复分析第三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 13 日

习题 2.4

T8

证明 假设 $z_1, z_2 \in B(0,1)$, 若 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $z_1^2 + 2z_1 = z_2^2 + 2z_2 \Rightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2) = 0$, 由于 $z_1, z_2 \in B(0,1)$, 所以 $z_1 + z_2 + 2 \neq 0$，故只能是 $z_1 - z_2 = 0$，即 $z_1 = z_2$，则 $f(z) = z^2 + 2z + 3$ 在 $B(0,1)$ 中单叶 □

T15

证明 假设 $z_1 \neq z_2$，若 $f(z_1) = f(z_2)$，则

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2}(z_1 z_2 - 1)(z_1 - z_2) = 0 \iff z_1 z_2 = 1$$

要证明 f 在 $D \subset \mathbb{C}$ 上是单叶的，只需证明 D 中任意一点 z 的倒数 $\frac{1}{z}$ 在 D 外

(1) 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$：假设 $z = a + bi$ 是上半平面的一点，则 $a \in \mathbb{R}, b > 0$，且 $\frac{1}{z} = \frac{a - b_i}{a^2 + b^2}$ 在下半平面，因此上半平面中任意一点，它的倒数均在下半平面，故上半平面是 φ 的单叶性域

(2) 下半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$：同上知，下半平面的任意一点的倒数均在上半平面，故下半平面是 φ 的单叶性域

(3) 无心单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$：若 $0 < |z| < 1$，则由 $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ 知，$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > 1$，因此无心单位圆盘中任意一点的倒数均在圆盘外，故无心单位圆盘是 φ 的单叶性域

(4) 单位圆盘的外部 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$：若 $|z| > 1$，则同上分析知，$0 < \left|\frac{1}{z}\right| < 1$，因此单位圆盘外任意一点的倒数均在无心单位圆盘上，故单位圆盘外部是 φ 的单叶性域

□

T16

证明

设 $\varphi = u(r,\theta) + iv(r,\theta), z = re^{i\theta}$，则

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

所以

$$\begin{cases} u(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

(1). 上半平面 $\{(r,\theta) : \theta \in (0,\pi)\}$

首先当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta = 0, \sin\theta = 1 \Rightarrow u = 0, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \in \mathbb{R}$，因此 φ 把射线 $\arg\theta = \frac{\pi}{2}$ 映为虚轴；其次当 $\theta \in (0,\pi) \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ 时，$\cos\theta, \sin\theta \neq 0$，且

$$\frac{u^2(r,\theta)}{\cos^2\theta} - \frac{v^2(r,\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\left(r^2 + \frac{1}{r^2} + 2\right) - \frac{1}{4}\left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\right) = 1$$

当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\cos\theta > 0 \Rightarrow u > 0$，$\varphi$ 将射线 $\arg\theta$ 映为上述双曲线的右半支；当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，$\cos\theta < 0 \Rightarrow u < 0$，$\varphi$ 将射线 $\arg\theta$ 映为上述双曲线的左半支，且双曲线的顶点为 $(\pm\cos\theta, 0)$，因此除了实轴上的 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$，$\mathbb{C}$ 中的任意一点都存在唯一一条上述双曲线经过该点（把虚轴看作双曲线族的极限），所以 φ 将上半平面 $\{(r,\theta) : \theta \in (0,\pi)\}$ 映为 $\mathbb{C}\backslash\left((-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\right)$

(2). 下半平面 $\{(r,\theta) : \theta \in (\pi, 2\pi)\}$

由于对于 $\forall\theta \in (\pi, 2\pi)$，$\theta - \pi, \theta$ 二者的正弦、余弦值的平方完全相等，因此下半平面与上半平面完全同理，所以 φ 将下半平面 $\{(r,\theta) : \theta \in (\pi, 2\pi)\}$ 映为 $\mathbb{C}\backslash\left((-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\right)$

(3). 无心单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$

对固定的圆周 $|z| = r \in (0,1)$，我们有

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$$

因此圆周 $|z| = r$ 的像为上面的椭圆，记长半轴、短半轴为 a, b，则

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) \\ b = \frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right| \end{cases}$$

当 $r \to 0$ 时，$a \to +\infty, b \to +\infty$；当 $r \to 1^-$ 时，$a \to 1, b \to 0$，因此除了线段 $[-1,1]$ 上的点，复平面上的任意点在都存在唯一一个上述椭圆族中的椭圆，使得该点在这个椭圆上，因此 φ 将无心单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ 映为 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$

(4). 单位圆盘的外部 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

同上，对固定的圆周 $|z| = r$，它的像为长半轴、短半轴为 a, b（同上）的椭圆，且当 $r \to 1^+$ 时，$a \to 1, b \to 0$；当 $r \to +\infty$ 时，$a \to +\infty, b \to +\infty$，因此除了线段 $[-1,1]$ 上的点，复平面上的任意点在都存在唯一一个上述椭圆族中的椭圆，使得该点在这个椭圆上，因此 φ 将单位圆盘的外部 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ 映为 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$

□

T17

证明 (1). 半条形域（不妨记为 D_1）$\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \mathrm{Re}z < \theta_0 + 2\pi, \mathrm{Im}z > 0\} \overset{\text{def}}{=} D_1$

记区域 $G_1 : \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$，考虑函数

$$\begin{aligned} \sigma : D_1 &\longrightarrow G_1 \\ z &\longmapsto e^{iz} \end{aligned}$$

则 σ 是双射：

单射：设 $z_i = x_i + iy_i, z_i \in D_1, i = 1,2$，若 $\sigma(z_1) = \sigma(z_2) \Rightarrow e^{iz_1} = e^{iz_2} \Rightarrow e^{-y_1} = e^{-y_2}, e^{ix_1} = e^{ix_2}$，所以 $x_1 = x_2 + 2k\pi, y_1 = y_2$，但 $x_1, x_2 \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$，故 $x_1 = x_2$，故 $z_1 = z_2$

满射：对 $\forall re^{i\theta} \in G_1$，考虑 $z = \theta - i\ln r$，则 $\sigma(z) = re^{i\theta}$

因为 $\cos\theta = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \varphi(e^{iz}) = \varphi(\sigma(z))$，因为 $\sigma(z)$ 的定义域为 $G_1 \subset B(0,1)\backslash\{0\}$，由 *T15* 已证 φ 在 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上单叶，所以 $\cos\theta$ 在 G_1 上单叶，且两个单射的复合仍是单射，故 $\cos\theta$ 在半条型域 D_1 上单叶

考虑函数

$$\begin{aligned} \psi : G_1 &\longrightarrow \psi(G_1) \\ z &\longmapsto \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

假设 $z_1 \neq z_2$，若 $\psi(z_1)=\psi(z_2)$，则

$$\psi(z_1)-\psi(z_2)=\frac{1}{2}(z_1z_2+1)(z_1-z_2)=0 \iff z_1z_2=-1$$

要证明 ψ 在 G_1 上单叶，只需证明 $\forall z \in G_1, \frac{-1}{z} \notin G_1$ 即可，因为 $0<|z|<1$，所以 $\left|\frac{-1}{z}\right|>1, \frac{-1}{z} \notin G_1$，因此 ψ 在 G_1 上是单叶的，因为 $\sin\theta=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{i}\psi(e^{iz})=-i\psi(\sigma(z))$，且两个单射的复合仍是单射，故 $\sin\theta$ 在半条型域 D_1 上单叶

(2). 半条型域（不妨记为 D_2）$\{z \in \mathbb{C}: \theta_0<\mathrm{Re}z<\theta_0+2\pi, \mathrm{Im}z>0\} \stackrel{\text{def}}{=} D_2$

记区域 $G_2: \{re^{i\theta}: r>1, \theta_0<\theta<\theta_0+2\pi\}$，考虑函数

$$\begin{aligned}\tau: D_2 &\longrightarrow G_2\\ z &\longmapsto e^{iz}\end{aligned}$$

则同上也可以验证 τ 也是双射，且 $\cos\theta=\varphi(\tau(z)), \sin\theta=-i\psi(\tau(z))$，由 φ, ψ, τ 单叶知，$\sin\theta, \cos\theta$ 在半条形域 D_2 上单叶 □

T22

证明 因为

$$f(z)=\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}=e^{[(p-1)\log|z|-p\log|1-z|]}\cdot e^{i[(p-1)\mathrm{Arg}(z)-p\mathrm{Arg}(1-z)]}$$

则对 $\forall D$ 中的简单闭曲线 γ

Case 1. γ 包含 $[0,1]$，则 $\forall z \in \gamma$，z 逆时针绕 γ 转一圈时

$$\Delta\mathrm{Arg}(z)=2\pi, \Delta\mathrm{Arg}(1-z)=2\pi$$

且 $e^{i[(p-1)\cdot 2\pi-p\cdot 2\pi]}=e^{-2\pi i}=1$，故 $f(z)$ 的值不发生变化

Case 2. γ 不包含 $[0,1]$，则 $\forall z \in \gamma$，z 逆时针绕 γ 一圈时

$$\Delta\mathrm{Arg}(z)=\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=0$$

且 $e^{i[(p-1)\cdot 0-p\cdot 0]}=e^{0i}=1$，故 $f(z)$ 的值不发生变化

综上 f 能在 $D=\mathbb{C}\backslash[0,1]$ 上选出单值的全纯分支 □

T26

证明 因为

$$\mathrm{Log}(1-z^2)=\log|1-z^2|+i\mathrm{Arg}(1-z^2)$$

取充分小的圆周 γ_1，使得 1 在圆周内，-1 在圆周外，则 $\forall z \in \gamma_1$ 逆时针绕 γ_1 转一圈时

$$\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=2\pi, \Delta\mathrm{Arg}(1+z)=0 \Rightarrow \Delta\mathrm{Arg}(1-z^2)=\Delta\mathrm{Arg}(1-z)+\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=2\pi$$

此时 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 的取值发生改变，故 1 是支点；取充分小的圆周 γ_2，使得 -1 在圆周内，1 在圆周外，则 $\forall z \in \gamma_2$ 逆时针绕 γ_2 转一圈时

$$\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=0, \Delta\mathrm{Arg}(1+z)=2\pi \Rightarrow \Delta\mathrm{Arg}(1-z^2)=\Delta\mathrm{Arg}(1-z)+\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=2\pi$$

此时 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 的取值发生改变，故 -1 是支点；任取复平面中不同于 ±1 的点 a，取充分小的圆周 γ_3，使得 a 在圆周内，±1 在圆周外，则 $\forall z \in \gamma_3$ 逆时针绕 γ_3 一周时

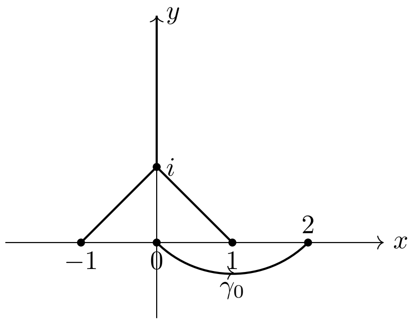
$$\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=0 \Rightarrow \Delta\mathrm{Arg}(1-z^2)=0$$

此时 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 的取值不发生改变，故 $\forall a\in\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$，$a$ 不是支点；最后取充分大的圆周 γ_4，使得 ±1 在圆周内，则 $\forall z\in\gamma_4$ 逆时针绕 γ_4 一周时

$$\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=2\pi,\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=2\pi\Rightarrow\Delta\mathrm{Arg}(1-z^2)=\Delta\mathrm{Arg}(1-z)+\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=4\pi$$

因此无穷远点 ∞ 是支点，所以 $\pm1,\infty$ 为 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 的支点，故在 D 上，$\mathrm{Log}(1-z^2)$ 能分出全纯分支

$z=0$ 时，取 $\mathrm{Arg}(1-0)=\mathrm{Arg}(1+0)=0$，则此时 $f(0)=0$ 符合题意



如图，$z=0$ 沿曲线 γ_0 到达 $z=2$ 时，$\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=0,\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=\pi\Rightarrow\Delta\mathrm{Arg}(1-z^2)=\pi$，因此

$$\mathrm{Log}(1-z^2)=\log|1-2^2|+i\pi=\log3+i\pi$$

□

T27

证明 因为

$$\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}=e^{\frac34\log|1-z|+\frac14\log|1+z|}\cdot e^{i\left[\frac34\mathrm{Arg}(1-z)+\frac14\mathrm{Arg}(1+z)\right]}$$

对于 $\forall D$ 中的简单闭曲线 γ

Case 1. γ 包含 $[-1,1]$，则 $\forall z\in\gamma$，z 逆时针绕 γ 转一圈时

$$\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=2\pi\Rightarrow\Delta\left(\frac34\mathrm{Arg}(1-z)+\frac14\mathrm{Arg}(1+z)\right)=\frac34\cdot2\pi+\frac14\cdot2\pi=2\pi$$

由于 $e^{2\pi i}=1$，故函数值不变

Case 2. γ 不包含 $[-1,1]$，则 $\forall z\in\gamma$，z 逆时针绕 γ 转一圈时

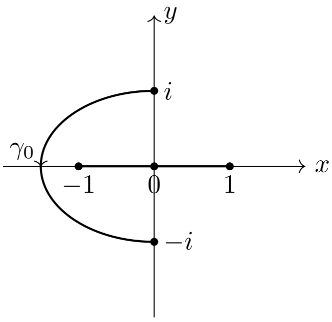
$$\Delta\mathrm{Arg}(1-z)=\Delta\mathrm{Arg}(1+z)=0\Rightarrow\Delta\left(\frac34\mathrm{Arg}(1-z)+\frac14\mathrm{Arg}(1+z)\right)=0$$

由于 $e^{0i}=1$，故函数值不变

综上，$\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 上选出一个全纯分支；若取 $\mathrm{Arg}(1-i)=-\frac{\pi}{4},\mathrm{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$，则

$$f(i)=e^{\frac34\log|1-i|+\frac14\log|1+i|}\cdot e^{i\left[\frac34\cdot\frac{-\pi}{4}+\frac14\cdot\frac{\pi}{4}\right]}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$$

符合题意



如图，$z=i$ 沿曲线 γ_0 到达 $z=-i$ 时，$\Delta\text{Arg}(1-z)=\frac{\pi}{2}, \Delta(1+i)=\frac{3\pi}{2}$，则

$$f(-i)=e^{\frac{3}{4}\log|1+i|+\frac{1}{4}\log|1-i|}\cdot e^{i\left[\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]}=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

□