概率论第十二周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 17 日

习题 5.4

T1

证明 因为 $\mathbb{E}[X_k]=0, \mathrm{Var}(X_k)=1, \forall k \in \mathbb{N}$, 且对于 $\forall m \geq 3$, 有 $\mathbb{E}[|X_k|^m]=1$, 由定理 5.4.1 知

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right] \to \gamma_{2k}=(2k-1)!!$$

所以存在一直上界 $M_k, \text{s.t.} \, \forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right] \leq M_k$$

对给定的 δ, 取正整数 k, 使得 $2k\delta > 1$, 由 *Markov* 不等式

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > n^{\delta}\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right]}{n^{2k\delta}\varepsilon^{2k}} \leq \frac{M_k}{\varepsilon^{2k}} \cdot \frac{1}{n^{2k\delta}}$$

由调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} > \varepsilon\right) \leq \frac{M_k}{\varepsilon^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k\delta}} < +\infty$$

由 *Borel-Cantelli* 引理即得

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

□

T2

证明 (1). 标准正态分布：设 $X \sim N(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k})^{-\frac{1}{2k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} [(2k-1)!!]^{-\frac{1}{2k}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(2k)!}{(2k)!!}\right)^{-\frac{1}{2k}} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(2k)!}{k!}\right]^{-\frac{1}{2k}}
\end{aligned}$$

由 *Stirling* 公式

$$\left[\frac{(2k)!}{k!}\right]^{-\frac{1}{2k}} \sim \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = +\infty$, 故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k})^{-\frac{1}{2k}} = +\infty$, 故标准正态分布的矩满足 *Carleman* 条件

因为

$$\frac{1}{k}(\gamma_{2k})^{\frac{1}{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}k}\left[\frac{(2k)!}{k!}\right]^{\frac{1}{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}k} \cdot \sqrt{\frac{2}{e}} \cdot k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{ek}} \to 0$$

因此标准正态分布的矩满足 *Riesz* 条件

(2). 由于 $\rho(x)$ 是偶函数, 所以奇数阶矩为零, 下求偶数阶矩

$$\begin{aligned}
\gamma_{2k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2k}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=2\sin\theta} \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^{2k}\sin^{2k}\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2^{2k+2}}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\theta\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2}\theta\mathrm{d}\theta\right) \\
&\xlongequal{\text{Walls}} \frac{2^{2k+2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} - \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\right) \\
&= 2^{2k+1} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} = 2^{2k+1} \cdot \frac{(2k)!}{2^k k! \cdot 2^{k+1}(k+1)!} \\
&= \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{k}(\gamma_{2k})^{\frac{1}{2k}} \sim \frac{2}{k} \to 0$$

因此 *Wigner* 半圆律的矩满足 *Riesz* 条件 □

T4

证明 取 $\{Y_k\}$ i.i.d, 且 $Y_1 \sim N(0,1)$, 选取 $0-3$ 阶导数均有界的连续函数全体做测试函数

构造中间序列

$$\zeta_{nk} = \sum_{1\le i<k} X_i + \sum_{k<i\le n} Y_i, \quad 1 \le k \le n-1$$

注意到 $\zeta_{n1} + Y_1 = nY_1 = \sqrt{n}Y$, 其中 $Y \sim N(0,1)$. 则同讲义的证明过程我们有

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[g\left(\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{n}}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[g\left(\frac{\zeta_{nk}+X_k}{\sqrt{n}} - \frac{\zeta_{nk}+Y_k}{\sqrt{n}}\right)\right]\right)$$

且由 ζ_{nk} 与 X_k, Y_k 独立，所以

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[g'\left(\frac{\zeta_{nk}}{\sqrt{n}}\right)(X_k - Y_k)\right] = 0 \\ \mathbb{E}\left[g''\left(\frac{\zeta_{nk}}{\sqrt{n}}\right)(X_k^2 - Y_k^2)\right] = 0 \end{cases}$$

记

$$h(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| g(x+t) - g(x) - g'(x)t - \frac{1}{2}g'(x)t^2 \right|$$

则同讲义过程，我们只需估计

$$\begin{cases} I_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[h\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ I_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[h\left(\frac{Y_k}{\sqrt{n}}\right)\right] \end{cases}$$

对于 $I_n^{(2)}$，由 $h(t) \le K|t|^3$，我们有

$$I_n^{(2)} \le \frac{K}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|Y_k|^3] = \frac{K}{n^{\frac{3}{2}}} \mathbb{E}[|Y|^3] \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{K\mathbb{E}[|Y|^3]}{n^{\frac{1}{2}}}$$

对于 $I_n^{(1)}$，同理有

$$I_n^{(1)} \le \frac{K}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k|^3] = \frac{K\mathbb{E}[|X_1|^3]}{n^{\frac{1}{2}}}$$

所以

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \le t\right) - \Phi(t) \right| = O(n^{-\frac{1}{2}})$$

真尽力了. 我不会做，不知道 $\frac{1}{8}$ 是咋来的 □