实分析第六周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 3 日

周一

T1.

证明 由单调性知

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\mathrm{d}x \geq \int_{E_\alpha} f\mathrm{d}x \geq \int_{E_\alpha} \alpha\mathrm{d}x = \alpha m(E_\alpha)$$

所以 $m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} f\mathrm{d}x$ $\square$

T2.

证明 记 A 为 f 可积，B 为 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(F_k) < \infty$，$C$ 为 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_{2^k}) < \infty$

首先我们证明一个引理（积分区域可加性的无穷版本）：设 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为可数不交集合 $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$，$f \in L^1(E)$，则

$$\int_E f\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{F_i} f\mathrm{d}x$$

记 $E_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} F_i$，则 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$，且 $E_k \nearrow E$，下面证明 $f\chi_{E_i} \nearrow f\chi_E, \forall x \in \mathbb{R}^d$

若 $x \in E$，则 $\exists N_x \gg 1, \text{s.t.} \forall n \geq N_x, x \in E_n \Longrightarrow f(x)\chi_{E_i}(x) = f(x) = f(x)\chi_E(x), \forall n \geq N_x$，故 $f\chi_{E_i}(x) \nearrow f\chi_E(x)$

若 $x \notin E$，则对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \notin E_n$，所以 $f\chi_{E_i}(x) = 0 = f\chi_E(x), \forall i \in \mathbb{N}^*$，故 $f\chi_{E_i} \nearrow f\chi_E$

这就说明了 $\forall x \in \mathbb{R}^d, f\chi_{E_i} \nearrow f\chi_E$，因此

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\int_{F_i} f\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{F_i} f\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} F_i} f\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\chi_{E_n}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\chi_E\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

第二行到第三行是因为 MCT，接下来回到本题，因为我们假设了 f 处处有限，所以当 k 足够大时，F_k, E_{2^k} 是空集，因此

$$\{f(x) > 0\} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} F_k = \lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=-n}^{\infty} F_k, \quad \{f(x) > 0\} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} E_{2^k} = \lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=-n}^{\infty} E_{2^k}$$

$(A) \Longrightarrow (B)$：由 f 可积知 $\int f\mathrm{d}x < \infty$，因为在 F_k 上有 $f(x) > 2^k$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(F_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{F_k} 2^k \mathrm{d}x &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{F_k} f\mathrm{d}x \\ &= \int_{\coprod\limits_{k=-\infty}^{\infty} F_k} f\mathrm{d}x = \int_{\{f(x)>0\}} f\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f\mathrm{d}x < \infty\end{aligned}$$

第一行到第二行是由刚刚的引理

$(B) \Longrightarrow (A)$：因为在 F_k 上有 $f(x) \leq 2^{k+1}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{F_k} f\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{F_k} 2^{k+1}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{F_k} 2^k \mathrm{d}x < \infty\end{aligned}$$

至此我们证明了 A, B 等价

$(B) \Longleftrightarrow (C)$：因为在 $F_k = E_{2^k} \backslash E_{2^{k+1}}$，且 $E_{2^{k+1}} \subseteq E_{2^k}$，所以 $m(F_k) = m(E_{2^k}) - m(E_{2^{k+1}})$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(F_k) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k [m(E_{2^k}) - m(E_{2^{k+1}})] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_{2^k}) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_{2^{k+1}}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_{2^k}) - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k+1} m(E_{2^{k+1}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_{2^k})\end{aligned}$$

这就说明 $(B)(C)$ 同敛散

(1). 依题意 $a > 0$，因为 $|x|^{-a} > 2^k \iff |x| < 2^{-\frac{k}{a}}$，所以

$$m(E_{2^k}) = \begin{cases} m\big(B(0,1)\big), & k \leq 0 \\ 2^{-\frac{kd}{a}} m\big(B(0,1)\big), & k \geq 0 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_{2^k}) &= \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k m\big(B(0,1)\big) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot 2^{-\frac{kd}{a}} \cdot m\big(B(0,1)\big) \\ &= 2m\big(B(0,1)\big) + m\big(B(0,1)\big)\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\left(1-\frac{d}{a}\right)}\end{aligned}$$

所以 f 可积 $\iff 1 - \frac{d}{a} < 0$，即 $d > a$

(2). 依题意 $b>0$，因为 $|x|^{-b}>2^k \iff |x|<2^{-\frac{k}{b}}$，所以

$$m(E_{2^k})=\begin{cases}0, & k\geq 0\\ \left(2^{-\frac{kd}{a}}-1\right)\cdot m\big(B(0,1)\big)\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^k m(E_{2^k})&=\sum_{k=-\infty}^{-1}2^k\cdot\left(2^{-\frac{kd}{a}}-1\right)\cdot m\big(B(0,1)\big)\\&=m\big(B(0,1)\big)\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{k\left(1-\frac{d}{a}\right)}-m\big(B(0,1)\big)\sum_{-\infty}^{-1}2^k\\&=m\big(B(0,1)\big)\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{k\left(1-\frac{d}{a}\right)}-m\big(B(0,1)\big)\end{aligned}$$

所以 f 可积 $\iff 1-\frac{d}{b}>0$，即 $d<b$ □

T3.

解 考虑

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & x\in\left(0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & x\in\{0\}\cup\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}\quad,\quad f(x)=0,\forall x\in[0,1]$$

下面证明 $f_n(x)\to f(x),\forall x\in[0,1]$：首先若 $x=0$，则 $f(0)=f_n(0)=0$，显然有 $f_n(0)\to f(0)$；假设 $x\in(0,1]$，则 $\exists N_x\gg 1,\text{s.t.}\ \forall n\geq N_x, x>\frac{1}{n}\Rightarrow f_n(x)=0$，所以 $f_n(x)\to f(x)=0$

但是 $\int_{[0,1]}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{n}}n\mathrm{d}x=1$，而 $\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x=0$，故

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}f_k(x)\mathrm{d}x\neq\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x$$

□

T4.

证明 (1). 考虑

$$h(x)=\begin{cases}\max\{f(x),g(x)\}, & f(x)<+\infty, g(x)<+\infty\\ +\infty, & f(x)=+\infty\ \text{ or }\ g(x)=+\infty\end{cases}$$

所以 $f\leq h, g\leq h$，且因为 $f=g$ a.e $x\in E$，所以 $\forall x\in\{x\in E: f(x)=g(x)\}$，有

$$h(x)=\max\{f(x),g(x)\}=f(x)=g(x)$$

所以

$$f=h\ \text{a.e}\ x\in E\iff h-f=0\ \text{a.e}\ x\in E\iff\int_E(h-f)\mathrm{d}x=0$$

同理我们有 $\int_E (h-g)\mathrm{d}x = 0$，因此

$$\begin{cases} \int_E h\mathrm{d}x = \int_E (h-f) + f\mathrm{d}x = \int_E (h-f)\mathrm{d}x + \int_E f\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x \\ \int_E h\mathrm{d}x = \int_E (h-g) + g\mathrm{d}x = \int_E (h-g)\mathrm{d}x + \int_E g\mathrm{d}x = \int_E g\mathrm{d}x \end{cases}$$

即 $\int_E h\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x = \int_E g\mathrm{d}x$

(2). 因为 $f_k \nearrow f$ a.e $x \in E$，记 N 为 E 中 $f_k(x)$ 不单调递增趋于 $f(x)$ 的集合，则 $m(N) = 0$，且 $f_k \nearrow f, \forall x \in E \backslash N$，由 *MCT* 知

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E \backslash N} f_k \mathrm{d}x = \int_{E \backslash N} f\mathrm{d}x$$

因为 $f\chi_{E\backslash N} = f\chi_E$ a.e $x \in E$（这是因为 $m(\{f\chi_{E\backslash N} \neq f\chi_E\}) = m(N) = 0$），同理对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 也有 $f_k\chi_{E\backslash N} = f_k\chi_E$，所以

$$\int_E f_k\mathrm{d}x = \int f_k\chi_E\mathrm{d}x = \int f_k\chi_{E\backslash N}\mathrm{d}x = \int_{E\backslash N} f_k\mathrm{d}x, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

同理 $\int_{E\backslash N} f\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x$，故

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_E f\mathrm{d}x$$

□

周三

T1.

解 (a). 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$，考虑在 $[n, n+1]$ 中构造一个底为 $2^{-2|n|}$，高为 $2^{|n|}$ 的三角形，它的顶点为 n 和 $n + \frac{1}{2^{2|n|}}$，记

$$E_n = \left(n, n + \frac{1}{2^{2n}}\right), \quad E = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} E_n$$

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 2^{3|n|+1} \inf\limits_{y \in E^c} |x-y|, & x \in E_n \\ 0, & x \in E^c \end{cases}$$

因此当 x 位于每个 E_n 中点时，$f(x)$ 取得 E_n 上的最大值，为 $2^{3|n|+1} \cdot \frac{1}{2^{2|n|}} \cdot \frac{1}{2} = 2^{|n|}$，因此在 E_n 上的积分为 $f(x)$ 图像与 E_n 所围成的三角形的面积，即

$$\int_{E_n} f\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2|n|}} \cdot 2^{|n|} = \frac{1}{2^{|n|+1}}$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|+1}} = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}$$

但是在每个 E_n 上，f 的最大值为 $2^{|n|}$，所以

$$\limsup_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

(b). 假设 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)\neq 0$，则存在 $\varepsilon_0>0$（不妨设 $\varepsilon_0>0$，否则考虑 $-f(x)$）s.t. $\forall M>0,\exists |x|>M,\text{s.t. } f(x)\geq\varepsilon_0$，所以我们可以构造一个数列 $\{x_n\}$ 满足：$|x_{n+1}|>|x_n|+1$，且 $\forall n\in\mathbb{N}^*, f(x_n)\geq\varepsilon_0$，具体如下：取 $M=1$，则 $\exists |x_1|>1,\text{s.t. } f(x_1)\geq\varepsilon_0$，取 $M_2=|x_1|+1$，则 $\exists |x_2|>M_2,\text{s.t. } f(x_2)\geq\varepsilon_0$，依次下去即可

由 f 一致连续知，对 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0,\exists\delta'>0,\text{s.t. }\forall |x_1-x_2|<\delta', |f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$，取 $\delta=\min\left\{\delta',\frac{1}{2}\right\}$，则对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，在 $(x_n-\delta,x_n+\delta)$ 上，均有 $f(x)>\frac{\varepsilon_0}{2}$，因此我们得到了无穷多个长度为 2δ，且两两不交的区间，且区间内的点取值均大于 $\frac{\varepsilon_0}{2}$，故 $m\left(\left\{x:f(x)>\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right)=\infty$，由切比雪夫不等式

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}x\geq\frac{\varepsilon_0}{2}m\left(\left\{x:f(x)>\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right)=\infty$$

故 f 不可积，矛盾！因此 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$ □

T2.

证明 假设 $f(x)$ 不满足 $f(x)\geq 0$ a.e $x\in\mathbb{R}$，则 $A\overset{\text{def}}{=}m(\{f<0\})>0$，又因为

$$\left\{f<-\frac{1}{n}\right\}\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{f<-\frac{1}{n}\right\}=\{f<0\}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\left\{f<-\frac{1}{n}\right\}\right)=A\Longrightarrow\exists N\gg 1,\text{s.t. }\forall n\geq N, m\left(\left\{f<-\frac{1}{n}\right\}\right)>\frac{A}{2}$$

因此对于 $E_n=\left\{f<-\frac{1}{n}\right\}$，当 $n\geq N$ 时有

$$\int_{E_n} f\mathrm{d}x\leq\int_{E_n}-\frac{1}{n}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}m(E_n)<-\frac{A}{2n}<0$$

但由 f 可测知，E_n 可测，且不满足 $\int_{E_n} f\mathrm{d}x\geq 0$，故矛盾！因此 $A=m(\{f<0\})=0$ □

T3.

证明 设 $a_j(x)=\chi_{E_j}(x)$，由于

$$\limsup_{j\to\infty} E_j=\{\text{存在无穷多个}j\text{，使得}x\in E_j\}$$

因此 $x\in\limsup\limits_{j\to\infty} E_j\iff\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j(x)=\infty$，所以 $m\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j(x)=\infty\right)=m\left(\limsup\limits_{j\to\infty} E_j\right)$，由逐项积分定理

$$\int\sum_{j=1}^{\infty}a_j(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{\infty}\int a_j(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{\infty}m(E_j)<\infty$$

所以 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j(x) \in L^1(\mathbb{R})$，故它几乎处处有限，即

$$m\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)=\infty\right)=m\left(\limsup_{j\to\infty} E_j\right)=0$$

□

T4.

证明 (a). 构造

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in\left(0,\frac{1}{n}\right] \\ 0, & x\in\{0\}\cup\left(\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

所以 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)\equiv 0$，$\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x\equiv 1$，所以

$$0=\int_{[0,1]}\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\le\liminf_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x=1$$

(b). 因为 $\{g-f_k\}$ 是一列非负可测函数，因为

$$\liminf_{n\to\infty} -x_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} -x_n=\lim_{n\to\infty} -\sup_{k\ge n} x_n=-\limsup_{n\to\infty} x_n$$

所以对 $\{g-f_k\}$ 应用 *Fatou* 引理得

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} g(x)-f_k(x)\mathrm{d}x\le\liminf_{k\to\infty}\int_E g(x)-f_k(x)\mathrm{d}x$$

两边同时减去 $\int_E g\mathrm{d}x$，并用 $\limsup f$ 代替 $\liminf -f$，因此

$$\int_E -\limsup_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x\le-\limsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

移项即证

(c). 由 f_k 逐点收敛至某个函数 f，则上下极限相等：$\liminf_{k\to\infty} f_k(x)=\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$，所以

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x\le\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\le\limsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\le\int_E\limsup_{k\to\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

上式第一项和第四项均等于 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$，因此这四项相等，所以上下极限相等，极限存在：

$$\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\limsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

□