# 概率论第十一周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 10 日

## 习题 5.2

### T2

**证明** 首先由 $X_n, Y_n$ 独立、$X, Y$ 独立知

$$\phi_{X_n+Y_n}(t) = \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t), \quad \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

因为 $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{D} Y$，所以 $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X, F_{Y_n} \xrightarrow{w} F_Y$，由连续性定理知

$$\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t), \quad \phi_{Y_n}(t) \to \phi_Y(t)$$

进而

$$\phi_{X_n+Y_n}(t) = \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t) \to \phi_X(t)\phi_Y(t) = \phi_{X+Y}(t)$$

且由 $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ 在 $t = 0$ 处连续知，$X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$（依分布收敛与分布函数的弱收敛等价） □

### T3

**证明** *Cauchy* 分布的特征函数为

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot e^{itx}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

求这个积分：注意到 $\phi(t)$ 是偶函数，考虑 $t > 0$ 即可. 求导得 $\phi'(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，因此

$$\phi'(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(tx)}{1+x^2} - \frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x - 1$$

对上式再次求导得 $\phi''(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \phi(t)$，再加上初值 $\phi(0) = 1, \phi'(0) = -1$，解这个 *ODE* 得 $\phi(t) = e^{-t}, t \geq 0$，由 $\phi(t)$ 为偶函数知 *Cauchy* 分布的特征函数为

$$\phi(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

所以 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 的分布函数为

$$\phi_n(t) = \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left(e^{-\frac{|t|}{n}}\right)^n = e^{-|t|} = \phi(t)$$

由唯一性定理知 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 也服从 *Cauchy* 分布 □

**T5**

**解** (1). 回忆：设特征函数为 $\cos(t)$ 的随机变量为 $X$，它满足 $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$，设 $Y$ 与 $X$ 独立同分布，则 $\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\phi_Y(t)=\cos^2(t)$，因此由唯一性定理，$\cos^2(t)$ 对应的分布函数就是 $X+Y$ 对应的分布函数，因为 $\mathbb{P}(X+Y=2)=\mathbb{P}(X+Y=-2)=\frac{1}{4},\mathbb{P}(X+Y=0)=\frac{1}{2}$，即 $\cos^2(t)$ 对应的分布函数为

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = \pm 2 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

(2). 考虑 $\{X_i\}_{i=1}^n$ i.i.d 且满足 $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}$，则

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}(t) = \cos^n(t)$$

由唯一性定理，$\phi_n(t)=\cos^n(t)$ 即为 $X_1+\cdots+X_n$ 的特征函数 □

## 习题 5.3

**T1**

**证明** (1). 取 $\{Y_i\}$ i.i.d，且 $Y_1\sim P(1)$，则 $\mathbb{E}[Y_1]=1,\mathrm{Var}(Y_1)=1$，记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$，由中心极限定理

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

由 $\{Y_i\}$ i.i.d，所以 $S_n\sim P(1+\cdots+1)=P(n)$，即 $X_n$ 与 $S_n$ 同分布，因此可取 $\mu_n=n,\sigma_n=\sqrt{n}$

(2). 取 $\{Y_i\}$ i.i.d，且 $Y_1\sim \exp(1)$，则 $\mathbb{E}[Y_1]=1,\mathrm{Var}(Y_1)=1$，记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$

下面证明 $S_n\sim\Gamma(n,1)$

当 $n=2$ 时，因为 $f_{S_2}(s)=\int_{\mathbb{R}} f_{Y_1}(x)f_{Y_2}(s-x)\mathrm{d}x$，且 $f_{Y_i}(x)=e^{-x},x\geq 0, f_{Y_i}(x)=0,x<0$，所以

$$f_{S_2}(s) = \int_0^s e^{-x}e^{-(s-x)}\mathrm{d}x = \int_0^s e^{-s}\mathrm{d}x = se^{-s} = \frac{s^{2-1}e^{-s}}{(2-1)!}, \quad \forall s \geq 0$$

即 $f_{S_2}(s)\sim\Gamma(2,1)$，由数学归纳法，假设 $n$ 时成立，下面证明 $n+1$ 的情形，首先 $f_{S_n}(s)=\frac{s^{n-1}e^{-s}}{\Gamma(n)}$

$$\begin{aligned}f_{S_{n+1}}(s) &= \int_0^s \frac{x^{n-1}e^{-x}}{\Gamma(n)}\cdot e^{-(s-x)} = \frac{e^{-s}}{\Gamma(n)}\int_0^s x^{n-1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{s^n e^{-s}}{n\Gamma(n)} = \frac{s^n e^{-s}}{\Gamma(n+1)}, \quad \forall s\geq 0\end{aligned}$$

由数学归纳法即得证，因此 $S_n \sim \Gamma(n,1)$，即 $S_n$ 与 $X$ 同分布，由中心极限定理

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

因此取 $\mu_n = n, \sigma_n = \sqrt{n}$ □

**T3**

**证明** 设 $Y_k = kX_k$，则 $\mathbb{E}[Y_k] = k\mathbb{E}[X_k] = 0, \mathrm{Var}(Y_k) = k^2\mathrm{Var}(X_k) = k^2, \mathbb{E}[|Y_k|^3] = k^3 < +\infty$，且

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(Y_k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^3] &= \left(\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{k=1}^n k^3\\ &= \left(\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\to 0\end{aligned}$$

由定理 5.3.3（特别地，即 $\{Y_k\}$ 满足 *Lindeberg* 条件），由 *Lindeberg-Feller* 中心极限定理得

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^n kX_k \xrightarrow{D} N(0,1)$$

且 $\frac{1}{B_n} \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}$. 回忆习题 4.2 第四题：若 $Z_n \xrightarrow{D} Z, Y_n \xrightarrow{P} c, c\neq 0$ 为常数，则 $\frac{Z_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{Z}{c}$，我们此时取 $Z_n = \frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^n kX_k, Y_n$ 为常随机变量 $Y_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}B_n}$，则由 $\frac{1}{B_n}\sim\frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 知 $Y_n \xrightarrow{P} 1$，因此

$$\frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^n kX_k = \frac{Z_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{N(0,1)}{1} = N(0,1)$$

□

**T6**

**证明** (1). 先求 $X_n$ 的特征函数

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda e^{it}}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda e^{it}}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

另设 $Z\sim P(\lambda)$，则 $Z$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{itZ}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

由连续性定理知，$X_n \xrightarrow{D} Z$

(2). 设 $A$ 服从参数 $p$ 的几何分布，则 $A$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi(t,p) &= \mathbb{E}[e^{itA}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk}\cdot p\,(1-p)^{k-1} \\ &= pe^{it}\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{it}(1-p)\right]^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1-e^{it}(1-p)}\end{aligned}$$

则 $Y_n$ 的特征函数为 $\phi\left(t,\frac{\lambda}{n}\right)$，故 $\frac{Y_n}{n}$ 的特征函数为

$$\phi\left(\frac{t}{n},\frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\lambda e^{\frac{it}{n}}}{n-e^{\frac{it}{n}}(n-\lambda)} = \frac{\lambda}{\lambda+n\left(e^{-\frac{it}{n}}-1\right)}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{-\frac{it}{n}}-1\right) \overset{\text{Taylor}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} n\cdot\left[-\frac{it}{n}+o\left(\left|\frac{it}{n}\right|\right)\right] = -it$$

所以 $n\to\infty$ 时，$\frac{Y_n}{n}$ 的特征函数趋于 $\frac{\lambda}{\lambda-it}$，由讲义例 5.1.2，这正是指数分布 $\exp(\lambda)$ 的特征函数，由连续性定理知 $\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{D}\exp(\lambda)$ □

**T7**

**证明** 设 $A_n=-\ln X_n, Z_n=\ln Y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_n$，由 $\{X_n\}$ i.i.d 知 $\{A_n\}$ i.i.d，由于 $X_n\sim U[0,1]$，先前作业求过 $A_n=-\ln X_n\sim\exp(1)$，故 $\mathbb{E}[A_n]=1, \mathrm{Var}(A_n)=1$，由中心极限定理

$$\frac{nZ_n-n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

即 $\sqrt{n}(Z_n-1)\xrightarrow{D}N(0,1)$，所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sqrt{n}(Y_n-e)\le x) &= \mathbb{P}\left(Y_n\le e+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=\mathbb{P}\left(Z_n\le \ln(e+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(Z_n-1)\le\sqrt{n}\left(\ln(e+\frac{x}{\sqrt{n}})-1\right)\right)\\
&\xrightarrow[\sqrt{n}(Z_n-1)\xrightarrow{D}N(0,1)]{n\to\infty}\Phi\left(\frac{x}{e}\right)
\end{aligned}
$$

考虑 $W\sim N(0,e^2)$，则

$$
\mathbb{P}(W\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}e^{-\frac{1}{2e^2}t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{\frac{t}{e}=u}\int_{-\infty}^{\frac{x}{e}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u=\Phi\left(\frac{x}{e}\right)
$$

即 $\mathbb{P}(\sqrt{n}(Y_n-e)\le x)\to\mathbb{P}(W\le x)$，由连续性定理知

$$
\sqrt{n}(Y_n-e)\xrightarrow{D}N(0,e^2)
$$

□