复分析第九、十周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 29 日

习题 4.3

T5

解

(1). 存在，考虑 $f(z)=\frac{1}{1+z}\in H\big(B(0,1)\big)$

(2). 不存在，由 f 全纯知 f 连续，所以

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2n-1}\right)$$

但是两个极限一个等于 1，一个等于 0，矛盾！

(3). 存在，考虑 $f(z)=z^2\in H\big(B(0,1)\big)$

(4). 不存在，设 $g(z)=f(z)-z^3$，则 $g\left(\frac{1}{n}\right)=0,\forall n\geq 2$，因此 $g(0)=\lim\limits_{n\to\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)=0$，而 0 是 g 的非孤立零点，因此 $g(z)\equiv 0$，因此 $f(z)=z^3$，但 $f(z)$ 并不满足 $f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$

T6

证明 (1). 设 $z=re^{i\theta},\mathrm{d}z=rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，则 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\mathrm{Re}f(re^{i\theta})]e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{\pi i}\int_{|z|=r}[\mathrm{Re}f(z)]\cdot\frac{r^n}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{r^n}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{r^n}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z+\frac{r^n}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \\
&= r^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\frac{r^n}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\overline{z^{n+1}}\cdot\overline{f(z)}}{r^{2n+2}}\mathrm{d}z \\
&= a_nr^n+\frac{1}{2\pi i\cdot r^{n+2}}\overline{\int_{|z|=r}z^{n+1}f(z)\mathrm{d}z} \\
&= a_nr^n
\end{aligned}$$

(2). 注意到 $\int_0^{2\pi} A(r)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = A(r)\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = 0$，所以

$$\begin{aligned}|a_n|r^n &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[\mathrm{Re}f(re^{i\theta})]e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[\mathrm{Re}f(re^{i\theta})-A(r)]e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A(r)-\mathrm{Re}f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = 2A(r) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \\ &= 2A(r) - \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\right]\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z = 2f(0)$，所以

$$|a_n|r^n \le 2A(r) - 2\mathrm{Re}f(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\square$

T11

证明 首先 $\frac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 全纯，且

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}} = 1$$

即 $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，且 $B_0 = f(0) = 1$，因为 $f(z)(e^z-1) = z$，同时求导得

$$f'(z)(e^z-1) + f(z)e^z = 1$$

$$f''(z)(e^z-1) + 2f'(z)e^z + f(z)e^z = 0$$

使用数学归纳法，假设 $n = k$ 时，有

$$f^{(k)}(0)(e^z-1) + \binom{k}{k-1}f^{(k-1)}(z)e^z + \binom{k}{k-2}f^{(k-2)}(z)e^z + \cdots + \binom{k}{1}f'(z)e^z + \binom{k}{0}f(z)e^z = 0$$

则当 $n = k+1$ 时，对上式求导得

$$f^{(k+1)}(0)(e^z-1) + \binom{k+1}{k}f^{(k)}(z)e^z + \binom{k+1}{k-1}f^{(k-1)}(z)e^z + \cdots + \binom{k+1}{1}f'(z)e^z + \binom{k+1}{0}f(z)e^z = 0$$

因此上式对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 均成立，代入 $z = 0$ 得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = 0$$

$\square$

T14

证明 (1). 由 $f \in H(D)$ 知，对 $a \in D, \exists \varepsilon_a > 0, \text{s.t.}\ f$ 在 $B(a, \varepsilon_a)$ 中可以展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(a) = 0$，故对 $\exists N \gg 1, \text{s.t.}\ \forall n \geq N, |f^{(n)}(a)| < 1$，所以

$$\sqrt[n]{\frac{|f^n(a)|}{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{e}{n \cdot (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} = 0$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}} = 0$$

这就说明 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 的收敛半径为 $+\infty$，因此将定义域扩大为 $\mathbb{C}$ 后的函数记为 $\tilde{f}(z)$，则 $\tilde{f}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，故为整函数，且由唯一性定理知这样的 $\tilde{f}$ 唯一，且 $\tilde{f}|_D = f$

(2). 我们仍记 $\tilde{f} = f$，因为 $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{n!}(z-a)^n$，所以

$$\sum_{n=k+1}^{p} f^{(n)}(z) = \sum_{n=k+1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k+1)}(a) + \cdots + f^{(n+p)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

对任意紧集 $K \subset \mathbb{C}$，记 $M = \max\limits_{z\in K}\{e^{|z-a|}\}$，对 $f^{(n)}(a)$ 使用 *Cauchy* 收敛准则，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，使得对 $\forall p > 0$，均有

$$\left| f^{(N+1)}(a) + \cdots + f^{(N+p)}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

所以对 $\forall p > 0$，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{p} f^n(z) &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+N+1)} + \cdots + f^{(N+p)}}{n!}(z-a)^n \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-a|^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$ 在 $K \subset \mathbb{C}$ 中一致收敛，由 K 的任意知，级数内闭一致收敛 □

习题 4.4

T2

证明 不妨设 $P(z)$ 首一：$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$，取 $R > \max\left\{1, \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$，则当

$|z| \geq R$ 时

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \cdot |z^i| \leq |z|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq |z|^{n-1} R < |z|^n$$

因此 $|P(z)| \geq \left| |z|^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| > 0$，即 $P(z)$ 的根全部落在 $|z| < R$ 中，因为

$$\lim_{z \to \infty} \frac{zP'(z)}{P(z)} = \lim_{n \to \infty} \frac{nz^n + \cdots + a_1 z}{z^n + \cdots + a_0} = n$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right) \mathrm{d}z - n \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{1}{z} \left(\frac{zP'(z)}{P(z)} - n \right) \mathrm{d}z \right| \\ &\leq \max_{|z|=R} \left| \frac{zP'(z)}{P(z)} - n \right| \cdot \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{1}{z} \mathrm{d}z \right| = \max_{|z|=R} \left| \frac{zP'(z)}{P(z)} - n \right| \end{aligned}$$

因为当 $R \to \infty$ 时，$\max\limits_{|Z|=R} \left| \frac{zP'(z)}{P(z)} - n \right| \to 0$，所以

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} \mathrm{d}z = n$$

即当 R 足够大时，上述积分值为 n，且 $P(z)$ 的根都在 $|z| < R$ 中，由辐角原理知 $P(z)$ 有 n 个根□

T3

证明 设 $z = x + iy \in \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$，则 $|e^{-z}| = e^{-x} < 1$，因此若 $z_0 = \lambda - e^{-z_0}$，则 $|z_0 - \lambda| < e^{-z_0} < 1$，即根一定在 $|z - \lambda| = 1$ 内，考虑 $g(z) = z - \lambda, f(z) = z - \lambda + e^{-z}$，则当 $|z - \lambda| = 1$ 时

$$|f(z) - g(z)| = |e^{-z}| < 1 = |z - \lambda| = |g(z)|$$

因此 f 和 g 在 $|z - \lambda| = 1$ 内根的个数相同，而 $g(z)$ 在 $|z - \lambda| = 1$ 内有一个根 $z = \lambda$，由上分析知 $f(z)$ 在 $|z - \lambda| \leq 1$ 内有一个根，在 $|z - \lambda| > 1$ 内无根，$f(z)$ 只有一个根，且由介值原理知，$f(0) = 1 - \lambda < 0, f(2\lambda) = \lambda + e^{-\lambda} > 0$，故 $\exists x_0 \in (0, 2\lambda), \text{s.t. } f(x_0) = 0$，即 x_0 是 f 唯一的实根 □

T5

证明 不妨设 $P(z)$ 首一：$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$，取 $R > \max\left\{1, \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$，则当 $|z| \geq R$ 时

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \cdot |z^i| \leq |z|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq |z|^{n-1} R < |z|^n$$

因此 $|P(z)| \geq \left| |z|^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| > 0$，即 $P(z)$ 的根全部落在 $|z| < R$ 中，且设 $g(z) = z^n$，则当 $|z| = R$

时

$$|P(z)-g(z)|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}a_iz^i\right|<|z|^n=|g(z)|$$

因此 P,g 在 $|z|=R$ 内部的零点个数相同，而 $g(z)=z^n$ 在 $|z|=R$ 中根 $z=0$（n 重），故 $P(z)$ 一共有 n 重零点 □

T11

解

1. 考虑 $f(z)=z^9-2z^6+z^2-8z-2, g(z)=-8z$,则 $|f(z)-g(z)|=|z^9-2z^6+z^2-2|\le 6<8=|g(z)|$，而 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中有一个零点，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中有一个零点
2. 考虑 $f(z)=2z^5-z^3+3z^2-z+8, g(z)=8$,则 $|f(z)-g(z)|=|2z^5-z^3+3z^2-z|\le 7<8=|g(z)|$，而 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中无零点，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中有一个零点
3. 考虑 $f(z)=z^7-5z^4+z^2-2, g(z)=-5z^4$，则 $|f(z)-g(z)|=|z^7+z^2-2|\le 4<5=|g(z)|$，而 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中有四个零点，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中有四个零点
4. 考虑 $f(z)=e^z-4z^n+1, g(z)=-4z^n$，则 $|f(z)-g(z)|=|e^z+1|\le e+1<4=|g(z)|$，而 $g(z)=z^n$ 在 $|z|<1$ 中有 n 个零点，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中有 n 个零点

□

T12

证明 考虑 $g(z)=f(z)-z, h(z)=-z$，则当 $|z|=1$ 时，$|g(z)-h(z)|=|f(z)|<1=|h(z)|$，所以 $g(z)$ 与 $h(z)$ 在 $|z|<1$ 中零点个数相同，即 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中有一个不动点 □

T13

证明

1. 因为 $|z|=1$ 时，有 $\left|\frac{a_k-z}{1-\overline{a}_kz}\right|=1$，设 $g(z)=f(z)-b$，则 $|z|=1$ 时，$|g(z)-f(z)|=|b|<1=|f(z)|$，因此 $g(z)$ 与 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 内的根个数相同，而显然 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中的零点为 $a_1,\cdots,a_n$，因此 $g(z)$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根

2. 设 $h(z)=b, k(z)=b-f(z)$，则 $|z|=1$ 时，$|k(z)-h(z)|=|f(z)|=1<|b|$，所以 $b-f(z), b$ 在 $B(0,1)$ 中的根的个数相同，即都为 0 个，且在 $|z|=1$ 上，$|f(z)|=1$，故 $f(z)-b\neq 0$，因此 $f(z)-b$ 的零点都在 $B(\infty,1)$ 上，故只需说明 $f(z)-b$ 恰有 n 个零点即可

   因为当 $z\neq\frac{1}{\overline{a}_k}, 1\le k\le n$ 时

   $$f(z)-b=0\iff\prod_{i=1}^n(a_k-z)-b\prod_{k=1}^n(1-\overline{a}_kz)=0$$

   且右式首项系数为 $(-1)^n(1-b\overline{a_1\cdots a_k})\neq 0$，所以是一个 n 次多项式，故有 n 个根，只需说明这 n 个根不为 $\frac{1}{\overline{a}_k}, 1\le k\le n$ 即可，当 $z=\frac{1}{\overline{a}_k}$ 时，$b\prod_{k=1}^n(1-\overline{a}_kz)=0$，而 $\prod_{i=1}^n(a_k-z)$ 的零点全在 $|z|<1$ 内，故当 $z=\frac{1}{\overline{a}_k}$ 时，$|z|>1$，所以右式不为零，即 $f(z)-b$ 恰有 n 个零点 □