近世代数 (H) 第五周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 19 日

Exercise 1 设 k 是域，$K=k(t), t$ 是字母，$n \neq m$ 且 $n, m \geq 2$，考虑域扩张

$$\begin{aligned} \theta_1 : K &\longrightarrow K \\ \frac{f(t)}{g(t)} &\longmapsto \frac{f(t^n)}{g(t^n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 : K &\longrightarrow K \\ \frac{f(t)}{g(t)} &\longmapsto \frac{f(t^m)}{g(t^m)} \end{aligned}$$

证明 θ_1, θ_2 不同构

Proof 不妨设 $n > m$，否则考虑 $\phi \circ \theta_2 = \theta_1$。假设存在域同构 $\phi : K \to K$，使得 $\phi \circ \theta_1 = \theta_2$，则

$$\phi \circ \theta_1(t) = \theta_2(t) \Longrightarrow \phi(t^n) = t^m$$

假设 $\phi(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$，则 $\phi(t^n) = \frac{f^n(t)}{g^n(t)} = t^m$，设 $\deg f = d_1, \deg g = d_2$，则比较 $f^n(t) = t^m g^n(t)$ 的次数得

$$d_1 n = d_2 n + m \Longrightarrow (d_1 - d_2)n = m \Longrightarrow n \mid m$$

但这与 $n > m \geq 2$ 矛盾！因此 θ_1, θ_2 不同构 □

Exercise 2 考虑域扩张 $k \hookrightarrow k(t)$，证明：$\forall \frac{f(t)}{g(t)} \in k(t) \backslash k$ 均为 k 上的超越元

Proof 对 $\forall \frac{f(t)}{g(t)} \in k(t)$，我们可不妨设它为即约表达，即 $\gcd(f, g) \sim 1$，假设 $\frac{f(t)}{g(t)}$ 为代数元，则 $\exists h(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in k[x], \text{s.t. } h\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = 0$，因此

$$a_n \frac{f^n(t)}{g^n(t)} + \cdots + a_1 \frac{f(t)}{g(t)} + a_0 = 0$$

两边同乘 $g^n(t)$，则

$$a_n f^n(t) + a_{n-1} f^{n-1}(t) g(t) + \cdots + a_1 f(t) g^{n-1}(t) + a_0 g^n(t) = 0$$

即

$$g(t)(a_{n-1} f^{n-1}(t) + \cdots + a_1 f(t) g^{n-2}(t) + a_0 g^n(t)) = -a_n f^n(t)$$

由 $k[t]$ 是 *UFD* 知，可取 $g(t)$ 到的素因子 $p(t)$（可能是 $g(t)$ 自身，但没关系），则 $p(t) \mid g(t) \mid f^n(t) \Longrightarrow p(t) \mid f(t)$，所以 $p(t) \mid \gcd(f, g)$，这与它们互素的假设矛盾！因此 $\frac{f(t)}{g(t)}$ 是超越元 $\square$

Exercise 3 计算 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}+\omega$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式

Solution $\sqrt{2}+\sqrt{3}$：首先寻找 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的零化多项式，设 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则 $\alpha-\sqrt{2}=\sqrt{3}$，两边平方得

$$\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha-1=0$$

因此 $2\sqrt{2}\alpha=\alpha^2-1$，两边再平方得

$$\alpha^4-10\alpha^2+1=0$$

因此 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 是 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的一个零化多项式，下面证明它不可约，注意到 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的四个根分别为

$$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3},\quad x_3=\sqrt{3}-\sqrt{2},\quad x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

但是 $(x-x_i), i=1,2,3,4$ 均不在 $\mathbb{Q}[x]$ 中，且 $(x-x_i)(x-x_j), \forall 1\le i<j\le 4$ 均不在 $\mathbb{Q}[x]$ 中，所以 $f(x)$ 没有一次、二次因子，故 f 不可约（否则一定有一次、二次因子）

$\sqrt{2}+\omega$：设 $\beta=\sqrt{2}+\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\sqrt{2}$，则 $2\beta-2\sqrt{2}+1=\sqrt{3}i$，两边平方得

$$4\beta^2+9-8\sqrt{2}\beta-4\sqrt{2}+4\beta=-3 \Longrightarrow \beta^2+\beta+3=\sqrt{2}(2\beta+1)$$

两边再平方得

$$\beta^4+2\beta^3-\beta^2-2\beta+7=0$$

因此 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-2x+7=0$ 是它的一个零化多项式，它是本原多项式，所以只需证明它在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约即可，首先 $f(x)$ 若有有理根 $\frac{p}{q}$，则 $p \mid 7, q \mid 1$，但是经过验证 $f(\pm 1), f(\pm 7)\neq 0$，因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中无一次因子，故在 $\mathbb{Z}[x]$ 中无一次因子，假设在 $\mathbb{Z}[x]$ 中有分解

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

则对比系数得

$$\begin{cases} a+c=2 \\ b+d+ac=-1 \\ bc+ad=-2 \\ bd=7 \end{cases}$$

由 $bd=7$ 知，若 $b=1,d=7$，则我们有

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 8+ac=-1 \\ c+7a=-2 \end{cases}$$

三式不能同时满足；若 $b=-1,d=-7$，则我们有

$$\begin{cases} a+c=2 \\ -8+ac=-1 \\ -c-7a=-2 \end{cases}$$

三式不能同时满足！

综上，$f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约，进而 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约，则 $f(x)$ 确实是 $\sqrt{2}+\omega$ 的最小多项式 $\square$