复分析第七周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 8 日

习题 4.5

T10

证明 (1). 设 $g(w)=\frac{1}{M}f(Rw), w\in B(0,1)$，则 $g:B(0,1)\to B(0,1)$，且 $g(0)=\frac{1}{M}f(0)=0$，由 *Schwarz-Pick* 定理

$$|\varphi_0\circ g(w)|\le|\varphi_0(w)|\Longrightarrow\frac{1}{M}|f(Rw)|\le|w|$$

设 $z=Rw$，则 $z\in B(0,R)$，且上式即为

$$|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|$$

再由 *Schwarz* 引理，$|g'(0)|\le1$，即 $|\frac{R}{M}f'(0)|\le1$，即 $|f'(0)|\le\frac{M}{R}$

(2).($\Longrightarrow$)：若等号成立，则 $f(z)=\frac{M}{R}(z), f'(0)=\frac{M}{R}$，即 $|g(w)|=|w|, |g'(0)|=1$，由 *Schwarz* 引理知，$\exists\theta\in\mathbb{R}, \text{s.t. } g(w)=e^{i\theta}w$，即

$$f(z)=\frac{M}{R}e^{i\theta}z$$

($\Longleftarrow$)：若 $f(z)=\frac{M}{R}e^{i\theta}z$，则 $|f(z)|=\frac{M}{R}|z|, |f'(0)|=\frac{M}{R}|e^{i\theta}|=\frac{M}{R}$ □

T13(1)

证明 考虑将右半平面打到 $B(0,1)$ 的分式线性变换 $g(z)=\frac{z-1}{z+1}$，设 $h(z)=g\circ f(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$，则 $h:B(0,1)\to B(0,1)$，且 $h(0)=0$，由 *Schwarz* 引理知，$|h(z)|\le|z|$，由 $h(z)$ 反解出 $f(z)$ 得 $f(z)=\frac{h(z)+1}{1-h(z)}$，因此

$$\begin{aligned}\text{Re}f(z)&=\text{Re}\frac{h(z)+1}{1-h(z)}=\text{Re}\frac{\big(h(z)+1\big)\big(\overline{1-h(z)}\big)}{\big(1-h(z)\big)\big(\overline{1-h(z)}\big)}\\&=\frac{1}{|1-h(z)|^2}\text{Re}(1+h(z)-\overline{h(z)}-|h(z)|^2)\\&=\frac{1-|h(z)|^2}{|1-h(z)|^2}\ge\frac{1-|z|^2}{\big(1+|z|\big)^2}=\frac{1-|z|}{1+|z|}\end{aligned}$$

上面我们需要注意到 $\text{Re}\big(h(z)-\overline{h(z)}\big)=0$

第二个不等式是显然的，因为 $|f(z)|=\sqrt{\big(\text{Re}f(z)\big)^2+\big(\text{Im}f(z)\big)^2}\ge\text{Re}f(z)$

对于第三个不等式

$$|f(z)|=\left|\frac{h(z)+1}{1-h(z)}\right|=\frac{|f(z)+1|}{|1-h(z)|}\le\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

□

T18

证明 若 $f(0)=0$，则由 *Schwarz* 引理，显然有 $|f(z)|\le|z|$，即为右侧不等式，下面证明 $f(0)\ne 0$ 时，右侧不等式成立：考虑将 $B(0,1)$ 打到 $B(0,1)$、$f(0)$ 打到 0 的分式线性变换

$$g(z)=\frac{z-f(0)}{1+\overline{f(0)}z}$$

设 $h(z)=g\circ f(z)=\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$，则 $h:B(0,1)\to B(0,1),h(0)=0$，由 *Schwarz* 引理知，$|h(z)|\le|z|$，即

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le|z|$$

接下来证明不等式：对 $|a|<1,|z|<1$，有

$$\frac{\big||z|-|a|\big|}{1-|a||z|}\le\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$$

设 $z=re^{i\theta_1},a=re^{i\theta_2}$，即证明

$$\frac{|r_1-r_2|}{1-r_1r_2}\le\left|\frac{r_1e^{i\theta_2}-r_2e^{i\theta_1}}{1-r_1e^{-i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}}\right|=\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}{\sqrt{1+r_1^2r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}}$$

两边同时平方，即证明

$$\frac{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2}{1+r_1^2r_2^2-2r_1r_2}\le\frac{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}{1+r_1^2r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

因为 $r_1r_2\ge r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$，由糖水不等式立证

回到本题，利用刚刚的不等式，我们有

$$|z|\ge\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\ge\frac{\big||f(0)|-|f(z)|\big|}{1-|f(0)||f(z)|}$$

即

$$\begin{cases}|z|\cdot(1-|\overline{f(0)}||f(z)|)\ge|f(0)|-|f(z)|\Longrightarrow|f(z)|(1-|\overline{f(0)}||z|)\ge|f(0)|-|z|\Longrightarrow|f(z)|\ge\frac{f(0)-|z|}{1-|f(0)||z|}\\|z|\cdot(1-|\overline{f(0)}||f(z)|)\ge|f(z)|-|f(0)|\Longrightarrow|f(z)|(1+|\overline{f(0)}||z|)\le|f(0)|+|z|\Longrightarrow|f(z)|\le\frac{f(0)+|z|}{1+|f(0)||z|}\end{cases}$$

□

T19

证明 考虑 $g(z)=\frac{f(z)}{M}$，则 $g:B(0,1)\to B(0,1)$，且 $g(0)=\frac{f(0)}{M},g'(0)=\frac{f'(0)}{M}$，由 *Schwarz-Pick* 定

理，我们有

$$\frac{|g'(z)|}{1-|g(0)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \quad \forall |z|<1$$

取 $z=0$，即 $|g'(0)| \leq 1-|g(z)|^2 \Longrightarrow M|f'(0)| \leq M^2-|f(0)|^2$ $\square$