概率论第九、十周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 1 日

习题 4.2

T1

证明 (1). 若 $\mathbb{R}[|X+Y|^p]=0$，则不等式显然成立，下面假设 $\mathbb{E}[|X+Y|^p]>0$，因为

$$\begin{aligned}|X+Y|^p &= |X+Y|\cdot|X+Y|^{p-1}\\ &\le |X|\cdot|X+Y|^{p-1}+|Y|\cdot|X+Y|^{p-1}\end{aligned}$$

对 $|X|\cdot|X+Y|^{p-1}$ 使用 *Hölder* 不等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|\cdot|X+Y|^{p-1}] &\le \left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[\left(|X+Y|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\mathbb{E}[|X+Y|^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

同理，对 $|Y|\cdot|X+Y|^{p-1}$ 使用 *Hölder* 不等式得 $\mathbb{E}[|Y|\cdot|X+Y|^{p-1}]\le\left(\mathbb{E}[|Y|^p]\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\mathbb{E}[|X+Y|^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}$，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X+Y|^p] &\le \mathbb{E}[|X|\cdot|X+Y|^{p-1}]+\mathbb{E}[|Y|\cdot|X+Y|^{p-1}]\\ &\le \left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\mathbb{E}[|X+Y|^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\mathbb{E}[|Y|^p]\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\mathbb{E}[|X+Y|^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

两边同时乘以 $\left(\mathbb{E}[|X+Y|^p]\right)^{\frac{1-p}{p}}$ 得

$$\mathbb{E}[|X+Y|^p]\le\left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\mathbb{E}[|Y|^p]\right)^{\frac{1}{p}}$$

(2). 由 *Hölder* 不等式

$$\mathbb{E}[|X|^r]\le\left(\mathbb{E}\left[(|X|^r)^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\mathbb{E}[1^q]\right)^{\frac{1}{q}}$$

取 $p=\frac{s}{r}>1$，则

$$\mathbb{E}[|X|^r]\le\left(\mathbb{E}[|X|^s]\right)^{\frac{r}{s}}$$

两边同时开 r 次方根得 $\left(\mathbb{E}[|X|^r]\right)^{\frac{1}{r}}\le\left(\mathbb{E}[|X|^s]\right)^{\frac{1}{s}}$

(3). 当 $r<1$ 时，若 $x=y$，则显然有 $(x+y)^r=2^rx^r\le 2x^r=x^r+y^r$，若 $x\ne y$，不妨设 $0<x<y$，对 $f(x)=x^r$ 应用拉格朗日中值定理

$$(x+y)^r-y^r\le f'(\xi)\cdot x,\quad y<\xi<x+y$$

因为 $f'(\xi)=\frac{r}{\xi^{1-r}}\le\frac{1}{\xi^{1-r}}\le\frac{1}{y^{1-r}}\le\frac{1}{x^{1-r}}=x^{r-1}$，所以

$$(x+y)^r-y^r\le x^{r-1}\cdot x=x^r$$

因此

$$|X+Y|^r\le\big||X|+|Y|\big|^r\le|X|^r+|Y|^r$$

两边同时取期望即得证

当 $r\ge1$ 时，因为 $f(x)=x^r,x\ge0$ 是凸函数，由 *Jensen* 不等式知 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$，所以

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\le\frac{x^r+y^r}{2}\Longrightarrow(x+y)^r\le2^{r-1}(x^r+y^r)$$

所以

$$|X+Y|^r\le\big||X|+|Y|\big|^r\le2^{r-1}(|X|^r+|Y|^r)$$

两边同时取期望即得证 □

T3

证明 $(\Longrightarrow)$: 因为

$$\frac{|X_n|}{1+|X_n|}=\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\cdot I_{\{|X_n|\le\varepsilon\}}+\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\cdot I_{\{|X_n|>\varepsilon\}}$$

注意到 $\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\le1$，且 $|X_n|<\varepsilon$ 时，$\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\le|X_n|<\varepsilon$，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right]&=\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\cdot I_{\{|X_n|\le\varepsilon\}}\right]+\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\cdot I_{\{|X_n|>\varepsilon\}}\right]\\&\le\varepsilon\cdot\mathbb{P}(|X_n|\le\varepsilon)+1\cdot\mathbb{P}(X_n>\varepsilon)\\&\le\varepsilon+\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon)\end{aligned}$$

由于 $X_n\xrightarrow{P}0$，所以上式取上极限得

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right]\le\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to0^+$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right]=0$，即 $\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right]=0$

$(\Longleftarrow)$: 注意到 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $x\ge0$ 时单调增，所以 $|X_n|\ge\varepsilon\iff\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\ge\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$，记 $Y_n=\frac{|X_n|}{1+|X_n|}$，则由 $r=1$ 时的 *Markov* 不等式

$$\mathbb{P}(|X_n|\ge\varepsilon)=\mathbb{P}\left(|Y_n|\ge\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\le\frac{\mathbb{E}[|Y_n|]}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

由 $\mathbb{E}[|Y_n|]\to0$ 知，$\mathbb{P}(|X_n|\ge\varepsilon)\to0$，再由 ε 的任意性知，$X_n\xrightarrow{P}0$ □

T4

证明 (1). 对 $\forall z \geq 0$（$z<0$ 时同理）

$$\begin{aligned}\{X_n+Y_n\leq z\}&=\{X_n+Y_n\leq z,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\cup\{X_n+Y_n\leq z,|Y_n-c|>\varepsilon\}\\&\subseteq\{X_n\leq z-c+\varepsilon\}\cup\{|Y_n-c|>\varepsilon\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{X_n+Y_n\leq z\}&=\{X_n+Y_n\leq z,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\cup\{X_n+Y_n\leq z,|Y_n-c|>\varepsilon\}\\&\supseteq\{X_n+Y_n\leq z,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\supseteq\{X_n\leq z-c-\varepsilon,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\end{aligned}$$

所以

$$\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)\leq\mathbb{P}(X_n\leq z-c+\varepsilon)+\mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon)$$

取合适的 ε 使得 $z-c+\varepsilon$ 是 F_X 的连续点（F_X 只在至多可数个点间断），令 $n\to\infty$ 得

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)\leq\mathbb{P}(X\leq z-c+\varepsilon)=\mathbb{P}(X+c\leq z+\varepsilon)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)&\geq\mathbb{P}(X_n\leq z-c-\varepsilon,|Y_n-c|\leq\varepsilon)\\&=\mathbb{P}(X_n\leq z-c-\varepsilon)-\mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon)\end{aligned}$$

取合适 ε 使得 $z-c-\varepsilon$ 是 F_X 的连续点，令 $n\to\infty$ 得

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)\geq\mathbb{P}(X\leq z-c-\varepsilon)=\mathbb{P}(X+c\leq z-\varepsilon)$$

若 z 为 F_X 的连续点，令 $\varepsilon\to0$ 得，有

$$\mathbb{P}(X+c\leq z)=\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)\leq\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)\leq\mathbb{P}(X+c\leq z)$$

因此 $\mathbb{P}(X_n+Y_n\leq z)\to\mathbb{P}(X+c\leq z)$，即 $X_n+Y_n\xrightarrow{D}X+c$

(2). 不妨设 $c>0$，$c<0$ 时同理，取 $0<\varepsilon<c$

$$\begin{aligned}\{X_nY_n\leq z\}&=\{X_nY_n\leq z,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\cup\{X_nY_n\leq z,|Y_n-c|>\varepsilon\}\\&\subseteq\left\{X_n\leq\frac{z}{c-\varepsilon}\right\}\cup\{|Y_n-c|>\varepsilon\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{X_nY_n\leq z\}&=\{X_nY_n\leq z,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\cup\{X_nY_n\leq z,|Y_n-c|>\varepsilon\}\\&\supseteq\{X_n+Y_n\leq z,|Y_n-c|\leq\varepsilon\}\supseteq\left\{X_n\leq\frac{z}{c+\varepsilon},|Y_n-c|\leq\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

所以

$$\mathbb{P}(X_nY_n\leq z)\leq\mathbb{P}(X_n\leq\frac{z}{c-\varepsilon})+\mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon)$$

取合适的 ε 使得 $\frac{z}{c-\varepsilon}$ 是 F_X 的连续点，令 $n\to\infty$ 得

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_nY_n\le z)\le\mathbb{P}(X\le\frac{z}{c-\varepsilon})$$

另一方面

$$\mathbb{P}(X_nY_n\le z)\ge\mathbb{P}(X_n\le\frac{z}{c+\varepsilon})-\mathbb{P}(|Y_n-c|\le\varepsilon)$$

取合适的 ε 使得 $\frac{z}{c+\varepsilon}$ 是 F_X 的连续点，令 $n\to\infty$ 得

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_nY_n\le z)\ge\mathbb{P}(X\le\frac{z}{c+\varepsilon})$$

若 $\frac{z}{c}$ 为 F_X 的连续点，令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\mathbb{P}(X\le\frac{z}{c})\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_nY_n\le z)\le\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_nY_n\le z)\le\mathbb{P}(X\le\frac{z}{c})$$

即 $\mathbb{P}(X_nY_n\le z)\to\mathbb{P}(X\le\frac{z}{c})=\mathbb{P}(cX\le z)$，即 $X_nY_n\xrightarrow{D}cX$

接下来证明若 $Y_n\xrightarrow{P}c, c\neq 0$，则 $\frac{1}{Y_n}\xrightarrow{P}\frac{1}{c}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{Y_n}-\frac{1}{c}\right|>\varepsilon\right)&=\mathbb{P}\left(\frac{|Y_n-c|}{|cY_n|}>\varepsilon\right)\\&=\mathbb{P}\left(\frac{|Y_n-c|}{|cY_n|}>\varepsilon,|Y_n-c|\le\varepsilon\right)+\mathbb{P}\left(\frac{|Y_n-c|}{|cY_n|}>\varepsilon,|Y_n-c|>\varepsilon\right)\\&\le\mathbb{P}\left(\frac{|Y_n-c|}{|c|\cdot\max\{|c-\varepsilon|,|c+\varepsilon|\}}>\varepsilon\right)+\mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon)\\&\xrightarrow{n\to\infty}0\end{aligned}$$

所以

$$\frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{D}\frac{X}{c}$$

当 $c=0$ 时，对 $\forall\varepsilon,\delta>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)&=\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon,|Y_n|>\delta)+\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon,|Y_n|\le\delta)\\&\le\mathbb{P}(|Y_n|>\delta)+\mathbb{P}(|X_n|>\frac{\varepsilon}{\delta})\\&\le\mathbb{P}(|Y_n|>\delta)+1-\mathbb{P}(X_n\le\frac{\varepsilon}{\delta})+\mathbb{P}(X_n\le-\frac{\varepsilon}{\delta})\end{aligned}$$

取合适的 $\pm\frac{\varepsilon}{\delta}$ 使得它们是 F_X 的连续点，令 $n\to\infty$ 得

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)\le 0+1-\mathbb{P}(X\le\frac{\varepsilon}{\delta})+\mathbb{P}(X\le-\frac{\varepsilon}{\delta})$$

令 $\delta\to 0^+$ 得

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)\le 1-F(+\infty)+F(-\infty)=0$$

这就说明 $\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)\to 0,\forall\varepsilon>0$，即 $X_nY_n\xrightarrow{D}0$ □

习题 4.3

T1

证明 由 *Grimmett 4.4.8* 知，当 $x\to\infty$ 时

$$\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}\sim\frac{1}{x}\Longrightarrow 1-\Phi(x)\sim\frac{\phi(x)}{x}$$

对 $\forall|\varepsilon|<1$，记 $A_n=\left\{\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}\geq 1+\varepsilon\right\}$，则当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n)&=\mathbb{P}\big(X_n\geq\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)\big)=(1-\Phi(\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)))\\&\sim\frac{\phi(\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon))}{\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)}=\frac{1}{\sqrt{\pi\log n}(1+\varepsilon)n^{(1+\varepsilon)^2}}\end{aligned}$$

Case 1. $0<\varepsilon<1$ 时因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi\log n}(1+\varepsilon)n^{(1+\varepsilon)^2}}}{\frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}}}=0$$

且由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}}<+\infty$ 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<+\infty$，由 *B-C* 引理

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\sqrt{\log n}}\geq\sqrt{2}(1+\varepsilon)\right)=0$$

进而 $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{\sqrt{\log n}}\leq\sqrt{2}\right)=1$

Case 2. $-1<\varepsilon\leq 0$ 时，因为

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\log x}}\mathrm{d}x\overset{\sqrt{\log x}=t}{=\!=\!=}\int_2^{+\infty}2\mathrm{d}t=+\infty$$

由 *Cauchy* 积分判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=+\infty$，由 *B-C* 引理

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\sqrt{\log n}}\geq\sqrt{2}(1+\varepsilon)\right)=1$$

取 $\varepsilon=0$，则 $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{\sqrt{\log n}}\geq\sqrt{2}\right)=1$

T6

证明 a.s 意义下：对 $\forall\varepsilon>0$，因为

$$\mathbb{P}(M_n<a-\varepsilon)=\mathbb{P}(X_1<a-\varepsilon,\cdots,X_n<a-\varepsilon)=\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n$$

记 $A_n=\{M_n<a-\varepsilon\}$，因为 $\frac{a-\varepsilon}{a}<1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<+\infty$$

由 B-C 引理，$\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\right)=0$，对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$，设 $A_n^k=\left\{M_n<a-\frac{1}{k}\right\}=\left\{a-M_n>\frac{1}{k}\right\}$，则 $\forall k\in\mathbb{N}^*,\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n^k\right)=0$，所以

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\limsup_{n\to\infty}A_n^k\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left\{|a-M_n|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0$$

因此 $M_n\xrightarrow{\text{a.s}}a$

L^p 意义下：即证明 $\mathbb{E}\left[(a-M_n)^p\right]\to 0$ as $n\to\infty$，首先 $a-M_n$ 的概率分布函数为

$$F(x)=\mathbb{P}(a-M_n\le x)=1-\mathbb{P}(M_n\le a-x)=\begin{cases}1, & x>a\\ 1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^n, & 0\le x\le a\\ 0, & x<0\end{cases}$$

所以 $a-M_n$ 的密度分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>a\\ \frac{n}{a}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{n-1}, & 0<x<a\\ 0, & x<0\end{cases}$$

当 $p\ge 1$ 为整数时，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(a-M_n)^p]&=\int_0^a x^p\cdot\frac{n}{a}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{n-1}\mathrm{d}x\\&=na^p\int_0^1 t^p(1-t)^{n-1}\mathrm{d}x\\&=naB(p+1,n)=na^p\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+p+1)}\\&=a^p\Gamma(p+1)\cdot\frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n+p+1)}\\&=a^p\Gamma(p+1)\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)\cdot\prod\limits_{k=1}^{p}(n+k)}\\&=\frac{a^p\Gamma(p+1)}{\prod\limits_{k=1}^{p}(n+k)}\to 0\end{aligned}$$

即 $M_n \xrightarrow{L^p} a$

当 $p \geq 1$ 不是整数时，取 $\tilde{p} = [p] + 1$，则由 $M_n \xrightarrow{L^{[p]+1}} a$ 知 $M_n \xrightarrow{L^p} a$ □

T7

证明 任取 $\{b_n\}, \text{s.t. } b_n \searrow 0$，记 $E_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$，由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 知

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n(\varepsilon)) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

对 $\varepsilon = b_1, \exists n_1 \gg 1, \text{s.t. } \mathbb{P}(E_{n_1}(b_1)) < \frac{1}{2}$

对 $\varepsilon = b_2, \exists n_2 \geq n_1, \text{s.t. } \mathbb{P}(E_{n_2}(b_2)) < \frac{1}{2^2}$

依此类推，对每个 $\varepsilon = b_k$，均找到 $E_{n_k}(b_k), \text{s.t. } \mathbb{P}(E_{n_k}(b_k)) < \frac{1}{2^k}$，由 *B-C* 引理

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{n_k}(b_k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(b_k)\right) = 0$$

接下来证明

$$\forall \varepsilon > 0, \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\varepsilon) \subseteq \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(b_k)$$

由 $b_k \searrow 0$ 知

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\varepsilon) &\Longrightarrow \text{存在无穷多个} n_k, \text{s.t. } |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \\ &\Longrightarrow \text{存在无穷多个} n_k, \text{s.t. } |X_n(\omega) - X(\omega)| > b_k \\ &\Longrightarrow \omega \in \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\varepsilon)\end{aligned}$$

因此取 $\varepsilon = \frac{1}{j}, \forall j \in \mathbb{N}^*$，由单调性知

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}\left(\frac{1}{j}\right)\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(b_k)\right) = 0$$

因此

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}\left(\frac{1}{j}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{1}{j}\right)\right) = 0$$

即 $\mathbb{P}(X_{n_k} \nrightarrow X) = 0$，所以 $X_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s}} X$ □

习题 4.4

T1

证明 截尾：对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，设 $Y_n^k = \min\{X_n, k\}$，因此 $\{Y_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布，且 $\mathbb{E}[Y_1^k] \leq k < +\infty$，所以由柯尔莫哥洛夫强大数律

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^k \xrightarrow{\text{a.s}} \mathbb{E}[Y_1^k]$$

且 $X_n \geq Y_n^k$，所以

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_n^k = \mathbb{E}[Y_1^k], \quad \text{a.s} \tag{1}$$

且 $Y_1^k \nearrow X_1$，由 *MCT* 知

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[Y_1^k] = \mathbb{E}[X_1] = +\infty, \quad \text{a.s}$$

在 (1) 式中，令 $k \to +\infty$ 得

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \geq \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[Y_1^k] = +\infty, \quad \text{a.s}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_n = +\infty, \text{a.s}$，即 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{a.s}} +\infty$ $\square$

T2

证明 因为 $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$，所以

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^k \right| = \left| f(x) - \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})] \right| = \left| \mathbb{E}[f(x) - f(\frac{S_n}{n})] \right|$$

记 $F = f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)$，由 $f \in C([0,1])$ 知，f 一致连续且 $\exists M > 0, \text{s.t.} |f| < M$，故 $|F| \leq 2M$，且对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.} \forall |x_1 - x_2| < \delta$，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$，设 $A = \left\{ \left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta \right\}$，则

$$F = F \cdot I_A + F \cdot I_{A^c}$$

一方面，因为 $\text{Var}(S_n) = nx(1-x)$，由 *Chebychev* 不等式

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F \cdot I_A] &\leq 2M\mathbb{E}[I_A] = 2M \cdot \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right) \\
&\leq 2M \cdot \frac{\text{Var}(\frac{S_n}{n} - x)}{\delta^2} = 2M \cdot \frac{\text{Var}(S_n)}{(n\delta)^2} \\
&= 2M \cdot \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{n\delta^2}
\end{aligned}$$

取 n 足够大满足 $\frac{M}{n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$；另一方面，由一致连续知

$$\mathbb{E}[F \cdot I_{A^c}] \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{E}[I_{A^c}] = \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{P}(A^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

综上

$$\mathbb{E}[F] = \mathbb{E}[F \cdot I_A] + \mathbb{E}[F \cdot I_A^c] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^k \right| = 0$$

□

T3

证明 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$，由 *Markov* 不等式

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(S_n^4 > \varepsilon^4 n^4) \le \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{\varepsilon^4 n^4}$$

因为 $S_n^4 = (X_1 + \cdots + X_n)^4$，且 $\{X_i\}$ i.i.d，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^4] = &\binom{n}{1}\mathbb{E}[X_1^4] + \binom{n}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{1}\mathbb{E}[X_1^3]\mathbb{E}[X_2] + \binom{n}{2}\binom{4}{2}\mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2^2]\\ &+ \binom{n}{3}\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_3] + \binom{n}{4}\cdot 4!\cdot\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_3]\mathbb{E}[X_4]\\ =\ & n\mathbb{E}[X_1^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}\big([X_1^2]\big)^2\end{aligned}$$

由 *Lyapunov* 不等式知，若 $\mathbb{E}[X_1^4] < +\infty$，则 $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$，因此 $\exists M \ge 0, \text{s.t. } \mathbb{E}[S_n^4] < M$，故

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(S_n^4 > \varepsilon^4 n^4) \le \frac{M}{\varepsilon^4 n^4}$$

因此对 $\forall\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \le \frac{M}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} < +\infty$$

由 *B-C* 引理知 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{a.s}}{=\!=\!\longrightarrow} 0$

T4

证明 (1). 记 $Y_i = \log X_i$，则由 $X_i \sim \exp(1)$ 知 $F_Y(y) = 1 - e^{-e^y}$ 求导得

$$f_Y(y) = e^{y-e^y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

所以

$$\mathbb{E}[Y_1] = \int_{\mathbb{R}} ye^{y-e^{-y}}\mathrm{d}y \xlongequal{u=e^y} \int_0^{+\infty}\frac{\log u}{e^u}\mathrm{d}u = -\gamma$$

其中 γ 是欧拉常数，且 $\mathbb{E}[|Y_1|] = \int_{\mathbb{R}}|y|e^{y-e^{-y}}\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty}\frac{\log u}{e^u}\mathrm{d}u - \int_0^1\frac{\log u}{e^u}\mathrm{d}u < +\infty$，由柯尔莫哥洛夫强大数律

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\text{a.s}} -\gamma$$

因此

$$(X_1\cdots X_n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \xrightarrow{\text{a.s}} e^{-\gamma}$$

(2). 设 $Z_i=\frac{1}{X_i}$，则 $F_{Z_i}(z)=e^{-\frac{1}{z}}, z>0$，求导得

$$f_{Z_i}(z)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z^2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

进而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_i]&=\int_0^{\infty} z\cdot\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z^2}\mathrm{d}z=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}\mathrm{d}z\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{te^t}\mathrm{d}t=\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)\frac{1}{te^t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因为 $\int_0^1\frac{1}{te^t}\mathrm{d}t\ge\int_0^1\frac{1}{et}\mathrm{d}t=+\infty$，且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{te^t}\mathrm{d}t<+\infty$，因此 $\mathbb{E}[Z_i]=+\infty$，由习题 4.4.1 知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z_i\xrightarrow{\text{a.s}}+\infty$$

因此 $\frac{n}{\frac{1}{X_1}+\cdots+\frac{1}{X_n}}\xrightarrow{\text{a.s}}0$ □

习题 5.1

T1

解

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{itX}]&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}e^{-|x|}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\cos(tx)e^{-|x|}\mathrm{d}x+\frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}}\sin(tx)e^{-|x|}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\cos(tx)e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos(tx)e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1+t^2}\cdot\left.\begin{vmatrix}\cos(tx) & e^{-x}\\ -t\sin(tx) & -e^{-x}\end{vmatrix}\right|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

T2

证明 注意到 $\left(\frac{U}{\sqrt{U^2+V^2}}\right)^2+\left(\frac{V}{\sqrt{U^2+V^2}}\right)^2=1$，且对任意固定的 $\theta\in[0,2\pi)$，设 $A=\cos\theta X+\sin\theta Y$，则

$$\begin{aligned}\phi_A(t)&=\mathbb{E}[e^{itA}]\xlongequal{\text{独立}}\mathbb{E}[e^{it\cos\theta X}]\mathbb{E}[e^{it\sin\theta Y}]\\&=\phi_X(\cos\theta t)\phi_Y(\sin\theta t)=e^{-\frac{1}{2}\cos^2\theta t^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sin^2\theta t^2}=e^{-\frac{1}{2}t^2}\end{aligned}$$

当 $(U,V)=(u,v)$ 时，记 $\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}=\cos\theta, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=\sin\theta$，则我们有

$$\phi_Z(t)=\mathbb{E}[e^{itz}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{itz}|(U,V)]]=\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}t^2}]=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

由推论 5.2.2 知，$Z\sim N(0,1)$

反之，当 (X,Y) 服从标准二元正态分布时，即期望为零，方程为 1，协方差为 ρ 时，有

$$\phi_{uX+vY}(t)=\mathbb{E}[e^{ituX+itvY}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{ituX+itvY}|X]]=\mathbb{E}[e^{ituX}\mathbb{E}[e^{itvY}|X]]$$

因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{itvY}|X=x]&=\int_{\mathbb{R}}e^{itvy}\cdot f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}}e^{itvy}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2}\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{m=\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}m^2+itv(\sqrt{1-\rho^2}m+\rho x)}\mathrm{d}y\\
&=\frac{e^{itv\rho x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}m^2+itv\sqrt{1-\rho^2}m}\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{n=itv\sqrt{1-\rho^2}}\frac{e^{itv\rho x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}m^2+mn}\mathrm{d}y\\
&=e^{itv\rho x+\frac{1}{2}s^2}\xlongequal{\text{解析延拓}}e^{itv\rho x-\frac{1}{2}t^2v^2(1-\rho^2)}
\end{aligned}$$

这就说明 $\mathbb{E}[e^{itvY}|X]=e^{itv\rho X-\frac{t^2v^2(1-\rho^2)}{2}}$，所以

$$\begin{aligned}
\phi_{uX+vY}(t)&=\mathbb{E}[e^{ituX}\cdot e^{itv\rho X-\frac{t^2v^2(1-\rho)^2}{2}}]\\
&=e^{-\frac{t^2v^2(1-\rho)^2}{2}}\mathbb{E}[e^{it(u+\rho v)X}]\\
&=e^{-\frac{t^2v^2(1-\rho)^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}e^{it(i+\rho v)x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{a=it(u+\rho v)}e^{-\frac{t^2v^2(1-\rho)^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}e^{ax-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{解析延拓}}e^{-\frac{u^2+2\rho uv+v^2}{2}t^2}
\end{aligned}$$

因此 $\tilde{Z}=\frac{UX+VY}{\sqrt{U^2+2\rho UV+V^2}}$ 时，我们有 $\phi_{\tilde{Z}}=e^{-\frac{1}{2}t^2}$，此时 $Z\sim N(0,1)$ □

T5(1)

解

$$\phi_{Y_n}(t)=\mathbb{E}[e^{itY_n}]=\mathbb{E}[e^{itX_1^2}\cdots e^{itX_n^2}]\xlongequal{\text{独立}}\prod_{j=1}^n\mathbb{E}[e^{itX_j^2}]$$

接下来求每个 $\mathbb{E}[e^{itX_j^2}]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{itX_j^2}]&=\int_{\mathbb{R}}e^{itx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-j)^2}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-2it}}e^{\frac{ij^2t}{1-2it}}
\end{aligned}$$

所以

$$\phi_{Y_n}(t)=\frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{it\theta}{1-2it}}$$

其中 $\theta=\sum\limits_{j=1}^{n} j^2$ □

T7

证明 (1). 对 e^{tX_1} 使用 *Markov* 不等式

$$\mathbb{P}(X_1\geq a)=\mathbb{P}(e^{tX_1}\geq e^{at})\leq\frac{\mathbb{E}[e^{tX_1}]}{e^{at}}=e^{-at}M(t)$$

取下确界即证

(2). 因为 S_n 的矩母函数为

$$\begin{aligned}M_{S_n}(t)=\mathbb{E}[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}]&\xlongequal{\text{独立}}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[e^{tX_1}]\\&=\left(\mathbb{E}[e^{tX_1}]\right)^n=\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}\right)^n\end{aligned}$$

接下来证明 $e^{\frac{t^2}{2}}\geq\cos(ht)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

因为 $\cos(ht)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}, e^{\frac{t^2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{t}{2})^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$，且二者收敛半径均为 ∞，因为 $(2n)!\geq(2n)!!=2^n n!$，所以 $e^{\frac{t^2}{2}}\geq\cos(ht)$，因此

$$M_{S_n}(t)\leq e^{\frac{nt^2}{2}}$$

由 (1) 知

$$\mathbb{P}(S_n\geq a)\leq e^{-at}M_{S_n}(t)\leq e^{-at+\frac{n}{2}t^2},\quad\forall t>0$$

特别地，当 t 为二次函数的对称轴，即 $t=\frac{a}{n}$ 时

$$\mathbb{P}(S_n\geq a)\leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

□