实分析第九、十周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 1 日

作业 8A

T1.

证明 若 f 可积，则 Fubini 定理包含 Tonelli 定理；假设 f 不可积，记 $B_k=\overline{B(0,k)}$，定义

$$f_k(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in B_k \text{ 且 } f(x,y)\le k\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

(T1) 显然每个 f_k 都是可积的，由 Fubini 定理，对 $\forall k\in\mathbb{N}^*,\exists E_k$ 零测，$A_k=E_k^c$ 满测，使得 $f_k^y\in L^1(\mathbb{R}^{d_1}),\forall y\in A_k$，考虑

$$\tilde{A}=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c$$

它是零测集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 的补集，故仍满测，记 $A=\tilde{A}\backslash f^{-1}(+\infty)$，由 $f^{-1}(+\infty)$ 零测知，A 仍然满测，且对 $\forall y\in A,f_k^y$ 均可积，因为当 $f(x,y)<+\infty$ 时，$\exists K\gg 1,\text{s.t. } f(x,y)<K$，所以 $\forall k\ge K,f_k(x,y)=f(x,y)$,进而 $f_k(x,y)\nearrow f(x,y)$ a.e $(x,y)\in\mathbb{R}^d$,而当 $f_k(x,y)\nearrow f(x,y)$ 时,对 $\forall y\in A,f_k^y(x)\nearrow f^y(x)$,因此由 f_k^y 可测知，对 $\forall y\in A,f^y$ 可测，即 f^y 可测，a.e $y\in\mathbb{R}^{d_2}$

(T2) 定义 $g_k(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)\mathrm{d}x$，由 Fubini 定理知，$g_k(y)\in L^1(\mathbb{R}^{d_2})$，故它可测，且由 $f_k^y\nearrow f^y$ 知，由单调收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_k^y\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y\mathrm{d}x$$

记 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y\mathrm{d}x=g(y)$，则 $g_k(y)\to g(y)$，由 $g_k(y)$ 可测知 $g(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上可测

(T3) 因为 $g_k(y),g(y)$ 非负，$g_k(y)\to g(y)$，且

$$g_{k+1}(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_{k+1}^y\mathrm{d}x\ge\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_k^y\mathrm{d}x=g_k(y)$$

所以 $g_k(y)\nearrow g(y)$，由单调收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g_k(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)\mathrm{d}y$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_k^y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

而对每个 f_k^y，由 Fubini 定理

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $f_k(x,y)\nearrow f(x,y)$ a.e $(x,y)\in\mathbb{R}^d$，在 $\mathbb{R}^d$ 上对 $f_k(x,y)$ 用单调收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

结合上面三式，即

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

□

T2.

证明 Case1. $f(t)\geq 0$

定义 $Y=\{(x,t):0<x\leq b, x\leq t\leq b\}=\{(x,t):0<t\leq b, 0<x\leq t\}$，设 $h(x,t)=\frac{f(t)}{t}\chi_Y$，由于 $f,\frac{1}{t},\chi_Y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上均可测，所以 $h(x,t)$ 也可测且非负，由 Tonelli 定理知

$$\begin{aligned}\int_0^b g(x)\mathrm{d}x&=\int_0^b\left(\int_x^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\int_0^b\left(\int_0^t h(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^b f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由 f 在 $[0,b]$ 可积知，$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}t<+\infty$，因此 g 也在 $[0,b]$ 可积

Case2. $f(t)$ 为一般可测函数，考虑 $f=f^+-f^-$，定义 $g^+(x)=\int_x^b\frac{f^+(t)}{t}\mathrm{d}t, g^-(x)=\int_x^b\frac{f^-(t)}{t}\mathrm{d}t$，由 Case1 知

$$\begin{cases}\int_0^b g^+(x)\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{f^+(t)}{t}\mathrm{d}t\\ \int_0^b g^-(x)\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{f^-(t)}{t}\mathrm{d}t\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t&=\int_0^b\frac{f^+(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_0^b\frac{f^-(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^b g^+(x)\mathrm{d}x-\int_0^b g^-(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^b g^+(x)-g^-(x)\mathrm{d}x=\int_0^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

T3.

证明 (a). 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

记 $A=\{(x,y):-1\le x\le 1,0\le y\le f(x)\}$，则由推论 3.8，$A$ 可测，且

$$\begin{aligned}v_2=2m(A)&=2\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\chi_A\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=2\int_{\mathbb{R}}\int_0^{f(x)}1\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=2\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\pi\end{aligned}$$

(b). 定义函数 $f:\mathbb{R}^{d-1}\to\mathbb{R}$ 如下

$$f(x)=\begin{cases}(1-|x|^2)^{\frac12}, & 0\le|x|\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

记 $A=\{(x,y):x\in\mathbb{R}^{d-1},y\in\mathbb{R},0\le|x|\le 1,0\le y\le f(x)\}$，当固定 y 时，$A^y=\{x:0\le|x|\le(1-y^2)^{\frac12}\}$，而

$$m(A^y)=v^{d-1}\cdot(1-y^2)^{\frac{d-1}{2}}$$

所以

$$\begin{aligned}v_d=2m(A)&=2\int_{\mathbb{R}^d}\chi_A\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\chi_A(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1 m(A^y)\mathrm{d}y=2v_{d-1}\int_0^1(1-y^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

(c). 设 $y=\sqrt{x}$，则 $\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-y^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}y&=\frac12\int_0^1 x^{-\frac12}(1-x)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x=\frac12 B\left(\frac12,\frac{d+1}{2}\right)\\&=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac12\right)\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}v_d&=\sqrt{\pi}v_{d-1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}=\left(\sqrt{\pi}\right)^2 v_{d-2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\\&=\left(\sqrt{\pi}\right)^{d-2}v_2\cdot\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac d2+1\right)}=\frac{\pi^{\frac d2}}{\Gamma\left(\frac d2+1\right)}\end{aligned}$$

□

作业 8B

T1.

证明 设 $F(x,\alpha)=\chi_{E_\alpha}(x)$，则 F 是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 上的可测函数，由 *Tonelli* 定理

$$\begin{aligned}\int_0^\infty m(E_\alpha)\mathrm{d}\alpha&=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{E_\alpha}(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^d}F^\alpha(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^\infty F_x(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\{|f(x)|>\alpha\}}1\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

T2.

证明 (1). 因为 G 为 G_δ 集，则 $\exists\{\mathcal{O}_n\}$ 为开集，使得 $G_\delta=\bigcap\limits_{n=1}^\infty\mathcal{O}_n$，由 $\Phi:(x,y)\mapsto x-y\mapsto f(x-y)$ 是连续映射知，开集的原像仍为开集，即

$$\Phi^{-1}(G)=\bigcap_{n=1}^\infty\Phi^{-1}(\mathcal{O}_n)$$

仍为 G_δ 集

(2). 随意取 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ 为开集，取 $B_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}:|y|<k\},\tilde{B}_k=\{y\in\mathbb{R}^d:|y|<k\}$，则 $\Phi^{-1}(\mathcal{O})\cap B_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}:x-y\in\mathcal{O},y\in B_k\}$，因此

$$\chi_{\Phi^{-1}(\mathcal{O})\cap B_k}(x,y)=\begin{cases}1, & x-y\in\mathcal{O},y\in\tilde{B}_k\\0, & \text{else}\end{cases}=\chi_{\mathcal{O}}(x-y)\chi_{\tilde{B}_k}(y)$$

则由 *Tonelli* 定理

$$\begin{aligned}m(\Phi^{-1}(\mathcal{O})\cap B_k)&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\chi_{\mathcal{O}}(x-y)\chi_{\tilde{B}_k}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{\mathcal{O}}(x-y)\mathrm{d}x\right)\chi_{\tilde{B}_k}(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^d}m(\mathcal{O}+y)\chi_{B_k}(y)\mathrm{d}y=m(\mathcal{O})m(\tilde{B}_k)\end{aligned}$$

若 $Z\subset\mathbb{R}^d$ 为零测集，我们可以找到 G_δ 集 $G=\bigcap\limits_{n=1}^\infty\mathcal{O}_n\supseteq Z$，且满足 $m(G)=m(Z)=0,m(\mathcal{O}_n)<\frac{1}{n}$，所以 $\forall\mathcal{O}_n$，同上推理我们有

$$m(\Phi^{-1}(\mathcal{O}_n)\cap B_k)=m(\mathcal{O}_n)m(\tilde{B}_k)<\frac{m(\tilde{B}_k)}{n}\to 0$$

而 $\Phi^{-1}(Z)\cap B_k\subseteq\Phi^{-1}(\mathcal{O})\cap B_k\subseteq\Phi^{-1}(\mathcal{O}_n)\cap B_k$，故令 $n\to\infty$ 知 $m(\Phi^{-1}(Z)\cap B_k)=0$，因此

$$m\big(\Phi^{-1}(Z)\big)=\lim_{k\to\infty}m\big(\Phi^{-1}(Z)\cap B_k\big)=0$$

(3). 对任意开集 $\mathcal{O}\in\mathbb{R}^d,\exists G_\delta$ 集 $G\supseteq\mathcal{O}$，且 $m(G)=m(\mathcal{O})$，因此 $\mathcal{O}=G\backslash(G\backslash\mathcal{O})$，其中 $G\backslash\mathcal{O}$ 是零测集，所以

$$\Phi^{-1}(\mathcal{O})=\Phi^{-1}(G)\backslash\Phi^{-1}(G\backslash\mathcal{O})$$

故 $\Phi^{-1}(\mathcal{O})$ 是 G_δ 集与零测集的差集，故可测，由先前的作业知，任意开集在 Φ 下的原像均可测，故 Φ 为可测函数 □

T3.

证明 (a). 课上证明过：将 $g(y)$ 视为 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的函数，仍然可测；由上一题知 $f(x-y)$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上也可测，所以 $f(x-y)g(y)$ 为 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的可测函数

(b). 由 *Tonelli* 定理以及 *Lebesgue* 积分的平移不变性

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\right)|g(y)|\mathrm{d}y\\&=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\mathrm{d}x\right)<+\infty\end{aligned}$$

因此 $f(x-y)g(y)\in L^1(\mathbb{R}^{2d})$

(c). 因为 $f(x-y)g(y)\in L^1(\mathbb{R}^{2d})$，由 *Fubuni* 定理 (F2) 知

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\left[f(x-y)g(y)\right]_x\mathrm{d}y\in L^1(\mathbb{R}^d)$$

(d). 因为 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$，所以 $\int_{\mathbb{R}^d}|f|\mathrm{d}x,\int_{\mathbb{R}^d}|g|\mathrm{d}x<+\infty$，由 (b) 知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|(f*g)(x)|\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\mathrm{d}x\right)<+\infty\end{aligned}$$

故 $(f*g)(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$，且上式即 $||f*g||_{L^1(\mathbb{R}^d)}\le||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}||g||_{L^1(\mathbb{R}^d)}$，若 f,g 非负，则上面过程中的不等号变为等号

(e). 由 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 知

$$|\hat{f}(\xi)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\right|\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

故 $|\hat{f}(\xi)|$ 有界，因为

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{f}(\xi_1)-\hat{f}(\xi_2)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi_1} - f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi_2}\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(e^{-2\pi i x\cdot\xi_1} - e^{-2\pi i x\cdot\xi_2}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\cdot\sqrt{2-2\cos[2\pi x(\xi_1-\xi_2)]}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\gg 1, \text{s.t.} \int_{B(0,N)^c}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}$，因为 $x\in\overline{B(0,N)}$ 时，$\sqrt{2-\cos[2\pi x(\xi_1-\xi_2)]}\to 0$ as $|\xi_1-\xi_2|\to 0$，取 δ 满足 $\forall|\xi_1-\xi_2|<\delta$，$\sqrt{2-\cos[2\pi x(\xi_1-\xi_2)]}<\frac{\varepsilon}{2||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}}$，因此当 $|\xi_1-\xi_2|<\delta$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{f}(\xi_1)-\hat{f}(\xi_2)\right| &\le 2\int_{B(0,N)^c}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\overline{B(0,N)}}|f(x)|\cdot\frac{\varepsilon}{2||f||_{L^1}(\mathbb{R}^d)}\mathrm{d}x \\
&\le 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2||f||_{L^1}(\mathbb{R}^d)}\cdot\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以 $\hat{f}(\xi)$ 关于 ξ 连续，最后我们有

$$
\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\cdot e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathrm{d}y\right) \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}
$$

□

作业 9

T1.

证明 设 $\xi' = \frac{1}{2}\frac{\xi}{|\xi|^2}$，则由平移不变性

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\xi')e^{-2\pi i(x-\xi')\cdot\xi}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\xi')e^{-2\pi i x\cdot\xi+\pi i}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x-\xi')e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\xi')e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x)-f(x-\xi')\big)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由平移变换的连续性

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)-f(x-\xi')\big|\mathrm{d}x \to 0 \text{ as } |\xi'|\to 0 \iff |\xi|\to\infty$$

□

T2.

证明 (a). 设 $|g|\le M$，则

$$\begin{aligned}|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1-y)g(y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2-y)g(y)\mathrm{d}y\right| \\ &\le M\int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1-y)-f(x_2-y)|\mathrm{d}y \\ &\le M||f(x_1-y)-f(x_2-y)||_{L^1(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

由平移变换的连续性，对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{s.t.}\ \forall|(x_1-y)-(x_2-y)| = |x_1-x_2| < \delta$ 时，就有 $||f(x_1-y)-f(x_2-y)||_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{M}$，因此当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

故 $f*g$ 一致连续

(b). 由作业 $8B$ 的第三题 (d) 知，当 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 时，$f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$，且由 (a) 知 $(f*g)(x)$ 一致连续，因此由课本 *P95 Exercise 6* 第二问知

$$(f*g)(x)\to 0 \text{ as } |x|\to\infty$$

□

T3.

证明 (a). 因为

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\left(\log\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\log x = \frac{2}{\log\frac{1}{x}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log 2}$$

因此 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(b). 对 $\forall |x| \le \frac{1}{2}$，不妨设 $x > 0$，因为 $x \in [0,x]$，所以

$$\begin{aligned} f^*(x) &\ge \frac{1}{|x|}\int_{[0,x]} |f(y)|\mathrm{d}y = \frac{1}{|x|}\int_{[0,x]} \frac{1}{y\left(\log\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{y}}\Bigg|_0^{|x|} = \frac{1}{|x|\log\frac{1}{|x|}} \end{aligned}$$

考虑函数在 $(0,\delta), \delta < \frac{1}{2}$ 上的积分，因为 $\log\frac{1}{|x|} = -\log|x| \ge 1 - |x|$，所以 $\frac{1}{|x|\log\frac{1}{|x|}} \ge \frac{1}{x}, \forall x \in (0,\delta)$，先前作业证明过 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,\delta)$ 上不可积，所以 $f^*(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上也不可积，即它不是局部可积的 $\square$