概率论第五周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 30 日

习题 2.4

T1

证明 (1). 对 $\forall x \in \mathrm{Range}(X)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aY+bZ|X] &= \sum_{y,z}(ay+bz)\mathbb{P}(Y=y,Z=z|X=x) \\ &= \sum_{y,z} ay\cdot\mathbb{P}(Y=y,Z=z|X=x) + \sum_{y,z} bz\cdot\mathbb{P}(Y=y,Z=z|X=x) \\ &= a\sum_{y} y\sum_{z}\mathbb{P}(Y=y,Z=z|X=x) + b\sum_{z} z\sum_{y}\mathbb{P}(Y=y,Z=z|X=x) \\ &= a\sum_{y} y\cdot\mathbb{P}(Y=y|X=x) + b\sum_{z} z\cdot\mathbb{P}(Z=z|X=x) \\ &= a\mathbb{E}[Y|X=x] + b\mathbb{E}[Z|X=x]\end{aligned}$$

由 x 的任意性知 $\mathbb{E}[aY+bZ|X] = a\mathbb{E}[Y|X] + b\mathbb{E}[Z|X]$

(2).*Case 1.* 若 $\mathbb{P}(X=x)=0$，则对 $\forall y \in \mathrm{Range}(Y)$，由于

$$\{Y=y|X=x\} \subseteq \{X=x\}$$

所以 $\mathbb{P}(Y=y|X=x) \leq \mathbb{P}(X=x) = 0, \forall y \in \mathrm{Range}(Y)$，故 $\mathbb{E}[Y|X=x] = \sum_{y} y\cdot\mathbb{P}(Y=y|X=x) = 0$

Case 2. 若 $\mathbb{P}(X=x) \neq 0$，则对 $\forall y \in \mathrm{Range}(Y)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X=x] &= \sum_{y} y\cdot\mathbb{P}(Y=y|X=x)\sum_{y} y\cdot\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X=x)}\sum_{y} y\cdot\mathbb{P}(X=x,Y=y) \geq 0\end{aligned}$$

综上，$\mathbb{E}[Y|X] \geq 0$

(3). 通过加粗区分随机变量 $\mathbf{1}$ 和数字 1，对 $\forall \omega \in \Omega, \mathbf{1}(\omega) = 1$，所以 $\{X=x\}$ 发生时，$\{\mathbf{1}=1\}$ 恒发生，即 $\mathbb{P}(\mathbf{1}=1|X=x)=1$ 恒成立，所以

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}=1|X=x] = 1\cdot\mathbb{P}(\mathbf{1}=1|X=x) = 1$$

即 $\mathbb{E}[\mathbf{1}|X]=\mathbf{1}$

(4). 由 X,Y 独立知 $\mathbb{P}(Y=y|X=x)=\mathbb{P}(Y=y)$，所以

$$\mathbb{E}[Y|X=x]=\sum_y y\cdot\mathbb{P}(Y=y|X=x)=\sum_y y\cdot\mathbb{P}(Y=y)=\mathbb{E}[Y]$$

(5). 对 $\forall x\in\mathrm{Range}(X)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Yg(X)|X=x]&=\sum_y yg(x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\\&=g(x)\sum_y y\cdot\mathbb{P}(Y=y|X=x)\\&=g(x)\mathbb{E}[Y|X=x]\end{aligned}$$

由 x 的任意性知 $\mathbb{E}[Yg(X)|X]=g(X)\mathbb{E}[Y|X]$ □

T2

解 首先证明 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

因为 $X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，所以对 $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n)&=\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)\\&=\sum_{k=0}^n\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\\&=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}\\&=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\end{aligned}$$

这就说明 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$，所以对 $\forall 0\le k\le n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)&=\frac{\mathbb{P}(X=k,Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

这就说明 $X|(X+Y=n)\sim B\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$，所以

$$\mathbb{E}[X|X+Y=n]=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

由 $n\in\mathbb{N}$ 的任意性知 $\mathbb{E}[X|X+Y]=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}(X+Y)$ □

T3

证明 因为 $\max\{X^2+Y^2\} = \frac{X^2+Y^2}{2} + \frac{|X^2-Y^2|}{2}$，而 $1 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}[X^2]$，同理 $\mathbb{E}[Y^2]=1$，所以

$$\mathbb{E}\left[\frac{X^2+Y^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

因此只需证明

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X^2-Y^2|}{2}\right] \le \sqrt{1-\rho^2}$$

因为 $\rho = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$，由 *Cauchy-Schwarz* 不等式

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{|X^2-Y^2|}{2}\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X^2-Y^2|] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|(X+Y)|\cdot|(X-Y)|] \\
&\le \frac{1}{2}\sqrt{\mathbb{E}[(X+Y)^2]\mathbb{E}[(X-Y)^2]} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\big(\mathbb{E}\big[X^2+Y^2+2\mathbb{E}[XY]\big]\big)\big(\mathbb{E}\big[X^2+Y^2-2\mathbb{E}[XY]\big]\big)} \\
&\le \sqrt{(1+\rho)(1-\rho)} = \sqrt{1-\rho^2}
\end{aligned}$$

□

习题 2.5

T1

解 (1). 因为 $\mathbb{E}[X_k]$ 独立同，且 $\mathbb{E}[X_1] = p + (-1)(1-p) = 2p-1$，所以

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1+\cdots+X_n] = n\mathbb{E}[X_1] = n(2p-1)$$

(2). 因为 $\mathbb{E}[X_i^2]=1$，所以 $\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \big(\mathbb{E}[X_i]\big)^2 = -4p^2+4p = 4p(1-p)$ 所以

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = 4pn(1-p)$$

(3). 因为 $\mathrm{Cov}(S_m,S_n) = \mathbb{E}[S_mS_n] - \mathbb{E}[S_m]\mathbb{E}[S_n]$，下求 $\mathbb{E}[S_mS_n]$，不妨设 $m\ge n$，因为当 $i\ne j$ 时

$$\mathbb{E}[X_iX_j] = 1\cdot[p^2+(1-p)^2] + (-1)\cdot[p(1-p)+(1-p)p] = 4p^2-4p+1 = (2p-1)^2$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_mS_n] &= \mathbb{E}[(X_1+\cdots+X_m)(X_1+\cdots+X_n)] \\
&= n\mathbb{E}[X_1^2] + (mn-n)\mathbb{E}[X_1X_2] \\
&= n + (mn-n)(2p-1)^2
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Cov}(S_m,S_n) = n + (mn-n)(2p-1)^2 - mn(2p-1)^2 = 4np(1-p), \quad m\ge n$$

即 $\mathrm{Cov}(S_m,S_n) = 4\min\{m,n\}\cdot p(1-p)$

(4). 当 $n \geq m$ 时，因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n|S_m] &= \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n | X_1 + \cdots + X_m] \\
&= \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_m) + (X_{m+1} + \cdots + X_n) | X_1 + \cdots + X_m] \\
&= \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_m | X_1 + \cdots + X_m] + \mathbb{E}[X_{m+1} + \cdots + X_n | X_1 + \cdots + X_m] \\
&= S_m + \mathbb{E}\left[\sum_{i=m+1}^{n} X_i | S_m\right] = S_m + \mathbb{E}\left[\sum_{i=m+1}^{n} X_i\right] \\
&= S_m + (n-m)\mathbb{E}[X_1] = S_m + (n-m)(2p-1)
\end{aligned}$$

当 $n < m$ 时，对 $\forall 1 \leq i \leq m$，因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i = 1 | S_m = k) &= \frac{\mathbb{P}(X_i = 1, S_m = k)}{\mathbb{P}(S_m = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_i = 1, X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_{i+1} + \cdots + X_m = k-1)}{\mathbb{P}(S_m = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(S_{m-1} = k-1)}{\mathbb{P}(S_m = k)} = \mathbb{P}(X_1 = 1 | S_m = k)
\end{aligned}$$

同理有 $\mathbb{P}(X_i = -1 | S_m = k) = \mathbb{P}(X_1 = -1 | S_m = k)$ ，所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_i | S_m = k] &= 1 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1 | S_m = k) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X_i = -1 | S_m = k) \\
&= 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1 | S_m = k) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = -1 | S_m = k) \\
&= \mathbb{E}[X_1 | S_m = k]
\end{aligned}$$

这就说明了 $\mathbb{E}[X_i|S_m] = \mathbb{E}[X_1|S_m], \forall 1 \leq i \leq n$，又因为

$$m\mathbb{E}[X_1|S_m] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i|S_m] = \mathbb{E}\left[X_1 + \cdots + X_m | S_m\right] = \mathbb{E}[S_m|S_m] = S_m$$

所以 $\mathbb{E}[X_1|S_m] = \frac{S_m}{m}$，进而

$$\mathbb{E}[S_n|S_m] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i|S_m] = \frac{n}{m} S_m$$

$\square$

T2

解 (1). 设 N 表示事件“A 得 α 票，B 得 β 票”，M 为事件“计票过程中出现两人票数相等”，则 M^c 表示事件“计票过程中 A 的票数始终比 B 多”，当 $\alpha = \beta$ 时，显然有 $\mathbb{P}(X) = 1$；当 $\alpha > \beta$ 时，记随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{票投给}A \\ -1, & \text{第}i\text{票投给}B \end{cases}$$

则 $\#X^c = \#\{$从$(0,0)$到$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$且不再过$x$轴的轨道$\}$，由投票定理

$$\#X^c = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} N_{\alpha+\beta}(0,\alpha-\beta)$$

所以

$$\mathbb{P}(X) = \frac{\#X}{\#N} = 1 - \frac{\#X^c}{\#N} = 1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2\beta}{\alpha+\beta}$$

上式对 $\alpha=\beta$ 时也成立

(2). 设 Y 表示事件 A 从不落后于 B，则 Y 的样本点等价于从来没有到达过 $y=-1$ 的折线的全体；对于任意一条经过 $y=-1$ 的轨道，记 m 为第一次到达 $y=-1$ 的时刻，则将 m 前的点关于 $y=-1$ 做对称，就得到从 $(0,-2)$ 到 $(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$ 的一条轨道，且这种对应为一一对应，所以

$$\#Y^c = N_{\alpha+\beta}(-2,\alpha-\beta)$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y) &= 1-\mathbb{P}(Y^c) = 1 - \frac{N_{\alpha+\beta}(-2,\alpha-\beta)}{N_{\alpha+\beta}(0,\alpha-\beta)} \\ &= 1 - \frac{\binom{\alpha+\beta}{\alpha+1}}{\binom{\alpha+\beta}{\alpha}} = 1 - \frac{\frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha+1)!(\beta-1)!}}{\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}} \\ &= \frac{\alpha+1-\beta}{\alpha+1}\end{aligned}$$

□

T3

解 由于 $S_{2n}=0$，所以 $S_{2n-1}=\pm1$，因此符合题意的轨道全体等于从 $(0,0)$ 到 $(2n-1,1)$ 且不经过 x 轴的轨道全体 n_1 以及从 $(0,0)$ 到 $(2n-1,1)$ 且不经过 x 轴的轨道全体 n_2，记从 $(0,0)$ 到 $(2n-1,1)$ 的规定全体为 N_1，从 $(0,0)$ 到 $(2n-1,1)$ 的轨道全体为 N_2，由对称性知，$n_1=n_2, N_1=N_2$，由投票定理知

$$\mathbb{P}(T=2n) = \frac{n_1+n_2}{N_1+N_2}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{n_1}{N_1}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2n-1}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

所以

$$\mathbb{E}[T^\alpha] = \sum_{n=1}^{\infty}(2n)^\alpha\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

由 *Stirling* 公式 $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n\to\infty$

$$(2n)^\alpha\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2n-1} \sim n^{\alpha-\frac{3}{2}}$$

所以当 $\alpha-\frac{3}{2}<-1$ 时，$\alpha<\frac{1}{2}$ 时，$\mathbb{E}[T^\alpha]$ 收敛 □