实分析第三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 15 日

周一

T1.

证明

(1).*totally disconnected*：对 $\forall x,y\in\mathcal{C}$，若 $x\neq y$，则 $\mathrm{d}(x,y)>0\Rightarrow\exists k_0\in\mathbb{N}^*,\text{s.t. }\mathrm{d}(x,y)>\frac{1}{3^k}$，因此 $[x,y]\not\subseteq C_k$，故 $\exists z\in[x,y],\text{s.t. }z\notin C_k\Rightarrow z\notin\mathcal{C}$

(2).*has no isolated points*：对 $\forall x\in\mathcal{C},\forall k\in\mathbb{N}^*$，有 $x\in C_k$，因为 C_k 为 2^k 个长度为 3^{-k} 的区间的无交并（不妨记为 $C_{ki},i=1,2,\cdots,2^k$），所以 $\exists!C_{ki},\text{s.t. }x\in C_{ki}$；设 $C_{ki}=[a,b]$，由 *Cantor* 集的构造知，a,b 一定是 C_{ki} 进行三分、挖去中间的开集后得到两个子区间的端点，故 $a,b\in C_{k+1}$，同理 $a,b\in C_{k+2},C_{k+3},\cdots$，又因为 $C_1\supset C_2\cdots\supset C_k$，所以

$$a,b\in\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k=\mathcal{C}$$

若 $x=a$，则取 $y=b$；若 x 取 b，则取 $y=a$，若 $x\in(a,b)$，则任取 $y=a$ 或 b，我们有 $y\in\mathcal{C}$，且

$$\mathrm{d}(x,y)\leq b-a=|C_{ki}|=\frac{1}{3^k}$$

由 k 是任意的知，我们找不到一个 $r>0,\text{s.t. }B(x,r)\cap\mathcal{C}=\varnothing$，故 $\forall x\in\mathcal{C}$，x 均不是孤立点 $\square$

T2.

证明

$(a).(\Rightarrow):\forall x\in\mathcal{C},\forall k\in\mathbb{N}^*$，设

$$C_k=\bigsqcup_{i=1}^{2^k}C_{ki}$$

其中 C_{ki} 按从左到右排列，则 $\exists!i_x\in\{1,2,\cdots,2^k\},\text{s.t. }x\in C_{ki_x}\overset{\text{def}}{=}J_k(x)$，且由 *Cantor* 集的构造，我们知道 $J_k(x)\supset J_{k+1}(x)$，且 $J_{k+1}(x)$ 为 $J_k(x)$ 进行三等分、挖去中间的开集后得到的两个闭区间中的一个，对 $\forall N\in\mathbb{N}$，我们如下定义 a_{N+1}

$$a_{N+1}=\begin{cases}0, & J_{N+1}(x)\text{为}J_N(x)\text{进行三等分、挖去中间的开集后得到的两个闭区间中的左边那个}\\ 2, & J_{N+1}(x)\text{为}J_N(x)\text{进行三等分、挖去中间的开集后得到的两个闭区间中的右边那个}\end{cases}$$

记 $J_N(x)$ 的左端点为 a，则 $J_N(x)$ 进行三等分、挖去中间的开集后得到的两个闭区间的左端点分别是 $a,a+\frac{2}{3^{N+1}}$，所以对 $\forall N\in\mathbb{N}$，$\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{a_k}{3^k}$ 表示 $J_N(x)$ 的左端点，故我们有

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{3^k}\leq x\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{3^k}+\frac{1}{3^N}$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}<\infty$，故级数绝对收敛，在上式中令 $N\to\infty$，则

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$$

故对 $\forall x\in\mathcal{C}$，我们找到了这样的三进制分解

$(\Leftarrow)$. 设 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k},x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$，则 x_n 为上述定义的 $J_n(x)$ 的左端点，故 $\forall n\in\mathbb{N}^*,x_n\in\mathcal{C}$，且

$$|x_n-x|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\to 0$$

因此 $x_n\to x$，由 *Cantor* 集是有界闭集知，$x_n\to x\in\mathcal{C}$

(b). 良定性：我们只需证明题目 *Cantor* 集中的元素按题目规定的三进制分解 $(\forall k\in\mathbb{N}^*,a_k\in\{0,2\})$ 唯一，假设

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k},\quad a_k,b_k\in\{0,2\}$$

我们考虑 $\mathbb{N}$ 的子集 $S=\{k:a_k\neq b_k\}$，由假设表示不唯一知，$\exists k\in\mathbb{N}^*,\text{s.t. }a_k\neq b_k$，则 S 非空，故 S 存在最小元，记 $k_0=\min\{k:k\in S\}$，不是一般性，设 $b_{k_0}=2,a_{k_0}=0$，则

$$0=x-x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{3^k}=\frac{2}{3^{k_0}}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{3^k}\geq\frac{2}{3^{k_0}}-\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=\frac{1}{3^{k_0}}$$

矛盾！因此假设是唯一的，故 F 在 *Cantor* 集上是良定的

连续性：***Claim***：$\forall x,y\in\mathcal{C}$，若 $|x-y|<\frac{1}{3^{k_0}}$，则 x,y 的三进制分解中，前 k_0 项系数都相同

pf of claim：否则，设 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k},y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k}$，记 $s=\min\{k:k\leq k_0,a_k\neq b_k\}$，且不是一般性设 $b_s=2,a_s=0$ 则

$$y-x=\frac{2}{3^s}+\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{3^k}\geq\frac{2}{3^s}-\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3^s}\geq\frac{1}{3^{k_0}}$$

这与 $|x-y|<\frac{1}{3^{k_0}}$ 矛盾！故断言得证

对 $\forall\varepsilon>0$，对 $\forall\varepsilon>0$，我们选取 $k_0,\text{s.t. }\frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$，取 $\delta=\frac{1}{3^{k_0}}$，则由断言知，$\forall x,y\in\mathcal{C}$，若 $|x-y|<\delta$，则它们的前 k_0 项系数相同，故

$$|F(y)-F(x)|=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{|b_k-a_k|}{2^k}\leq\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{2}{2^k}=2^{-k_0}<\varepsilon$$

因此 f 在 *Cantor* 集上是连续的

(c). 对于 $\forall y\in[0,1]$，均存在二进制分解

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k},\quad b\in\{0,1\}$$

记 $a_k=2b_k\in\{0,2\}$，注意到 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\in\mathcal{C},F(x)=y$，因此 F 是满射，特别地

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0}{2^k},\quad 1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k},\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0}{3^k}=0,\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=1$$

因此 $F(0)=0,F(1)=1$

(d). 对于 $[0,1]\backslash\mathcal{C}$，它是一列开区间的不交并，对于 $[0,1]\backslash\mathcal{C}$ 中的任意一个开区间，它的左端点与右端点的取值一

定相等，这是因为这个开区间是在某次构造中挖去的开区间，不妨记它为 C_k 的某个闭子区间 C_{ki} 在第 $k+1$ 次构造时挖去的开区间，则它的左端点与右端点在三进制分解的前 k 项均相同，但左端点第 $k+1$ 项全为 0，之后的项全为 2，右端点第 $k+1$ 项为 2，之后的项全为 0，若记左端点为 a，右端点为 b，则

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2^{k+1}}-\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

因此根据题意，我们可以将 $F(x)$ 写为 $F=F(\sup\{y|y\le x, y\in\mathcal{C}\})$，进而对 $\forall\varepsilon>0$，我们选取 $k_0, \text{s.t.}\ \frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$，取 $\delta=\frac{1}{3^{k_0}}$

若 $x,y\in\mathcal{C}$，且 $|x-y|<\delta$，由第三问知，$|F(x)-F(y)|<\varepsilon$；

若 $x,y\in[0,1]$，不失一般性，设 $y>x$，记 $x_1=\inf\{z:z\in\mathcal{C}, z>x\}, y_1=\sup\{z:z\in\mathcal{C}, z<y\}$；若 x_1,y_1 均不存在，则 $(x,y)\subset[0,1]\backslash\mathcal{C}$，$f(x)=f(y)$；否则，$|x_1-y_1|\le|x-y|<\delta$，故

$$|F(x)-F(y)|=|F(x_1)-F(y_1)|\le\varepsilon$$

故 F 在 $[0,1]$ 上连续 □

T3.

证明

(1). 由 A,B 可测知，$B\backslash A$ 可测，因为 $(B\backslash A)\cap A=\varnothing, B=(B\backslash A)\sqcup A$，由测度的可数可加性知

$$m(B)=m(B\backslash A)+m(A)\Rightarrow m(B\backslash A)=0$$

因为 $E\backslash A=E\cap A^c\subseteq B\cap A^c=B\backslash A$，故 $m_*(E\backslash A)\le m_*(B\backslash A)=0$，则 $m_*(E\backslash A)=0$，故 $E\backslash A$ 可测，则 $E=(E\backslash A)\sqcup A$ 也可测，且 $m(E)=m(E\backslash A)+m(A)=m(A)$

(2). 首先证明一个引理：对 $\forall B\in\mathbb{R}^d$，均 $\exists G_\delta$ 集 G 满足 $B\subset G$，且 $m_*(G)=m_*(B)$

pf of lemma：对 $\forall B\in\mathbb{R}^d$，由外正则性知

$$m_*(B)=\inf\{m_*(O:O\text{是开集}, E\subseteq O\}$$

所以，对 $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists O_n\supset B, \text{s.t.}\ m^*(O_n)<m_*(B)+\frac{1}{n}$，设

$$O=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$$

则 O 是 G_δ 集，且一方面，$B\subseteq O\Rightarrow m_*(B)\le m_*(O)$；另一方面，因为 $m_*(O)\le m_*(O_n)<m_*(B)+\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$，令 $n\to\infty$ 即得 $m_*(O)\le m_*(B)$，因此 $m_*(O)=m_*(B)$

回到本题

①假设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ *Lebesgue* 可测，对 $\forall A\subset\mathbb{R}^d$，由引理知，$\exists G_\delta$ 集 $G\supset A$，且 $m_*(G)=m_*(A)$，由 G_δ 集可测知

$$m_*(E\cap A)+m_*(E^c\cap A)\le m_*(E\cap G)+m_*(E^c\cap G)=m(E\cap G)+m(E^c\cap G)=m(G)=m_*(A)$$

由于 A 是任意选取的，所以 E 满足 *Carathéodory* 条件

②假设 E 满足 *Carathéodory* 条件，对 E 使用引理，即 $\exists G_\delta$ 集 $G\supset E$，且 $m_*(G)=m_*(E)$，取 $A=G$，则

$$m_*(E)=m_*(E\cap G)+m_*(E^c\cap G)=m_*(E)+m_*(G\backslash E)\Rightarrow m_*(G\backslash E)=0$$

故 $G\backslash E$ 可测，且 G_δ 集 G 可测，所以 $E=G\backslash(G\backslash E)$ 为可测集的差集，故 E 是 *Lebesgue* 可测的 □

T4.

证明 我们有三个观察：

1. 设 $E,F\subset\mathbb{R}^d, A\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，则 $A(E\cap F)=A(E)\cap A(F)$

   pf: 若 $x\in A(E\cap F)$，则 $\exists y\in E\cap F,\text{s.t. } x=Ay$，则 $x=Ay\in A(E),A(F)$，即 $x\in A(E)\cap A(F)\Rightarrow A(E\cap F)\subseteq A(E)\cap A(F)$；若 $x\in A(E)\cap A(F)$，则 $\exists y_1\in E.y_2\in F,\text{s.t. } x=Ay_1=Ay_2$，两边同时乘以 A^{-1} 得 $y_1=y_2\overset{\text{def}}{=}y$，故 $y\in E\cap F\Rightarrow x=Ay\in A(E\cap F)\Rightarrow A(E)\cap A(F)\subseteq A(E\cap F)$，故二者相等

2. 设 $E\subset\mathbb{R}^d$，则 $A(A^{-1}(E))=E$

   pf: 设 $x\in A(A^{-1}(E))$，则 $\exists y\in A^{-1}(E),\text{s.t. } x=Ay,\exists z\in E,\text{s.t. } y=A^{-1}z$，所以 $x=Ay=A(A^{-1}z)=z\in E$，故 $A(A^{-1}(E))\subseteq E$；设 $x\in E$，则 $A^{-1}x\in A^{-1}(E),x=A(A^{-1}x)\in A(A^{-1}(E))$，所以 $E\subseteq A(A^{-1}(E))$，故二者相等

3. 设 $E\subset\mathbb{R}^d$，则 $A^{-1}(E^c)=(A^{-1}(E))^c$

   pf: 因为
$$\begin{aligned}x\in A^{-1}(E^c)&\iff Ax\in E^c\iff Ax\notin E\\&\iff x=A^{-1}(Ax)\notin A^{-1}(E)\iff x\in(A^{-1}(E))^c\end{aligned}$$

回到本题，由 *T3* 知，我们只需证明若 $E\subseteq\mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$，则 $A(E)$ 满足 *Carathéodory* 条件：设 $\forall S\subset\mathbb{R}^d$，由 E 可测知，对 $A^{-1}(S)$ 应用 *Carathéodory* 条件，则

$$\begin{aligned}m_*(E)&=m_*(E\cap A^{-1}(S))+m_*(E\cap(A^{-1}(S))^c)\\&=m_*(A^{-1}(A(E))\cap A^{-1}(S))+m_*(A^{-1}(A(E))\cap A^{-1}(S^c))\\&=m_*(A^{-1}(A(E)\cap S))+m_*(A^{-1}(A(E)\cap S^c))\\&=|\det A^{-1}|m_*(A(E)\cap S)+|\det A^{-1}|m_*(A(E)\cap S^c)\end{aligned}$$

移项即得

$$m_*(A(E))=|\det A|m_*(E)=m_*(A(E)\cap S)+m_*(A(E)\cap S^c)$$

由 S 的任意性知，$A(E)$ 满足 *Carathéodory* 条件，故 $A(E)\in\mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$ □

周三

T1.

证明 首先证明一个引理：设 $F\subset\mathbb{R}^d$ 是紧集，$m(F)<\infty$，则对 $\forall 0<c<m(F)$，均存在紧集 $G\subset F,\text{s.t. } m(G)=m(F)$

pf of lemma: 由 F 是紧集知，F 有界，故 $\exists r_0>0,\text{s.t. } F\subseteq\overline{B_{r_0}(0)}$，因为闭集的交仍是闭集，则对 $\forall r\le r_0, F\cap\overline{B_r(0)}$ 是闭集，且为紧集，注意到 $m(F\cap\overline{B_0(0)})=0,m(F\cap\overline{B_{r_0}(0)})=m(F)$，且 $\forall r,F\cap\overline{B_r(0)}\subset F$，考虑函数

$$\begin{aligned}f:[0,r_0]&\longrightarrow[0,m(F)]\\r&\longmapsto m(F\cap\overline{B_r(0)})\end{aligned}$$

接下来证明 $f(r)$ 是连续的，首先 $m(\overline{B_r(0)})=\alpha(d)r^d$（其中 $\alpha(d)$ 是 d 维单位球的体积）在 $[0,r_0]$ 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. }\forall|r'-r|<\delta$（不失一般性，设 $r'>r$），就有

$$m(\overline{B_{r'}(0)}\backslash\overline{B_r(0)})=\left|m(\overline{B_{r'}(0)})-m(\overline{B_r(0)})\right|<\varepsilon$$

且当 $r' > r$ 时，$F \cap \overline{B_r(0)} \subseteq F \cap \overline{B_{r'(0)}}$，则

$$\begin{aligned}
|f(r') - f(r)| &= \left| m(F \cap \overline{B_{r'}(0)}) - m(F \cap \overline{B_r(0)}) \right| \\
&= m\left(\left(F \cap \overline{B_{r'}(0)} \right) \setminus \left(F \cap \overline{B_r(0)} \right) \right) \\
&= m\left(F \cap \left(\overline{B_{r'}(0)} \backslash \overline{B_r(0)} \right) \right) \\
&\leq m\left(\overline{B_{r'}(0)} \backslash \overline{B_r(0)} \right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

这就说明 f 是连续的，则由连续函数的介值定理，对 $\forall c \in (0, m(F)), \exists r_c > 0, \text{s.t.}\ m(F \cap \overline{B_{r_c}(0)}) = c$

回到本题：由可测集的定义，对 $b - c > 0$，$\exists$开集$E_0 \supset E_1, \text{s.t.}\ m(E_0 \backslash E_1) < b - c$，则

$$m(E_0) \leq m(E_0 \backslash E_1) + m(E_1) < b - c + a$$

此时 $E_2 \backslash E_0 = E_2 \cap E_0^c \subset E_2$ 为紧集，且 $m(E_2 \backslash E_0) \geq m(E_2) - m(E_0) > c - a$，则由引理可知，$\exists G \subset E_2 \backslash E_0$，且 G 为紧集，使得 $m(G) = c - a$，取 $E = E_1 \sqcup G$，则 $m(E) = m(E_1) + m(G) = c - a + a = c$ $\square$

T2.

证明

(a). 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$，所以对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{s.t.}\ \sum\limits_{k=N}^{\infty} m(E_k) < \varepsilon$，令

$$\tilde{E}_k = \bigcap_{j=1}^{N} \bigcup_{i \geq j} E_i = \bigcup_{i \geq N} E_i, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

则我们有 $\tilde{E}_1 \supset \tilde{E}_2 \supset \cdots$，且 $\tilde{E}_k \searrow E$，因为 $\forall N \in \mathbb{N}^*, E \subset \tilde{E}_N$，假设 $m(E) = s \neq 0$，则

$$s = m(E) \leq m(\tilde{E}_N) = m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} m(E_k), \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

这与无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)$ 收敛矛盾！因此 $m(E) = 0$

(b). 对任意正整数 q，设 $A_q = \bigcup\limits_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leq p < q}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^\gamma}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^\gamma} \right) \cap [0, 1]$，则我们得到了一族集合 $\{A_q\}_{q=1}^{\infty}$

Claim: $E(\gamma) = \limsup\limits_{q \to \infty} A_q$

pf of Claim:

$$\begin{aligned}
x \in E(\gamma) &\iff \exists \text{无穷多个最简有理数} \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{满足} \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\gamma} \\
&\iff \exists \text{无穷多个} A_q, \text{s.t.}\ x \in A_q \\
&\iff x \in \limsup_{q \to \infty} A_q
\end{aligned}$$

记 $\varphi(q)$ 为欧拉函数，若 q 有素因数分解 $q = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$，则 $\varphi(q) = p_1^{e_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_s^{e_s - 1}(p_s - 1) < p$，所以我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{\infty} m(A_q) &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2\varphi(q)}{q^\gamma} \\
&\leq 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\gamma - 1}} < \infty
\end{aligned}$$

因为 $\gamma > 2$ 时，$\gamma - 1 > 1$，故上述级数是收敛的，由 *Borel-Cantelli* 引理知 $m(E(\gamma)) = m\left(\limsup\limits_{q \to \infty} A_q \right) = 0$ $\square$

T3.

证明

(a). 记第 k 次挖去的 2^{k-1} 个区间之并为 I_k，则 $m(I_k)=\sum\limits_{i=1}^{k}2^{i-1}l_i, [0,1]=C_k\sqcup I_k$，且我们有 $I_1\subset I_2\subset\cdots$，令 $I=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$，因为开集的任意并为开集，所以 I 为开集，故可测，且

$$[0,1]\backslash I=[0,1]\cap I^c=[0,1]\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)^c=[0,1]\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k\right)=[0,1]\cap\hat{\mathcal{C}}=\hat{\mathcal{C}}$$

所以 $\hat{\mathcal{C}}$ 为可测集的差集，故可测，且

$$m(\hat{\mathcal{C}})=m([0,1]\backslash I)=m([0,1])-m(I)=1-\lim_{N\to\infty}m(I_N)=1-\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}2^{k-1}l_k=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k$$

特别地，若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1$，则 $m(\hat{\mathcal{C}})>0$

(b). $\hat{\mathcal{C}}$ 不包含内点：任取 $x\in\hat{\mathcal{C}}$，对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，$x\in C_k$，记 $J_k(x)$ 为构成 C_k 的 2^k 个区间中，包含 x 的那一个，取 x_k 为 $J_k(x)$ 的中点，因为第 $k+1$ 次二分时，$J_k(x)$ 的居中的、长度为 l_{k+1} 的区间被挖去，故 $x_k\notin\hat{\mathcal{C}}$，因为

$$J_k(x)=\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{k}2^{k-1}l_k}{2^k}\to 0$$

所以 $|x_n-x|\le|J_k(x)|\to 0$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，在 $B_x(\varepsilon)$ 中，总能找到 $\{x_n\}$ 中的点 $x_{n_\varepsilon}\in B_x(\varepsilon)$，且 $x_{n_\varepsilon}\notin\hat{\mathcal{C}}$，则 x 不是内点，由 x 的任意性知，$\hat{\mathcal{C}}$ 不包含内点

$\hat{\mathcal{C}}$ 不包含孤立点：任取 $y\in\hat{\mathcal{C}}$，我们按以下规则选取 $\{y_k\}$：若 y 为 $J_k(y)$ 的端点，则选取 y_k 为 $J_k(y)$ 的另一个端点；若 y 不是 $J_k(y)$ 的端点，则选取 y_k 为 $J_y(x)$ 的左端点（或右端点）由于 $J_k(y)$ 在第 $k+1$ 步删去中间长度为 l_{k+1} 的开区间后，它的端点仍然位于 $J_{k+1}(y)$ 中，同理可知 $J_k(y)$ 的端点在 $\hat{\mathcal{C}}$ 中，即 $\{y_k\}\subseteq\hat{\mathcal{C}}$，且我们有

$$|y_k-y|\le|J_k(y)|\to 0$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，在 $B_y(\varepsilon)$ 中，总能找到 $\{y_k\}$ 中的点 $y_{k_\varepsilon}\in B_y(\varepsilon)$，且 $y_{k_\varepsilon}\in\hat{\mathcal{C}}$，则 y 不是孤立点，由 y 的任意性知，$\hat{\mathcal{C}}$ 不含孤立点

$\square$