复分析第四周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 20 日

习题 2.5

T4

解 分式线性变换保交比：

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$$

(1). $(z, 1, -i, -1) = (w, i, 0, -i) \Rightarrow w = \frac{z+i}{z-i}$

(2). $(z, -i, i, 1) = (w, i, 0, -i) \Rightarrow w = \frac{z-i}{(2-i)z+(2i-1)}$ □

T5

解 由 $f(x_1) = 0, f(x_3) = \infty$ 知，可设分式线性变换 $f(z) = \lambda\frac{z-x_1}{z-x_3}$，将 $f(x_2) = 1$ 代入得

$$f(z) = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}$$

因为从 x_1 到 x_2 到 x_3 时，上半平面在左侧；从 0 到 1 到 ∞ 时，上半平面在左侧，且实轴可以看作圆周，故由课本定理 *2.5.10*，f 确实把上半平面映为上半平面 □

T13

解 因为分式线性变换将对称点映到对称点，而 $a = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ 关于 $B(0, 1)$ 的对称点为 $a^* = \frac{1}{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}i} = \frac{2}{17}(5 + 3i)$，所以 f 将 a^* 映为原点，所以可设

$$f(z) = \lambda\frac{z - a^*}{z - a}$$

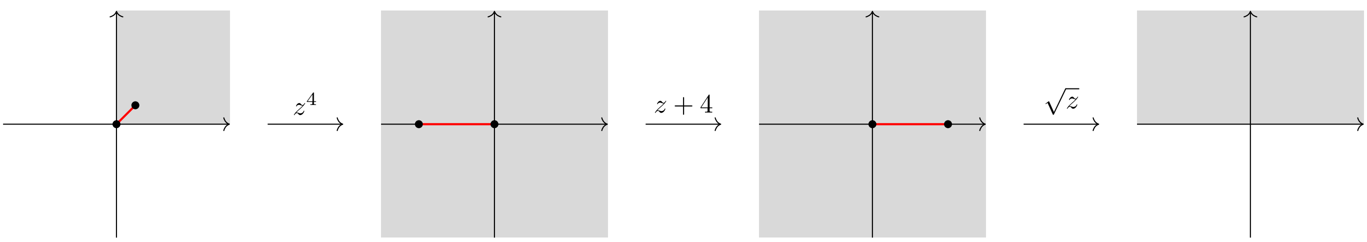
将 $f(2) = 2$ 代入解得 $\lambda = \frac{5-3i}{4}$，则

$$f(z) = \frac{5 - 3i}{4}\frac{z - \frac{2}{17}(5 + 3i)}{z - \frac{5+3i}{4}} = \frac{(5 - 3i)z - 4}{4z - (5 + 3i)}$$

进一步整理得 $f(z) = \frac{5-3i}{5+3i} \cdot \frac{z-\frac{4}{5-3i}}{1-\frac{4}{5+3i}z}$，故它确实将单位圆周映为单位圆周 □

T15

解 如下图，考虑 $f(z) = \sqrt{z^4 + 4}$，其中 $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\arg(z)}{2} + i\sin\frac{\arg(z)}{2}\right)$



□

T16

解 设 $z=x+iy, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), y>0$，注意到

$$f(z)=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})\sin x+\frac{i}{2}(e^y-e^{-y})\cos x$$

此时 $\mathrm{Re}f(z)=\mathbb{R}, \mathrm{Im}f(z)>0$，且对上半平面上的任意一点 (a,b)，方程

$$\begin{cases}\frac{(e^y+e^{-y})\sin x}{2}=a\\ \frac{(e^y-e^{-y})\cos x}{2}=b\end{cases}$$

在带状区域 $\left\{x+iy: x\in-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, y>0\right\}$ 上均有解，所以 $f(z)=\sin z$ 将带状区域映到上半平面，$f(z)$ 即为符合题意的解 $\square$

T18

解 由于分式线性变换把圆打到圆，假设分式线性变换 f 满足 $f(-1)=\infty, f(1)=0$，则我们将两个圆周打成了两条直线（直线看作退化的圆），因此考虑分式线性变换

$$f(z)=\frac{z-1}{z+1}$$

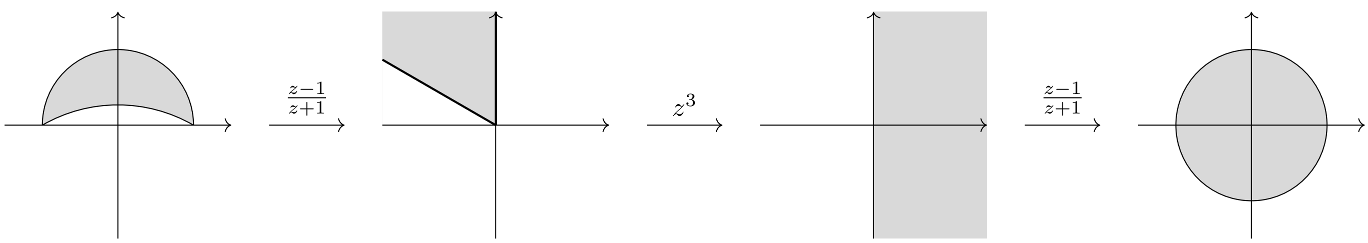
因为 $f(i)=\frac{i-1}{i+1}=i, f((2-\sqrt{3})i)=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$，即我们把上半月牙映为射线 $\arg z=\frac{\pi}{2}$，把下半月牙映为射线 $\arg z=\frac{5}{6}\pi$，而 $f(\frac{i}{2})=\frac{-3+4i}{5}$，因此我们将月牙形区域映为弧形区域 $\left\{z:\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{5}{6}\pi\right\}$；再复合上 $g(z)=z^3$，则我们将弧形区域区域 $\left\{z:\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{5}{6}\pi\right\}$ 映为右半平面 $\{z:\mathrm{Re}z>0\}$；最后，我们需要将右半平面映为 $B(0,1)$，考虑将虚轴映为 $\partial B(0,1)$，将 1 映为零（它的对称点 -1 映为 ∞）的分式线性变换

$$h(z)=\lambda\frac{z-1}{z+1}$$

因为将虚轴映为 $\partial B(0,1)$，所以 $|1|=|\lambda|\cdot|f(i)|\Rightarrow|\lambda|=1$，我们取 $\lambda=1$ 即可

综上，所求单叶全纯映射为

$$w(z)=\frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3-1}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+1}=\frac{-3z^2-1}{z^3+3z}$$



习题 3.1

T1

解

(i). γ 的参数方程为 $z=2e^{it}$，t 从 π 到 0，则 $\mathrm{d}z=2ie^{it}\mathrm{d}t$

$$\int_\gamma\frac{2z-3}{z}\mathrm{d}z=\int_\pi^0(4ie^{it}-3i)\mathrm{d}t=8+3\pi i$$

(ii). t 从 π 到 2π

$$\int_\gamma \frac{2z-3}{z}\mathrm{d}z = \int_\pi^{2\pi} (4ie^{it}-3i)\mathrm{d}t = 8-3\pi i$$

(iii). t 从 0 到 2π

$$\int_\gamma \frac{2z-3}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (4ie^{it}-3i)\mathrm{d}t = -6\pi i$$

□

T4

证明 设 $|z|=R$ 的参数方程为 $z=Re^{it}$，t 从 0 到 2π，则 $\mathrm{d}z = Rie^{it}\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\cdot Rie^{it}\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{2\pi} \left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\cdot Rie^{it}\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} R\left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于 $\deg P + 2 = \deg Q$，所以 $\exists K \ge 0, \text{s.t. } |z|=R$ 足够大时，$\left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\right| \le \frac{K}{R^2}$，所以 $|z|=R$ 足够大时

$$\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z \le \int_0^{2\pi} R\left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\right|\mathrm{d}t \le \int_0^{2\pi} R\cdot\frac{K}{R^2}\mathrm{d}t = \frac{2\pi K}{R} \to 0$$

$$\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z \ge -\int_0^{2\pi} R\left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\right|\mathrm{d}t \ge -\int_0^{2\pi} R\cdot\frac{K}{R^2}\mathrm{d}t = -\frac{2\pi K}{R} \to 0$$

即 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z = 0$ □

T5

解 设 $z=re^{it}$，则 $\overline{z}=re^{-it}, \mathrm{d}z = rie^{it}\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} z^n\overline{z}^k\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n(re^{-it})^k\cdot rie^{it}\mathrm{d}t \\ &= r^{n+k+1}i\int_0^{2\pi} e^{i(n-k+1)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

若 $n=k-1$，则 $RHS = r^{2k}i\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi i r^{2k}$

若 $n\ne k-1$，则 $RHS = r^{n+k+1}i\cdot\left.\frac{e^{i(n-k+1)t}}{i(n-k+1)}\right|_0^{2\pi} = 0$ □

T11

证明

(1). 因为 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0)\mathrm{d}\theta$，且由 f 连续知，对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $|re^{i\theta}| = r < \delta$ 时，就有

$$|f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0)| < \varepsilon$$

所以当 $r<\delta$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta - f(z_0)\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)\right]\mathrm{d}z\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)\right|\mathrm{d}z \\ &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\mathrm{d}z=\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)$$

(2). 设 $z=z_0+re^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z=rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

由第一问知

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)$$

□