概率论第二周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 8 日

习题 1.2

T1

证明 先分析 $\mathbb{P}(A_{ij})$，因为 $\Omega_1 = \{HH, HT, TH, TT\}, A_{ij} = \{HH, TT\}$，所以

$$\mathbb{P}(A_{ij}) = \frac{|A_{ij}|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{2}$$

Case 1. 当 i, j, i', j' 中有三个不同的数时，$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$，$A_{ij} \cap A_{i'j'} = \{HHH, TTT\}$，所以

$$\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{i'j'}) = \frac{|A_{ij} \cap A_{i'j'}|}{|\Omega_2|} = \frac{1}{4}$$

Case 2. 当 i, j, i', j' 中有四个不同的数时，$|\Omega_3| = 16, A_{ij} \cap A_{i'j'} = \{HHHH, HHTT, TTHH, TTTT\}$，所以

$$\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{i'j'}) = \frac{|A_{ij} \cap A_{i'j'}|}{|\Omega_3|} = \frac{1}{4}$$

所以无论如何都有 $\mathbb{P}(A_{ij})\mathbb{P}(A_{i'j'}) = \mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{i'j'})$，故它们两两独立，又因为

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \le i < j \le n} A_{ij}\right) = \mathbb{P}(\text{全是}H\text{或全是}H^c) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(A_{ij}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}$$

二者显然不等，故它们不相互独立 □

T2

解 设事件 A 为学生会做，事件 B 为学生答对，则

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c)} = \frac{0.5 \times 0.9}{0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.25} = \frac{18}{23}$$

□

T4

证明 不妨设 $|A| = m, |B| = n, |A \cap B| = l$，因为 A, B 独立，所以

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Rightarrow \frac{l}{p} = \frac{m}{p} \cdot \frac{n}{p} \Rightarrow lp = mn$$

所以 $p \mid nm$，由 p 是素数知，$p \mid m$ 或 $p \mid n$，不妨设 $p \mid m$，因为 $m, n \in \{0, 1, \cdots, p\}$，所以 $m = 0$ 或 p，这就说明 $A = \varnothing$ 或 $A = \Omega$，故 A, B 中至少其一为 $\varnothing$ 或 Ω □

T5

解 (1). 设事件 A_r 为选取了第 r 个坛子，设 B_i 为第 i 个球为蓝球，则

$$\mathbb{P}(B_2|A_r) = \mathbb{P}(B_1B_2|A_r) + \mathbb{P}(B_1^cB_2|A_r) = \frac{n-r}{n-1}\cdot\frac{n-r-1}{n-2} + \frac{r-1}{n-1}\cdot\frac{n-r}{n-2} = \frac{n-r}{n-1}$$

所以

$$\mathbb{P}(B_2) = \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(A_r)\mathbb{P}(B_2|A_r) = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{n-r}{n-1} = \frac{1}{2}$$

(2). 因为

$$\mathbb{P}(B_1B_2|A_r) = \frac{n-r}{n-1}\frac{n-r-1}{n-2}$$

这对 $r=n,n-1$ 也成立，因为当 $r=n,n-1$ 时，不可能抽到两个蓝色球，故概率为零，且通过上式计算的概率也为零，所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1B_2) &= \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(A_r)\mathbb{P}(B_1B_1|A_r) = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)}{(n-1)(n-2)}\\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{r=1}^{n}(n-r)(n-r-1)\\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\cdot\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}\right)\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

习题 1.3

T1

解 设 X,Y 为事件“甲在三局两胜中最后胜出”、“甲在五局三胜中最后胜出”，设 A_i 为甲在第 i 场战胜乙，则 $\{A_i\}$ 是相互独立的，由甲胜率高于乙知，可设 $p=\mathbb{P}(A_i)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$

Case 1. 三局两胜：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(A_1A_2) + \mathbb{P}(A_1^cA_2A_3) + \mathbb{P}(A_1A_2^cA_3)\\
&= p^2 + 2(1-p)p^2
\end{aligned}$$

Case 2. 五局三胜：考虑总比赛场数，若为 3，则只能是甲连赢三局；若为 4，则乙在前三局中赢了一次，共三种情况；若为 5，则乙在前四局中赢了两次，共 $\binom{4}{2}=6$ 种情况，因此

$$\mathbb{P}(Y) = p^3 + 3(1-p)p^3 + 6(1-p)^2p^3$$

所以

$$\mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X) = 3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1)$$

设 $f(p)=2p^3-5p^2+4p-1$，则 $f(0.5)=0, f'(p)=2(3p-2)(p-1)$，所以当 $f'(p)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递减，且 $f(1)=0$，这就说明 $f(p)>0, p\in\left(\frac{1}{2}\right)$，故 $\mathbb{P}(Y)>\mathbb{P}(X), p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，即五局三胜对水平高的一方（甲）更有利 □

T2

证明 设 X 为事件“存在某个状态时游戏结束”，所以 X^c 为事件“游戏永远不结束”，对 $\forall m\in\mathbb{N}$，我们考虑前 mN 次游戏，将它平均分为 m 个 N 次游戏，设事件 A_i 表示“第 i 个 N 次游戏中全是 H 朝上”，则

$$\mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

若 A_i 发生，则游戏一定会结束，所以 $A_i \subseteq X \Rightarrow X^c \subseteq A_i^c, \forall 1 \le i \le m$，这就说明 $X^c \subseteq \bigcap_{i=1}^m A_i^c$，所以

$$\mathbb{P}(X^c) \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c\right) = \prod_{i=1}^m (1-\mathbb{P}(A_i)) = \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right]^m$$

因为 m 为任意正整数，所以令 $m \to \infty$，则 $\mathbb{P}(X^c)=0$，故 $\mathbb{P}(X)=1$，即存在某个状态时游戏结束的概率为 1 □

T3

解 设 ζ, δ 都只掷了 n 次硬币，设事件 A 为“前 n 次掷硬币过程中，ζ 的正面数大于 δ”，事件 B 为“前 n 次掷硬币过程中，δ 的正面数大于 ζ”，事件 C 为“前 n 次掷硬币过程中，ζ 的正面数等于 δ”，由对称性知，可设 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=p$，则 $\mathbb{P}(C)=1-2p$；设事件 X 为“ζ 再掷一次后，ζ 的正面数大于 δ”，则

$$\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(B)=p+\frac{1}{2}(1-2p)=\frac{1}{2}$$

T4

证明 首先 $p_0=1$ 是平凡的，当 $n \ge 1$ 时，设 H 为事件“掷出正面朝上”，A_n 为掷 n 次后正面朝上的次数为偶数，则 $\mathbb{P}(A_n)=p_n$，且有

$$\begin{aligned}
p_n = \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_{n-1} \cap H^c) + \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap H) \\
&= \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(H^c|A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_{n-1}^c)\mathbb{P}(H|A_{n-1}^c) \\
&= (1-p)\cdot p_{n-1} + p(1-p_{n-1})
\end{aligned}$$

所以

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

且 $p_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，故

$$p_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n$$

□

习题 1.4

T1

证明 (1). 只需证明 $\lambda F(x)+(1-\lambda)G(x), F(x)G(x)$ 满足定理 1.4.3 中的三条性质

1. 单调不减：因为 $0 \le \lambda \le 1$ 时，$\lambda, 1-\lambda \ge 0$，所以 $\forall x<y$，有

$$\lambda F(x) \le \lambda F(y), (1-\lambda)G(x) \le (1-\lambda)G(y) \Rightarrow \lambda F(x)+(1-\lambda)G(x) \le \lambda F(y)+(1-\lambda)G(y)$$

   故 $\lambda F+(1-\lambda)G$ 单调不减

   由 F, G 恒非负知：若 $F(y)>0, G(y)>0$，则 $F(y)G(y) \ge F(x)G(x)$；若 $F(y), G(y)$ 中至少有一者为零，不妨设为 $F(y)$，则 $0 \le F(x) \le F(y)=0$，故 $F(x)=0$，因此 $F(x)G(x)=F(y)G(y)=0$，因此无论如何 $F(x)G(x)$ 也都单点不减

2. 由于 $x \to \pm\infty$ 时，$F(x), G(x)$ 的极限都存在，所以

$$\lim_{x\to-\infty} \lambda F(x)+(1-\lambda)G(x) = \lambda \lim_{x\to-\infty} F(x) + (1-\lambda)\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0+0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \lambda F(x)+(1-\lambda)G(x) = \lambda \lim_{x\to+\infty} F(x) + (1-\lambda)\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lambda+(1-\lambda)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)G(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x)\lim_{x\to-\infty} G(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x)G(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x)\lim_{x\to+\infty} G(x)=1$$

3. 右连续：由 F, G 都右连续，则 $\lambda F+(1-\lambda G), FG$ 也右连续

(2). 我们证明一个更强的命题：若 $F(x)$ 是分布函数，则当 g 连续、在 $[0,1]$ 上单调不减、$g(0)=0, g(1)=1$ 时，$g(F(x))$ 也是一个分布函数

1. 单调不减：设 $x<y$，则 $0 \leq F(x) \leq F(y) \leq 1$，故 $g(F(x)) \leq g(F(y))$

2. $$\lim_{x\to-\infty} g(F(x)) \xlongequal{F(x)=t} \lim_{t\to 0^+} g(t)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} g(F(x)) \xlongequal{F(x)=t} \lim_{t\to 1^-} g(t)=1$$

3. 右连续：由 g 连续知，$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \mathrm{s.t.}\ \forall t \in (F(x_0)-\delta, F(x_0)+\delta)$ 时，$|g(F(t))-g(F(x_0))|<\varepsilon$，由 F 右连续知，对这个 $\delta>0, \exists \delta'>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta'$ 时，有 $|F(x)-F(x_0)|<\delta$，由此可知，$g(F(x))$ 在 x_0 处右连续，由 x_0 的任意性知，$g(F(x))$ 右连续

回到本题，取 $g_1(x)=1-(1-x)^n, g_2(x)=(x-1)e+e^{1-x}$ 即可 $\square$