x$$

例题 12.121 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和

解 对 $\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x=x$，我们取 $x=0$，则有

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

令 $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\xlongequal[\text{可重排}]{\text{绝对收敛}}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots)$

因此我们有

$$A=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}A\Rightarrow A=\frac{\pi^2}{6}$$

因为 $\begin{cases}\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}\\ \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\cdots=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{\pi^2}{24}\end{cases}$

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛可重排知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}$$

例题 12.122 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ 的和

解 对 $\displaystyle\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x=x$ 两边从 0 到 x 积分得

$$\frac{\pi}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3\pi}=\frac{x^2}{2},x\in[0,\pi]$$

对上式两边再从 0 到 x 积分得

$$\frac{\pi}{4}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(\cos(2n-1)x-1)}{(2n-1)^4\pi}=\frac{x^3}{6},x\in[0,\pi]$$

将 $x=\pi$ 代入得

$$\frac{\pi^3}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1-1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^3}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

令 $\displaystyle\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\xlongequal[\text{可重排}]{\text{绝对收敛}}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)$

因此我们有

$$\sigma=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sigma\Rightarrow\sigma=\frac{\pi^4}{90}$$

因为 $\begin{cases}\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{96}\\ \dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{4^4}+\dfrac{1}{6^4}+\cdots=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{\pi^4}{90}=\dfrac{\pi^4}{1440}\end{cases}$

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ 绝对收敛可重排知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}-\frac{\pi^4}{1440}=\frac{7\pi^4}{720}$$

注 以此类推，我们还可以算出所有自然数的六，八等偶次方和等等

推论 12.10 (奇/偶函数的一般 Fourier 级数形式)

① 当 $f(x)$ 为偶函数时，有 $b_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\text{——余弦级数}$$

② 当 $f(x)$ 为奇函数时，有 $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\text{——正弦级数}$$

第 35 讲：$2l$ 周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开

(一)、Fourier 系数与 Fourier 级数

设 $f(x+2l) \equiv f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall l > 0$，且 $f(x)$ 满足 Dirichlet 收敛定理，令 $x = \frac{l}{\pi}u$，则 $f(\frac{l}{\pi}u) = g(u) = f(x)$

$$\Rightarrow g(u+2\pi) = f(\frac{l}{\pi}(u+2\pi)) = f(2l + \frac{l}{\pi}u) = f(\frac{l}{\pi}u) = g(u), \forall u \in \mathbb{R}$$

另一方面，$g'(u) = \frac{l}{\pi}f'(\frac{l}{\pi}u) \Rightarrow g(u)$ 满足 Dirichlet 收敛定理，我们对 $g(u)$ 求 Fourier 级数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos nudu \overset{u=\frac{\pi}{l}x}{=\!=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx, (n \geq 0)$$

同理我们有

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi}{l}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)) \overset{\text{处处收敛}}{=\!=\!=\!=} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{x 是 f 的连续点} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & else \end{cases}$$

(二)、例题

例题 12.123 求 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, 0 \leq |x| < h \\ 0, h \leq |x| \leq l \end{cases}$ 的 Fourier 级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2nh\pi}{l}$

解 将 $f(x)$ 作 $T = 2l$ 的周期开拓，设开拓到 $\mathbb{R}$ 上的 $2l$ 周期函数为 $F(x)$，则 $F(x)$ 满足 Dirichlet 收敛定理

且我们有 $f(x) = F(x)\Big|_{[-l,l]} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{l}x)$，$F(x)$ 为偶函数，$b_n \equiv 0$，只需要计算 a_n 即可

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx \\ &= \frac{2}{l}[\int_0^h \frac{1}{2h}\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx + \int_h^l 0dx] \\ &= \frac{1}{nh\pi}\sin\frac{nh\pi}{l}(n \geq 1) \end{aligned}$$

又因为 $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{l}(\int_0^h \frac{1}{2h}dx + \int_h^l 0dx) = \frac{1}{l}$，因此

$$f(x) \sim F(x)\Big|_{[-l,l]} \frac{1}{2l} + \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{nh\pi}{l})\cos(\frac{n\pi}{l}x) = \begin{cases} f(x) & |x| \neq h, |x| < l \\ \frac{1}{4h} & x = h \\ 0 & x = \pm l \end{cases}$$

我们取 $x=h$，则 $\frac{1}{2l}+\pi h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi h}{l})\cos(\frac{n\pi h}{l})=\frac{1}{4h}$，化简得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2nh\pi}{l})}{n}=\pi h(\frac{2}{h}-\frac{1}{l})$$

注 我们取 $x=\frac{h}{2},\frac{h}{3},\frac{h}{5}$ 等，还可以得到一系列无穷级数的和

例题 12.124 分别求 $f(x)=\begin{cases}x, 0\le x<\frac{l}{2}\\ l-x, \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$ 的 (1). 正弦级数 (2). 余弦级数

解 (1). 要求正弦级数，需要对 $f(x)$ 进行奇开拓到 $[-l,l]$ 上，再进行 $T=2l$ 的周期开拓得到 $\mathbb{R}$ 上的函数，记作 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续且满足 Dirichlet 收敛定理，只需考虑 $f(x)=F(x)\Big|_{[0,l]}\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)$ 即可

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx=\frac{2}{l}[\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2m\\ \frac{(-1)^{m-1}4l}{(2m-1)^2\pi^2} & n=2m-1\end{cases}$$

因此，$f(x)=F(x)\Big|_{[0,l]}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4l}{(2n-1)^2\pi^2}\sin[\frac{(2n-1)\pi}{l}x]\ \overset{\text{处处、一致收敛}}{\underset{\text{绝对收敛}}{=\!=\!=\!=}}\ f(x),x\in[0,l]$

若取 $x=\frac{l}{2}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4l}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=f(\frac{l}{2})\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(2). 要求余弦级数，需要对 $f(x)$ 进行偶开拓到 $[-l,l]$ 上，再进行 $T=2l$ 的周期开拓到 $\mathbb{R}$ 上的函数，记作 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续且满足 Dirichlet 收敛定理，只需考虑 $f(x)=F(x)\Big|_{[0,l]}\sim\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)$ 即可

此处我们省略计算过程，

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx=\begin{cases}\frac{-2l}{(2m+1)^2\pi^2} & n=4m+2\\ 0 & else\end{cases}$$

因此

$$f(x)=F(x)\Big|_{[0,l]}\sim\frac{l}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2l}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(\frac{(4n+2)\pi}{l}x)\ \overset{\text{处处、一致收敛}}{\underset{\text{绝对收敛}}{=\!=\!=\!=}}\ f(x),x\in[0,l]$$

若取 $x=0$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2l}{(2n+1)^2\pi^2}\cdot 1=f(0)-\frac{l}{4}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

例题 12.125 将 $f(x)=\cos(ax)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成 Fourier 级数，$\forall\in(0,1)$

解 作 $T=2\pi$ 的周期开拓，开拓到 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，记作 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续且满足 Dirichlet 收敛定理，由 $F(x)$ 是偶函数，可以展为余弦级数，只需考虑 $f(x)=F(x)\Big|_{[-\pi,\pi]}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 即可

因为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{a\pi}\sin ax$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[(a+n)x]+\cos[(a-n)x]dx \\
&= \frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}
\end{aligned}
$$

因此

$$
f(x)=F(x)\Big|_{[-\pi,\pi]} \sim \frac{1}{a\pi}\sin a\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx \xlongequal[\text{绝对收敛}]{\text{处处、一致收敛}} f(x)=\cos ax, x\in[-\pi,\pi]
$$

取 $x=0$，则 $\frac{1}{a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin a\pi}\xlongequal{Ch13}\Gamma(a)\Gamma(1-a),\forall a\in(0,1)$，这是 $\Gamma(x)$ 的余元公式，其中 $\Gamma(x)\triangleq\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$(含参反常积分)，且我们有 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\forall x>0,\Gamma(1)=1$，如 $\Gamma(10)=9\Gamma(9)=\cdots=9!\Gamma(1)=9!\Rightarrow$ 更一般地，$\Gamma(n+1)=n!$

第 36 讲：函数列的均方收敛与 Parseval 等式

(一)、$L^2[a,b]$ 线性空间与均方收敛

定义 12.27 ($L^2[a,b]$ 线性空间与均方收敛)

令 $L^2[a,b]=\{f(x)|f(x),f^2(x)$在 [a,b] 上均可积$\}$，则 $L^2[a,b]$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性函数空间，对 $\forall f(x),g(x)\in L^2[a,b]$，我们定义内积：

$$
(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx
$$

则 $||f(x)||^2=(f(x),f(x))=\int_a^b f^2(x)dx$，$||f(x)-g(x)||^2=(f(x)-g(x),f(x)-g(x))=\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx$

设 $f_n(x),f(x)\in L^2[a,b],\forall n\in\mathbb{N}^*$，且

$$
||f_n(x)-f(x)||^2=\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2dx\xrightarrow{n\to\infty}0
$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 中平方平均收敛于 $f(x)$，简称均方收敛于 $f(x)$，记作 $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{均方}}f(x)$

♣

注 均方平均收敛的平均体现在 $\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2dx\to0\Leftrightarrow\frac{\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2dx}{b-a}\to0$

均方收敛反映的是函数总体的性质，并不表示 $f_n(x)$ 每个点都收敛到 $f(x)$，如下例子

均方收敛：$||f_n(x)-f(x)||^2=\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2dx\to0\Leftrightarrow\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\xlongequal{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

例: 设 $f(x)=\sin x x\in[0,\pi]$，$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},x=0\\ \sin x,x\in[0,\pi]\\ 1,x=\pi\end{cases}$，则

$$
\int_0^{\pi}[f(x)-g(x)]^2dx=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin x)^2dx=0,\text{但 } f(x)\neq g(x),x\in[0,\pi]
$$

(二)、Bessel 不等式与 Parseval 等式

设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$

令 $\begin{cases} S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}a_m\cos mx+b_m\sin mx\text{——}f(x)\text{的 Fourier 系数的第 n 个部分和} \\ g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx,\forall\alpha_m,\beta_m\in\mathbb{R}\text{——任意一个 n 阶三角多项式}\end{cases}$

引理 12.3

$||f(x)-g_n(x)||^2\geq||f(x)-f_n(x)||^2$，即 $f_n(x)$ 与 $f(x)$ “靠得最近”

证明

因为

$$\begin{aligned}||f(x)-g_n(x)||^2&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g_n(x)]^2dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\right]+\pi\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}[(\alpha_m-a_m)^2+(\beta_m-b_m)^2]\right]\\&\geq\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\right]\end{aligned}$$

当 $\alpha_0=a_0,\alpha_m=a_m,\beta_m=b_m$ 时取等，即 $g_n(x)=S_n(x)$，有

$$||f(x)-g_n(x)||_{\min}^2=||f(x)-S_n(x)||^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)]$$

□

定理 12.32 (Bessel 不等式)

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

证明 使用上述引理有 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)]\geq0$，令 $n\to\infty$

$$\Rightarrow\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

□

注 由上式可知，若 $\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)$ 收敛，则 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m},\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{m}$ 绝对收敛，这是因为 $\left|\frac{a_m}{m}\right|\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{m^2}+a_m^2)$

定理 12.33 (Parseval 等式)

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$，即 $n\to\infty$ 时，Bessel 不等式实际上可被证明是等式

证明 从 $||f(x)-S_n(x)||^2=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f_n(x)]^2dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 知，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

若证明 $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{均方收敛}} f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，则能证明等式，但是具体证明过程中太难了，接下来我们添加一些条件来证明 Parseval 等式 (但实际上不需要这些条件也能证明)

Case： 设 $f(x)=f(x+2\pi),\forall x\in\mathbb{R}$，且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续，且满足 Dirichlet 收敛定理，则必有 Parseval 等式：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

由条件知：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \overset{\text{处处、一致}}{\underset{\text{绝对收敛}}{=\!=\!=}} f(x),x\in[-\pi,\pi]$，两边同乘 $f(x)$ 再积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

由一致收敛可换序知，a_n,b_n，求和号可以提出来，即上式可化为

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+a_n\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\cos nx)+b_n\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\sin nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}f^2(x)dx$$

□

例题 12.126 设 $f(x+2\pi)=f(x)$，且 $f(x)=|x|,x\in[-\pi,\pi]$，求 $f(x)$ 的 Fourier 级数并利用 Parseval 等式计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^4}$$

解 先前已求 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x \overset{\text{处处、一致收敛}}{\underset{\text{绝对收敛}}{=\!=\!=}} f(x) \overset{x\in[0,\pi]}{=\!=\!=} x$

由 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+0^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

即有

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-4}{(2n-1)^2\pi})^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^4\pi^2}=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

推论 12.11 (Parseval 等式的推广)

设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$，则

$$\begin{cases} f(x)+g(x)\sim\frac{a_0+\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+\alpha_n)\cos nx+(b_n+\beta_n)\sin nx]\ \text{均方收敛到}\ f(x)+g(x) \\ f(x)-g(x)\sim\frac{a_0-\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-\alpha_n)\cos nx+(b_n-\beta_n)\sin nx]\ \text{均方收敛到}\ f(x)-g(x) \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2dx = \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2 \cdots ① \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2dx = \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2 \cdots ② \end{cases}$

①−②，化简得

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

第 37 讲：Parseval 等式的拓展

(一)、例题

例题 12.127 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上 2π 周期的连续函数，且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$，其中 $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx & (n\geq 0) \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx & (n \geq 1)\end{cases}$，再次证明 Parseval 等式 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

证明 令 $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)dt, x\in\mathbb{R}$，则由 f 的周期性知，$F(x+2\pi)\equiv F(x)$，且 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

又因为

$$F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x+t)f(t)dt \xlongequal[dt=du]{-x+t=u} \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(x+u)du = F(x), \forall x\in\mathbb{R}$$

即 $F(x)$ 为偶函数 (这里我们用到了 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$，即周期函数在长度为 T 的区间内积分值相等)

设 $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$，则 $B_n = 0$

另一方面

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)dt)dx \quad \text{换序} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)dx)dt \quad \text{令} x+t=u \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{f(t)}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)du)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du)dt \\ &= \frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= a_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)dt)\cos nxdx \quad \text{换序} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{f(t)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nxdx)dt \text{令} x+t=u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\pi}(\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\cos n(u-t)du)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{f(t)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)du)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt \\
&= a_n^2+b_n^2
\end{aligned}$$

因此

$$F(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx \xlongequal{\text{处处收敛}} F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)dt$$

我们取 $x=0$，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

□

推论 12.12 (Parseval 等式在 2l 周期的推广)

设 $f(x),g(x)\in L^2_{[-l,l]}$，令 $\omega=\frac{\pi}{l}$，且有 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{均方收敛}} f(x)$，$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\omega x+\beta_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{均方收敛}} g(x)$，则我们有

$$\begin{cases}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g^2(x)dx=\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\end{cases}\Rightarrow\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)dx$$

♡

例题 12.128 对 $\forall[a,b]\in[-l,l]$，证明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)dx$$

证明 我们对 $2l$ 周期的 Parseval 等式的推广中，取 $g(x)=\begin{cases}1,x\in[a,b]\\0,x\in[-l,l]-[a,b]\end{cases}$，则

$$\begin{cases}\alpha_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)dx=\frac{1}{l}\int_a^b dx\\ \alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos n\omega xdx=\frac{1}{l}\int_a^b\cos n\omega xdx\text{，代入推广式中，我们有}\\ \beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin n\omega xdx=\frac{1}{l}\int_a^b\sin n\omega xdx\end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2}\frac{1}{l}\int_a^b dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{1}{l}\int_a^b\cos n\omega xdx+b_n\frac{1}{l}\int_a^b\sin n\omega xdx)=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx$$

两边同时消去 $\frac{1}{l}$，即得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

注 特别地，对 $\forall [0,x] \subset [0,l]$，有

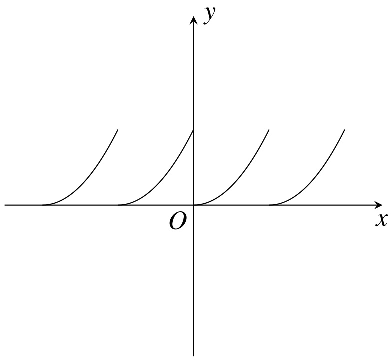
$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n\cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)dx$$

移项得

$$\int_0^x (f(t)-\frac{a_0}{2})dt = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n}{n\omega}\sin n\omega x + \frac{b_n}{n\omega}(1-\cos n\omega x)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{n\omega}\cos n\omega x - \frac{b_n}{n\omega}\sin n\omega x)$$

例题 12.129 将 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$ 展成 Fourier 级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 之和

解



先对 $f(x)$ 作 $T=2l=b-a=1-0 \Rightarrow l=\frac{1}{2}$ 的周期开拓，开拓到 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，记作 $F(x)$，则 $F(x)$ 满足 Dirichlet 收敛定理，因此

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)dx = 2\int_0^{2l}F(x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos n\omega xdx = 2\int_0^{2l}x^2\cos 2n\pi xdx = \frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin n\omega xdx = 2\int_0^{2l}x^2\sin 2n\pi xdx = \frac{-1}{n\pi}$$

故有

$$f(x)=x^2=F(x)\Big|_{[0,1]} \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x + b_n\sin n\omega x) = \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x - \frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi x)$$

$$= \begin{cases} x^2 & x\in(0,1) \\ \frac{1}{2} & x=0\text{或}1 \end{cases}$$

均方收敛 $\Rightarrow$ *Parseval* 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx = 2\int_0^{2l}x^4dx = \frac{2}{5}$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\pi^4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{5}-\frac{2}{9} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

推论 12.13 (有限区间上的 Parseval 等式)

定义在 $[a,b]$ 上的 $f(x)$ 的 Fourier 级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \omega = \frac{\pi}{l}$$

其中 $a_n = \frac{1}{l}\int_l^l f(x)\cos n\omega x dx = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx, b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$

且我们有有限区间上的 Parseval 等式

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

证明 提示：作周期 $2l = b-a$ 的周期开拓到 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，使用 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ 即得 □

例题 12.130 设 $a \in (0,1)$，$f(x) = \cos ax$，$x \in [-\pi,\pi]$，计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数，并证明

① $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-(n\pi)^2}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\frac{1}{\sin x} = \csc x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-(n\pi)^2}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

证明 省去计算过程

$$f(x) \sim \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\cos nx\right) \xlongequal{\text{处处收敛}} \cos ax$$

① 取 $x=\pi$，则 $\cos a\pi = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\cos n\pi\right)$

因为 $\cos n\pi = (-1)^n$，则我们有

$$\cot a\pi = \frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

令 $a\pi = x, x \in (0,\pi)$，则

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-(n\pi)^2}, x \in (0,\pi)$$

② 取 $x=0$，则 $1 = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\right)$

移项得

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

令 $a\pi = x, x \in (0,\pi)$，则

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-(n\pi)^2}, x \in (0,\pi)$$

□

第 38 讲：Fourier 级数综述

(一)、Fourier 级数的复数形式

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上逐段光滑 (可微)，$\omega=\frac{\pi}{l}$，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in[-l,l]$$

且 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega t dt\quad(n\geq 0)$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega t dt\quad(n\geq 1)$

对于 Fourier 系数，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 绝对收敛

除此之外，因为 $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-ie^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}\end{cases}$，所以我们得到 Fourier 级数的复数形式

$$\begin{aligned}f(x)&\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{i\cdot n\omega x}+e^{-i\cdot n\omega x}}{2}+b_n\frac{-ie^{i\cdot n\omega x}+ie^{-i\cdot n\omega x}}{2})\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-i\cdot b_n}{2}e^{i\cdot n\omega x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+i\cdot b_n}{2}e^{-i\cdot n\omega x}\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{-i\cdot n\omega x}\end{aligned}$$

注　上述过程中，我们令 $C_{\pm n}=\frac{a_n\mp i\cdot b_n}{2},C_0=\frac{a_0}{2}$，则我们有 $C_{-n}=\overline{C_n}$

对于 C_n 我们有

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{a_n-i\cdot b_n}{2}\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos n\omega t-i\cdot\sin n\omega t)dt\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-i\cdot n\omega t}dt\end{aligned}$$

(二)、定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 展开

1. 先取 $l>0$，在 $[-l,l]$ 上把 $f_l(x)\triangleq f(x)\Big|_{[-l,l]}$ 展成 Fourier 级数，设 $f_l(x)$ 满足 Dirichlet 收敛定理，则有

$$f_l(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

2. 再设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$，且在 $\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ 中，$f(x)$ 逐段光滑，则

$$\begin{aligned}f_l(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos n\omega t\cos n\omega x+\sin n\omega t\sin n\omega x)]\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(t-x)dt]\end{aligned}$$

我们令 $\lambda_n=n\omega$，则 $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=n\omega-(n-1)\omega=\omega=\frac{\pi}{l}$

3. 令 $l \to +\infty$，则根据假设有 $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt \to 0$，而上式第二部分的乘积和变为积分，即

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\cdot\lambda_n(t-x)}dt)\Delta\lambda_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\cdot\lambda(t-x)}dt)d\lambda$$

命题 12.6 (定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 展开)

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt]d\lambda = \int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda$$

其中 $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt$，$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt$

例题 12.131 求 $f(x) = \begin{cases} 1, |x| < 1 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases}$ 的 Fourier 积分，并证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

解 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积的偶函数，而 $b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\lambda t dt = 0$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\lambda t dt = \frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}$$

所以

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}\cos\lambda x d\lambda = \begin{cases} f(x) & x \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2} & x = \pm 1 \end{cases}$$

取 $x = 1$，令 $2\lambda = x$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda\cos\lambda}{\pi\lambda}d\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

若取 $x = \frac{1}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda\cos\frac{\lambda}{2}}{\pi\lambda}d\lambda = 1$，类似地，任取 $x_0 \in (-1,1)$，我们可以得到无数个广义积分的值

(三)、广义 Fourier 级数与广义 Parseval 等式

定义 12.28 (广义 Fourier 级数与广义 Parseval 等式)

设 $\{e_n(x)\}$ 是 $L^2_{[a,b]}$ 的一组正交、标准的函数系，即 $(e_i(x), e_j(x)) = \int_a^b e_i(x)e_j(x)dx = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$，

若对 $\forall f(x) \in L^2_{[a,b]}$，都有

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n(x) \xlongequal{\text{均方收敛}} f(x)$$

其中 $C_n = \int_a^b f(x)e_n(x)dx$，则称 $\{e_n(x)\}$ 是 $L^2_{[a,b]}$ 中的完备的标准正交基，此时必有广义 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = ||f(x)||^2 = \int_a^b f^2(x)dx$$

注 ① 若在复数空间中的内积，则要考虑共轭，即 $(f,f) = \int_a^b f\cdot\bar{f}dx$，$(f,g) = \int_a^b f\cdot\bar{g}dx$

② 若 $f(x) = e^{i\cdot n\omega x}$，则 $(f(x), f(x)) = \int_{-l}^{l} e^{i\cdot n\omega x}\overline{e^{i\cdot n\omega x}}dx = \int_{-l}^{l} dx = 2l$

③ 因为 $e^{i\cdot n\omega x}=\cos n\omega x+i\sin n\omega x$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b} e^{i\cdot n\omega x}\overline{e^{i\cdot n\omega x}}dx &= \int_{a}^{b}(\cos n\omega x+i\sin n\omega x)(\cos n\omega x-i\sin n\omega x)dx\\ &= \int_{a}^{b}\cos^2 n\omega xdx+\int_{a}^{b}\sin^2 n\omega xdx\end{aligned}$$

即 $||e^{i\cdot n\omega x}||=||\cos n\omega x||+||i\sin n\omega x||$

例： 设 $P_n(x)=\dfrac{[(x^2-1)^n]^{(n)}}{2^n\cdot n!},x\in[-1,1]$——n 阶 Lagendre 多项式，则 $P_0(x)=1,P_1(x)=x,\cdots,P_n(x),\cdots$ 是 $L^2_{[-1,1]}$ 上的一个正交、完备的函数系，且 $||P_n(x)||^2=\dfrac{2}{2n+1},(n\geq 0)$，且

$$||f(x)||^2=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2||P_n(x)||^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2C_n^2}{2n+1}$$

注 任意一个函数的 Fourier 级数都是三角级数，反之并不是，考虑一下三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$，若它是某个函数的 Fourier 级数，则我们有 $b_n=\dfrac{1}{\ln n}$，而对于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$，设 $g(x)=\dfrac{1}{x\ln x},x\in[2,+\infty)$，则 $g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续，且

$$\int_{2}^{+\infty}g(x)dx=\ln(\ln x)\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty$$

即 $\int_{2}^{+\infty}g(x)dx$ 发散，依正项级数的积分判别法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，矛盾！

第 39 讲：Fourier 变换

(一)、Fourier 积分与 Fourier 变换

定义 12.29 (Fourier 积分与 Fourier 变换)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，即有 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$，且在 $\forall[a,b]$ 中逐段光滑，则我们有 Fourier 积分

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda x}d\lambda=\begin{cases}f(x) & \text{x 是 f 的连续点}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{否则}\end{cases}$$

令 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\triangleq F(f(t))$，则在 $f(x)$ 的连续点处有 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\triangleq F^{-1}(F(\lambda))$

在有些教材中我们有 $\begin{cases}F(\lambda)\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\\ f(x)\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\end{cases}$，称上式为 Fourier 变换

♣

例题 12.132 求 $f(x)=\begin{cases}1,|x|<a\\0,|x|\geq a\end{cases}$ 的付氏变换 $F(\lambda)$，试证明 $F(\lambda)$ 是偶函数，并证明 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$

解 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积且在 $\forall[a,b]$ 中逐段光滑

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt=\int_{-a}^{a}1e^{-i\lambda t}dt=\int_{-a}^{a}(\cos\lambda t-i\sin\lambda t)dt=\int_{-a}^{a}\cos\lambda tdt-i\int_{-a}^{a}\sin\lambda tdt=\frac{2\sin(\lambda a)}{\lambda}$$

对 $\forall\lambda\neq 0$，恒有 $F(-\lambda)=\dfrac{2\sin(-\lambda a)}{-\lambda}=\dfrac{2\sin(\lambda a)}{\lambda}=F(\lambda)$

由 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\begin{cases}f(x) & x\neq\pm a\\ \frac{1}{2} & x=\pm a\end{cases}$，而

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda xd\lambda$$

取 $x=0$，则有 $\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}d\lambda=1$，令 $\lambda a=x\Rightarrow\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

(二)、Fourier 变换的性质

定义 12.30 (卷积)

我们称 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt$ 为 f 与 g 的卷积，记作 $f*g(x)$ ♣

卷积有如下性质

性质

1. $f*g(x)=g*f(x)$

   证明 $f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt\overset{x-t=u}{\underset{dt=-du}{=\!=\!=}}\int_{+\infty}^{-\infty}f(u)g(x-u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)f(t)dt$

2. $f*(g+h)(x)=f*g(x)+f*h(x)$

   证明

   $$f*(g+h)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)[g(t)+h(t)]dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)h(t)dt=f*g(x)+f*h(x)$$

3. $(f*g)*h=f*(g*h)$

   设有两个 Fourier 变换：$F(f(t))=F(\lambda),F(g(t))=G(\lambda)$，则我们有如下性质

性质

1. 像函数 $F(\lambda)$ 与本函数 $f(x)$ 具有相同的奇偶性

   证明 仅证明奇函数的情况，偶函数同理。设 $f(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，则

   $$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda tdt-i\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda tdt=0-2i\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda tdt$$

   而 $-2i\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda tdt$ 是关于 λ 的奇函数 □

2. $F(C_1f(t)+C_2g(t))=C_1F(\lambda)+C_2G(\lambda)\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(C_1F(\lambda)+C_2G(\lambda)e^{i\lambda t})d\lambda=C_1f(t)+C_2g(t)$

   证明 $LHS=\int_{-\infty}^{+\infty}(C_1f(t)+C_2g(t))e^{-i\lambda t}dt=C_1F(\lambda)+C_2G(\lambda)=RHS$ □

3. 对于卷积，我们有 $f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\Leftrightarrow F(f*g(x))=F(\lambda)\cdot G(\lambda)$，即 Fourier 变换把函数的卷积化为函数的乘积

证明

$$
\begin{aligned}
LHS &= \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)e^{-i\lambda t}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt)e^{-i\lambda x}dx \quad \text{换序} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-i\lambda x}dx)g(t)dt \quad \text{令} x-t=u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda(t+u)}du)g(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du)e^{-i\lambda t}g(t)dt \\
&= (\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du)(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}g(t)dt) \\
&= F(\lambda)G(\lambda) = RHS
\end{aligned}
$$

□

4. Fourier 变换的 Parseval 等式 (f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且绝对可积、逐段光滑)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2 d\lambda$$

证明 令 $m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)dt$，则

$$
\begin{aligned}
F(m(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} m(x)e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)dt)e^{-i\lambda x}dx \quad \text{换序} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx)f(t)dt \text{令} x+t=u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda(u-t)}du)f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du)f(t)e^{i\lambda t}dt \\
&= (\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du)(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt) \\
&= F(\lambda)\overline{F(\lambda)} \\
&= |F(\lambda)|^2
\end{aligned}
$$

根据 Fourier 逆变换

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}d\lambda = m(x)$$

取 $x=0$，即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2 d\lambda$$

□

注 $\overline{F(\lambda)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt} = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(t)e^{-i\lambda t}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{e^{-i\lambda t}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt$

利用 Fourier 变换的 Parseval 等式可证明海森堡测不准原理

5. 设 $F(f(t)) = F(\lambda)$，则 $F(f'(t)) = (i\lambda)F(\lambda)$(要求 $f(\pm\infty)=0$)

同理有 $F(f^{(n)}(t)) = (i\lambda)^n F(\lambda)$(要求 $f^{(n)}(\pm\infty)=0$)

证明 因为 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}|e^{-i\lambda t}f(t)| = \lim\limits_{t\to\pm\infty}|e^{-i\lambda t}||f(t)| = 0$，所以

$$F(f'(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}df(t) = e^{-i\lambda t}f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-i\lambda)e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(i\lambda)e^{-i\lambda t}dt$$

下证二阶导的情况，n 阶导同理

$$\begin{aligned} F(f''(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}df'(t) \\ &= f'(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}(-i\lambda)dt \\ &= (i\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= (i\lambda)^2F(\lambda) \end{aligned}$$

注　我们可以用 Fourier 解微分方程，考虑 $y''+ay'+by=g(x)$，我们令 $F(g(x))=Y(\lambda)$，则 $F(ay')=aF(y')=a(\lambda i)Y(\lambda)$，$F(y'')=(\lambda i)^2Y(\lambda)$，$F(g(x))=G(\lambda)$

同时作 Fourier 变换，则 $(i\lambda)^2Y(\lambda)+a(i\lambda)Y(\lambda)+bY(\lambda)=G(\lambda)\Rightarrow Y(\lambda)=\dfrac{G(\lambda)}{-\lambda^2+ai\lambda+b}$

再做 Fourier 逆变换 $y(x)=F^{-1}(Y(\lambda))=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{G(\lambda)}{-\lambda^2+ai\lambda+b}e^{i\lambda x}d\lambda$，查表即可得到解

第十三章：反常积分和含参变量的积分

第 40 讲：反常积分及其收敛性判断

(一)、基本概念

$$\begin{cases}\text{正常积分：在\textbf{有界闭区域}上的\textbf{有界函数}的积分}\\ \text{反常积分：上述“双有”至少有一个不成立的积分}\end{cases}$$

如：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$\int_{-\infty}^b f(x)dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}(n>0)$，$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

注　上述所有反常积分都可以通过某种变换化为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，再通过平移变换 $(u=x-a)$ 化为 $\int_0^{+\infty} f(u)du$

反常积分分为两大类：无穷限积分和瑕积分，二者可以相互转换

命题 13.7 (两个重要的反常积分)

① $I=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}(a>0)$，当 $\lambda>1$ 时收敛，$\lambda\le 1$ 时发散

② $I=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}(a>0)$，当 $\lambda<1$ 时收敛，$\lambda\ge 1$ 时发散

证明　① 当 $\lambda>1$ 时，$I=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}dx=\left.\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_a^{+\infty}=0-\frac{a^{-\lambda+1}}{1-\lambda}=\frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}=g(\lambda)$

② 令 $\frac{1}{x-a}=u$，则 $x=a+\frac{1}{u}, dx=-\frac{du}{u^2}$

$$I=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{du}{u^{2-\lambda}}$$

当 $2-\lambda>1$ 时，即 $\lambda<1$ 时，瑕积分收敛　□

(二)、反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性与无穷级数

无穷级数和反常积分的收敛性理论具有很强的的平行性

1. $\begin{cases}① \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n=S \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=S\\ ② \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=I \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx=I\end{cases}$

2. $\begin{cases}① \text{ 设 } 0\le a_n\le b_n\text{，若 } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛，则 } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 必收敛}\\ ② \text{ 设 } 0\le f(x)\le g(x) \text{ 若 } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 收敛，则 } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 必收敛}\end{cases}$

3. 比较审敛法的极限形式：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A(f,g\ge 0)$，则

$$\begin{cases}A=0 \text{ 时，} g\ge f(x \text{ 充分大})\text{，当 } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 收敛时，} \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 必收敛}\\ A>0 \text{ 且为常数时，} \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 与 } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 同敛散}\\ A=+\infty \text{ 时，} f\ge g(x \text{ 充分大})\text{，当 } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 发散时，} \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 必发散}\end{cases}$$

(三)、判断下列反常积分 I 的敛散性

(1). $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ (2). $\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$ (3). $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x\sqrt[3]{1+x}}dx$ (4). $\int_a^b\frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

(5). $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ (6). $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ (7). $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx$

解 (7).$\alpha+1<0$ 时，$x=0$ 为瑕点

令 $I_1=\int_0^1\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx$，$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx$

在 I_1 中，$x^\alpha\arctan x\sim x^{\alpha+1}(x\to0^+)$，而

$$0\le\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}\le\frac{x^\alpha\arctan x}{2}\sim\frac{x^{\alpha+1}}{2}=\frac{1}{2x^{-(\alpha+1)}}$$

则当 $-(\alpha+1)<1$ 时，$\alpha>-2$ 时 $\int_0^1\frac{dx}{2(x-0)^{-(\alpha+1)}}$ 收敛，由比较审敛法知，I_1 在 $-2<\alpha<-1$ 时收敛

在 I_2 中，$0\le\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}\le\frac{x^\alpha\arctan x}{x^\beta}\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$

当 $\beta-\alpha>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\pi dx}{2x^{\beta-\alpha}}$ 收敛，由比较审敛法知 I_2 在 $\begin{cases}-2<\alpha<-1\\ \beta-\alpha>1\end{cases}$ 时，I_1,I_2 均收敛 $\Rightarrow I$ 收敛且 $I=I_1+I_2$

(1).$f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且非负，且 $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x}=0$

故 $I_1=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ 是正常积分，收敛，而对 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$，我们有

$$0\le\frac{\ln(1+x^2)}{x}\&\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty$$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散，由比较审敛法知，I_2 发散，即 I 发散

(2). 设 $f(x)=\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}(x\ge2)$，则 $f(x)$ 连续且非负，考虑极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$，因为 $\ln x<\sqrt{x}$(x 充分大时)，所以

$$\frac{\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}<\frac{\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}\to1$$

由 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知，$\int_2^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛

(3).$x=0$ 不是瑕点，因为 $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$，故 $I_1=\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt[3]{1+x}}dx$ 为正常积分，必收敛

而在 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x\sqrt[3]{1+x}}dx$ 中有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{arctanx}{x\sqrt[3]{1+x}}}{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}}=\frac{\pi}{2}>0$$

即 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x\sqrt[3]{1+x}}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ 同敛散，即 I_2 收敛，实际上，只需要取 $1<\alpha\le\frac{4}{3}$，跟 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ 比较即可

(4). 注意到 $x=a,b$ 均为瑕点，我们需要在 (a,b) 中取一点 c，将该反常积分分为两个瑕积分 $I=I_1+I_2$

对于 $I_1=\int_a^c\frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，且在 I_1 中，$\frac{x}{(x-a)(b-x)}\ge0$，用比较审敛法的极限形式

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}}{\frac{1}{\sqrt{x-a}}}=\frac{a}{\sqrt{b-a}}$$

且在 $\int_a^c \frac{dx}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$ 中，$\lambda = \frac{1}{2} < 1$，$I_1$ 收敛

对于 $I_2 = \int_c^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，且在 I_2 中，$\frac{x}{(x-a)(b-x)} \geq 0$，用比较审敛法的极限形式

$$\lim_{x\to b^-} \frac{\frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}}{\frac{1}{\sqrt{b-x}}} = \frac{b}{\sqrt{b-a}}$$

且在 $\int_c^b \frac{dx}{(b-x)^{\frac{1}{2}}} = -\int_b^c \frac{dx}{(b-x)^{\frac{1}{2}}}$ 中，$\lambda = \frac{1}{2} < 1$，$I_2$ 收敛，故 I 收敛且 $I = I_1 + I_2$

(5). 注意到 $x = 0$ 是瑕点，设 $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$，$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$，在 I_1 中，考虑极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1$$

且 $\int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{\frac{1}{2}}}$ 收敛，则 $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ 收敛，而在 I_2 中，考虑极限

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{4}}} = 0$$

因为 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}dx$ 收敛，由比较审敛法知 I_2 收敛，故 I 收敛且 $I = I_1 + I_2$

第 41 讲：含参正常积分的分析性质

(一)、复习

命题 13.8 (Dirichlet 判别法)

① 在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 中，若 $\begin{cases} \sum_{m=1}^{n} a_m, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ 有界} \\ \{b_n\} \text{ 单调减趋于零} \end{cases}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

② 在 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 中，若 $\begin{cases} \int_a^b f(x)dx \text{ 有界，} \forall b > a \\ g(x) \text{ 单调减趋于零} \end{cases}$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

例题 13.133 证明：若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，反之未必

证明 令 $\begin{cases} g(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \\ h(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \end{cases}$，且我们有 $\begin{cases} 0 \leq g(x) \leq |f(x)| \\ 0 \leq h(x) \leq |f(x)| \end{cases}$，$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，且 $f(x) = 2g(x) - |f(x)| \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} 2g(x)dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛

注 不可以由 $f(x) \leq |f(x)|$ 直接得到 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，因为比较审敛法的前提是函数恒正

反例：$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$，但 $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散

例题 13.134 证明：$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}dx (a > 0)$ 在 $\lambda > 1$ 时绝对收敛，当 $0 < \lambda \leq 1$ 时条件收敛

证明 因为 $0 \le \left|\dfrac{\sin x}{x^\lambda}\right| \le \dfrac{1}{x^\lambda}$，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ 在 $\lambda > 1$ 时收敛，由比较审敛法知 $\lambda > 1$ 时，

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx \text{ 绝对收敛}$$

当 $0 < \lambda \le 1$ 时，令 $f(x) = \sin x$，$g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$，$x \in [a, +\infty), a > 0$，且对 $\forall b > a$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \sin x dx\right| = |\cos b - \cos a| \le 2$$

且 $g(x) \downarrow 0\ (x \to +\infty)$，由狄利克雷判别法知，$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 收敛，下证明 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right|dx$ 发散

因为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right|dx \ge \int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\lambda}dx = \int_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^\lambda}dx = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{2x^\lambda} - \frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\lambda}dx$

而 $0 < \lambda \le 1$ 时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{2x^\lambda}$ 发散，由比较审敛法知，$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 发散 □

(二)、含参正常积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,u)dx \triangleq g(u), u \in [\alpha, \beta]$ 的分析性质

设 $f(x,u)$ 在 D: $\begin{cases} a \le x \le b \\ \alpha \le u \le \beta \end{cases}$ 上连续，则 $g(u) = \displaystyle\int_a^b f(x,u)dx$ 有如下五个分析性质

定理 13.34 (一致连续性)

$g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续 (而且是一致连续)，即

$$\lim_{u\to u_0} g(u) = g(u_0) \Leftrightarrow \lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)dx = \int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)dx = \int_a^b f(x,u_0)dx$$

证明 已知 $f(x,u)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,u)$ 在 D 上一致连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta(\varepsilon)$，当 $Q_1, Q_2 \in D$，且 $\rho(Q_1,Q_2) < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|f(Q_1) - f(Q_2)| < \varepsilon$，取 $Q_1(x,u_1), Q_2(x,u_2)$，则当 $\rho(Q_1,Q_2) = |u_1 - u_2| < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|f(x,u_1) - f(x,u_2)| < \varepsilon$，此时

$$|g(u_1) - g(u_2)| = \left|\int_a^b [f(x,u_1) - f(x,u_2)]dx\right| \le \int_a^b |f(x,u_1) - f(x,u_2)| < \int_a^b \varepsilon dx = (b-a)\varepsilon$$

□

定理 13.35 (可积、可换序)

$g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta g(u)du = \int_\alpha^\beta(\int_a^b f(x,u)dx)du = \int_a^b(\int_\alpha^\beta f(x,u)du)dx$$

证明 由于被积区域是矩形域，故曲顶柱体体积可由两种方式表示 □

定理 13.36 (可导)

若 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在 D 上连续，则 $g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可导，且有

$$g'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx = \left(\int_a^b f(x,u)dx\right)'_u$$

证明 令 $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx = h(u), u \in [\alpha, \beta]$，则根据定理 13.33，$h(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，任取 $[\alpha, v] \subset [\alpha, \beta]$，则

$$\int_\alpha^v h(u)du = \int_\alpha^v(\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx)du \xlongequal{换序} \int_a^b(\int_\alpha^v \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}du)dx \xlongequal{N-L} \int_a^b [f(x,v) - f(x,\alpha)]dx$$

两边同时对 v 求导，则 $\begin{cases} LHS = \left(\int_a^v h(u)du\right)'_v = h'(v) = \left(\int_a^b \dfrac{\partial f(x,v)}{\partial v}dx\right)'_v \\ RHS = \left(\int_a^b f(x,v)dx\right)'_v - 0 \end{cases}$ 将字母 v 改写为 u，即有

$$g'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx = \left(\int_a^b f(x,u)dx\right)'_u$$

□

定理 13.37 (积分上下限为复合函数时的连续性)

设 $a(u), b(u) \in C[\alpha,\beta]$，$a \le a(u), b(u) \le b$，$f(x,u) \in C(D)$，则 $g(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续

证明 对 $\forall u_0 \in [\alpha,\beta]$，我们有

$$g(u) = \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)dx + \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)dx + \int_{b(u_0)}^{b_u} f(x,u)dx$$

又有 $\begin{cases} \left|\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)dx\right| \le \int_{a(u)}^{a(u_0)} |f(x,u)|\, dx \le M\,|a(u) - a(u_0)| \\ \left|\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)dx\right| \le \int_{b(u_0)}^{b(u)} |f(x,u)|\, dx \le M\,|b(u) - b(u_0)| \\ \lim\limits_{u\to u_0} \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)dx = g(u_0) \end{cases}$

因此

$$\lim_{u\to u_0} g(u) = \lim_{u\to u_0} \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)dx + 0 + 0 = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)dx = g(u_0)$$

即 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续 □

定理 13.38 (含参变量正常积分求导的 Leibniz 公式)

若 $a \le a(u) \le b(u) \le b$，且 $a(u), b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，$\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u} \in C(D)$，则

$$g'(u) = \left(\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx\right)'_u = f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u) + \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

证明 令 $g(u) = G(B,A,C) = \int_A^B f(x,C)dx$，其中 $A = a(u), B = b(u), C = u$，两边同时对 u 求导，则

$$g'(u) = \frac{\partial G}{\partial B}\cdot B'_u + \frac{\partial G}{\partial A}\cdot A'_u + \frac{\partial G}{\partial C}\cdot C'_u$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial B} = \left(\int_A^B f(x,C)dx\right)'_B = f(B,u) = f(b(u),u) \\ \dfrac{\partial G}{\partial A} = \left(\int_A^B f(x,C)dx\right)'_A = -f(A,u) = -f(a(u),u) \\ \dfrac{\partial G}{\partial C} = \left(\int_A^B f(x,C)dx\right)'_C \xlongequal{Th13.35} \int_A^B \dfrac{\partial f(x,C)}{\partial C}dx = \int_{a(u)}^{b(u)} \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx \end{cases}$$

代入即得 □

例题 13.135 求 $\left(\int_{\cos^2 x}^{\sin^2 x} e^{x^2+t^2}dt\right)'_x$

解

$$\left(\int_{\cos^2 x}^{\sin^2 x} e^{x^2+t^2}dt\right)'_x = e^{x^2+(\sin^2 x)^2} 2\sin x\cos x - e^{x^2+(\cos^2 x)^2}(2\cos x\cdot -\sin x) + \int_{\cos^2 x}^{\sin^2 x}\left(e^{x^2+t^2}\right)'_x dt$$

$$= 2\sin x\cos x(e^{x^2+\sin^4 x} + e^{x^2+\cos^4 x}) + 2\int_{\cos^2 x}^{\sin^2 x} xe^{x^2+t^2}dt$$

例题 13.136 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\sin^2 x)dx$，$a, b$ 不同时为零

解 Case 1：当 $|a| = |b|$ 时，$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 dx = \pi\ln(|a|)$

Case 2：当 $|b| > |a|$ 时，设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + u\cos^2 x)dx \triangleq g(u)$，其中 $u = b^2 - a^2 \geq 0$，且有 $g(0) = \pi\ln(|a|)$

由定理 13.15

$$g'(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(a^2+u\cos^2 x)]'_u dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{a^2+u\cos^2 x}dx = \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^2+u\cos^2 x)-a^2}{a^2+u\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{a^2+u\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2u} - \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sec^2 x dx}{a^2(1+\tan^2 x)+u} = \frac{\pi}{2u} - \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|a|d(|a|\tan x)}{a^2+u+(|a|\tan x)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2u} - \frac{|a|}{u\sqrt{a^2+u}}\arctan\frac{|a|\tan x}{\sqrt{a^2+u}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2u} - \frac{|a|}{u\sqrt{a^2+u}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+u}(\sqrt{a^2+u}+|a|)}$$

因此

$$g(u) - g(0) = \int_0^u g'(u)du = \int_0^u \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+u}(\sqrt{a^2+u}+|a|)}du = \pi\int_0^u\frac{d(\sqrt{a^2+u}+|a|)}{\sqrt{a^2+u}+|a|} = \pi\ln(\sqrt{a^2+u}+|a|)\Big|_0^a$$

$$\Rightarrow g(u) = g(0) + \pi(\ln\frac{|a|+|b|}{2} - \pi\ln|a|) = \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$$

例题 13.137 $y(x) = \frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)dt$，$[c,x]\subset[a,b]$，k 为常数，求证：$f\in C[a,b]$ 满足常微分方程 (ODE)

$$y'' + k^2 y = f(x)$$

证明

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{k}\int_c^x f(t)\cos k(x-t)dt\cdot k + \frac{1}{k}f(x)\sin k(x-x)\cdot 1 - \frac{1}{l}f(c)\sin k(x-c)\cdot 0 = \int_c^x f(t)\cos k(x-t)dt \\ y''(x) = \int_c^x f(t)(-\sin k(x-t))dt\cdot k + f(x)\cos k(x-x)\cdot 1 = -k\int_c^x f(x)\sin k(x-t)dt \end{cases}$$

代入即有 $y'' + k^2 y = f(x)$ □

第 42 讲：含参反常积分的一致收敛性

由于函数项级数与含参反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 的一致收敛理论有很强的平行性，本节我们将二者平行展开介绍

(一)、逐点收敛与一致收敛

- 对于函数项级数，逐点收敛指的是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xlongequal{\text{逐点收敛}} S(x), x\in I \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) \xlongequal{\text{逐点收敛}} S(x), x\in I$$

用 $\varepsilon-\delta$ 语音表述即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}^*$，当 $m>n>N(\varepsilon,x)$ 时，$|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon, \forall x\in I$

定义 13.31 (含参反常积分的逐点收敛)

$\forall\varepsilon>0$，$\exists B(\varepsilon,u)>0$，对 $\forall A_2>A_1>B(\varepsilon,u)$，有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)du$ 逐点收敛到 $g(u),u\in[\alpha,\beta]$

- 对于函数项级数，一致收敛指的是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xlongequal{\text{一致收敛}} S(x),x\in I \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) \xlongequal{\text{一致收敛}} S(x),x\in I$$

用 $\varepsilon-\delta$ 语言表述即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，当 $m>n>N(\varepsilon)$ 时，$|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon,\forall x\in I$

定义 13.32 (含参反常积分的一致收敛)

$\forall\varepsilon>0$，$\exists B(\varepsilon)>0$，对 $\forall A_2>A_1>B(\varepsilon)$，有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)du$ 一致收敛到 $g(u),u\in[\alpha,\beta]$

注 显然，一致收敛是在逐点收敛的基础上，进一步提出了更高的要求，要求能找到一个只与 ε 有关的 $B(\varepsilon)$，而逐点收敛要求与 ε,u 有关即可，即一致收敛必逐点收敛，反之未必

(二)、一致收敛的四个判定定理

Cauthy 准则

对于函数项级数，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xlongequal{\text{一致收敛}} S(x),x\in I \overset{Cauchy}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，当 $n>n(\varepsilon)$ 时，$\forall p>n$ 有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\varepsilon,\forall x\in I$

命题 13.9 (含参反常积分的 Cauchy 准则)

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists B(\varepsilon)>0$，对 $\forall A_2>A_1>B(\varepsilon)$，有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right|<\varepsilon,\forall u\in[\alpha,\beta]$，则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 一致收敛到 $g(u),u\in[\alpha,\beta]$

Weierstrass 判别法

对于函数项级数，若 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in I,|a_n(x)|\le b_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛

命题 13.10 (含参反常积分的 Weierstrass 判别法)

在 $\int_a^{\infty} f(x,u)dx$ 中，若 $|f(x,u)|\le h(x)$，$\forall x\in[a,+\infty),\forall u\in[\alpha,\beta]$，且 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛

证明 因为 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\int_a^b h(x)dx=I$，$I$ 为常数 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists B(\varepsilon)>0$，对 $A_2>A_1>B(\varepsilon)$，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx\right|=\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx<\varepsilon$$

所以

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\le\int_{A_1}^{A_2}|f(x,u)|dx\right|\le\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx<\varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则知，$\int_a^{\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 □

Dirichlet 判别法

对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$，若 $\begin{cases} \sum_{m=1}^{n} a_m(x) \text{ 一致有界 M(M 与 x 无关)} \\ b_n(x) \text{ 关于 n 单调减且 (一致) 趋于零} \end{cases}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛

注 一致趋于零：$b_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，使得 $|b_n(x)-0|<\varepsilon, \forall x\in I$

命题 13.11 (含参反常积分的 Dirichlet 判别法)

对于含参反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$，若 $\begin{cases} \forall u\in[\alpha,\beta],\ \int_a^{b} f(x,u)dx \text{ 一致有界 M(M 与 u 无关)} \\ g(x,u) \text{ 关于 x 单调减且一致趋于零} \end{cases}$，则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，记作 $\int_a^{\infty} f(x,u)g(x,u)dx \xlongequal{\text{一致收敛}} H(u)$

注 $g(x,u)$ 关于 x 单调减且一致趋于零，也就是说 $\forall\varepsilon>0$，$\exists B(\varepsilon)>0$，当 $A>B(\varepsilon)$ 时，有 $|g(x,u)-0|<\varepsilon$

Abel 判别法

对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$，若 $\begin{cases} a_n(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致收敛} \\ b_n(x) \text{ 单调且一致有界} \end{cases}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛

命题 13.12 (含参反常积分的 Abel 判别法)

对于含参反常积分 $\int_a^{\infty} f(x,u)g(x,u)dx$，若 $\begin{cases} \int_a^{+\infty} f(x,u)dx \text{ 在 } [\alpha,\beta] \text{ 中一致收敛} \\ g(x,u) \text{ 在 D 中关于 x 单调且一致有界} \end{cases}$，则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，记作 $\int_a^{\infty} f(x,u)g(x,u)dx \xlongequal{\text{一致收敛}} H(u)$

注 一致有界指的是 $\exists M>0$ 且与 u 无关，使得 $|g(x,u)|<M$，$\forall u\in[\alpha,\beta]$

(三)、一致收敛的三个性质定理

- 对于函数项级数，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xlongequal{\text{一致收敛}} S(x), x\in I$，且 $a_n(x)\in C(I)$，则 $S(x)$ 在 I 上连续

定理 13.39

若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{\text{一致收敛}} g(u), u\in[\alpha,\beta]$，且 $f(x,u)\in C(D)$，$D:\begin{cases} a\le x\le+\infty \\ \alpha\le u\le\beta \end{cases}$，则 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续：

$$\lim_{u\to u_0} g(u)=g(u_0) \Leftrightarrow \lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)dx=\int_a^{+\infty} f(x,u_0)dx=g(u_0)=\int_a^{+\infty}\lim_{u\to u_0} f(x,u)dx, \forall u_0\in[\alpha,\beta]$$

即在一致收敛的前提下，极限号和积分号可以交换

• 对于函数项级数，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xlongequal{\text{一致收敛}} S(x), x \in I$，且 $a_n(x) \in C([a,b]) \subset C(I) \Rightarrow S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

定理 13.40

若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{\text{一致收敛}} g(u), u \in [\alpha,\beta]$，则

$$\int_\alpha^\beta g(u)du = \int_\alpha^\beta (\int_a^{+\infty} f(x,u)dx)du \xlongequal{\text{可换序}} \int_a^{+\infty} (\int_\alpha^\beta f(x,u)du)dx$$

• 对于函数项级数，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xlongequal{\text{逐点收敛}} S(x), x \in I$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) \xlongequal{\text{一致收敛}} T(x), x \in I$，则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)_x' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

定理 13.41

若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{\text{逐点收敛}} g(u), u \in [\alpha,\beta]$，且 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx \xlongequal{\text{一致收敛}} h(u), u \in [\alpha,\beta]$，则

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right)_u' = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

(四)、例题

例题 13.138 证明 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$

证明 $x<1$ 时，$t=0$ 为瑕点，将反常积分分为 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 和 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$，只需求其公共收敛域即可

在 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 中，$t^{x-1}e^{-t} \geq 0$ 且在 $(0,+\infty)$ 连续，注意到

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = e^0 = 1$$

且当 $1-x<1, x>0$ 时，$\int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^{1-x}}$ 收敛，即 $0<x<1$ 时 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛

而当 $x \geq 1$ 时，$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 为正常积分，必收敛。因此 $x>0$ 时，$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛

接下来考虑 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$，因为 $t^{x-1}e^{-t}>0$ 且在 $(0,+\infty)$ 连续，注意到

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1+x}}{e^t} = 0$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ 收敛，则 $\int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛，$\forall x \in \mathbb{R}$

综上，二者的公共收敛域为 $(0,+\infty) \Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \triangleq \Gamma(x), x \in (0,+\infty)$ □

例题 13.139 证明 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 中连续

证明 因为对 $\forall x_0 \in (0,+\infty)$，$\exists [a,b] \subset (0,+\infty)$，使得 $x_0 \in (a,b)$，要证 $\Gamma(x)$ 在 x_0 处连续，即证 $\Gamma(x)$ 在 $[a,b] \subset (0,+\infty)$ 上一致收敛

在 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 中，$\left|t^{x-1}e^{-t}\right| \le t^{a-1}e^{-t}, \forall x \in [a,b], t \in [0,1]$，结合上一题，$a>0$ 时，$\int_0^1 t^{a-1}e^{-t}dt$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 一致收敛

在 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 中，$\left|t^{x-1}e^{-t}\right| \le t^{b-1}e^{-t}, \forall x \in [a,b], t \in [1,+\infty)$，结合上一题，$b>0$ 时，$\int_1^{+\infty} e^{b-1}e^{-t}dt$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 一致收敛

综上，$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，而 $x_0 \in [a,b]$，即 $\Gamma(x)$ 在 x_0 处连续

第 43 讲：几个重要的反常积分

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0(n\to+\infty)$，但若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，推不出 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$

(一)、Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

证明 取 $f(x) = \begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|\le 1 \end{cases}$，则在 $f(x)$ 的连续点处有

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

其中 $\begin{cases} A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\lambda t dt = \frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda} \\ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt = 0 \end{cases}$

因此 $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda, \forall x \ne \pm 1$，取 $x=0$，则 $1 = f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ □

例题 13.140 利用 Dirichlet 积分证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \beta>0 \\ 0 & \beta=0 \\ -\frac{\pi}{2} & \beta<0 \end{cases}$

证明 ① $\beta>0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}d(\beta x) \xlongequal{\beta x=u} \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$

② $\beta<0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}d(\beta x) \xlongequal{\beta x=-u} \int_0^{-\infty}\frac{\sin(-u)}{-u}d-u = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = -\frac{\pi}{2}$

③ $\beta=0$ 时，原式显然等于 0

注 我们也可以这样定义 sgn x:$sgnx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ \text{-1} & x<0 \end{cases}$，很多非初等函数都可以被含参变量的反常积分表示

(二)、paissen 积分 (概率积分) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

证明 因为 $I^2 = (\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx)(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy)dx = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

做极坐标变换，令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则 $dxdy = rdrd\theta$，则

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr)d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} d(-r^2)) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

所以，$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

例题 13.141 试证明：$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ux^2} dx$

证明 令 $\sqrt{u}x = t$，则 $dx = \frac{1}{\sqrt{u}} dt$

$$RHS = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{u}} dt = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

例题 13.142 试证明：$\int_0^{+\infty} \sin u e^{-ux^2} du = \frac{1}{1+x^4}(x > 0)$

证明 设 $A = \int_0^{+\infty} \sin u e^{-ux^2} du = -\cos u e^{-ux^2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos u d(e^{-ux^2}) = 1 - x^2 \int_0^{+\infty} e^{-ux^2} d\sin u$

$$= 1 - x^2(\sin u e^{-ux^2}\Big|_0^{+\infty} + x^2 \int_0^{+\infty} e^{-ux^2} \sin u du)$$

因此，$A = 1 - x^2 \cdot x^2 A \Rightarrow A = \frac{1}{1+x^4}$ □

例题 13.143 计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx (a > 0)$

解 配方得 $-ax^2 + bx + c = -a(x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}) = -a[(x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}] = -a(x - \frac{b}{2a})^2 + a(\frac{b^2+4ac}{a^2})$

所以

$$\begin{aligned} I &= e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-\frac{b}{2a})^2} dx \quad \text{令} \sqrt{a}(x - \frac{b}{2a}) = u \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \end{aligned}$$

(三)、Fresnel(菲涅尔) 积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

证明 设 $x^2 = u$，则 $I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin u \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ux^2} dx) \sin u du$

换序并使用例 142 和例 143 的结论

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} \sin u e^{-ux^2} du) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

接下来求 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1+x^2}{1+x^4}dx\\&=\frac{1}{2}(\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\int_0^{+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx)\\&=\frac{1}{2}(\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+(\sqrt{2})^2}-\int_0^{+\infty}\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2})\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\Big|_0^{+\infty}\right]\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

因此，$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ □

注 已证明 $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ 收敛，则由奇偶对称性知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2dx=2\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

例题 13.144 试证明：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)dy)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)dx)dy=\pi$

证明 因为

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2dy)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin^2 x)\sqrt{\frac{\pi}{2}}+(\cos^2 x)\sqrt{\frac{\pi}{2}}dx\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\&=\pi\end{aligned}$$

□

例题 13.145 试证明 $\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<x<+\infty}}\sin(x^2+y^2)dxdy$ 发散

证明 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，则

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<x<+\infty}}\sin(x^2+y^2)dxdy=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{+\infty}r\sin r^2dr)=2\pi\cdot(-\frac{\cos r^2}{2})\Big|_0^{+\infty}=\pi(1-\lim_{r\to+\infty}\cos r^2)$$

故该二重积分发散 □

(四)、Laplace 积分

命题 13.13 (Laplace 积分)

$$\begin{cases}I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}(\alpha,\beta>0)\\J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}(\alpha,\beta>0)\end{cases}$$

证明 因为 $\left|\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\right|\le\frac{1}{x^2+\alpha^2},\forall\beta>0,x>0$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\alpha}$

依 Weierstrass 判别法知，$I(\beta)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛 $\Rightarrow I(\beta)$ 在 $[0,+\infty)$ 上逐点收敛

且 $0<\beta_0\le b$ 时，$\begin{cases}\left|\left|\int_0^b \sin\beta x dx\right|=\left|-\dfrac{\cos\beta x}{\beta}\right|_0^b\right|=\left|\dfrac{1-\cos b\beta}{\beta}\right|\le\dfrac{2}{\beta_0}，一致有界\\ \dfrac{x}{x^2+\alpha^2}\downarrow 0(x\to+\infty)\end{cases}$

依 Dirichlet 判别法知，$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$ 在 $[\beta_0,+\infty)$ 中一致收敛，所以

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\right)'_\beta dx=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=-J(\beta)$$

又因为 $\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx(\beta>0)$，所以

$$I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}(\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}-\frac{\sin\beta x}{x})dx=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2}{x(x^2+\alpha^2)}\sin\beta x=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x dx}{x(x^2+\alpha^2)}$$

上式两边对 β 再求导得 (可验证满足求导条件)

$$I''(\beta)=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\alpha^2 I(\beta)$$

即得到二阶常系数齐次线性微分方程

$$I''(\beta)-\alpha^2 I(\beta)=0$$

特征方程 $\lambda^2-\alpha^2=0\Rightarrow\alpha_{1,2}=\pm\alpha$，所以

$$I(\beta)=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$$

由先前放缩知，$|I(\beta)|\le\frac{\pi}{2\alpha}$，即 $I(\beta)$ 是有界函数，则 $C_1=0$，$I(\beta)=C_2e^{-\alpha\beta}$

令 $\beta\to0^+$，$I(0)=\lim\limits_{\beta\to0^+}I(\beta)=\lim\limits_{\beta\to0^+}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\lim\limits_{\beta\to0^+}\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}=C_2$

所以 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}(\alpha,\beta>0)$，$J(\beta)=-I'(\beta)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$ □

第 44 讲：Gamma 函数与 Beta 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,x>0$$
$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,x>0,y>0$$

(一)、$\Gamma(x)$ 的主要性质

命题 13.14

① $\Gamma(x)$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$，且 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致收敛

② $\Gamma(x)\in C^{+\infty}(0,+\infty)$(任意阶均连续可导)

③ 递推公式：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\forall x>0\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!,\forall n\in\mathbb{N}$

④ $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\forall n\in\mathbb{N}^\star$

证明 ② 先前已证 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，下证 $\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t})'_x dt=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln te^{-t}dt$

即证 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln te^{-t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，即证 $\forall x_0\in(0,+\infty)$ 处一致收敛，因为 $\exists[a,b]\in(0,+\infty)$，使得 $x\in(a,b)$

在 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ 中

$$\left|t^{x-1}\ln t e^{-t}\right| \le t^{a-1}(-\ln t)e^{0}$$

因为

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{-t^{a-1}\ln t}{\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}} = -\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-\frac{a}{2}}} \xlongequal{u=\frac{1}{t}} \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u^{\frac{a}{2}}} = 0$$

且 $\int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^{1-\frac{a}{2}}}$ 收敛，由比较审敛法知 $\int_0^1 t^{a-1}\ln t dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

在 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ 中

$$\left|t^{x-1}\ln t e^{-t}\right| \le t^{b-1}\ln t e^{-t}$$

因为

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{b-1}\ln t e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1+b}}{e^{\frac{1}{2}t}}\frac{\ln t}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0$$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ 收敛，由比较审敛法知 $\int_1^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}\ln t dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛

另一方面，显然 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ 在 $x\in[a,b]$ 上连续，故 $\Gamma'(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 上连续，即在 x_0 点处连续

证明 $\Gamma^n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t}dt$ 连续的手法类似，因此 $\Gamma(x)\in C^\infty(0,+\infty)$ □

③ $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} t^x de^{-t} = -e^{-t}t^x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt = 0 + x\Gamma(x), \forall x>0$ ($\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^x}{e^t} = 0$)

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n!\Gamma(1) = n!, \forall n\in\mathbb{N}^\star$$

□

④ 利用 paissen 积分

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \xlongequal[dt=2udu]{\sqrt{t}=u} 2\int_{0^{+\infty}} e^{-u^2}du = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

由递推公式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 知，$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \forall n\in\mathbb{N}^\star$ □

(二)、$B(x,y)$ 的主要性质

命题 13.15

① $B(x,y)$ 的收敛域为 $x>0, y>0$

② $B(x,y) = B(y,x) = \int_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}dz}{(1+z)^{x+y}} = \int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}dz}{(1+z)^{y+x}}$，$B(x,y)$ 是对称函数

③ $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

④ $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}(m,n\in\mathbb{N}^\star)$

证明 ① 在 $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 中，$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ge 0$ 且连续，且

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = 1$$

当 $\lambda=1-x<1$ 时，即 $x>0$ 时，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(t-0)^{1-x}}$ 收敛

在 $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 中，$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\geq 0$ 且连续，且

$$\lim_{t\to 1^-}\frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{\frac{1}{(t-1)^{1-y}}}=1$$

当 $\lambda=1-y<1$ 时，即 $y>0$ 时，$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{(t-1)^{1-y}}$ 收敛

所以 $B(x,y)$ 的收敛域为 $x>0,y>0$

② 当 $x>0,y>0$ 时

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\xlongequal[dt=-du]{1-t=u}\int_1^0 u^{y-1}(1-u)^{x-1}(-du)=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^x dt=B(y,x)$$

令 $t=\dfrac{1}{1+z}$，则 $z=\dfrac{1}{t}-1$，$dt=-\dfrac{dz}{(1+z)^2}$

$$B(x,y)=\int_{+\infty}^0\left(\frac{1}{1+z}\right)^{x-1}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{y-1}\frac{-dz}{(1+z)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}dz=\int_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}dz$$

③ 因为

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=(\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du)(\int_0^{+\infty}v^{y-1}e^{-v}dv)\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}u^{x-1}v^{y-1}e^{-(u+v)}dudv\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}u+v=s\\ \dfrac{u}{v}=t\end{cases}$，则 $\begin{cases}u=\dfrac{s}{1+t}\\ v=\dfrac{st}{1+t}\end{cases}\Rightarrow dudv=\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|dsdt=\dfrac{s}{(1+t)^2}dsdt$

所以

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{1+t}\right)^{x-1}\left(\frac{st}{1+t}\right)^{y-1}e^{-s}\cdot\frac{s}{(1+t)^2}dsdt\\&=(\int_0^{+\infty}s^{x+y-1}e^{-s}ds)(\int_0^{+\infty}\frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt)\\&=\Gamma(x+y)B(x,y)\end{aligned}$$

因为 $\Gamma(x)$ 恒正，则 $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ □

特别地，$\forall x\in(0,1),B(x,1-x)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)}=\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin x\pi}$，如 $B(\frac{1}{10},\frac{9}{10})=\Gamma(\frac{1}{10})\Gamma(\frac{9}{10})=\dfrac{\pi}{\sin\frac{1}{10}\pi}$

推论 13.14 ($\Gamma(x)$ 的 Legendre 加倍公式)

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

证明 因为 $B(x,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{4}-(t-\frac{1}{2})^2]^{x-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1[\frac{1}{4}-(t-\frac{1}{2})^2]^{x-1}dt$

在上式两个积分中分别令 $u=\dfrac{1}{2}-t,v=t-\dfrac{1}{2}$，则

$$B(x,x)=\int_{\frac{1}{2}}^0(\frac{1}{4}-u^2)^{x-1}-du+\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-v^2)dv=2\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-u^2)^{x-1}du$$

设 $\frac{s}{4}=u^2$，则 $du=\frac{1}{4\sqrt{s}}ds$

$$B(x,x)=2\int_0^1(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}s)^{x-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt{s}}ds=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1(1-s)^{x-1}s^{\frac{1}{2}-1}ds=\frac{1}{2^{2x-1}}B(\frac{1}{2},x)$$

所以 $\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}\Rightarrow\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$ □

(三)、例题

例题 13.146 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}(n>m-1\geq 1,m,n\in\mathbb{R})$，并计算 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^{100}dx}{1+x^{120}},I_2=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$

解 令 $x^n=z\Rightarrow x=z^{\frac{1}{n}}\Rightarrow z\geq 0,dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}z^{\frac{m-1}{n}}1+z\cdot\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{m}{n}-1}}{1+z}dz=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{m}{n}-1}}{(1+z)^{\frac{m}{n}+(1-\frac{m}{n})}}dz=\frac{B(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n})}{n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}$$

将 $m=101,n=120$ 代入得，$\int_0^{+\infty}\frac{x^{100}dx}{1+x^{120}}=\frac{\pi}{120\sin\frac{101}{120}\pi}$

将 $m=1,n=10$ 代入得，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}=\frac{\pi}{10\sin\frac{1}{10}\pi}$

终章：期末总复习

在本章节我们采取倒序复习的方式，从反常积分开始往回复习，但每节课复习的内容并不只局限于某一章节，而是多个章节。

第 45 讲：总复习课 (一)

(一)、例题

推论 13.15 (Γ 函数的余元公式)

对 $\forall a \in (0,1)$，有

$$B(a,1-a) = \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

证明 一方面，设 $f(x) = \cos ax, a \in (0,1), x \in [-\pi,\pi]$，对 $f(x)$ 作 $T = 2\pi$ 的周期开拓得到 $\mathbb{R}$ 上的函数 $F(x)$，下求 $F(x)$ 的 Fourier 级数，由偶函数知，$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos axdx = \frac{2\sin a\pi}{a\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a-n)x + \cos(a+n)x]dx \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{\sin a\pi}{a-\pi}(-1)^n + \frac{\sin a\pi}{a+n}(-1)^n]
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin a\pi}{\pi}[\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}]\cos nx \overset{\text{处处，一致}}{\underset{\text{绝对收敛}}{=\!=\!=\!=}} f(x) = \cos ax, x \in [-\pi,\pi]$$

取 $x = 0$，则 $\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

另一方面，当 $0 < a < 1$ 时

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = B(a,1-a) = \int_0^{+\infty}\frac{z^{a-1}}{(1+z)^{a+1-a}}dz = \int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

将无穷限积分拆为两部分计算，对第一部分：

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx &= \int_0^1 x^{a-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n dx \\
&= \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+a-1}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+a-1}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+a} \\
&= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}
\end{aligned}$$

对第二部分：

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}dx}{1+x}\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int_1^0\frac{u^{-a+1}\cdot\frac{-1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u}}=\int_0^1\frac{u^{-a}du}{1+u}=\int_0^1\frac{u^{(1-a)-1}}{1+u}du$$

即化为与第一部分类似的形式，在第一部分中，用 $1-a$ 代替 a 即得第二部分

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a-(n+1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{a-m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}$$

因此，我们有

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n})=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

□

例题 13.147 证明 n 维球体 $B_n(a):x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2(a>0),\forall n\in\mathbb{N}^\star$ 的体积 $V(B_n(a))=\dfrac{(a\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

证明 先前已证 $V(B_n(a))=\begin{cases}\dfrac{a^{2k}\pi^k}{k!} & n=2k\\ \dfrac{a^{2k-1}2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!} & n=2k-1\end{cases}$

Case 1：$n=2k$ 时，$\dfrac{a^{2k}\pi^k}{k!}=\dfrac{a^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(k+1)}=\dfrac{(\sqrt{\pi}a)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

Case 2：$n=2k-1$ 时，因为 $\Gamma(k+\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k},\forall k\in\mathbb{N}^\star,k=\dfrac{n+1}{2}$，所以

$$V(B_{2k-1}(a))=\frac{a^{2k-1}2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}=\frac{a^n\pi^{\frac{n+1}{2}-1}\sqrt{\pi}}{\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}}=\frac{(a\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}=\frac{(a\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

□

注 半径为 a 的 n 维球体的表面积 $S(B_n(a))=(V(B_n(a)))'_a=\dfrac{(\sqrt{\pi})^n\cdot na^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\Leftrightarrow\displaystyle\int_0^a S(B_n(a))da=V(B_n(a))$

例题 13.148 计算积分 $\displaystyle\int_a^b(x-a)^p(b-x)^q dx(b>a,p>-1,q>-1)$

解 为了化简为 Beta 函数，转化上下限至 $[0,1]$，令 $\dfrac{x-a}{b-a}=u\Leftrightarrow x=a+u(b-a)$，因此

$$\begin{aligned}\int_a^b(x-a)^p(b-x)^q dx&=\int_0^1(b-a)^pu^p(b-a)^q(1-u)^q(b-a)du\\&=(b-a)^{p+q+1}\int_0^1u^p(1-u)^q du\\&=(b-a)^{p+q+1}B(p+1,q+1)\end{aligned}$$

例题 13.149 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}xdx(\alpha,\beta>0)$，并进一步化简 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n xdx(m,n\in\mathbb{N})$

解 令 $t=\sin^2 x$，则 $x=\arcsin\sqrt{t}\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t}}dt$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}xdx&=\int_0^1t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t}}dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^1t^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-t)^{\frac{\beta}{2}-1}dt\\&=\frac{1}{2}B(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2})\end{aligned}$$

特别地，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n xdx(m,n\in\mathbb{N})=\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1)}$

若 $m=20,n=3$，则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{20}x\cos^3 xdx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{21}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{25}{2})}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{21}{2})}{\frac{21}{2}\cdot\frac{23}{2}\Gamma(\frac{21}{2})}=\frac{2}{483}$

例题 13.150 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx(n>m>0)$

解 令 $x^n=z\Rightarrow x=z^{\frac{1}{n}}\Rightarrow z\geq 0,dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{m-1}{n}}}{1+z}\cdot\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{m}{n}-1}}{1+z}dz=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{m}{n}-1}}{(1+z)^{\frac{m}{n}+(1-\frac{m}{n})}}dz=\frac{B(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n})}{n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}$$

例题 13.151（含参变量反常积分的求导与积分可换序）

$$\text{若}\begin{cases}\int_a^{+\infty}f(x,u)dx=g(u),u\in[\alpha,\beta](\text{逐点收敛})\\ \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\text{ 在 }[\alpha,\beta]\text{ 上一致收敛}\\ f(x,u),\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\in C(D)D:a\leq x\leq+\infty,\alpha\leq u\leq\beta\end{cases}\text{，则}$$

$$g'(u)=\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right)'_u=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

证明 令 $g_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)dx,\forall n\in\mathbb{N}^\star$，则

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx=g(u),u\in[\alpha,\beta]$$

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}g'_n(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\text{ 在 }[\alpha,\beta]\text{ 上一致收敛}$$

由函数项级数的一致收敛的分析性质知

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)\right)'_u=\sum_{n=1}^{\infty}g'_n(u)\Leftrightarrow\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right)'_u=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

□

例题 13.152 设 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},x>1$，$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,x>0$，试证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt=\zeta(x)\Gamma(x)$$

证明 因为 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},|x|<1$，当 $t>0$ 时，有 $\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-t})^n=\frac{1}{1-e^{-t}}$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt&=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t(1-e^{-t})}dt\\&=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-t})^ndt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}t^{x-1}dt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nt}t^{x-1}dt\quad\text{令}nt=u\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{x-1}\frac{du}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\cdot\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du\\&=\zeta(x)\cdot\Gamma(x)\end{aligned}$$

□

推论 13.16 (Beta 函数的递推公式)

$B(x,y)$ 有递推公式：$\forall x,y>0, B(x+1,y+1)=\dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y)$

证明

$$B(x+1,y+1)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}=\frac{x\Gamma(x)\cdot y\Gamma(y)}{(x+y)(x+y+1)\Gamma(x+y)}=\frac{xy\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)(x+y+1)\Gamma(x+y+1)}=\frac{xyB(x,y)}{(x+y)(x+y+1)}$$

□

第 46 讲：总复习课 (二)

(一)、例题

例题 13.153 设 $f(x)=x^2, x\in[0,\pi]$

(1). 将 $f(x)$ 展为周期为 π 的 Fourier 级数

(2). 将 $f(x)$ 展为余弦级数与正弦级数

(3). 指出上述 Fourier 级数的收敛情况并证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

解 (1). 将 $f(x)$ 作 $T=\pi$ 的周期开拓到 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，记作 $F(x)$，则 $f(x)=F(x)\Big|_{[0,\pi]}$

对于 $F(x)$，我们有 $2l=\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{l}=2$，$F(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx)$

$$\text{且}\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\dfrac{2}{3}\pi^2\\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2nxdx=\dfrac{1}{n^2}\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin 2nxdx=-\dfrac{\pi}{n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=F(x)\Big|_{[0,\pi]}\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx-\frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)\xlongequal{\text{处处收敛}}\begin{cases}f(x) & x\neq 0,\pi\\ \dfrac{\pi^2}{2} & x\in(0,\pi)\end{cases}$$

(3). 由 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)^2dx$$

$$\text{即}\ \frac{(\frac{2\pi^2}{3})^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((\frac{1}{n^2})^2+(-\frac{\pi}{n})^2\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx=\frac{2\pi^4}{5}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2\pi^4}{5}-\frac{2\pi^4}{9}-\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^4}{90}$$

(2). 先将 $f(x)$ 作偶开拓到 $[-\pi,\pi]$ 上，再作 $T=2\pi$ 的周期开拓到 $\mathbb{R}$ 上的函数，记为 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续，为逐段光滑的周期函数，由偶函数知 $b_n=0$

$$\text{且}\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\dfrac{2\pi^2}{3}\\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx=\dfrac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\end{cases}$$

所以

$$f(x)=F(x)\Big|_{[0,\pi]}\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos nx\ \underset{\text{绝对收敛}}{\overset{\text{处处、一致}}{=\!=\!=\!=}}\ f(x)=x^2, x\in[0,\pi]$$

由 Parseval 等式，$\dfrac{(\frac{2\pi^2}{3})^2}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2dx\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\frac{2\pi^4}{5}-\frac{2\pi^4}{9}}{16}=\frac{\pi^4}{90}$

正弦级数解法类似，下给出答案：$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^3\pi}((-1)^n-1)\right)\sin nx = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}$

注 由上题可知，同一函数在同一区间内可以收敛与多个 Fourier 级数，在本题中余弦级数收敛得最好

命题 13.16

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上逐段光滑，则 (设 $\omega = \frac{\pi}{l}$)

(1).$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x) \xlongequal{\text{处处收敛}} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \forall x \in [-l,l]$，其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x dx & n \ge 0 \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x dx & n \ge 1 \end{cases}$$

(2).$\forall [a,b] \subset [-l,l]$，$f(x)$ 的 Fourier 级数逐项积分定理

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)dx$$

(3).$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\cdot n\omega x}$，其中 $C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\cdot n\omega x}dx, n = 0, \pm1, \pm2\cdots$

例题 13.154 设 $f(x,y) \in C(D)$，$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x (\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)d\eta)d\xi$，试证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \forall (x,y) \in D$$

定理 13.42 (含参变量正常积分求导的 Leibniz 公式)

若 $a \le a(u) \le b(u) \le b$，且 $a(u), b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \in C(D)$，则

$$g'(u) = \left(\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx\right)'_u = f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u) + \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x,\eta)d\eta \cdot 1 - 0 + \int_0^x \left(\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)d\eta\right)'_x d\xi\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi)\cdot 1 - f(\xi,\xi-x+y)\cdot(-1)]\,d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi)+f(\xi,\xi-x+y)]\,d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\left[(f(x,x+y-x)+f(x,x-x+y))\cdot 1 - 0 + \int_0^x (f_2'(\xi,x+y-\xi)\cdot 1 + f_2'(\xi,\xi-x+y)\cdot(-1))d\xi\right] \\ &= f(x,y) + \frac{1}{2}\int_0^x [f_2'(\xi,x+y-\xi) - f_2'(\xi,\xi-x+y)]d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi)\cdot 1 - f(\xi,\xi-x+y)\cdot 1]d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi) - f(\xi,\xi-x+y)]d\xi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{2}\int_0^x [f_2'(\xi, x+y-\xi)\cdot 1 - f_2'(\xi, \xi-x+y)\cdot 1]d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x [f_2'(\xi, x+y-\xi) - f_2'(\xi, \xi-x+y)]d\xi
\end{aligned}
$$

因此我们有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \forall (x,y)\in D$ □

例题 13.155 设 $a>0, b>0, c>0$，求 a,b,c 的共同取值范围，使三重积分 $F(a,b,c) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{1+x^a+y^b+z^c}$ 收敛，其中 Ω 为第一卦限，并求 $F(a,b,c)$

解 令 $u^2 = x^a, v^2 = y^b, w^2 = z^c \Rightarrow \begin{cases} x = u^{\frac{2}{a}} \\ y = v^{\frac{2}{b}} \\ z = w^{\frac{2}{c}} \end{cases} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial u,v,w}\right| = \begin{vmatrix} \frac{2}{a}u^{\frac{2}{a}-1} & & \\ & \frac{2}{b}v^{\frac{2}{b}-1} & \\ & & \frac{2}{c}w^{\frac{2}{c}-1} \end{vmatrix} = \frac{8}{abc}u^{\frac{2}{a}-1}v^{\frac{2}{b}-1}w^{\frac{2}{c}-1}$

再作球坐标变换，令 $\begin{cases} u = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ v = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ w = \rho\cos\theta \end{cases}$，则 $dudvdw = \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$，所以

$$
\begin{aligned}
F(a,b,c) &= \iiint\limits_{\substack{0<u<+\infty \\ 0<v<+\infty \\ 0<w<+\infty}} \frac{1}{1+u^2+v^2+w^2}\cdot\frac{8}{abc}u^{\frac{2}{a}-1}v^{\frac{2}{b}-1}w^{\frac{2}{c}-1}dudvdw \\
&= \frac{8}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^{\frac{2}{a}-1}(\rho\sin\theta\sin\varphi)^{\frac{2}{b}-1}(\rho\cos\theta)^{\frac{2}{c}-1}}{1+\rho^2}\cdot\rho^2\sin\theta d\rho \\
&= \frac{8}{abc}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-1}(\cos\theta)^{\frac{2}{c}-1}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{\frac{2}{a}-1}(\sin\varphi)^{\frac{2}{b}-1}d\varphi)(\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1}}{1+\rho^2}d\rho) \\
&= \frac{8}{abc}\cdot\frac{1}{2}B(\frac{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}}{2},\frac{\frac{2}{c}}{2})\cdot\frac{1}{2}B(\frac{\frac{2}{a}}{2},\frac{\frac{2}{b}}{2})\cdot(\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1}}{1+\rho^2}d\rho)
\end{aligned}
$$

故三重积分的敛散性只与上式第三部分有关，设 $\rho^2 = u$，则 $\rho = \sqrt{u} \Rightarrow d\rho = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1}}{1+\rho^2}d\rho &= \int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}}{1+u}du \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}}{(1+u)^{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})}}du \\
&= \frac{1}{2}B(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, 1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})
\end{aligned}
$$

所以，我们需要保证 $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 0 \\ 1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c} > 0 \end{cases}$，即 $0 < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1$，此时有

$$
\begin{aligned}
F(a,b,c) &= \frac{1}{abc}B(\frac{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}}{2},\frac{\frac{2}{c}}{2})B(\frac{\frac{2}{a}}{2},\frac{\frac{2}{b}}{2})B(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}) \\
&= \frac{1}{abc}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\Gamma(\frac{1}{c})}{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{a})\Gamma(\frac{1}{b})}{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}),\Gamma(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})}{\Gamma(1)} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{a})\Gamma(\frac{1}{b})\Gamma(\frac{1}{c})}{abc}\Gamma(1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}))
\end{aligned}
$$

第 47 讲：总复习课 (三)

(一)、例题

例题 13.156 设 $\varphi(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$，且对任意的绕 $O(0,0)$ 一周的正向的逐段光滑的闭曲线 C^+，恒有

$$\oint_{C^+}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=A$$

(1). 设 L^+ 为正向圆周：$(x-2)^2+y^2=1$，试证明 $\oint_{L^+}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$

(2). 求出函数 $\varphi(x)$ 和常数 A

解 (1). 将 L^+ 分为右半圆周 L_1^+ 和左半圆周 L_2^+，考虑使用题目条件，构造 L_3，使得 $L_1^++L_3$ 为绕过原点一周的正向闭曲线，则此时 $L_2^-+L_3$ 也为绕过原点一周的正向闭曲线，记 $P(x,y)=\frac{2xy}{x^4+y^2},Q(x,y)=\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$，则

$$\begin{aligned}\oint_{L_+}Pdx+Qdy&=\int_{L_1^+}Pdx+Qdy+\int_{L_2^+}Pdx+Qdy\\&=\oint_{L_1^++L_3}Pdx+Qdy-\oint_{L_2^-+L_3}Pdx+Qdy\\&=A-A\\&=0\end{aligned}$$

(2). 设 $\overrightarrow{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)),(x,y)\in D,D:x>0$，则仿照第一问的证法，对任意的 D 中的正向逐段光滑闭曲线 L^+，恒有 $\oint_{L^+}Pdx+Qdy=0\Leftrightarrow\overrightarrow{A}(x,y)$ 是 D 中的保守场

由于 D 是单连通域，则 $\overrightarrow{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 是 D 中的无旋场，即

$$\nabla\times\overrightarrow{A}(x,y)=rot(\overrightarrow{A})=\theta$$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D\Rightarrow\frac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2x(x^4+y^2)-2y(2xy)}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$

整理可得 $(\varphi'(x)+2x)y^2+x^4\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)-2x^5=0\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(x)+2x=0\\x^4\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)-2x^5=0\end{cases}$

解得 $\varphi(x)=-x^2$，此时恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\neq(0,0)$，因为奇点 $(0,0)$ 在 C^+ 内部，故此时格林公式不成立，需要对奇点进行处理，取正向光滑曲线 $L_0^+:x^4+y^2=\varepsilon$，$\varepsilon$ 充分小，满足 L_0^+ 在 C^+ 内部，令 L_0^+ 与 C^+ 围成的区域为 D_0，则有

$$\begin{aligned}A&=\oint_{C^+}Pdx+Qdy\\&=\oint_{C^++L_0^-}Pdx+Qdy+\oint_{L_0^+}pdx+Qdy\\&=\iint_{D_0}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\oint_{L_0^+}Pdx+Qdy\\&=0+\oint_{L_0^+}Pdx+Qdy\\&=\oint_{L_0^+}\frac{2xydx-x^2dy}{\varepsilon}\\&=\frac{1}{\varepsilon}\iint_{D^\star}(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy)}{\partial y})dxdy\\&=-\frac{4}{\varepsilon}\iint_{D^*}xdxdy\\&=0\end{aligned}$$

这是因为对 L_0^+ 的线积分中，提出 $\frac{1}{\varepsilon}$ 后，$(0,0)$ 并不是 $-x^2, 2xy$ 的奇点，故可直接用 Green 公式

注　平面中的单连通域即为空间中的曲面单连通域

当需要挖去零点时，我们可以构造闭曲线 $\alpha x^{2m} + \beta y^{2n} = \varepsilon^2$

例题 13.157 判断下列反常积分的收敛性与绝对收敛性

(1). $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x\ln(x+2)} (a>0)$　(2). $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$　(3). $\int_2^{\infty} \frac{x\ln(1+x)dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

解 (1). 因为 $\int_0^a \frac{\sin x}{x}$ 为正常积分必收敛，由

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$$

则 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ 收敛，另一方面 $\left|\frac{1}{\ln(x+2)}\right| \leq \frac{1}{\ln(a+2)}, \forall x \in [a,+\infty)$，依 Abel 判别法，反常积分收敛

而 $\left|\frac{\sin x}{x\ln(x+2)}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x\ln(x+2)} = \frac{1-\cos 2x}{2x\ln(x+2)} \geq \frac{1-\cos 2x}{2(x+2)\ln(x+2)} = \frac{1}{2(x+2)\ln(x+2)} - \frac{\cos 2x}{2(x+2)\ln(x+2)}$

一方面，$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{2(x+2)\ln(x+2)} = \frac{1}{2}\ln(\ln(x+2))\Big|_a^{+\infty}$ 发散

另一方面，对 $\forall b > a$，$\left|\int_a^b \cos 2x dx\right| \leq 2$，且 $g(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)} \downarrow 0$，所以由 Dirichlet 判别法知，$\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2(x+2)\ln(x+2)}$ 收敛，因此 $\int_a^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x\ln(x+2)}\right| dx$ 发散

(2). 分为两部分 $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$，对于第一部分

$$\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{1+x^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{1+x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} (x \to 0^+)$$

而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛，因此 $\int_0^1 \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 绝对收敛

对于第二部分

$$\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}$ 收敛，因此 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛

(3). 因为 x 足够大时，有 $\ln(x+1) < \sqrt{x}$，则

$$\frac{x\ln(x+1)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} (x \to +\infty)$$

且 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，则 $\int_2^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，且为绝对收敛 (函数恒正)

注　放大招 (1).$(\ln n)^m \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n, \forall n \in \mathbb{N}^\star$

(2).$(\ln x)^m \ll x^\alpha \ll a^x \ll \Gamma(x+1) \ll x^x, \forall m > 0, \alpha > 0, a > 1$

例题 13.158 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} (yz+x)dydz + (zx+y)dzdx + (xy+z)dxdy$，其中 $\Sigma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ z = c \end{cases}$，取下侧

解　因为 $z = c \Rightarrow dz = 0, dydz = dzdx = 0$

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} (c+xy)dxdy \times (-1) \\ &= -[c \cdot S(\Omega) + \iint\limits_{\Omega} xydxdy] \\ &= -\pi abc \end{aligned}$$

这是因为 xy 关于 x 为奇函数且被积区域关于 $x=0$ 对称

第 48 讲：总复习课 (四)

(一)、例题

推论 13.17（（第二类曲面积分的“三合一算法”））

在 $I=\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 中，光滑曲面 Σ 的法向量设为 $\overrightarrow{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$(dydz,dzdx,dxdy)=\overrightarrow{n}ds=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)ds=d\overrightarrow{s}$$

我们称之为有向面积元，且有 $dydz=\cos\alpha ds, dzdx=\cos\beta ds, dxdy=\cos\gamma ds$

当 $\cos\gamma\neq 0$ 时，此时 $\begin{cases} dydz=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy \\ dzdx=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=\iint\limits_{\Sigma}\left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R\right)dxdy \\ &=\pm\iint\limits_{D_{xy}}\left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R\right)dxdy \end{aligned}$$

若 Σ 为隐式曲面 $F(x,y,z)=0$，且有参数式 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，则

$$\overrightarrow{n}=\pm\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

♡

例题 13.159 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上侧

解 先计算椭球面的单位外法向量

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n}&=\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \\ &=\frac{(F'_x,F'_y,F'_z)}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}} \\ &=(\frac{2x}{a^2|\nabla F|},\frac{2y}{b^2|\nabla F|},\frac{2z}{c^2|\nabla F|}) \end{aligned}$$

所以 $dydz=\dfrac{xc^2}{za^2}dxdy, dzdx=\dfrac{yc^2}{zb^2}dxdy$

$$\begin{aligned} I&=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{xc^2}{za^2}x^2+\frac{yc^2}{zb^2}y^2+z^2)dxdy \\ &=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}[\frac{c}{a^2}\frac{x^3}{\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}}+\frac{c}{b^2}\frac{y^3}{\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}}+c^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})]dxdy \\ &=0+0+\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}c^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})dxdy \end{aligned}$$

作广义极坐标变换，设 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则 $dxdy=abrdrd\theta$，所以

$$I=abc^2\int_0^1 r(1-r^2)dr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{2}abc^2$$

推论 13.18（（第二类曲线积分的“三合一算法”））

在 $I=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 中，有向光滑曲线 $\Gamma: r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$，且单位切向量 $\tau=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\neq\theta$，则

$$(dx,dy,dz)=\vec{\tau}ds=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)ds=d\vec{s}$$

我们称之为有向弧长元，且有 $\cos\alpha ds=dx,\cos\beta ds=dy,\cos\gamma ds=dz$

当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，有 $\begin{cases} dy=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}dx \\ dz=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}dx \end{cases}$

$$I=\int_L (P+Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+R\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha})dx$$

例题 13.160 设 $u=f(x,y)\in C^2(D)$，D 是区域，且 u 满足 Laplace 方程

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

则称 u 是 D 上的调和函数，试证明：u 是 D 上的调和函数 $\Leftrightarrow \oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}ds=0$，其中 L 是 D 中任意光滑闭路，$\vec{n}$ 为单位外法向量

证明 $(\Rightarrow)$ 已知 u 调和 $\Rightarrow \triangle u=0$，设 L 的正向单位切向量为 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则其正向单位法向量 $\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$，此时

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}ds&=\oint_L\nabla\cdot\vec{n}ds\\&=\oint_L(u'_x,u'_y)\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)ds\\&=\oint_L(u'_x,u'_y)\cdot(dy,-dx)\\&=\oint_L -u'_ydx+u'_xdy\\&=\iint_{D_0}(\frac{\partial(u'_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-u'_y)}{\partial y})dxdy\\&=\iint_{D_0}(u'_{xx}+u''_{yy})dxdy\\&=\iint_{D_0}\triangle udxdy\\&=0\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 已知 $\oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}ds=0$，要证 $\forall M_0\in D$，有 $\triangle u\Big|_{M_0}=0$，对 $\forall M_0\in D$，$\exists L\subset D$，$L:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon$

同上推导有 $\oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}ds=\iint_{D^*}\triangle udxdy$，其中 D^* 为 L 围的区域，即 $\iint_{D^*}[u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)]dxdy=0$，由积分中值定理，$\exists Q_0\in D^*$，使得

$$[u''_{xx}(Q_0)+u''_{yy}(Q_0)]\cdot S(D^*)=0$$

因为 $S(D^*)=\pi\varepsilon^2$ 非零可约去，令 $\varepsilon\to 0^+$，则 $Q_0\to M_0$，则 $u''_{xx}(M_0)+u''_{yy}(M_0)=0,\forall M_0\in D$ □

例题 13.161 设 $u=f(x,y,z)\in C^2(\Omega)$，$\Omega$ 是区域，且 u 满足 Laplace 方程

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

则称 u 是 Ω 上的调和函数，试证明：u 是 Ω 上的调和函数 ⇔ $\oiint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=0$，其中 Σ 是 Ω 中任意光滑闭曲面，$\vec{n}$ 为其单位外法向量

证明 (⇒) 已知 u 是 Ω 中的调和函数：$\triangle u(x,y,z)=0,\forall(x,y,z)\in\Omega$，且 $u\in C^2(\Omega)$，而

$$
\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds &= \oiint_{\Sigma}\triangle u\cdot\vec{n}\,ds\\
&=\oiint_{\Sigma}(u'_x,u'_y,u'_z)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)\\
&=\oiint_{\Sigma}u'_xdydz+u'_ydzdx+u'_zdxdy\\
&=\iiint_{\Omega_0}(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})dV\\
&=\iiint_{\Omega_0}\triangle u dV\\
&=0
\end{aligned}
$$

(⇐) 已知 $\oiint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=0$，要证对 $\forall M_0\in\Omega$，有 $\triangle u\Big|_{M_0}=0$，作 $\Sigma_0=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\varepsilon^2,\Sigma_0\in\Omega$ 同上推导可得 $\iint_{\Sigma_0}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=\iiint_{\Omega_0}\triangle udV$，其中 Ω_0 为 Σ_0 的内部区域，即 $\iiint_{\Omega_0}(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})dV=0$，由积分中值定理，$\exists Q_0\in\Omega_0$，使得

$$[u''_{xx}(Q_0)+u''_{yy}(Q_0)+u''_{zz}(Q_0)]\cdot V(\Omega_0)=0$$

因为 $V(\Omega_0)=\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ 非零可约去，令 $\varepsilon\to0$，则 $Q_0\to M_0$，则 $u''_{xx}(M_0)+u''_{yy}(M_0)+u''_{zz}(M_0)=0,\forall M_0\in D$

□

例题 13.162 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

解 设 $P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},Q=\frac{z}{r^3},r=\sqrt{2x^2+2y^2+z^2}>0$

则 $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1\cdot r^3-3r^2\frac{4x^2}{2r}}{r^6}=\frac{r^2-6x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-6y^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$，所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3(2x^2+2y^2+z^2)-6x^2-6y^2-3z^2}{r^5}=0$$

因此 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ 为无源场，$\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$，注意到原点为奇点，不可直接使用 Gauss 公式，因此我们取 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $\Sigma_0^+:2x^2+2y^2+z^2=\varepsilon^2$ 在 Σ 内部，其中 Σ_0^+ 取外法向，令 $\Omega^\star$ 是 Σ_0^+ 与 Σ 围成的区域，则 $O(0,0,0)\notin\Omega^*$

$$
\begin{aligned}
I&=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\oiint_{\Sigma_0^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\oiint_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\iiint_{\Omega^*}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}dV+\oiint_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=0+\oiint_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

另一方面

$$\oiint_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\varepsilon^3}$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_0}(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z})dV$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_0}3dV$$
$$=\frac{3}{\varepsilon^3}V(\Omega_0)$$
$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\varepsilon$$
$$=2\pi$$

所以 $I=2\pi$

注 在球面上任取一点的单位法向量 $\vec{n}=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，即球心与球面上一点连线后再单位化

第 49 讲：总复习课 (五)

(一)、例题

例题 13.163 计算环量 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，L 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a(a>0)$ 与立方体 $\Omega:0\le x,y,z\le a$ 的表面 $\partial\Omega$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 是逆时针方向

解 设 Σ 是 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 在 L 围成的内部，且 $\vec{n}=\frac{(F_x',F'(y),F'(z))}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

设 Σ 是 L 张成的曲面，则 L 的正向与 Σ 的正向 (侧) 构成右手系 1，由 Stokes 公式

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&z^2-x^2&x^2-y^2\end{vmatrix}ds=\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{3}}(-4x-4y-4z)ds=\frac{-4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}a\iint_{\Sigma}ds=-2\sqrt{3}S(\Sigma)=-\frac{9}{2}a^3$$

我们也可以通过将 Σ 投影到 xoy 平面上来计算 $S(\Sigma)$

例题 13.164

(1).a 为何值时，$\vec{A}(x,y,z)=(x^2+5ay+3yz)i+(5x+3axz-2)j+((a+2)xy-4z)k$ 是有势场 (保守场)

(2). 当 $\vec{A}(x,y,z)$ 是有势场时，求出所有的势 (原) 函数

(3). 计算 $\int_{(1,2,1)}^{(2,-1,2)}(x^2+5ay+3yz)dx+(5x+3axz-2)dy+((a+2)xy-4z)dz$

解 (1). 设 $P=x^2+5ay+3yz,Q=5x+3axz-2,R=(a+2)xy-4z$，$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，且 $\mathbb{R}^3$ 为曲面单连通域，因为 $\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)\in C^1(\mathbb{R}^3)$，则当 $\vec{A}(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的无旋场时，$\vec{A}$ 为无旋场 (有势场)，即

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}i&j&k\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\theta=(0,0,0)$$

展开即有 $\begin{cases}(a+2)x-3ax=0\\3y-(a+2)y=0\\5+3az-(5a+3z)=0\end{cases}\Rightarrow a=1$

(2).$a=1$ 时，$\overrightarrow{A}(x,y,z)=(x^2+5y+3yz,5x+3xz-2,3xy-4z)$，则势函数

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz\\
&=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z Q(x,y,z)dz\\
&=\int_0^x x^2dx+\int_0^y 5x-2dy+\int_0^z 3xy-4zdz\\
&=\frac{x^3}{3}+5xy-2y+3xyz-2z^2
\end{aligned}$$

故所有的势函数为 $\frac{x^3}{3}+5xy-2y+3xyz-2z^2+C$，C 为任意常数

(3). 原式 $=\int_{(1,2,1)}^{(2,-1,2)}d\varphi(x,y,z)=\varphi(2,-1,2)-\varphi(1,2,1)$

例题 13.165 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+\alpha)dxdy$，其中 $\alpha>0$ 为常数，Σ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,z\geq 0$ 的外侧

解 法 I：补面，设 Σ_0：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\\ z=0\\ \text{方向朝下，即 }\overrightarrow{n}=-k\end{cases}$ 使用 Gauss 公式

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+\alpha)dxdy-\oiint\limits_{\Sigma_0}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+\alpha)dxdy$$

对于第一部分 $I_1\overset{Gauss}{=\!=\!=}\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dV$，其中 Ω 是 Σ 与 Σ_0 围成的有界闭区域，即上半球面，且 Ω 关于 $x=0,y=0$ 对称 $\Rightarrow I_1=2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，作球坐标变换，则

$$I_1=2\iiint\limits_{D_{r\theta\varphi}}cr\cos\theta\cdot abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi=2abc^2\int_0^1 r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{2}abc^2$$

而对于第二部分，在 Σ_0 上有 $z=0\Rightarrow dydz=dzdx=0$，则 $I_2=\oiint\limits_{\Sigma_0}\alpha dxdy=-\alpha S(\Sigma_0)=-ab\alpha\pi$

所以，$I=\frac{abc^2}{2}\pi+ab\alpha\pi$

法 II：分项计算，并使用第二类曲面积分“偶零奇倍”的性质

设 $\Sigma_1:x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}},\Sigma_2:x=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$，因为

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz&=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dydz+\iint\limits_{\Sigma_2}x^2dydz\\
&=\iint\limits_{D_{yz}}a^2(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2})dydz+(-1)\iint\limits_{D_{yz}}a^2(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2})dydz\\
&=0
\end{aligned}$$

故“偶零”，奇倍也是同理，则 $I=\iint\limits_{\Sigma}z^2+\alpha dxdy=\iint\limits_{\Sigma_0}\left(c^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})+\alpha\right)dxdy$

作广义极坐标变换，则 $I=c^2\iint\limits_{D_{r\theta}}(1-r^2)abrdrd\theta+\alpha S(\Sigma_0)=c^2\int_0^1(r-r^3)dr\int_0^{2\pi}d\theta+\alpha\pi ab=\frac{abc^2}{2}\pi+ab\alpha\pi$

法 III："三合一法"，因为 $\Sigma: z=c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}=z(x,y)$，所以 $F(x,y,z)=z-z(x,y)$

$$\vec{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{(-z'_x,-z'_y,1)}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\Rightarrow\begin{cases}\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=-z'_x\\ \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=-z'_y\end{cases}$$

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}Pdxdy+Qdydz+Rdzdx=\iint\limits_{\Sigma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(-z'_xP-z'_yQ+R)dxdy$

$$I=\iint\limits_{\Sigma_0}\left(\frac{-c(\frac{-2x}{a^2})}{2\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})}}-\frac{-c(\frac{-2y}{b^2})}{2\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})}}+c^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})+\alpha\right)dxdy$$
$$=0+0+\iint\limits_{D_{r\theta}}[c^2(1-r^2)+\alpha]abrdrd\theta$$

计算上述积分即可

也可以写为 $I=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot\vec{n}\,ds$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}\cdot(\pm1)|r'_u\times r'_v|dudv=\pm\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(r'_u\times r'_v)dudv$$
$$=\begin{vmatrix}P&Q&R\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}$$

特别地，若 $z=z(x,y)$，则我们有

$$I=\pm\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}P&Q&R\\1&0&z'_x\\0&1&z'_y\end{vmatrix}dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}(R-z'_xP-z'_yQ)dxdy$$

符号与 $\cos\gamma$ 的符号有关，即与曲面朝上/下有关，朝上取正，朝下取负

例题 13.166 设 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1$，$\Sigma=\partial\Omega$ 取外侧，求 $V(\Omega)$

解 因为 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}zdxdy\xlongequal{Gauss}\iiint\limits_{\Omega}(0+0+1)dV=V(\Omega)$，设 Σ_1 为上半椭球面，方向朝外，所以

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}zdxdy=2\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy=2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$
$$=2abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r\sqrt{1-r^2}dr=4abc\pi\cdot-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$
$$=\frac{4}{3}\pi abc$$

推论 13.19 (第二型曲面积分计算封闭区域的体积)

$$V(\Omega)=\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}xdydz=\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}ydzdx=\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}zdxdy$$
$$=\frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}xdydz+ydzdx=\frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}ydzdx+zdxdy=\frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}zdxdy+xdydz$$
$$=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}ydzdx+zdxdy+xdydz$$