实分析第十二周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 17 日

作业 11A

T1.

证明 下面证明当 x 是 F 的密度点时, $\lim\limits_{|y|\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|}=0$, 再由 a.e $x\in F$ 均为 F 的密度点即得证

Claim: 若 x 是闭集 F 的密度点, 则 $x\in F$

若 $x\notin F$, 则 $x\in F^c$, 而 F^c 是开集, 故 $\exists R>0, \text{s.t. } B_R(x)\subset F^c$, 即 $B_R(x)\cap F=\varnothing$, 因此

$$\frac{m(F\cap B_r(x))}{m(B_r(x))}=0, \forall r<R$$

令 $r\to 0$, 与 x 是 F 的密度点矛盾, 故断言得证

当 $y>0$ 时,$\delta(x+y)\le y-m(F\cap[x,x+y])$; 当 $y<0$ 时,$\delta(x+y)\le |y|-m(F\cap[x+y,x])$, 所以

$$\begin{cases} y>0\text{时}, \lim\limits_{y\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|}\le \lim\limits_{y\to 0}\frac{y-m(F\cap[x,x+y])}{y}=\lim\limits_{y\to 0}1-\frac{m(F\cap[x,x+y])}{m([x,x+y])}=1-1=0 \\ y<0\text{时}, \lim\limits_{y\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|}\le \lim\limits_{y\to 0}\frac{y-m(F\cap[x,x+y])}{-y}=\lim\limits_{y\to 0}-1+\frac{m(F\cap[x,x+y])}{m([x,x+y])}=-1+1=0 \end{cases}$$

综上有 $|y|\to 0$ 时,$\frac{\delta(x+y)}{|y|}\to 0$ □

T2.

证明

1. 对 $\forall\delta>0, \int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)}{\delta^d}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{x}{\delta}} \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi(t)}{\delta^d}\cdot\delta^d\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

2. $|K_\delta(x)|=\frac{\left|\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)\right|}{\delta^d}\le\frac{Ce^{-\gamma\left|\frac{x}{\delta}\right|^2}}{\delta^d}\le\frac{C}{\delta^d}, \forall x\in\mathbb{R}^d, \forall\delta>0$

3. $|K_\delta(x)|=\frac{\left|\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)\right|}{\delta^d}\le\frac{Ce^{-\gamma\left|\frac{x}{\delta}\right|^2}}{\delta^d}$, 下面证明 $e^{-\gamma|t|^2}=O\left(\frac{1}{|t|^{d+1}}\right)$, 这是因为

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{e^{-\gamma|t|^2}}{|t|^{-(d+1)}}=\lim_{|t|\to\infty}\frac{|t|^{d+1}}{e^{\gamma|t|^2}}=0$$

所以当 $|t|>1$ 时,$\exists C_1\gg 1, \text{s.t. } e^{-\gamma|t|^2}\le\frac{C_1}{|t|^{d+1}}$, 当 $t\in(0,1]$ 时,$e^{-\gamma|t|^2}\le 1\le\frac{1}{|t|^{d+1}}$, 因此

$$|K_\delta(x)|\le\frac{Ce^{-\gamma\left|\frac{x}{\delta}\right|^2}}{\delta^d}\le\frac{C}{\delta^d}\cdot\frac{C_1\delta^{d+1}}{|x|^{d+1}}=\frac{\tilde{C}\delta}{|x|^{d+1}}, \forall\delta>0, \forall x\neq 0$$

综上 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一族恒等元逼近 $\square$

T3.

证明 由平移连续性, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\text{s.t.}\ \forall|y|<\eta$, 有 $||f_y-f||_1\le\frac{\varepsilon}{2}$, 另一方面, 因为

$$\int_{|y|>\eta}|K_\delta(y)|\mathrm{d}y \xlongequal{t=\frac{y}{\delta}} \int_{|t|>\frac{\eta}{\delta}}|\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

由 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 知,$\exists N\gg 1,\text{s.t.}\ \forall\int_{B_N(0)^c}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{4||f||_1}$, 因此取 δ 足够小使得 $\frac{\eta}{\delta}>N$, 则当 $\delta<\frac{\eta}{N}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}||f_y-f||_1|K_\delta(y)|\mathrm{d}y &= \int_{|y|<\eta}||f_y-f||_1|K_\delta(y)|\mathrm{d}y+\int_{|y|\ge\eta}||f_y-f||_1|K_\delta(y)|\mathrm{d}y\\ &\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|K_\delta(y)|\mathrm{d}y+2||f||_1\int_{|y|\ge\eta}|K_\delta(y)|\mathrm{d}y\\ &<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+2||f||_1\cdot\frac{\varepsilon}{4||f||_1}=\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得证 $\square$

作业 11B

T1.

证明 (a). 设 $P_1:a=t_0<t_1<\cdots<t_n=c,P_2=c=s_0<s_1<\cdots<s_m=b$, 记 $s_i=t_{n+i},0\le i\le m$, 则

$$P_1\cup P_2:a=t_0<t_1<\cdots<t_{n+m}=b$$

且

$$\begin{aligned}V(f,P_1\cup P_2)&=\sum_{i=1}^{n+m}|f(t_{i-1})-f(t_i)|\\ &=\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)|+\sum_{i=n+1}^{n+m}|f(t_{i-1})-f(t_i)|\\ &=\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)|+\sum_{j=1}^{m}|f(s_{j-1})-f(s_j)|\\ &=V(f,P_1)+V(f,P_2)\end{aligned}$$

(b). 设 $P:a=t_0<\cdots<t_n=b$, 则

$$\begin{aligned}V(\alpha f,P)&=\sum_{i=1}^{n}|\alpha f(t_{i-1})-\alpha f(t_i)|\\ &=|\alpha|\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)|\\ &=|\alpha|V(f,P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(f+g,P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i-1})+g(t_{i-1})-f(t_i)+g(t_i)| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i-1})-f(t_i)|+|g(t_{i-1})-g(t_i)| \\ &= V(f,P)+V(g,P) \end{aligned}$$

□

T2.

证明 $(\Longrightarrow)$: 由 γ 可求长知,$\exists M>0, \text{s.t.}\ \forall [a,b]$ 的划分 $P: a=t_0<\cdots<t_n=b$, 都有

$$\sum_{j=1}^{n} ||z(t_j)-z(t_{j-1})|| \le M$$

若 $z=(x,y)$, 则 $||z||=\sqrt{x^2+y^2}\ge |x|,|y|$, 因此对任意划分 P

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} |x(t_i)-x(t_{i-1})| \le \sum\limits_{j=1}^{n} ||z(t_j)-z(t_{j-1})|| \le M \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |y(t_i)-y(t_{i-1})| \le \sum\limits_{j=1}^{n} ||z(t_j)-z(t_{j-1})|| \le M \end{cases}$$

取上确界即得 $V_a^b(x)\le M, V_a^b(y)\le M$, 即 $x(t),y(t)\in BV[a,b]$

$(\Longleftarrow)$: 若 $x(t),y(t)\in BV[a,b]$, 记 $V_a^b(x)=X, V_a^b(y)=Y$ 则对任意的划分 $P: a=t_0<\cdots<t_n=b$, 均有

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} |x(t_{j-1})-x(t_j)| \le V_a^b(x)=X \\ \sum\limits_{j=1}^{n} |y(t_{j-1})-y(t_j)| \le V_a^b(y)=Y \end{cases}$$

又因为 $||z||=\sqrt{x^2+y^2}\le |x|+|y|$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} ||z(t_j)-z(t_{j-1})|| &= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{[x(t_{j-1})-x(t_j)]^2+[y(t_{j-1})-y(t_j)]^2} \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |x(t_{j-1})-x(t_j)| + \sum_{j=1}^{n} |y(t_{j-1})-y(t_j)| \\ &\le X+Y<+\infty \end{aligned}$$

故 γ 为可求长曲线

□

T3.

证明 $(\Longrightarrow)$: 首先 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. 取 $[0,1]$ 的一个划分 $P_n: 1=x_0>x_1>\cdots>x_{2n}=0$, 其中

$\forall 1\le i\le n-1, x_{2i}=\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{b}}, x_{2i-1}=\left(\frac{1}{2k\pi}\right)^{\frac{1}{b}}$，因此

$$\begin{aligned}V(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{a}{b}}\\&=1+\sum_{i=2}^{2n-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=1+2\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

所以令 $n\to\infty, V(f,P_n)\to 1+2\sum\limits_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{a}{b}}$，级数部分为调和级数，由 $f(x)\in BV[0,1]$ 知，调和级数收敛，故 $\frac{a}{b}>1$，即 $a>b$

$(\Longleftarrow)$：若 $a>b$，因为 $f'(x)=ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x^b}\right)-bx^{a-b-1}\cos\left(\frac{1}{x^b}\right)$，因为 $f(t_{j-1})-f(t_j)=\int_{t_{j-1}}^{t_j}f'(x)\mathrm{d}x$，所以

$$|f(t_{j-1})-f(t_j)|=\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}f'(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_{t_{j-1}}^{t_j}|f'(x)|\mathrm{d}x$$

对于任意 $P:0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，因为 f 在 $[t_1,1]$ 上导数存在，所以我们有

$$\begin{aligned}V(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)|=|f(t_1)-0|+\sum_{i=2}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)|\\&\le 1+\int_{t_1}^{1}|f'(x)|\mathrm{d}x\le 1+\int_0^1\left|ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x^b}\right)-bx^{a-b-1}\cos\left(\frac{1}{x^b}\right)\right|\mathrm{d}x\\&\le 1+\int_0^1 ax^{a-1}\mathrm{d}x+\int_0^1 bx^{a-b-1}\mathrm{d}x\\&=1+1+\frac{b}{a-b}<+\infty\end{aligned}$$

因此 $f\in BV[0,1]$ $\square$