实分析第十一周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 8 日

T1.

证明 由 $f \in L^1([a,b])$，所以对任意开球 B（开区间），我们有 $f\chi_B \in L^1([a,b])$. 即 $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$，所以 f 的 *Lebesgue* 点集合 L_f 是满测集，即

$$\lim_{\substack{x\in B\\ m(B)\to 0}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y = 0 \text{ a.e } x\in(a,b)$$

取 $B=(x-h,x+h)$，则对 $\forall\varepsilon>0, \exists h>0, \text{s.t.} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2}$，故

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\mathrm{d}y - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)-f(x)\mathrm{d}y\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y \le \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \text{ a.e } x\in(a,b)$$

□

T2.

证明 (1) 取 $r > |x| \ge 1$

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\mathrm{d}y \ge \frac{1}{m(B(0,r))}\int_{B(0,r)}|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\ge \frac{1}{m(B(0,x))}\int_{B(0,1)}|f(y)|\mathrm{d}y = \frac{\int_{B(0,1)}|f(y)|\mathrm{d}y}{v_d|x|^d}\end{aligned}$$

因此取 $c = \frac{\int_{B(0,1)}|f(y)|\mathrm{d}y}{v_d}$，由 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 知，$c<+\infty$，再结合先前做过的习题知 $|x|^{-d}, |x|\ge 1$ 不可积，且 $f^* \ge c|x|^{-d}, \forall |x|\ge 1$，故 f^* 不可积

(2). 根据条件，$c=\frac{1}{v_d}$，因此若 $\frac{1}{v_d|x|^d} > \alpha$，则 $f \ge \frac{1}{v_d|x|^d} > \alpha$，即

$$\left\{x : |x|^d < \frac{1}{v_d\alpha}\right\} \subseteq \{f^* > \alpha\}$$

因此当 $\alpha < \frac{1}{v_d}$ 时，对 $\forall x \in \overline{B(0,1)}$，有

$$m(\{f^* > \alpha\}) \geq m\left(\left\{|x| < \frac{1}{\sqrt[d]{v_d\alpha}}\right\}\right) = v_d \cdot \frac{1}{v_d\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

因此取 $c' = 1$ 即可 $\square$

T3.

证明 因为 $E^c \cap [0,1]$ 可测，所以 a.e $x \in E^c \cap [0,1]$ 均为 $E^c \cap [0,1]$ 的密度点，所以

$$\lim_{\substack{B \ni x \\ m(B)\to 0}} \frac{m\big((E^c \cap [0,1]) \cap B\big)}{m(B)} = 1 \text{ a.e } x \in E^c \cap [0,1] \tag{1}$$

取 B 为 $[0,1]$ 中的开区间，因为

$$m\big((E^c \cap [0,1]) \cap B\big) = m(B) - m(E \cap B) \leq (1-\alpha)m(B)$$

即对 $\forall x \in E^c \cap [0,1], \forall B \subset [0,1]$ 满足 $B \ni x$，有 $\frac{m\left((E^c\cap[0,1])\cap B\right)}{m(B)} \leq 1-\alpha$，这与 $m(B) \to 0$ 时极限为 1 矛盾！但 (1) 式又对 a.e $x \in E^c \cap [0,1]$ 成立，故只能是 $m(E^c \cap [0,1]) = 0$，且 $E \subset [0,1]$，即 $m(E) = m([0,1]) - m(E^c \cap [0,1]) = 1$ $\square$