概率论第七周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 4 月 12 日

习题 3.1

T2

解 令 $u = x_1 - x_2, v = x_1 + x_2$，则 $x_1 = \frac{1}{2}(u+v), x_2 = \frac{1}{2}(v-u)$，因此

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{C}|x_1 - x_2|e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \frac{1}{2C}\iint_{\mathbb{R}^2}|u|e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2C}\int_{\mathbb{R}}|u|e^{-\frac{1}{4}u^2}\mathrm{d}u\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{4}v^2}\mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{C}\int_0^{+\infty}ue^{-\frac{1}{4}u^2}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{4}v^2}\mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{C}\cdot 2\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

上述积分值为 1，故 $C = 4\sqrt{\pi}$ □

T4

证明 (1). 因为 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

所以

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

因为当 $-\log x \leq 0$ 时，$x \geq 1$，且 $\mathbb{P}(X \geq 1) = 0$，所以 $\mathbb{P}(-\log X \leq 0) = 0$；对任意 $y > 0, -\log x \leq y \Rightarrow x \geq e^{-y}$，而 $\mathbb{P}(X \geq e^{-y}) = 1 - F(e^{-y}) = 1 - e^{-y}$，因此 $\mathbb{P}(-\log X \leq y) = 1 - e^{-y}$，综上我们有

$$F_{-\log X}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

求导得

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$$

□

习题 3.2

T2

解 因为

$$\mathbb{E}[X^n]=\int_{\mathbb{R}}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

当 n 为奇数时，它是收敛的奇函数，积分为零；下面设 $n=2k$，令 $\frac{x^2}{2}=t$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{2k}]&=\int_{\mathbb{R}}x^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^{2k}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{k-\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k+\frac{1}{2})\\&=(2k-1)!!\end{aligned}$$

因为

$$\mathbb{E}[Y^n]=\int_{-2}^{2}y^n\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}\mathrm{d}y$$

当 n 为奇数时，它是奇函数，积分为零；下面设 $n=2k$，令 $y=2\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^n]&=\frac{2^{2k+2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2^{2k+1}}{\pi}B\left(\frac{2k+1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{2^{2k+1}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(k+2)}\\&=\frac{(2k-1)!!}{(k+1)!}\end{aligned}$$

□

T3

解 因为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}Cx\int_x^{+\infty}(y-x)e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=C\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=C\end{aligned}$$

所以 $C=1$，则

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x} \\ &= \frac{x(y-x)e^{-y}}{e^{-y}\int_0^y x(y-x)\mathrm{d}x} = \frac{6x(y-x)}{y^3}\end{aligned}$$

因为 $f_X(x) = \int_x^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = xe^{-x}$，当 $x>0$ 时 $f_X(x)>0$，此时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X=x] &= \int_x^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = \int_x^{+\infty} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y \\ &= \int_x^{+\infty} y(y-x)e^{-(y-x)}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}(x+t)te^{-t}\mathrm{d}t \\ &= x+\Gamma(3) = x+2\end{aligned}$$

所以 $\mathbb{E}[Y|X=x] = X+2$ □

T4

证明 设 $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$，因为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}, f'(x) = -(x-\mu)f(x)$，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)g(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x \\ &= -\sigma g(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上式第二项为 $\sigma^2\mathbb{E}[g'(X)]$；由 $\mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)g(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x$ 存在知，在无穷处 $(x-\mu)g(x)f(x)$ 函数值有限，而 $x-\mu$ 在无穷处函数值趋于无穷，因此 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)f(x) = 0$，故上式第一项为零，所以

$$\mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] = \sigma^2\mathbb{E}[g'(x)]$$

□

T6

解 因为 $\mathrm{Cov}(\overline{X}, X_k-\overline{X}) = \mathbb{E}[\overline{X}(X_k-\overline{X})] - \mathbb{E}[\overline{X}]\mathbb{E}[X_k-\overline{X}]$，由 $\{X_r\}$ 独立同分布知

$$\mathbb{E}[X_k-\overline{X}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[nX_k-(X_1+\cdots+X_n)] = \frac{1}{n}(n\mathbb{E}[X_1]-n\mathbb{E}[X_1]) = 0$$

另一方面

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\overline{X}(X_k-\overline{X})] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left(nX_k-\sum_{i=1}^n X_i\right)\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[n\sum_{i=1}^n X_iX_k - \sum_{i,j=1}^n X_iX_j\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[nX_1^2+n(n-1)X_1X_2-nX_1^2-n(n-1)X_1X_2]\end{aligned}$$

□