实分析第六周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 4 日

习题 3.4

T5

证明 因为 $f(\zeta)\in H\big(B(0,1)\big)$，所以 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$，且由 *Cauchy* 积分公式

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta,\quad f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

因此

$$\begin{aligned}
2f(0)+f'(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[f(\zeta)+\frac{2f(\zeta)}{\zeta}+\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\right]\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left[f(e^{i\theta})+\frac{2f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}+\frac{f(e^{i\theta})}{e^{2i\theta}}\right]ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(2+2\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f(0)-f'(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[-f(\zeta)+\frac{2f(\zeta)}{\zeta}-\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\right]\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left[-f(e^{i\theta})+\frac{2f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}-\frac{f(e^{i\theta})}{e^{2i\theta}}\right]ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(-e^{i\theta}-e^{-i\theta}+2)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(2-2\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

□

T9

证明 设 $\zeta = re^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}\zeta = rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{\pi r}\int_{|\zeta|=r} u(\zeta)e^{-i\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{rie^{i\theta}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{2u(\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \\
&= f'(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

因为

$$
\int_{|\zeta|=r}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta = \overline{\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta}^2}\mathrm{d}\zeta} = \overline{\int_{|\zeta|=r}\frac{\zeta^2 f(\zeta)}{R^4}\mathrm{d}\zeta}
$$

而 $z^2f(\zeta)\in H\big(B(0,R)\big)$，所以上式积分值为零，取共轭后仍为零，因此

$$
\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta = f'(0),\quad \forall 0<r\le R
$$

□

习题 3.5

T2

证明 对 $\forall z\in\mathbb{C}$，由于 $f(z)=O(|z|^\alpha)$，所以 $\exists M\gg 1$，对充分大的 R，当 $|\zeta-z|\ge R$ 时，就有 $f(\zeta)\le M|\zeta|^\alpha$，取 $n=[\alpha]+1$，则

$$
\begin{aligned}
|f^{(n)}(z)| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| \\
&\le \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{M|\zeta|^\alpha}{R^{n+1}}\cdot|\mathrm{d}\zeta| \\
&\le n!M\cdot\frac{(R+|z|)^\alpha}{R^n}
\end{aligned}
$$

令 $R\to\infty$，因为 $n=[\alpha]+1>\alpha$，所以 $|f^{(n)}(z)|=0$，由 z 的任意性知，$f^{(n)}(z)\equiv 0$，再由习题 3.3 的第三题知，f 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式 □

T5

证明 考虑将 $\mathbb{C}\backslash[0,1]$ 打到上半平面的单叶全纯变换

Step 1. 作用 $f_1(z)=\frac{1}{z}$，则 $\mathbb{C}\backslash[0,1]$ 打到 $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty)$

Step 2. 作用 $f_2(z)=z-1$，则 $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty)$ 打到 $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$

Step 3. 作用 $f_3(z)=\sqrt{z}$，则 $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ 打到上半平面

因此，考虑 $\varphi(f(z))=\sqrt{\frac{1}{f(z)}-1}$，则 $\varphi\circ f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}z>0\}$，且由 $f(z)\ne 0$ 知，$\varphi\circ f$ 也是整函数，由上一题（课上已经证过）知，$\varphi\circ f\equiv c$，且 φ 单叶，故 $f\equiv C$ □

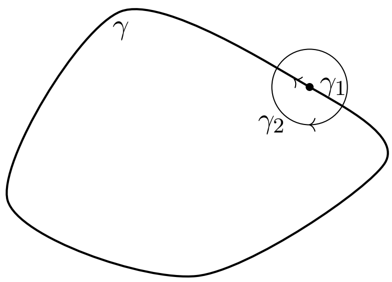
T6

证明 显然有 $F(z) \in H(D\backslash\{z_0\}) \cap C(D)$，由莫雷拉定理，我们只需证明沿 D 内的任意一条可求长闭曲线 γ 的积分为零

Case 1. 若 z_0 在 γ 外部，则由 $F(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 在 $z \in D\backslash\{z_0\}$ 全纯知

$$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = 0$$

Case 2. 若 z_0 在 γ 上，则我们可以取 ε_0 足够小，使得 $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$，且 γ 仅仅只穿入、穿出一次 $B(z_0, \varepsilon_0)$，记 γ 在 $B(z_0, \varepsilon_0)$ 内的那段曲线为 γ_1，$B(z_0, \varepsilon_0)$ 在 γ 内的那段圆弧为 γ_2，如下图



因为 ∂D 是闭集，$\overline{B(z_0, \varepsilon_0)}$ 是紧集，所以 $\rho = \mathrm{dist}\,(\partial D, \overline{B(z_0, \varepsilon_0)}) > 0$，我们可以取 $G = \{z \in D : \mathrm{d}(z, \partial B(z_0, \varepsilon_0)) < \frac{\rho}{2}\}$，则 $B(z_0, \varepsilon_0) \subset G \subset \overline{G} \subset D$，因此在紧集 G 上 F 一致连续：对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \mathrm{s.t.}\ \forall |z_1 - z_2| < \delta, |F(z_1) - F(z_2)| < \varepsilon$，由 *Cauchy* 积分定理，$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2^- + \gamma_1} F(z)\mathrm{d}z$，因此对于固定的 ε，我们可以选取更小的圆周半径 $\varepsilon_0 < \min\{\delta, \varepsilon\}$，则

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|-\int_{\gamma_2} F(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} F(z)\mathrm{d}z\right| \\
&\le \left|\int_{\gamma_2} F(z) - \int_{\gamma_2} F(z_0)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma_1} F(z) - \int_{\gamma_1} F(z_0)\mathrm{d}z\right| \\
&\le \int_{\gamma_2} |F(z) - F(z_0)| \cdot |\mathrm{d}z| + \int_{\gamma_1} |F(z) - F(z_0)| \cdot |\mathrm{d}z| \\
&\le \varepsilon|\gamma_2| + \varepsilon|\gamma_1|
\end{aligned}$$

而 $|\gamma_1|, |\gamma_2| \le 2\pi\varepsilon$，所以

$$\left|\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z\right| \le 4\pi\varepsilon^2$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，则 $\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = 0$

Case 3. 若 z_0 在 γ 内部，则可以通过一条过 z_0 的曲线将 γ 分为两部分，且每一部分都满足 Case 2，所以此时仍有

$$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = 0$$

综上，由莫雷拉定理，$F \in H(D)$ $\square$

习题 4.5

T3

证明 假设不存在这样的 z_0，则 $\forall z \in \partial B(0,1), \prod_{k=1}^{n} |z_0 - z_k| \le 1$，考虑 $f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_k)$，取 $D = B(0,1)$，则 $f(z) \in H(D) \cap C(\overline{D})$，所以 $f(z)$ 的最大模在 ∂D 上取得，由假设知，$\max_{z\in D} |f(z)| \le 1$，注意到

$$|f(0)| = \prod_{i=1}^{n} |z_i| > 1$$

这就导出矛盾！因此 $\exists z_0 \in \partial B(0,1), \text{s.t.} \prod_{k=1}^{n} |z_0 - z_k| > 1$ □

T4

证明 若 $f \equiv C$，则 $M(r) \equiv |C|$ 是 $[0,R)$ 上的增函数；设 f 不为常数，下证 $M(r)$ 严格增：对 $\forall 0 \le r_1 < r_2 < R$，由最大模原理 $f \in H\big(B(0,r_2)\big) \cap C\big(\overline{B(0,r_2)}\big)$，所以 $f(z)$ 在 $\overline{B(0,r_2)}$ 上的最大模在 $\partial B(0,r_2)$ 上取得，而在内部无法取到，而 $\partial B(0,r_1)$ 在 $\overline{B(0,r_2)}$ 的内部，因此 $M(r_2) > M(r_1)$ □

T6

证明 记 $\lim_{z\to\infty} f(z) = A$，设

$$F(z) = \begin{cases} f\left(\frac{R^2}{z}\right), & z \in \overline{B(0,R)} \backslash \{0\} \\ A, & z = 0 \end{cases}$$

因此对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0, \text{s.t.} \forall |\zeta| > M_\varepsilon, |f(\zeta) - A| < \varepsilon$，取 $\delta = \frac{R^2}{M_\varepsilon}$，则 $\forall |z| < \delta, |F(z) - A| < \varepsilon$，因此 F 在 $z = 0$ 处是连续的，且在 $z = 0$ 附近有界，故 $z = 0$ 是可去奇点，因此由 $f(z) \in H\big(B(\infty,R)\big) \cap C\big(\overline{B(\infty,R)}\big)$ 知 $F(z) \in H\big(B(0,R)\big) \cap C\big(\overline{B(0,R)}\big)$，由 *T4* 知

$$\tilde{M}(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|$$

是 $[0,R)$ 上的严格增函数（f 非常数），因此对 $\forall R \le r_1 < r_2$，我们有 $\frac{R^2}{r_2} < \frac{R^2}{r_1} < R$，所以 $\tilde{M}\left(\frac{R^2}{r_2}\right) < \tilde{M}\left(\frac{R^2}{r_1}\right)$，即

$$\max_{z=r_1} |f(z)| > \max_{z=r_2} |f(z)|$$

所以 $M(r)$ 是 $[R,\infty)$ 上的严格减函数 □

T7

证明 假设 $\exists z_0 \in D, \text{s.t.} |f(z_0)| \le |f(z)|, \forall z \in D$，由 f 在 D 中没有零点知 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在 D 上也全纯，取 $\varepsilon > 0$ 满足 $\overline{B(z_0,\varepsilon)} \subseteq D$，则在 $B(z_0,\varepsilon)$ 上对 $g(z)$ 应用最大模原理，则 $g(z)$ 的最大模在 $\partial B(z_0,\varepsilon)$ 上取得，且在内部无法取得，即 $\exists z_1 \in \partial B(z_0,\varepsilon), \text{s.t.} |g(z_1)| > |g(z_0)|$，因此 $|f(z_1)| < |f(z_0)|$，这与假设矛盾！因此 $|f(z)|$ 在 D 内无法取得最小值 □

T32

证明 考虑 $f(z)=\frac{P(z)}{z^k}$，则 $f\in H\big(B(\infty,1)\big)\cap C(\overline{B(\infty,1)})$，记 $P(z)=a_kz^k+\cdots+a_1z+a_0$，则

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}a_k+\frac{a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_1z+a_0}{z^k}=a_k$$

上式第二项极限为零是因为

$$\left|\frac{a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_1z+a_0}{z^k}\right|\le\frac{|a_{k-1}|}{|z|}+\cdots+\frac{|a_1|}{|z|^{k-1}}+\frac{|a_0|}{|z|^k}\to 0 \text{ as } z\to\infty$$

所以由第六题的结论，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ 是 $[1,\infty)$ 上的严格减函数，因此

$$\left|\frac{P(z)}{z^k}\right|\le M(1)=\max_{|z|=1}|P(z)|\le 1\Longrightarrow|P(z)|\le|z|^k$$

$\square$