概率论第三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 15 日

习题 1.4

T2

证明 我们断言

$$\{X < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X < a - \frac{1}{n}\right\}$$

一方面，若 $\omega \in LHS$，则 $X(\omega) < a$，取 $\frac{1}{n_0} < a - X(\omega)$，则 $X(\omega) < a - \frac{1}{n_0}$，故 $\omega \in RHS$，即 $LHS \subseteq RHS$

另一方面，若 $\omega \in RHS$，则 $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } X(\omega) < a - \frac{1}{n_0} < a$，故 $\omega \in LHS$，即 $RHS \subseteq LHS$，综上，断言得证，记 $A_n = \left\{X < a - \frac{1}{n}\right\}$，则 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$，故 $A_n \nearrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < a\}$，所以

$$\begin{aligned} G(a) = \mathbb{P}(X < a) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X < a - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} G\left(a - \frac{1}{n}\right) \\ &= G(a-0) \end{aligned}$$

由 a 的任意性知，G 在 $\mathbb{R}$ 上左连续

$$\mathbb{P}\left(y \le X \le x\right) = G(x+0) - G(y)$$

□

T3

证明 (1). 我们断言

$$\{\max\{X,Y\} \le a\} = \{X \le a\} \cap \{Y \le a\}$$

$$\{\min\{X,Y\} \le a\} = \{X \le a\} \cup \{Y \le a\}$$

这是因为

$$\begin{aligned} \omega \in LHS &\iff \max\{X(\omega), Y(\omega)\} < a \\ &\iff X(\omega) < a, Y(\omega) < a \\ &\iff \omega \in RHS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \in LHS &\iff \min\{X(\omega), Y(\omega)\} < a \\ &\iff X(\omega) < a, Y(\omega) < a \text{至少有一者成立} \\ &\iff \omega \in RHS \end{aligned}$$

由于 σ 代数对可数交、并封闭，所以 $\forall a \in \mathbb{R}, \{\max\{X,Y\} < a\}, \{\min\{X,Y\} < a\} \in \mathcal{F}$，所以 $\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\}$ 也是随机变量

(2). 即证明 $\forall a \in \mathbb{R}, \{f(X) \le a\} = \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \le a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(-\infty, a]\} \in \mathcal{F}$，因为

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(-\infty, a]\}^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(a, +\infty)\}$$

由 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数，对补集封闭，所以我们只需证明 $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in f^{-1}(a,+\infty)\}\in\mathcal{F}$ 即可，由 f 连续知，开集的原像是开集，故 $f^{-1}(a,+\infty)$ 是开集，由开集结构定理知，$\exists\{I_k\}$ 为至多不可数个开区间，使得

$$f^{-1}(a,+\infty)=\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

所以

$$\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in f^{-1}(a,+\infty)\}=\bigcup_{k}\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in I_k\}$$

因为开区间 $I_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，所以 $X^{-1}(I_k)=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in I_k\}\in\mathcal{F}$，由 σ 代数对可数并封闭知，$\{\omega: X(\omega)=f^{-1}(a,+\infty)\}\in\mathcal{F}$，进而它的补集 $\{f(X)\le a\}\in\mathcal{F}$，由 a 的任意性知 $f(X)$ 也是随机变量 □

习题 1.5

T1(2)

解 设 $t=e^{-x}$，则 $\mathrm{d}t=-e^{-x}\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}x$，则 $e^{-x-e^{-x}}=e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}=te^{-t}$，所以

$$1=C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x-e^{-x}}\mathrm{d}x=C\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=C$$

所以 $C=1$ 时，$f(x)$ 是密度分布函数，且

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-u-e^{-u}}\mathrm{d}u=\int_{e^{-x}}^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=e^{-e^{-x}}$$

T3

证明 由 F 严格单调递增知，F 的反函数存在且也严格单调递增，故 $x\le F(y)\iff F^{-1}(x)\le y$，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\le y)&=\mathbb{P}(F^{-1}(U)\le y)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega: F^{-1}(U(\omega))\le y\})\\&=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega: U(\omega)\le F(y)\})\\&=\mathbb{P}(\{U\le F(y)\})\end{aligned}$$

由于 $\Omega=(0,1),\forall\omega\in\Omega,U(\omega)=\mathbb{P}(U\le\omega)=\omega$，我们有

$$\mathbb{P}(\{U\le F(y)\})=F(y)$$

这是因为 F 是分布函数，值域为 $[0,1]$ □

T4

证明 由题知，(X,Y) 为离散型，所以

$$\mathbb{P}(X\ge x,Y\le y)-\mathbb{P}(X\ge x+1,Y\le y)=\mathbb{P}(X=x,Y\le y)$$

$$\mathbb{P}(X\ge x,Y\le y-1)-\mathbb{P}(X\ge x+1,Y\le y-1)=\mathbb{P}(X=x,Y\le y-1)$$

$$\mathbb{P}(X=x,Y\le y)-\mathbb{P}(X=x,Y\le y-1)=\mathbb{P}(X=x,Y=y)=f(x,y)$$

因此等式成立，记 $X=X_{\min},Y=X_{\max}$

Case 1. 当 $1\le y<x\le 6$ 时，最大值小于最小值，这是不可能的，故

$$f(x,y)=0$$

Case 2. 当 $1 \le x = y \le 6$ 时，$\mathbb{P}(X \ge x+1, Y \le y) = \mathbb{P}(X \ge x, Y \le y-1) = \mathbb{P}(X \ge x+1, Y \le y-1) = 0$，记 $x = y = k$，则

$$f(x,y) = \mathbb{P}(X \ge k, Y \le k) = \mathbb{P}(X = Y = k) = \frac{1}{6^r}$$

Case 3. 当 $1 \le x < y \le 6$ 时，假设 $y = x+k, 1 \le k \le 5$，则 $\{X \ge x, Y \le x+k\}) = \{x, x+1, \cdots, x+k\}^r, \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^r$，所以

$$\mathbb{P}(\{X \ge x, Y \le x+k\}) = \frac{(k+1)^r}{6^r} = \frac{(y-x+1)^r}{6^r}$$

当 $y \ge x+2$ 时

$$f(x,y) = \frac{(y-x+1)^r - 2(y-x)^r + (y-x-1)^r}{6^r}$$

当 $y = x+1$ 时，第四项为零，且 $y-x-1=0$，故也满足公式，因此

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x > y \\ \frac{1}{6^r}, & x = y \\ \frac{(y-x+1)^r - 2(y-x)^r + (y-x-1)^r}{6^r}, & x < y \end{cases}$$

□

T5

解 若是联合分布函数，则当 $x, y \ge 0$ 时，因为

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -e^{-x-y}$$

它是 (X,Y) 在 $x, y \ge 0$ 时的密度函数，但显然它是负值，故 F 不可能是联合分布函数 □

习题 1.6

T1

证明 只需证明 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，有 $\mathbb{P}(g(X) = x, h(Y) = y) = \mathbb{P}(g(X) = x)\mathbb{P}(h(Y) = y)$，由离散型随机变量知，满足 $g(X) = x, h(Y) = y$ 的点至多可数，可设 $\{x_i\}_{i \in I}, \{y_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}$，且 $g(x_i) = x, h(y_i) = y$，因此

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g(X) = x, h(Y) = y) &= \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \sum_{j \in J} \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \mathbb{P}(g(X) = x)\mathbb{P}(h(y) = y) \end{aligned}$$

□

T2

证明 (1). 设 $X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k, i, j, k \in \mathbb{N}^*$，因为 X_1, X_2, X_3 相互独立，所以

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3) &= \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) \\ &= \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j)\mathbb{P}(X_3 = k) \\ &= \sum_{i<j<k} (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) p_1^{i-1} p_2^{j-1} p_3^{k-1} \end{aligned}$$

固定 i,j，对 $k>j$ 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{k=j+1}^{\infty}(1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{j-1}(1-p_3)p_3^{k-1} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_1^{i-1}p_2^{j-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}p_3^{k-1} \\ &= (1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{j}\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{P}(X_1<X_2<X_3)=\sum_{i<j}(1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{j}$$

固定 i，对 $j>i$ 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{j=i+1}^{\infty}(1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{j} &= (1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}\frac{1}{p_2}\sum_{j=i+1}^{\infty}(p_2p_3)^{j} \\ &= \frac{(1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{i}p_3^{i+1}}{(1-p_2p_3)}\end{aligned}$$

最后对 i 从 1 到无穷求和即得

$$\mathbb{P}(X_1<X_2<X_3)=\frac{(1-p_1)(1-p_2)p_2p_3^2}{(1-p_2p_3)(1-p_1p_2p_3)}$$

(2).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1\le X_2\le X_3) &= \sum_{i\le j\le k}(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{k-1} \\ &= \sum_{i\le j}\sum_{k=j}^{\infty}(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{k-1} \\ &= \sum_{i<j}(1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{j-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-p_1)(1-p_2)p_1^{i-1}p_2^{i-1}p_3^{i-1}}{(1-p_2p_3)} \\ &= \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_2p_3)(1-p_1p_2p_3)}\end{aligned}$$

□

T3

证明 由分布函数一致知，它们的密度函数 $f(x)$ 也一致，且除去有限多个点，$f(x)=F'(x)$，由 $X_1<X_2<X_3<X_4<X_5$ 知

$$x_5\in\mathbb{R},x_4\in(-\infty,x_5),x_3\in(-\infty,x_4),x_2\in(-\infty,x_3),x_1\in(-\infty,x_2)$$

由因为它们独立，所以联合密度函数 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\prod_{i=1}^{5}f(x_i)$ 所以

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_5}\int_{-\infty}^{x_4}\int_{-\infty}^{x_3}\int_{-\infty}^{x_2}f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_5}\int_{-\infty}^{x_4}\int_{-\infty}^{x_3}F(x_2)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5\end{aligned}$$

因为 $\int_{-\infty}^{x_3} F(x_2)f(x_2)\mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{x_3} F(x_2)\mathrm{d}F(x_2) = \frac{1}{2}F^2(x_2)\Big|_{-\infty}^{x_3} = \frac{1}{2}F^2(x_3)$ 所以

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_5}\int_{-\infty}^{x_4} F^2(x_3)f(x_3)f(x_4)f(x_5)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_5} F^3(x_4)f(x_4)f(x_5)\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5 \\
&= \frac{1}{4!}\int_{-\infty}^{+\infty} F^4(x_5)f(x_5)\mathrm{d}x_5 \\
&= \frac{1}{5!}F^5(x_5)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{5!}
\end{aligned}$$

□

T4

解 设 $X \sim B(1, 0.5), Y \sim B(1, 0.5), Z \sim B(2, 0.5)$，且 X, Y, Z 相互独立，经计算

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(X+Y=0) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(X+Y) = 1 = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X+Y) = 2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(Z=2) = \frac{1}{4}$$

因此 Z 与 $X+Y$ 同分布，但 Y 的值域为 $\{0,1\}$，$Z-X$ 的值域为 $\{-1,0,1,2\}$，故显然不同分布 □