实分析第二周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 3 月 6 日

T1.

证明

(1). $J_*(E) \le J_*(\overline{E})$：对 $\overline{E} \subseteq \mathbb{R}$，对 $\forall \{I_j\}_{j=1}^N$，若 $\overline{E} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N I_j$，则

$$E \subseteq \overline{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$$

这对 $\overline{E}$ 任意的一个有限区间覆盖都成立，因此 $J_*(E) \le J_*(\overline{E})$

$J_*(\overline{E}) \le J_*(E)$：首先注意到 $\forall$区间$I, |I| = |\overline{I}|$，设 $E \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N I_j$，接下来我们证明 $\overline{E} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N \overline{I_j}$：首先我们有 $E \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N I_j \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N \overline{I_j}$，因此只需证明 $\forall x \in \overline{E} \backslash E, x \in \bigcup\limits_{j=1}^N \overline{I_j}$，由 $x \in \overline{E} \backslash E$ 知，x 为 E 的聚点，则 $\exists \{x_n\} \subset E, \text{s.t. } x_n \to x$，因为

$$\{x_n\} \subset E \subseteq \bigcup_{j=1}^N \overline{I_j}$$

而 $\bigcup\limits_{j=1}^N \overline{I_j}$ 是闭集，且 x 是它的聚点，故 $x \in \bigcup\limits_{j=1}^N \overline{I_j}$，故得证，所以我们有

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j \Rightarrow \overline{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \overline{I_j}$$

所以 $J_*(\overline{E}) \le \sum\limits_{j=1}^N |\overline{I_j}| = \sum\limits_{j=1}^N |I_j|$，这里 $\{I_j\}_{j=1}^N$ 是任意一个 E 的有限区间覆盖，取下极限即得 $J_*(\overline{E}) \le J_*(E)$

综上，$J_*(\overline{E}) = J_*(E), \forall E \subseteq \mathbb{R}$

(2).$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ □

T2.

证明

(1). $m_*^{\mathcal{R}}(E) \le m_*(E)$：对 $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$，因为方体覆盖也是矩体覆盖，故这是显然的

$m_*(E) \le m_*^{\mathcal{R}}(E)$：***Claim:*** $\forall$闭矩体$R, \forall \varepsilon > 0, \exists R$ 的一个方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty, \text{s.t. } \sum\limits_{j=1}^\infty |Q_j| \le |R| + \varepsilon$

Proof of Claim：考虑 k 阶二进方体全体构成的集合 Γ_k，我们考虑集合 $\mathcal{F}_k = \{Q \in \Gamma_k : Q \cap R \ne \varnothing\}$，并且定义

$$\mathcal{F}_k^{(1)} = \{Q \in \mathcal{F}_k : Q \cap \partial R = \varnothing\}, \quad \mathcal{F}_k^{(2)} = \{Q \in \mathcal{F}_k : Q \cap \partial R \ne \varnothing\}$$

因此 $R \subseteq \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_k} Q$，记 Area(R) 为矩体 R 的表面积，则我们有估计

$$\#\mathcal{F}_k^{(2)} \le \frac{2 \cdot \text{Area}(R) \cdot 2^{-k}}{2^{-nk}} = 2\text{Area}(R) \cdot 2^{(n-1)k}$$

因此

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}_k^{(2)}} |Q| \leq 2^{-nk}\cdot 2\mathrm{Area}(R)\cdot 2^{(n-1)k} = \frac{\mathrm{Area}(R)}{2^{k-1}}$$

另一方面，由 $\mathcal{F}_k^{(1)}$ 的定义，$\bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}_k^{(1)}} Q \subset R$，因此

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}_k^{(1)}} |Q| \leq |R|$$

因为 $\mathcal{F}_k^{(1)} \sqcup \mathcal{F}_k^{(2)} = \mathcal{F}_k$，所以

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}_k} |Q| = \sum_{Q\in\mathcal{F}_k^{(1)}} |Q| + \sum_{Q\in\mathcal{F}_k^{(2)}} |Q| \leq |R| + \frac{\mathrm{Area}(R)}{2^{k-1}}$$

取 $k\in\mathbb{N}^*, \text{s.t. } 2^{k-1} \geq \frac{\mathbb{A}\setminus\Game(R)}{\varepsilon}$，这样断言就得证了

回到本题，对 $\forall E$ 的一个矩体覆盖 $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$，对 $\forall j\in\mathbb{N}^*, \forall\varepsilon>0, \exists R_j$ 的一个方体覆盖 $\{Q_{jl}\}_{l=1}^{\infty}, \text{s.t.}$

$$\sum_{l=1}^{\infty} |Q_{jl}| \leq |R_j| + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

则 $\{Q_{jl}\}_{j,l=1}^{\infty}$ 是 E 的一个可数（因为可数个可数集合的并是可数集）方体覆盖，且

$$\begin{aligned}\sum_{j,l=1}^{\infty} |Q_{jl}| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |Q_{jl}| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(|R_j| + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|Q_{jl}| + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}|R_j| + \varepsilon\end{aligned}$$

因此任意一个 E 的矩体覆盖 $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}, \forall\varepsilon>0$，都能找到 E 的一个方体覆盖 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|Q_k| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty}|R_j| + \varepsilon$，因为

$$m_*^{\mathcal{R}}(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|R_j| : \{R_j\}_{j=1}^{\infty}\text{为}E\text{的一个闭矩体覆盖}\right\}$$

所以，对 $\forall\varepsilon>0, \exists E$ 的一个闭矩体覆盖 $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}, \text{s.t.}$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|R_j| \leq m_*^{\mathcal{R}}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

此外我们又能找到一个 E 的方体覆盖 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}, \text{s.t.}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| \leq \sum_{j=1}^{\infty}|R_j| + \frac{\varepsilon}{2}$$

所以我们有

$$m_*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| \leq m_*^{\mathcal{R}}(E) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，故 $m_*(E) \le m_*^{\mathcal{R}}(E)$

综上我们有 $m_*^{\mathcal{R}}(E) = m_*(E)$

(2). 因为 R 是它自身的一个闭矩体覆盖，所以

$$m_*(R) = m_*^{\mathcal{R}}(R) \le |R|$$

$\square$

T3.

证明

Case 1. E 为闭矩体，不妨设 $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$，由 *T2* 知

$$m_*(E) = |E| = \prod_{i=1}^{d} |b_i - a_i|$$

对 $\forall \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$，显然 $\boldsymbol{\lambda} E$ 为矩体，且第 i 条边长从 $|b_i - a_i|$ 变为 $|\lambda_i b_i - \lambda_i a_i| = |\lambda_i| \cdot |b_i - a_i|$，所以

$$m_*(\boldsymbol{\lambda} E) = |\boldsymbol{\lambda} E| = \prod_{i=1}^{d} |\lambda_i| \cdot |b_i - a_i| = |\lambda_1 \cdots \lambda_d| m_*(E)$$

Case 2. E 为一般集合，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 E 的矩体覆盖 $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$, s.t.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| \le m_*^{\mathcal{R}}(E) + \frac{\varepsilon}{|\lambda_1 \cdots \lambda_d|}$$

Claim: $\{\boldsymbol{\lambda} R_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 λE 的一个矩体覆盖：设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in E \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_j$，则 $\exists R_i$, s.t. $\boldsymbol{x} \in R_i$，不妨设 $R_i = [m_1, n_1] \times \cdots \times [m_d, n_d]$, 则 $\forall i \in \{1, \cdots, d\}, x_i \in [m_i, n_i] \Rightarrow \lambda_i > 0$ 时 $\lambda_i x_i \in [\lambda_i m_i, \lambda_i n_i]$; $\lambda < 0$ 时, $\lambda_i x_i \in [\lambda_i n_i, \lambda_i m_i]$, 因此 $\boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{\lambda} R_i$，断言得证

所以

$$\begin{aligned} m_*^{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\lambda} E) &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\boldsymbol{\lambda} R_j| \overset{\text{Step1}}{=} |\lambda_1 \cdots \lambda_d| \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| \\ &\le |\lambda_1 \cdots \lambda_d| \left(m_*^{\mathcal{R}}(E) + \frac{\varepsilon}{|\lambda_1 \cdots \lambda_d|} \right) \\ &= |\lambda_1 \cdots \lambda_d| m_*^{\mathcal{R}}(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，则说明 $m_*^{\mathcal{R}}(\lambda E) \le |\lambda_1 \cdots \lambda_d| m_*^{\mathcal{R}}(E)$

另一方面，令 $\boldsymbol{\lambda}^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_d} \right)$，则 $\boldsymbol{\lambda}^{-1}(\boldsymbol{\lambda} E) = E$，因此我们有

$$m_*^{\mathcal{R}}(E) \le \frac{1}{|\lambda_1 \cdots \lambda_d|} m_*^{\mathcal{R}}(\lambda E)$$

所以

$$m_*^{\mathcal{R}}(\lambda E) \le |\lambda_1 \cdots \lambda_d| m_*^{\mathcal{R}}(E) \le m_*^{\mathcal{R}}(\lambda E)$$

这就证明了 $m_*^{\mathcal{R}}(\lambda E) = |\lambda_1 \cdots \lambda_d| m_*^{\mathcal{R}}(E)$，再由 *T2*，故 $m_*(\boldsymbol{\lambda} E) = m_*(E)$ $\square$