概率论第一周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 1 日

习题 1.1

T1

解 用 $1,2,3,4,5$ 表示这五卷书，用五元数组 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), a_i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall i$ 表示事件“第 a_1 卷书被放到第 i 个位置，$i=1,2,3,4,5$”，则

$$\Omega = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)|(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\text{是}(1,2,3,4,5)\text{的一个置换}\}, \quad |\Omega| = 5!$$

(1). 设 A 表示事件“第一卷出现在最两侧”，则

$$A = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)|a_1 = 1\text{或}a_5 = 1\}, \quad |A| = 2\times 4!$$

所以 $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2\times 4!}{5!} = \frac{2}{5}$

(2). 设 B 表示事件“第一卷及第五卷出现在最两侧”，则

$$B = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)|a_1 = 1, a_5 = 5\text{或}a_1 = 5, a_5 = 1\}, \quad |B| = 2\times 3!$$

所以 $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2\times 3!}{5!} = \frac{1}{10}$

(3). 设 C 表示事件“第一卷或第五卷出现在最两侧”, A' 表示事件“第五卷出现在最两侧”, 则 $C = A\cup A', B = A\cap A'$, 且由对称性，$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A')$，因此

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A\cup A') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') - \mathbb{P}(A\cap A') = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

T3

Proof 设 $A, B \in \mathcal{F}$，则 $A^c, B^c \in \mathcal{F}$，由 σ 代数对可数并封闭知，取 $A_1 = A^c, A_2 = B^c, A_k = \varnothing, k \geq 3$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A\cap B = (A^c\cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

利用 $A, B\in\mathcal{F} \Rightarrow A\cap B\in\mathcal{F}$，且 $A, B^c \in \mathcal{F}$ 知

$$A\backslash B = A\cap B^c \in \mathcal{F}$$

利用 $A, B\in\mathcal{F} \Rightarrow A\backslash B\in\mathcal{F}$，且 $A\cup B, A\cap B \in \mathcal{F}$ 知

$$A\triangle B = (A\cup B)\backslash(A\cap B) \in \mathcal{F}$$

$\square$

T5

Proof 当 $n=1$ 时，命题平凡成立；当 $n=2$ 时，$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ 上课已证，假设 $n=k-1,k\geq 3$ 时命题成立，则当 $n=k$ 时

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_j\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)\cup A_k\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)+\mathbb{P}(A_k)-\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)\cap A_k\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)+\mathbb{P}(A_k)-\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}(A_j\cap A_k)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j})\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k-1}\mathbb{P}((A_{i_1}\cap A_k)\cap\cdots\cap(A_{i_j}\cap A_k))+\mathbb{P}(A_k)\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j})\\
&\qquad +\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k-1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\cap A_k)+\mathbb{P}(A_k)\\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j})
\end{aligned}$$

由数学归纳法知，*Jordan* 公式对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 均成立 $\square$

T6

Proof 对 $\forall r\in\mathbb{N}^*,\mathbb{P}(A_r^c)=1-\mathbb{P}(A_r)=0$，因为 $\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i^c\right\}\nearrow\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^c$，且对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$0\leq\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i^c)=0$$

令 $n\to\infty$，则

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^c\right)=1-\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c\right)=1$$

$\square$