复分析第八周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 18 日

习题 4.1

T2

证明 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，依题意可设 $|S_n|\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$，则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(S_k-S_{k-1})b_k\right|\\&=\left|-S_nb_{n+1}+S_{n+p}b_{n+p}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(b_k-b_{k+1})\right|\\&\le M(|b_{n+1}|+|b_{n+p}|)+M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|<+\infty$ 知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1,N_2,\text{s.t.}$

$$\begin{cases}\forall n\ge N_1,|b_n|<\frac{\varepsilon}{4M}\\ \forall n\ge N_2,\sum\limits_{k=n}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|<\frac{\varepsilon}{2M}\end{cases}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则对 $\forall n\ge N$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\le M\cdot\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

由 *Cauchy* 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n<+\infty$

Dirichlet 判别法：若 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界，$\{b_n\}$ 单调减趋于零，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。首先 $\{a_n\}$ 满足条件 *1*，其次 $b_n\searrow 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|=\sum_{n=1}^{\infty}b_n-b_{n+1}=b_1-\lim_{n\to\infty}b_n=b_1<+\infty$$

所以 $\{b_n\}$ 满足条件 *2,3*，故它是 *Dirichlet* 判别法的推广

Abel 判别法：若 $\{b_n\}$ 单调有界，且级数 $\{a_n\}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。首先由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知，$\{a_n\}$ 满足条件 *1*，其次 b_n 单调有界，可以考虑 $\{b_n - b\}$，同上它满足条件 *2,3*，故它也是 *Abel* 判别法的推广 □

T11

证明 我们将 *T2* 的结论推广到函数项级数：设定义在点集 K 上的函数项级数 $\{a_n(z)\},\{b_n(z)\}$ 满足条件

1. $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(z)\right\}$ 一致有界
2. $\{b_k(z)\}$ 在 K 上一致收敛至 0
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k(z) - b_{k+1}(z)| < +\infty$

证明与 *T2* 完全一致：记 $\{a_k(z)\}$ 的部分和为 $S_n(z)$，则 $\exists M > 0, \text{s.t.}\ \forall n \in \mathbb{N}^*, |S_n(z)| \le M$，对 $\forall z \in K$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(z)b_k(z)\right| &= \left|-S_n(z)b_{n+1}(z) + S_{n+p}(z)b_{n+p}(z) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(z)(b_k(z) - b_{k+1}(z))\right| \\ &\le M(|b_{n+1}(z)| + |b_{n+p}(z)|) + M\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(z) - b_{k+1}(z)|\end{aligned}$$

由条件 2,3 知，可以选取合适的 N，使得

$$\begin{cases}\forall n \ge N, |b_n(z)| < \frac{\varepsilon}{4M}, & \forall z \in K \\ \forall n \ge N, \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |b_k(z) - b_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{2M}, & \forall z \in K\end{cases}$$

因此

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(z)b_k(z) \le M \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad \forall z \in K$$

由 *Cauchy* 收敛准则知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(z)b_k(z)$ 在 K 上一致收敛

回到本题，设 $K \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ 是紧子集，则它一定有界：$\exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.}\ K \subseteq B(0,N)$，记 $a_n(z) = (-1)^{n-1}, b_n(z) = \frac{1}{n-z}$，则

1. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(z)\right| \le 1$
2. 当 n 足够大时，$|n-z| > n-N > 0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n-z}\right| \le \frac{1}{n-N}$，则对 $\forall z \in K, \forall \varepsilon > 0$，取 $N_\varepsilon = N+1+\frac{1}{\varepsilon}$，则 $|b_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in K$，即 $\{b_n(z)\}$ 在 K 上一致收敛至 0

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n(z)-b_{n+1}(z)| = \sum\limits_{n=1}^{N}|b_n(z)-b_{n+1}(z)| + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|b_n(z)-b_{n+1}(z)|$，且当 $n \geq N+1$ 时，对 $\forall z \in K, |n-z| \geq n-N$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}|b_n(z)-b_{n+1}(z)| &= \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|(n-z)(n+1-z)|}\\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(n-N)(n+1-N)}\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{(n-N)(n+1-N)} \sim \frac{1}{n^2}$，由比较判别法知它收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n(z)-b_{n+1}(z)| \leq \max\left\{\sum_{n=1}^{N}|b_n(z)-b_{n+1}(z)|\right\} + \sum_{n=N+1}^{\infty}|b_n(z)-b_{n+1}(z)| < +\infty$$

上式第一项能取 max 是因为紧集上的连续函数可取得有限的上界

所以，由上面证明的结论以及紧集 $K \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ 的任意性知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-z}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ 上内闭一致收敛 □

习题 4.2

T2

解 (a). 因为

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = n! \\ 0, & k \neq n! \end{cases}$$

所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

故收敛半径 $R = 1$

(b). 因为

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

故收敛半径 $R = +\infty$

(c). 因为

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty}[3+(-1)^n] = 4$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{4}$

(d). 因为

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\frac{n}{e}} = e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2n}}n^{\frac{1}{2n}}} = e$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$ □

T3

证明 依题意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz_0^n|<+\infty$，所以 $\forall z\in\overline{B(0,|z_0|)},|z|\le|z_0|$，所以

$$|a_nz^n|\le|a_nz_0^n|,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

由 *Weierstrass* 判别法知，它在 $\overline{B(0,|z_0|)}$ 上绝对一致收敛 □

T8

证明 (1). 由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=R,R<+\infty$ 知，$\exists M>0,\mathrm{s.t.}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a_n}\le M\Longrightarrow a_n\le M^n$，所以

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{n!}}\le\sqrt[n]{\frac{M^n}{n!}}$$

两边同时取上极限得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{a_n}{n!}}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{N^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{\frac{n}{e}\cdot(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{eM}{n}=0$$

因此收敛半径 $R=+\infty$，所以 $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，故它是整函数

(2). 因为 $\varphi^{(n)}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{k!}z^k$，又由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中收敛知，$\exists M>0,\mathrm{s.t.}\ a_nR^n\le M,\forall n\in\mathbb{N}$，所以

$$|\varphi^{(n)}(z)|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M}{R^{n+k}}\cdot\frac{|z|^k}{k!}\le\frac{M}{R^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{|z|}{R}\right)^k}{k!}=\frac{Me^{\frac{|z|}{R}}}{R^n},\quad\forall z\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}$$

□

习题 4.3

T2

解 因为 $e^{\frac{z}{1-z}}=e^{-1}\cdot e^{\frac{1}{1-z}}$，$f(z)=\frac{1}{1-z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的唯一奇点为 $z=1$，则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内可展开为幂级数，求导得 $f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=f(z)\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$，即

$$(1-z)^2f'(z)-f(z)=0$$

对上式继续求导得

$$(1-z)^2f''(z)+(2z-3)f'(z)=0$$

$$(1-z)^2f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0$$

由数学归纳法可知

$$(1-z)^2f^{(n+2)}(z)+\big((2n+2)z-(2n+3)\big)f^{(n+1)}(z)+n(n+1)f^{(n)}(z)=0$$

代入 $z=0$，即

$$f^{(n+2)}(0)-(2n+3)f^{(n+1)}(0)+n(n+1)f^{(n)}(0)=0,\forall n\geq 0$$

由于 $f(0)=e$，所以代入可以解得 $f'(0)=e,f''(0)=3e,f'''(0)=13e,\cdots$，故

$$e^{\frac{z}{1-z}}=e^{-1}\left(e+ze+\frac{3e}{2!}z^2+\frac{13e}{3!}z^3\cdots\right)=1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots$$

则 $e^{\frac{z}{1-z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$，其中 a_n 满足 $a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+n(n+1)a_n=0$，但是我不会求通项 □

T3

证明 (a). 右侧不等式即为 $e^x-1\leq xe^x,\forall x\geq 0$，同除 e^x 得 $1-e^{-x}\leq x$，即 $e^{-x}\geq -x+1$

对于左侧不等式，由 $Taylor$ 展开（对 $\forall z\in\mathbb{C}$ 均成立）

$$|e^z-1|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-1$$

(b). 因为

$$\begin{aligned}|e^z-1|&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}\\&=|z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!}<|z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\\&=|z|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1\right)=(e-1)|z|\end{aligned}$$

另一方面

$$|e^z-1|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|=|z|\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\right|$$

因此只需证明 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\right|>3-e$，因为

$$\begin{aligned}3-e&=3-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\\&<1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!}\leq\left|1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\right|\\&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\right|\end{aligned}$$

□