实分析第一周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 1 日

T1.

证明 对于任意 $\varphi: X \to \{0,1\}$，我们定义 X 的子集 $E_\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : \varphi(x) = 1\}$，考虑映射

$$\begin{aligned} \sigma : 2^X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \varphi &\longmapsto E_\varphi \end{aligned}$$

单射：若 $E_\varphi = E_\psi$，则 $\forall x \in E_\varphi = E_\psi, \varphi(x) = \psi(x) = 1$，反之，若 $x \notin E_\varphi = E_\psi$，则 $\varphi(x) = \psi(x) = 0$，所以 $\varphi = \psi$，故为单射

满射：对 $\forall E \subseteq \mathcal{P}(X)$，考虑映射 $\phi : X \to \{0,1\}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

则 $\sigma(\phi) = E$，故为满射，因此 $\mathcal{P}(X)$ 和 2^X 之间存在一个双射 □

T2.

证明

1. 因为

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c &\iff \forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha \\ &\iff \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha^c \\ &\iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \end{aligned}$$

所以

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

2. 因为

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c &\iff x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \\ &\iff \exists \alpha \in I, x \notin A_\alpha \\ &\iff \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha^c \\ &\iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \end{aligned}$$

所以

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

□

T3.

证明

1.

$$
\begin{aligned}
x \in \limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{j\geq 1}\bigcup_{i\geq j} A_i &\iff \forall j \in \mathbb{N}^*, x \in \bigcup_{i\geq j} A_i \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ with } N > n, \text{s.t. } x \in A_N \\
&\iff \exists\text{无穷多个 } N, \text{s.t. } x \in A_N \\
&\iff x \in \{x : x \in A_i\text{无穷多次发生}\}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
x \in \liminf_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{j\geq 1}\bigcap_{i\geq j} A_i &\iff \exists j_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } x \in \bigcap_{i\geq j_0} A_i \\
&\iff x \in A_i, \forall i \geq j_0 \\
&\iff x \in \{x : \text{从某时刻起}x \in A_i\text{一直发生}\}
\end{aligned}
$$

□

T4.

证明 (1). 对 $\forall x \in \{x : f(x) \leq a\}$，则对 $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(x) < a + \frac{1}{k}$，即

$$
x \in \left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}
$$

因此 $\{x : f(x) \leq a\} \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}$；另一方面，对 $\forall x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}$，则对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，有

$$
x \in \left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\} \Rightarrow f(x) < a + \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^*
$$

令 $k \to \infty$，则 $f(x) \leq a$，因此 $x \in \{x : f(x) \leq a\}$，即 $\{x : f(x) \leq a\} \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}$，综上我们有

$$
\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}
$$

(2). 对 $\forall x \in \{x : f(x) < a\}$，则 $\exists k \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } f(x) \leq a - \frac{1}{k}$（假设对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 都不成立，即 $f(x) > a - \frac{1}{k}$ 对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 都成立，则令 $k \to \infty$ 可知，$f(x) \geq a$，这与 $f(x) < a$ 矛盾!），所以 $x \in \left\{x : f(x) \leq a - \frac{1}{k}\right\}$，因此我们有 $\{x : f(x) < a\} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) \leq a - \frac{1}{k}\right\}$；另一方面，对 $\forall x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) \leq a - \frac{1}{k}\right\}$，则

$$
\exists k_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } f(x) \leq a - \frac{1}{k_0} < a \Rightarrow x \in \{x : f(x) < a\}
$$

因此 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) \leq a - \frac{1}{k}\right\} \subseteq \{x : f(x) < a\}$，综上我们有

$$
\{x : f(x) < a\} \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x) \leq a - \frac{1}{k}\right\}
$$

□

T5.

证明 (1). 我们将矩体 $R_1, \cdots, R_N$ 的所有边进行无限延拓后得到的网络，这样我们就得到得到有限个 R 中几乎不交的新矩体，记作 $\tilde{R}_1, \cdots, \tilde{R}_M$，以及集合 $\{1, 2, \cdots, M\}$ 的一个划分 $J_1, \cdots, J_N$，即

$$R = \bigcup_{i=1}^{M} \tilde{R}_i, \quad \{1, 2, \cdots, M\} = \bigsqcup_{i=1}^{N} J_i$$

其中 $k \in J_i \iff \tilde{R}_k \in R_i$。对于矩体 R，我们有 $|R| = \sum\limits_{k=1}^{M} |\tilde{R}_j|$，这是因为上述操作相当于对 R 各分量的区间进行了分割，且每个 $\tilde{R}_j$ 都由新的分割得到的区间的乘积相乘，因此把 $\tilde{R}_j$ 的体积相加时，我们实际上就是对这些由此产生的区间长度的乘积求和；且这对其它矩体 $R_1, R_2, \cdots, R_N$ 也成立，因此

$$|R| = \sum_{j=1}^{M} |\tilde{R}_j| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k \in J_i} |\tilde{R}_k| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|$$

(2). 同 (1)，我们考虑将 $R_1, \cdots, R_N$，以及 R 的所有边进行无限延拓得到的网络，记包含于 $\bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$ 中的分割后得到的几乎不交的新矩体为 $\tilde{R}_1, \cdots, \tilde{R}_M$，则我们有

$$\bigcup_{i=1}^{N} R_i = \bigcup_{k=1}^{M} \tilde{R}_k$$

因为 $R \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$，所以 $\exists \{k_1, \cdots, k_l\} \subseteq \{1, 2, \cdots, M\}, \text{s.t.}$

$$R = \bigcup_{i=1}^{l} \tilde{R}_{k_i}$$

（这是因为我们也将 R 的所有边进行延伸）因此

$$|R| = \sum_{i=1}^{l} |\tilde{R}_{k_i}| \leq \sum_{k=1}^{M} |\tilde{R}_k| = \sum_{i=1}^{N} |R_i|$$

□

T6.

证明 (a). 假设开圆盘 D 可以写成开矩形的不交并，即存在一族开矩体 $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}, \text{s.t.}$

$$D = \bigsqcup_{\alpha \in I} R_\alpha$$

因此我们有 $\partial D = \partial \left(\bigsqcup\limits_{\alpha \in I} R_\alpha \right)$；设 $x \in \partial D = \partial \left(\bigsqcup\limits_{\alpha \in I} R_\alpha \right)$，由于 R_α 是无交并，所以

$$\partial \left(\bigsqcup_{\alpha \in I} R_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} \partial R_\alpha$$

设 $x \in \partial D$，则 $\exists R_\alpha, \text{s.t.}\ x \in \partial R_\alpha$，因为

$$\partial R_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \partial R_\alpha = \partial \left(\bigsqcup_{\alpha \in I} R_\alpha \right) = \partial D$$

这就推出 R_α 四条边都在圆周上，但这显然是矛盾的！因此开圆盘不可以写成开矩形的不交并

$(b).(\Leftarrow)$: 若 Ω 是一个开矩体，则显然它可以用它自身来表示

$(\Rightarrow)$: 假设 $\exists\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}, \text{s.t.}\ \Omega=\bigsqcup\limits_{\alpha\in I} R_i$，不妨设非空指标集 I 的基数大于 1，设 $\alpha_0\in I$，由于任意个开集的并集仍为开集，所以我们可以有

$$\Omega=R_{\alpha_0}\sqcup\left(\bigsqcup_{\substack{\alpha\in I\\ \alpha\neq\alpha_0}} R_\alpha\right)$$

且 R_{α_0}，$\bigsqcup\limits_{\substack{\alpha\in I\\ \alpha\neq\alpha_0}} R_\alpha$ 都是非空开集，这与 Ω 连通矛盾！因此 I 的基数等于 1，故 $\Omega=R$，即 Ω 是开矩体 $\square$