实分析第十三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 29 日

作业 13A

T1.

证明 不妨设 $[a,b]=[0,1]$，否则考虑 $F_1(t)=F((b-a)t+a)$ 即可，再结合 *Lebesgue* 测度的伸缩性质和平移性质

(1). 取 C 为类 *Cantor* 集且 $m(C)>0$，设 $F(x)=\int_0^x \chi_K(t)\mathrm{d}t, K=C^c$，则

• F 单调递增：对 $\forall 0\le x<y\le 1, \exists x_1,y_1, \text{s.t. } x<x_1<y_1<y$，且 $(x_1,y_1)\subset K$，所以

$$F(x)-F(y)=\int_x^y \chi_K(x)\mathrm{d}x \ge \int_{x_1}^{y_1} 1\mathrm{d}x = y_1-x_1>0$$

• $F'(x)=0$ a.e $x\in C$：因为 a.e $x\in C$ 是 C 的密度点，由几乎处处知可以排除 $0,1$，所以 $m(B)\to 0$ 时，$B=(B\cap C)\sqcup(B\cap K)$，故

$$\lim_{\substack{B\ni x\\ m(B)\to 0}} \frac{m(C\cap B)}{m(B)}=1 \Longrightarrow \lim_{\substack{B\ni x\\ m(B)\to 0}} \frac{m(B\cap K)}{m(B)}=0$$

对上述的 x

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\chi_K(x)\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\frac{m([x-h,x+h]\cap K)}{m([x-h,x+h])}=0$$

综上对 a.e $x\in C$，$F'(x)=0$，故考虑 $C_1=\{x\in C: F'(x)=0\}, m(C_1)=m(C)>0, F'(x)=0, \forall x\in C_1$

(2). 设 $K=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$，由 $F\nearrow$ 知 $F(K)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\big(F(a_i),F(b_i)\big)$，由逐项积分定理

$$\begin{aligned}
B-A=F(b)-F(a)&=\int_0^1 \chi_K(t)\mathrm{d}t\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_i}^{b_i}\chi_K(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}\big(F(b_i)-F(a_i)\big)\\
&=m(F(K))
\end{aligned}$$

又因为 $C\sqcup K=[0,1]$，$F(C)\sqcup F(K)=[A,B]$，所以 $m(F(C))=m([A,B])-m(F(K))=0$，由 $m(C)>0$ 知它一定有不可测的子集 $\mathcal{N}$，$F(\mathcal{N})\subseteq F(C)\Longrightarrow m(F(\mathcal{N}))\le m(F(C))=0$，则 $\mathcal{N}$ 即为所求

(3). 记 $Y = F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>0\}, Y_n = F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$，则 $Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$，下面证明 $\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n$ 可测，这样 Y 就可测

假设 $E=\mathcal{O}$ 为开集，由开集结构定理，$\mathcal{O}=\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$，对于每个 $I_i=(a_i,b_i)$，由 F 连续知 $F^{-1}(I_i)=\big(F^{-1}(a_i),F^{-1}(b_i)\big)$，由因为 $F\in AC[a,b]$

$$\begin{cases} F(F^{-1}(b_i))-F(F^{-1}(a_i))=\int_{F^{-1}(b_i)}^{F^{-1}(a_i)} F'(x)\mathrm{d}x \\ F(F^{-1}(b_i))-F(F^{-1}(a_i))=b_i-a_i=m(I_i)\end{cases} \implies m(I_i)=\int_{F^{-1}(I_i)} F'(x)\mathrm{d}x$$

又因为 $F^{-1}(\mathcal{O})=\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}F^{-1}(I_i)$，由可数可加性知

$$m(\mathcal{O})=\sum_{i=1}^{\infty}m(I_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{F^{-1}(I_i)}F'(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}F^{-1}(I_i)}F'(x)\mathrm{d}x=\int_{F^{-1}(\mathcal{O})}F'(x)\mathrm{d}x$$

对于任意的可测集 E，取 G_δ 集 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$ 为 E 的等测包（其中 G_i 是开集），则 $E=G\backslash Z$，其中 $Z=G\backslash E$ 零测，所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\mathcal{O}\supset Z,\text{s.t. } m(\mathcal{O})<\varepsilon$，故

$$\begin{aligned}\varepsilon>m(\mathcal{O})&=\int_{F^{-1}(\mathcal{O})}F'(x)\mathrm{d}x\\ &\geq\int_{F^{-1}(\mathcal{O})\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}}F'(x)\mathrm{d}x\\ &\geq\frac{1}{n}m(F^{-1}(\mathcal{O})\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})\\ &\geq\frac{1}{n}m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})\end{aligned}$$

所以

$$\forall\varepsilon>0,\quad m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})<n\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to0^+$，则 $m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})=0$，故 $F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$ 也可测，所以

$$F^{-1}(E)=F^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i\backslash Z\right)=\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}F^{-1}(G_i)\right)\backslash F^{-1}(Z)$$

$$Y_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left[\left(F^{-1}(G_i)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}\right)\backslash\left(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}\right)\right]$$

为可测集 □

T2.

证明 (1). 由 $f,g\in AC[a,b]$ 知，它们在闭区间上连续，故有界，即 $\exists M>0,\text{s.t. }|f(x)|,|g(x)|\leq M,\forall x\in[a,b]$，且对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对于任意有限多个两两不交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$，只要 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，

就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\frac{\varepsilon}{2M}, \sum\limits_{i=1}^{\infty}|g(b_i)-g(a_i)|<\frac{\varepsilon}{2M}$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)| &\le \sum_{i=1}^{n}|f(b_i)g(b_i)-f(b_i)g(a_i)|+|f(b_i)g(a_i)-f(a_i)g(a_i)| \\ &\le M\sum_{i=1}^{n}|g(b_i)-g(a_i)|+|f(b_i)-f(a_i)|<M\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

即 $fg\in AC[a,b]$

(2). 对 $fg\in AC[a,b]$ 使用 N-L 公式得

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b\big(f(x)g(x)\big)'\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

移项即证（因为 $g',f\in L^1[a,b]$，所以 $fg'\in L^1[a,b]$，所以积分小于无穷，故可以移项） □

T3.

证明 (a). 验证 σ-代数的三条性质

1. $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\mathcal{A}, f^{-1}(Y)=X\in\mathcal{A}$，所以 $\varnothing, X\in f_*(\mathcal{A})$
2. 假设 $\{B_i\}_{i\in I}\subseteq f_*(\mathcal{A})$ 为一族可数集合，则 $\{f^{-1}(B_i)\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{A}$，进而

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)\in\mathcal{A}\Longrightarrow\bigcup_{i\in I}B_i\in f_*(\mathcal{A})$$

3. 假设 $B\in f_*(\mathcal{A})$，则 $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$，进而

$$f^{-1}(B^c)=\big(f^{-1}(B)\big)^c\in\mathcal{A}\Longrightarrow B^c\in f_*(\mathcal{A})$$

(b). 即验证 $f_*\mu$ 满足可数可加性，假设 $\{B_i\}_{i\in I}\subseteq f_*(\mathcal{A})$ 为一族可数集合，则

$$\begin{aligned}f_*\mu\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)&=\mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\right)=\mu\left(\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)\right)\\ &\xlongequal{\mu\text{-可数可加性}}\sum_{i\in I}\mu(f^{-1}(B_i))\overset{\text{def}}{=}\sum_{i\in I}f_*\mu(B_i)\end{aligned}$$

□

T4.

证明 (a). 验证 σ-代数的三条性质

1. $\varnothing, E\subseteq E$ 是 *Lebesgue* 可测的
2. 假设 $\{E_i\}_{i\in I}\subseteq\mathscr{L}_E$ 为一族可数集合，则 $\bigcup\limits_{i\in I}E_i\subseteq E$，且由 *Lebesgue* 可测集的可数并也 *Lebesgue* 可测知，它可测，故 $\bigcup\limits_{i\in I}E_i\in\mathscr{L}_E$

3. 对 $\forall F \in \mathscr{L}_E$，$E^c \overset{\text{def}}{=} E\backslash F$ 也 *Lebesgue* 可测

(b). 旋转不变性：即证明对于任意旋转变换 $T \in \mathrm{SO}_d, \forall E \in \pi_*(\mathscr{L}_B), \sigma(E) = \sigma(T(E))$（其中 $T(E) = \{Tx : x \in E\}$），首先证明 $\pi^{-1}(T(E)) = T(\pi^{-1}(E))$

$$\begin{aligned} x \in \pi^{-1}(T(E)) &\iff \pi(x) \in T(E) \iff T^{-1}\pi(x) \in E \\ &\iff \pi(T^{-1}x) \in E \iff T^{-1}x \in \pi^{-1}(E) \\ &\iff x \in T(\pi^{-1}(E)) \end{aligned}$$

所以，由 *Lebesgue* 测度的旋转不变性

$$\begin{aligned} \sigma(T(E)) &= m(\pi^{-1}(T(E))) = m(T(\pi^{-1}(E))) \\ &= m(\pi^{-1}(E)) = \sigma(E) \end{aligned}$$

有限测度：因为 $\sigma(S) = m(\pi^{-1}(S)) = m(B) < +\infty$ □

作业 13B

T1.

证明 假设 $\overline{\mathcal{M}}$ 上还有一个测度 η 满足 $\eta|_{\mathcal{M}} = \mu$, 对 $\forall \overline{E} = E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, 其中 $E \in \mathcal{M}, \exists N \in \mathcal{N}, \text{s.t. } F \subset N$，通过将 F 替换为 $F\backslash E$，N 替换为 $N\backslash E$，我们可以不妨假设 $E \cap N = \varnothing$，故 $\overline{E} = E \cup F$ 为无交并，所以

$$\eta(\overline{E}) = \eta(E \sqcup F) = \eta(E) + \eta(F) = \mu(E) + \eta(F)$$

又因为 $F \subseteq N$，故 $\eta(F) \leq \eta(N) = \mu(N) = 0$，所以 $\forall \overline{E} \in \overline{\mathcal{M}}, \eta(\overline{E}) = \mu(E) = \overline{\mu}(\overline{E})$，即 $\eta = \overline{\mu}$ □

T2.

证明 设 $\mathcal{I} = \{E \subset \mathbb{R} : E\text{为有限个区间的不交并}\}$，先证 $\mathcal{I}$ 是代数

1. $\varnothing, \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \in \mathcal{I}$

2. 有限交：注意到两个区间的并为一个或两个区间的不交并，对于多个区间的并，两两处理可知它为有限多个区间的不交并，所以对 $\forall E_1 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} I_i, E_2 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{M} I_{N+i}$，对 $E_1 \cup E_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{N+M} I_i$ 进行两两处理知，它有限多个区间的不交并

3. 补集：只需注意到两点：a. 单个区间的补集为空集或一个区间或两个区间的不交并；b. 两个区间的交为空集或一个区间（可能退化为一个点），所以

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} I_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} I_i^c$$

两两处理知，$\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} I_i\right)^c$ 为有限个区间的不交并

又因为 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{I}$，由最小性知 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{I}$，另一方面因为 $\mathcal{A}$ 是由 $\mathcal{E}$ 生成的代数，所以对任意区间的不交并 $E=\bigsqcup_{i=1}^{n} I_n\in\mathcal{I}$，因为 $I_i\in\mathcal{E},1\le i\le n$，由代数对有限交封闭知 $E\subset\mathcal{A}$，故 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{A}$，所以

$$\mathcal{A}=\{E\subset\mathbb{R}:E\text{为有限个区间的不交并}\}$$

□

T3.

证明 验证 $\mu_*(E)$ 满足外测度的三条性质即可

1. 由 $\varnothing\subset\varnothing$ 知，$0\le\mu_*(E)\le\rho(\varnothing)=0$，故 $\mu_*(E)=0$

2. 若 $E_1\subseteq E_2$，则对任意 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{E}$，若 $E_2\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则 $E_1\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，所以

$$\mu_*(E_1)\le\sum_{i=1}^{\infty}\rho(E_j)$$

对右边取下确界得 $\mu_*(E_1)\le\mu_*(E_2)$

3. 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$，对 $\forall\varepsilon>0,\forall i\in\mathbb{N}^*,\exists\{A_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}\subset X,\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{\infty}\rho(A_j^{(i)})\le\mu_*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$，所以 $\{A_j^{(i)}\}_{i,j=1}^{\infty}$ 是 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 的一个可数覆盖，故

$$\begin{aligned}\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)&\le\sum_{i,j=1}^{\infty}\rho(A_j^{(i)})=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\rho(A_j^{(i)})\\&\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu_*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_*(E_i)+\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 即得证

□