复分析第十四周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 30 日

习题 6.1

T1

证明 设 $A=\{z\in D: z\text{是}f\text{的极点}\}$，则 $\forall z\in A, z$ 为 $\frac{1}{f}$ 的零点，由零点的孤立性知 A 中的点均为孤立点，再设 $\overline{A}=\{\overline{z}: z\in A\}, D_1=D\backslash(A\cup\overline{A})$，则 D_1 关于 x 轴对称，记函数 $g=f|_{D_1\cap\{z:\mathrm{Im}z\geq 0\}}$，则

1. g 在 $D_1\cap\{z:\mathrm{Im}z>0\}$ 上全纯
2. g 在 $D_1\cap\{z:\mathrm{Im}z\geq 0\}$ 上连续
3. $g(D_1\cap\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$

由 *Schwarz* 对称原理知

$$G(z)=\begin{cases} g(z), & z\in D_1\cap\{z:\mathrm{Im}z\geq 0\} \\ \overline{g(\overline{z})}, & z\in D_1\cap\{z:\mathrm{Im}z<0\} \end{cases}$$

是 g 在 D 上的全纯开拓，由唯一性定理知 $f\equiv G, \forall z\in D_1$，因此

$$f(z)=\overline{f(\overline{z})}, \quad \forall z\in D_1$$

设 $z_0\in D$ 是 f 的 m 阶极点，由 f 在 D_1 上全纯知，$\exists\varepsilon>0, \text{s.t.}\ f(z)$ 在 $B(z_0,\varepsilon)\backslash\{z_0\}, B(\overline{z}_0,\varepsilon)\backslash\{\overline{z}_0\}$ 上全纯，设 $f(z)$ 在 $B(z_0,\varepsilon)\backslash\{z_0\}$ 上有 *Laurent* 展开

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

由 $\overline{f(\overline{z})}=f(z)$ 知，在 $B(\overline{z}_0,\varepsilon)\backslash\{\overline{z}_0\}$ 上

$$\begin{aligned} f(z)&=\overline{\frac{a_{-m}}{(\overline{z}-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(\overline{z}-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\overline{z}-z_0)^n} \\ &=\frac{\overline{a}_{-m}}{(z-\overline{z}_0)^m}+\cdots+\frac{\overline{a}_{-1}}{(z-\overline{z}_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a}_n(z-\overline{z}_0)^n \end{aligned}$$

由 *Laurent* 展开的唯一性知，上式即为 $f(z)$ 在 $B(\overline{z}_0,\varepsilon)\backslash\{\overline{z}_0\}$ 上的 *Laurent* 展开，由 $a_{-m}\neq 0$ 知，$\overline{a}_{-m}\neq 0$，故 $\overline{z}_0$ 也是 $f(z)$ 的 m 阶零点，且

$$\mathrm{Res}(f,\overline{z}_0)=\overline{a}_{-1}=\overline{\mathrm{Res}(f,z_0)}$$

□

T3

证明 记 $\gamma = \partial B(0,r), D_1 = \{z : \frac{r}{R^2} < |z| < R\}$，由于

1. f 在 $D \cap \mathbb{C}^+_\infty(\gamma) =$ 上全纯
2. f 在 $D \cap (\mathbb{C}^+_\infty(\gamma) \cup \gamma)$ 上连续
3. $f(D \cap \gamma) \subset \{z : \mathrm{Im}(z) = 0\}$

则 f 可以全纯开拓到 D_1 上，因为 f 在 $\gamma \subset D_1$ 上恒为零，由唯一性定理知 $f \equiv 0, \forall z \in D_1$，因此 f 在 $B(0,R)\backslash\overline{B(0,r)}$ 上也恒为零 □

习题 6.2

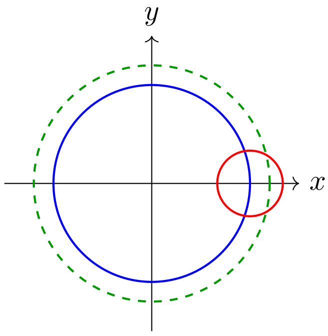
T3

证明 不妨假设 $z_0 = 1$，否则考虑 $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z_0^n} z^n$，由 1 是 $f(z)$ 的 1 阶极点知，$\exists \delta > 0, \text{s.t. } f(z)$ 在 $B(1,\delta)$ 上的 *Laurent* 展开为

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-1)^n$$

如下图，设 $\gamma = \partial B(0,1)\backslash B(1,\delta)$，且由 f 只有一个奇点知，对 $\forall \xi \in \gamma, \exists B(\xi, r_\xi)$ 及 $B(\xi, r_\xi)$ 上的全纯函数 f_ξ，使得当 $z \in B(0,R) \cap B(\xi, r_\xi)$ 时，$f(z) = f_\xi(z)$，显然 $\{B(\xi, r_\xi)\}$ 为紧集 γ 的一个开覆盖，故它存在有限子覆盖

$$B(\xi_1, r_{\xi_1}), \cdots, B(\xi_m, r_{\xi_m})$$



因此一定存在 $\eta > 1, \text{s.t. } f$ 在 $B(0,\eta)$（虚线内部区域）上为只有一个一阶极点 $z = 1$ 的亚纯函数，考虑 $g(z) = f(z) - \frac{b_{-1}}{z-1}$，则 $g(z)$ 在 $B(0,\eta)$ 上全纯，在 $z = 0$ 处对 $\frac{b_{-1}}{z-1}$ 做 *Taylor* 展开得

$$\frac{b_{-1}}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-1} z^n$$

所以在 $B(0,1)$ 上 $g(z)$ 有表达式

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_{-1}) z^n$$

由 $g(z)$ 在 $B(0,\eta)$ 上全纯知，$g(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_{-1})$ 存在，故

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_{-1})=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$$

（因为 1 为 1 阶极点，$b_{-1}\neq 0$） $\square$

T6

证明 因为 $a_n=\begin{cases}1, & n=2^k\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，所以 $R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=1$，即收敛圆周为 $\partial B(0,1)$，考虑单位圆周上的 2^n 次单位根全体

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{e^{\frac{2\pi ik}{2^n}}:0\leq k<2^n\}$$

则它是 $\partial B(0,1)$ 上的一个稠密子集，对 $\forall e^{\frac{2\pi ik}{2^m}}\in E$，有

$$f(e^{\frac{2\pi ik}{2^n}})=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{2\pi ik}{2^m}\cdot 2^n}=\sum_{n=0}^{m-1}e^{2\pi ik\cdot 2^{n-m}}+\sum_{n=m}^{+\infty}1=+\infty$$

所以对于 $\forall z\in E,f(z)=+\infty$，假设命题不成立，即存在 $\xi\in\partial B(0,1)$ 不是 f 的奇点，即存在圆盘 $B(\xi,r)$, s.t. f 能全纯开拓到 $B(\xi,r)$，所以 $\partial B(0,1)\cap B(\xi,r)$ 中的每个点都是 f 的正则点，但是 E 是 $\partial B(0,1)$ 的稠密子集，$\exists\eta\in E\cap\big(\partial B(0,1)\cap B(\xi,r)\big)$，但是 $f(\eta)=+\infty$，矛盾！ $\square$

T7

证明 假设存在 $\xi\in\partial B(0,1)$ 是 f 的正则点，则 $\exists B(\xi,r)$, s.t. f 能全纯开拓到 $B(\xi,r)$，由全纯开拓的唯一性知，$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2^n}}{2^n},\forall z\in B(\xi,r)$，因此

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n},\quad\forall z\in B(\xi,r)$$

即 $f'(z)$ 在 $B(\xi,r)$ 上全纯，这与 *T6* 矛盾！ $\square$