习题 1 *Let n, r be positive integers and $n \geq r$. Give a* **combinatorial proof** *of*

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\ldots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}.$$

证明 考虑从 $[n+1]=\{1,2,\cdots,n+1\}$ 中选择 $r+1$ 个元素，则 RHS 表示直接选，LHS 的组合意义如下

按这 $r+1$ 个元素中的最大元进行分类，由于抽取了 $r+1$ 个元素，最大元可能为 $r+1, r+2, \cdots, n+1$，对 $\forall r+1 \leq k \leq n+1$，我们去除最大元 k，接下来我们在 $[k-1]=\{1,2,\cdots,k\}$ 中选择 $(r+1)-1=r$ 个元素，即 $\binom{k-1}{r}$ 表示从 $[n+1]$ 中选 $r+1$ 个元素，其中最大元为 k 的种数，遍历 $r+1 \leq k \leq n+1$ 即为 LHS $\square$

习题 2 *Let n be a positive integer. Prove that the identity*

$$x^n=\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k$$

holds for every real number x, where $S(n,k)$ is the Strirling number of the second kind, and $(x)_k := x(x-1)\ldots(x-k+1)$ denotes a polynomial of degree k with variable x.

Hint: first prove the case when x is a positive integer by double-counting certain mappings.

证明 当 $x \in \mathbb{N}$ 时，考虑集合 $[n]$ 到集合 $[x]$ 的映射数量，LHS 表示直接计算，共 x^n 种（每个 $1 \leq i \leq n$ 共有 x 种像），RHS 的组合意义如下

按像集大小分类，像集大小可能为 $1 \leq i \leq n$，当像集大小为 i 时，先将 $[n]$ 中的 n 个数分成 i 组，共有 $S(n,i)$ 种分法，然后再将 i 组分别打到 $[x]$ 中的 i 个数，共 $\binom{x}{i}\cdot i! = (x)_i$，因此像集大小为 i 的种数一共有 $S(n,i)(x)_i$ 种，遍历 $1 \leq i \leq n$ 即为 RHS

当 $x \in \mathbb{R}$ 时，考虑多项式 $f(x)=x^n-\sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k$，对 $\forall m \in \mathbb{N}, f(m)=0$，即 f 有无穷多零点，只能是 $f \equiv 0$，即 $x^n=\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k$ $\square$

习题 3 *Let n, r be integers satisfying $0 \leq r \leq 2n$. Find the value of $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{r-i}$.*

解 考虑 $f(x)=(1-x)^n(1+x)^n=(1-x^2)^n$，则对于 LHS 而言

$$[x^r]f=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i 1^{n-i}\times\binom{n}{r-i}1^{r-i}1^{n-(r-i)}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{r-i}$$

而对于 RHS 而言，展开后只有 x 的偶数次幂，因此若 r 为奇数，则原式为零；若 $r=2k, k=0,\cdots,n$ 为偶数，则

$$[x^{2k}](f)=\binom{n}{k}(-1)^k$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{r-i}=\begin{cases}0, & r\text{为奇数}\\ (-1)^{\frac{r}{2}}\binom{n}{\frac{r}{2}}, & r\text{为偶数}\end{cases}$$

□

习题 4 *For any integer $n \geq 2$, let $\pi(n)$ be the number of primes in $\{1, 2, ..., n\}$.*

(a) *Prove that the product of all primes p satisfying $m < p \leq 2m$ is at most $\binom{2m}{m}$, where $m \geq 1$ is any integer.*

(b) *Use (a) to prove that $\pi(n) \leq \frac{Cn}{\log n}$ for some absolute constant C. (Hint: by induction and use the estimation on $\binom{2m}{m}$)*

证明 (a). 因为 $m < p \leq 2m$ 中的素数一定在 $(2m)!$ 的素因子分解中出现至少一次，且由 $p > m$ 知，$m! \nmid p$，所以

$$\prod_{\substack{m<p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} p \,\Bigg|\, \frac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m} \Longrightarrow \prod_{\substack{m<p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} p \leq \binom{2m}{m}$$

(b). 对 $\forall m \geq 1$，考虑集合 $\mathcal{P}(m) = \{p : m < p \leq 2m, p\text{为素数}\}$，则我们有

$$\prod_{\substack{m<p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} p \leq \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!} = \frac{(2m)!!(2m-1)!!}{m!m!} \leq \frac{(2m)!!(2m)!!}{m!m!} = 4^m$$

断言：$\prod\limits_{\substack{1\leq p\leq 2n\\ p\ \text{prime}}} p \leq 4^{2n}$

当 n 较小时直接验证即可，假设命题对 $n \leq m-1$ 时均成立，下面证明 $n = m$ 的情况，因为

$$\prod_{\substack{p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} p = \prod_{\substack{1\leq p\leq m\\ p\ \text{prime}}} p \cdot \prod_{\substack{m<p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} p \leq \prod_{\substack{1\leq p\leq m\\ p\ \text{prime}}} p \cdot 4^m \leq 4^m \cdot 4^m = 4^{2m}$$

断言即证，再对两边取对数得

$$\sum_{\substack{p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} \log p \leq 2m \log 4$$

考虑将 $\sqrt{2m} < p \leq 2m$ 的项放缩，即

$$\sum_{\substack{1<p\leq\sqrt{2m}\\ p\ \text{prime}}} \log p + \sum_{\substack{\sqrt{2m}<p\leq 2m\\ p\ \text{prime}}} \log(\sqrt{2m}) \leq 2m \log 4$$

将 LHS 的第一项直接放掉，则

$$[\pi(2m) - \pi(\sqrt{2m})] \log(\sqrt{2m}) \leq 2m \log 4 \Longrightarrow \pi(2m) \leq \frac{4m \log 4}{\log(2m)} + \pi(\sqrt{2m})$$

由 $\pi(n)$ 的定义知显然有 $\pi(n) \leq n$，故 $\pi(\sqrt{2m}) \leq \sqrt{2m}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{n}{\log n}} = 0$，即存在常数 C_0，使得 $\sqrt{n} \leq C_0 \frac{n}{\log n}$，所以

$$\pi(2m) \leq 2\log 4 \cdot \frac{2m}{\log(2m)} + C_0 \frac{2m}{\log 2m}$$

取 $C_1 = C_0 + 4\log 2$ 即找到了常数 C_1

至此我们证明了 n 为偶数的情形，当 $n=2m-1$ 为奇数时，因为

$$\pi(2m+1) \leq \pi(2m)+1 \leq C_1\frac{2m}{\log 2m}$$

我们可以取得 C_2 满足 $C_1\frac{2m}{\log 2m}+1 \leq C_2\frac{2m+1}{\log(2m+1)}, \forall m \geq 0$，取 $C=\max\{C_1, C_2\}$ 即得证 $\square$