复分析第十三周作业

涂嘉乐 PB23151786

2025 年 5 月 27 日

习题 5.4

T7

解 设所求函数均为 $f(z)$

(1). 因为

$$\frac{\sin(\alpha z)}{z^3\sin(\beta z)}=\frac{\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^3 z^2}{6}+\cdots}{z^3\left(\frac{\beta}{1}-\frac{\beta^3 z^2}{6}+\cdots\right)}$$

所以 0 为 $f(z)$ 的三阶极点，故

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(z^3 f(z)\right)$$

只需求 $g(z)$ 在 $z=0$ 处的 *Taylor* 展开中 z^2 的系数，利用 $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 得

$$g(z)=\frac{\alpha(1-\frac{\alpha^2z^2}{6}+\cdots)}{\beta(1-\frac{\beta^2z^2}{6}+\cdots)}=\frac{\alpha}{\beta}(1-\frac{\alpha^2z^2}{6}+\cdots)(1+\frac{\beta^2z^2}{6}+\cdots)$$

其中 z^2 的系数为

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{6}=\frac{g''(0)}{2!}$$

所以

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{6}$$

(4). 因为 $\operatorname{Log}\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}$ 在 0 的小邻域内可以选出单值的全纯分支，所以不妨考虑其主支，因为

$$\left(\log\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}\right)=\log(1-\alpha z)-\log(1-\beta z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha z)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta z)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n-\alpha^n}{n}z^n$$

所以

$$\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}\log\left(\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!z^m}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n-\alpha^n}{n}z^n$$

则当 $n-m=1$ 时，z 的幂次为 -1，故

$$\mathrm{Res}(f,-1)=c_{-1}=\sum_{n-m=1}\frac{\beta^n-\alpha^n}{m!n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n-\alpha^n}{n!}=e^{\beta}-e^{\alpha}$$

(5). 因为

$$z^3\cos\frac{1}{z-2}=\left[(z-2)^3+6(z-2)^2+12(z-2)+8\right]\cdot\left[1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\cdots\right]$$

所以

$$\mathrm{Res}(f,2)=c_{-1}=12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\frac{1}{4!}=\frac{-143}{24}$$

(7). 因为 a 是 f 的 n 阶极点，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,a)&=\lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(\frac{1}{(z-b)^m}\right)\\&=\frac{1}{(n-1)!}\frac{(-m)(-m-1)\cdots[-m-(n-2)]}{(a-b)^{m+n-1}}\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{(a-b)^{m+n-1}}\frac{(m+n-2)\cdots(m+1)m}{(n-1)!}\\&=\binom{m+n-2}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{(a-b)^{m+n-1}}\end{aligned}$$

□

T10

解 设被积函数均为 $f(z)$

(1). 因为 $f\in H(B(\infty,2))$，所以对 $\forall R>2$

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}\mathrm{d}z\right|&=\left|\int_{|z|=R}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}\mathrm{d}z\right|\le\int_{|z|=R}\left|\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}\right|\cdot|\mathrm{d}z|\\&\le\int_{|z|=R}\frac{1}{R^3(R^{10}-2)}\cdot|\mathrm{d}z|=\frac{2\pi}{R^2(R^{10}-2)}\to 0\quad\text{as }R\to\infty\end{aligned}$$

所以所求积分为零

(2). 由 $T7(4)$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,a)=\binom{m+n-2}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}2\pi i}{(a-b)^{m+n-1}}$$

(3). 因为

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i(n\theta-\sin\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{\cos\theta-i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\xlongequal[\mathrm{d}z=iz\mathrm{d}\theta]{z=e^{i\theta}} \int_{|z|=1} z^n e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\mathrm{Res}(z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}, 0)$$

因为

$$z^{n-1}e^{\frac{1}{z}} = z^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!z^m} \Longrightarrow \mathrm{Res}(z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}, 0) = c_{-1} = \frac{1}{n!}$$

因此

$$I = \frac{2\pi}{n!}$$

(4). 由 $e^{2\pi iz^3}-1=0, |z|<R$ 解得 $z=0, \sqrt[3]{k}\omega^j, k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n, j=0,1,2, \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,因此

$$\int_{|z|=R}\frac{z^2}{e^{2\pi iz^3}-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}(f,0) + 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2}\mathrm{Res}(f,\sqrt[3]{k}\omega^j) + \mathrm{Res}(f,\sqrt[3]{-k}\omega^j)$$

因为 0 为 $\frac{e^{2\pi iz^3}-1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi iz^3)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^n}{n!}z^{3n-2}$ 的一阶零点,所以 0 为 f 的一阶极点,故

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to0}\frac{z^3}{e^{2\pi iz^3}-1} = \frac{1}{2\pi i}$$

又因为对 $\forall 1\le k\le n, 0\le j\le 2$,设 $z^2=g(z), e^{2\pi iz^3}-1=h(z)$,且 $g(\sqrt[3]{k}\omega^j)\ne0, h(\sqrt[3]{k}\omega^j)=0, h'(\sqrt[3]{k}\omega^j)\ne0$,所以

$$\mathrm{Res}(f,\sqrt[3]{k}\omega^j) = \frac{g(\sqrt[3]{k}\omega^j)}{h'(\sqrt[3]{k}\omega^j)} = \frac{1}{6\pi i}$$

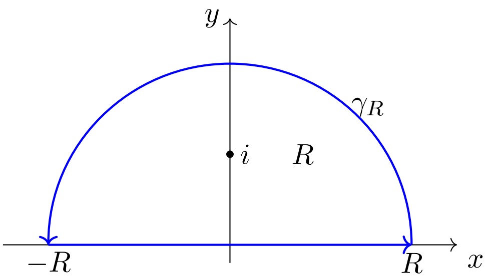
对于 $-k, 1\le k\le n$ 也是同理,所以

$$\int_{|z|=R}\frac{z^2}{e^{2\pi iz^3}-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i} + 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{6\pi i}+\frac{1}{6\pi i} = 1+2n$$

□

习题 5.5

T1(8)



解 考虑 $f(z)=\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$，取以原点为圆心，半径为 R 的上半圆周围道 γ_R，因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{(1+z^2)^3}=0$，由 *Jordan* 引理知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

由留数定理，因为 R 足够大时，f 在上半圆内只有一个三阶极点 i，所以

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z+\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)$$

因为

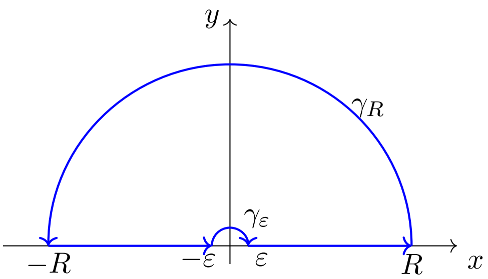
$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right)=-\frac{7i}{16e}$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left(\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z\right)=\frac{7\pi}{16e}$$

□

T1(9)



解 处理所求积分：

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\mathrm{d}x$$

因此考虑 $f(z)=\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$，设 $\gamma_R,\gamma_\varepsilon$ 分别为以原点为圆心，半径为 R,ε 的上半圆逆时针/顺时针围道，因为积分区域内没有奇点，由留数定理

$$\left(\int_{\gamma_R}+\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R}\right)f(z)\mathrm{d}z=0$$

对于 γ_R，由 *Jordan* 引理知 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{2iz}}{z^2}=0$，且

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{-1}{z^2}\mathrm{d}z\right|=O(R^{-1})\to 0$$

故 γ_R 上的积分为零；对于 γ_ε，因为

$$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-1}{z}\mathrm{d}z=2i$$

且 γ_ε 是顺时针，差个负号，所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z=-2i\cdot i\cdot\pi=2\pi$$

因此令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2iz}-1}{z^2}\mathrm{d}z=-2\pi$$

两边同乘 -1，对比实部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\mathrm{d}x=2\pi\Longrightarrow\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}$$

$\square$

T1(4)

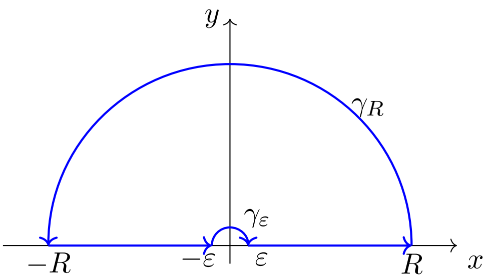
解 设 $z=e^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，故

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{bz^2+2az+b}$$

解 $bz^2+2az+b=0$ 得 $z_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b},z_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},|z_2|<1<|z_1|$，故

$$\begin{aligned}\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{bz^2+2az+b}&=\frac{2}{bi}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_1)(z-z_2)}\\&=\frac{2}{bi}\cdot 2\pi i\cdot\left.\frac{1}{(z-z_1)}\right|_{z=z_2}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\end{aligned}$$

T1(10)



解 因为 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$，所以

$$\frac{\sin^3 x}{x^3} = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}$$

考虑 $f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$，设 $\gamma_R, \gamma_\varepsilon$ 分别为以原点为圆心，半径为 R, ε 的上半圆逆时针/顺时针围道，因为积分区域内没有奇点，由留数定理

$$\left(\int_{\gamma_R} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\gamma_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) f(z)\mathrm{d}z = 0$$

对于 γ_R，由 *Jordan* 引理知 $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{z^3}\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{3e^{iz}}{z^3}\mathrm{d}z = 0$，且

$$\int_{\gamma_R} \frac{2}{z^3}\mathrm{d}z = O(R^{-2}) \to 0$$

因此 γ_R 上的积分趋于零；对于 γ_ε，因为

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1 + 3iz + \frac{(3iz)^2}{2} - 3(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2}) + 2 + o(z^2)}{z^2} = -3$$

且此时 γ_ε 是顺时针方向，差个负号，故

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = (-1)\cdot(-3)\cdot i\cdot \pi = 3\pi i$$

令 $\varepsilon \to 0, R \to \infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\mathrm{d}z = -3\pi i$$

两边同乘 -1，取虚部得

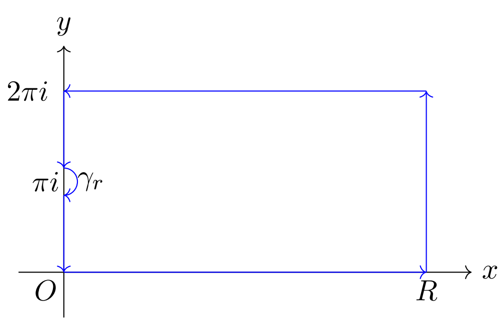
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$$

所以

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

□

T1(25)



解 γ_ε 如图，设 $\gamma_1:[0,R],\gamma_2:[R,R+2\pi i],\gamma_3:[R+2\pi i,2\pi i],\gamma_4:[2\pi i,\pi i+\varepsilon]\cup[\pi i-\varepsilon,0]$，设 $f(z)=\frac{z^2}{e^z+1}$，由留数定理

$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_4}+\int_{\gamma_\varepsilon}\right)f(z)\mathrm{d}z=0$$

对于 γ_ε，因为

$$\lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)f(z)=\lim_{z\to\pi i}\frac{z^2}{-1-\frac{(z-\pi i)}{2}-\cdots}=\pi^2$$

因为 γ_ε 是顺时针，差个负号，所以

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z=(-1)\cdot(\pi^2)\cdot i\cdot\pi=-i\pi^3$$

对于 γ_2，它的参数方程为 $z=R+yi,y\in[0,2\pi]$，所以

$$\left|\int_{\gamma_2}f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{i(R+yi)^2}{e^{R+yi}+1}\mathrm{d}y\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{(R+yi)^2}{e^{R+yi}+1}\right|\mathrm{d}y\xrightarrow{R\to\infty}0$$

对于 γ_3，它的参数方程为 $z=x+2\pi i,x\in[R,0]$，所以

$$\int_{\gamma_3}f(z)\mathrm{d}z=\int_R^0\frac{(x+2\pi i)^2}{e^{x+2\pi i}+1}\mathrm{d}x=-\int_0^R\frac{(x+2\pi i)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x$$

对于 γ_4，它的参数方程为 $z=yi,y\in[2\pi,\pi+\varepsilon]\cup[\pi-\varepsilon,0]$，记 $\gamma:\{\xi:\xi=e^{iy},y\in[0,2\pi]\backslash[\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon]\}$

$$\int_{\gamma_4}f(z)\mathrm{d}z=\left(\int_{2\pi}^{\pi+\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^0\right)\frac{i(iy)^2}{e^{iy}+1}\mathrm{d}y$$

令 $R\to\infty,\varepsilon\to0$ 得

$$-i\pi^3+\left(\int_{2\pi}^{\pi}+\int_{\pi}^{0}\right)\frac{i(iy)^2}{e^{iy}+1}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{-4\pi^2+4\pi ix}{e^x+1}\mathrm{d}x$$

对比虚部得

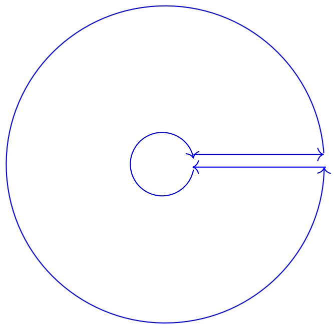
$$\begin{aligned}4\pi\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x&=-\pi^3+\left(\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{iy^2(\cos y+1-i\sin y)}{2+2\cos y}\right)\mathrm{d}y\\&=-\pi^3+\int_0^{2\pi}\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{\pi^3}{3}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{12}$$

□

T1(11)



解 考虑 $f(z)=\frac{z^p}{1+z^2}=\frac{e^{p\mathrm{Log}z}}{1+z^2}$，取在正实轴上取正值的那个分支；考虑如图所示的围道，内圆 γ_ε，外圆 γ_R，上面一条直线记为 γ_1，下面一条直线记为 γ_2，当 R 足够大时，$f(z)$ 有两个一阶极点 $\pm i$，由留数定理

$$\left(\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\gamma_R}+\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)+2\pi i\mathrm{Res}(f,-i)$$

首先

$$\begin{cases}\mathrm{Res}(f,i)=\frac{e^{p\log i}}{2i}=\frac{e^{\frac{p\pi i}{2}}}{2i}\\ \mathrm{Res}(f,-i)=\frac{e^{p\log -i}}{-2i}=-\frac{e^{\frac{3p\pi i}{2}}}{2i}\end{cases}$$

其次，对于 γ_ε，因为

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{p\log z}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\le 2\pi\varepsilon\cdot\left|\frac{\varepsilon^p}{1-\varepsilon^2}\right|\le 4\pi\varepsilon^{p+1}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0$$

对于 γ_R，因为

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{p\log z}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\le 2\pi R\cdot\frac{R^p}{R^2-1}=O(R^{p-1})\xrightarrow{R\to\infty}0$$

对于 $\gamma_1\cup\gamma_2$，因为在 γ_1 上 $e^{p\log z}=z^p$，在 γ_2 上 $e^{p\log z}=z^pe^{2p\pi i}$

$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=\int_\varepsilon^R\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_R^\varepsilon\frac{x^pe^{2p\pi i}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

令 $R\to\infty,\varepsilon\to0$ 得

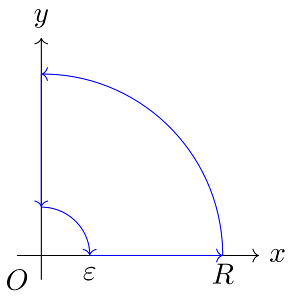
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p(1-e^{2p\pi i})}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi(e^{\frac{p\pi i}{2}}-e^{\frac{3p\pi i}{2}})$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\frac{e^{\frac{p\pi i}{2}}-e^{\frac{3p\pi i}{2}}}{1-e^{2p\pi i}}=\pi\frac{e^{\frac{p\pi i}{2}}-e^{\frac{-p\pi i}{2}}}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}}=\pi\frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{\sin p\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$$

□

T1(21)



解 考虑 $f(z)=\frac{\log z}{z^2-1}$，其中 $\log z$ 取主支，，因为 $\lim\limits_{z\to 1} f(z)$ 存在，故 1 为 $f(z)$ 的可去奇点。取如上围道，记 $\gamma_1:[\varepsilon,R],\gamma_2:[iR,i\varepsilon]$，由留数定理

$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\gamma_R}\right)f(z)\mathrm{d}z=0$$

对于 γ_ε，因为

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log z}{z^2-1}\mathrm{d}z=i\varepsilon\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log\varepsilon+i\theta}{\varepsilon^2e^{2i\theta}-1}e^{i\theta}\mathrm{d}\theta=i\varepsilon\log\varepsilon\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2e^{2i\theta}-1}e^{i\theta}\mathrm{d}\theta+i\varepsilon\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{i\theta e^{i\theta}}{\varepsilon^2e^{2i\theta}-1}\mathrm{d}\theta$$

因为

$$\left|i\varepsilon\log\varepsilon\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{\varepsilon^2e^{2i\theta}-1}\mathrm{d}\theta\right|\le|\varepsilon\log\varepsilon|\cdot\int_{\gamma_\varepsilon}2\mathrm{d}\theta\xrightarrow{\varepsilon\to0}0$$

$$\left|i\varepsilon\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\theta e^{i\theta}}{\varepsilon^2e^{2i\theta}}\mathrm{d}\theta\right|\le\varepsilon\cdot\int_{\gamma_\varepsilon}\pi\mathrm{d}\theta\xrightarrow{\varepsilon\to0}0$$

所以 γ_ε 上的积分趋于零；对于 γ_R，因为

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{\log z}{z^2-1}\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma_R}\frac{\log R+\frac{\pi}{2}}{R^2-1}\cdot|\mathrm{d}z|=\frac{2\pi R(\log R+\frac{\pi}{2})}{R^2-1}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

对于 γ_2，它的参数方程为 $z=iy,y\in[R,\varepsilon]$，所以

$$\int_{\gamma_2}f(z)\mathrm{d}z=\int_R^\varepsilon\frac{\log y+\frac{\pi}{2}}{-y^2-1}i\mathrm{d}y=i\int_\varepsilon^R\frac{\log y+\frac{\pi i}{2}}{y^2+1}\mathrm{d}y$$

对于 γ_1，它的参数方程为 $z=x,x\in[\varepsilon,R]$，所以

$$\int_{\gamma_1}f(z)\mathrm{d}z=\int_\varepsilon^R\frac{\log x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

令 $R\to\infty,\varepsilon\to0$，则

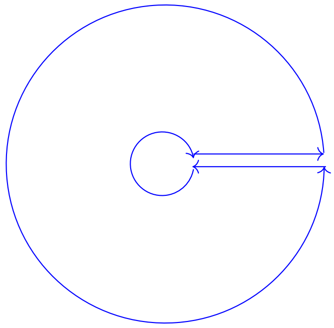
$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y+i\int_0^{+\infty}\frac{\log y}{1+y^2}\mathrm{d}y=0$$

对比实部得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\arctan y\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}$$

□

T1(18)



解 考虑 $f(z)=\frac{\log^2 z}{z^2+2z+2}$，取在正实轴上取正值的那个分支；考虑如图所示的围道，内圆 γ_ε，外圆 γ_R，上面一条直线记为 γ_1，下面一条直线记为 γ_2，当 R 足够大时，$f(z)$ 有两个一阶极点 $-1+i,-1-i$，由留数定理

$$\left(\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\gamma_R}+\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,-1+i)+2\pi i\mathrm{Res}(f,-1-i)$$

首先

$$\begin{cases}\mathrm{Res}(f,-1+i)=\frac{\log^2(-1+i)}{2(-1+i)+2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\log 2+\frac{3}{4}\pi i\right)^2}{2i}\\ \mathrm{Res}(f,-1-i)=\frac{\log^2(-1-i)}{2(-1-i)+2}=-\frac{\left(\frac{1}{2}\log 2+\frac{5}{4}\pi i\right)^2}{2i}\end{cases}$$

故

$$2\pi i[\mathrm{Res}(f,-1+i)+\mathrm{Res}(f,-1-i)]=\pi^3-\frac{\pi^2 i}{2}\log 2$$

对于 γ_ε，因为当 ε 足够小时，$|z^2+2z+2|\geq 1$，所以

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log z}{z^2+2z+2}\mathrm{d}z\right|\leq\int_0^{2\pi}|\log\varepsilon+i\theta|^2\cdot\varepsilon\mathrm{d}\theta\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$$

对于 γ_R，因为

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{\log z}{z^2+2z+2}\mathrm{d}z\right|\leq\int_0^{2\pi}\left|\frac{(\log R+2\pi)^2}{R^2+2R+2}\right|\cdot|\mathrm{d}z|=\frac{2\pi R(\log R+2\pi)^2}{R^2+2R+2}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

对于 $\gamma_1\cup\gamma_2$，因为在 γ_1 上 $\log z=\log x$，在 γ_2 上 $\log z=\log x+2\pi i$，所以

$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=\int_\varepsilon^R\frac{\log^2 x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x+\int_R^\varepsilon\frac{(\log x+2\pi i)^2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^R\frac{4\pi^2-4\pi i\log x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$ 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{4\pi^2-4\pi i\log x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\pi^3-\frac{\pi^2 i}{2}\log 2$$

对比虚部得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\log 2$$

□