实分析第四周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 19 日

周一

T1.

证明 (a). 假设 $E\subset\mathcal{N}$ 可测，设 $\{r_k\}$ 为 $[-1,1]$ 内的有理数的一个罗列，则我们有 $\forall i, m(E+r_k)=m(E), E+r_k\subset\mathcal{N}+r_k$，这就说明

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty}E+r_k\subset\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}+r_k\subseteq[-1,2]$$

由测度的单调性、可数可加性知

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E+r_k)\leq m([-1,2])=3$$

由无穷级数收敛知 $m(E)=0$

(b). 由外测度的次可数可加性知

$$G=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}G\cap[k,k+1]\Rightarrow 0<m_*(G)\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}}m_*(G\cap[k,k+1])$$

所以，一定存在 $k\in\mathbb{Z},\text{s.t. }m_*(G\cap[k,k+1])>0$，通过将 $[k,k+1]$ 平移至 $[0,1]$，我们可以不妨假设 $m_*(G\cap[0,1])>0$，为方便表示，我们还记 $G\cap[0,1]=G$，因为

$$[0,1]\subset\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(\mathcal{N}+r_k)\Longrightarrow G\subseteq\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\big(G\cap(\mathcal{N}+r_k)\big)\Longrightarrow 0<m_*(G)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m_*\big(G\cap(\mathcal{N}+r_k)\big)$$

则一定 $\exists r_{n_0}\in\{r_k\},\text{s.t. }m_*\big(G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})\big)>0$，若 $G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})$ 可测，我们将它平移 $-r_{n_0}$，则

$$G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})\subseteq\mathcal{N}+r_{n_0}\Longrightarrow[G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})]-r_{n_0}\subseteq\mathcal{N}$$

由可测集经平移后也可测知 $[G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})]-r_{n_0}$ 也可测，由 (a) 知 $\mathcal{N}$ 的可测子集测度一定为零

$$m([G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})]-r_{n_0})=0\Longrightarrow m\big(G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})\big)=0$$

这与它的外测度大于零矛盾！因此 $G\cap(\mathbb{N}+r_{n_0})$ 不可测，这就是我们要找的不可测集 $\square$

T2.

证明 (1). 考虑两个类 *Cantor* 集 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$，其中 $m(\mathcal{C}_1)>0,m(\mathcal{C}_2)=0$，由 *T1.(a)* 知，$\exists\mathcal{N}\subset\mathcal{C}_1,\text{s.t. }\mathcal{N}$ 不可测，考虑由 $\mathcal{C}_1$ 到 $\mathcal{C}_2$ 的双射延拓到 $[0,1]$ 上的连续双射 f，因为 $F(\mathcal{N})\subset\mathcal{C}_2$，且零测集的任意子集仍为零测集，故 $F(\mathcal{N})$ 可测；下面证明 F 将 *Borel* 集映为 *Borel* 集

由于 *Borel* 集可以看作是开集经过可数次并、交、差、余运算后得到的集合，因此我们只需证明 F 将开集映为开集：因为 F 是单调递增的连续函数，所以

$$\forall(a,b)\subset[0,1],f((a,b))=(f(a),f(b))$$

即任意开区间的像均为开区间，由开集结构定理，对任意开集 O，$\exists\{(a_\alpha,b_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, s.t.

$$O=\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}(a_\alpha,b_\alpha)\Longrightarrow F(O)=\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}(f(a_\alpha),f(b_\alpha))$$

即 F 将开集映为开集，进一步 F 将 $Borel$ 集映为 $Borel$ 集

因为 $Borel$ 集是可测集，而 $\mathcal{N}$ 不可测，所以 $\mathcal{N}\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$，故 $F(\mathcal{N})\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$，但 $F(\mathcal{N})$ 可测，这就是我们要找的可测但非 $Borel$ 集

(2). 我们取上述的 F 为连续函数 f，$\Phi=\chi_{F(\mathcal{N})}$，由 $F(\mathcal{N})$ 可测知 Φ 可测，但

$$\Phi\circ f(x)=\chi_{F(\mathcal{N})}\circ F(x)\begin{cases}0, & x\notin\mathcal{N}\\ 1, & x\in\mathcal{N}\end{cases}$$

则 $\{\Phi\circ f\geq 1\}=\mathcal{N}$ 不可测，故 $\Phi\circ f$ 不是可测函数 $\square$

T3.

证明

$(i)\Rightarrow(ii)$：设开区间 $I=(a,b)$，由 f 可测知，$\{f<b\},\{f>a\}$ 可测，所以

$$f^{-1}(I)=\{a<f<b\}=\{f<b\}\cap\{f>a\}$$

因此对任意开区间 I，$f^{-1}(I)$ 可测

$(ii)\Rightarrow(iii)$：由开集结构定理知，存在可数个开区间 $(a_\alpha,b_\alpha),\alpha\in\Lambda$, s.t.

$$O=\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}(a_\alpha,b_\alpha)$$

我们下面证明

$$f^{-1}(O)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}\big((a_\alpha,b_\alpha)\big)$$

一方面, 对 $\forall x\in f^{-1}(O)$, 则 $f(x)\in O\Rightarrow\exists\alpha_x\in\Lambda,\text{s.t. }f(x)\in(a_\alpha,b_\alpha)\in RHS$, 即 $x\in RHS$, 所以 $LHS\subseteq RHS$

另一方面，设 $x\in RHS$，则 $\exists\alpha_x\in\Lambda,\text{s.t. }x\in f^{-1}\big(a_{\alpha_x},b_{\alpha_x}\big)\Rightarrow f(x)\in(a_\alpha,b_\alpha)\subset O$，故 $RHS\subseteq LHS$ ，因此

$$f^{-1}(O)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(a_\alpha,b_\alpha)$$

由于对任意开区间 $(a_\alpha,b_\alpha),f^{-1}(a_\alpha,b_\alpha)$ 可测，所以对任意开集 O，$f^{-1}(O)$ 可测

$(iii)\Rightarrow(iv)$：对任意闭集 F，因为 F^c 是开集，所以 $f^{-1}(F_c)$ 可测，下面证明

$$f^{-1}(F)=E\backslash f^{-1}(F_c)$$

一方面，对 $\forall x\in f^{-1}(F)\subseteq E$，则 $f(x)\in F\Rightarrow f(x)\notin F^c$，故 $x\notin f^{-1}(F^c)$，即 $x\in E\backslash f^{-1}(F^c)$

另一方面，设 $x\in RHS$，则 $x\in E$ 且 $f(x)\notin F^c\Rightarrow F(x)\in F$，即 $x\in f^{-1}(F)$，因此

$$f^{-1}(F)=E\backslash f^{-1}(F^c)$$

由于可测集的差集仍可测，所以对任意闭集 F，$f^{-1}(F)$ 可测

$(iv)\Rightarrow(v)$：考虑集合族

$$\mathcal{F}=\{B\subset\mathbb{R}:f^{-1}(B)\text{可测}\}$$

下面验证 $\mathcal{F}$ 是一个 σ 代数

(1).$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing, f^{-1}(\mathbb{R})=E$，因此 $\varnothing,\mathbb{R}\in\mathcal{F}$

(2). 设 $B\in\mathcal{F}$，则 $f^{-1}(B)$ 可测，由于 $f^{-1}(B^c)=E\backslash f^{-1}(B)$（同上完全一样的证明），可测集的差集仍可测，则 $B^c\in\mathcal{F}$

(3). 设 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}\in\mathcal{F}$，则 $f^{-1}(B_\alpha)$ 可测，下面证明

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$$

一方面，设 $x\in LHS$，则 $f(x)\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\Rightarrow\exists\alpha_x\in I,\text{s.t. }f(x)\in B_{\alpha_x}\Rightarrow x\in f^{-1}(B_{\alpha_x})\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$，因此 $LHS\subseteq RHS$

另一方面，设 $x\in RHS$，则 $\exists\alpha_x\in I,\text{s.t. }x\in f^{-1}(B_{\alpha_x})\Rightarrow f(x)\in B_{\alpha_x}\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\Rightarrow x\in LHS$，故 $LHS=RHS$，由可测集对可数并封闭知，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\in\mathcal{F}$

因此 $\mathcal{F}$ 是一个 σ 代数，因为对任意开集 O，O^c 是闭集，由 (iv) 知，$O^c\in\mathcal{F}\Rightarrow O=(O^c)^c\in\mathcal{F}$，因此 $\mathcal{F}$ 包含了全体开集，故 $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{B}(\mathbb{R})$，所以任意 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B)$ 可测

$(v)\Rightarrow(i)$：对 $\forall a\in\mathbb{R},(-\infty,a)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，所以 $\{f<a\}=f^{-1}\big((-\infty,a)\big)$ 可测，由 a 的任意性知 f 可测 □

周三

T1.

证明 只需证明 f 可测 $\Rightarrow g$ 可测即可：由 f 可测知，$\forall a\in\mathbb{R},\{f<a\}$ 可测，因为

$$\{g<a\}=\{x:g(x)=f(x),f(x)<a\}\cup\{x:g(x)\neq f(x),g(x)<a\}\tag{1}$$

对 (1) 式右边第一部分，因为

$$\{f<a\}=\{x:g(x)=f(x),f(x)<a\}\sqcup\{x:g(x)\neq f(x),f(x)<a\}$$

而 $\{x:g(x)\neq f(x),f(x)<a\}\subseteq\{x:g(x)\neq f(x)\}$，由 $f=g$ a.e $x\in E$ 知，它是零测集的子集，故可测，所以

$$\{x:g(x)=f(x),f(x)<a\}=\{f<a\}\backslash\{x:g(x)\neq f(x),f(x)<a\}$$

由可测集的差集可测知，$\{x:g(x)=f(x),f(x)<a\}$ 可测

对 (1) 式右边第二部分，因为 $\{x:g(x)\neq f(x),g(x)<a\}\subseteq\{x:g(x)\neq f(x)\}$，所以它是零测集的子集，故可测，所以 $\{g<a\}$ 为两个可测集的交集，故可测，由 a 的任意性知，g 是可测函数 □

T2.

证明

(a). 考虑上课时在 $[0,1]$ 区间中构造的不可测集 $\mathcal{N}$，设 $f:[0,1]\to\{-1,1\}$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\backslash\mathcal{N}\\ -1, & x\in\mathcal{N}\end{cases}$$

则 $\{f<0\}=\mathcal{N}$ 不可测，故 f 不可测，但 $|f|\equiv1$，所以

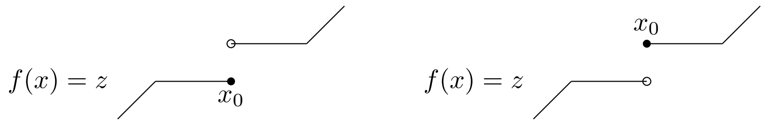
$$m(\{|f|<a\})=\begin{cases}1, & a>1\\ 0, & a\leq1\end{cases}$$

故 $|f|$ 可测

(b). 对 $\forall a \le x \le b$，有 $f(a) \le f(x) \le f(b)$，所以若 $z < f(a)$，则 $\{f \le z\} = \varnothing$ 可测；若 $z \ge f(b)$，则 $\{f < z\} = [a, b]$ 可测；若 $f(a) \le z < f(b)$

Case 1. $\exists x \in [a, b], \text{s.t. } f(x) = z$，考虑集合

$$A_z = \{y : y \in [a, b], f(y) \le z\}$$



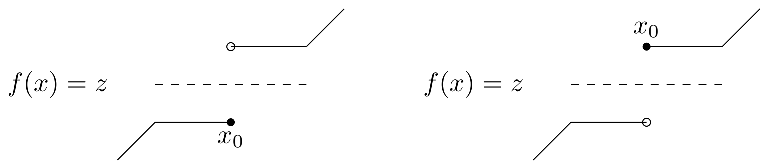
由于 $x \in A_z$，所以它非空，取 $x_0 = \sup\limits_{y \in A_z} y$，则 $f(x_0) \ge z$，且 $\forall x < x_0, f(x) \le z, \forall x > x_0, f(x) > z$，否则与 x_0 是上确界矛盾！因此

$$\{f \le z\} = [a, x_0) \text{ 或 } [a, x_0]$$

无论哪一种情形，$\{f \le z\}$ 都可测

Case 2. $\nexists a \le x \le b, \text{s.t. } f(x) = z$，还是考虑集合

$$A_z = \{y : y \in [a, b], f(y) \le z\}$$



由于 $f(a) \le z$，所以 $a \in A_z$，故 A_z 非空，取 $x_0 = \sup\limits_{y \in A_z} y$，则 $\forall x < x_0, f(x) \le z, \forall x > x_0, f(x) > z$，否则与 x_0 是上确界矛盾！因此

$$\{f \le z\} = [a, x_0] \text{ 或 } [a, x_0)$$

无论哪一种情形，$\{f \le z\}$ 都可测

综上 f 可测

(c). 考虑 $E = [0, 1], f(x) \equiv 0, g(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}, x \in [0, 1]$，则

$$m(\{f \neq g\}) = m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

$m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ 是因为：设 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $[0, 1]$ 上有理数的一个罗列，对于独点集 $\{r_i\}, m(\{r_i\}) = 0$，由可测集的可数可加性知

$$m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\{r_i\}) = 0$$

但 g 却是处处不连续的：对 $\forall x \in [0, 1]$，取 $\varepsilon_0 = 1$，若 $x \in \mathbb{Q}$，由无理数的稠密性，对 $\forall \delta > 0, \exists y \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q}, \text{s.t. } |x - y| < \delta$，此时 $|g(x) - g(y)| = 1 \ge \varepsilon_0$；若 $x \notin \mathbb{Q}$，由有理数的稠密性，对 $\forall \delta > 0, \exists z \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q}, \text{s.t. } |x - z| < \delta$，此时 $|g(x) - g(z)| = 1 \ge \varepsilon_0$，故 g 处处不连续 $\square$